Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Christiane Regina Soares Brasil

Email: christiane.ufu@gmail.com

Aula prática - 14/10/2022

1) Prove as seguintes afirmações abaixo:

a) f(n) = 20n + 2 = O(n) [lê-se 20n + 2 está em O(n)]

20n + 2 <= cn

Simplificando por n, temos (isto é, dividindo por n em ambos os lados da inequação):

20 + 2/n <= c

2/n <= (c-20)

Considerando c = 22, temos:

2/n <= (22 - 20)

2/n <= 2

n >= 1

Logo, quando c = 22 e n >=1, temos que 20n + 2 está em O(n), ou seja, 20n + 2 = O(n).

b) f(n) = 7n + 3 = O(n)

7n + 3 <= cn

Simplificando por n, temos:

7 + 3/n <= c

3/n <= (c-7)

Considerando c = 10, temos:

3/n <= 3

3<=3n

n>= 1

Logo, quando c = 10 e n >=1, temos que 7n + 3 está em O(n), ou seja, 7n + 3= O(n).

c) f(n) = **a**n + **b** = O(n) , onde **a** e **b** são constantes diferentes de zero.

an + b <= cn

Simplificando por n, temos:

a + b/n <= c

b/n <= (c-a)

Considerando c = (a+b), temos:

b/n <= (a+b-a)

b<=bn

n>= 1

Logo, quando c = (a+b) e n >=1, temos que an + b = O(n).

d) f(n) = n^2 + 70 = O(n^2)

n^2 + 70 <= cn^2

Simplificando por n^2, temos:

1 + 70/n^2 <= c

70/n^2 <= (c-1)

Considerando c = 2, temos:

70/n^2 <= 1

n^2 >= 70

Logo, quando c = 2 e n >=9, temos que n^2 + 70 está em O(n^2), i.e. , n^2 + 70 = O(n^2).

e) f(n) = 3n^2 + n = Ω(n)

3n^2 + n >= cn

Simplificando por n, temos:

3n + 1 >= c

3n >= (c-1)

Considerando c = 4, temos:

$3n >= 3$

$n >= 1$

Logo, quando c = 4 e n >=1, temos que $3n^2 + n$ está em Ω(n), i.e., $3n^2 + n = Ω(n)$.

f) f(n) = n + 10 = Ω(n)

n + 10 >= cn

Simplificando por n, temos:

1 + 10/n >= c

10/n >= c - 1

Considerando c = 1, temos:

10/n >= 0

Logo, quando c = 1 e n >=1, temos que n + 10 está em Ω(n), i.e., n + 10 = Ω(n).

g) $f(n) = 2n^3 = Ω(n^2)$

$2n^3 >= cn^2$

Simplificando por n^2, temos:

2n >= c

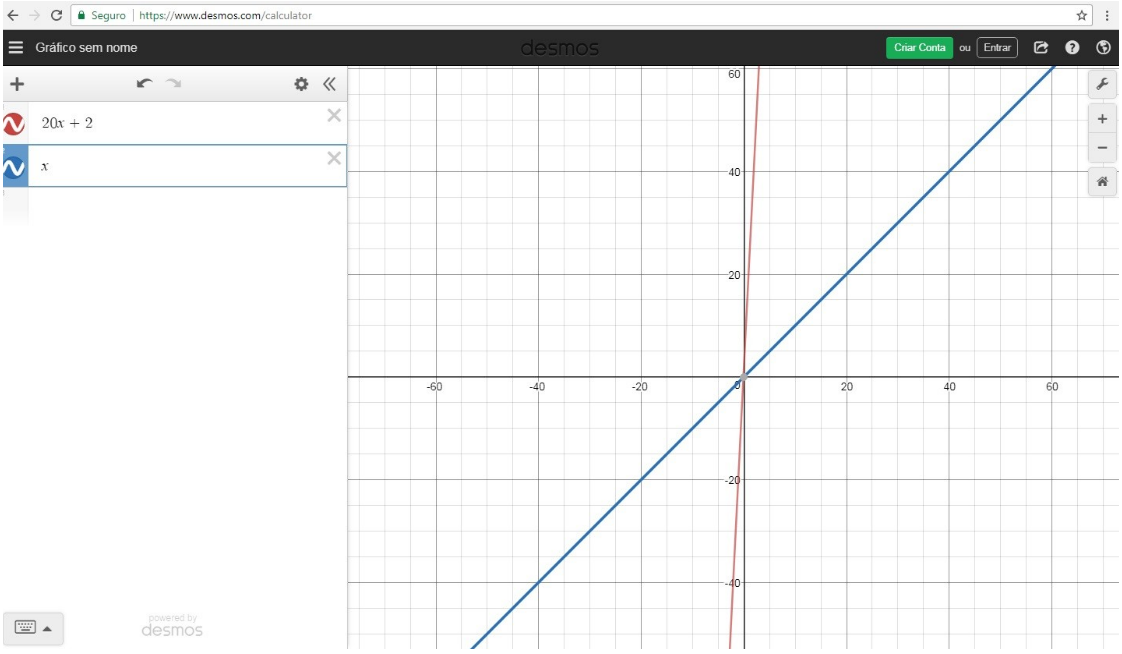
Considerando c = 2, temos:

n >= 1

Logo, quando c = 2 e n >=1, temos que $2n^3$ está em $Ω(n^2)$, i.e., que $2n^3 = Ω(n^2)$.

2) A fim de entender melhor, plote em https://www.desmos.com/calculator as funções de cada desigualdade, analisando os valores de *c* e *m* escolhidos (ou quando não forem possíveis) e verificando se realmente faz sentido. Onde houver *n*, substitua por *x*.

Por exemplo, o item a) primeiramente ficaria assim:



Alterando f(x) = x para f(x) = 22x (pois assumimos c = 22) podemos visualizar que a segunda função fica pior que a primeira a partir de 1.

3) Considerando dois programas A e B com função de custo $100n^2$ e $5n^3$, respectivamente, qual é o mais eficiente, quando n tende ao infinito? Prove assintoticamente e confirme sua conclusão com uma tabela comparando as duas funções.

Isso é verdade $100n^2 <= 5n^3$? Assintoticamente, queremos provar que $100n^2$ está em $O(n^3)$.

$100n^2 <= c.n^3$

$100/n <= c$

Considerando c = 5, temos:

n >= 100/5

n >= 20

Logo, quando c = 5 e n >=20, temos que $100n^2$ está em $O(n^3)$, ou seja, $100n^2 <= 5n^3$.

Agora perguntamos, isso é verdade $100n^2 >= 5n^3$? Assintoticamente, queremos provar que $100n^2$ está em $\Omega(n^3)$.

$100n^2 >= c.n^3$

$100/n >= c$

Considerando $c = 5$, temos:

$100/n >= 5$

$n <= 100/5$

$n <= 20$

Note que para qualquer c que considerássemos, teríamos n limitado por 100/c, o que contradiz que devemos considerar n suficientemente grande. Logo, $100n^2$ não está em $\Omega(n^3)$.

Portanto, B é mais eficiente com n limitado à 20, enquanto que A é mais eficiente, para n tendendo ao infinito. Logo, assintoticamente A é mais eficiente que B.

Podemos confirmar a afirmação com a tabela abaixo:

n	**$100n^2$**	**$5n^3$**
1	100	5
2	400	40
20	40 000	40 000
21	44 100	46 305
50	250 000	625 000