

Завдання 2 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

14 травня 2023 р.

Зміст

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	5
3	Завдання 3	6
4	Завдання 4	7
5	Завдання 5	8
6	Завдання 6	9
7	Завдання 7	10
8	Завдання 8	11
9	Завдання 9	12
10	Завдання 10	13

Завдання 1

Завдання

Нехай $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Розв'язання:

Біном Ньютона

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\text{Позначимо за } f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\text{Тоді } \frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n (n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} - \\ & - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \\ & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n (k - nx) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n x C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k(k-1)(1-x)^2 - 2k(n-k)x(1-x) + \\
&\quad (n-k)(n-k-1)x^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k - 2xk^2 + 2xk + x^2k^2 - kx^2 - 2knx + \\
&\quad 2knx^2 + 2k^2x - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nkx^2 - nx^2 - knx^2 + k^2x^2 + kx^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k + 2kx - 2knx - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nx^2) \\
&\quad \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = nx - 2nx^2 + 2n^2x^2 - n^2x^2 + nx^2 \\
&\quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = x - x^2 + nx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_0 = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n kx C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right) = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x^2 = \frac{x-x^2+nx^2}{n} - x^2 = \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

Доведено!

Завдання 2

Завдання

Доведіть, що якщо функція f зростає на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж зростає на $[0, 1]$.

Розв'язання:

нехай f зростаюча на $[0, 1]$ функція

$$B_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, отже при розкритті дужок x^k завжди скорочується.

Позначимо коефіцієнт при x^k які були в перших $[n/2]$ доданках $p_{k,1}$, і відповідно коефіцієнт $p_{k,2}$ при всіх інших доданках. тоді очевидно, що для

$$\forall k \in N, k \leq n, p_{k,1} - p_{k,2} = 0,$$

Тоді

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l x^l = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k+l} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!n!}{l!(n-k-l)!(n-k)!k!} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k+l} \end{aligned}$$

Завдання 3

Завдання

Доведіть, що якщо функція f опукла на $[0, 1]$, то поліном Бернштейна $B_n(f, \cdot)$ теж опуклий на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 4

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$ задовольняє умову: існує $L > 0$ таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ вірна нерівність

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f, x)| &= \left| \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ |f(x) - f(\frac{k}{n})| &\leq L|x - \frac{k}{n}| \\ \max \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| &\leq \max \sum_{k=0}^n |x - \frac{k}{n}| = \max nx - n \sum_{k=0}^n k \\ \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \sum_{k=0}^n L \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Завдання 5

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1]^2)$. Покладемо для $x, y \in [0, 1]$,

$$B_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що $B_n \rightarrow f$ рівномірно на $[0, 1]^2$.

Розв'язання:

Завдання 6

Завдання

Нехай функція $f \in C([0, 1])$ така, що $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
Доведіть, що $f(x) = 0$ на $[0, 1]$.

Розв'язання:

Завдання 7

Завдання

Нехай $f \in C([0, 1])$. Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Розв'язання:

Завдання 8

Теорема Л.Фейєра

Нехай $f \in C_{2\pi}$, S_n - часткова сума ряду Фур'є функції f по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на \mathbb{R} збігається до f .

Розв'язання:

Завдання 9

Завдання

Нехай X, Y - компакти, $f \in C(X \times Y)$. Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq C(X), \exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y) \right| < \varepsilon$$

Розв'язання:

Завдання 10

Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується: $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$.

Доведіть, що тоді також $\text{cl } A = C(X)$.

Розв'язання: