Завдання 2

Микола Коломієць

8 лютого 2024 р.

Розв'язання

Завдання 1

1. Перевірити чи є вказаний функціонал f на просторі E лінійним та неперервним. У випадку лінійного функціоналу обчислити його норму.

1.1)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)}, E = c_0, x = (x_1, x_2, \dots)$

$$f(ax+by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a \frac{x_k}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b \frac{y_k}{k(k+1)} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)} = |x \in c_0| = f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0}{k(k+1)} = x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = x_0$$

$$\text{де } x_0 = \max_{x_k \in x} x_k = \|x\| \Rightarrow f(x) \leq \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

1.2)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_2, x = (x_1, x_2, \dots)$

$$f(ax+by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k} = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - \text{Нерівність Гельдера}$$

$$f(x) \leq \|x\| \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \|f\| = \frac{\pi^2}{6}$$

1.3)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_1, x = (x_1, x_2, \dots)$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

1.4) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_4, x = (x_1, x_2, \dots)$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^4} (\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

$$\|f\| = (\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

1.5) $f(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\mathrm{d}t, E = C([0,1])$

Інтеграл - лінійна функція, отже і наш функціонал лінійний

$$|f(x)| = \int_0^2 t^2|x(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x| \int_0^1 t^2 dt = \|x\|\frac{1}{3} \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{3}$$

1.6) $f(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\mathrm{d}t, E = L_2([0,1])$

$$|f(x)| = \int_0^1 t^2 x(t)dt \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 t^4 dt} = \|x\|\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \|f\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1.7) $f(x) = \int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(t)x(t)\mathrm{d}t, E = L_2([-1,1])$

$$|f(x)| = |\int_{-1}^1 sgn(t)x(t)dt| \leq \sqrt{\int_{-1}^1 x^2(t)dt}\sqrt{\int_{-1}^1 sgn^2(t)dt} = \|x\|2 \Rightarrow \|f\| = 2$$

1.8) $f(x) = \int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(t)x(t)\mathrm{d}t, E = C([-1,1])$

$$|f(x)| = |\int_{-1}^1 sgn(t)x(t)dt| = |\int_{-1}^0 -x(t)dt + \int_0^1 x(t)dt| \leq |\int_{-1}^0 -x(t)dt| + |\int_0^1 x(t)dt| \leq$$

$$\leq |\max_{t\in[-1,0]} x(t)| + |\max_{t\in[0,1]} x(t)| \leq \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

1.9) $f(x) = \int_{-1}^1 x^2(t)\mathrm{d}t, E = C([-1,1])$

$$|f(x)| = |\int_{-1}^1 x^2(t)dt| \leq \max_{t\in[-1,1]} x(t)2 = 2\|x\| \Rightarrow \|f\| = 2$$

1.10) $f(x) = x(0), E = C([-1,1])$

$$|f(x)| = |x(0)| \leq \max_{t\in[-1,1]} x(t) = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

1.11) $f(x) = 2x(-1) - x(1), E = C([-1,1])$

$$|f(x)| = |2x(-1) - x(1)| \leq 3\|x\|(\text{досягається при } x(-1) = -x(1) = maxx)\|f\| = 3$$

1.12) $f(x) = x(0), E = C([0,1]), |x\|_E = \int_0^1 |x(\xi)\mid d\xi$

Нехай $\exists c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c\|x\|$

$$x_n(t) = \begin{cases} n - n^2 t, t < \frac{1}{n} \\ 0, t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$|f(x)| = n, \|x\| = n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, n \leq c\frac{1}{2} \Rightarrow \text{функціонал не неперервний}$$

1.13) $f(x) = x'(0) + x(1), E = C(1)([0,1]), |x| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$

$$|f(t)| = |x`(0) + x(1)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

Завдання 2

2. Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ - ненульовий ЛНФ. Довести, що область значень f співпадає з $\mathbb{R}$.

$$f - \text{ненульовий лінійний функціонал, отже нехай } \exists x \in E, f(x) = a \neq 0$$

$$\text{тоді } f(\frac{\alpha}{a}x) = \alpha, \forall \alpha \in R$$

Це і доводить, що область значень f співпадає з $\mathbb{R}$.

Завдання 3

3. Нехай $E-$ ЛНП і $f, g \in E^*$ такі, що $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Доведіть, що існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що $g = \alpha f$.

$$\forall x \in \operatorname{Ker} f, f(x) = 0 = g(x)$$

$$\forall x \in \operatorname{Ker} g / \operatorname{Ker} f, g(x) = 0 \neq f(x)$$

Тут наче жодне α крім 0 не підійде, а при $\alpha = 0$ $g = 0$ тобто його ядро це весь простір і це єдиний випадок коли це вірно в глобальному сенсі. (можливо десь помилка)

Завдання 4

4. Нехай X_1, X_2- ЛНП, $X_1 \subset X_2$ і зі збіжності $x_n \to x$ у просторі X_1 випливає збіжність $x_n \to x$ у просторі X_2. Для довільного $f \in X_2^*$ покладемо $g(x) = f(x), x \in X_1$. Доведіть, що $g \in X_1^*$.

Доведення

Це досить очевидне твердження зважаючи на те що $g(x)$ лінійний за побудовою, і неперервний через те що зі збіжності $x_n \to x$ у просторі X_1 випливає збіжність $x_n \to x$ у просторі X_2.