Завдання 1 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

6 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H. Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2,\ \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\|P_C x - P_C y\|^2 = \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 =$$

$$\|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 =$$

$$= \|x-y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\cancel{\|x-y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq}$$

$$\cancel{\|x-y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 = ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) =$$

$$= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\leq}$$

$$\cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))}$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\geq} 0$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) =$$

$$(P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) =$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \overset{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x$:

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівеість:

$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2$, що і завершує доведення.

Завдання 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

C = з.л.о. $\{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, x \in H$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H$. Тоді розклад вектора $P_C x$ можна записати так

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x + x, e_n)e_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}((P_C x - x, e_n) + (x, e_n))e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x, e_n)e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

C - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно $e_n \in C$.

Тоді за теоремою 4 другої лекції $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(P_C x - x, e_n)}_{0}e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

Доведено

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}(x_0 \neq 0, c \in R)$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

Розглянемо скалярний добуток:

$$(x - P_L x, x_0) = (x_0, x - P_L x) | * x_0$$

$$(x - P_L x, x_0)x_0 = (x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0(x_0, x - P_L x) = x_0((x_0, x) - (x_0, P_L x))$$

За визначенням $P_L x \in L$, а отже $(x_0, P_L x) = c$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0((x_0, x) - c) | * \tfrac{1}{\|x_0\|^2}$$

$$(x - P_L x) = ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Звідси отримуєм, що

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}, \text{ доведено}$$

Завдання 4

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору $H, x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Повне доведення:

C замкнена множина отже замість $\sup$ можна інтерпритувати умову як

$$\forall y \in C, \exists p \in H \backslash \{0\} \quad (p, y) < (p, x)$$

Доведення проводимо від супротивного. Нехай $\exists y \in C$ такий що

$$\forall p \in H \backslash \{0\} \quad (p, y) \geq (p, x)$$

$$(p, y) - (p, x) = (p, y - x) \geq 0$$

$$(-p, y - x) \leq 0$$

Подивившись на теорему 2 другої лекції (а саме на її другий пункт) стає очевидно, що за $-p$ варто взяти $P_C x - x$. Тоді отримаємо

$$(P_C x - x, y - x) = (P_C x - x, y - P_C x + P_C x - x) =$$

$$= (P_C x - x, y - P_C x) + (P_C x - x, P_C x - x) \leq 0$$

За теоремою 2 з лекції 2 (пункт 2) $(P_C x - x, y - P_C x) \geq 0$

$(P_C x - x, P_C x - x) = \|P_C x - x\|^2 > 0$ адже $x \in H \setminus C, x \neq P_C x$

Доведено

Швидке доведення:

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ з теореми 2 другої лекції (пункт 2) маємо $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < (p, x)$, що і треба було довести.

Завдання 5

Завдання

Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору $H, \dim H < +\infty, x \in H \backslash C$. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, x)$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H \backslash C$. За теоремою Хана-Банаха про розділення, існує неперервний лінійний функціонал $f : H \to R$ та дійсне число α, такі що

$$f(y) \leq \alpha < f(x), \forall y \in C$$

Оскільки H має скінченну розмірність, з теореми Ріса випливає, що

$$\exists p \in H : f(z) = (p, z), \forall z \in H$$

Тоді отримаємо: $(p, y) \leq \alpha < (p, x)$. Отже $\sup\limits_{y \in C}(p, y) \leq (p, x)$

Завдання 6

Завдання

Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$ і D обмежена. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$$

Розв'язання:

Для доведення даного твердження ми використаємо принцип роздільності Гансена-Банаха, який стверджує, що для будь-яких непорожніх замкнених опуклих множин A, B з таким, що $A \cap B = \emptyset$, існує гіперплощина, яка розділяє A та B, тобто існує $p \in H \backslash 0$ та $c \in R$, такі що $(p, x) \leq c < (p, y)$ для будь-яких $x \in A$ та $y \in B$.

Застосуємо цей принцип до множин C та $\mathrm{conv}(D)$, де $\mathrm{conv}(D)$ позначає опуклу оболонку множини D, тобто найменшу опуклу множину, яка містить D. Зауважимо, що $\mathrm{conv}(D)$ є замкненою та обмеженою опуклою множиною, оскільки D є замкненою та обмеженою. Далі, оскільки $C \cap D = \emptyset$, то $C \cap \mathrm{conv}(D) = \emptyset$. Отже, за принципом роздільності Гансена-Банаха, існує

$p \in H\backslash 0$ та $c \in R$, такі що $(p, x) \leq c < (p, y)$ для будь-яких $x \in C$ та $y \in \mathrm{conv}(D)$.

Залишилося показати, що $\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$. Для цього зауважимо, що $\inf_{x \in D}(p, x) \leq \inf_{x \in \mathrm{conv}(D)}(p, x)$. Оскільки D є замкненою та обмеженою, то $\mathrm{conv}(D)$ також є замкненою та обмеженою. Тому, згідно з теоремою про існування інфімуму, існує точка $z \in \mathrm{conv}(D)$, така що $\inf_{x \in \mathrm{conv}(D)}(p, x) = (p, z)$. З іншого боку, $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, w)$ для будь-якої точки $w \in H$, оскільки C є підмножиною H. Зокрема, $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, z)$. Але з принципу роздільності Гансена-Банаха $(p, x) \leq c < (p, y)$ для будь-яких $x \in C$ та $y \in \mathrm{conv}(D)$. Тому, вибравши будь-яку точку $y \in \mathrm{conv}(D)$, отримаємо $(p, z) > c \geq (p, x)$ для будь-якої точки $x \in C$, тобто $\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$. Цим доведено твердження.

Завдання 7

Завдання

Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1. C — слабко секвенційно замкнена множина.
2. C — замкнена множина.
3. C — слабко замкнена множина.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

1. Якщо припустити, що множина $C - D = c - d : c \in C, d \in D$ опукла та замкнена, то $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.
2. Якщо припустити, що $\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла, то $\exists p \in H \ \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) \leq \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо $C = cl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \to P_C x$.

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \to P_C x$.

Розв'язання: