Завдання 3

Микола Коломієць

14 лютого 2024 р.

Розв'язання

Завдання 1

Дослідити послідовності на слабку збіжність.

1.1)$x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots), E = l_p, 1 < p < \infty$

$$\forall f \in E^*, \exists a \in l_q : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k x^k$$

$$\text{Тоді } f(x_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^q}{(k-n+1)^q}, \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q} < \infty \Rightarrow a_k \to 0, q > 1$$

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k^q}{(k-n+1)^q} < \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{(k-n+1)^d}, d > 1 \Rightarrow f(x_n) \to f(0) = 0$$

1.2)$x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots), E = l_p, 1 < p < \infty$

$$\forall f \in E^* |f(x_n)| < |f(x_n^*)| \Rightarrow f(x_n) \to 0$$

Де x_n^* з минулого номера

1.3)$x^{(n)} = t^n, E = L_p([0, 1]), 1 \leq p < \infty$

$$\forall f \in L_p^* \exists a \in L_q : f(x) = \int_0^1 x(t)a(t)dt$$

$$0 < \int_0^1 x_n(t)a(t)dt \leq \max_{t \in [0,1]} a \int_0^1 x_n(t)dt$$

Звідси $f(x_n) \to 0, x_n \to 0$

1.4)$x^{(n)} = \sqrt{n}\chi_{[0, \frac{1}{n}]}, E = L_p([0, 1]), 1 \leq p \leq \infty$

Відкинемо значення p при яких $\|x_n\|$ необмежена

$$\|x_n\| = \sqrt[p]{\int_0^1 x_n^p(t)dt} = \sqrt[p]{\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n^p}dt} = n^{\frac{p-1}{2p}}$$

При $p > 1, \|x_n\| \to \infty$

Залишається перевірити $p = 1$

$$\int_0^{\xi} x_n(t)dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Завдання 2

Дослідити послідовності функціоналів на *-слабку збіжність та перевірити чи збіжна ця послідовність за нормою.

2.1) $f_n(x) = \int_0^1 x(t)\cos(2\pi nt)dt, E = L_2([0,1])$

$$f_n = \int_0^{2\pi} x(\frac{t}{2\pi})\cos(nt)dt$$

Якщо подивитись на графік косинуса стає очевидно, що зі з збільшенням n густина хвильок стає більшою, при ліміті $n \to \infty$ в інтегралі кожне значення x на відрізку $[0,1]$ нівелюється протилежним (з множником відповідної хвилі) і залишиться лише множина міри нуль, тобто $f_n(x) \to 0$.

Це якесь не дуже строге доведення, за нормою взагалі хз як доводити.

2.2) $f_n(x) = n\int_0^{\frac{1}{2n}}(1-2nt)x(t)dt, E = C([0,1])$

З геометричного визначення інтегралу маємо:

$$f_n(x) = n\int_0^{\frac{1}{2n}}(1-2nt)x(t)dt \to nfrac12nx(0) = \frac{x(0)}{2}$$

2.3) $f_n(x) = n\int_0^1 t^n x(t)dt, E = C([0,1])$

$$f_n(x) = n\int_0^1 t^n x(t)dt \to 0$$