Контрольна робота

Микола Коломієць

24 листопада 2023 р.

Зміст

1 Перша задача 2

2 Друга задача 3

3 Третя задача 4

1 Перша задача

Задача 1

Розрахувати $\int_0^1 (3x+1)^2 dx$ за формулою лівих прямокутників з трьома вузлами. Оцінити точність за правилом Рунге (взяти крок між вузлами та вдвічі більший). Який крок треба взяти, щоб точність $\varepsilon = 0.05$ була гарантована.(використати апріорну оцінку)

Запишемо інтеграл, як сумму інтегралів по вузлам:

$$\int_0^1 (3x+1)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (3x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (3x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (3x+1)^2 dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} (3x+1)^2 dx$$

для кожного інтегарлу використаємо формулу лівих прямокутників $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$:

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{1}{4}} (3x+1)^2 dx = \frac{1}{4} \\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (3x+1)^2 dx = \frac{1}{4}\frac{49}{16} \\ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (3x+1)^2 dx = \frac{1}{4}\frac{25}{4} \\ \int_{\frac{3}{4}}^{1} (3x+1)^2 dx = \frac{1}{4}\frac{169}{16} \end{cases}$$

$$\int_0^1 (3x+1)^2 dx = \frac{1}{4*16}(1+49+100+169) = \frac{319}{64}$$

Повторимо процедуру для кроку $\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 (3x+1)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (3x+1)^2 dx = \frac{1}{2}(1+\frac{25}{4}) = \frac{29}{8}$$

Оцінимо точність за правилом Рунге:

$$\varepsilon_0 = \frac{|y_{\frac{1}{4}} - y_{\frac{1}{2}}|}{3} = \frac{319 - 29*8}{64*3} = \frac{29}{64}$$

Формула апріорної оцінки $\varepsilon \le \frac{M_1(b-a)}{2n}$, у нас похідна функції зростаюча, тобто $M_1 = f'(b)$, отже

$$\varepsilon \le \frac{24}{2n} \to \text{якщо} \varepsilon = 0.05, n = \frac{12}{0.05} = 240$$

2 Друга задача

Задача 2

Побудувати лінійний поліном МНК для наближення функції $f(x) = cos^2(x)$, взявши 4 вузли на проміжку [-2, 2]

Я взяв проміжок [-2, 1], щоб легше рахувати було, тоді $X = (-2, -1, 0, 1)^T$, функції по яким апроксимуєму - $F = [1, x]$

Будуємо матрицю A та вектор b таким чином:

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{x \in X} f_1(x) f_1(x), \sum\limits_{x \in X} f_2(x) f_1(x) \\ \sum\limits_{x \in X} f_1(x) f_2(x), \sum\limits_{x \in X} f_2(x) f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4, -2 \\ -2, 6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \sum\limits_{x \in X} f_1(x) * f(x) \\ \sum\limits_{x \in X} f_2(x) * f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(2)^2 + 2cos(1)^2 + 1 \\ -2cos(2)^2 \end{pmatrix}$$

Тепер наша задача зводиться до вирішення системи:

$$\begin{pmatrix} 4a_0 - 2a_1 \\ 6a_1 - 2a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(2)^2 + 2cos(1)^2 + 1 \\ -2cos(2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.35 \end{pmatrix}$$

Методом крамера:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1.8, -2 \\ -0.35, 6 \end{vmatrix}}{20} = 0.5 \\ a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2, 1.8 \\ 2, 0.35 \end{vmatrix}}{20} = 0.1 \end{cases}$$

Отже выдповідь буде $f_{aprox} = 0.5 + 0.1x$

3 Третя задача

Задача 3

Наближено розв'язати ЗКШ, використавши метод Ейлера з кроком 0.5:

$$y'' = xy - x, y(0) = y'(0) = 2, x \in [0, 2]$$

$$\frac{dy'}{dx} = xy - x$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

За методом Ейлера виходить:

$$y'(x+h) = (xy(x) - x)h + y'(x)$$

$$y(x+h) = y'(x)h + y(x)$$

$$\begin{cases} y'(0) = 2, y(0) = 2 \\ y'(0.5) = 2, y(0.5) = 3 \\ y'(1) = 2.5, y(1) = 4 \\ y'(1.5) = 4, y(1.5) = 5.25 \\ y'(2) = 7,1875, y(2) = 7.25 \end{cases}$$