GSI011 – Estrutura de Dados 2

Profª: Christiane Regina Soares Brasil

- Análise Matemática (revisando...)

```
…
for(i = 0; i<n; i++)
	for(j = 0; j<n; j++)
		if(A[i][j] == 0) A[i][j] = 1;
```

Pior caso (todos são zero):

$$
\begin{aligned}
F(n) &= 1 + 1 + n(1 + 1 + n + n + n + n) + n + n \\
&= 2 + n(2 + 4n) + 2n \\
&= 2 + 2n + 4n^2 + 2n \\
F(n) &= 4n^2 + 4n + 2
\end{aligned}
$$

- Assintoticamente temos para n suficientemente grande:

$F(n) = n^2$

Considerando o termo de maior grau, temos uma função de ordem quadrática.

Por exemplo: Um algoritmo com análise matemática $F(n) = 2n^3 + 5n$ assintoticamente tem custo cúbico, ou seja, $F(n) = n^3$.

- O que é um comportamento assintótico?

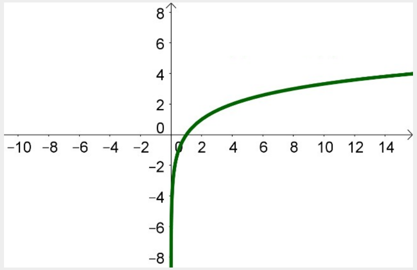
O comportamento assintótico de f(n) representa o limite do comportamento do custo quando n cresce, ou seja, quando n tende a infinito.

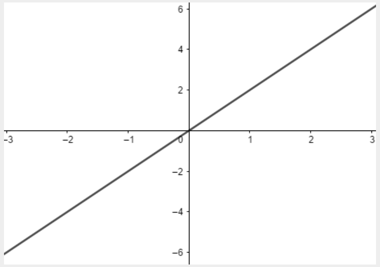
- Exemplos:

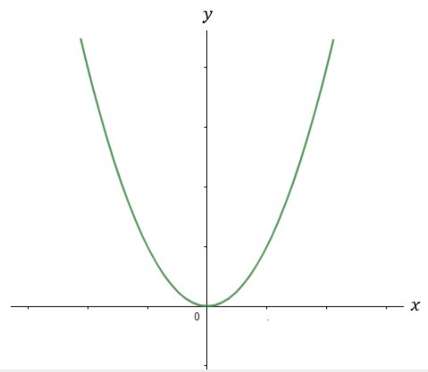
Função Custo	Comportamento Assintótico
$F(n) = 587$	1
$F(n) = 29$	1
$F(n) = 20n + 7$	n
$F(n) = 4n^4 + 3n^2 + 3n + 5$	n^4

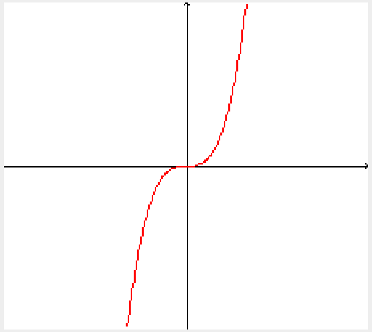
Ordem de crescimento:

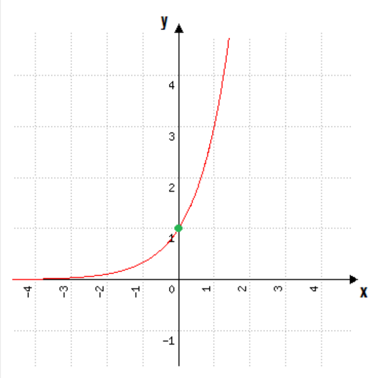
- Logarítmica: $\log_2 n$
- Linear: n
- Quadrática: n^2
- Cúbica: n^3
- Polinomial: n^k
- Exponencial: a^n, $a > 1$.











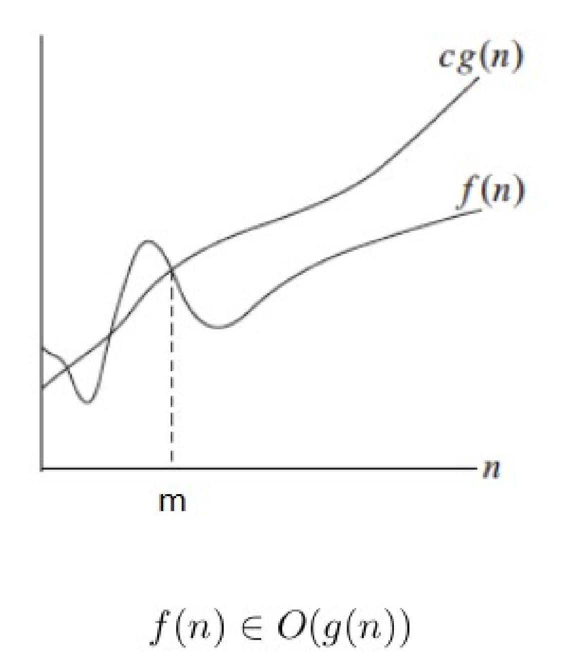
n	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	2^n
2	1	2	2	4	8	4
8	3	8	24	64	512	256
16	4	16	64	256	4096	65536
1024	10	1024	10 240	1 048 576 > 10^6	1 073 741 824 > 10^9	no. com 309 dígitos > 10^{308}

- Diferentes tipos de análise assintótica:
  - Notação grande-O, O
  - Notação grande-Ômega, Ω
  - Notação grande-Theta, Θ
  - Notação pequeno-o, o
  - Notação pequeno-omega, ω

- Notação grande-O
  - Custo do algoritmo no **pior caso possível**
  - Analise o limite assintótico superior
  - O que $O(n^2)$ significa para um algoritmo?
    - O custo dele não pode ser assintoticamente pior do que n^2.
    - Pode ser melhor, mas nunca pior que n^2.

- Notação grande-O
  - Matematicamente:
  - f(n) está em O(g(n)) se existem **c** e **m** (ambos > 0) tais que f(n) <= c g(n) para n>=m (limite superior).

f(n) e g(n) são não negativas



- Exemplo 1:

Prove que $n^2 - 100n$ está em $O(n^2)$, ou seja, tem um limite superior de n^2.

$n^2 - 100n <= c\ n^2$

Dividindo por n^2

$1 - 100/n <= c$

$1 - c <= 100/n$

Considerando c = 1, temos:
0 <= 100/n, ou seja, 100/n >= 0

Logo, quando c = 1 e n>=1 (ou seja, m = 1) temos que $n^2 - 100n$ está em $O(n^2)$.

- Exemplo 2:
  - Prove que $2n + 10$ está em $O(n^3)$.

$2n + 10 <= c\ n^3$

$2/n^2 + 10/n^3 <= c$

Considerando c = 12, temos:
$2/n^2 + 10/n^3 <= 12$

Logo, quando c = 12 e n>=1 (ou seja, m = 1) temos que $2n + 10$ está em $O(n^3)$.

- Exemplo 3:
  - Prove que $4n + 7$ está em $O(n)$.

$4n + 7 <= c\ n$

$4 + 7/n <= c$

$7/n <= c - 4$

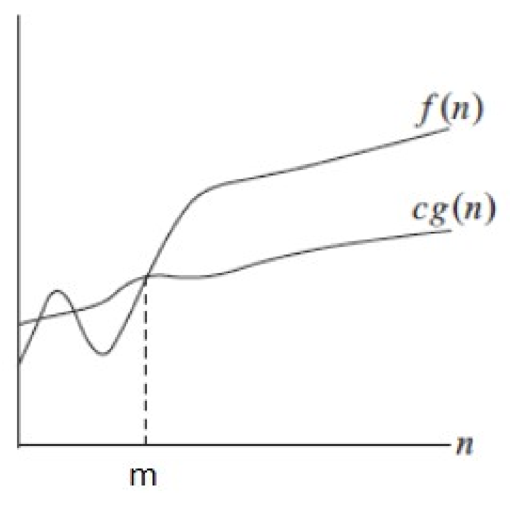
Considerando c = 11, temos:
$7/n <= 11 – 4$
$7/n <= 7$
$7/7 <= n$
$1 <= n$, ou seja, $n>=1$

Logo, quando c = 11 e $n>=1$ (ou seja, m = 1) temos que $4n + 7$ está em $O(n)$.

- Notação grande-Ômega
  - Custo do algoritmo no **melhor caso possível**
  - Analise o limite assintótico inferior
  - O que $\Omega(n^2)$ significa que o custo do algoritmo é assintoticamente maior ou igual a n^2, ou seja, não pode ser melhor que n^2.

- Notação grande-Ômega
  - Matematicamente:
  - f(n) está em Ω(g(n)) se existem **c** e **m** (ambos > 0) tais que f(n) >= c g(n) para n>=m (limite inferior).

f(n) e g(n) são não negativas



$f(n) \in \Omega(g(n))$

- Exemplo 1:
  - Prove que $n^3 + 100$ está em $\Omega(n^3)$.

$n^3 + 100 >= c\ n^3$

$1 + 100/n^3 >= c$

Considerando c = 1, temos:
$1 + 100/n^3 >= 1$
$100/n^3 >= 0$

Logo, quando c = 1 e n>=1 (ou seja, m = 1) temos que $n^3 + 100$ está em $\Omega(n^3)$

- Exemplo 2:
  - Prove que $3n^2 + n$ está em $\Omega(n)$.

$3n^2 + n >= c\ n$

$3n + 1 >= c$

$3n > = c - 1$

Considerando c = 4, temos:
$3n + 1 >= 4$
$3n >= 3$
$n >= 1$

Logo, quando c = 4 e n>=1 (ou seja, m = 1) temos que $3n^2 + n$ está em $\Omega(n)$.

- Exemplo 3:
  - Prove que $n^2 - 2n$ está em $\Omega(n^2)$.

$n^2 - 2n >= c\ n^2$

$1 - 2/n >= c$

$(1 – c) >= 2/n$

Considerando c = 1/2, temos:
1/2 >= 2/n
1/4 >= 1/n, ou seja, n >= 4

Logo, quando c = 1/2 e n>=4 (ou seja, m = 4) temos que $n^2 - 2n$ está em $\Omega(n^2)$.