Завдання 5

Микола Коломієць

27 березня 2024 р.

Розглянемо функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{t}$, визначений як

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{t}, \varphi\right) = \mathrm{v} \cdot \mathrm{p} \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

1. Доведіть, що $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Розв'язок

Лінійність очевидна:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\alpha\varphi + \beta\psi) = V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)}{x} dx = V \cdot p \cdot \left(\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \right.$$
$$\left. +\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx\right) = \alpha \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi) + \beta \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Доведемо неперервність

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx$$

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x})(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Нехай $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в $D(\mathbf{R})$, тоді $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. З рівномірної збіжності послідовності:

$$f(\varphi_n) = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} \to \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = f(\varphi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отже $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

2. Доведіть, що $\mathcal{P}\frac{1}{t}$– сингулярна узагальнена функція.

$\mathcal{P}\frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ і утреверена в результаті подібної процедури внаслідок якої отримуються регулярні функції, тобто якщо вона є регулярною то функція, з якої вона утворена має співпадати з $\frac{1}{t}$, що неможливо адже вона не належить множині.

3. Доведіть, що для довільного $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ має місце включення

$$\operatorname{supp}(f\alpha) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \alpha.$$

4. Обчислити границі у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0+$:

$$1) f_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\alpha_{f_{\varepsilon}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \sin(\frac{x}{\varepsilon}) \varphi(x) dx$$

$$2) f_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\varepsilon}\right)$$