Екзаменаційна робота

Киращук Інна та Коломієць Микола

11 червня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Означення 1

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множина S сильно розділяє точки множини X, якщо $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \exists f \in S : f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2$

Означення 2

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множину S називають решіткою, якщо $\forall f, g \in S$: $\max\{f, g\} \in S, \min\{f, g\} \in S$.

теорема Какутані–Крейна.

Нехай X — компакт, $S \subseteq C(X)$. Припустимо, що:

1) S — решітка

2) S — замкнена множина

3) S сильно розділяє точки множини X

4) $1 \in S$

S співпадає з усім простором $C(X)$.

Розв'язання:

Нехай $h \in C(X)$ і дана ε.

Ми шукаємо $f \in S$ що задовільняє умову $\|h - f\| < \varepsilon$.

Покажемо для кожного $x \in X$, існує $f_x \in S$ така, що

$f_x(x) = h(x)$ і $h \leq f_x + \varepsilon$.

Тоді для кожного x, знайдемо U_x, відкритий окіл x з $h(y) \geq f_x(y) - \varepsilon$

для кожного $y \in U_x$ (з неперервності $h - f_x$).

U_x покриття X тож нехай $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ підпокриття.

Тоді $f = f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_m}$ задовільняють умову

$f(y) + \varepsilon = \min_i \{f_{x_i}(y) + \varepsilon\} \geq h(y)$.

Більше того з того, що $y \in U_{x_i}$ для певного i:

$f(y) - \varepsilon \leq f_{x_i}(y) - \varepsilon \leq h(y) \leq f_{x_i} + \varepsilon$.

Таким чином $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$.

Тепер спробуємо знайти f_x, що задовільняють цим умовам.

З того, що S сильно розділяє точки і $1 \in S$, для кожного x та y в X, ми

можемо знайти $f_{xy} \in S$ з $f_{xy}(x) = h(x)$ і $f_{xy}(y) = h(y)$.

Для кожного y, ми можемо знайти V_y, відкриту множину навколо y з

$f_{\dot{x}_y}(z) + \varepsilon \geq h(z)$ для $z \in V_y . V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ є покриттям X для підходящих

$y_1, \ldots, y_n$.

Якщо взяти $f_x = f_{xy_1} \vee \cdots \vee f_{xy_n}$, тоді $f_x(x) = h(x)$, і для будь-якого $z \in X$

$$f_x(z) + \varepsilon = \max_{i=1,\ldots,n} \{f_{xy_1}(z) + \varepsilon\} \geq h(z)$$

Це завершує доведення

Завдання 2

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Доводити будемо від супротивного.

Нехай $\forall x \in B^n, f(x) \neq 0$.

Визначимо неперервне відображення

$$B^n \xrightarrow{\phi} B^n, \quad \phi x = -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

За теоремою Брауера

$$\exists y \in B^n, \quad -\frac{f(y)}{\|f(y)\|} = y \Rightarrow (f(y), y) = -\|f(y)\| < 0$$

З включення $y \in S^{n-1}$ маємо протиріччя з умовою задачі.

Доведено!