Завдання 3 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

23 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

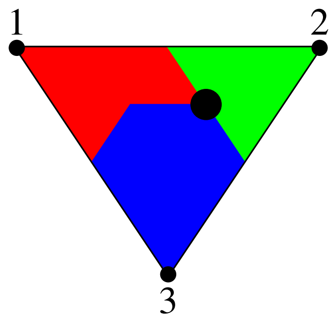
Нехай A_1, A_2, A_3 - набір замкнених підмножин трикутника $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ з вершинами v_1, v_2 та v_3. Нехай:

1. $\Delta = \bigcup_{k=1}^{3} A_k$;
2. $\forall k \in \{1, 2, 3\} : v_k \in A_k$;
3. $\forall k, i \in \{1, 2, 3\} : [v_k, v_i] \subseteq A_k \cup A_i$.

Доведіть, що $\bigcap_{k=1}^{3} A_k \neq \emptyset$.

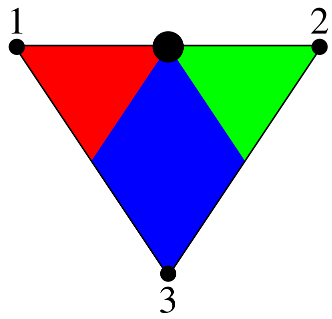
Розв'язання:

Подивимось на можливі розташування множин у трикутнику.



У подібних розташуваннях очевидно завжди буде спільна точка, що і належить перетину. Тож, щоб перетин був порожній треба розставити множини послідовно (щоб були два кольори які не торкаються).

Очевидно подібне не можливо адже відрізки з’єднуючі вершини мають належати відповідним об’єднанням тож послідовно множини розставити не вийде.



З цього випливає, що в будь-якому разі перетин не буде порожній.

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що всі опуклі компакти з непорожньою внутрішністю в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфні.

Розв'язання:

Доведемо подібне твердження в $\mathbb{R}$,

з цього випливе анологічне твердження в $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}$ опуклі компакти є замкненимим опуклими множинами - тобто зімкненими інтервалами.

Наведемо гомеоморфізм, який переведе компакт $[a, b]$ у компакт $[c, d]$

$f(x) = \frac{x-a}{b-a}(d + c) - c$

Для випадку $\mathbb{R}^n$ слід взяти вектор подібних функцій.

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Нехай $A \subseteq B^n$ - непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T : B^n \to B^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)-$ множина нерухомих точок відображення T.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Завдання 5

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$f\left(S^{n-1}\right) \subseteq B^n$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f\left(x_0\right) = x_0$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

В банахових просторах ℓ_2, c_0 та $C([-1,1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай H - нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабко неперервним.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай (X, d_X) , (Y, d_Y) – метричні простори, (Y, d_Y) – компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max\limits_{y \in Y} f(x, y)$. Доведіть, що $g \in C(X)$.

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, $Y-$ компакт. Доведіть, що відображення $T : X \to 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\}$$

замкнене (X, Y метричні простори).

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай A, B - непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y, відповідно. Функція $L : X \times Y \to \mathbb{R}-$ неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$

$$L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0) \quad \forall x \in A \forall y \in B$$

Розв'язання: