Оглавление

Занятие 1. Элементы комбинаторики

Контрольные вопросы и задания

Сформулируйте основной принцип комбинаторики (правило умножения).

Если множества $A_1, ..., A_m$ содержат соответственно $n_1, ..., n_m$ элементов, то количество m-мерных векторов, которые получают выбором по одному элементу из каждого множества равно $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$.

Что называется сочетанием из n элементов по k?

В комбинаторике сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов.

Чему равно число сочетаний из n элементов по k?

Если некоторое множество содержит n элементов, то количество её k-элементных подмножеств равно $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)! = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$. Считается, что $0! = 1$.

Что называется сочетанием с повторениями из n элементов по k?

Сочетанием (комбинацией) с повторениями называется набор из n элементов, каждый из которых может быть одного из k типов.

Чему равно число сочетаний с повторениями из n элементов по k?

Количество разных комбинаций из элементов n типов по k с повторениями равно $C_n^k = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^{n}$.

Что называется размещением из n элементов по k?

Размещения из n элементов по k — это упорядоченные k-элементные подмножества множества, которое состоит из n элементов.

Чему равно число размещений из n элементов по k?

Количество размещений из n элементов по k равно $A_n^k = k!C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.

Чему равно число перестановок множества из n элементов?

Количество перестановок равно $n!$.

Чему равно число способов разбиения множества из n элементов на m непересекающихся неупорядоченных подмножеств, которые содержат соответственно $k_1, ..., k_m$ элементов?

Первое подмножество содержит k_1 элемент. Количество комбинаций, которыми можно выбрать эти элементы, равно $C_n^{k_1}$. Второе подмножество содержит k_2 элементов, тогда его элементы можно выбрать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами. Подмножество под номером m содержит k_m элементов. Эти элементы можно выбрать из оставшихся $(n-k_1-k_2-...-k_{m-1})$ $C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. Число способов разбиения множества из n элементов на m непересекающихся неупорядоченных подмножеств равно $C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot ... \cdot C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} = \prod\limits_{i=1}^{m} C^{k_i}_{n-\sum\limits_{j=0}^{i-1} k_j}$. Так как $n = k_1 + k_2 + ... + k_m = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i = K_i$, то произведение можно записать в виде $\prod\limits_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i}$.

Домашние задачи

1.16. Подсчитать, сколько трёхзначных чисел можно записать с помощью: а) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5; б) цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из цифр использовать не больше одного раза

Решение. Трёхзначное число можно рассматривать как трёхмерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества $A_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ (запись числа не может начинаться с 0).

а) На остальных позициях может стоять любая цифра, то есть $A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i = 2, 3$. Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ трёхзначных чисел.

б) На остальных позициях могут стоять любые цифры (кроме тех, что стояли на предыдущих позициях). Отсюда имеем, что из указанных цифр можно составить $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ трёхзначных чисел.

1.17. Подсчитать количество пятизначных чисел, которые делятся на 5

Решение. Пятизначное число можно рассматривать как пятимерный вектор. Первой компонентой этого вектора может быть любая цифра из множества $A_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (запись числа не может начинаться с 0), а на остальных позициях (кроме последней) может стоять любая цифра, то есть $A_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i = 2, 3, 4$. На последней позиции может стоять цифра из множества $A_5 = 0, 5$ (чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5). Отсюда имеем, что можно составить $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$ пятизначных чисел, которые делятся на 5.

1.18. Замок компьютерного центра состоит из пяти кнопок, пронумерованных от 1 до 5. Чтобы открыть замок, необходимо первые две определённые кнопки нажать одновременно, а потом одну за другой нажать другие три кнопки в определённой последовательности. Подсчитать количество способов закодировать вход в компьютерный центр

Решение. Рассмотрим 3 случая:

а) сначала необходимо нажать две разные кнопки, далее их отпускают, и все остальные кнопки могут быть любыми;

б) первые две кнопки держатся нажатыми, следующие кнопки не могут быть такими, как первые две;

в) нельзя нажать одну и ту же кнопку больше одного раза (кнопки остаются нажатыми).

Количество способов нажать первые две кнопки равна количеству двухэлементных подмножеств в множестве из пяти элементов, то есть $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

В случае а) количество способов закодировать вход в компьютерный центр равно $C_5^2 \cdot 5^3 = 1250$. Общая формула: $C_N^n \cdot N^m$, где N — количество кнопок, n кнопок нажимаются вместе, а затем m кнопок — по очереди.

В случае б) после нажатия двух кнопок, остаётся только 3 кнопки, которые необходимо нажать в правильном порядке, поэтому количество способов по предыдущей формуле равно $C_5^2 \cdot 3^3 = 270$.

В случае в) все кнопки должны быть нажаты один раз, поэтому количество способов закодировать вход равно $C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60$.