Завдання 1

Микола Коломієць

30 листопада 2023 р.

Зміст

1 задача

Умова

Дослідіть на диференційовність функцію

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

де $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\|A(x+h) - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h}$$

З лінійності оператора A можемо записати:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\|Ax + Ah - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h}$$

Застосуємо нерівність трикутника:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\|Ax + Ah - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{\|Ax - b\|^2 + 2\|Ax - b\|\|Ah\| + \|Ah\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{O(h) + O(h^2)}{h} = O(1)$$

Норма неперервна і $f'(x) = O(1)$ - отже $f(x)$ диференційовна.

2 задача

Умова

Дослідіть на диференційовність функцію

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

де $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - самоспряжений лінійний оператор, $b \in \mathbb{R}^n$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h) - \frac{1}{2}(Ax, x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{O(h)}{h} = O(1)$$

Скалярний добуток неперервний і $f'(x) = O(1)$ - отже $f(x)$ диференційовна.

3 задача

Умова

Нехай $f(x)$ - μ-опукла та диференційовна функція. Доведіть, що

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}||y - x||_2^2, \forall x, y \in E \tag{1}$$

Спочатку припустимо, що $f(x)$є сильно опуклим, потім

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &\leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 \\ \Rightarrow \frac{f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})}{\lambda} &\leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2}(1-\lambda)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Нехай $g(t) = f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})$ тоді $g(0) = f(\mathbf{y})$ і

$$g'(t) = \nabla f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\nabla f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

За теоремою про середнє існує $s \in (0, t)$ таке що $g'(s) = \frac{g(t)-g(0)}{t}$, тоді

$$\frac{f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(s) = (\nabla f(s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$(\nabla f(s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2}(1-t)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2.$$

Нехай $t \to 0$ тоді $s \to 0$, отримаємо $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + (\nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\mu}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$.

Отже властивість доведена

4 задача

Умова

Нехай $f(x)$ - μ-опукла та диференційовна функція. Доведіть, що

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu||x - y||_2^2 \tag{2}$$

Скористаємося завданням 3 і отримаємо дві нерівності:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}||y - x||_2^2$$

$$f(x) \geq f(y) + (\nabla f(y), x - y) + \frac{\mu}{2}||x - y||_2^2$$

Віднімемо від одного рівняння інше і отримаємо:

$$f(y) - (f(y) + (\nabla f(y), x - y) + \frac{\mu}{2}||x - y||_2^2) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}||y - x||_2^2 - f(x)$$

$$-(\nabla f(y), x - y) - \frac{\mu}{2}||x - y||_2^2 \geq -(\nabla f(x), x - y) + \frac{\mu}{2}||x - y||_2^2$$

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu||x - y||_2^2$$

Доведено.

5 задача

Умова

Нехай $f - \mu$-сильно опукла та L-гладка функція, x^* — точка мінімуму f. Доведіть, що для $x \in E$ має місце

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2$$

З 3 задачі маємо:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Покладемо $x = x^*, y = x$

$$f(x) \geq f(x^*) + (\nabla f(x^*), x - x^*) + \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2$$

врахуємо рівність $\nabla f(x^*) = 0$ (точка мінімуму - екстремум):

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2$$

6 задача

Умова

Нехай $f - \mu$-сильно опукла та L-гладка функція, x^* — точка мінімуму f. Доведіть, що для $x \in E$ має місце

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2$$

Для точок x, x^* з третьої задачі маємо:

$$f(x^*) \geq f(x) + (\nabla f(x), x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq (\nabla f(x), x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2 \leq \|\nabla f(x)\|\|x - x^*\| - \frac{\mu}{2}\|x - x^*\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \max_{\Delta x > 0}(\|\nabla f(x)\|\Delta x - \frac{\mu}{2}\Delta x^2) = \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2$$

Доведено

7 задача

Умова

Нехай $f : E \to R$ L-гладка функція. Доведіть, що

$$f(y) \leq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Розв'язок. Можемо записати

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)), y - x)dt = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x)dt.$$

Тоді

$$f(y) - f(x) - (\nabla f(x), y - x) = \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x)dt \leq \int_0^1 \|\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x)\| \cdot \|y - x\|dt$$

$$f(y) - f(x) - (\nabla f(x), y - x) \leq \int_0^1 tL\|y - x\|^2 dt = \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

Доведено.

8 задача

Умова

Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ — L-гладка функція. Доведіть, що

$$f(y) \leq f(x) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x)\|^2,$$

де $y = x - \frac{1}{L}\nabla f(x)$.

Розв'язок. Підставимо $y = x - \frac{1}{L}\nabla f(x)$ у нерівність 3 задачі 7:

$$f(y) \leq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2 = f(x) - \frac{1}{L}\|\nabla f(x)\|^2 + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x)\|^2 = f(x) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x)\|^2.$$

Доведено

9 задача

Умова

Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ - опукла гладка функція. Доведіть, що

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) \quad \forall x, y \in E.$$

Для опуклої функції f має місце нерівність

$$f(x + t(y - x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y) \quad t \in [0, 1].$$

Розділимо обидві частини на t і перенесемо $f(x)$:

$$f(y) \geq f(x) + \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t}.$$

При $t \to 0$ отримаємо нерівність з умови.

Доведено

10 задача

Умова

Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ - опукла гладка функція. Доведіть, що

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E.$$

Скористаємося результатом попередньої задачі для (x, y) та (y, x) :

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x),$$
$$f(x) \geq f(y) + (\nabla f(y), x - y).$$

Додаючи ці нерівності отримаємо

$$0 \geq (\nabla f(x), y - x) + (\nabla f(y), x - y),$$

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq 0.$$

що і треба було довести.