Заняття 3
Лінійні неперервні функціонали, збіжність та слабка збіжність

- Означення слабкої збіжності
- Приклад 1.1)
- З слабкої збіжності не випливає сильна
- З сильної збіжності випливає слабка
- З слабкої збіжності випливає покоординатна збіжність
- Критерії слабкої збіжності
- Приклад 1.1)
- Приклад 1.2)
- Приклад 1.3)
- ...

1. Дослідити послідовності на слабку збіжність.

$$1.1) x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, ...), E = l_p, 1 \leq p < \infty$$
$$1.2) x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, n, 0, 0, ...), E = l_p, 1 \leq p < \infty$$
$$1.3) x^{(n)} = n\chi_{[0, \frac{1}{n^2}]}, E = L_p([0, 1]), 1 \leq p < \infty$$

2. Дослідити послідовності функціоналів на $*-$слабку збіжність. (необов'язково робити, прочитати розв'язки у [3])

$$2.1) f_n(x) = \int_0^{1/n^2} nx(t)\ dt, E = L_p([0, 1]), 2 \leq p < \infty$$
$$2.2) f_n(x) = \sqrt{n} \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t)\ dt, E = C([0, 1]),$$
$$2.3) f_n(x) = \int_0^{2\pi} x(t) \sin^2 nt\ dt, E = L_p([0, 2\pi]), 1 \leq p < \infty$$

Домашнє завдання з заняття 3
Лінійні неперервні функціонали, збіжність та слабка збіжність

1. Дослідити послідовності на слабку збіжність.

$$1.1) x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...), E = l_p, 1 < p < \infty,$$

$$1.2) x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, ...), E = l_p, 1 < p < \infty,$$

$$1.3) x^{(n)} = t^n, E = L_p([0, 1]), 1 \leq p < \infty,$$

$$1.4) x^{(n)} = \sqrt{n}\chi_{[0, \frac{1}{n}]}, E = L_p([0, 1]), 1 \leq p \leq \infty.$$

2. Дослідити послідовності функціоналів на $*-$слабку збіжність та перевірити чи збіжна ця послідовність за нормою.

$$2.1) f_n(x) = \int_0^1 x(t) \cos(2\pi nt)\ dt, E = L_2([0, 1]),$$

$$2.2) f_n(x) = n\int_0^{\frac{1}{2n}} (1 - 2nt)x(t)\ dt, E = C([0, 1]),$$

$$2.3) f_n(x) = n\int_0^1 t^n x(t)\ dt, E = C([0, 1]).$$

3. Нехай H – гільбертів простір, $x, x_n \in H$, $n \geq 1$. Довести, що

- кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля;
- $x_n \to x$ за нормою, якщо $x_n \to^{\omega} x$ (слабко) і виконується умова $\|x_n\| \to \|x\|$.
- якщо $x_n \to^{\omega} x$, $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$

4. Нехай H – гільбертів простір. Побудувати приклад послідовносетй $x_n \to^{\omega} x$, $y_n \to^{\omega} y$ таких, що $(x_n, y_n) \nrightarrow (x, y)$

5. Нехай X – банахів простір, послідовність $f_n \in X^*$ така, що $f_n \to^{\omega*} f$. Доведіть, що $f \in X^*$ і

$$\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

Що можна почитати?

[1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин *Элементы теории функций функционального анализа.* С.194–201.

[2] Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель *Функциональний анализ*, С. 220–223, 225–227.

[3] О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш та ін. *Збірник задач з функціонального аналізу*, С.69–76.