# Завдання 1 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

7 травня 2023 р.

# Зміст


| | | |
|---|---|---|
| 1 | Завдання 1 | 2 |
| 2 | Завдання 2 | 4 |
| 3 | Завдання 3 | 5 |
| 4 | Завдання 4 | 6 |
| 5 | Завдання 5 | 8 |
| 6 | Завдання 6 | 9 |
| 7 | Завдання 7 | 10 |
| 8 | Завдання 8 | 11 |
| 9 | Завдання 9 | 12 |
| 10 | Завдання 10 | 13 |

# Завдання 1

**Завдання**

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H. Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \le \|x-y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2,\ \forall x, y \in H$$

**Розв'язання:**

$$\|P_C x - P_C y\|^2 = \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 =$$

$$\|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 =$$

$$= \|x-y\|^2 - 2(x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\cancel{\|x-y\|^2} - 2(x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\le}$$

$$\cancel{\|x-y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\le} (x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 = ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) =$$

$$= (x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\cancel{(x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\le}$$

$$\cancel{(x-y, (x - P_C x) - (y - P_C y))}$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\ge} 0$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) =$$

$$(P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) =$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \overset{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x$:

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівеість:

$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2$, що і завершує доведення.

# Завдання 2

**Завдання**

Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

C = з.л.о. $\{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, x \in H$$

**Розв'язання:**

Нехай $x \in H$. Тоді розклад вектора $P_C x$ можна записати так

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x + x, e_n)e_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}((P_C x - x, e_n) + (x, e_n))e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x, e_n)e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

C - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно $e_n \in C$.

Тоді за теоремою 4 другої лекції $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(P_C x - x, e_n)}_{0}e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

Доведено

# Завдання 3

**Завдання**

Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}(x_0 \neq 0, c \in R)$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

**Розв'язання:**

Розглянемо скалярний добуток:

$$(x - P_L x, x_0) = (x_0, x - P_L x)| * x_0$$

$$(x - P_L x, x_0)x_0 = (x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0(x_0, x - P_L x) = x_0((x_0, x) - (x_0, P_L x))$$

За визначенням $P_L x \in L$, а отже $(x_0, P_L x) = c$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0((x_0, x) - c)| * \tfrac{1}{\|x_0\|^2}$$

$$(x - P_L x) = ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Звідси отримуєм, що

$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$, доведено

# Завдання 4

**Завдання**

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору $H, x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < (p, x)$$

**Розв'язання:**

**Повне доведення:**

$C$ замкнена множина отже замість $\sup$ можна інтерпритувати умову як

$$\forall y \in C, \exists p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) < (p, x)$$

Доведення проводимо від супротивного. Нехай $\exists y \in C$ такий що

$$\forall p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) \geq (p, x)$$

$$(p, y) - (p, x) = (p, y - x) \geq 0$$

$$(-p, y - x) \leq 0$$

Подивившись на теорему 2 другої лекції (а саме на її другий пункт) стає очевидно, що за $-p$ варто взяти $P_C x - x$. Тоді отримаємо

$$(P_C x - x, y - x) = (P_C x - x, y - P_C x + P_C x - x) =$$

$$= (P_C x - x, y - P_C x) + (P_C x - x, P_C x - x) \leq 0$$

За теоремою 2 з лекції 2 (пункт 2) $(P_C x - x, y - P_C x) \geq 0$

$(P_C x - x, P_C x - x) = \|P_C x - x\|^2 > 0$ адже $x \in H \backslash C, x \neq P_C x$

Доведено

**Швидке доведення:**

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ з теореми 2 другої лекції (пункт 2) маємо $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < (p, x)$, що і треба було довести.

# Завдання 5

**Завдання**

Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору $H, \dim H < +\infty, x \in H \backslash C$. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) \le (p, x)$$

**Розв'язання:**

З завдання 4 випливає що якщо $x \in H \backslash \bar{C}, \exists p \in H \backslash \{0\} \quad \sup_{y \in C}(p, y) < (p, x)$

Залишилось довести твердження для $x \in \bar{C} \backslash C$

Так само візьмемо за $p = x - P_C x$

$$(p, y) - (p, x) = (x - P_C x, y) - (x - P_C x, x) =$$

$$= (x - P_C x, y - P_C x) + (x - P_C x, x - P_C x) = (x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2$$

Очевидно, що для $x \in \bar{C} \backslash C, P_C x = x$ (є послідовність з $C$ що збігається до $x$, і тоді норма різниці буде 0)

$$(x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 = (0, y - x) = 0$$

$$\begin{cases} \sup\limits_{y \in C}(p, y) < (p, x), \quad \forall x \in C \\ \sup\limits_{y \in C}(p, y) = (p, x), \quad \forall x \in \bar{C} \backslash C \end{cases}$$

Отже

$$\sup_{y \in C}(p, y) \le (p, x), \quad \forall x \in C$$

Доведено

# Завдання 6

**Завдання**

Нехай $C, D$ — непорожні замкнені опуклі підмножини $H$ такі, що $C \cap D = \emptyset$ і $D$ обмежена. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$$

**Розв'язання:**

З минулих завданнь маємо $\sup_{y \in C}(p, y) < (p, x), x \in H$ при $p = x - P_C x$

Залишилось довести, що $(x - P_C x, x) \leq \inf_{x \in D}(x - P_C x, x)$

Очевидно, що ця рівнясть досягається якщо прибрати $\inf$, з обмеженості і замкненості $D$ випливає, що $\inf$ досягається при певному $x \in D$.

Отже $\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$

Доведено

# Завдання 7

**Завдання**

Нехай $C$ — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1. $C$ — слабко секвенційно замкнена множина.
2. $C$ — замкнена множина.
3. $C$ — слабко замкнена множина.

**Розв'язання:**

# Завдання 8

**Завдання**

Нехай $C, D$ — непорожні підмножини $H$ такі, що $C \cap D = \emptyset$.

1. Якщо припустити, що множина $C - D = c - d : c \in C, d \in D$ опукла та замкнена, то $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.

2. Якщо припустити, що $\dim H < +\infty$ , множина $C - D$ опукла, то $\exists p \in H \ \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) \leq \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.

**Розв'язання:**

1. Для множини $C - D$ застосуємо теорему з 4 завдання адже вона опула, замкнена та не порожня, тоді

$$\sup_{c \in C, d \in D}(p, c - d) < (p, z), z \in H \backslash (C - D), p = z - P_{C-D}z$$

$$\sup_{c \in C, d \in D}((p, c) - (p, d)) = \sup_{c \in C}(p, c) - \inf_{d \in D}(p, d) < (p, z)$$

$$\sup_{c \in C}(p, c) < \inf_{d \in D}(p, d) + (p, z)$$

$$(p, z) = (z - P_{C-D}z, z) = \|z\|^2 - (P_{C-D}z, z)$$

Обираємо $z$ так, щоб виконувалась нерівність $\|z\|^2 > (P_{C-D}z, z)$

Тоді $\sup\limits_{c \in C}(p, c) < \inf\limits_{d \in D}(p, d)$

Доведено

# Завдання 9

**Завдання**

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо $C = cl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \to P_C x$.

**Розв'язання:**

# Завдання 10

**Завдання**

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n} x \to P_C x$.

**Розв'язання:**