

Завдання 2

Микола Коломієць

6 грудня 2023 р.

Зміст

1	задача	2
2	задача	3
3	задача	4
4	задача	5
5	задача	6
6	задача	7
7	задача	8
8	задача	9
9	задача	10
10	задача	11

1 задача

Умова

Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \rightarrow \min_C$ має місце:

$$f(x) = \min_C f \Leftrightarrow x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

Для опуклої функції виконується нерівність (минула дз)

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x),$$

Якщо $\forall y \in C$ маємо $(\nabla f(x), y - x) \geq 0$ то

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) \geq f(x) \quad \forall y \in C,$$

тобто $f(x) = \min_C f$.

Тепер навпаки(зпярва наліво), запишемо тепер наближення першого порядку для f в x :

$$f(x) \leq f(y) = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + o(\|y - x\|), \quad \forall y \in C.$$

Оскільки допустима множина C опукла, то разом із точками x та y до неї входять довільні їхні опуклі комбінації, тобто точки вигляду $(1 - \lambda)x + \lambda y$, де $\lambda \in (0, 1)$. Підставляємо її у останню нерівність:

$$0 \leq \lambda(\nabla f(x), y - x) + o(\lambda\|y - x\|), \quad \forall y \in C$$

Спрямовуючи $\lambda \rightarrow 0$ бачимо, що знак правої частини визначається першим доданком (властивості о-малого), а тому маємо нерівність

$$0 \leq (\nabla f(x), y - x), \quad \forall y \in C.$$

2 задача

Умова

Нехай $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - власна замкнена опукла функція. Довести, що

$$z = \text{prox}_g(x) \Leftrightarrow g(y) - g(z) \geq (x - z, y - z) \quad \forall y \in E$$

Нехай

$$z = \text{prox}_g(x) = \operatorname{argmin}_{y \in E} \left\{ g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\}.$$

Тоді для $t \in (0, 1)$

$$g(z + t(y - z)) + \frac{1}{2} \|z + t(y - z) - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2} \|z - x\|^2.$$

Опуклість g дає

$$(1 - t)g(z) + tg(y) + \frac{1}{2} \|z + t(y - z) - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2} \|z - x\|^2.$$

Далі

$$g(y) - g(z) \geq \frac{t(x - z, y - z) + \frac{t^2}{2} \|y - z\|^2}{t}.$$

Переходимо до границі при $t \rightarrow 0$.

Тепер навпаки. Нехай

$$g(y) - g(z) \geq (x - z, y - z) \quad \forall y \in E.$$

Оскільки

$$2(x - z, y - z) = \|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 + \|y - z\|^2,$$

то

$$g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2} \|z - x\|^2 + \frac{1}{2} \|y - z\|^2 \quad y \in E.$$

Тому

$$z = \text{prox}_g(x) = \operatorname{argmin}_{y \in E} \left\{ g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\}.$$

3 задача

Умова

Нехай $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - власна замкнена та опукла функція. Довести, що

$$x = \text{prox}_g(x) \Leftrightarrow x \in \text{argmin}_{y \in E} g(y)$$

Нехай $x = \text{prox}_g(x)$. З минулої задачі маємо

$$g(y) - g(x) \geq (x - x, y - x) = 0 \quad \forall y \in E$$

$$g(y) \geq g(x) \quad \forall y \in E \rightarrow x \in \text{argmin}_{y \in E} g(y)$$

В обернену сторону. Нехай $x \in \text{argmin}_{y \in E} g(y)$ тоді

$$\text{prox}_g(x) = \text{argmin}_{y \in E} \left\{ g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\} = x$$

адже в x функція g досягає свого мінімуму і $\|y - x\|$ не може бути меншою ніж у самій точці x .

4 задача

Умова

Нехай $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що

$$(prox_g(x) - prox_g(y), x - y) \geq \|prox_g(x) - prox_g(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in E$$

З задачі 2 випливає, що при $z_1 = prox_g(y)$, $z_2 = prox_g(x)$

$$g(p) - g(prox_g(y)) \geq (y - prox_g(y), p - prox_g(y)) = (y - prox_g(y), p) - (y - prox_g(y), prox_g(y))$$

$$g(p) - g(prox_g(x)) \geq (x - prox_g(x), p - prox_g(x)) = (x - prox_g(x), p) - (x - prox_g(x), prox_g(x))$$

$$g(prox_g(x)) - g(prox_g(y)) \geq (y - prox_g(y), prox_g(x) - prox_g(y))$$

$$g(p) - g(prox_g(y)) \geq (y - prox_g(y), p) - (y, prox_g(y)) + (prox_g(y), prox_g(y))$$

$$g(p) - g(prox_g(x)) \geq (x - prox_g(x), p) - (x, prox_g(x)) + (prox_g(x), prox_g(x))$$

5 задача

Умова

Нехай $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ опукла та L -гладка відносно норми $\|\cdot\|_2$ функція, $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що

$$x = \text{prox}_{\lambda g}(x - \lambda \nabla f(x)) \Leftrightarrow x \in \text{argmin}_{y \in E} \{f(y) + g(y)\}$$

Зліва направо випливає з задачі 3 і з градієнтного методу. Доведемо зправа наліво. Нехай $x \in \text{argmin}_{y \in E} \{f(y) + g(y)\}$. Тоді знову ж таки з задачі 3 і з того, що градієнтний метод збігається, маємо доведення.

6 задача

Умова

Нехай $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ μ -сильно опукла L -гладка функція. Розглянемо

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\sqrt{\mu}\dot{x} = -\nabla f(x) \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \mu > 0 \end{cases}$$

Доведіть, що

$$f(x(t)) - f_* \leq 2e^{-\sqrt{\mu}t}(f(x_0) - f_*) \quad \forall t > 0$$

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\mu}\dot{x} = 0$$

$$x(t) = e^{-2\sqrt{\mu}t} + C_1$$

З минулої задачі маємо, що

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{y \in E} \{f(y) + x(y)\} \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \operatorname{prox}_{\lambda x}(x^* + \lambda \nabla f(x))$$

$$x^* = \operatorname{prox}_{\lambda x}(x^* + \lambda \nabla f(x^*)) = \operatorname{argmin}_{y \in E} \left\{ \lambda x(y) + \frac{1}{2} \|x^* + \lambda \nabla f(x^*) - y\|^2 \right\}$$

$$f_* = x_{\min}$$

$$x^* <$$

7 задача

Умова

Доведіть, що для методу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$$

послідовність

$$V_k = (2k+1)L(f(x_k) - f(x^*)) + k(k+2)\|\nabla f(x_k)\|_2^2 + L^2\|x^k - x^*\|_2^2$$

незростаюча.

Цей результат дає оцінку

$$\|\nabla f(x_k)\|_2^2 \leq \frac{L}{k(k+2)} \left(L\|x^0 - x^*\|_2^2 + f(x_0) - f(x^*) \right).$$

$$V_k = (2k+1)L(f(x_k) - f(x^*)) + k(k+2)\|\nabla f(x_k)\|_2^2 + L^2\|x^k - x^*\|_2^2$$

$$V_{k+1} = (2k+3)L(f(x_{k+1}) - f(x^*)) + (k+1)(k+3)\|\nabla f(x_{k+1})\|_2^2 + L^2\|x^{k+1} - x^*\|_2^2$$

$$\begin{aligned} V_{k+1} - V_k &= (2k+1)L(f(x_{k+1}) - f(x_k)) + 2Lf(x_{k+1}) - 2Lf(x^*) + \\ &+ k(k+2)(\|\nabla f(x_{k+1})\|^2 - \|\nabla f(x_k)\|^2) + (2k+3)\nabla f(x_{k+1}) + \\ &+ L^2(\|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) \end{aligned}$$

8 задача

Умова

8. Доведіть, що для градієнтного методу

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$$

з $\lambda \in (0, \frac{2}{L})$ має місце оцінка

$$f(x_k) - f(x^*) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

9 задача

Умова

9. Нехай x – розв’язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = -A^*Ax + A^*b \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

де $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$, A - матриця $n \times n$. Що можна сказати про $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$? Відповідь обґрунтуйте.

10 задача

Умова

Нехай x - розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = -Ax + b, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

де $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$, A - симетрична додатньо визначена матриця $n \times n$. Що можна сказати про $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$? Відповідь обґрунтуйте.