

## Домашнє завдання з заняття 5

### Простір основних функцій

Розглянемо функцію

$$\omega_\varepsilon(t) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right), & |t| < \varepsilon; \\ 0, & |t| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

де стала  $c_\varepsilon$  підібрана так, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t) dt = 1.$$

1. Зобразити графік функції  $\omega_\varepsilon(t)$ .
2. Довести, що  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  для довільного  $\varepsilon > 0$ .
3. Довести, що для довільних  $r > 0, a \in \mathbb{R}$  функція

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a-r, a+r)}(s) \omega_\varepsilon(t-s) ds$$

належить простору  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

4. Нехай  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Чи будуть збіжними в  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  такі послідовності

- $(n^{-1}\varphi(t))_{n=1}^\infty$ ,
- $(n^{-1}\varphi(nt))_{n=1}^\infty$ ,
- $(n^{-1}\varphi(n^{-1}t))_{n=1}^\infty$ ?

5. Нехай  $\varphi_n \rightarrow \varphi, \psi_n \rightarrow \psi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Доведіть, що  $\varphi_n + \psi_n \rightarrow \varphi + \psi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
6. Нехай  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Доведіть, що  $\lambda\varphi_n \rightarrow \lambda\varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  для довільного  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
7. Нехай  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  і  $\nu \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Доведіть, що  $\nu\varphi_n \rightarrow \nu\varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
8. Нехай  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Доведіть, що  $\frac{d^k}{dx^k}\varphi_n \rightarrow \frac{d^k}{dx^k}\varphi$  у просторі  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  для довільного  $k \in \mathbb{N}$ .

### Що треба почитати?

- [1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин *Элементы теории функций функционального анализа*. С.203–206.
- [2] Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель *Функциональный анализ*, С. 333–337.