Завдання 3 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

24 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

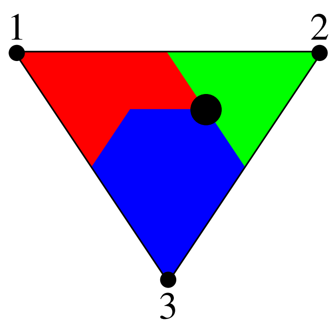
Нехай A_1, A_2, A_3 - набір замкнених підмножин трикутника $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ з вершинами v_1, v_2 та v_3. Нехай:

1. $\Delta = \bigcup_{k=1}^{3} A_k$;
2. $\forall k \in \{1, 2, 3\} : v_k \in A_k$;
3. $\forall k, i \in \{1, 2, 3\} : [v_k, v_i] \subseteq A_k \cup A_i$.

Доведіть, що $\bigcap_{k=1}^{3} A_k \neq \emptyset$.

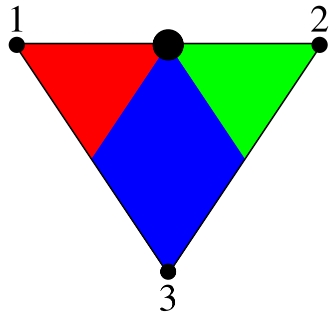
Розв'язання:

Подивимось на можливі розташування множин у трикутнику.



У подібних розташуваннях очевидно завжди буде спільна точка, що і належить перетину. Тож, щоб перетин був порожній треба розставити множини послідовно (щоб були два кольори які не торкаються).

Очевидно подібне не можливо адже відрізки з’єднуючі вершини мають належати відповідним об’єднанням тож послідовно множини розставити не вийде.



З цього випливає, що в будь-якому разі перетин не буде порожній.

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що всі опуклі компакти з непорожньою внутрішністю в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфні.

Розв'язання:

Доведемо подібне твердження в $\mathbb{R}$,

з цього випливе анологічне твердження в $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}$ опуклі компакти є замкненимим опуклими множинами - тобто зімкненими інтервалами.

Наведемо гомеоморфізм, який переведе компакт $[a, b]$ у компакт $[c, d]$

$f(x) = \frac{x-a}{b-a}(d + c) - c$

Для випадку $\mathbb{R}^n$ слід взяти вектор подібних функцій.

Доведено!

Завдання 3

Завдання

Нехай $A \subseteq B^n$ - непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T : B^n \to B^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)-$ множина нерухомих точок відображення T.

Розв'язання:

Виберемо довільний компакт K та багатозначне відображення з нього в 2^K так, що

1. для всіх $x \in K$ множина $T_0 x$ є непорожньою опуклою підмножиною множини K
2. відображення T_0 замкнене.

Тобто виконуються умови теореми Кукутані. Отже множина нерухомих точок T_0 компактна. З завдання 2 маємо, що довільні компакти гомеомофрні тож оберемо T_1 так, що його множина нерухомиих точок збігалась з A. Зробимо відображення однозначним в одну сторону, щоб властивість нерухомих точок зберіглась і воно було неперервним. Продовжимо відображення на весь простір (за теоремами з функ.аналізу це можна зробити) і отримаємо відображення T, яке і задовільняє умову задачі. Доведено!

Завдання 4

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Доводити будемо від супротивного. Нехай $\forall x \in B^n, f(x) \neq 0$.

Визначимо неперервне відображення $B^n \xrightarrow{\phi} B^n, \quad \phi : -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$

За теоремою Брауера $\exists x_1 \in B^n, \quad -\frac{f(x_1)}{\|f(x_1)\|} = x_1$

Тоді маємо $(f(x_1), x_1) = -\|f(x_1)\| < 0$

З сильної версії теореми Брауера можемо заключити, що $x_1 \in S^{n-1}$ що власне і приводить до протиріччя, завершуючи доведення.

Доведено!

Завдання 5

Завдання

Нехай неперервне відображення $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$f\left(S^{n-1}\right) \subseteq B^n$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n : f(x_0) = x_0$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

В банахових просторах ℓ_2, c_0 та $C([-1,1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Розв'язання:

це не можливо за теоремою Брауера, адеж подібне відображження завжди матиме непорожню множину нерухомих точок.

Завдання 7

Завдання

Нехай H - нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабко неперервним.

Розв'язання:

В скінченновимірному просторі очевидно, що якщо ррозглядати даниий оператор як функцію то це буде неперервна диференційовна функція з лінійними частковими похідними. При нескінченновимірному просторі особливо нічогго не змінитьяся, отже можемо узагальнити, що данний оператор є неперервним, а не слабко неперервним.

Доведено!

Завдання 8

Завдання

Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) – метричні простори, (Y, d_Y) – компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max\limits_{y \in Y} f(x, y)$. Доведіть, що $g \in C(X)$.

Розв'язання:

$$x_n \to x, y_n \to y, f(x_n, y_n) \to f(x, y)$$

$$g(x_n) = \max_{y \in Y} f(x_n, y) = \max_{y_n \in Y} f(x_n, y_n)$$

Y компакт а отже $y \in Y$ з визначення компакта $(\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in Y)$

Отже $g(x_n) \to g(x)$. Отже є неперервною за Ріманом

Доведено!

Завдання 9

Завдання

Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, $Y-$ компакт. Доведіть, що відображення $T : X \to 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\}$$

замкнене (X, Y метричні простори).

Розв'язання:

Доведення від супротивного. Нехай відобреження не є замкненим, тобто

$$\exists x_n \to x, y_n \to y, y_n \in Tx_n, y \notin Tx$$

$\inf\limits_{y_n \in Y} \phi(x_n, y_n)$, $y_n \to y$ і за аналогією з минулою задачею з того, що Y компакт випливає, що $y \in Y$ Отже $\inf\limits_{y_n \in Y} \phi(x_n, y_n) \to \phi(x, y)$

Отже $y \in Tx$ - Суперечність.

Доведено!

Завдання 10

Завдання

Нехай A, B - непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y, відповідно. Функція $L : X \times Y \to \mathbb{R}-$ неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$

$$L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0) \quad \forall x \in A \forall y \in B$$

Розв'язання:

Функція опукла по x це означає, що є точка мінімуму на A. Функція угнута по y тобто є точка максимуму на B. З цього очевидно, що існує сідлова точка.