Завдання 1 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

1 травня 2023 р.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H. Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \ \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\|P_C x - P_C y\|^2 = \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 =$$

$$= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\cancel{\|x - y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq} \cancel{\|x - y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 = ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) =$$

$$= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\leq} \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))}$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \overset{?}{\geq} 0$$

$$(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) = (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) =$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \overset{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівеість:

$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2$, що і завершує доведення.

ЗАВДАННЯ 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та C = з.л.о. $\{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, x \in H$$

Розв'язання: