Завдання 3 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

20 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Нехай A_1, A_2, A_3 - набір замкнених підмножин трикутника $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ з вершинами v_1, v_2 та v_3. Нехай:

1. $\Delta = \bigcup_{k=1}^{3} A_k$;
2. $\forall k \in \{1, 2, 3\} : v_k \in A_k$;
3. $\forall k, i \in \{1, 2, 3\} : [v_k, v_i] \subseteq A_k \cup A_i$.

Доведіть, що $\bigcap_{k=1}^{3} A_k \neq \emptyset$.

Розв'язання:

Нехай $\bigcap_{k=1}^{3} A_k = \emptyset$

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що всі опуклі компакти з непорожньою внутрішністю в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфні.

Розв'язання:

Завдання 3

Завдання

Нехай $A \subseteq B^n$ - непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T : B^n \to B^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)-$ множина нерухомих точок відображення T.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Завдання 5

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$f\left(S^{n-1}\right) \subseteq B^n$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f\left(x_0\right) = x_0$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

В банахових просторах ℓ_2, c_0 та $C([-1,1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай H - нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабко неперервним.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) – метричні простори, (Y, d_Y) – компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max\limits_{y \in Y} f(x, y)$. Доведіть, що $g \in C(X)$.

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, $Y-$ компакт. Доведіть, що відображення $T : X \to 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\}$$

замкнене (X, Y метричні простори).

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай A, B - непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y, відповідно. Функція $L : X \times Y \to \mathbb{R}-$ неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$

$$L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0) \quad \forall x \in A \forall y \in B$$

Розв'язання: