

Завдання 4

Микола Коломієць

21 лютого 2024 р.

Розв'язання

Завдання 1

1. Нехай $G = \{x \in C([0, 1]) : x(0) = 0\}$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0, 1])$ який дорівнює нулю на G і набуває значення 2 на функції $x_0(t) = t + 1, t \in [0, 1]$.

$$f(x) = cx(0), \quad f(x_0) = c = 2 \Rightarrow f(x) = 2x(0)$$

Очевидно даний функціонал лінійний та неперервний.

Завдання 2

Довести, що існує ненульовий функціонал $F \in (L_\infty([-1, 1]))^*$ такий, що

$$F(x) = x(0), \quad \text{при } x \in C([-1, 1]).$$

Можливо за теоремою Ханна-Банаха можна продовжити функціонал з $C([-1, 1])$ на $L_\infty([-1, 1])$, а отже він існує.

Завдання 3

Чи правильно, що у ЛНП X елементи x та y є рівними, якщо рівність $f(x) = f(y)$ має місце для всіх $f \in X^*$?

Нехай $x \neq y, z = x - y, \forall f \in X^* f(x) = f(y) - f(z)$

Твердження з задачі буде виконуватись лише при $f(z) \neq 0$ де $z \neq 0$

припустимо, що $\exists z \neq 0 \in X, f(z) = 0$

введемо функціонал $f_0(\alpha z) = \alpha, \forall x \in X f_0(x) = 0$, якщо $f(x) \neq 0$ з неперервності лінійного відображення f_0 маємо що воно належить X^* тобто маємо протиріччя.

Тож твердження з умови правильне

Завдання 4

Чи правильно, що рефлексивний ЛНП є банаховим?

Так за визначенням рефлексивного простору, він є банаховим + при канонічному вкладенні збігається з **спряженим.