КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Доповідь

Прямі методи розв'язання різницевих рівнянь. Методи матричної прогонки, редукції (декомпозиції), застосування до розв'язання модельної задачі; метод розділення змінних (Фур'є)

Виконали студенти групи ОМ-4
Кроча Кирило
Коломієць Микола
Депенчук Марія

Київ, 2024

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МАТРИЧНОЇ ПРОГОНКИ

РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РЕДУКЦІЇ (ДЕКОМПОЗИЦІЇ)

Нехай на прямокутній сітці:

$$\omega = \{x_{i,j} = (ih_1, jh_2) \in G, 0 \le i \le M, 0 \le j \le N, h_1 = l_1/M, h_2 = l_2/N\}$$

з границею γ, на прямокутнику $G = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ треба вирішити різнісну задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$y_{x_1,x_1} + y_{x_2,x_2} = -\phi(x), x \in \omega$$

$$y(x) = g(x), x \in \gamma$$

За допомогою зведення рівняння до рівняння першого порядку та з подальшою апроксимацією цієї системи різницевою схемою, отримаємо задачу виду:

$$-Y_{j-1} + CY_j - y_{j+1} = F_j$$
$$Y_0 = F_0, Y_N = F_N$$

Тут Y_j-вектор розмірності $M - 1$ елементами якого є значення сіткової функції $y(i, j) = y(x_{i,j})$ в внутрішніх j-тих вузлах сітки ω:

$$Y_j = (y(1, j), y(2, j), \dots, y(M - 1, j)), 0 \le j \le N$$

C- квадратна матриця розмірності $M - 1$ на $M - 1$, яка відповідає різницевому оператору Δ:

$$\Lambda y = 2y - h_2^2 y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1,$$
$$y = 0, \quad x_1 = 0, l_1$$

Отже матриця C- є трьохдоганальною симетричною матрицею, F_j-

права частина, вектор розмірності $M-1$:

1) для $j=1,2,\ldots,N-1$

$$\boldsymbol{F}_j=\left(h_2^2\bar{\varphi}(1,j),h_2^2\varphi(2,j),\ldots,h_2^2\varphi(M-2,j),h_2^2\bar{\varphi}(M-1,j)\right),$$

2) для $j=0,N$:

$$\boldsymbol{F}_j=(g(1,j),g(2,j),\ldots,g(M-1,j)).$$

РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

4.1 Постановка задачі

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f(x, y) \\ 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = Ae^{By} \sin \omega \\ u(x, 0) = A \sin \omega x \\ u(x, 1) = Ae^{B} \sin \omega x \\ f(x, y) = Ae^{By}(\omega^2 - B^2) \sin \omega x \end{cases} \tag{4.1}$$

Розв'язок: $u(x, y) = Ae^{By} \sin(\omega x)$

Початкові значення: $A = B = 1, \omega = \pi$

РОЗДІЛ 5 МЕТОД РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ (ФУР'Є)