

Завдання 1 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

4 травня 2023 р.

ЗМІСТ

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	4
3	Завдання 3	5
4	Завдання 4	6
5	Завдання 5	7
6	Завдання 6	8
7	Завдання 7	10
8	Завдання 8	11
9	Завдання 9	12
10	Завдання 10	13

ЗАВДАННЯ 1

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H . Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &= \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \end{aligned}$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\begin{aligned} \cancel{\|x - y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{\|x - y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 & \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &= ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\ &= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} & \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &= \\ (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) &= \end{aligned}$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівність:

$$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \text{ що і завершує доведення.}$$

ЗАВДАННЯ 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

$C = \text{з.л.о. } \{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \in H$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H$. Тоді розклад вектора $P_C x$ можна записати так

$$\begin{aligned} P_C x &= \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x + x, e_n) e_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((P_C x - x, e_n) + (x, e_n)) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x, e_n) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \end{aligned}$$

C - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно $e_n \in C$.

Тоді за теоремою 4 другої лекції $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(P_C x - x, e_n)}_0 e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Доведено

ЗАВДАННЯ 3

Завдання

Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\} (x_0 \neq 0, c \in R)$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

Для довільного $x \in H$, розглянемо $y \in L$ для якого $(x_0, y) = c$ з визначення гіперплощини L . Тоді можна записати:

$$(x_0, x - y) = (x_0, x) - \underbrace{(x_0, y)}_c = (x_0, x) - c$$
$$x = P_L x + z, x - y = P_L x - y + z$$

$$P_L x = -x + y - z$$

$$(x - P_L x) \perp L \Rightarrow (x - P_L x, y) = 0, \forall y \in L$$

$$(x, y) = (P_L x, y)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0 ((x_0, x) - c)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0 (x_0, z)$$

$$z \|x_0\|^2 = x_0 (x_0, z)$$

$$z (x_0, x_0) = x_0 (x_0, z)$$

$$(x - P_L x) (x_0, x_0) = x_0 (x_0, x - P_L x)$$

ЗАВДАННЯ 4

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ з теореми 2 другої лекції

(пункт 2) маємо $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$, що і треба було довести.

ЗАВДАННЯ 5

Завдання

Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору H , $\dim H < +\infty$, $x \in H \setminus C$. Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H \setminus C$. За теоремою Хана-Банаха про розділення, існує неперервний лінійний функціонал $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ та дійсне число α , такі що

$$f(y) \leq \alpha < f(x), \forall y \in C$$

Оскільки H має скінченну розмірність, з теореми Ріса випливає, що

$$\exists p \in H : f(z) = (p, z), \forall z \in H$$

Тоді отримаємо: $(p, y) \leq \alpha < (p, x)$. Отже $\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$

ЗАВДАННЯ 6

Завдання

Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$ і D обмежена. Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

Розв'язання:

Для доведення даного твердження ми використаємо принцип роздільності Гансена-Банаха, який стверджує, що для будь-яких непорожніх замкнених опуклих множин A, B з таким, що $A \cap B = \emptyset$, існує гіперплощина, яка розділяє A та B , тобто існує $p \in H \setminus \{0\}$ та $c \in R$, такі що $(p, x) \leq c < (p, y)$ для будь-яких $x \in A$ та $y \in B$.

Застосуємо цей принцип до множин C та $\text{conv}(D)$, де $\text{conv}(D)$ позначає опуклу оболонку множини D , тобто найменшу опуклу множину, яка містить D . Зауважимо, що $\text{conv}(D)$ є замкненою та обмеженою опуклою множиною, оскільки D є замкненою та обмеженою. Далі, оскільки $C \cap D = \emptyset$, то $C \cap \text{conv}(D) = \emptyset$. Отже, за принципом роздільності Гансена-Банаха, існує $p \in H \setminus \{0\}$ та $c \in R$, такі що $(p, x) \leq c < (p, y)$ для будь-яких $x \in C$ та $y \in \text{conv}(D)$.

Залишилося показати, що $\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$. Для цього зауважимо, що $\inf_{x \in D}(p, x) \leq \inf_{x \in \text{conv}(D)}(p, x)$. Оскільки D є замкненою та обмеженою, то $\text{conv}(D)$ також є замкненою та обмеженою. Тому, згідно з теоремою про

існування інфімуму, існує точка $z \in \text{conv}(D)$, така що

$\inf_{x \in \text{conv}(D)}(p, x) = (p, z)$. З іншого боку, $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, w)$ для будь-якої точки $w \in H$, оскільки C є підмножиною H . Зокрема, $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, z)$.

Але з принципу роздільності Гансена-Банаха $(p, x) \leq c < (p, y)$ для

будь-яких $x \in C$ та $y \in \text{conv}(D)$. Тому, вибравши будь-яку точку $y \in \text{conv}(D)$, отримаємо $(p, z) > c \geq (p, x)$ для будь-якої точки $x \in C$, тобто

$\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$. Цим доведено твердження.

ЗАВДАННЯ 7

Завдання

Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1. C — слабо секвенційно замкнена множина.
2. C — замкнена множина.
3. C — слабо замкнена множина.

Розв'язання:

ЗАВДАННЯ 8

Завдання

Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

1. Якщо припустити, що множина $C - D = \{c - d : c \in C, d \in D\}$ опукла та замкнена, то $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$.
2. Якщо припустити, що $\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла, то $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{x \in D} (p, x)$.

Розв'язання:

ЗАВДАННЯ 9

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо $C = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$.

Розв'язання:

ЗАВДАННЯ 10

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n} x \rightarrow P_C x$.

Розв'язання: