Завдання 2

Микола Коломієць

6 грудня 2023 р.

Зміст

1 задача

Умова

Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \to \min\limits_C$ має місце:

$$f(x) = \min_C f \Leftrightarrow x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

Для опуклої функції виконується нерівність (минула дз)

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x),$$

Якщо $\forall y \in C$ маємо $(\nabla f(x), y - x) \geq 0$ то

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) \geq f(x) \quad \forall y \in C,$$

тобто $f(x) = \min\limits_C f$.

Тепер навпаки(зправа наліво), запишемо тепер наближення першого порядку для f в x :

$$f(x) \leq f(y) = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + o(\|y - x\|), \quad \forall y \in C.$$

Оскільки допустима множина C опукла, то разом із точками x та y до неї входять довільні їхні опуклі комбінації, тобто точки вигляду $(1 - \lambda)x + \lambda y$, де $\lambda \in (0, 1)$. Підставляемо ї у останно нерівність:

$$0 \leq \lambda(\nabla f(x), y - x) + o(\lambda\|y - x\|), \quad \forall y \in C$$

Спрямовуючи $\lambda \to 0$ бачимо, що знак правої частини визначається перпим доданком (властивості о-малого), а тому маємо нерівність

$$0 \leq (\nabla f(x), y - x), \quad \forall y \in C.$$

2 задача

Умова

Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - власна замкнена опукла функція. Довести, що

$$z = prox_g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y) - g(z) \geq (x - z, y - z) \quad \forall y \in E$$

Нехай

$$z = \text{prox}_g(x) = \text{argmin}_{y \in E} \left\{ g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \right\}.$$

Тоді для $t \in (0, 1)$

$$g(z + t(y - z)) + \frac{1}{2}\|z + t(y - z) - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2}\|z - x\|^2.$$

Опуклість g дає

$$(1 - t)g(z) + \text{tg}(y) + \frac{1}{2}\|z + t(y - z) - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2}\|z - x\|^2.$$

Далі

$$g(y) - g(z) \geq \frac{t(x - z, y - z) + \frac{t^2}{2}\|y - z\|^2}{t}.$$

Переходимо до границі при $t \to 0$.

Тепер навпаки. Нехай

$$g(y) - g(z) \geq (x - z, y - z) \quad \forall y \in E.$$

Оскільки

$$2(x - z, y - z) = \|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 + \|y - z\|^2,$$

то

$$g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \geq g(z) + \frac{1}{2}\|z - x\|^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2 \quad y \in E.$$

Тому

$$z = \text{prox}_g(x) = \text{argmin}_{y \in E} \left\{ g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \right\}.$$

3 задача

Умова

Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - власна замкнена та опукла функція. Довести, що

$$x = prox_g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in argmin_{y \in E} g(y)$$

Нехай$x = \text{prox}_g(x)$. З минулої задачі маємо

$$g(y) - g(x) \geq (x - x, y - x) = 0 \quad \forall y \in E$$

$$g(y) \geq g(x) \quad \forall y \in E \to x \in argmin_{y \in E} g(y)$$

В обернену сторону. Нехай $x \in argmin_{y \in E} g(y)$ тоді

$$\text{prox}_g(x) = \text{argmin}_{y \in E}\{g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\} = x$$

адже в x функція g досягає свого мінімуму і $\|y - x\|$ не може бути меншою ніж у самій точці x.

4 задача

Умова

Нехай $g : E \to \mathbb{R} \cup +\infty$ — власна замкнена та опукла функція. Доведіть, що

$$(prox_g(x) - prox_g(y), x - y) \geq \|prox_g(x) - prox_g(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in E$$

З задачі 2 випливає, що при $z_1 = prox_g(y), z_2 = prox_g(x)$

$$g(p) - g(prox_g(y)) \geq (y - prox_g(y), p - prox_g(y)) = (y - prox_g(y), p) - (y - prox_g(y), prox_g(y))$$

$$g(p) - g(prox_g(x)) \geq (x - prox_g(x), p - prox_g(x)) = (x - prox_g(x), p) - (x - prox_g(x), prox_g(x))$$

$$g(p) - g(prox_g(y)) \geq (y - prox_g(y), p) - (y, prox_g(y)) + (prox_g(y), prox_g(y))$$

$$g(p) - g(prox_g(x)) \geq (x - prox_g(x), p) - (x, prox_g(x)) + (prox_g(x), prox_g(x))$$

5 задача

Умова

6 задача

Умова

7 задача

Умова

8 задача

Умова

9 задача

Умова

10 задача

Умова