Контрольна робота

Микола Коломієць

26 листопада 2023 р.

Зміст

1 Перша задача

Задача 1

Дослідіть на диференційовність функцію

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

де $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - самоспряжений лінійний оператор, $b \in \mathbb{R}^n$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h) - \frac{1}{2}(Ax, x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{O(h)}{h} = O(1)$$

Отже функція $f(x)$ диференційовна в $\mathbb{R}^n$.

2 Друга задача

Друга задача

Нехай $f(x)$ - μ-опукла та диференційовна функція. Доведіть, що

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}||y - x||_2^2, \forall x, y \in E \tag{1}$$

За означенням μ-опуклості маємо, що

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu||x - y||_2^2 \tag{2}$$

За теоремою Лагранжа маємо, що

$$f(y) - f(x) = (\nabla f(x), y - x) + \frac{1}{2}(\nabla f(x) - \nabla f(y), y - x) \tag{3}$$

Підставляючи (2) в (3) маємо

$$f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}||x - y||_2^2 \tag{4}$$

Доведено