Завдання 4 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

5 червня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Покажіть, що лема 1 з лекції 7 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

Лема

Нехай H — строго опуклий лінійний нормований простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді множина $F(T)$ опукла та замкнена.

Розв'язання:

З неперервності T випливає замкненість $F(T)$

Якщо повторити доведення з лекції у кінці вийде $\| \ldots \| \leq 0$ замість $= 0$, тобто рзультат залишиться тим самим $F(T)$ - опукла.

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Нехай C непорожня підмножина гільбертового простору H,

$T_1, T_2, \ldots, T_m \colon C \to H$ - нерозтягуючі оператори, причому

$$\bigcap_{n=1}^{m} F\left(T_n\right) \neq \emptyset$$

.

Доведіть, що для довільного набору $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ додатніх чисел з $\sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n = 1$ оператор

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x \quad (x \in C)$$

є нерозтягуючим та $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F\left(T_n\right)$.

Розв'язання:

Нехай $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n < m, T_n x = x$ тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x = x \overbrace{\sum_{n=1}^{m} \lambda_n}^{1} = x$$

Отже $x \in F(T)$ тобто $F(T) \supseteq \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Нехай $x \in F(T), Tx = x$ і нехай від супротивного $\exists m_1 : T_k x \neq x, k \in m_1$

Тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x = x \sum_{n=1}^{m-|m_1|} \lambda_n + \sum_{k \in m_1} \lambda_k T_k x = x \sum_{n=1}^{m} \lambda_n$$

$\sum\limits_{k \in m_1} \lambda_k (T_k x - x) = 0 \Rightarrow T_k x = x$ протиріччя

Отже $\forall x \in F(T), \forall n \leq m, T_n x = x$

Отже $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Доведемо, що він є нерозтягуючим.

$$\|Tx - Ty\| = \| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n y\| = \| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (T_n x - T_n y)\| =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \|(T_n x - T_n y)\| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{m} \lambda_n}_{1} \|(x - y)\| = \|x - y\|$$

$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ - Оператор нерозтягуючий

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Нехай C непорожня підмножина гільбертового простору

$H, T_1, T_2, \ldots, T_m : C \to H-$ строго квазінерозтягуючі оператори, причому

$$\bigcap_{n=1}^{m} F\left(T_n\right) \neq \emptyset$$

Доведіть, що оператор $Tx = T_1 T_2 \ldots T_m x \quad (x \in C)$

є строго квазінерозтягуючим та $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F\left(T_n\right)$.

Розв'язання:

Нехай $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$ тоді за визначенням $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq m : T_k x = x$

Тоді $Tx = T_1 T_2 \ldots T_{m-1} T_m = T_1 T2 \ldots T_{m-1} x = \cdots = x \Rightarrow x \in F(T)$

Отже $F(T) \supseteq \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Нехай $x \in F(T), \exists$ найбільше $k < m : \quad T_k x = x_1 \neq x$ тоді

$$Tx = T_1 T_2 \ldots T_m x = T_1 T_2 \ldots T_{k-1} x_1 = x$$

З строгої не розтягуваності маємо $\|T_{k-1} x_1 - x\| < \|x_1 - x\|$, тобто

$$T_{k-1} x_1 = x_2 \neq x$$

Подібні речі проводимо $k-1$ раз уже з новими $x_2, x_3 \ldots,$

отримаємо $T_x \neq x$ - протиріччя. Отже $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Доведемо строгу квазінерозтягуваючість

$$\|Tx - y\| = \|T_1 T_2 \ldots T_m x - y\| = \|T_1 (T_2 \ldots T_m x) - y\| \leq$$

$$\leq \|T_2T_3\dots T_mx - y\| = \dots \leq \|x - y\|$$

Доведено!

Завдання 4

Завдання

Нехай $C-$ непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору $H, T : C \to H$ - нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$. Припустимо, що послідовність точок $x_n \in C$ має властивості:

1. $\forall p \in F(T) \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

Доведіть, що послідовність (x_n) слабко збігається до точки з $F(T)$.

Розв'язання:

$$\forall p \in F(T) \quad \exists \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n \to x$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = \|x - Tx\| = 0 \Rightarrow x = Tx \Rightarrow x \in F(T)$

Доведено!

Завдання 5

Завдання

Нехай H - гільбертовий простір, $T : H \to H-$ твердо нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо метод простої ітерації:

$$\begin{cases} x_0 \in H \\ x_{n+1} = Tx_n \end{cases}$$

Доведіть, що послідовність x_n слабко збігається до деякої точки з $F(T)$

Розв'язання:

Оператор нерозтагуючий, послідовність обмежена тоді будуємо множини

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_d(x_k), d = diam(x_n)$$

Множини мають властивість $T(C_n) \subseteq C_{n+1}$ (з побудови послідовності)

$C = cl \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ - замкнена, опукла та обмежена і за теоремою Браудера (з лекції 7) оператор T має нерухому точку в C.

Доведено!

Завдання 6

Завдання

Нехай H - гільбертовий простір, $C \subseteq H-$ непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ - нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset, y \in C$. Покажіть, що для довільного $t \in (0,1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$, такий, що

$$x_t = T\left(ty + (1-t)x_t\right).$$

Доведіть, що при $t \to 0$ крива $t \mapsto x_t$ сильно збігається до точки $\bar{x}$, такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}y$.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай H - гільбертовий простір, $C \subseteq H-$ непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ - нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \to C-$ стискаючий оператор. Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T x_n$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$

Доведіть, що згенерована послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z \in F(T)$, такої, що $z = P_{F(T)} f(z)$.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай оператор $T : H \to H-$ нерозтягуючий, оператор $A : H \to H-$ ліпшицевий та сильно монотонний [4] із сталими $L > 0, l > 0$, відповідно. Оператор $T_\alpha : H \to H$ задано рівністю

$$T_\alpha x = Tx - \alpha ATx, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

Доведіть, що для довільного $\mu \in \left(0, \frac{2l}{L^2}\right)$ маємо

$$\|T_\alpha x - T_\alpha y\| \leq \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\alpha\right) \|x - y\| \quad \forall x \in H \forall y \in H$$

де $\alpha \in [0, \mu], \tau = 1 - \sqrt{1 - 2l\mu + L^2\mu^2} \in (0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай оператор $T : H \to H-$ нерозтягуючий, оператор $A : H \to H-$ ліпшицевий та сильно монотонний. Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n A y_n \end{cases}$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$

Доведіть, що породжена послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Розв'язання: