**Завдання 2.**

1. Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \to \min_C$ має місце:
$$f(x) = \min_C f \quad \Leftrightarrow \quad x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in C.$$

2. Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що
$$z = \mathrm{prox}_g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y) - g(z) \geq (x - z, y - z) \quad \forall y \in E.$$

3. Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що
$$x = \mathrm{prox}_g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{argmin}_{y \in E}\, g(y).$$

4. Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що
$$(\mathrm{prox}_g(x) - \mathrm{prox}_g(y), x - y) \geq \|\mathrm{prox}_g(x) - \mathrm{prox}_g(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in E.$$

5. Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ — опукла та $L$-гладка відносно норми $\| \cdot \|_2$ функція, $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що
$$x = \mathrm{prox}_{\lambda g}(x - \lambda \nabla f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{argmin}_{y \in E} \left\{ f(y) + g(y) \right\},$$
де $\lambda > 0$.

6. Нехай $f : E \to \mathbb{R}$ — $\mu$-сильно опукла $L$-гладка функція. Розглянемо
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\sqrt{\mu}\dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \ \ \dot{x}(0) = 0, \ \ \mu > 0. \end{cases}$$
Доведіть, що
$$f(x(t)) - f_* \leq 2e^{-\sqrt{\mu}t} \left( f(x_0) - f_* \right) \quad \forall t > 0.$$

7. Доведіть, що для методу
$$x_{k+1} = x_k - \tfrac{1}{L} \nabla f(x_k)$$
послідовність
$$V_k = (2k+1)L(f(x_k) - f(x^*)) + k(k+2)\|\nabla f(x_k)\|_2^2 + L^2 \|x^k - x^*\|_2^2$$
незростаюча.

   Цей результат дає оцінку
$$\|\nabla f(x_k)\|_2^2 \leq \frac{L}{k(k+2)} \left( L\|x^0 - x^*\|_2^2 + f(x_0) - f(x^*) \right).$$

8. Доведіть, що для градієнтного методу
$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$$
з $\lambda \in \left(0, \frac{2}{L}\right)$ має місце оцінка
$$f(x_k) - f(x^*) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

9. Нехай $x$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = -A^*Ax + A^*b, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

   де $b$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A$ — матриця $n \times n$. Що можна сказати про $\lim_{t\to+\infty} x(t)$? Відповідь обгрунтуйте.

10. Нехай $x$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = -Ax + b, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

   де $b$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A$ — симетрична додатньо визначена матриця $n \times n$. Що можна сказати про $\lim_{t\to+\infty} x(t)$? Відповідь обгрунтуйте.