

# Завдання 4 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

5 червня 2023 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Завдання 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Завдання 2</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Завдання 3</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Завдання 4</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Завдання 5</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Завдання 6</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Завдання 7</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>Завдання 8</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Завдання 9</b>	<b>12</b>

# Завдання 1

## Завдання

Покажіть, що лема 1 з лекції 7 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

## Лема

Нехай  $H$  — строго опуклий лінійний нормований простір,  $C \subseteq H$  — опукла замкнена множина,  $T : C \rightarrow H$  — нерозтягуючий оператор. Тоді множина  $F(T)$  опукла та замкнена.

**Розв'язання:**

## Завдання 2

### Завдання

Нехай  $C$  непорожня підмножина гільбертового простору  $H$ ,  
 $T_1, T_2, \dots, T_m: C \rightarrow H$  - нерозтягуючі оператори, причому

$$\bigcap_{n=1}^m F(T_n) \neq \emptyset$$

.

Доведіть, що для довільного набору  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  додатніх чисел з  
 $\sum_{n=1}^m \lambda_n = 1$  оператор

$$Tx = \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n x \quad (x \in C)$$

є нерозтягуючим та  $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$ .

### Розв'язання:

Нехай  $x \in \bigcap_{n=1}^m F(T_n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n < m, T_n x = x$  тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n x = \sum_{n=1}^m \lambda_n x = x \overbrace{\sum_{n=1}^m \lambda_n}^1 = x$$

Отже  $x \in F(T)$  тобто  $F(T) \supseteq \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$

Нехай  $x \in F(T)$ ,  $Tx = x$  і нехай від супротивного  $\exists m_1 : T_k x \neq x, k \in m_1$

Тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n x = x \sum_{n=1}^{m-|m_1|} \lambda_n + \sum_{k \in m_1} \lambda_k T_k x = x \sum_{n=1}^m \lambda_n$$

$$\sum_{k \in m_1} \lambda_k (T_k x - x) = 0 \Rightarrow T_k x = x \text{ протиріччя}$$

Отже  $\forall x \in F(T), \forall n \leq m, T_n x = x$

Отже  $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$

Доведемо, що він є нерозтягуючим.

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \left\| \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n x - \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n y \right\| = \left\| \sum_{n=1}^m \lambda_n (T_n x - T_n y) \right\| = \\ &= \sum_{n=1}^m \lambda_n \|T_n x - T_n y\| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^m \lambda_n}_1 \|x - y\| = \|x - y\| \end{aligned}$$

$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  - Оператор нерозтягуючий

Доведено!

## Завдання 3

### Завдання

Нехай  $C$  непорожня підмножина гільбертового простору

$H, T_1, T_2, \dots, T_m : C \rightarrow H$  — строго квазінерозтягуючі оператори, причому

$$\bigcap_{n=1}^m F(T_n) \neq \emptyset$$

Доведіть, що оператор  $Tx = T_1 T_2 \dots T_m x$  ( $x \in C$ )

є строго квазінерозтягуючим та  $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$ .

### Розв'язання:

Нехай  $x \in \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$  тоді за визначенням  $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq m : T_k x = x$

Тоді  $Tx = T_1 T_2 \dots T_{m-1} T_m = T_1 T_2 \dots T_{m-1} x = \dots = x \Rightarrow x \in F(T)$

$$\text{Отже } F(T) \supseteq \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$$

Нехай  $x \in F(T), \exists$  найбільше  $k < m : T_k x = x_1 \neq x$  тоді

$$Tx = T_1 T_2 \dots T_m x = T_1 T_2 \dots T_{k-1} x_1 = x$$

З строгої не розтягуваності маємо  $\|T_{k-1} x_1 - x\| < \|x_1 - x\|$ , тобто

$$T_{k-1} x_1 = x_2 \neq x$$

Подібні речі проводимо  $k - 1$  раз уже з новими  $x_2, x_3, \dots$ ,

отримаємо  $Tx \neq x$  - протиріччя. Отже  $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$

Доведемо строгую квазінерозтягуваність

$$\|Tx - y\| = \|T_1 T_2 \dots T_m x - y\| = \|T_1(T_2 \dots T_m x) - y\| \leq$$

$$\leq \|T_2 T_3 \dots T_m x - y\| = \dots \leq \|x - y\|$$

Доведено!

## Завдання 4

### Завдання

Нехай  $C$  — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $T : C \rightarrow H$  — нерозтягуючий оператор з  $F(T) \neq \emptyset$ . Припустимо, що послідовність точок  $x_n \in C$  має властивості:

1.  $\forall p \in F(T) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R};$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$

Доведіть, що послідовність  $(x_n)$  слабо збігається до точки з  $F(T)$ .

**Розв'язання:**



## Завдання 5

### Завдання

Нехай  $H$  - гільбертовий простір,  $T : H \rightarrow H$  - твердо нерозтягуючий оператор із  $F(T) \neq \emptyset$ . Розглянемо метод простої ітерації:

$$\begin{cases} x_0 \in H \\ x_{n+1} = Tx_n \end{cases}$$

Доведіть, що послідовність  $x_n$  слабо збігається до деякої точки з  $F(T)$

**Розв'язання:**

## Завдання 6

### Завдання

Нехай  $H$  - гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $T : C \rightarrow C$  - нерозтягуючий оператор,  $F(T) \neq \emptyset, y \in C$ . Покажіть, що для довільного  $t \in (0, 1)$  існує єдиний елемент  $x_t \in C$ , такий, що

$$x_t = T(ty + (1 - t)x_t).$$

Доведіть, що при  $t \rightarrow 0$  крива  $t \mapsto x_t$  сильно збігається до точки  $\bar{x}$ , такої, що  $\bar{x} = P_{F(T)}y$ .

### Розв'язання:

## Завдання 7

### Завдання

Нехай  $H$  - гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  – непорожня опукла замкнена множина,  $T : C \rightarrow C$  - нерозтягуючий оператор з  $F(T) \neq \emptyset$ ,  $f : C \rightarrow C$  – стискаючий оператор. Для заданого  $x_0 \in C$  генеруємо послідовність елементів  $x_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) T x_n$$

де послідовність чисел  $\alpha_n \in (0, 1)$  задовольняє умови:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$
3.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$

Доведіть, що згенерована послідовність  $(x_n)$  сильно збігається до точки  $z \in F(T)$ , такої, що  $z = P_{F(T)} f(z)$ .

**Розв'язання:**

## Завдання 8

### Завдання

Нехай оператор  $T : H \rightarrow H$  – нерозтягуючий, оператор  $A : H \rightarrow H$  – ліпшицевий та сильно монотонний <sup>4</sup> із сталими  $L > 0, l > 0$ , відповідно.

Оператор  $T_\alpha : H \rightarrow H$  задано рівністю

$$T_\alpha x = Tx - \alpha ATx, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

Доведіть, що для довільного  $\mu \in (0, \frac{2l}{L^2})$  маємо

$$\|T_\alpha x - T_\alpha y\| \leq \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\alpha\right) \|x - y\| \quad \forall x \in H \forall y \in H$$

де  $\alpha \in [0, \mu], \tau = 1 - \sqrt{1 - 2l\mu + L^2\mu^2} \in (0, 1]$ .

**Розв’язання:**

## Завдання 9

### Завдання

Нехай оператор  $T : H \rightarrow H$  – нерозтягуючий, оператор  $A : H \rightarrow H$  – ліпшицевий та сильно монотонний. Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n Ay_n \end{cases}$$

де послідовність чисел  $\alpha_n \in (0, 1)$  задовольняє умови:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$
3.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$

Доведіть, що породжена послідовність  $(x_n)$  сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

**Розв'язання:**