

Завдання 1 з предмету Спецкурс для ОМ-З

Коломієць Микола

2 травня 2023 р.

ЗМІСТ

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	4
3	Завдання 3	5
4	Завдання 4	6

ЗАВДАННЯ 1

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H . Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &= \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \\ &= \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \end{aligned}$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\begin{aligned} \cancel{\|x - y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{\|x - y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 & \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &= ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\ &= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} & \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &= \\ (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) &= \end{aligned}$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівність:

$$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \text{ що і завершує доведення.}$$

ЗАВДАННЯ 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

$C = \text{з.л.о. } \{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \in H$$

Розв'язання:

ЗАВДАННЯ 3

Завдання

Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\} (x_0 \neq 0, c \in \mathbb{R})$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

ЗАВДАННЯ 4

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ маємо

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

Звідки $\sup_{y \in C} (p, y) - (p, x) \leq -\|p\|^2 < 0$, що і треба було довести.