Transporte quântico em redes fechadas

Iara Lima dos Santos
iarasantos.cabluelo@gmail.com

Departamento de Física
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal do Amazonas

14 de Agosto de 2019

Sumário

Súmario

Contextualização

Analogamente ao passeio aleatório clássico, tem-se caminhadas quânticas. Elas são interessantes no âmbito da ciência da computação, mas também são estudadas para modelar sistemas quânticos, carcterizar redes, criptografia, e medir o isomorfismo de grafos.
O primeiro algoritmo para computadores quânticos foi o de fatoração de números primos feito por Shor(10), outro com relevância em buscas em bancos de dados é o de Groover(4).

bit

0 ou 1

qubit

$$|\psi\rangle = a\,|1\rangle + b\,|0\rangle$$

Objetivos

Geral

Comparar caminhada aleatória clássica com a quântica em cadeias do tipo anel através da medida da probabilidade de retorno e da eficiência da rede.

1. Entender os métodos de CTQW e CTRW, para obter a ineficiêcia e probabilidade de retorno de diferentes redes fechadas.
2. Obter esses parâmetros para redes anel de 3,5,7 e 100 vértices.
3. Comparar os resultados para os casos clássico e quântico.

Súmario

Contribuições

- Robert Brown, 1827.
- Albert Einstein, 1905.

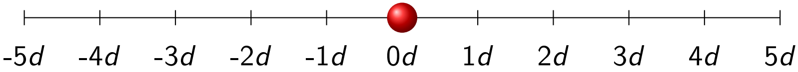


Figura: Representação de caminhada aleatória unidimensional.

Equação de difusão

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

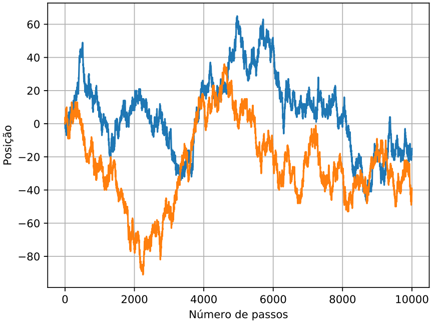


Figura: Posição em função do número de passos para dois caminhantes distintos.

Problema das pontes de Königsberg

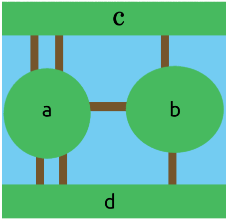


Figura: Esquema das sete pontes entre as margens c e d, que ligam as ilhas a e b.

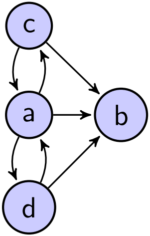


Figura: Grafo que representa o problema das pontes de Königsberg, onde os vértices são as margens e a as ilhas e as pontes, são as arestas.

Definições

Grafo

Um grafo é o par (V, A), onde V é um conjunto qualquer (vértices) e A é um subconjunto de $V^{(2)}$ (arestas).

Se uma grandeza física φ se propaga por um grafo, então a variação no tempo dessa grandeza no nó i é o quanto é retirado ou colocado nesse nó.

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = D \sum_j A_{ij}(\varphi_j - \varphi_i). \tag{2}$$

Onde A_{ij} é a matriz de adjacência.

$$\mathbf{A}_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{Se existir uma ligação entre os nós i e j} \\ 0, & \text{Se não existir} \end{array} \right\}$$

O desenvolvimento da equação 2 leva a:

$$\frac{d\varphi}{dt} = D(\mathbf{A} - \mathbf{D})\varphi \tag{3}$$

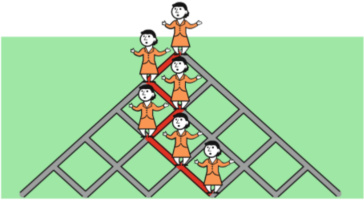
Onde **D** é a matriz dos graus.
Note a semelhança entre a equação que expressa a difusão (1) e a equação 3. Essa comparação fez que $\mathbf{L} \equiv \mathbf{A} - \mathbf{D}$ seja chamada matriz laplaciano. Para resolver a equação é necessário reescrever φ como combinação linear dos autovetores da matriz laplaciano: $\varphi = \sum_i a_i(t)\mathbf{q}_i$. Tipo de solução: $a_i(t) = a_i(0)e^{-D\lambda_i t}$

Súmario

Caminhada aleatória clássica de tempo contínuo

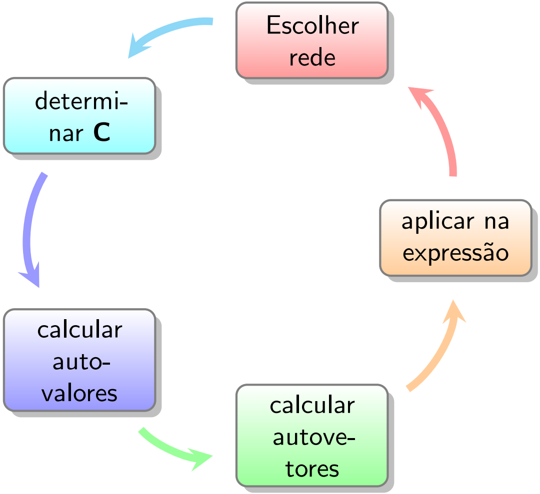
- Processos Markovianos
- Espaço de estados
- Taxa de transição

Figura: Exemplo de trajeto de caminho tomado por caminhante aleatório.



Fonte: livro Physical Implementions of Quantum Walk,p.2

Teoria



Probabilidade de transição

$$p_{ij} = \langle i | e^{-\mathbf{C}t} | j \rangle$$
$$= \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle i | q_n \rangle \langle q_n | j \rangle$$

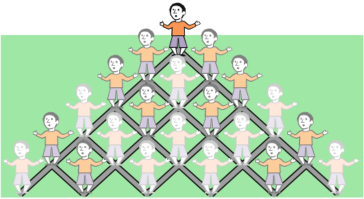
Onde **C** é a matriz de conectividade, ela é $\mathbf{C} = \gamma \mathbf{L}$, pra simplificar $\gamma = 1$.

Súmario

Caminhada quântica de tempo contínuo

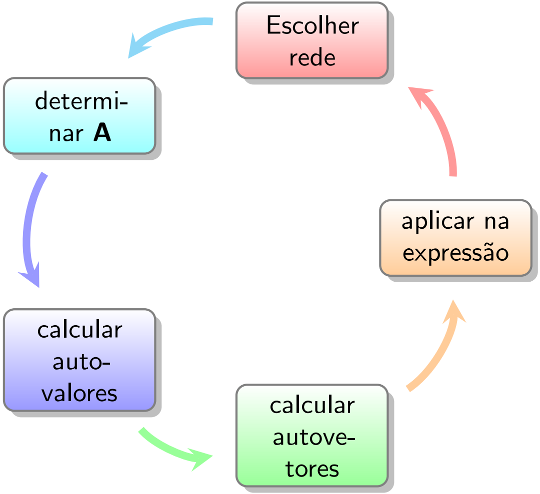
- Espaço de estados é o N-dimensional de Hilbert
- Superposição de estados

Figura: Ilustração de caminhada quântica.



Fonte: livro Physical Implementions of Quantum Walk,p.3

Teoria



Probabilidade de transição

$$\pi_{jk} \equiv |\alpha_{\mathbf{jk}}(t)|^2 =$$

$$\left|\sum_n e^{-itE_n} \langle \mathbf{j}|q_n\rangle \langle q_n|\mathbf{k}\rangle\right|^2$$

Diferença

É obtida a partir do operador evolução temporal!

Eficiência

Nesse caso será analisado quão bem perturbações espalham-se nas redes. A média da probabilidade de retorno aplicada ao limite de $t \to \infty$ será utlizada para tratarmos a eficiência. Quanto maior esse valor, menos eficiente a rede é, quanto menor, mais.

Clássica

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n} e^{-\lambda_n t}$$

Quântica

$$\bar{\chi} = \frac{1}{N} \sum_{n,m} \delta_{\lambda_n,\lambda_m} \left|\langle k|q_n\rangle\right|^2 \left|\langle k|q_m\rangle\right|^2 .$$

Súmario

Analiticamente

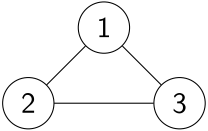


Figura: Rede triangular: três nós, cada nó está ligado a outros dois.

P.r. clássica

$$p_{11}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t}.$$

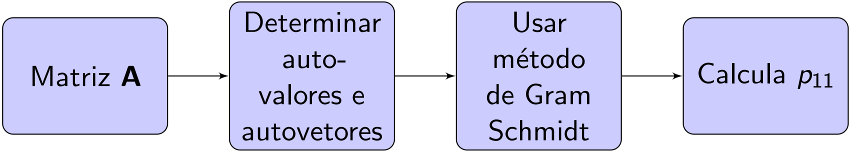
P.r. quântica

$$\pi_{11}(t) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}cos(3t).$$

Eficiência

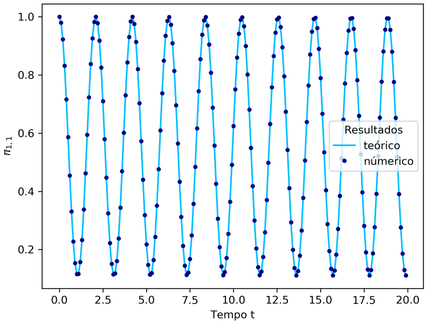
$$\bar{\chi} = \frac{20}{108} \approx 0.18.$$

Numericamente



Comparação

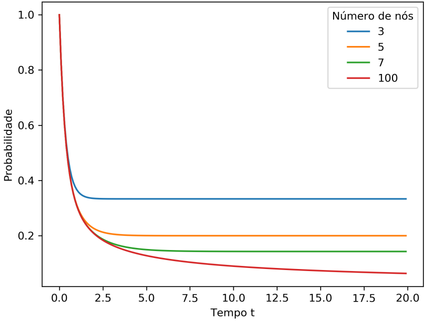
Figura: Probabilidade quântica de retorno na rede triangular.



- Não há tendência para um determinado valor.
- A probabilidade muda entre valores extremos.
- Redes com poucos vértices apresentam mais vezes interferências destruivas ou construtivas.

Pobabilidade clássica de retorno

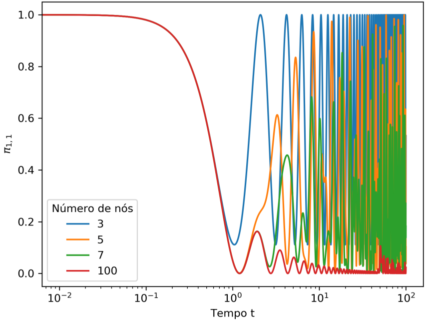
Figura: Probabilidade clássica de retorno para rede de 3, 5, 7 e 100 vértices.



- Com o decorrer do tempo, a probabilidade de retorno tende a um valor específico.
- Pela leitura do gráfico a expressão que descreve essas curvas é $\frac{1}{N}$.

Probabilidade quântica de retorno

Figura: Probabilidade quântica de retorno.



- Redes maiores do tipo anel apresentam mais espalhamento.
- Ao aumentar o número de vértices nesse tipo de rede, mais semelhante a redes lineares ela fica.

Eficiência

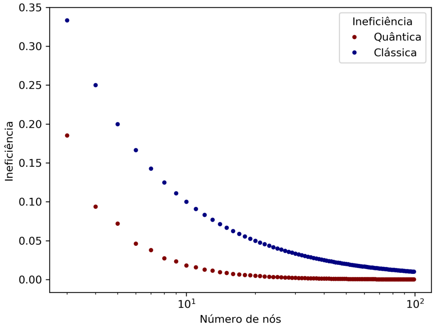


Figura: Comparação entre a ineficiência do transporte clássico e quântico.

- A eficiência máxima é dada quando $\bar{\chi} = 0$
- Quão mais rápido aproxima-se de 0 mais eficiente o espalhamento.

Súmario

Considerações finais

Para investigar o transporte em redes fechadas foram utilizados as grandezas: probabilidade clássica de retorno, probabilidade quântica de retorno e eficiência. Eles foram obtidos analiticamente para o caso de uma rede triangular por razões didáticas. E numericamente para as de 3,5,7 e 100 vértices.
A caminhada quântica apresentou ser mais eficiente que a clássca para o caso de redes anéis.
O programa produzido pode ser facilmente reutilizado para outras topologias de rede.

Súmario

Bibliografia I

Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury. Quantum random walks.
Physical Review A, 48(2):1687, 1993.

E. Farhi and S. Gutmann.
Quantum computation and decision trees.
Physical Review A, 58(2):915, 1998.

L. K. Grover.
A fast quantum mechanical algorithm for database search.
arXiv preprint quant-ph/9605043, 1996.

Bibliografia II

L. K. Grover.
Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack.
Physical review letters, 79(2):325, 1997.

I. Karatzas and S. E. Shreve.
Brownian Motion, chapter movimento browniano, pages 47–127.
Springer New York, New York, NY, 1998.

C. M. Maciel, W. T. Strunz, and M. Galiceanu.
Quantum transport on modified multilayered spiderwebs.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51(49):495301, nov 2018.

Bibliografia III

R. Portugal.
Quantum walks and search algorithms.
Springer, 2013.

S. R. Salinas.
IntroduÃ§Ã$o Ã FÃsica EstatÃstica.
EDUSP, 1997.

P. W. Shor.
Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring.
In *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*, pages 124–134. Ieee, 1994.

Bibliografia IV

B. F. Venancio.
Caminhadas quânticas na rede hexagonal.
2016.

Agradecimentos

É com muito carinho que agradeço a todo amor, cuidado, moradia e financiamento que meus pais ofereçeram durante o desenvolvimento deste trabalho e no decorrer da graduação, a minha irmã,ao meu irmão, ao Mircea Galiceanu, ao Bonifácio Lima, ao Emerson Sousa, a Thais Martins, ao Cássio Maciel,a Roberta Lorena, ao Igor Padilha, ao Haroldo Guerreiro, ao Hidembergue Frota, a Débora Costa, a Victória Maia, ao Mateus, Luana, Raul, Noah, Kaio, colegas da sala de iniciação científica, colegas do grupo de pesquisa de redes complexas e professores do departamento de física. Estar motivada para fazer este trabalho é devido a todo esse apoio recebido.