

Semestrální projekt do Teorie obvodů

2. ledna 2011

Autor: Petr Dvořáček, xdvora0n@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačních Technologií
Vysoké Učení Technické v Brně

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Tabulka zadání	1
2	První příklad	2
2.1	Zadání úlohy	2
2.2	Řešení	2
3	Druhý příklad	5
3.1	Zadání úlohy	5
3.2	Řešení	5
4	Třetí příklad	8
4.1	Zadání úlohy	8
4.2	Řešení	8
5	Čtvrtý příklad	10
5.1	Zadání úlohy	10
5.2	Řešení	10
6	Pátý příklad	13
6.1	Zadání úlohy	13
6.2	Řešení	13
7	Šestý příklad	15
7.1	Zadání úlohy	15
7.2	Řešení	15
8	Shrnutí výsledků	17

1 Úvod

Tento dokument popisuje řešení semestrálního projektu pro předmět Teorie obvodů. V každé kapitole se věnuji řešení jednotlivých úloh. V závěru se nachází tabulka všech výsledků.

1.1 Tabulka zadání

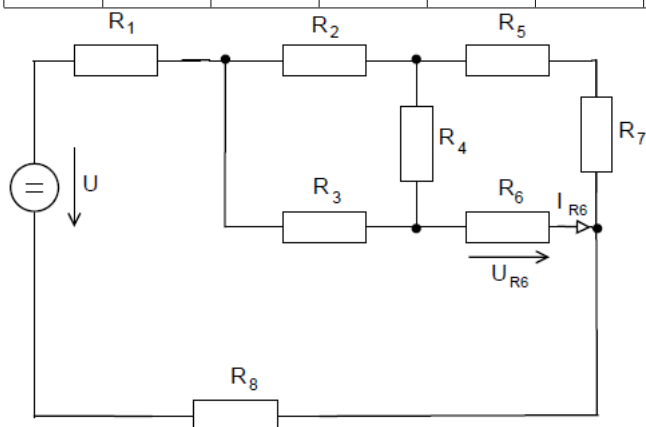
login	xdvora0n
1. příklad	B
2. příklad	F
3. příklad	C
4. příklad	B
5. příklad	F
6. příklad	C

2 První příklad

2.1 Zadání úlohy

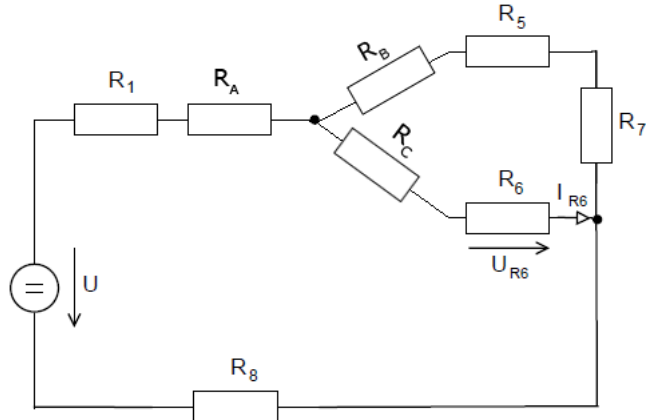
Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

$U[V]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$	$R_6[\Omega]$	$R_7[\Omega]$	$R_8[\Omega]$
95	650	730	340	330	410	830	340	220



2.2 Řešení

V prvním kroku se transfiguruje trojúhelníkové zapojení rezistorů R_2 , R_3 a R_4 na hvězdu.

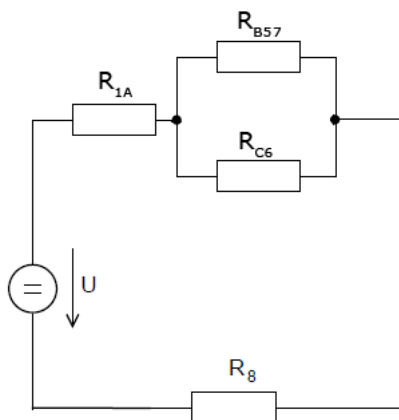


$$R_A = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 177.285714\Omega \quad (1)$$

$$R_B = \frac{R_2 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 172.071428\Omega \quad (2)$$

$$R_C = \frac{R_3 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 80.142857\Omega \quad (3)$$

V druhém kroku jsem sloučil rezistory v sérii.

