Завдання 1 з премету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

7 травня 2023 р.

Зміст

Завдання 1

Завдання

Нехай С — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору Н. Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2, \ \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\|P_C x - P_C y\|^2 = \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 =$$

$$\|x-y-((x-P_C x)-(y-P_C y))\|^2 =$$

$$= \|x-y\|^2 - 2(x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) + \|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\cancel{\|x-y\|^2} - 2(x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) + \|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq}$$

$$\cancel{\|x-y\|^2} - \|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2$$

$$\|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2 \overset{?}{\leq} (x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y))$$

$$\|(x-P_C x)-(y-P_C y)\|^2 = ((x-P_C x)-(y-P_C y),(x-P_C x)-(y-P_C y)) =$$

$$= (x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) - (P_C x - P_C y,(x-P_C x)-(y-P_C y))$$

$$\cancel{(x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y))} - (P_C x - P_C y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) \overset{?}{\leq}$$

$$\cancel{(x-y,(x-P_C x)-(y-P_C y))}$$

$$(P_C x - P_C y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) \overset{?}{\geq} 0$$

$$(P_C x - P_C y,(x-P_C x)-(y-P_C y)) =$$

$$(P_C x - P_C y, x-y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) =$$

$$= (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \overset{?}{\geq} 0$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x$:

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівеість:

$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2$, що і завершує доведення.

Завдання 2

Завдання

Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та

C = з.л.о. $\{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, x \in H$$

Розв'язання:

Нехай $x \in H$. Тоді розклад вектора $P_C x$ можна записати так

$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x + x, e_n)e_n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}((P_C x - x, e_n) + (x, e_n))e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(P_C x - x, e_n)e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$

C - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно $e_n \in C$.

Тоді за теоремою 4 другої лекції $(P_C x - x, e_n) = 0$

$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(P_C x - x, e_n)}_{0}e_n + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$

Доведено

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що для гіперплощини

$L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}(x_0 \neq 0, c \in R)$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

Розглянемо скалярний добуток:

$$(x - P_L x, x_0) = (x_0, x - P_L x)| * x_0$$

$$(x - P_L x, x_0)x_0 = (x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0(x_0, x - P_L x) = x_0((x_0, x) - (x_0, P_L x))$$

За визначенням $P_L x \in L$, а отже $(x_0, P_L x) = c$

$$(x - P_L x)\|x_0\|^2 = x_0((x_0, x) - c)| * \tfrac{1}{\|x_0\|^2}$$

$$(x - P_L x) = ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Звідси отримуєм, що

$P_L x = x - ((x_0, x) - c)\tfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$, доведено

Завдання 4

Завдання

Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору $H, x \in H \setminus C$.

Доведіть, що $\exists p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Повне доведення:

C замкнена множина отже замість $\sup$ можна інтерпритувати умову як

$$\forall y \in C, \exists p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) < (p, x)$$

Доведення проводимо від супротивного. Нехай $\exists y \in C$ такий що

$$\forall p \in H \setminus \{0\} \quad (p, y) \geq (p, x)$$

$$(p, y) - (p, x) = (p, y - x) \geq 0$$

$$(-p, y - x) \leq 0$$

Подивившись на теорему 2 другої лекції (а саме на її другий пункт) стає очевидно, що за $-p$ варто взяти $P_C x - x$. Тоді отримаємо

$$(P_C x - x, y - x) = (P_C x - x, y - P_C x + P_C x - x) =$$

$$= (P_C x - x, y - P_C x) + (P_C x - x, P_C x - x) \leq 0$$

За теоремою 2 з лекції 2 (пункт 2) $(P_C x - x, y - P_C x) \geq 0$

$(P_C x - x, P_C x - x) = \|P_C x - x\|^2 > 0$ адже $x \in H \setminus C, x \neq P_C x$

Доведено

Швидке доведення:

Покладемо $p = x - P_C x \neq 0$. Для довільного $y \in C$ з теореми 2 другої лекції (пункт 2) маємо $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < (p, x)$, що і треба було довести.

Завдання 5

Завдання

Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору $H, \dim H < +\infty, x \in H \backslash C$. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, x)$$

Розв'язання:

З завдання 4 випливає що якщо $x \in H \backslash \bar{C}, \exists p \in H \backslash \{0\} \quad \sup_{y \in C}(p, y) < (p, x)$

Залишилось довести твердження для $x \in \bar{C} \backslash C$

Так само візьмемо за $p = x - P_C x$

$$(p, y) - (p, x) = (x - P_C x, y) - (x - P_C x, x) =$$

$$= (x - P_C x, y - P_C x) + (x - P_C x, x - P_C x) = (x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2$$

Очевидно, що для $x \in \bar{C} \backslash C, P_C x = x$ (є послідовність з C що збігається до x, і тоді норма різниці буде 0)

$$(x - P_C x, y - P_C x) + \|x - P_C x\|^2 = (0, y - x) = 0$$

$$\begin{cases} \sup_{y \in C}(p, y) < (p, x), & \forall x \in C \\ \sup_{y \in C}(p, y) = (p, x), & \forall x \in \bar{C} \backslash C \end{cases}$$

Отже

$$\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, x), \quad \forall x \in C$$

Доведено

Завдання 6

Завдання

Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$ і D обмежена. Доведіть, що $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$$

Розв'язання:

З минулих завданнь маємо $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < (p, x), x \in H$ при $p = x - P_C x$

Залишилось довести, що $(x - P_C x, x) \leq \inf\limits_{x \in D}(x - P_C x, x)$

Очевидно, що ця рівнясть досягається якщо прибрати $\inf$, з обмеженості і замкнености Dвипливає, що $\inf$ досягається при певному $x \in D$.

Отже $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < \inf\limits_{x \in D}(p, x)$

Доведено

Завдання 7

Завдання

Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1. C — слабко секвенційно замкнена множина.

2. C — замкнена множина.

3. C — слабко замкнена множина.

Розв'язання:

Завдання 8

Завдання

Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

1. Якщо припустити, що множина $C - D = c - d : c \in C, d \in D$ опукла та замкнена, то $\exists p \in H \backslash \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) < \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.
2. Якщо припустити, що $\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла, то $\exists p \in H\ \{0\}$ такий, що $\sup\limits_{y \in C}(p, y) \leq \inf\limits_{x \in D}(p, x)$.

Розв'язання:

1. Для множини $C - D$ застосуємо теорему з 4 завдання адже вона опула, замкнена та не порожня, тоді

$$\sup_{c \in C, d \in D}(p, c - d) < (p, z), z \in H \backslash (C - D), p = z - P_{C-D}z$$
$$\sup_{c \in C, d \in D}((p, c) - (p, d)) = \sup_{c \in C}(p, c) - \inf_{d \in D}(p, d) < (p, z)$$
$$\sup_{c \in C}(p, c) < \inf_{d \in D}(p, d) + (p, z)$$
$$(p, z) = (z - P_{C-D}z, z) = \|z\|^2 - (P_{C-D}z, z)$$

Обираємо z так, щоб виконувалась нерівність $\|z\|^2 > (P_{C-D}z, z)$

Тоді $\sup\limits_{c \in C}(p, c) < \inf\limits_{d \in D}(p, d)$

Доведено

2. Анологічно використовуємо 5 завдання

$$\sup_{c \in C, d \in D}(p, c - d) \leq (p, z), z \in H \backslash (C - D), p = z - P_{C-D}z$$

$$\sup_{c\in C, d\in D}((p,c)-(p,d)) = \sup_{c\in C}(p,c) - \inf_{d\in D}(p,d) \leq (p,z)$$
$$\sup_{c\in C}(p,c) \leq \inf_{d\in D}(p,d) + (p,z)$$
$$(p,z) = (z - P_{C-D}z, z) = \|z\|^2 - (P_{C-D}z, z)$$

Обираємо z так, щоб виконувалась нерівність $\|z\|^2 \geq (P_{C-D}z, z)$

Тоді $\sup\limits_{c\in C}(p,c) \leq \inf\limits_{d\in D}(p,d)$

Завдання 9

Завдання

Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо $C = cl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n}x \to P_C x$.

Розв'язання:

З визначення множна C замкнена і опукла. Тоді можемо визначити проекції

$$\|P_C x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|, \quad \|P_{C_n}x - x\| = \min_{y_n \in C_n} \|y_n - x\|$$

Нехай $y^{min} = y = P_C x, y_n^{min} = y_n = P_{C_n}x.$

Треба довести, що $\forall x \in H, y_n \to y$.

З умови $C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ випливаєб що $cl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n) = cl(\lim\limits_{n \to \infty} C_n)$ Тоді, якщо $\exists N \in N, \forall n > N, y \in C_n, y_n = y$ і твердження є очевидним.

Нехай $\nexists N \in N, \forall n > N, y \in C_n$ Тоді $\exists N \in N, \forall n > N, y \in cl(C_n) \backslash C_n$

А отже $\exists y_n^1 \in C_n, y_n^1 \to y$ Тоді $\forall x \in H \|y_n^1 - x\| \to \|y - x\|$

При цьому $\|y - x\| < \|z - x\|, \forall z \in C$ і $\|y_n - x\| < \|z_n - x\|, \forall z_n \in C_n$

А отже $\|y_n - x\| \leq \|y_n^1 - x\|$

$$C_n \subseteq C \Rightarrow \|y - x\| \leq \|z - x\|, \forall z \in C_n, n = 1..\infty$$

Отже $\|y - x\| \leq \|y_n - x\| \leq \|y_n^1 - x\| \Rightarrow y_n \to y$ за теоремою прополіцаїв.

Доведено

Завдання 10

Завдання

Нехай $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ і нехай $x \in H$.

Доведіть, що $P_{C_n}x \to P_C x$.

Розв'язання:

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \Rightarrow C = \lim_{n\to\infty} C_n,$$

$$P_C x \in C \Rightarrow \exists N \in N, \forall n > N P_C x \in C_n \Rightarrow P_C x = P_{C_n} x \Rightarrow P_{C_n} x \to P_C x$$

Доведено