Завдання 2

Микола Коломієць

5 грудня 2023 р.

Зміст

1 задача

Умова

Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \to \min\limits_C$ має місце:

$$f(x) = \min_C f \leftrightarrow x \in C \quad \text{та} \quad (\nabla f(x), y - x) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

Для опуклої функції виконуеться нерівність (минула дз)

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x),$$

Якщо $\forall y \in C$ маємо $(\nabla f(x), y - x) \geq 0$ то

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) \geq f(x) \quad \forall y \in C,$$

тобто $f(x) = \min\limits_C f$.

Тепер навпаки(зправа наліво), запишемо тепер наближення першого порядку для f в x :

$$f(x) \leq f(y) = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + o(\|y - x\|), \quad \forall y \in C.$$

Оскільки допустима множина C опукла, то разом із точками x та y до неї входять довільні їхні опуклі комбінації, тобто точки вигляду $(1-\lambda)x + \lambda y$, де $\lambda \in (0, 1)$. Підставляемо ї у останно нерівність:

$$0 \leq \lambda(\nabla f(x), y - x) + o(\lambda\|y - x\|), \quad \forall y \in C$$

Спрямовуючи $\lambda \to 0$ бачимо, що знак правої частини визначаеться перпим доданком (властивості о-малого), а тому маємо нерівність

$$0 \leq (\nabla f(x), y - x), \quad \forall y \in C.$$

2 задача

Умова

3 задача

Умова

4 задача

Умова

5 задача

Умова

6 задача

Умова

7 задача

Умова

8 задача

Умова

9 задача

Умова

10 задача

Умова