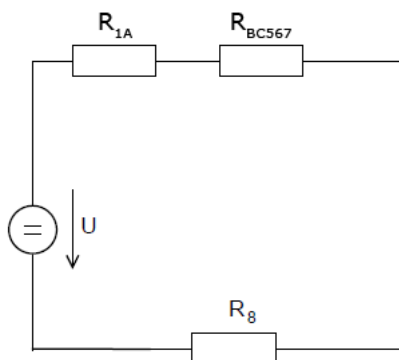


$$R_{A1} = R_1 + R_A = 827.285714\Omega \quad (4)$$

$$R_{B57} = R_B + R_5 + R_7 = 922.071428\Omega \quad (5)$$

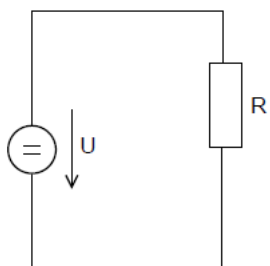
$$R_{C6} = R_C + R_6 = 910.142857\Omega \quad (6)$$

V třetím kroku jsem sloučil paralelní rezistory.



$$R_{BC567} = \frac{R_{B57} * R_{C6}}{R_{B57} + R_{C6}} = 458.034136\Omega \quad (7)$$

Sloučím rezistory v sérii a získám tak celkový odpor.



$$R = R_{A1} + R_{BC567} + R_8 = 1505.319870\Omega \quad (8)$$

Podle Ohmova zákona vypočítám proud.

$$I = \frac{U}{R} = 0.06310931A \quad (9)$$

Je důležité si uvědomit, že

$$U_{RBC567} = U_{R57} = U_{C6} \quad (10)$$

$$U_{C6} = R_{BC567} * I = 28.906311V \quad (11)$$

$$I_{RC6} = \frac{U_{RC6}}{R_{C6}} = 0.031760A \quad (12)$$

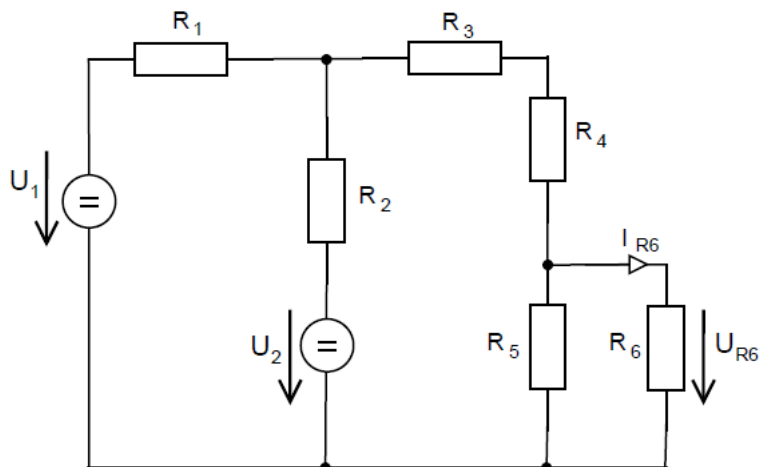
$$U_{R6} = I_{RC6} * R_6 = 26.360958V \quad (13)$$

3 Druhý příklad

3.1 Zadání úlohy

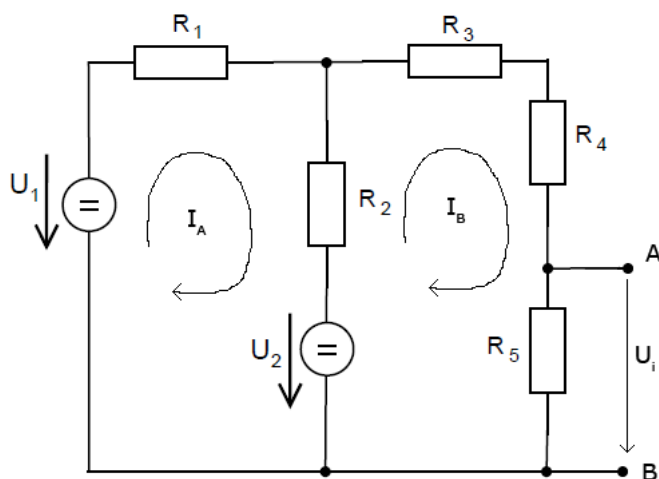
Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu Theveninovy věty.

$U_1[V]$	$U_2[V]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$	$R_6[\Omega]$
130	130	350	600	195	390	320	280



3.2 Řešení

Nejdříve vypočítám U_i na svorkách A a B. Jelikož v tomto obvodu se nachází více zdrojů, použiji pro výpočet napětí metodu smyčkových proudů.



Tím získám dvě rovnice.

$$R_1 * I_A + R_2 * (I_A - I_B) + U_2 - U_1 = 0 \quad (14)$$

$$R_3 * I_B + R_4 * I_B + R_5 * I_B - U_2 + R_2 * (I_B - I_A) = 0 \quad (15)$$

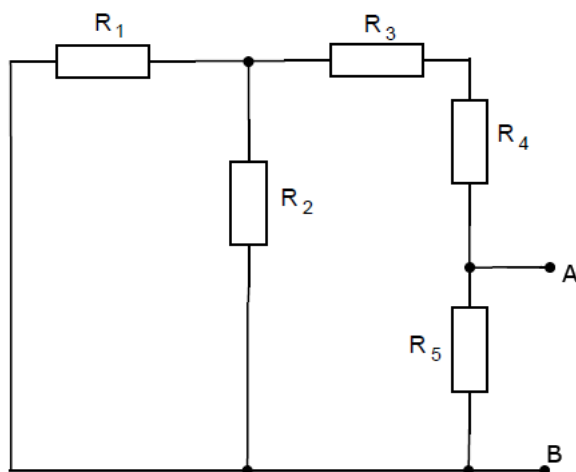
Vyřeším je jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Dostanu tak hodnoty I_A a I_B .

$$I_A = 0.0721423230A \quad (16)$$

$$I_B = 0.1154475345A \quad (17)$$

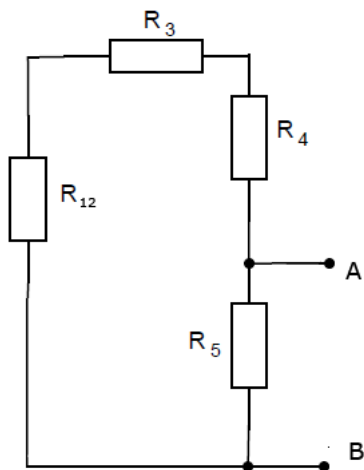
Aplikuji Ohmův zákon a získám U_i .

$$U_i = I_B * R_5 = 36.94321104V \quad (18)$$

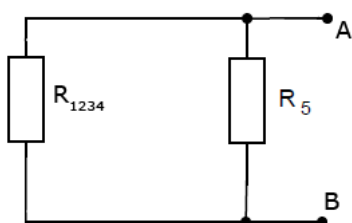


Dále potřebuji zjistím odpor R_i postupným zjednodušováním.

