

# Завдання 1 з предмету Спецкурс для ОМ-З

Коломієць Микола

4 травня 2023 р.

# Зміст

1	Завдання 1	2
2	Завдання 2	4
3	Завдання 3	5
4	Завдання 4	7
5	Завдання 5	8
6	Завдання 6	9
7	Завдання 7	11
8	Завдання 8	12
9	Завдання 9	13
10	Завдання 10	14

# Завдання 1

## Завдання

Нехай  $C$  — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору  $H$ . Доведіть, що

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &= \|P_C x - x - P_C y + y + x - y\|^2 = \|x - y - ((x - P_C x) - (y - P_C y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \end{aligned}$$

Порівняємо з правою частиною нерівності:

$$\|x - y\|^2 - 2(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) + \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \stackrel{?}{\leq}$$

$$\|x - y\|^2 - \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2$$

$$\|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 \stackrel{?}{\leq} (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))$$

$$\begin{aligned} \|(x - P_C x) - (y - P_C y)\|^2 &= ((x - P_C x) - (y - P_C y), (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\ &= (x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) - (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} \stackrel{?}{\leq} \\
& \quad \overline{(x - y, (x - P_C x) - (y - P_C y))} \\
& \quad (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) \stackrel{?}{\geq} 0 \\
& \quad (P_C x - P_C y, (x - P_C x) - (y - P_C y)) = \\
& \quad (P_C x - P_C y, x - y) - (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) = \\
& \quad = (P_C x - P_C y, x - y) - \|P_C x - P_C y\|^2 \stackrel{?}{\geq} 0
\end{aligned}$$

Якщо застосувати другий пункт теореми 2 з лекції 2 при

$$1) z = P_C x, x = x, y = P_C y, 2) z = P_C y, x = y, y = P_C x:$$

Отримаємо:

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0$$

І якщо складемо їх отримаємо нашу нерівність:

$$(P_C x - P_C y, x - y) \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \text{ що і завершує доведення.}$$

## Завдання 2

### Завдання

Нехай  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору  $H$  та

$C = \text{з.л.о. } \{e_n\}$ . Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \in H$$

Розв'язання:

Нехай  $x \in H$ . Тоді розклад вектора  $P_C x$  можна записати так

$$\begin{aligned} P_C x &= \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x + x, e_n) e_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((P_C x - x, e_n) + (x, e_n)) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P_C x - x, e_n) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \end{aligned}$$

$C$  - з.л.о., тобто він і замкнений і лінійний і очевидно  $e_n \in C$ .

Тоді за теоремою 4 другої лекції  $(P_C x - x, e_n) = 0$

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(P_C x - x, e_n)}_0 e_n + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Доведено

## Завдання 3

### Завдання

Доведіть, що для гіперплощини  $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$  ( $x_0 \neq 0, c \in R$ ) проекція  $P_L x$  обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

Розв'язання:

Для довільного  $x \in H$ , розглянемо  $y \in L$  для якого  $(x_0, y) = c$  з визначення гіперплощини  $L$ . Тоді можна записати:

$$(x_0, x - y) = (x_0, x) - \underbrace{(x_0, y)}_c = (x_0, x) - c$$
$$x = P_L x + z, x - y = P_L x - y + z$$

$$P_L x = -x + y - z$$

$$(x - P_L x) \perp L \Rightarrow (x - P_L x, y) = 0, \forall y \in L$$

$$(x, y) = (P_L x, y)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0 ((x_0, x) - c)$$

$$(x - P_L x) \|x_0\|^2 = x_0 (x_0, z)$$

$$z\|x_0\|^2 = x_0(x_0, z)$$

$$z(x_0, x_0) = x_0(x_0, z)$$

$$(x - P_L x)(x_0, x_0) = x_0(x_0, x - P_L x)$$

## Завдання 4

### Завдання

Нехай  $C$  — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $x \in H \setminus C$ .

Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$$

Розв'язання:

Покладемо  $p = x - P_C x \neq 0$ . Для довільного  $y \in C$  з теореми 2 другої лекції

(пункт 2) маємо  $\forall y \in C$

$$0 \geq (x - P_C x, y - P_C x) = (p, y - x + p) = (p, y - x) + \|p\|^2.$$

$$(p, y) - (p, x) + \|p\|^2 \leq 0, \|p\|^2 \geq 0 \Rightarrow (p, y) \leq (p, x), \|p\|^2 > 0$$

Отже  $\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x)$ , що і треба було довести.



## Завдання 5

### Завдання

Нехай  $C$  — непорожня опукла підмножина гільбертового простору  $H$ ,  $\dim H < +\infty$ ,  $x \in H \setminus C$ . Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$$

Розв'язання:

Нехай  $x \in H \setminus C$ . За теоремою Хана-Банаха про розділення, існує неперервний лінійний функціонал  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  та дійсне число  $\alpha$ , такі що

$$f(y) \leq \alpha < f(x), \forall y \in C$$

Оскільки  $H$  має скінченну розмірність, з теореми Ріса випливає, що

$$\exists p \in H : f(z) = (p, z), \forall z \in H$$

Тоді отримаємо:  $(p, y) \leq \alpha < (p, x)$ . Отже  $\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x)$

## Завдання 6

### Завдання

Нехай  $C, D$  — непорожні замкнені опуклі підмножини  $H$  такі, що  $C \cap D = \emptyset$  і  $D$  обмежена. Доведіть, що  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$$

Розв'язання:

Для доведення даного твердження ми використаємо принцип роздільності Гансена-Банаха, який стверджує, що для будь-яких непорожніх замкнених опуклих множин  $A, B$  з таким, що  $A \cap B = \emptyset$ , існує гіперплощина, яка розділяє  $A$  та  $B$ , тобто існує  $p \in H \setminus \{0\}$  та  $c \in R$ , такі що  $(p, x) \leq c < (p, y)$  для будь-яких  $x \in A$  та  $y \in B$ .

Застосуємо цей принцип до множин  $C$  та  $\text{conv}(D)$ , де  $\text{conv}(D)$  позначає опуклу оболонку множини  $D$ , тобто найменшу опуклу множину, яка містить  $D$ . Зауважимо, що  $\text{conv}(D)$  є замкненою та обмеженою опуклою множиною, оскільки  $D$  є замкненою та обмеженою. Далі, оскільки  $C \cap D = \emptyset$ , то

$C \cap \text{conv}(D) = \emptyset$ . Отже, за принципом роздільності Гансена-Банаха, існує  $p \in H \setminus 0$  та  $c \in R$ , такі що  $(p, x) \leq c < (p, y)$  для будь-яких  $x \in C$  та  $y \in \text{conv}(D)$ .

Залишилося показати, що  $\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$ . Для цього зауважимо, що  $\inf_{x \in D}(p, x) \leq \inf_{x \in \text{conv}(D)}(p, x)$ . Оскільки  $D$  є замкненою та обмеженою, то  $\text{conv}(D)$  також є замкненою та обмеженою. Тому, згідно з теоремою про

існування інфімуму, існує точка  $z \in \text{conv}(D)$ , така що

$\inf_{x \in \text{conv}(D)}(p, x) = (p, z)$ . З іншого боку,  $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, w)$  для будь-якої точки  $w \in H$ , оскільки  $C$  є підмножиною  $H$ . Зокрема,  $\sup_{y \in C}(p, y) \leq (p, z)$ .

Але з принципу роздільності Гансена-Банаха  $(p, x) \leq c < (p, y)$  для

будь-яких  $x \in C$  та  $y \in \text{conv}(D)$ . Тому, вибравши будь-яку точку

$y \in \text{conv}(D)$ , отримаємо  $(p, z) > c \geq (p, x)$  для будь-якої точки  $x \in C$ , тобто

$\sup_{y \in C}(p, y) < \inf_{x \in D}(p, x)$ . Цим доведено твердження.

## Завдання 7

### Завдання

Нехай  $C$  — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1.  $C$  — слабо секвенційно замкнена множина.
2.  $C$  — замкнена множина.
3.  $C$  — слабо замкнена множина.

Розв'язання:

## Завдання 8

### Завдання

Нехай  $C, D$  — непорожні підмножини  $H$  такі, що  $C \cap D = \emptyset$ .

1. Якщо припустити, що множина  $C - D = \{c - d : c \in C, d \in D\}$  опукла та замкнена, то  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що  $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{x \in D} (p, x)$ .
2. Якщо припустити, що  $\dim H < +\infty$ , множина  $C - D$  опукла, то  $\exists p \in H \setminus \{0\}$  такий, що  $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{x \in D} (p, x)$ .

Розв'язання:

## Завдання 9

### Завдання

Нехай  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин гільбертового простору. Покладемо  $C = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$  і нехай  $x \in H$ . Доведіть, що  $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$ .

Розв'язання:

## Завдання 10

### Завдання

Нехай  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин гільбертового простору.

Припустимо що  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$  і нехай  $x \in H$ . Доведіть, що  $P_{C_n}x \rightarrow P_Cx$ .

Розв'язання: