Оглавление

Занятие 1. Элементы комбинаторики

Контрольные вопросы и задания

Сформулируйте основной принцип комбинаторики (правило умножения).

Если множества $A_1, ..., A_m$ содержат соответственно $n_1, ..., n_m$ элементов, то количество m-мерных векторов, которые получают выбором по одному элементу из каждого множества равно $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$.

Что называется сочетанием из n элементов по k?

В комбинаторике сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов.

Чему равно число сочетаний из n элементов по k?

Если некоторое множество содержит n элементов, то количество её k-элементных подмножеств равно

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)! = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Считается, что $0! = 1$.

Что называется сочетанием с повторениями из n элементов по k?

Сочетанием (комбинацией) с повторениями называется набор из n элементов, каждый из которых может быть одного из k типов.

Чему равно число сочетаний с повторениями из n элементов по k?

Количество разных комбинаций из элементов n типов по k с повторениями равно

$$C_n^k = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^{n}.$$

Что называется размещением из n элементов по k?

Размещения из n элементов по k — это упорядоченные k-элементные подмножества множества, которое состоит из n элементов.

Чему равно число размещений из n элементов по k?

Количество размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = k!C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Чему равно число перестановок множества из n элементов?

Количество перестановок равно $n!$.

Чему равно число способов разбиения множества из n элементов на m непересекающихся неупорядоченных подмножеств, которые содержат соответственно $k_1, ..., k_m$ элементов?

Первое подмножество содержит k_1 элемент. Количество комбинаций, которыми можно выбрать эти элементы, равно $C_n^{k_1}$. Второе подмножество содержит k_2 элементов, тогда его элементы можно выбрать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами. Подмножество под номером m содержит k_m элементов. Эти элементы можно выбрать из оставшихся $(n-k_1-k_2-...-k_{m-1})$ $C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. Число способов разбиения множества из n элементов на m непересекающихся неупорядоченных подмножеств равно

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot ... \cdot C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} = \prod_{i=1}^{m} C^{k_i}_{n-\sum\limits_{j=0}^{i-1} k_j}.$$

Так как

$$n = k_1 + k_2 + ... + k_m = \sum_{i=1}^{m} k_i = K_i,$$

то произведение можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i}.$$

Домашние задачи

1.16.

Задание. Подсчитать, сколько трёхзначных чисел можно записать с помощью: а) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5; б) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из цифр использовать не больше одного раза.

Решение. Трёхзначное число можно рассматривать как трёхмерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества

$$A_1 = 1, 2, 3, 4, 5$$

(запись числа не может начинаться с 0).

а) На остальных позициях может стоять любая цифра, то есть

$$A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i = 2, 3.$$

Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ трёхзначных чисел.

б) На остальных позициях могут стоять любые цифры (кроме тех, что стояли на предыдущих позициях). Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ трёхзначных чисел.

1.17.

Задание. Подсчитать количество пятизначных чисел, которые делятся на 5.

Решение. Пятизначное число можно рассматривать как пятимерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества

$$A_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

(запись числа не может начинаться с 0), а на остальных позициях (кроме последней) может стоять любая цифра, то есть

$$A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i = 2, 3, 4.$$

На последней позиции может стоять цифра из множества $A_5 = 0, 5$ (чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5). Отсюда имеем, что можно составить $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$ пятизначных чисел, которые делятся на 5.

1.18.

Задание. Замок компьютерного центра состоит из пяти кнопок, пронумерованных от 1 до 5. Чтобы открыть замок, необходимо первые две определённые кнопки нажать одновременно, а потом одну за другой нажать другие три кнопки в определённой последовательности. Подсчитать количество способов закодировать вход в компьютерный центр.

Решение. Рассмотрим 3 случая:

а) сначала необходимо нажать две разные кнопки, далее их отпускают, и все остальные кнопки могут быть любыми;

б) первые две кнопки держатся нажатыми, следующие кнопки не могут быть такими, как первые две;

в) нельзя нажать одну и ту же кнопку больше одного раза (кнопки остаются нажатыми).

Количество способов нажать первые две кнопки равна количеству двухэлементных подмножеств в множестве из пяти элементов, то есть

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10.$$

В случае а) количество способов закодировать вход в компьютерный центр равно

$$C_5^2 \cdot 5^3 = 1250.$$

Общая формула: $C_N^n \cdot N^m$, где N — количество кнопок, n кнопок нажимаются вместе, а затем m кнопок — по очереди.

В случае б) после нажатия двух кнопок, остаётся только 3 кнопки, которые необходимо нажать в правильном порядке, поэтому количество способов по предыдущей формуле равно

$$C_5^2 \cdot 3^3 = 270.$$

В случае в) все кнопки должны быть нажаты один раз, поэтому количество способов закодировать вход равно

$$C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60.$$

1.19.

Задание. Колоду игральных карт (52 карты, 4 масти по 13 карт в каждой) тщательно перетасовали. Подсчитать количество способов выбрать из неё 6 карт без возвращения так, чтобы среди них: а) был пиковый король; б) были представители всех мастей; в) было ровно 5 карт одной масти.

Решение.

а) Выбрать пикового короля есть только один способ. Остальные 6 карт могут быть любыми из оставшихся 51 карты. Выбрать эти 5 карт можно C_{51}^5 способами. Отсюда имеем, что из колоды можно выбрать 6 карт, среди которых был бы пиковый король, $1 \cdot C_{51}^5$ числом способов.

б) Сначала выберем по одной карте каждой масти. Количество способов выбрать одну карту определённой масти равно C_{13}^1, так как имеется 13 карт каждой масти. Так как всего есть 4 масти, то нужно выбрать 4 карты (по одной карте каждой масти). Тогда количество способов выбрать 4 карты разных мастей равно

$$C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 = \left(C_{13}^1\right)^4.$$

Остаётся выбрать две произвольные карты из оставшихся. После выбора четырёх карт разных мастей в колоде осталось $52 - 4 = 48$ карт. Число способов выбрать из них две карты равно C_{48}^2. Отсюда имеем, что количество способов выбрать из данной колоды 6 карт без возвращения таким образом, чтобы среди них были представители всех мастей, равно

$$\left(C_{13}^1\right) \cdot C_{48}^2.$$

в) Сначала нужно выбрать 5 карт одной масти. В одной масти 13 карт, следовательно число способов выбрать 5 карт одной масти равно C_{13}^5. Так как всего мастей 4, и нам не важно, какой именно масти будут 5 вытянутых карт (главное, чтобы одной), то число способов будет равно

$$4 \cdot C_{13}^5.$$

Шестая карта должна быть любой, но отличатся с предыдущими пятью мастью, то есть её можно выбрать из $52 - 13 = 39$ карт. Число способов это сделать равно C_{39}^1. Отсюда имеем, что число способов выбрать из колоды карт 6 карт так, чтобы среди них было ровно 5 карт одной масти, равно

$$4 \cdot C_{13}^5 \cdot C_{39}^1.$$

1.20.

Задание. Сколькими способами можно разместить 10 одинаковых открыток в 4 почтовых ящиках так, чтобы: а) не было пустых ящиков; б) во втором ящике было 3 открытки.

Решение. Пусть мы можем рассматривать несколько открыток как одно целое и раскладывать как одну большую открытку. Можем посчитать количество возможных разложений m склеенных открыток так же, как и одной обычной. Теперь мы говорим, что в ящике может находиться только одна открытка, либо обычная, либо большая, состоящая из нескольких открыток.

Склеим все m открыток в одну. Вариантов разложить их в n ящиков C_n^1.

Теперь m-1 открытку рассматриваем как одну, и одна открытка остаётся сама по себе. Вариантов разложить их в n ящиков C_n^2.

Чтобы узнать, сколько есть способов разложить m склеенных открыток, и сколько m-1 склеенную с одной обычной, нужно сложить эти 2 результата:

$$C_n^1 + C_n^2.$$

Дальше склеиваем m-2 открытки и рассматриваем остальные две. Остальные две можно склеить и не склеивать. Значит, нужно взять разложение 2 и 3 открыток (одной склеенной, состоящей из m-2 открыток и одной, склеенной из двух, а так же одной склеенной, состоящей из m-2 открыток и двух отдельных открыток) по n ящикам. Когда склеиваем m-2 открытки и две остальные тоже склеиваем, вариантов разложения будет C_n^2. Когда две оставшиеся раскладываем отдельно, то C_n^3. Можем либо склеивать две, либо не склеивать, поэтому есть

$$C_n^2 + C_n^3$$

способа разложить m-2 склеенные открытки и ещё две, склеенные или нет.

а) Рассмотрим случай, когда в каждый ящик должна быть помещена хотя бы одна открытка. Используем метод перегородок. Выложим открытки в ряд. Для определения расклада открыток по четырём почтовым ящикам разделим ряд тремя перегородками на 4 группы: первая группа для первого ящика, вторая — для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки открыток по ящикам равно числу способов разложения трёх перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 9 мест (между 10 открытками — 9 промежутков). Поэтому число возможных расположений равно C_9^3.

б) Рассмотрим случай, когда во второй ящик должны быть помещены 3 открытки. Поскольку открытки одинаковые, то во второй ящик можно сразу положить 3 открытки. В этом случае нужно распределить $10 - 3 = 7$ одинаковых открыток между тремя почтовыми ящиками.

Используем метод перегородок. Рассмотрим ряд из 9 предметов: 7 одинаковых открыток и 2 одинаковые перегородки, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки открыток по ящикам: в первый ящик попадают открытки, расположенные левее первой перегородки, во второй — расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками открыток может и не быть). Поэтому число способов раскладки открыток по ящикам равно числу различных рядов из 7 открыток и 2 перегородок, т.е равно C_9^2 (ряд определяется теми двумя местами из 9, на которых стоят перегородки).

1.21.

Задание. Сколькими способами можно распределить 10 путёвок среди 10 студентов (по одной каждому), если: а) все путёвки разные; б) есть 4 путёвки одного типа и 6 — другого?

Решение.

а) Количество возможных перестановок 10 разных путёвок равно 10!.

б) Если будем считать все 10 элементов перестановки с повторениями различными, то всего различных вариантов перестановок 10 путёвок —

$$(4+6)! = 10!.$$

Однако среди этих перестановок не все различны. Все путёвки одного типа можно переставлять местами друг с другом, и от этого перестановка не изменится. Точно так же, можем переставлять путёвки другого типа. Таким образом, перестановка может быть записана 4!6! способами. Следовательно, число различных перестановок с повторениями равно

$$\frac{(4+6)!}{4!6!} = \frac{10!}{4!6!}.$$

1.22.

Задание. Доказать, что количество неубывающих путей на r-мерной целочисленной решётке

$$\mathbb{Z}_+^r = (i_1, ..., i_r) : i_1, ..., i_r = 0, 1, 2, ...,$$

которые начинаются в точке $(0, ..., 0)$ и приводят в точку $(n_1, ..., n_r)$, равно

$$C_N(n_1, ..., n_r) = \frac{N!}{n_1!...n_r!},$$

где $N = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$. (Путь считается неубывающим, если на каждом шаге изменяется только одна координата, увеличиваясь на единицу.)

1.23.

Задание. Из 100 студентов английский язык знают 28, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного языка?