

Завдання 2

Микола Коломієць

7 лютого 2024 р.

Завдання 1

1. Перевірити чи є вказаний функціонал f на просторі E лінійним та неперервним. У випадку лінійного функціоналу обчислити його норму.

$$1.1) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)}, E = c_0, x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$f(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a \frac{x_k}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b \frac{y_k}{k(k+1)} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)} = |x \in c_0| = f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0}{k(k+1)} = x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = x_0$$

$$\text{де } x_0 = \max_{x_k \in x} x_k = \|x\| \Rightarrow f(x) \leq \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

$$1.2) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_2, x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$f(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k} = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - \text{Нерівність Гельдера}$$

$$f(x) \leq \|x\| \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \|f\| = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1.3) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_1, x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq$$

$$1.4) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_4, x = (x_1, x_2, \dots)$$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}$$

$$1.5) f(x) = \int_0^1 t^2 x(t) dt, E = C([0, 1])$$

Інтеграл - лінійна функція, отже і наш функціонал лінійний

$$|f(x)| = \int_0^1 t^2 |x(t)| dt \leq \max_{t \in [0, 1]} |x| \int_0^1 t^2 dt = \|x\| \frac{1}{3} \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{3}$$

$$1.6) f(x) = \int_0^1 t^2 x(t) dt, E = L_2([0, 1])$$

$$|f(x)| = \int_0^1 t^2 x(t) dt \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 t^4 dt} = \|x\| \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \|f\| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1.7) f(x) = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) x(t) dt, E = L_2([-1, 1])$$

$$|f(x)| = \left| \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) x(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-1}^1 x^2(t) dt} \sqrt{\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}^2(t) dt} = \|x\| 2 \Rightarrow \|f\| = 2$$

$$1.8) f(x) = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) x(t) dt, E = C([-1, 1])$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) x(t) dt \right| = \left| \int_{-1}^0 -x(t) dt + \int_0^1 x(t) dt \right| \leq \left| \int_{-1}^0 -x(t) dt \right| + \left| \int_0^1 x(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \max_{t \in [-1, 0]} x(t) \right| + \left| \max_{t \in [0, 1]} x(t) \right| \leq \max_{t \in [-1, 1]} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1 \end{aligned}$$

$$1.9) f(x) = \int_{-1}^1 x^2(t) dt, E = C([-1, 1])$$

$$|f(x)| = \left| \int_{-1}^1 x^2(t) dt \right| \leq \max_{t \in [-1, 1]} x(t) 2 = 2\|x\| \Rightarrow \|f\| = 2$$

$$1.10) f(x) = x(0), E = C([-1, 1])$$

$$|f(x)| = |x(0)| \leq \max_{t \in [-1, 1]} x(t) = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

$$1.11) f(x) = 2x(-1) - x(1), E = C([-1, 1])$$

$$|f(x)| = |2x(-1) - x(1)| \leq 3\|x\| (\text{досягається при } x(-1) = -x(1) = \max) \|f\| = 3$$

$$1.12) f(x) = x(0), E = C([0, 1]), |x|_E = \int_0^1 |x(\xi)| d\xi$$

$$1.13) f(x) = x'(0) + x(1), E = C^1([0, 1]), |x| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)|$$

$$|f(t)| = |x'(0) + x(1)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

Завдання 2

2. Нехай $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ - ненульовий ЛНФ. Довести, що область значень f співпадає з \mathbb{R} .

f - ненульовий лінійний функціонал, отже нехай $\exists x \in E, f(x) = a \neq 0$

$$\text{тоді } f\left(\frac{\alpha}{a}x\right) = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Це і доводить, що область значень f співпадає з \mathbb{R} .

Завдання 3

3. Нехай E - ЛНП і $f, g \in E^*$ такі, що $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$. Доведіть, що існує таке $\alpha \in \mathbb{R}$, що $g = \alpha f$.

$$\forall x \in \text{Ker } f, f(x) = 0 = g(x)$$

$$\forall x \in \text{Ker } g / \text{Ker } f, g(x) = 0 \neq f(x)$$

Тут наче жодне α крім 0 не підійде, а при $\alpha = 0$ $g = 0$ тобто його ядро це весь простір і це єдиний випадок коли це вірно в глобальному сенсі. (можливо десь помилка)

Завдання 4

4. Нехай X_1, X_2 - ЛНП, $X_1 \subset X_2$ і зі збіжності $x_n \rightarrow x$ у просторі X_1 випливає збіжність $x_n \rightarrow x$ у просторі X_2 . Для довільного $f \in X_2^*$ покладемо $g(x) = f(x), x \in X_1$. Доведіть, що $g \in X_1^*$.

Доведення

Це досить очевидне твердження зважаючи на те що $g(x)$ лінійний за побудовою, і неперервний через те що зі збіжності $x_n \rightarrow x$ у просторі X_1 випливає збіжність $x_n \rightarrow x$ у просторі X_2 .