

# Завдання 1 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

6 травня 2023 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Завдання 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Завдання 2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Завдання 3</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Завдання 4</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Завдання 5</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Завдання 6</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Завдання 7</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>Завдання 8</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Завдання 9</b>	<b>12</b>
<b>10</b>	<b>Завдання 10</b>	<b>13</b>

# Завдання 1

## Завдання

Нехай  $C$  — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору  $H$ . Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

## Розв'язання:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &= \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \\ &= \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \end{aligned}$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\begin{aligned} \cancel{\|x - y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{\|x - y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 & \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &= ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\ &= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} & \\ \cancel{(P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &= \\ (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) &= \end{aligned}$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівність:

$$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \text{ що і завершує доведення.}$$

## Завдання 2

### Завдання

Нехай  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору  $H$  та

$C = \text{з.л.о. } \{e_n\}$ . Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \in H$$

### Розв'язання:

Нехай  $x \in H$ . Тоді розклад вектора  $P_C x$  можна записати так

$$\begin{aligned} P_C x &= \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x + x, e_n) e_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((P_C x - x, e_n) + (x, e_n)) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x, e_n) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \end{aligned}$$

$C$  - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно  $e_n \in C$ .

Тоді за теоремою 4 другої лекції  $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(P_C x - x, e_n)}_0 e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Доведено

## Завдання 3

### Завдання

Доведіть, що для гіперплощини  $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$  ( $x_0 \neq 0, c \in \mathbb{R}$ ) проекція  $P_L x$  обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

### Розв'язання:

Розглянемо скалярний добуток:

$$(x - P_L x, x_0) = (x_0, x - P_L x) \mid * x_0$$

$$(x - P_L x, x_0) x_0 = (x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0(x_0, x - P_L x) = x_0((x_0, x) - (x_0, P_L x))$$

За визначенням  $P_L x \in L$ , а отже  $(x_0, P_L x) = c$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0((x_0, x) - c) \mid * \frac{1}{\|x_0\|^2}$$

$$(x - P_L x) = ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Звідси отримуємо, що

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, \text{ доведено}$$

## Завдання 4

### Завдання

Нехай  $C$  — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $x \in H \setminus C$ .

Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$$

### Розв'язання:

### Повне доведення:

$C$  замкнена множина отже замість  $\sup$  можна інтерпритувати умову як

$$\forall y \in C, \exists p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) < (p, x)$$

Доведення проводимо від супротивного. Нехай  $\exists y \in C$  такий що

$$\forall p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) \geq (p, x)$$

$$(p, y) - (p, x) = (p, y - x) \geq 0$$

$$(-p, y - x) \leq 0$$

Подивившись на теорему 2 другої лекції (а саме на її другий пункт) стає

очевидно, що за  $-p$  варто взяти  $P_C x - x$ . Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} (P_C x - x, y - x) &= (P_C x - x, y - P_C x + P_C x - x) = \\ &= (P_C x - x, y - P_C x) + (P_C x - x, P_C x - x) \leq 0 \end{aligned}$$

За теоремою 2 з лекції 2 (пункт 2)  $(P_C x - x, y - P_C x) \geq 0$

$$(P_C x - x, P_C x - x) = \|P_C x - x\|^2 > 0 \text{ адже } x \in H \setminus C, x \neq P_C x$$

Доведено

### Швидке доведення:

Покладемо  $p = x - P_C x \neq 0$ . Для довільного  $y \in C$  з теореми 2 другої лекції

(пункт 2) маємо  $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже  $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$ , що і треба було довести.



## Завдання 5

### Завдання

Нехай  $C$  — непорожня опукла підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $\dim H < +\infty$ ,  $x \in H \setminus C$ . Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$$

### Розв'язання:

З завдання 4 випливає що якщо  $x \in H \setminus \bar{C}$ ,  $\exists p \in H \setminus \{0\}$   $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$

Залишилось довести твердження для  $x \in \bar{C} \setminus C$

Так само візьмемо за  $p = x - P_C x$

$$\begin{aligned} (p, y) - (p, x) &= (x - P_C x, y) - (x - P_C x, x) = \\ &= (x - P_C x, y - P_C x) + (x - P_C x, x - P_C x) = (x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 \end{aligned}$$

Очевидно, що для  $x \in \bar{C} \setminus C$ ,  $P_C x = x$  (є послідовність з  $C$  що збігається до

$x$ , і тоді норма різниці буде 0)

$$(x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 = (0, y - x) = 0$$

$$\begin{cases} \sup_{y \in C} (p, y) < (p, x), & \forall x \in C \\ \sup_{y \in C} (p, y) = (p, x), & \forall x \in \bar{C} \setminus C \end{cases}$$

Отже

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x), \quad \forall x \in C$$

Доведено

## Завдання 6

### Завдання

Нехай  $C, D$  — непорожні замкнені опуклі підмножини  $H$  такі, що  $C \cap D = \emptyset$  і  $D$  обмежена. Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

### Розв'язання:

З минулих завданнь маємо  $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x), x \in H$  при  $p = x - P_C x$

Залишилось довести, що  $(x - P_C x, x) \leq \inf_{x \in D} (x - P_C x, x)$

Очевидно, що ця рівність досягається якщо прибрати  $\inf$ , з обмеженості і замкненості  $D$  випливає, що  $\inf$  досягається при певному  $x \in D$ .

$$\text{Отже } \sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

Доведено

## Завдання 7

### Завдання

Нехай  $C$  — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1.  $C$  — слабо секвенційно замкнена множина.
2.  $C$  — замкнена множина.
3.  $C$  — слабо замкнена множина.

### Розв'язання:

## Завдання 8

### Завдання

Нехай  $C, D$  — непорожні підмножини  $H$  такі, що  $C \cap D = \emptyset$ .

1. Якщо припустити, що множина  $C - D = \{c - d : c \in C, d \in D\}$  опукла та замкнена, то  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що  $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$ .
2. Якщо припустити, що  $\dim H < +\infty$ , множина  $C - D$  опукла, то  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що  $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{x \in D} (p, x)$ .

**Розв'язання:**

## Завдання 9

### Завдання

Нехай  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо  $C = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$  і нехай  $x \in H$ . Доведіть, що  $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$ .

### Розв'язання:

## Завдання 10

### Завдання

Нехай  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$  і нехай  $x \in H$ . Доведіть, що  $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$ .

**Розв'язання:**