Dokumentace k projektu pro předměty IZP a IUS

Iterační výpočty

projekt č. 2

24. listopadu 2010

Autor: Petr Dvořáček, xdvora0n@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačních Technologií
Vysoké Učení Technické v Brně

Obsah

1 Úvod

Iterační výpočty jsou důležité nejen v matematice, ale i v programování. Na papíře šetří místo, mozek a čas. Tak je tomu i v algoritmizaci. Pokud se ve výpočtu nachází opakující se operace, můžeme ji nahradit výsledkem dané operace.

Tento dokument hlavně pojednává o popisu a implementaci dvou aproximačních funkcí, dvou statistických funkcí a výpočtu integrálu obdélníkovou metodou. Jejich analýze a konvergenci se zabývám v kapitole 2. V následující kapitole 3 se věnuji návrhu řešení, ze kterých jsem vyvodil testovací hodnoty 4. Kapitola 5 popisuje mou konečnou implementaci.

2 Analýza problému

2.1 Zadání problému

Cílem tohoto projektu je vytvoření programu v jazyce C, který vypočítá hyperbolický tangens (tanh) a logaritmus za pomocí iteračních algoritmů a základních matematických operací. Dané výpočty mají být rychlé a zároveň přesné. Přesnost je určena počtem platných číslic zadávaných v parametrech při spuštění. Aplikace musí umět spočítat vážený aritmetický a vážený kvadratický průměr hodnot zadaných ze vstupu. Počet těchto hodnot může být nekonečný. Jako rozšíření tohoto problému jsem zvolil výpočet integrálu obdélníkovou metodou.

2.2 Obory hodnot

Definiční obor logaritmu se nachází v intervalu $(0; \infty)$. A také, že $\log_{a>1} 0 = -\infty$ a pro $\log_{a<1} 0 = \infty$. Základ a musí být kladné reálné číslo mimo jedničku.

Hyperbolická funkce tangens je lichá. Dá se toho využít při návrhu řešení. Zároveň tato funkce má dvě limity. $lim_x - > \infty = 1$ a $lim_x - > -\infty = -1$. Viz: 3.3

2.3 Výpočet integrálu

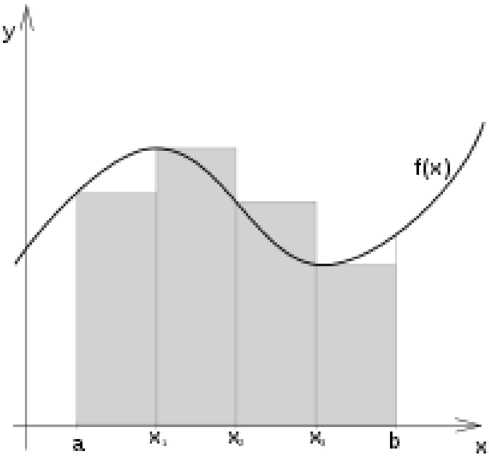
Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu I. Rozdíl $F(b)–F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech se nazývá určitý integrál funkce f v mezích od a do b a značí se $\int_a^b Sf(x)dx$. (viz [2])

Z této definice je patrné, že integrál je reálné číslo určené body a, b a funkcí f. Pro výpočet bych obdélníkovou metodu viz obrázek 1.

2.4 Konvergence

Pojmem konvergence je úzce spjato s nekonečnými řadami, nebo-li s posloupnostmi. Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní (konverguje), jestliže existuje limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a má konečnou hodnotu s, která se nazývá součet (konvergentní) řady. [1]

Tento pojem zde uvádím proto, že souvisí s urychlením výpčtu.3.2



Obrázek 1: Výpočet integrálu obdélníkovou metodou

3 Návrh řešení

3.1 Výpočty funkcí

Hyperbolický tangens

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{2}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{3}$$

Logaritmus pro $x > 0$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{4}$$

$$\ln x = 2(\frac{x–1}{x+1} + \frac{(x–1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x–1)^5}{5(x+1)^5} \ldots) \tag{5}$$

Vážený kvadratický průměr

$$\bar{x_K} = \sqrt{\frac{x_1^2 h_1 + x_2^2 h_2 + x_3^2 h_3 + \ldots + x_n^2 h_n}{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n}} \tag{6}$$

Vážený aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1^2 h_1 + x_2^2 h_2 + x_3^2 h_3 + \ldots + x_n^2 h_n}{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n} \tag{7}$$

Výpočet určitého integrálu obdélníkovou metodou

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n) y_0 = f(a) \tag{8}$$

3.2 Urychlení výpočtu

Přirozený logaritmus lze vypočítat pomocí jiných vzorců. Použití tohoto považuji za vhodné, neboť konverguje nejrychleji v intervalu $(1; e)$. Proto by bylo ideální použít vlastnosti logaritmů a upravit x do intervalu nejlepší konvergence.

Aby se urychlil program, předem se vypočítají některé opakující se výpočty. Např. v přirozeném logaritmu se pořád objevuje $(x-1)^2$ ten se nahradí jeho výsledkem.

3.3 Převod přesnosti

Převod přesnosti lze učinit způsobem:

$$\epsilon = 0.1^{Sigdig} \tag{9}$$

Jelikož se jedná o funkce vracející reálná čísla, je nezbytné použít `double`. Tento datový typ má drobnou vadu – přesnost na patnáct desetinných míst. Proto uznávám za vhodné omezit rozsah počtu platných cifer na 15. Zároveň hyperbolický tangens v intervalu $(18, inf)$ nabývá hodnoty, která se velmi blíží 1.

4 Specifikace testů

Test 1 Chybné zadání parametrů $\longrightarrow$ Detekce chyby.

```
./proj2 -haleluja
./proj2 42
```

Test 2 Chybné zadání platných cifer, nebo základu logaritmu $\longrightarrow$ Detekce chyby.

```
./proj2 --tanh 0 <hodnoty
./proj2 --tanh 100 <hodnoty
./proj2 --tanh -40 <hodnoty
./proj2 --logax 11 -4 <hodnoty
./proj2 --logax 11 0 <hodnoty
./proj2 --logax 11 1 <hodnoty
```

Test 3 Chybné zadání vstupních dat $\longrightarrow$ Vypsání nan

```
./proj2 --tanh 10 <<<"abcd"
nan
./proj2 --logax 11 10 <<<"-100 abc"
nan
nan
./proj2 --wam <<<"1 abcd 3"
nan
nan

./proj2 --integral <<<"3 10 abcd 3 10 -4 4 5 0"
nan
nan
nan
```

Test 4 Správnost výpočtu $\longrightarrow$ Předpokládaná správná hodnota

```
./proj2 --logax 11 10 <<<"10 100 0.21 1e304 1.4e-50 1 0"
1.0000000000e+00
2.0000000000e+00
-6.7778070527e-01
3.0400000000e+02
-4.9853871964e+01
0.0000000000e+00
-inf
./proj2 --logax 11 0.5 <<<"0.5 4 0.4 3.5e-50 2.4e300 0.8 1 0"
1.0000000000e+00
-2.0000000000e+00
1.3219280949e+00
1.6428904982e+02
-9.9784146287e+02
3.2192809489e-01
0.0000000000e+00
inf

./proj2 --tanh 11 <<<"0 1 -1 -0.5 4 1e-50 1e50"
0.0000000000e+00
7.6159415596e-01
-7.6159415596e-01
-4.6211715726e-01
9.9932929974e-01
1.0000000000e-50
1.0000000000e+00

./proj2 --wam <<<"1 10 2 100 3 1000"
1.0000000000e+00
1.9090909091e+00
2.8918918919e+00

./proj2 --wqm <<<"1 10 2 100 3 1000"
1.0000000000e+00
1.9306145983e+00
2.9116108046e+00

./proj2 --integral 11 <<<"4 5 2 -4 -5 4 0 2 1"
9.9954125529e-01
-9.9963149104e-01
0.0000000000e+00
```

5 Popis řešení

5.1 Ovládání programu

Program funguje jako konzolová aplikace, která se spouští zadáváním parametrů. Prvním z nich uživatel vybírá matematickou funkci, kterou chce vypočítat. Pro výpis nápovědy se musí spustit program s příkazem `-h`. Další volby parametrů jsou následující:

`--tanh`	hyperbolický tangens
`--logax`	logaritmus
`--wam`	vážený aritmetický průměr
`--wqm`	vážený kvadratický průměr
`--integral`	výpočet integrálu v hyperbolickém tangens obdélníkovou metodou.

Druhým parametrem uživatel zadá počet platných cifer. Tato přesnost musí být celé číslo v intervalu $< 1; n >$ `n` v tomto případě znamená počet přesných desetinných míst na daném počítači. Druhý parametr musí být zadán spolu se statickými funkcemi a výpočtem integrálu. Nebude-li tak učiněno, program vypíše chybové hlášení.

Třetím parametr znamená základ logaritmu, který nesmí být v rozporu s jeho definičním oborem. Chybí-li tento parametr pro výpočet logaritmu, vypíše se chyba.

Pro hyperbolický tangens a logaritmickou funkce může být zadán na standardní vstup posloupnost číslic ve formátu `x1 x2 x3 ... xn`, kde x je reálné číslo. Pro statistické funkce se musí zadat dvojce hodnot x a h. Tudíž je požadován tento tvar vstupu: x1 h1 x2 h2 ... xn hn, kde x je reálné číslo a h je kladné reálné číslo.

Bude-li zadán výpočet integrálu, program přečte ze vstupu tři číslice: a b n. První číslo znamená začátek a druhé je konec intervalu. Číslo n značí počet obdélníků v daném intervalu. Aplikace může číst a zpracovávat nekonečnou posloupnost na standardním vstupu.

5.2 Volba datových typů

Pro většinu vstupních dat jsem použil datový typ `double`. Pro číslo značící počet obdélníků u integrálu jsem zvolil `int`. Struktura `TAverageValues` uchovává hodnoty průměrů, které jsou zapotřebí při dalších vypočtech průměru. Mé matematické funkce vracejí hodnoty typu `double`.

5.3 Vlastní implementace

Parametry příkazové řádky nejdříve zpracuje funkce `getParams`. V níž se taky nachází zpracování hodnoty `Sigdig` viz 3.3. V hlavní funkci posléze program narazí na cyklus, ve kterém zpracovává a ošetřuje hodnoty ze standardního vstupu. Pokud přečtení čísel proběhlo v pořádku aplikace volá funkci, jenž byla zvolena v parametrech při spuštění. Nachází se zde pět situací, ke kterým může dojít.

Funkce `mtanh` spočítá hyperbolický tangens pomocí $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. Pro výpočet těchto dvou hodnot jsem napsal funkce `msinh` a `mcosh`. Tato funkce je zapotřebí ve funkci `integral`.

Program spočítá logaritmus pomocí funkce `logax`. Nejdříve ošetří zda hodnota ze vstupu náleží svému definičnímu oboru. S přirozeným logaritmem byly zpočátku problémy. Poprvé jsem použil jiný vzorec a zároveň špatně zvolil interval konvergence. Po několika testech jsem zjistil, že bylo ideální použít vzorec zmíněný výše. Konvergoval tři-krát rychleji v intervalu $(1; e)$.

Funkce `wam`, nebo `wqm` jsou si podobné. Dochází zde k součtu jmenovatele a součtu čitatele. Tyto hodnoty jsou obsaženy ve struktuře `TAverages`. Může se tedy počítat dlouhou posloupnost čísel bez velkých nároků na paměť.

6 Závěr

Program byl úspěšně otestován na 64 bitovém operačním systému GNU/Linux. Všechny testy proběhly po úpravě programu úspěšně. Výsledky testů se schodují se Specifikací testů 4.

Jako vylepšení programu bych viděl výpočet integrálu lichoběžníkovou metodou, která je přesnější. Nebo nalezení ideální konvergence přirozeného logaritmu v intervalu $(0; 1)$. Za možné rozšíření programu bych považoval přidání dalších goniometrických funkcí.

Reference

[1] BARTSCH, H.-J. *Matematické vzorce*. 4 vyd. Praha : Academia, 2006. 831 s. ISBN 80-200-1448-9.

[2] HRUBÝ, D.; KUBÁT J. *Matematika pro gymnázia : Diferenciální a integrální počet*. 3 vyd. Praha : Prometheus, 2009. 209 s. ISBN 978-80-7196-363-9.

A Matriky kódu

Počet souborů: 1 soubor

Počet řádků zdrojového textu: 457 řádků

Počet funkcí: 11

Velikost statických dat: 696B

Velikost spustitelného souboru: 7863B (systém Linux, 64 bitová architektura)