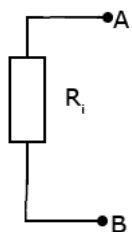
$$R_{12} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = 221.052631\Omega \quad (19)$$



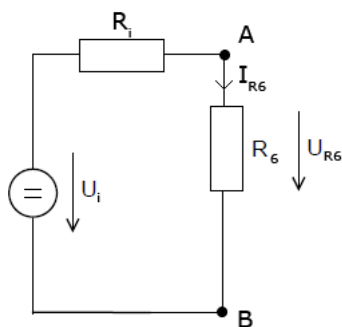
$$R_{1234} = R_{12} + R_3 + R_4 = 806.052631\Omega \quad (20)$$



$$R_i = \frac{R_{1234} * R_5}{R_{1234} + R_5} = 229.062865\Omega \quad (21)$$



Nyní znám hodnoty U_i a R_i .



$$I_{R6} = \frac{U_i}{R_i + R_6} = 0.072571A \quad (22)$$

$$U_{R6} = I_{R6} * R_6 = 20.31988542V \quad (23)$$

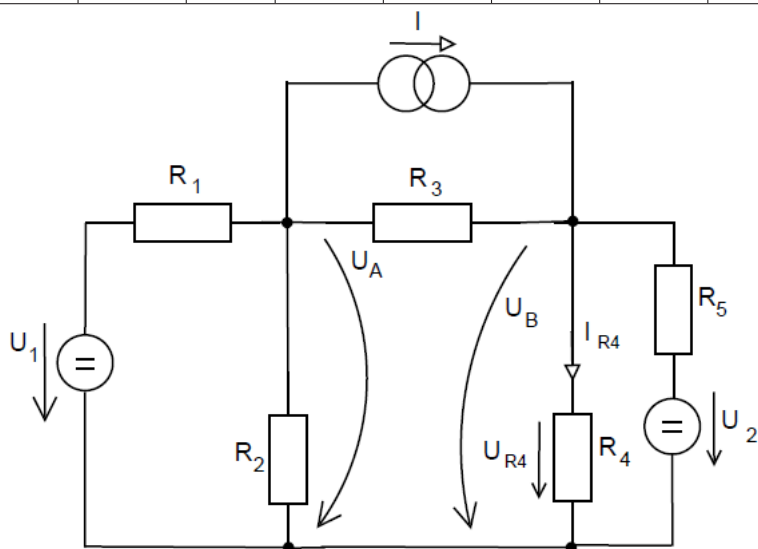
A to jsou výsledné hodnoty.

4 Třetí příklad

4.1 Zadání úlohy

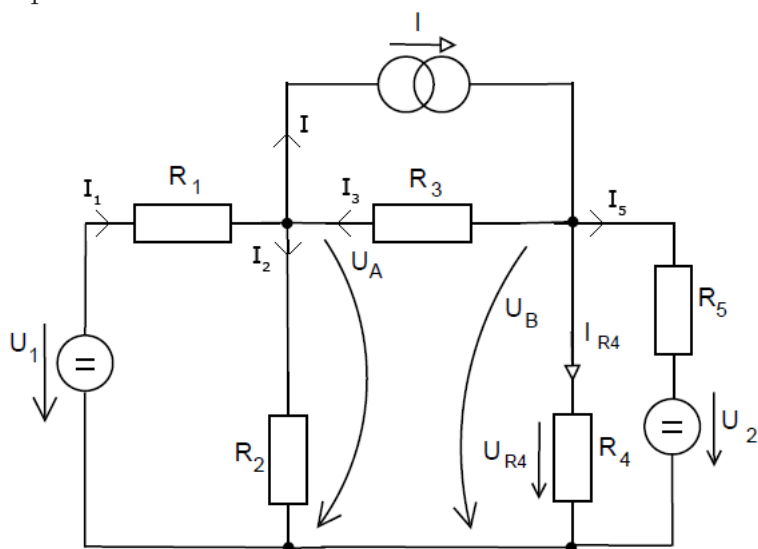
Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B).

$U_1[V]$	$U_2[V]$	$I[A]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$
110	105	0.75	440	310	560	200	300



4.2 Řešení

Nejdříve určím referenční uzly, pro které pak pomocí prvního Kirchhoffova zákona vytvořím rovnice proudů.



$$I_1 + I_3 = I + I_2 \quad (24)$$

$$I = I_3 + I_4 + I_5 \quad (25)$$

Určím napětí.

$$\begin{aligned}
I_1 * R_1 + U_A - U_1 &= 0 & I_1 &= \frac{U_1 - U_A}{R_1} \\
I_2 * R_2 - U_A &= 0 & I_2 &= \frac{U_A}{R_2} \\
-I_3 * R_3 - U_A + U_B &= 0 & I_3 &= \frac{U_B - U_A}{R_3} \\
I_4 * R_4 - U_B &= 0 & I_4 &= \frac{U_B}{R_4} \\
I_5 * R_5 + U_2 - U_B &= 0 & I_5 &= \frac{U_B - U_2}{R_5}
\end{aligned}$$

Dosadím to do předchozích rovnic.

$$\frac{U_1 - U_A}{R_1} + \frac{U_B - U_A}{R_3} = I + \frac{U_A}{R_2} \quad (26)$$

$$I = \frac{U_B - U_A}{R_3} + \frac{U_B}{R_4} + \frac{U_B - U_2}{R_5} \quad (27)$$

A vznikla mi soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Tentokrát jsou to napětí (U_A a U_B). K pozdějším výpočtům potřebujeme pouze U_B .

$$U_B = 100.960396V \quad (28)$$

A U_B je ekvivalentní k U_{R4} .

Použiji ohmův zákon a získám I_{R4} .

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = 0.504801A \quad (29)$$

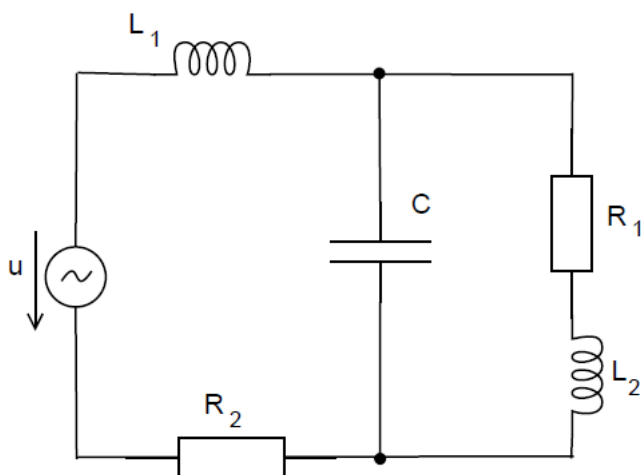
5 Čtvrtý příklad

5.1 Zadání úlohy

Pro napájecí napětí platí: $u = U * \sin(2 * \pi * f * t)$. Ve vzathu pro napětí na kondenzátoru: $u_C = U_C * \sin(2 * \pi * f * t + \varphi_C)$ určete $|U_C|$ a φ_C . Použijte metodu zjednodušování obvodu.

Pozn: Pomocný "směr šipky napájecího zdroje platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2 * \omega}$)."

$U[V]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$L_1[mH]$	$L_2[mH]$	$C[\mu F]$	$f[Hz]$
35	160	220	270	480	440	85



5.2 Řešení

Nejdříve vypočtu úhlovou frekvenci ω .

$$\omega = 2 * \pi * f = 534.0707512 \quad (30)$$

Výpočítám impedanci

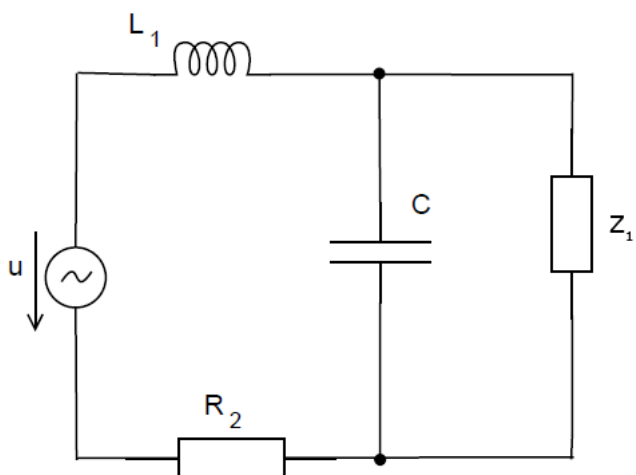
$$XL_1 = j * \omega * L_1 = 144.1991028j \quad (31)$$

$$XL_2 = j * \omega * L_2 = 256.3539606j \quad (32)$$

$$XC = j * \frac{-1}{\omega * C} = -4.255479761j \quad (33)$$

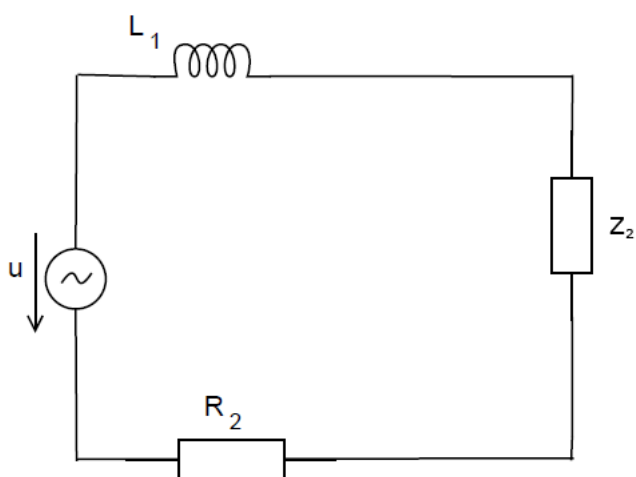
Zjednoduším obvod

$$Z_1 = R_1 + XL_2 = 160 + 256.3539606j \quad (34)$$



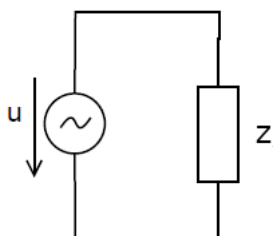
Zase zjednoduším obvod

$$Z_2 = \frac{Z_1 * X_C}{Z_1 + X_C} = 0.03249959472 - 4.306686627j \quad (35)$$



Celková impedance

$$Z = R_2 + XL_1 + Z_2 = 220.0324996 + 139.8924162j \quad (36)$$



Vypočítám proud pomocí Ohmova zákona a následně napětí U_{Z2} .

$$I = \frac{U}{Z} = 0.1132783608 - 0.07202019528j \quad (37)$$

$$U_{Z2} = I * Z_2 = -0.3064869111 - 0.4901950287j \quad (38)$$

Z předchozích obvodů lze vyčíst, že $U_C = U_{Z1} = U_{Z2}$. Vypočítám tedy absolutní hodnotu a úhel.

$$|U_C| = (Re^2 + Im^2)^{\frac{1}{2}} = 0.5781222992V \quad (39)$$

$$\tan\varphi = \frac{|Im|}{|Re|} \quad (40)$$

$$\varphi = 57.98495037 \quad (41)$$

Nachází se, ale ve třetím kvadrantu (imaginární i reálná část je záporná).

$$\varphi + 180 = 237.98495037 = 237^\circ 59' 5.82'' \quad (42)$$

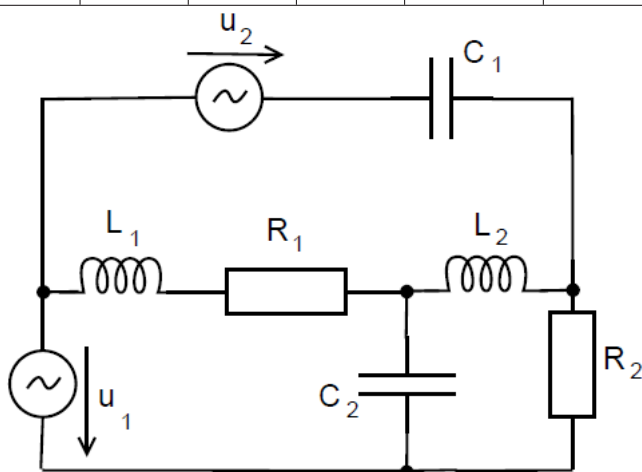
6 Pátý příklad

6.1 Zadání úlohy

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 * \sin(2 * \pi * f * t)$, $u_2 = U_2 * \sin(2 * \pi * f * t)$. Ve vzathu pro napětí na cívce L_2 : $u_{L_2} = U_{L_2} * \sin(2 * \pi * f * t + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocný "směr šipky napájecího zdroje platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2 * \omega}$)."

$U_1[V]$	$U_2[V]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$L_1[mH]$	$L_2[mH]$	$C_1[\mu F]$	$C_2[\mu F]$	$f[Hz]$
20	35	120	100	170	80	150	90	65



6.2 Řešení

Nejdříve vypočítám úhlovou frekvenci ω a impedanci XL_1 , XL_2 , XC_1 , XC_2 .

$$\omega = 2 * \pi * f = 408.4070450 \quad (43)$$

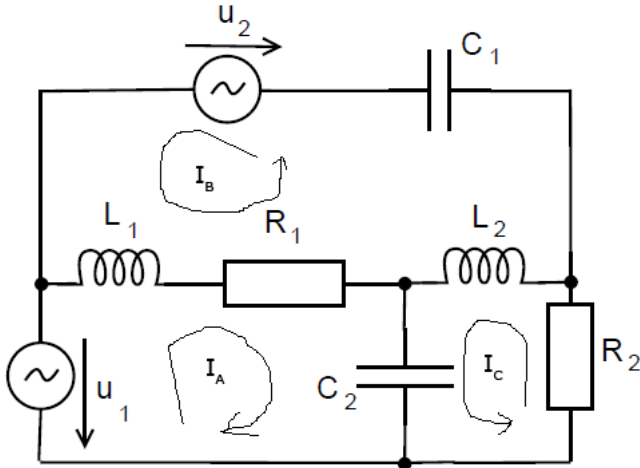
$$XL_1 = j * \omega * L_1 = 69.4219765j \quad (44)$$

$$XL_2 = j * \omega * L_2 = 32.67256360j \quad (45)$$

$$XC_1 = -j * \frac{1}{\omega * C_1} = -16.32358391j \quad (46)$$

$$XC_2 = -j * \frac{1}{\omega * C_2} = -27.20597318j \quad (47)$$

Určím smyčkové proudy.



A získám tak tři rovnice o třech neznámých.

$$XL_1 * (I_A + I_B) + R_1 * (I_A + I_B) + XC_2 * (I_A + I_C) - U_1 = 0 \quad (48)$$

$$XL_1 * (I_B + I_A) + R_1 * (I_B + I_A) + XL_2 * (I_B - I_C) + XC_1 * I_B - U_2 = 0 \quad (49)$$

$$XL_2 * (I_C - I_B) + XC_2 * (I_C + I_A) + R_2 * I_C = 0 \quad (50)$$

Výsledkem této soustavy je:

$$I_A = -0.3585623644 - 1.003182207j \quad (51)$$

$$I_B = 0.603930266 + 0.7848512690j \quad (52)$$

$$I_C = 0.02188414454 + 0.098533085j \quad (53)$$

Ohmův zákon pro získání napětí na cívce

$$U_{L2} = (I_B - I_C) * XL_2 = -22.42180686 + 19.01898947j \quad (54)$$

$$|U_{L2}| = (Re^2 + Im^2)^{\frac{1}{2}} = 29.40169014V \quad (55)$$

$$\tan \varphi = \frac{|Im|}{|Re|} \quad (56)$$

$$\varphi = 40.30581775 \quad (57)$$

Nachází se ve druhém kvadrantu (Realná část je záporná a imaginární kladná). Tudíž se musí odečíst φ od 180.

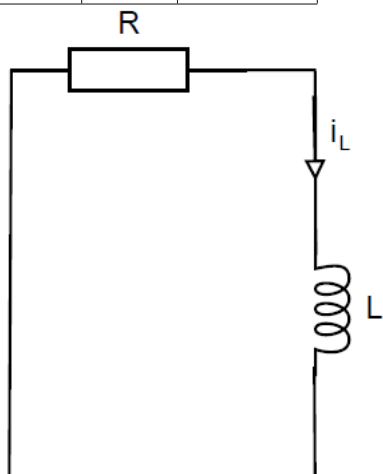
$$\varphi_{L2} = 180 - \varphi = 139.6941822 = 139^\circ 41' 39.1'' \quad (58)$$

7 Šestý příklad

7.1 Zadání úlohy

Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

$L[H]$	$R[\Omega]$	$i_L(0)[A]$
15	35	4



7.2 Řešení

$$u_R + u_L = 0 \quad (59)$$

$$u_R = R * i_L \quad (60)$$

$$u_L = L * i'_L \quad (61)$$

Dosadím

$$R * i_L + L * i'_L = 0 \quad (62)$$

$$i_L + \frac{L * i'_L}{R} = 0 \quad (63)$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (64)$$

Analytické řešení:

$$\tau * i'_L + i_L = 0 \quad (65)$$

Charakteristická rovnice:

$$\tau * \lambda + 1 = 0 \quad (66)$$

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} \quad (67)$$

Obecné řešení:

$$i_L = L_{(t)} * e^{\lambda * t} \quad (68)$$

$$i'_L = L'_{(t)} * e^{\lambda * t} + L_{(t)} * \lambda * e^{\lambda * t} \quad (69)$$

Dosadím do původní rovnice.

$$\tau * (L'_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} + L_{(t)} * -\frac{1}{\tau} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} + L_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} = 0 \quad (70)$$

$$\tau * L'_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} - L_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} + L_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} = 0 \quad (71)$$

$$\tau * L'_{(t)} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} = 0 \quad (72)$$

$$L'_{(t)} = 0 \quad (73)$$

$$\int L'_{(t)} = \int 0 \quad (74)$$

$$L_{(t)} = K \quad (75)$$

Dosadím do obecného řešení.

$$i_L = K * e^{\lambda * t} \quad (76)$$

$$i_L(0) = K * e^{-\frac{1}{\tau} * 0} \quad (77)$$

$$i_L(0) = K * 1 \quad (78)$$

$$i_L(0) = K \quad (79)$$

Výsledek analytického řešení

$$i_L = i_L(0) * e^{-\frac{1}{\tau} * t} \quad (80)$$

$$i_L = i_L(0) * e^{-\frac{R}{L} * t} \quad (81)$$

$$i_L = i_L(0) * e^{-\frac{R}{L} * t} \quad (82)$$

Dosadím hodnoty ze zadání a dostanu výslednou rovnici.

$$i_L = 4 * e^{-\frac{7}{3} * t} \quad (83)$$

Kontrola: dosadím i_L a i'_L do analytického řešení. Nejdřív musím zderivovat i_L .

$$i'_L = i_L(0) * \frac{-1}{\tau} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} \quad (84)$$

$$L : \tau * i_L(0) * \frac{-1}{\tau} * e^{-\frac{1}{\tau} * t} + i_L(0) * e^{-\frac{1}{\tau} * t} = -i_L(0) * e^{-\frac{1}{\tau} * t} + i_L(0) * e^{-\frac{1}{\tau} * t} = 0 \quad (85)$$

$$P : 0 \quad (86)$$

$L = P$ tudíž by to mělo být dobře.

8 Shrnutí výsledků

př.	sk.	Výsledek
1	B	$I_{R6} \doteq 0.0317A$ $U_{R6} \doteq 26.3609V$
2	F	$I_{R6} \doteq 0.0725A$ $U_{R6} \doteq 20.3198V$
3	C	$I_{R4} \doteq 0.5048A$ $U_{R4} \doteq 100.9603V$
4	B	$ U_C \doteq 0.5781V$ $\varphi_C \doteq 237.9849^\circ$
5	F	$ U_{L2} \doteq 29.4016V$ $\varphi_{L2} \doteq 139.6941^\circ$
6	C	$i_L = 4 * e^{-\frac{7}{3}*t}$

Pozn. všechny výsledky jsem zaokrouhloval dolů na 4 desetinné. Přesnější hodnoty a převody na minuty jsou uvedeny v řešení úloh.