Math-Phusics in $\LaTeX$

Nick Kolomiiets

22 квітня 2023 р.

Зміст

1 Classwork 7th of March

1.1 first task

Task1

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + cos3x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$u_x|_{x=0} = t,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2},\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 2x$$

Зведемо граничні умови до однорідних, знайшовиши таку $w(x,t)$, що

$$w_x|_{x=0} = t,\ w|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2} \Rightarrow w(x,t) = xt$$

Підставимо $u = w + v$ у вихідне рівняння: $v_{tt} + 2v_t + \cancel{2x} = v_{xx} + 8v + \cancel{8tx} + \cancel{2x(1-4t)} + cos3x$

Отримаємо: $v_{tt} + 2v_t + = v_{xx} + 8v + cos3x$

$$v_x|_{x=0} = 0,\ v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ v|_{t=0} = 0,\ v_t|_{t=0} = x$$

Однорідне рівняння: $v_{tt} + 2v_t + = v_{xx} + 8v$

Шукаємо частинні розв'язки у вигляді: $v(x,t) = X(x)T(t)$

$T''X + 2T'X = TX'' + 8XT$, поділивши на XT $\Rightarrow \frac{T''+2T'}{T} = \frac{X''+8X}{X}$

Зліва маємо функцію від t, справа маємо функцію від x , отже вони дорівнюють костанті

$\frac{T''+2T'}{t} = \frac{X''+8X}{X} = -\lambda$ Вихідне рівняння: $X'' + X(8-\lambda) = 0$

Граничні умови $T(t)X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0,\ T(t)X(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0$

Задача Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + X(8-\lambda) = 0 \\ X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Нехай $\lambda + 8 > 0$ тоді

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda+8}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda+8}x$$

$$X'(x) = \sqrt{\lambda+8}(-C_1 \sin\sqrt{\lambda+8}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda+8}x)$$

Підставивши в граничні умови задачі 1 отримаємо:

$$\begin{cases} X'(0) = \sqrt{\lambda+8}C_2 = 0 \\ X(\frac{\pi}{2}) = C_1 \cos\sqrt{\lambda+8}\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\sqrt{\lambda+8}\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Позначимо $\sqrt{\lambda+8}$ за μ, тоді (задля забезпечення нетривіальності розв'язку):

$$C_2 = 0, C_1 \cos\mu\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos\mu\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \mu\frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mu = 2k+1, k \in N$$

$$\lambda_k = (2k+1)^2 - 8, X_k(x) = \cos((2k+1)x)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді ряда фур'є:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$$

Підставимо в рівняння та початкові умови:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k''+2T_k'\right)X_k-T_k\left(X_k''+8X_k\right)=\cos 3x$$

Оскільки $X_k''=-\left(\lambda_k+8\right)X_k$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k''+2T_k'+\lambda_k T_k\right)X_k=\cos 3x=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)X_k(x)$$

Звідси $T_k''+2T_k'+\lambda_k T_k=f_k(t)$

З початкових умов маємо:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)X_k(x)=0\Rightarrow T_k(0)=0$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}T_k'(0)X_k(x)=x=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$$

$$f_k=\frac{(\cos 3x,X_k(x))}{(X_k(x),X_k(x))}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\cdot\cos((2k+1)x)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2((2k+1)x)dx}=\begin{cases}1,k=1\\0,k\neq 1\end{cases}$$

$$\varphi_k=\frac{(X_1X_k(x))}{(X_k(x),X_k(x))}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos((2k+1)x)dx}{\int_0^{\pi}\cos^2((2k+1)x)dx}$$

Таким чином маємо декілька задач Коші:

$$\begin{cases}T_k''+2T_k'+\lambda_k T_k=f_k\\T_k(0)=0,T_k'(0)=\varphi_k\end{cases}$$

При $k=1$

$$\begin{cases}T_1+2T_1''+T_1=1 & \text{Запишим однорідне рівняння}\\T_1(0)=0,T_1'(0)=\varphi_1 & \tilde{T}_1''+2\tilde{T}_1'+\tilde{T}_1=0\end{cases}$$

$$T_1(t)=(a_1+t+b_1)e^{-t}+1$$

$$T_1(0)=b_1+1=0\Rightarrow b_1=-1$$

$$T_1'(t)=\left.\left(a_1e^{-t}-\left(a_1t+b_1\right)e^{-t}\right)\right|_{t=0}=a_1-b_1=\varphi_1\Rightarrow a_1=\varphi_1-1$$

$$T_1(t)=\left(\left(\varphi_1-1\right)t-1\right)e^{-t}+1$$

Якщо $k=0$

$$\begin{cases}T_0''+2T_0'-7T_0'=0 & \mu^2+2\mu-7=0\\T_0(0)=0,T_0'(0)=\varphi_0 & \mu_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+7}=-1\pm 2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$T_0(t)=a_0e^{(-1-2\sqrt{2})t}+b_0e^{(-1+2\sqrt{2})t}$$

$$T_0(0)=a_0+b_0=0$$

$$T_0'(t)=a_0(-1-2\sqrt{2})e^{(-1-2\sqrt{2})+}+b_0(-1+2\sqrt{2})e^{(-1+2\sqrt{2})t}$$

$$T'_{(0)} = a_0(-1-2\sqrt{2}) + b_0(-1+2\sqrt{2}) = \varphi_0$$

$$a_0 = -b_0$$

$$b_0(-1+2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}) = \varphi_0; \quad 4\sqrt{2}b_0 = \varphi_0$$

$$b_0 = \frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}; \quad a_0 = -\frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}$$

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}\left(e^{(-1+2\sqrt{2})t} - e^{(-1-2\sqrt{2})t}\right)$$

Нехай $k > 1$

$$\begin{cases} T''_k + 2T'_k + \lambda_k T_k = 0 \\ T_{k(0)} = 0, T'_k(0) = \varphi_k \end{cases} \quad \lambda_k = (2k+1)^2 - 8 > 0$$

$$\mu_k^2 + 2\mu_k + \lambda_k = 0 \quad \mu_k^{(1,2)} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda_k} =$$

$$= -1 \pm i\sqrt{\lambda_1 - 1}$$

$$T_k(t) = \left(a_k \cos\sqrt{\lambda_t - 1}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t\right)e^{-t}$$

$$T'_k(t) = -\left(a_k \cos\sqrt{\lambda_k - 1}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t\right)e^{-t} +$$

$$+\sqrt{\lambda_k - 1}\left(-a_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t + b_k \cos\sqrt{\lambda_k - 1}t\right)e^{-t}$$

$$T_k(0) = a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$$

$$T'_k(0) = \sqrt{\lambda_k - 1}b_k = \varphi_k \Rightarrow b_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - 1}}$$

$$T_k(t) = \tfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - 1}} \sin\sqrt{\lambda_k - 1}te^{-t}$$

$$U(x,t) = xt + T_0(t)\cos x + T_1(t)\cos 3x + \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} T_k(t)\cos(2k+1)x;$$

Task2 (20.16 (4))

$$u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x \quad 0 < x < \pi$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = \pi t,\ u|_{t=0} = 0 \quad u_t|_{t=0} = x$$