

# Контрольна робота

Микола Коломієць

30 листопада 2023 р.

## Зміст

1	задача	2
2	задача	3
3	задача	4
4	задача	5
5	задача	6
6	задача	7

# 1 задача

## Умова

Дослідіть на диференційовність функцію

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

де  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A(x+h) - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h}$$

З лінійності оператора  $A$  можемо записати:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Ax + Ah - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h}$$

Застосуємо нерівність трикутника:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Ax + Ah - b\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Ax - b\|^2 + 2\|Ax - b\|\|Ah\| + \|Ah\|^2 - \|Ax - b\|^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h) + O(h^2)}{h} = O(1) \end{aligned}$$

Норма неперервна і  $f'(x) = O(1)$  - отже  $f(x)$  диференційовна.

## 2 задача

### Умова

Дослідіть на диференційовність функцію

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

де  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  - самоспряжений лінійний оператор,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h) - \frac{1}{2}(Ax, x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = O(1) \end{aligned}$$

Скалярний добуток неперервний і  $f'(x) = O(1)$  - отже  $f(x)$  диференційовна.

### 3 задача

#### Умова

Нехай  $f(x)$  -  $\mu$ -опукла та диференційовна функція. Доведіть, що

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2, \forall x, y \in E \quad (1)$$

Спочатку припустимо, що  $f(x)$  є сильно опуклим, потім

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) &\leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2} \lambda (1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ \Rightarrow \frac{f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) - f(\mathbf{y})}{\lambda} &\leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2} (1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Нехай  $g(t) = f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y})$  тоді  $g(0) = f(\mathbf{y})$  і

$$g'(t) = \nabla f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\nabla f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

За теоремою про середнє існує  $s \in (0, t)$  таке що  $g'(s) = \frac{g(t) - g(0)}{t}$ , тоді

$$\frac{f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(s) = (\nabla f(s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$(\nabla f(s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \frac{\mu}{2} (1 - t) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Нехай  $t \rightarrow 0$  тоді  $s \rightarrow 0$ , отримаємо  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + (\nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ .

Отже властивість доведена

#### 4 задача

##### Умова

Нехай  $f(x)$  -  $\mu$ -опукла та диференційовна функція. Доведіть, що

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu \|x - y\|_2^2 \quad (2)$$

Скористаємося завданням 3 і отримаємо дві нерівності:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$f(x) \geq f(y) + (\nabla f(y), x - y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

Відніmemo від одного рівняння інше і отримаємо:

$$f(y) - (f(y) + (\nabla f(y), x - y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2 - f(x)$$

$$-(\nabla f(y), x - y) - \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \geq -(\nabla f(x), x - y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu \|x - y\|_2^2$$

Доведено.

## 5 задача

### Умова

Нехай  $f$  —  $\mu$ -сильно опукла та  $L$ -гладка функція,  $x^*$  — точка мінімуму  $f$ . Доведіть, що для  $x \in E$  має місце

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|_2^2$$

З 3 задачі маємо:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Покладемо  $x = x^*, y = x$

$$f(x) \geq f(x^*) + (\nabla f(x^*), x - x^*) + \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|_2^2$$

врахуємо рівність  $\nabla f(x^*) = 0$  (точка мінімуму - екстремум):

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|_2^2$$

## 6 задача

### Умова

Нехай  $f$  —  $\mu$ -сильно опукла та  $L$ -гладка функція,  $x^*$  — точка мінімуму  $f$ . Доведіть, що для  $x \in E$  має місце