

Завдання 2 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

7 травня 2023 р.

Зміст

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	3
3	Завдання 3	4
4	Завдання 4	5
5	Завдання 5	6
6	Завдання 6	7
7	Завдання 7	8
8	Завдання 8	9
9	Завдання 9	10
10	Завдання 10	11

Завдання 1

Завдання

Нехай $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Розв'язання:

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що якщо функція f зростає на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж зростає на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що якщо функція f опукла на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж опуклий на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$ задовольняє умову: існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ вірна нерівність

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Розв'язання:

Завдання 5

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1]^2)$. Покладемо для $x, y \in [0, 1]$,

$$B_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що $B_n \rightarrow f$ рівномірно на $[0, 1]^2$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

Нехай функція $f \in C([0, 1])$ така, що $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Розв'язання:

Завдання 8

Теорема Л.Фейєра

Нехай $f \in C_{2\pi}$, S_n - часткова сума ряду Фур'є функції f по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на \mathbb{R} збігається до f .

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай X, Y - компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq C(X), \exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y) \right| < \varepsilon$$

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується: $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\text{cl } A = C(X)$.

Розв'язання: