Завдання 2 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

15 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Нехай $x \in [0,1], n \in N$. Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n} - x)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Розв'язання:

Біном Ньютона

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Позначимо за $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$

Тоді $\frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(n-k)C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} - \cancel{\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1}} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} nC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} + \cancel{\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} nC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} xC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k(k-1)(1-x)^2 - 2k(n-k)x(1-x) +$$

$$(n-k)(n-k-1)x^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k^2 - k - \cancel{2xk^2} + 2xk + \cancel{x^2k^2} - \cancel{kx^2} - 2knx +$$

$$\cancel{2knx^2} + \cancel{2k^2x} - \cancel{2k^2x^2} + n^2x^2 - \cancel{nkx^2} - nx^2 - \cancel{knx^2} + \cancel{k^2x^2} + \cancel{kx^2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k^2 - k + 2kx - 2knx - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nx^2)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}k^2 = nx - 2nx^2 + 2n^2x^2 - n^2x^2 + nx^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}k^2 = x - x^2 + nx^2$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k}{n}(\tfrac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-x\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}}_{\mathbf{0}}=$$

$$=\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k(\tfrac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\tfrac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k^2}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}kxC_n^kx^k(1-x)^{n-k})=$$

$$=\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k^2}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-x^2=\tfrac{x-x^2+nx^2}{n}-x^2=\tfrac{x-x^2}{n}$$

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що якщо функція f зростає на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж зростає на $[0, 1]$.

Розв'язання:

нехай f зростаюча на $[0, 1]$ функція

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Тоді

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^k \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l x^l ==$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^{k+l}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k}, C_n^k C_{n-k}^l = C_n^k C_k^l$$

Тоді $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f(\tfrac{k}{n}) C_n^k x^{k+l} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(0) x^k$

Очевидно при зростаючій f, $\Delta^k f(0) > 0$, отже це поліном з додатніми коефіцієнтами - зростаюча функція.

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що якщо функція f опукла на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж опуклий на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай $f \in C([0,1])$ задовольняє умову: існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1]$$

Доведіть, що для всіх $n \in N$ вірна нерівність

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f,x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Розв'язання:

$$|f(x) - B_n(f,x)| = \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$|f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \leq L|x - \tfrac{k}{n}|$$

$$\max \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \leq \max \sum_{k=0}^{n} |x - \tfrac{k}{n}| = \max nx - n\sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} L\tfrac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Завдання 5

Завдання

Нехай $f \in C([0,1]^2)$. Покладемо для $x, y \in [0,1]$,

$$B_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} f(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що $B_n \to f$ рівномірно на $[0,1]^2$.

Розв'язання:

(Завдання було зроблено на основі Леми один з відповідної лекції)

Якщо $\|B_n - f\|$ збігається до нуля то рівномірна збіжність очевидна.

$$\|B_n - f\| = \|\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{n}) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i} -$$
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} f(x,y) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i}\| =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \|f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{n}) - f(x,y)\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i}$$

Нехай $\epsilon > 0$ задано. За теоремою Кантора інсують δ_1, δ_2 такі, що для

$$x', x'', y', y'' \in [0,1], \quad |x'-x''| < \delta_1, |y'-y''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x',y') - f(x'',y'')| < \epsilon$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \|f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{n}) - f(x,y)\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i} =$$
$$= \sum_{|x'-x''|<\delta_1 \wedge} \sum_{|y'-y''|<\delta_2} \|f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{n}) - f(x,y)\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i} +$$
$$+ \sum_{|x'-x''|>\delta_1 \vee} \sum_{|y'-y''|>\delta_2} \|f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{n}) - f(x,y)\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i} \leq$$
$$\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{k=0}^{n} (x - \tfrac{k}{n})^2 (y - \tfrac{i}{n})^2 C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k}(1-y)^{n-i} =$$
$$= \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \tfrac{x(1-x)y(1-y)}{n} = \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

Далі обераємо таке $N, \forall n > N, \frac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2\sigma_2^2} < \frac{\epsilon}{2}$

Тоді має місце рівність $\forall\epsilon > 0 : \|B_n - f\| < \epsilon$

Доведено!

Завдання 6

Завдання

Нехай функція $f \in C([0,1])$ така, що $\int\limits_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0,1]$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^1 f(x)x^n dx = 0 = \lim_{p\to\infty} \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{p} f(\tfrac{k}{p})C_p^k x^{k+n}(1-x)^{p-k} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} f(\tfrac{k}{p})C_p^k \int\limits_0^1 x^{k+n}(1-x)^{p-k} = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x(1-x) \geq 0, \forall x \in [0,1], \Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq k \quad f(\tfrac{k}{n}) = 0$$

Отже $f(x) = 0$ на $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\quad f \in C \Rightarrow f(x) = 0, x \in [0,1]$

Доведено!

(Також можна доводити за допомогою теореми Вейєрштраса, апроксимуючи функцію алебраїчним поліномом і отримаючи з рівняння, що одночасно всі коефіцієнти і при парних і при непарних степенях рівні 0)

Завдання 7

Завдання

Нехай $f \in C([0,1])$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1}_{\text{n}} f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Розв'язання:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1}_{\text{n}} f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1}_{\text{n}} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} \cdots \sum_{l=0}^{p} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{i}{p} \dots \tfrac{l}{p}) x_1^k (1-x_1)^{p-k} x_2^i (1-$$

$$x_2)^{p-i} \dots x_n^l (1-x_n)^{p-l} dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} f(\tfrac{k}{p}, \tfrac{i}{p}, \dots, \tfrac{l}{p})$$

$$\sum_{k=0}^{p} \int\limits_0^1 x_1^k (1-x_1)^{p-k} dx_1 \sum_{i=0}^{p} \int\limits_0^1 x_2^i (1-x_2)^{p-i} dx_2 \cdots \sum_{l=0}^{p} \int\limits_0^1 x_n^l (1-x_n)^{p-l} dx_n$$

Інтеграли однакові Отже

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} (\sum_{k=0}^{p} \int\limits_0^1 x_1^k (1-x_1)^{p-k} dx_1)^n$$

Завдання 8

Теорема Л.Фейєра

Нехай $f \in C_{2\pi}, S_n$ - часткова сума ряду Фур'є функції f по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на $\mathbb{R}$ збігається до f.

Розв'язання:

Підставляючи коефіцієнти Фур'є у формули для часткових сум одержуються загальні формули:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt\right) e^{ikx} = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt =$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

Після заміни змінних можна також написати

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

де $D_n(t)$ позначає відповідне ядро Діріхле. Тоді також

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n(t))dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)dt$$

де $F_n(t)$ позначає відповідне ядро феєра. Далі, враховуючи, що для всіх ядер Феєра $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$, також можна записати

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - f(x))F_n(t)dt$$

Оскільки ядро Феєра є невід'ємною функцією, то звідси:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t) - f(x)|F_n(t)dt$$

Оскільки $f\epsilon$ неперервною на проміжку $[-\pi, \pi]$, то вона на ньому рівномірно неперервною, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $|x-y| \leqslant \delta |f(x) - (y)| < \varepsilon/2$. Інтеграл із останньої рівності можна записати як суму $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t) - f(x)|F_n(t)dt = I_1 + I_2$, де:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}|f(x-t) - f(x)|F_n(t)dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi\geqslant|t|\geqslant\delta}|f(x-t) - f(x)|F_n(t)dt$$

Через рівномірну неперервність функції f і знову використавши рівність $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$, для першого інтегралу

$$I_1 < \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} \varepsilon F_n(t)dt = \varepsilon$$

Для другого інтегралу, якщо позначити $M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$, то

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\pi\geqslant|t|\geqslant\delta} 2MF_n(t)dt = \frac{M}{\pi}\int_{\pi\geqslant|t|\geqslant\delta} F_n(t)dt$$

Згідно властивостей ядра Феєра останній вираз прямує до нуля для великих n, тобто для достатньо великих n :

$$I_2 \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{\pi\geqslant|t|\geqslant\delta} F_n(t)dt < \varepsilon/2$$

Остаточно у цьому випадку

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|F_n(t)dt = I_1 + I_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Тобто $\sigma_n(x)$ прямує до $f(x)$ і крім того збіжність є рівномірною оскільки індекс n у доведенні вище був обраний єдиним для всіх x.

Доведено!

Завдання 9

Завдання

Нехай X, Y - компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq C(X), \exists\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} |f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y)| < \varepsilon$$

Розв'язання:

Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y)$ є алгеброю (за визначенням). Позначимо цю алгебру за A. Також очевидно з роздільності $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ на X та роздільності $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ на Y випливає роздільність данної алгебри на $X \times Y$. За визначенням $1 \in A$. Отже всі вимоги теореми Стоуна виконуються, тобто $clA = C(X \times Y)$

Отже $\forall f \in C(X \times Y), \forall \varepsilon > 0$

$\sup_{x \in X, y \in Y} |f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y)| < \varepsilon$

Доведено!

Завдання 10

Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується: $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\operatorname{cl} A = C(X)$.

Розв'язання:

Завдання 11

Означення 1

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множина S сильно розділяє точки множини , якщо $\forall x_1, x_2 \in , x_1 \neq x_2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \exists f \in S : f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2$

Означення 2

Нехай $S \subseteq C(X)$. Множину S називають решіткою, якщо $\forall f, g \in S$: $\max\{f, g\} \in S, \min\{f, g\} \in S$.

теорема Какутані–Крейна.

Нехай X — компакт, $S \subseteq C(X)$. Припустимо, що:

1) S — решітка;

2) S — замкнена підмножина $C(X)$;

3) S сильно розділяє точки множини X;

4) $1 \in S$

S співпадає з усім простором $C(X)$.

Розв'язання:

Завдання 12

Завдання

Пропонується узагальнити теорему Стоуна для локально компактного простору X. Нагадаємо, що простір X локально компактний, якщо кожна точка X має компактний окіл. Позначимо $C_\infty(X)$ — лінійний простір неперервних функцій $X \to \mathbb{R}$, що зникають у нескінченності, тобто $f \in C_\infty(X)$ мають властивість:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \subseteq X : |f(X)| < \epsilon, \forall x \notin K$$

Простір $C_\infty(X)$ з рівномірною нормою є банаховим. Доведіть таку теорему.

Теорема Стоуна для локально компактного простору.

Нехай X — локально компактний простір, $A \subseteq C_\infty(X)$.

Припустимо, що:

1) A — алгебра;

2) A розділяє точки множини X;

3) $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Тоді множина A щільна в $C_\infty(X)$.

Розв'язання:

Завдання 13

Завдання

Розглянемо комплексний банаховий простір $C_{\mathbb{C}}(X)$ заданих на компакті X неперервних функцій $X \to C$ (норма рівномірна). Для комплексних алгебр $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$ теорема Стоуна не вірна (чому?). Але цю ситуацію можна виправити, якщо вимагати від алгебри A ще одну умову. Доведіть таку теорему.

Теорема Стоуна для комплексних алгебр

Нехай X — компакт, $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$. Припустимо, що:

1) A — алгебра;

2) A розділяє точки множини X;

3) $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$;

4) $\forall f \in A$ функція f, визначена рівністю

$f(x) = f(x), x \in X$, належить A.

Тоді множина A щільна в $C_{\mathbb{C}}(X)$, тобто $clA = C_{\mathbb{C}}(X)$.

Розв'язання:

Завдання 14

Завдання

Нехай X — компактний метричний простір. Доведіть, що простір $C(X)$ сепарабельний.

Розв'язання: