Завдання 1

Микола Коломієць

1 лютого 2024 р.

Розв'язання

Завдання 1

1. Досліджити на збіжність послідовність x_n у вказаних просторах.

1.1) $x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots), E = l_2$

$$x_n \to 0 \in l_2 \text{ адже, } \|x_n\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n)^2}} = \frac{1}{n} \to 0$$

1.2) $x_n = (\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, 0, \dots), E = l_2$

$$x_n \text{не збігається в } l_2 \text{ адже, } x_n \to_{(\text{поточково})} (\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots) = x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty \Rightarrow x \notin l_2$$

1.3) $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, 0, \dots\right), E = c_0$

$$x \in c_0, \|x - x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

1.4) $x_n = \left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, 0, \dots\right), E = l_1$

$$x \to_{(\text{поточково})} (\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots) = x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow x \in l_1, \|x - x_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

1.5) $x_n = (\underbrace{\frac{1}{\ln n}, \frac{1}{\ln n}, \dots, \frac{1}{\ln n}}_{n}, 0, 0, 0, \dots), E = l_2$

$$x_n \to_{(\text{поточково})} (\frac{1}{\ln 1}, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \dots) = x, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \to \infty \Rightarrow x \notin l_2$$

1.6) $x_n = (\underbrace{\frac{n^2+1}{n^2}, \frac{n^2+2}{n^2}, \dots, \frac{n^2+n}{n^2}}_{n}, 1, 1, 1, \dots), E = c$

$$x_n \to_{(\text{поточково})} (1, 1, \dots) = x \in c, \|x - x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$$

1.7) $x_n(t) = t^n, E = L_2([0,1])$

$$x_n(t) \to_{(\text{поточково})} x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1 \end{cases} x_n(t) - x(t) = \begin{cases} t^n, & t \in [0,1) \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

$$\|x_n - x\| = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Завдання 1

1.8) $x_n(t) = t^n, E = C([0,1])$

$$x \notin C$$

1.9) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}, E = C([0,1])$

$$x_n \to_{\text{(поточково)}} x(t) = 0 \in C, \|x_n - x\| = \max_{[0,1]} x_n(t) = \max_{[0,1]} t^n(1-t) \to 0$$

1.10) $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}, E = C([0,1])$

$$x_n \to_{\text{(поточково)}} x(t) = \sin t \in C, \|x - x_n\| = \max_{[0,1]} x_n(t) = \max_{[0,1]} \sin \frac{t}{n} \to 0$$

1.11) $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}, E = L_3([0,1])$

$$\|x - x_n\|^3 = \int_0^1 \sin^3 \frac{t}{n} dt \to 0$$

1.12)$x_n(t) = \min\{1, n|t|\}, E = L_1([-1,1])$

$$x_n \to_{\text{(поточково)}} x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1,0)U(0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases} \|x - x_n\| = \int_{-1}^1 x(t) - x_n(t) dt = \frac{1}{n} \to 0$$

1.13) $x_n(t) = \min\{1, n|t|\}, E = C([-1,1])$

$$x \notin C$$

Завдання 2

Показати що вирази

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt, \|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

є нормами на множині $C([0,1])$. Чи будуть ці норми еквівалентними?

1. $\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$
   (а) $\|x\|_1 \geq 0, \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ інтеграл - площа під графіком, $|x|$ - невід'ємна отже рівність лише при тотожньому нулі
   (б) $\|\alpha x\|_1 = \int_0^1 |\alpha x(t)|dt = |\alpha| \int_0^1 |x(t)|dt = |\alpha|\|x\|_1$
   (в) $\|x+y\|_1 = \int_0^1 |x(t)+y(t)|dt \leq \int_0^1 |x(t)|dt + \int_0^1 |y(t)|dt = \|x\|_1 + \|y\|_1$
2. $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$
   (а) $\|x\|_\infty \geq 0, \|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$ очевидно
   (б) $\|\alpha x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\alpha x(t)| = |\alpha| \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = |\alpha|\|x\|_\infty$
   (в) $\|x+y\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)+y(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |y(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Якщо не помиляюсь то за теоремою Рімана (та і загалом якщо мажорувати інтеграл прямокутником) отримаємо нерівність:

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt \leq \max_{[0,1]} |x| = \|x\|_\infty$$

Тож норми можна вважати еквівалентними (якщо я правильно розумію, що це означає)

Завдання 3

Довести, що $C([a,b]) \subset L_2([a,b])$, причому для довільного елемента $x \in C([a,b])$ має місце нерівність

$$\|x\|_{L_2[a,b]} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{C[a,b]}.$$

За теоремою Рімана (це не точно)

$$\|x\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \leq \sqrt{(b-a)\max_{[a,b]} |x|^2} = \sqrt{b-a}\|x\|_{C[a,b]}$$

Отже $\forall x \in C[a,b], x \in L_2[a,b]$

Завдання 4

Показати, що ЛНП простір $X = C([-1, 1])$ з нормою

$$\|x\|_1 = \int_{-1}^{1} |x(t)|dt, x \in X$$

не є повним.

Тут очевидно треба придумати приклад фундаментально послідовності, яка збігається по нормі до функції, яка не належить $C([-1, 1])$.

Наприклад, $x_n(t) = t^{2n}$ збігається по нормі до $x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-1, 1) \\ 1, & |t| = 1 \end{cases} \notin C([-1, 1])$