Завдання 4 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

3 червня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Покажіть, що лема 1 з лекції 7 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

Лема

Нехай H — строго опуклий лінійний нормований простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді множина $F(T)$ опукла та замкнена.

Розв'язання:

Завдання 2

Завдання

Нехай C непорожня підмножина гільбертового простору H,

$T_1, T_2, \ldots, T_m \colon C \to H$ - нерозтягуючі оператори, причому

$$\bigcap_{n=1}^{m} F\left(T_n\right) \neq \emptyset$$

.

Доведіть, що для довільного набору $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ додатніх чисел з $\sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n = 1$ оператор

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x \quad (x \in C)$$

є нерозтягуючим та $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F\left(T_n\right)$.

Розв'язання:

Нехай $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n < m, T_n x = x$ тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x = x \overbrace{\sum_{n=1}^{m} \lambda_n}^{1} = x$$

Отже $x \in F(T)$ тобто $F(T) \supseteq \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Нехай $x \in F(T), Tx = x$ і нехай від супротивного $\exists m_1 : T_k x \neq x, k \in m_1$

Тоді

$$Tx = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n T_n x = x \sum_{n=1}^{m-|m_1|} \lambda_n + \sum_{k \in m_1} \lambda_k T_k x = x \sum_{n=1}^{m} \lambda_n$$

$\sum\limits_{k \in m_1} \lambda_k (T_k x - x) = 0 \Rightarrow T_k x = x$ протиріччя

Отже $\forall x \in F(T), \forall n \leq m, T_n x = x$

Отже $F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{m} F(T_n)$

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Нехай $A \subseteq B^n$ - непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T : B^n \to B^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)-$ множина нерухомих точок відображення T.

Розв'язання:

Виберемо довільний компакт K та багатозначне відображення з нього в 2^K так, що

1. для всіх $x \in K$ множина T_0x є непорожньою опуклою підмножиною множини K
2. відображення T_0 замкнене.

Завдання 4

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Доводити будемо від супротивного. Нехай $\forall x \in B^n, f(x) \neq 0$.

Визначимо неперервне відображення $B^n \xrightarrow{\phi} B^n, \quad \phi : -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$

За теоремою Брауера $\exists x_1 \in B^n, \quad -\frac{f(x_1)}{\|f(x_1)\|} = x_1$

Тоді маємо $(f(x_1), x_1) = -\|f(x_1)\| < 0$

З сильної версії теореми Брауера можемо заключити, що $x_1 \in S^{n-1}$ що

власне і приводить до протиріччя, завершуючи доведення.

Доведено!

Завдання 5

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$f\left(S^{n-1}\right) \subseteq B^n$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = x_0$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

В банахових просторах ℓ_2, c_0 та $C([-1, 1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Розв'язання:

це не можливо за теоремою Брауера, адеж подібне відображження завжди матиме непорожню множину нерухомих точок.

Завдання 7

Завдання

Нехай H - нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабко неперервним.

Розв'язання:

В скінченновимірному просторі очевидно, що якщоррозглядати даниий оператор як функцію то це буде неперервна диференційовна функція з лінійними частковими похідними. При нескінченновимірному просторі особливо нічогго не змініться, отже можемо узагальнити, що данний оператор є неперервним, а не слабко неперервним.

Доведено!

Завдання 8

Завдання

Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) – метричні простори, (Y, d_Y) – компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max\limits_{y \in Y} f(x, y)$. Доведіть, що $g \in C(X)$.

Розв'язання:

$$x_n \to x, y_n \to y, f(x_n, y_n) \to f(x, y)$$

$$g(x_n) = \max_{y \in Y} f(x_n, y) = \max_{y_n \in Y} f(x_n, y_n)$$

Y компакт а отже $y \in Y$ з визначення компакта ($\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in Y$)

Отже $g(x_n) \to g(x)$. Отже є неперервною за Ріманом

Доведено!

Завдання 9

Завдання

Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, $Y-$ компакт. Доведіть, що відображення $T : X \to 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\}$$

замкнене (X, Y метричні простори).

Розв'язання:

Доведення від супротивного. Нехай відобреження не є замкненим, тобто

$$\exists x_n \to x, y_n \to y, y_n \in Tx_n, y \notin Tx$$

$\inf\limits_{y_n \in Y} \phi(x_n, y_n)$, $y_n \to y$ і за аналогією з минулою задачею з того, що Y компакт випливає, що $y \in Y$ Отже $\inf\limits_{y_n \in Y} \phi(x_n, y_n) \to \phi(x, y)$

Отже $y \in Tx$ - Суперечність.

Доведено!

Завдання 10

Завдання

Нехай A, B - непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y, відповідно. Функція $L : X \times Y \to \mathbb{R}-$ неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$

$$L(x_0, y) \le L(x_0, y_0) \le L(x, y_0) \quad \forall x \in A \forall y \in B$$

Розв'язання:

Функція опукла по x це означає, що є точка мінімуму на A. Функція угнута по y тобто є точка максимуму на B. З цього очевидно, що існує сідлова точка.