

Завдання 1 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

7 травня 2023 р.

Зміст

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	4
3	Завдання 3	5
4	Завдання 4	6
5	Завдання 5	8
6	Завдання 6	9
7	Завдання 7	10
8	Завдання 8	11
9	Завдання 9	12
10	Завдання 10	13

Завдання 1

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H . Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &= \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \\ &= \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \end{aligned}$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\begin{aligned} \cancel{\|x - y\|^2} - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{\|x - y\|^2} - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 & \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &\stackrel{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &= ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\ &= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\leq} \\ \cancel{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} & \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) &= \\ (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) &= \end{aligned}$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівність:

$$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \text{ що і завершує доведення.}$$

Завдання 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

$C = \text{з.л.о. } \{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \in H$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H$. Тоді розклад вектора $P_C x$ можна записати так

$$\begin{aligned} P_C x &= \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x + x, e_n) e_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((P_C x - x, e_n) + (x, e_n)) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x, e_n) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \end{aligned}$$

C - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно $e_n \in C$.

Тоді за теоремою 4 другої лекції $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(P_C x - x, e_n)}_0 e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Доведено

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ ($x_0 \neq 0, c \in \mathbb{R}$) проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

Розглянемо скалярний добуток:

$$(x - P_L x, x_0) = (x_0, x - P_L x) \mid * x_0$$

$$(x - P_L x, x_0) x_0 = (x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0(x_0, x - P_L x) = x_0((x_0, x) - (x_0, P_L x))$$

За визначенням $P_L x \in L$, а отже $(x_0, P_L x) = c$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0((x_0, x) - c) \mid * \frac{1}{\|x_0\|^2}$$

$$(x - P_L x) = ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Звідси отримуємо, що

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, \text{ доведено}$$

Завдання 4

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Повне доведення:

C замкнена множина отже замість \sup можна інтерпритувати умову як

$$\forall y \in C, \exists p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) < (p, x)$$

Доведення проводимо від супротивного. Нехай $\exists y \in C$ такий що

$$\forall p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) \geq (p, x)$$

$$(p, y) - (p, x) = (p, y - x) \geq 0$$

$$(-p, y - x) \leq 0$$

Подивившись на теорему 2 другої лекції (а саме на її другий пункт) стає

очевидно, що за $-p$ варто взяти $P_C x - x$. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} (P_C x - x, y - x) &= (P_C x - x, y - P_C x + P_C x - x) = \\ &= (P_C x - x, y - P_C x) + (P_C x - x, P_C x - x) \leq 0 \end{aligned}$$

За теоремою 2 з лекції 2 (пункт 2) $(P_C x - x, y - P_C x) \geq 0$

$$(P_C x - x, P_C x - x) = \|P_C x - x\|^2 > 0 \text{ адже } x \in H \setminus C, x \neq P_C x$$

Доведено

Швидке доведення:

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ з теореми 2 другої лекції

(пункт 2) маємо $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$, що і треба було довести.

Завдання 5

Завдання

Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору H , $\dim H < +\infty$, $x \in H \setminus C$. Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$$

Розв'язання:

З завдання 4 випливає що якщо $x \in H \setminus \bar{C}$, $\exists p \in H \setminus \{0\}$ $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$

Залишилось довести твердження для $x \in \bar{C} \setminus C$

Так само візьмемо за $p = x - P_C x$

$$\begin{aligned} (p, y) - (p, x) &= (x - P_C x, y) - (x - P_C x, x) = \\ &= (x - P_C x, y - P_C x) + (x - P_C x, x - P_C x) = (x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 \end{aligned}$$

Очевидно, що для $x \in \bar{C} \setminus C$, $P_C x = x$ (є послідовність з C що збігається до

x , і тоді норма різниці буде 0)

$$(x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 = (0, y - x) = 0$$

$$\begin{cases} \sup_{y \in C} (p, y) < (p, x), & \forall x \in C \\ \sup_{y \in C} (p, y) = (p, x), & \forall x \in \bar{C} \setminus C \end{cases}$$

Отже

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x), \quad \forall x \in C$$

Доведено

Завдання 6

Завдання

Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$ і D обмежена. Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

Розв'язання:

З минулих завданнь маємо $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x), x \in H$ при $p = x - P_C x$

Залишилось довести, що $(x - P_C x, x) \leq \inf_{x \in D} (x - P_C x, x)$

Очевидно, що ця рівність досягається якщо прибрати \inf , з обмеженості і замкненості D випливає, що \inf досягається при певному $x \in D$.

$$\text{Отже } \sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

Доведено

Завдання 7

Завдання

Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1. C — слабо секвенційно замкнена множина.
2. C — замкнена множина.
3. C — слабо замкнена множина.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

1. Якщо припустити, що множина $C - D = \{c - d : c \in C, d \in D\}$ опукла та замкнена, то $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$.
2. Якщо припустити, що $\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла, то $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{x \in D} (p, x)$.

Розв'язання:

1. Для множини $C - D$ застосуємо теорему з 4 завдання адже вона опукла, замкнена та не порожня, тоді

$$\begin{aligned} \sup_{c \in C, d \in D} (p, c - d) &< (p, z), z \in H \setminus (C - D), p = z - P_{C-D}z \\ \sup_{c \in C, d \in D} ((p, c) - (p, d)) &= \sup_{c \in C} (p, c) - \inf_{d \in D} (p, d) < (p, z) \\ \sup_{c \in C} (p, c) &< \inf_{d \in D} (p, d) + (p, z) \\ (p, z) &= (z - P_{C-D}z, z) = \|z\|^2 - (P_{C-D}z, z) \end{aligned}$$

Обираємо z так, щоб виконувалась нерівність $\|z\|^2 > (P_{C-D}z, z)$

$$\text{Тоді } \sup_{c \in C} (p, c) < \inf_{d \in D} (p, d)$$

Доведено

Завдання 9

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо $C = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$.

Розв'язання:

З визначення множини C замкнена і опукла. Тоді можемо визначити проекції

$$\|P_Cx - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|, \quad \|P_{C_n}x - x\| = \min_{y_n \in C_n} \|y_n - x\|$$

$$\text{Нехай } y^{min} = y = P_Cx, y_n^{min} = y_n = P_{C_n}x.$$

Треба довести, що $\forall x \in H, y_n \rightarrow y$.

З умови $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ випливає що $cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = cl(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n)$ Тоді, якщо

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, y \in C_n, y_n = y$ і твердження є очевидним.

Нехай $\nexists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, y \in C_n$ Тоді $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, y \in cl(C_n) \setminus C_n$

А отже $\exists y_n^1 \in C_n, y_n^1 \rightarrow y$ Тоді $\forall x \in H \|y_n^1 - x\| \rightarrow \|y - x\|$

При цьому $\|y - x\| < \|z - x\|, \forall z \in C$ і $\|y_n - x\| < \|z_n - x\|, \forall z_n \in C_n$

А отже $\|y_n - x\| \leq \|y_n^1 - x\|$

$$C_n \subseteq C \Rightarrow \|y - x\| \leq \|z - x\|, \forall z \in C_n, n = 1.. \infty$$

Отже $\|y - x\| \leq \|y_n - x\| \leq \|y_n^1 - x\| \Rightarrow y_n \rightarrow y$ за теоремою прополіцаїв.

Доведено

Завдання 10

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$.

Розв'язання: