

# Оглавление

<b>Занятие 1. Элементы комбинаторики</b>	<b>1</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	3
Домашние задачи . . . . .	4



# Занятие 1. Элементы комбинаторики

## Контрольные вопросы и задания

**Сформулируйте основной принцип комбинаторики (правило умножения).**

Если множества  $A_1, \dots, A_m$  содержат соответственно  $n_1, \dots, n_m$  элементов, то количество  $m$ -мерных векторов, которые получают выбором по одному элементу из каждого множества равно  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ .

**Что называется сочетанием из  $n$  элементов по  $k$ ?**

В комбинаторике сочетанием из  $n$  по  $k$  называется набор  $k$  элементов, выбранных из данного множества, содержащего  $n$  различных элементов.

**Чему равно число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ ?**

Если некоторое множество содержит  $n$  элементов, то количество её  $k$ -элементных подмножеств равно

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Считается, что  $0! = 1$ .

**Что называется сочетанием с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ ?**

Сочетанием (комбинацией) с повторениями называется набор из  $n$  элементов, каждый из которых может быть одного из  $k$  типов.

**Чему равно число сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ ?**

Количество разных комбинаций из элементов  $n$  типов по  $k$  с повторениями равно

$$C_n^k = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^m.$$

**Что называется размещением из  $n$  элементов по  $k$ ?**

Размещения из  $n$  элементов по  $k$  — это упорядоченные  $k$ -элементные подмножества множества, которое состоит из  $n$  элементов.

**Чему равно число размещений из  $n$  элементов по  $k$ ?**

Количество размещений из  $n$  элементов по  $k$  равно

$$A_n^k = k!C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

**Чему равно число перестановок множества из  $n$  элементов?**

Количество перестановок равно  $n!$ .

**Чему равно число способов разбиения множества из  $n$  элементов на  $m$  непересекающихся неупорядоченных подмножеств, которые содержат соответственно  $k_1, \dots, k_m$  элементов?**

Первое подмножество содержит  $k_1$  элемент. Количество комбинаций, которыми можно выбрать эти элементы, равно  $C_n^{k_1}$ . Второе подмножество содержит  $k_2$  элементов, тогда его элементы можно выбрать  $C_{n-k_1}^{k_2}$  способами. Подмножество под номером  $m$  содержит  $k_m$  элементов. Эти элементы можно выбрать из оставшихся  $(n - k_1 - k_2 - \dots - k_{m-1})$   $C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m}$  способами. Число способов разбиения множества из  $n$  элементов на  $m$  непересекающихся неупорядоченных подмножеств равно

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m} = \prod_{i=1}^m C_{n-\sum_{j=0}^{i-1} k_j}^{k_i}.$$

Так как

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_m = \sum_{i=1}^m k_i = K_i,$$

то произведение можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^m C_{K_i}^{k_i}.$$

## Домашние задачи

### 1.16.

*Задание.* Подсчитать, сколько трёхзначных чисел можно записать с помощью: а) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5; б) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из цифр использовать не больше одного раза.

*Решение.* Трёхзначное число можно рассматривать как трёхмерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества

$$A_1 = 1, 2, 3, 4, 5$$

(запись числа не может начинаться с 0).

а) На остальных позициях может стоять любая цифра, то есть

$$A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i = 2, 3.$$

Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить  $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$  трёхзначных чисел.

б) На остальных позициях могут стоять любые цифры (кроме тех, что стояли на предыдущих позициях). Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить  $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$  трёхзначных чисел.

### 1.17.

*Задание.* Подсчитать количество пятизначных чисел, которые делятся на 5.

*Решение.* Пятизначное число можно рассматривать как пятимерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества

$$A_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

(запись числа не может начинаться с 0), а на остальных позициях (кроме последней) может стоять любая цифра, то есть

$$A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i = 2, 3, 4.$$

На последней позиции может стоять цифра из множества  $A_5 = 0, 5$  (чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5). Отсюда имеем, что можно составить  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$  пятизначных чисел, которые делятся на 5.

### 1.18.

*Задание.* Замок компьютерного центра состоит из пяти кнопок, пронумерованных от 1 до 5. Чтобы открыть замок, необходимо первые две определённые кнопки нажать одновременно, а потом одну за другой нажать другие три кнопки в определённой последовательности. Подсчитать количество способов закодировать вход в компьютерный центр.

*Решение.* Рассмотрим 3 случая:

- а) сначала необходимо нажать две разные кнопки, далее их отпускают, и все остальные кнопки могут быть любыми;
- б) первые две кнопки держатся нажатыми, следующие кнопки не могут быть такими, как первые две;
- в) нельзя нажать одну и ту же кнопку больше одного раза (кнопки остаются нажатыми).

Количество способов нажать первые две кнопки равна количеству двух-элементных подмножеств в множестве из пяти элементов, то есть

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

В случае а) количество способов закодировать вход в компьютерный центр равно

$$C_5^2 \cdot 5^3 = 1250.$$

Общая формула:  $C_N^n \cdot N^m$ , где  $N$  — количество кнопок,  $n$  кнопок нажимаются вместе, а затем  $m$  кнопок — по очереди.

В случае б) после нажатия двух кнопок, остаётся только 3 кнопки, которые необходимо нажать в правильном порядке, поэтому количество способов по предыдущей формуле равно

$$C_5^2 \cdot 3^3 = 270.$$

В случае в) все кнопки должны быть нажаты один раз, поэтому количество способов закодировать вход равно

$$C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60.$$

### 1.19.

*Задание.* Колоду игральных карт (52 карты, 4 масти по 13 карт в каждой) тщательно перетасовали. Подсчитать количество способов выбрать из неё 6 карт без возвращения так, чтобы среди них: а) был пиковый король; б) были представители всех мастей; в) было ровно 5 карт одной масти.

*Решение.*

а) Выбрать пикового короля есть только один способ. Остальные 6 карт могут быть любыми из оставшихся 51 карты. Выбрать эти 5 карт можно  $C_{51}^5$  способами. Отсюда имеем, что из колоды можно выбрать 6 карт, среди которых был бы пиковый король,  $1 \cdot C_{51}^5$  числом способов.

б) Сначала выберем по одной карте каждой масти. Количество способов выбрать одну карту определённой масти равно  $C_{13}^1$ , так как имеется 13 карт каждой масти. Так как всего есть 4 масти, то нужно выбрать 4 карты (по одной карте каждой масти). Тогда количество способов выбрать 4 карты разных мастей равно

$$C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 = (C_{13}^1)^4.$$

Остаётся выбрать две произвольные карты из оставшихся. После выбора четырёх карт разных мастей в колоде осталось  $52 - 4 = 48$  карт. Число способов выбрать из них две карты равно  $C_{48}^2$ . Отсюда имеем, что количество способов выбрать из данной колоды 6 карт без возвращения таким образом, чтобы среди них были представители всех мастей, равно

$$(C_{13}^1) \cdot C_{48}^2.$$

в) Сначала нужно выбрать 5 карт одной масти. В одной масти 13 карт, следовательно число способов выбрать 5 карт одной масти равно  $C_{13}^5$ . Так как всего мастей 4, и нам не важно, какой именно масти будут 5 вытянутых карт (главное, чтобы одной), то число способов будет равно

$$4 \cdot C_{13}^5.$$

Шестая карта должна быть любой, но отличаться с предыдущими пятью мастью, то есть её можно выбрать из  $52 - 13 = 39$  карт. Число способов это сделать равно  $C_{39}^1$ . Отсюда имеем, что число способов выбрать из колоды карт 6 карт так, чтобы среди них было ровно 5 карт одной масти, равно

$$4 \cdot C_{13}^5 \cdot C_{39}^1.$$

## 1.20.

*Задание.* Сколькими способами можно разместить 10 одинаковых открыток в 4 почтовых ящиках так, чтобы: а) не было пустых ящиков; б) во втором ящике было 3 открытки.

*Решение.* Будем рассматривать несколько открыток как одно целое и раскладывать как одну большую открытку. Можем посчитать количество возможных разложений  $m$  склеенных открыток так же, как и одной обычной. Теперь мы говорим, что в ящике может находиться только одна открытка, либо обычная, либо большая, состоящая из нескольких открыток.

а) Рассмотрим случай, когда в каждый ящик должна быть помещена хотя бы одна открытка. Используем метод перегородок. Выложим открытки в ряд. Для определения расклада открыток по четырём почтовым ящикам разделим ряд тремя перегородками на 4 группы: первая группа для первого ящика, вторая — для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки открыток по ящикам равно числу способов разложения трёх перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 9 мест (между 10 открытками — 9 промежутков). Поэтому число возможных расположений равно  $C_9^3$ .

б) Рассмотрим случай, когда во второй ящик должны быть помещены 3 открытки. Поскольку открытки одинаковые, то во второй ящик можно сразу положить 3 открытки. В этом случае нужно распределить  $10 - 3 = 7$  одинаковых открыток между тремя почтовыми ящиками.

Используем метод перегородок. Рассмотрим ряд из 9 предметов: 7 одинаковых открыток и 2 одинаковые перегородки, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки открыток по ящикам: в первый ящик попадают открытки, расположенные левее первой перегородки, во второй — расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками открыток может и не быть). Поэтому число способов раскладки открыток по ящикам равно числу различных рядов из 7 открыток и 2 перегородок, т.е. равно  $C_9^2$  (ряд определяется теми двумя местами из 9, на которых стоят перегородки).

**1.21.**

*Задание.* Сколькими способами можно распределить 10 путёвок среди 10 студентов (по одной каждому), если: а) все путёвки разные; б) есть 4 путёвки одного типа и 6 — другого?

*Решение.*

а) Количество возможных перестановок 10 разных путёвок равно  $10!$ .

б) Если будем считать все 10 элементов перестановки с повторениями различными, то всего различных вариантов перестановок 10 путёвок —

$$(4 + 6)! = 10!.$$

Однако среди этих перестановок не все различны. Все путёвки одного типа можно переставлять местами друг с другом, и от этого перестановка не изменится. Точно так же, можем переставлять путёвки другого типа. Таким образом, перестановка может быть записана  $4!6!$  способами. Следовательно, число различных перестановок с повторениями равно

$$\frac{(4 + 6)!}{4!6!} = \frac{10!}{4!6!}.$$

**1.22.**

*Задание.* Доказать, что количество неубывающих путей на  $r$ -мерной целочисленной решётке

$$\mathbb{Z}_+^r = (i_1, \dots, i_r) : i_1, \dots, i_r = 0, 1, 2, \dots,$$

которые начинаются в точке  $(0, \dots, 0)$  и приводят в точку  $(n_1, \dots, n_r)$ , равно

$$C_N(n_1, \dots, n_r) = \frac{N!}{n_1! \dots n_r!},$$

где  $N = \sum_{i=1}^r n_i$ . (Путь считается неубывающим, если на каждом шаге изменяется только одна координата, увеличиваясь на единицу.)

**1.23.**

*Задание.* Из 100 студентов английский язык знают 28, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного языка?

*Решение.* Условие задачи представлено на рисунке 1 в виде диаграммы Эйлера-Венна.

Сначала найдём, сколько студентов знает хотя бы один язык. Это есть мощность (количество элементов) объединения трёх множеств: Английский, Немецкий и Французский, которые обозначим первыми буквами. Мощность



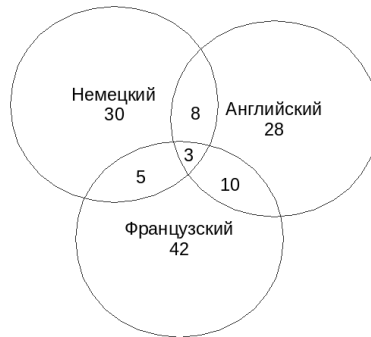


Рис. 1: Диаграмма Эйлера-Венна для задачи 1.23

объединения трёх множеств можно найти как сумму мощностей этих множеств, но, так как они пересекаются, необходимо отнять мощности их пересечений и добавить пересечение всех трёх множеств, потому что его отняли дважды. Имеем

$$\begin{aligned}
 |H \cup A \cup \Phi| &= |H| + |A| + |\Phi| - |H \cap A| - |A \cap \Phi| - |H \cap \Phi| + |H \cap A \cap \Phi| = \\
 &= 30 + 42 + 28 - 5 - 8 - 10 + 3 = 80.
 \end{aligned}$$

Все остальные студенты из ста не знают ни одного языка. Их  $100 - 80 = 20$ .