

## Завдання 2 з предмету Спецкурс для ОМ-3

Коломієць Микола

15 травня 2023 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Завдання 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Завдання 2</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Завдання 3</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Завдання 4</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Завдання 5</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Завдання 6</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Завдання 7</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Завдання 8</b>	<b>12</b>
<b>9</b>	<b>Завдання 9</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Завдання 10</b>	<b>14</b>
<b>11</b>	<b>Завдання 11</b>	<b>15</b>
<b>12</b>	<b>Завдання 12</b>	<b>16</b>
<b>13</b>	<b>Завдання 13</b>	<b>17</b>
<b>14</b>	<b>Завдання 14</b>	<b>18</b>

# Завдання 1

## Завдання

Нехай  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доведіть тотожність

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

## Розв'язання:

### Біном Ньютона

$$1^n = (1-x+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\text{Позначимо за } f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\text{Тоді } \frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n (n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} - \\ & - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \\ & \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^n n C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n (k - nx) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n x C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k(k-1)(1-x)^2 - 2k(n-k)x(1-x) + \\
&\quad (n-k)(n-k-1)x^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k - 2xk^2 + 2xk + x^2k^2 - kx^2 - 2knx + \\
&\quad 2knx^2 + 2k^2x - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nkx^2 - nx^2 - knx^2 + k^2x^2 + kx^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} (k^2 - k + 2kx - 2knx - 2k^2x^2 + n^2x^2 - nx^2) \\
&\quad \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = nx - 2nx^2 + 2n^2x^2 - n^2x^2 + nx^2 \\
&\quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k-2} (1-x)^{(n-k-2)} k^2 = x - x^2 + nx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_0 = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\
& \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n kx C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right) = \\
& = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - x^2 = \frac{x-x^2+nx^2}{n} - x^2 = \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

Доведено!

## Завдання 2

### Завдання

Доведіть, що якщо функція  $f$  зростає на  $[0, 1]$ , то поліном Бернштейна  $B_n(f, \cdot)$  теж зростає на  $[0, 1]$ .

### Розв'язання:

нехай  $f$  зростаюча на  $[0, 1]$  функція

$$B_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Тоді

$$B_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l x^l ==$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k+l}$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k, C_n^k C_{n-k}^l = C_n^k C_k^l$$

$$\text{Тоді } \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_l^{n-k} (-1)^l f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^{k+l} = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(0) x^k$$

Очевидно при зростаючій  $f$ ,  $\Delta^k f(0) > 0$ , отже це поліном з додатніми

коефіцієнтами - зростаюча функція.

Доведено!

## Завдання 3

### Завдання

Доведіть, що якщо функція  $f$  опукла на  $[0, 1]$ , то поліном Бернштейна  $B_n(f, \cdot)$  теж опуклий на  $[0, 1]$ .

**Розв'язання:**

## Завдання 4

### Завдання

Нехай  $f \in C([0, 1])$  задовольняє умову: існує  $L > 0$  таке, що

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

Доведіть, що для всіх  $n \in \mathbb{N}$  вірна нерівність

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

### Розв'язання:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f, x)| &= \left| \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ |f(x) - f(\frac{k}{n})| &\leq L|x - \frac{k}{n}| \\ \max \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| &\leq \max \sum_{k=0}^n |x - \frac{k}{n}| = \max nx - n \sum_{k=0}^n k \\ \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \sum_{k=0}^n L \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$



## Завдання 5

### Завдання

Нехай  $f \in C([0, 1]^2)$ . Покладемо для  $x, y \in [0, 1]$ ,

$$B_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i}$$

Доведіть, що  $B_n \rightarrow f$  рівномірно на  $[0, 1]^2$ .

### Розв'язання:

(Завдання було зроблено на основі Леми один з відповідної лекції)

Якщо  $\|B_n - f\|$  збігається до нуля то рівномірна збіжність очевидна.

$$\begin{aligned} \|B_n - f\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n f(x, y) C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \right\| = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \end{aligned}$$

Нехай  $\epsilon > 0$  задано. За теоремою Кантора існують  $\delta_1, \delta_2$  такі, що для

$$x', x'', y', y'' \in [0, 1], \quad |x' - x''| < \delta_1, |y' - y''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} = \\ &= \sum_{|x'-x''| < \delta_1 \wedge |y'-y''| < \delta_2} \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} + \\ &+ \sum_{|x'-x''| > \delta_1 \vee |y'-y''| > \delta_2} \left\| f\left(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}\right) - f(x, y) \right\| C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \left(y - \frac{i}{n}\right)^2 C_n^k C_n^i x^k y^i (1-x)^{n-k} (1-y)^{n-i} = \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \frac{x(1-x)y(1-y)}{n} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2 \sigma_2^2} \end{aligned}$$

Далі оберемо таке  $N, \forall n > N, \frac{\|f\|_\infty}{2n\sigma_1^2\sigma_2^2} < \frac{\epsilon}{2}$

Тоді має місце рівність  $\forall \epsilon > 0 : \|B_n - f\| < \epsilon$

Доведено!

## Завдання 6

### Завдання

Нехай функція  $f \in C([0, 1])$  така, що  $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$   
Доведіть, що  $f(x) = 0$  на  $[0, 1]$ .

### Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) C_p^k x^{k+n} (1-x)^{p-k} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{p}\right) C_p^k \int_0^1 x^{k+n} (1-x)^{p-k} = 0, n = 0, 1, 2, \dots \\ x(1-x) &\geq 0, \forall x \in [0, 1], \Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq k \quad f\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \end{aligned}$$

Отже  $f(x) = 0$  на  $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ,  $f \in C \Rightarrow f(x) = 0, x \in [0, 1]$

Доведено!

## Завдання 7

### Завдання

Нехай  $f \in C([0, 1])$ . Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

**Розв'язання:**

## Завдання 8

### Теорема Л.Фейєра

Нехай  $f \in C_{2\pi}$ ,  $S_n$  - часткова сума ряду Фур'є функції  $f$  по основній тригонометричній системі. Тоді послідовність середніх Чезаро

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

рівномірно на  $\mathbb{R}$  збігається до  $f$ .

**Розв'язання:**

## Завдання 9

### Завдання

Нехай  $X, Y$  - компакти,  $f \in C(X \times Y)$ . Доведіть, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq C(X), \exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq C(Y) :$$

$$\sup_{x \in X, y \in Y} \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y) \right| < \varepsilon$$

**Розв'язання:**

## Завдання 10

### Завдання

Нехай виконано всі умови теореми Стоуна, крім третьої. А замість третьої умови виконується:  $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$ .

Доведіть, що тоді також  $\text{cl } A = C(X)$ .

**Розв'язання:**

# Завдання 11

## Означення 1

Нехай  $S \subseteq C(X)$ . Множина  $S$  сильно розділяє точки множини  $X$ , якщо  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \exists f \in S : f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2$

## Означення 2

Нехай  $S \subseteq C(X)$ . Множину  $S$  називають решіткою, якщо  $\forall f, g \in S$ :  $\max\{f, g\} \in S, \min\{f, g\} \in S$ .

## теорема Какутані–Крейна.

Нехай  $X$  — компакт,  $S \subseteq C(X)$ . Припустимо, що:

- 1)  $S$  — решітка;
- 2)  $S$  — замкнена підмножина  $C(X)$ ;
- 3)  $S$  сильно розділяє точки множини  $X$ ;
- 4)  $1 \in S$

$S$  співпадає з усім простором  $C(X)$ .

**Розв'язання:**



## Завдання 12

### Завдання

Пропонується узагальнити теорему Стоуна для локально компактного простору  $X$ . Нагадаємо, що простір  $X$  локально компактний, якщо кожна точка  $X$  має компактний окіл. Позначимо  $C_\infty(X)$  — лінійний простір неперервних функцій  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , що зникають у нескінченності, тобто  $f \in C_\infty(X)$  мають властивість:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X : |f(x)| < \epsilon, \forall x \notin K$$

Простір  $C_\infty(X)$  з рівномірною нормою є банаховим. Доведіть таку теорему.

### Теорема Стоуна для локально компактного простору.

Нехай  $X$  — локально компактний простір,  $A \subseteq C_\infty(X)$ .

Припустимо, що:

- 1)  $A$  — алгебра;
- 2)  $A$  розділяє точки множини  $X$ ;
- 3)  $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$ .

Тоді множина  $A$  щільна в  $C_\infty(X)$ .

### Розв'язання:

## Завдання 13

### Завдання

Розглянемо комплексний банаховий простір  $C_{\mathbb{C}}(X)$  заданих на компактi  $X$  неперервних функцій  $X \rightarrow \mathbb{C}$  (норма рівномірна). Для комплексних алгебр  $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$  теорема Стоуна не вірна (чому?). Але цю ситуацію можна виправити, якщо вимагати від алгебри  $A$  ще одну умову. Доведіть таку теорему.

### Теорема Стоуна для комплексних алгебр

Нехай  $X$  — компакт,  $A \subseteq C_{\mathbb{C}}$ . Припустимо, що:

- 1)  $A$  — алгебра;
- 2)  $A$  розділяє точки множини  $X$ ;
- 3)  $\forall x \in X \quad \exists f \in A : f(x) \neq 0$ ;
- 4)  $\forall f \in A$  функція  $f$ , визначена рівністю  
$$f(x) = \overline{f(x)}, x \in X, \text{ належить } A.$$

Тоді множина  $A$  щільна в  $C_{\mathbb{C}}(X)$ , тобто  $\text{cl} A = C_{\mathbb{C}}(X)$ .

### Розв'язання:

## Завдання 14

### Завдання

Нехай  $X$  — компактний метричний простір. Доведіть, що простір  $C(X)$  сепарабельний.

**Розв'язання:**