Завдання 2

Микола Коломієць

6 лютого 2024 р.

Розв'язання

Завдання 1

1. Перевірити чи є вказаний функціонал f на просторі E лінійним та неперервним. У випадку лінійного функціоналу обчислити його норму.

1.1)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)}, E = c_0, x = (x_1, x_2, \ldots)$

$$f(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a\frac{x_k}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b\frac{y_k}{k(k+1)} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)} = |x \in c_0| = f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0}{k(k+1)} = x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = x_0$$

$$\text{де } x_0 = \max_{x_k \in x} x_k = \|x\| \Rightarrow f(x) \leq \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

1.2)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_2, x = (x_1, x_2, \ldots)$

$$f(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax_k + by_k)}{k} = a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + b\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = af(x) + bf(y)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - \text{Нерівність Гельдера}$$

$$f(x) \leq \|x\|\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \|f\| = \frac{\pi^2}{6}$$

1.3)$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_1, x = (x_1, x_2, \ldots)$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq$$

1.4) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, E = l_4, x = (x_1, x_2, \ldots)$

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \leq \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^4}(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

$$\|f\| = (\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

1.5) $f(x)=\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{dt}, E=C([0,1])$

Інтеграл - лінійна функція, отже і наш функціонал лінійний

$$|f(x)|=\int_0^2 t^2|x(t)|\leq \max_{t\in[0,1]}|x|\int_0^1 t^2dt=\|x\|\frac{1}{3}\Rightarrow\|f\|=\frac{1}{3}$$

1.6) $f(x)=\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{dt}, E=L_2([0,1])$

$$|f(x)|=\int_0^1 t^2x(t)dt\leq\sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 t^4dt}=\|x\|\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\|f\|=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

1.7) $f(x)=\int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(t)x(t)\mathrm{dt}, E=L_2([-1,1])$

$$|f(x)|=|\int_{-1}^1 sgn(t)x(t)dt|\leq\sqrt{\int_{-1}^1 x^2(t)dt}\sqrt{\int_{-1}^1 sgn^2(t)dt}=\|x\|2\Rightarrow\|f\|=2$$

1.8) $f(x)=\int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(t)x(t)\mathrm{dt}, E=C([-1,1])$

$$|f(x)|=|\int_{-1}^1 sgn(t)x(t)dt|=|\int_{-1}^0 -x(t)dt+\int_0^1 x(t)dt|\leq|\int_{-1}^0 -x(t)dt|+|\int_0^1 x(t)dt|\leq$$

$$\leq|\max_{t\in[-1,0]}x(t)|+|\max_{t\in[0,1]}x(t)|\leq\max_{t\in[-1,1]}|x(t)|=\|x\|\Rightarrow\|f\|=1$$

1.9) $f(x)=\int_{-1}^1 x^2(t)\mathrm{dt}, E=C([-1,1])$

$$|f(x)|=|\int_{-1}^1 x^2(t)dt|\leq\max_{t\in[-1,1]}x(t)2=2\|x\|\Rightarrow\|f\|=2$$

1.10) $f(x)=x(0), E=C([-1,1])$

$$|f(x)|=|x(0)|\leq\max_{t\in[-1,1]}x(t)=\|x\|\Rightarrow\|f\|=1$$

1.11) $f(x)=2x(-1)-x(1), E=C([-1,1])$

$$|f(x)|=|2x(-1)-x(1)|\leq 3\|x\|(\text{досягається при } x(-1)=-x(1)=maxx)\|f\|=3$$

1.12) $f(x)=x(0), E=C([0,1]), |x\|_E=\int_0^1|x(\xi)\mid d\xi$

1.13) $f(x)=x'(0)+x(1), E=C(1)([0,1]), |x|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|$

$$|f(t)|=|x`(0)+x(1)|\leq\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|=\|x\|\Rightarrow\|f\|=1$$

Завдання 2

2. Нехай $f:E\to\mathbb{R}$ - ненульовий ЛНФ. Довести, що область значень f співпадає з $\mathbb{R}$.