

Завдання 2 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

15 травня 2023 р.

Зміст

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	5
3	Завдання 3	6
4	Завдання 4	7
5	Завдання 5	8
6	Завдання 6	10
7	Завдання 7	11
8	Завдання 8	12
9	Завдання 9	15
10	Завдання 10	16
11	Завдання 11	17
12	Завдання 12	18
13	Завдання 13	19
14	Завдання 14	20

Завдання 1

Завдання

Нехай $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Розв'язання:

Біном Ньютона

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\text{Позначимо за } f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\text{Тоді } \frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n (n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} - \\ & - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \\ & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n (k - nx) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n x C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k(k-1)(1-x)^2 - 2k(n-k)x(1-x) + \\
&\quad (n-k)(n-k-1)x^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k - 2xk^2 + 2xk + x^2k^2 - kx^2 - 2knx + \\
&\quad 2knx^2 + 2k^2x - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nkx^2 - nx^2 - knx^2 + k^2x^2 + kx^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k + 2kx - 2knx - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nx^2) \\
&\quad \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = nx - 2nx^2 + 2n^2x^2 - n^2x^2 + nx^2 \\
&\quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = x - x^2 + nx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_0 = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n kx C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right) = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x^2 = \frac{x-x^2+nx^2}{n} - x^2 = \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що якщо функція f зростає на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж зростає на $[0, 1]$.

Розв'язання:

нехай f зростаюча на $[0, 1]$ функція

$$B_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Тоді

$$B_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l x^l ==$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k+l}$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k, C_n^k C_{n-k}^l = C_n^k C_k^l$$

$$\text{Тоді } \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k+l} = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(0) x^k$$

Очевидно при зростаючій f , $\Delta^k f(0) > 0$, отже це поліном з додатніми

коефіцієнтами - зростаюча функція.

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що якщо функція f опукла на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж опуклий на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$ задовольняє умову: існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ вірна нерівність

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Розв'язання:

$$|f(x) - B_n(f, x)| = \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ |f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq L|x - \frac{k}{n}|$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. За теоремою Кантора існує $\sigma > 0$ таке, що для

$$x', x'' \in [0, 1] \quad |x' - x''| < \sigma \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \\ < \sum_{|x - \frac{k}{n}| < \sigma} |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{|x - \frac{k}{n}| > \sigma} |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ = \frac{\varepsilon}{2} + L \sum_{|x - \frac{k}{n}| > \sigma} |x - \frac{k}{n}| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

За допомогою оцінки, що ми використовували у доведенні теореми

Веєрштраса отримуємо

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{L}{2\sqrt{n}} \text{ Для довільного } \varepsilon > 0. \text{ Це і завершає доведення.}$$

Доведено!

Завдання 5

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1]^2)$. Покладемо для $x, y \in [0, 1]$,

$$B_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що $B_n \rightarrow f$ рівномірно на $[0, 1]^2$.

Розв'язання:

(Завдання було зроблено на основі Леми один з відповідної лекції)

Якщо $\|B_n - f\|$ збігається до нуля то рівномірна збіжність очевидна.

$$\begin{aligned} \|B_n - f\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f(x, y) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \right\| = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \end{aligned}$$

Нехай $\epsilon > 0$ задано. За теоремою Кантора існують δ_1, δ_2 такі, що для

$$x', x'', y', y'' \in [0, 1], \quad |x' - x''| < \delta_1, |y' - y''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} = \\ &= \sum_{|x'-x''| < \delta_1 \wedge |y'-y''| < \delta_2} \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} + \\ &+ \sum_{|x'-x''| > \delta_1 \vee |y'-y''| > \delta_2} \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \left(y - \frac{i}{n}\right)^2 C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} = \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \frac{x(1-x)y(1-y)}{n} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2 \sigma_2^2} \end{aligned}$$

Далі оберемо таке $N, \forall n > N, \frac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2\sigma_2^2} < \frac{\epsilon}{2}$

Тоді має місце рівність $\forall \epsilon > 0 : \|B_n - f\| < \epsilon$

Доведено!

Завдання 6

Завдання

Нехай функція $f \in C([0, 1])$ така, що $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$.
Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) C_p^k x^{k+n} (1-x)^{p-k} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) C_p^k \int_0^1 x^{k+n} (1-x)^{p-k} = 0, n = 0, 1, 2, \dots \\ x(1-x) &\geq 0, \forall x \in [0, 1], \Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq k \quad f\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \end{aligned}$$

Отже $f(x) = 0$ на $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $f \in C \Rightarrow f(x) = 0, x \in [0, 1]$

Доведено!

(Також можна доводити за допомогою теореми Вейерштраса, апроксимуючи функцію алгебраїчним поліномом і отримавши з рівняння, що одночасно всі коефіцієнти і при парних і при непарних степенях рівні 0)

Завдання 7

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\mathbf{n}} f(x_1 x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\mathbf{n}} f(x_1 x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\mathbf{n}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) (x_1 x_2 \dots x_n)^k (1 - x_1 x_2 \dots x_n)^{p-k} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \end{aligned}$$

Інтеграли однакові Отже

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\mathbf{n}} (x_1 x_2 \dots x_n)^k (1 - x_1 x_2 \dots x_n)^{p-k} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) \int_0^1 x^{n+k} (1 - x^n)^{p-k} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 x^{n+k} (1 - x^n)^{n-k} dx \end{aligned}$$

Завдання 8

Теорема Л.Фейєра

Нехай $f \in C_{2\pi}$, S_n - часткова сума ряду Фур'є функції f по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на \mathbb{R} збігається до f .

Розв'язання:

Підставляючи коефіцієнти Фур'є у формули для часткових сум

одержуються загальні формули:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \end{aligned}$$

Після заміни змінних можна також написати

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

де $D_n(t)$ позначає відповідне ядро Діріхле. Тоді також

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_n(t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt\end{aligned}$$

де $F_n(t)$ позначає відповідне ядро Феєра. Далі, враховуючи, що для всіх

$$\text{ядер Феєра } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1, \text{ також можна записати}$$

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) dt$$

Оскільки ядро Феєра є невід'ємною функцією, то звідси:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt$$

Оскільки $f \in C$ неперервною на проміжку $[-\pi, \pi]$, то вона на ньому рівномірно

неперервною, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх

$|x - y| \leq \delta$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Інтеграл із останньої рівності можна записати

$$\text{як суму } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt = I_1 + I_2, \text{ де:}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt$$

Через рівномірну неперервність функції f і знову використавши рівність

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$, для першого інтегралу

$$I_1 < \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \varepsilon F_n(t) dt = \varepsilon$$

Для другого інтегралу, якщо позначити $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$, то

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} 2M F_n(t) dt = \frac{M}{\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} F_n(t) dt$$

Згідно властивостей ядра Феєра останній вираз прямує до нуля для великих n , тобто для достатньо великих n :

$$I_2 \leq \frac{M}{\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} F_n(t) dt < \varepsilon/2$$

Остаточно у цьому випадку

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt = I_1 + I_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Тобто $\sigma_n(x)$ прямує до $f(x)$ і крім того збіжність є рівномірною оскільки індекс n у доведенні вище був обраний єдиним для всіх x .

Доведено!

Завдання 9

Завдання

Нехай X, Y - компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq C(X), \exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} |f(x, y) - \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y)| < \varepsilon$$

Розв'язання:

Очевидно, що $\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y)$ є алгеброю (за визначенням). Позначимо цю алгебру за A . Також очевидно з роздільності $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ на X та роздільності $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ на Y випливає роздільність данної алгебри на $X \times Y$. За визначенням $1 \in A$. Отже всі вимоги теореми Стоуна

виконуються, тобто $clA = C(X \times Y)$

Отже $\forall f \in C(X \times Y), \forall \varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} |f(x, y) - \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y)| < \varepsilon$$

Доведено!

Завдання 10

Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується: $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\text{cl } A = C(X)$.

Розв'язання:

Отже A алгебра, що розділяє точки множини X . $f(x) \neq 0$, а отже, з

визначення алгебри $\frac{f(x)}{f(x)} = 1(x) \in A$

Отже виконується і третя умова теореми Стоуна тож виконується і сама

теорема, тоді

$$\text{cl } A = C(X)$$

Доведено!

Завдання 11

Означення 1

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множина S сильно розділяє точки множини X , якщо
 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \exists f \in S : f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2$

Означення 2

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множину S називають решіткою, якщо $\forall f, g \in S$:
 $\max\{f, g\} \in S, \min\{f, g\} \in S$.

теорема Какутані–Крейна.

Нехай X — компакт, $S \subseteq C(X)$. Припустимо, що:

- 1) S — решітка;
- 2) S — замкнена підмножина $C(X)$;
- 3) S сильно розділяє точки множини X ;
- 4) $1 \in S$

S співпадає з усім простором $C(X)$.

Розв'язання:

Завдання 12

Завдання

Пропонується узагальнити теорему Стоуна для локально компактного простору X . Нагадаємо, що простір X локально компактний, якщо кожна точка x має компактний окіл. Позначимо $C_\infty(X)$ — лінійний простір неперервних функцій $X \rightarrow \mathbb{R}$, що зникають у нескінченності, тобто $f \in C_\infty(X)$ мають властивість:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K \subseteq X : |f(x)| < \epsilon, \forall x \notin K$$

Простір $C_\infty(X)$ з рівномірною нормою є банаховим. Доведіть таку теорему.

Теорема Стоуна для локально компактного простору.

Нехай X — локально компактний простір, $A \subseteq C_\infty(X)$.

Припустимо, що:

- 1) A — алгебра;
- 2) A розділяє точки множини X ;
- 3) $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Тоді множина A щільна в $C_\infty(X)$.

Розв'язання:

Завдання 13

Завдання

Розглянемо комплексний банаховий простір $C_{\mathbb{C}}(X)$ заданих на компактi X неперервних функцій $X \rightarrow \mathbb{C}$ (норма рівномірна). Для комплексних алгебр $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$ теорема Стоуна не вірна (чому?). Але цю ситуацію можна виправити, якщо вимагати від алгебри A ще одну умову. Доведіть таку теорему.

Теорема Стоуна для комплексних алгебр

Нехай X — компакт, $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$. Припустимо, що:

- 1) A — алгебра;
- 2) A розділяє точки множини X ;
- 3) $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$;
- 4) $\forall f \in A$ функція f , визначена рівністю $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}, x \in X$, належить A .

Тоді множина A щільна в $C_{\mathbb{C}}(X)$, тобто $cl A = C_{\mathbb{C}}(X)$.

Розв'язання:

Завдання 14

Завдання

Нехай X — компактний метричний простір. Доведіть, що простір $C(X)$ сепарабельний.

Розв'язання: