

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Доповідь

**Прямі методи розв'язання різницевих рівнянь.
Методи матричної прогонки, редукції (декомпозиції),
застосування до розв'язання модельної задачі;
метод розділення змінних (Фур'є)**

Виконали студенти групи ОМ-4

Кроча Кирило

Коломієць Микола

Депенчук Марія

Київ, 2024

ЗМІСТ

1	Прямі методи розв’язання різницевих рівнянь	2
1.1	Загальний огляд	2
1.2	Загальна теорія лінійних різницевих рівнянь	2
1.3	Висновок	3
2	Методи матричної прогонки	4
3	Методи редукції (декомпозиції)	5
4	Застосування до розв’язання модельної задачі	7
4.1	Постановка задачі	7
5	Метод розділення змінних (Фур’є)	8
5.1	Загальний огляд. Постановка задачі	8
5.2	Розв’язок задачі знаходження власних чисел оператора Ла- пласа у прямокутнику	8
5.3	Висновок	10

РОЗДІЛ 1 ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Автор розділу - Кирило Кроча

1.1 Загальний огляд

Наразі для розв'язання систем лінійних різницевих рівнянь існують два основні типи рівнянь:

- Прямі методи;
- Ітеративні методи

Загалом, прямі методи частіше орієнтовані на розв'язання вузького класу рівнянь, але дозволяють нам знайти розв'язок з використанням дуже малої частини обчислювальних можливостей.

У цьому розділі ми розглянемо загальні ідеї прямих методів, що використовуються для розв'язання різницевих рівнянь. Для цього розглянемо важливий клас різницевих рівнянь - лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами.

1.2 Загальна теорія лінійних різницевих рівнянь

Нашою метою є знаходження лінійно незалежних розв'язків рівняння порядку m :

$$a_m y(i+m) + a_{m-1} y(i+m-1) + \dots + a_0 y(i) = 0$$

Ми будемо шукати розв'язки цього рівняння у формі $v(i) = q^i$. Підставляючи такий вигляд у рівняння, отримуємо:

$$q^i (a_m q^m + \dots + a_0) = 0$$

Але оскільки ми шукаємо ненульовий розв'язок, можна поділити на q^i :

$$(a_m q^m + \dots + a_0) = 0$$

Це рівняння називають характеристичним рівнянням, його корені можуть бути простими або кратними.

Припустимо, що вони прості, тоді можна показати що функції $v_1(i) = q_1^i, \dots, v_m(i) = q_m^i$ є лінійно незалежними розв'язками початкового рівняння. З цього випливає, що загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y(i) = c_1 q_1^i + \dots + c_m q_m^i$$

Де c_1, c_2, \dots, c_m - це довільні константи. Для кратних коренів можна отримати схожі результати, розв'язок буде мати наступний вид:

$$y(i) = \sum_{l=1}^s \sum_{n=0}^{n_l-1} c_n^{(l)} j^n q_l^j$$

Для знаходження розв'язку неоднорідного рівняння як суму загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівнянь, необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Для рівняння другого порядку його можна записати як:

$$\bar{y}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-2} \frac{q_2^{n-k-1} - q_1^{n-k-1}}{q_2 - q_1} \cdot \frac{f(k)}{a_2}$$

1.3 Висновок

Ми зрозуміли, що прямі методи грають важливу роль у вирішенні різницьових рівнянь, і хоча вони застосовні не до усіх видів рівнянь, іноді вони дозволяють значно скоротити час обчислень. Також ми розглянули деякі елементи теорії розв'язання лінійних різницьових рівнянь, що допоможе застосовувати прямі методи на практиці.

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МАТРИЧНОЇ ПРОГОНКИ

РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РЕДУКЦІЇ (ДЕКОМПОЗИЦІЇ)

Нехай на прямокутній сітці:

$$\omega = \{x_{i,j} = (ih_1, jh_2) \in G, 0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N, h_1 = l_1/M, h_2 = l_2/N\}$$

з границею γ , на прямокутнику $G = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ треба вирішити різнісну задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$y_{x_1, x_1} + y_{x_2, x_2} = -\phi(x), x \in \omega$$

$$y(x) = g(x), x \in \gamma$$

За допомогою зведення рівняння до рівняння першого порядку та з подальшою апроксимацією цієї системи різницевою схемою, отримаємо задачу виду:

$$-Y_{j-1} + CY_j - y_{j+1} = F_j$$

$$Y_0 = F_0, Y_N = F_N$$

Тут Y_j -вектор розмірності $M - 1$ елементами якого є значення сіткової функції $y(i, j) = y(x_{i,j})$ в внутрішніх j -тих вузлах сітки ω :

$$Y_j = (y(1, j), y(2, j), \dots, y(M - 1, j)), 0 \leq j \leq N$$

C - квадратна матриця розмірності $M - 1$ на $M - 1$, яка відповідає різницевому оператору Δ :

$$\Delta y = 2y - h_2^2 y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1,$$

$$y = 0, \quad x_1 = 0, l_1$$

Отже матриця C - є трьохдоганальною симетричною матрицею, F_j -

права частина, вектор розмірності $M - 1$:

1) для $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\mathbf{F}_j = (h_2^2 \bar{\varphi}(1, j), h_2^2 \varphi(2, j), \dots, h_2^2 \varphi(M - 2, j), h_2^2 \bar{\varphi}(M - 1, j)) ,$$

2) для $j = 0, N$:

$$\mathbf{F}_j = (g(1, j), g(2, j), \dots, g(M - 1, j)).$$

РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

4.1 Постановка задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f(x, y) \\ 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = Ae^{By} \sin \omega \\ u(x, 0) = A \sin \omega x \\ u(x, 1) = Ae^B \sin \omega x \\ f(x, y) = Ae^{By}(\omega^2 - B^2) \sin \omega x \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Розв'язок: $u(x, y) = Ae^{By} \sin(\omega x)$

Початкові значення: $A = B = 1, \omega = \pi$

РОЗДІЛ 5 МЕТОД РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ (ФУР'Є)

Автор розділу - Кирило Кроча

5.1 Загальний огляд. Постановка задачі

Метод розділення змінних, який також часто називають методом Фур'є (така назва впливає з того, що під час знаходження розв'язку використовується його розклад в скінченну суму Фур'є) - це один з багатьох методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Ефективність цього методу залежить від того, наскільки швидко ми зможемо обчислити коефіцієнти Фур'є, а також як швидко зможемо зробити обернене перетворення. Розглянемо приклад - маємо функцію $f(i)$ і ортонормовану систему $\mu_k(i)$, $k = 0, 1, \dots, N$, на сітці $\bar{\omega} = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, hN = l$, з коефіцієнтами перетворення Фур'є, обчисленими за формулою:

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^N f(i) \mu_k(i) h, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Для такого випадку, обчислення усіх φ_k потребує $(N + 1)(N + 2)$ операцій множення, і $N(N + 1)$ операцій додавання. Для довільної системи $\mu_k(i)$ це є мінімальна кількість необхідних операцій, але існують такі системи, на яких буде достатньо лише $O(N \ln N)$ обчислень.

5.2 Розв'язок задачі знаходження власних чисел оператора Лапласа у прямокутнику

Застосуємо метод розділення змінних для знаходження власних чисел λ_k та власних функцій $\mu_k(i, j)$ для оператора Лапласа.

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

Припустимо що в прямокутнику $G = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ маємо рівномірну прямокутну сітку $\bar{\omega}$ з кроками h_1, h_2 . Позначимо ω внутрішність, а γ межу сітки $\bar{\omega}$.

Найпростіша задача знаходження власних чисел для оператора Лапласа з граничними умовами Діріхле має вигляд: знайти такі значення параметру λ , що буде існувати нетривіальний розв'язок $y(x)$ наступної задачі:

$$\begin{cases} \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, x \in \omega \\ y(x) = 0, x \in \gamma \end{cases} \quad (5.1)$$

Ми будемо шукати власні функції (5.1), що відповідають власним числам λ_k , у вигляді:

$$\mu_k(i, j) = \mu_{k_1}^{(1)}(i) \mu_{k_2}^{(2)}(j), \quad k = (k_1, k_2)$$

Якщо підставимо функцію $\mu_k(i, j)$ на місце $y(x_{ij}) = y(i, j)$ в (1). Оскільки $\Delta_1 y(i, j) = \frac{1}{h_1^2} [y(i+1, j) - 2y(i, j) + y(i-1, j)]$, бачимо, що оператор Δ_1 діє на сіткову функцію, яка залежить від i . Аналогічно, оператор Δ_2 діє на функцію, що залежить від j . Таким чином, підставляючи вид власних функцій в (1), отримуємо:

$$\mu_{k_2}^{(2)}(j) \Delta_1 \mu_{k_1}^{(1)}(i) + \mu_{k_1}^{(1)}(i) \Delta_2 \mu_{k_2}^{(2)}(j) + \lambda_k \mu_{k_1}^{(1)}(i) \mu_{k_2}^{(2)}(j) = 0 \quad (5.2)$$

Для $1 \leq i \leq N_1 - 1$ і $1 \leq j \leq N_2 - 1$, і також:

$$\mu_{k_1}^{(1)}(0) = \mu_{k_1}^{(1)}(N_1) = 0, \quad \mu_{k_2}^{(2)}(0) = \mu_{k_2}^{(2)}(N_2) = 0$$

З (5.2) отримуємо:

$$\frac{\Delta_1 \mu_{k_1}^{(1)}(i)}{\mu_{k_1}^{(1)}(i)} = -\frac{\Delta_2 \mu_{k_2}^{(2)}(j)}{\mu_{k_2}^{(2)}(j)} - \lambda_k$$

І оскільки права частина не залежить від i , то і ліва частина також не залежить від i . Провівши такі самі міркування щодо залежності від j , легко зрозуміти, що права і ліва частини - константи. В результаті маємо одновимірні задачі:

$$\Lambda_1 \mu_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_1}^{(1)} \mu_{k_1}^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1$$

$$\mu_{k_1}^{(1)}(0) = \mu_{k_1}^{(1)}(N_1) = 0$$

Та

$$\Lambda_2 \mu_{k_2}^{(2)} + \lambda_{k_2}^{(2)} \mu_{k_2}^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1$$

$$\mu_{k_2}^{(2)}(0) = \mu_{k_2}^{(2)}(N_2) = 0$$

Розв'язки цих задач мають вигляд:

$$\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi}{2N_\alpha} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1$$

$$\mu_{k_1}^{(1)}(i) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{k_1 \pi i}{N_1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$$

$$\mu_{k_2}^{(2)}(j) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2}, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$$

Таким чином, власні функції та власні вектори для оператору Лапласа були знайдені:

$$\mu_k(i, j) = \mu_{k_1}^{(1)}(i) \mu_{k_2}^{(2)}(j) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi i}{N_1} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2}$$

$$0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2$$

$$\lambda_k = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}$$

Де $k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2$.

5.3 Висновок

Метод розділення змінних дозволив нам перетворити отриману задачу у декілька одновимірних, для яких було значно легше знайти власні числа і функції, що дозволить спростити розв'язок задачі.