Завдання 2 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

14 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Нехай $x \in [0,1], n \in N$. Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Розв'язання:

Біном Ньютона

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Позначимо за $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$

Тоді $\frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(n-k)C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} - \cancel{\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1}} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} nC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} + \cancel{\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} nC_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} xC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k(k-1)(1-x)^2 - 2k(n-k)x(1-x) +$$
$$(n-k)(n-k-1)x^2) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k^2 - k - \cancel{2xk^2} + 2xk + \cancel{x^2k^2} - \cancel{kx^2} - 2knx +$$
$$\cancel{2knx^2} + \cancel{2k^2x} - \cancel{2k^2x^2} + n^2x^2 - \cancel{nkx^2} - nx^2 - \cancel{knx^2} + \cancel{k^2x^2} + \cancel{kx^2}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}(k^2 - k + 2kx - 2knx - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nx^2)$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}k^2 = nx - 2nx^2 + 2n^2x^2 - n^2x^2 + nx^2$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-2}(1-x)^{(n-k-2)}k^2 = x - x^2 + nx^2$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k}{n}(\tfrac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-x\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}}_{\mathbf{0}}=$$

$$=\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k(\tfrac{k}{n}-x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\tfrac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k^2}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}kxC_n^kx^k(1-x)^{n-k})=$$

$$=\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{k^2}{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-x^2=\tfrac{x-x^2+nx^2}{n}-x^2=\tfrac{x-x^2}{n}$$

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що якщо функція f зростає на $[0,1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f,\cdot)$ теж зростає на $[0,1]$.

Розв'язання:

нехай f зростаюча на $[0,1]$ функція

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

Тоді

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^k \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k}(-1)^l x^l ==$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k}(-1)^l f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^{k+l}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}, C_n^k C_{n-k}^l = C_n^k C_k^l$$

Тоді $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k}(-1)^l f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^{k+l} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(0) x^k$

Очевидно при зростаючій f, $\Delta^k f(0) > 0$, отже це поліном з додатніми коефіцієнтами - зростаюча функція.

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що якщо функція f опукла на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж опуклий на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай $f \in C([0,1])$ задовольняє умову: існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1]$$

Доведіть, що для всіх $n \in N$ вірна нерівність

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f,x)| \le \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Розв'язання:

$$|f(x) - B_n(f,x)| = \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$|f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \le L|x - \tfrac{k}{n}|$$

$$\max \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \le \max \sum_{k=0}^{n} |x - \tfrac{k}{n}| = \max nx - n\sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \sum_{k=0}^{n} L\tfrac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Завдання 5

Завдання

Нехай $f \in C([0,1]^2)$. Покладемо для $x, y \in [0,1]$,

$$B_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} f(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що $B_n \to f$ рівномірно на $[0,1]^2$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

Нехай функція $f \in C([0,1])$ така, що $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$

Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай $f \in C([0,1])$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{n}} f(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Розв'язання:

Завдання 8

Теорема Л.Фейєра

Нехай $f \in C_{2\pi}, S_n$ - часткова сума ряду Фур'є функції f по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на $\mathbb{R}$ збігається до f.

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай X, Y - компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq C(X), \exists \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} |f(x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y)| < \varepsilon$$

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується: $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\operatorname{cl} A = C(X)$.

Розв'язання: