

**Домашнє завдання з заняття 8**  
**Дії над узагальненими функціями**

Розглянемо функціонал  $\mathcal{P}_{\frac{1}{t}}$ , визначений як

$$\left(\mathcal{P}_{\frac{1}{t}}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

1. Доведіть, що  $\mathcal{P}_{\frac{1}{t}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
2. Доведіть, що  $\mathcal{P}_{\frac{1}{t}}$  – сингулярна узагальнена функція.
3. Доведіть, що для довільного  $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  має місце включення

$$\text{supp}(f\alpha) \subset \text{supp} f \cap \text{supp} \alpha.$$

4. Обчислити границі у просторі  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ :

•

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon};$$

•

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\varepsilon}\right).$$

**Що треба почитати?**

- [1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин *Элементы теории функций функционального анализа*. С.206–210.
- [2] Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель *Функциональный анализ*, С.344, п.2.1, 2.2, 2.3.