

# Екзаменаційна робота

Киращук Інна та Коломієць Микола

11 червня 2023 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Завдання 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Завдання 2</b>	<b>3</b>

# Завдання 1

## Означення 1

Нехай  $S \subseteq C(X)$ . Множина  $S$  сильно розділяє точки множини  $X$ , якщо  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \exists f \in S : f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2$

## Означення 2

Нехай  $S \subseteq C(X)$ . Множину  $S$  називають решіткою, якщо  $\forall f, g \in S$ :  $\max\{f, g\} \in S, \min\{f, g\} \in S$ .

## теорема Какутані–Крейна.

Нехай  $X$  — компакт,  $S \subseteq C(X)$ . Припустимо, що:

- 1)  $S$  — решітка;
- 2)  $S$  — замкнена підмножина  $C(X)$ ;
- 3)  $S$  сильно розділяє точки множини  $X$ ;
- 4)  $1 \in S$

$S$  співпадає з усім простором  $C(X)$ .

**Розв'язання:**

## Завдання 2

### Завдання

Нехай неперервне відображення  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка  $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$ .

### Розв'язання:

Доводити будемо від супротивного.

Нехай  $\forall x \in B^n, f(x) \neq 0$ .

Визначимо неперервне відображення

$$B^n \xrightarrow{\phi} B^n, \quad \phi x = -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

За теоремою Брауера

$$\exists y \in B^n, \quad -\frac{f(y)}{\|f(y)\|} = y \Rightarrow (f(y), y) = -\|f(y)\| < 0$$

З включення  $y \in S^{n-1}$  маємо протиріччя з умовою задачі.

Доведено!