КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Доповідь

Прямі методи розв'язання різницевих рівнянь. Методи матричної прогонки, редукції (декомпозиції), застосування до розв'язання модельної задачі; метод розділення змінних (Фур'є)

Виконали студенти групи ОМ-4
Кроча Кирило
Коломієць Микола
Депенчук Марія

Київ, 2024

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Автор розділу - Кирило Кроча

1.1 Загальний огляд

Наразі для розв'язання систем лінійних різницевих рівнянь існують два основні типи рівнянь:

- Прямі методи;
- Ітеративні методи

Загалом, прямі методи частіше орієнтовані на розв'язання вузького класу рівнянь, але дозволяють нам знайти розв'язок з використанням дуже малої частини обчислювальних можливостей.

У цьому розділі ми розглянемо загальні ідеї прямих методів, що використовуються для розв'язання різницевих рівнянь. Для цього розглянемо важливий клас різницевих рівнянь - лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами.

1.2 Загальна теорія лінійних різницевих рівнянь

Нашою метою є знаходження лінійно незалежних розв'язків рівняння порядку m :

$$a_m y(i+m) + a_{m-1} y(i+m-1) + \cdots + a_0 y(i) = 0$$

Ми будемо шукати розв'язки цього рівняння у формі $v(i) = q^i$. Підставляючи такий вигляд у рівняння, отримуємо:

$$q^i \left(a_m q^m + \cdots + a_0\right) = 0$$

Але оскільки ми шукаємо ненульовий розв' язок, можна поділити на q^i :

$$(a_m q^m + \cdots + a_0) = 0$$

Це рівняння називають характеристичним рівнянням, його корені можуть бути простими або кратними.

Припустимо, що вони прості, тоді можна показати що функції $v_1(i) = q_1^i, \ldots, v_m^i = q_m^i$ є лінійно незалежними розв'язками початкового рівняння. З цього випливає, що загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y(i) = c_1 q_1^i + \cdots + c_m q_m^i$$

Де $c_1, c_2, \ldots, c_m$ - це довільні константи. Для кратних коренів можна отримати схожі результати, розв'язок буде мати наступний вид:

$$y(i) = \sum_{l=1}^{s} \sum_{n=0}^{n_l - 1} c_n^{(l)} j^n q_l^j$$

Для знаходження розв'язку неоднорідного рівняння як суму загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівнянь, необхідно знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Для рівняння другого порядку його можна записати як:

$$\bar{y}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-2} \frac{q_2^{n-k-1} - q_1^{n-k-1}}{q_2 - q_1} \cdot \frac{f(k)}{a_2}$$

1.3 Висновок

Ми зрозуміли, що прямі методи грають важливу роль у вирішенні різницевих рівнянь, і хоча вони застосовні не до усіх видів рівнянь, іноді вони дозволяють значно скоротити час обчислень. Також ми розглянули деякі елементи теорії розв'язання лінійних різницевих рівнянь, що допоможе застосовувати прямі методи на практиці.

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МАТРИЧНОЇ ПРОГОНКИ

Автор розділу - Депенчук Марічка

2.1 Загальний огляд

Метод матричної прогонки, також відомий як алгоритм Томаса, ϵ ефективним чисельним інструментом для розв'язання систем лінійних рівнянь, зокрема тих, що виникають при дискретизації диференціальних рівнянь. Цей метод використовується для систем з тридіагональною матрицею коефіцієнтів, що є типовими у багатьох застосуваннях, наприклад, у фізиці та інженерії.

2.2 Теорія

Тридіагональна матриця виглядає наступним чином, де a_i, b_i, і c_i діагональні елементи, ad_i - елементи вектора правих частин:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Метод прогонки заснований на двоетапному процесі: прямому ході, де проводиться елімінація знизу вгору, та зворотньому ході, де здійснюється підстановка від останнього рівняння до першого.

Прямий хід: - змінені коефіцієнти Pi та Qi визначаються для оптимізації розрахунків. Ці коефіцієнти використовуються для тимчасового зберігання проміжних значень, що спрощує зворотний хід. - Розрахунок коефіцієнтів:

$P_i = \frac{-c_j}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}$ - З цього видно, що Pi - модифікований вплив попереднього рядка на наступний, а Qi - модифікована права сторона з урахуванням уже врахованих змін.

Зворотний хід:

- Використовуючи раніше обчислені коефіцієнти Pi та Qi, зворотний хід забезпечує швидке визначення всіх xi.
- Формула для зворотнього ходу: $x_n = Q_n, \quad x_i = Q_i + P_i x_{i+1}$

  Ця формула дозволяє обчислити кожне $\mathrm{x_i}$ починаючи з кінця системи і просуваючись до її початку.

2.3 Теорія розширеного методу матричної прогонки

Розглянемо узагальнений метод прогонки для системи лінійних рівнянь блочно-тридіагональною матрицею, яка може виникнути, наприклад, при розв'язуванні багатовимірних диференційних рівнянь у частинних похідних.

Система може бути представлена у формі: $A_j Y_{j-1} + C_j Y_j + B_j Y_{j+1} = F_j$, де кожен з Aj, Bj, і Cj є блоками матриці коефіцієнтів, а Yj і Fj відповідно блоки невідомих змінних та вільних членів системи.

Прямий хід:

- Ініціалізуємо коефіцієнти α_1 та β_1, які відповідають початковим блокам системи:

  $\alpha_1 = C_0^{-1} B_0 \quad \beta_1 = C_0^{-1} F_0$
- Далі, використовуючи рекурсивні формули, обчислюємо проміжні коефіцієнти для $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{N} - 1:$

  $\alpha_{j+1} = (C_j - A_j a_j)^{-1} B_j, \quad \beta_{j+1} = (C_j - A_j a_j)^{-1} (F_j + A, B_j)$

Зворотний хід:

- Розпочинаємо з останнього блоку, визначаючи Y_N :

$$Y_N = \beta_{N+1}$$

- Використовуючи значення Y_N, обчислюємо Y_j для $\mathrm{j} = \mathrm{N}{-}1,\ \mathrm{N}{-}2, \ldots, 0$ з рекурсивної формули:

$$Y_j = \alpha_{j+1} Y_{j+1} + \beta_{j+1}$$

2.4 Висновок

Метод матричної прогонки, який враховує блочну структуру матриці, дозволяє ефективно розв'язувати більш широкий клас систем лінійних рівнянь, які часто зустрічаються в багатовимірних чисельних задачах. Наведений алгоритм узагальнює класичний метод прогонки, зберігаючи його переваги щодо обчислювальної ефективності та простоти імплементації, проте водночас забезпечує можливість обробки систем з більш складною структурою. Основним обмеженням залишається вимога до тридіагональної структури матриці та до її діагональної домінантності, без яких збільшується ризик чисельної нестабільності методу.

РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РЕДУКЦІЇ (ДЕКОМПОЗИЦІЇ)

Автори розділу - Коломієць Микола, Депенчук Марічка

3.1 Загальний огляд

Метод редукції (декомпозиції) є одним з прямих методів для вирішення спеціальних векторних рівняннь до яких зводяться різницеві схеми для найпростіших еліптичних рівняннь. Данний метод має затрати на обчислення $O(MN\log_2(N))$ арифметичних дій.(Де М - розмірність вектора невідомих, а N кількість рівняннь)

3.2 Задача

Рівняння, на прикладі якого буде розглядатися данний метод:

$$-Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} = F_j, \quad 1 \leq j \leq N-1$$

$$Y_0 = F_0, \quad Y_N = F_N$$

Де Y_j-відповідний вектор невідомих, F_j - задана права частина, C - задана права частина.(задача з розділу 4 також водиться до цього рівняння)

3.3 Ідея алгоритму

Ідея метода редукції полягає в послідовному виключені з рівняння невідомих Y_j спочатку з непарними номерами j, потім з тих рівнянь, що лишились з номерами j, кратними 2 , потім 4 и так далі. За кожен крок процеса Зменшується кількість невідомих, і якщо N є стеменню 2 , тобто $N = 2^n$, то в результаті процеса виключення залишиться одне рівняння, з котрого можна знайти $Y_{N/2}$. Обернений хід метода полягає в послідовному находжені невідомих Y_j спочатку з номерами j, кратними $N/4$, потім $N/8, N/16$ і так далі.

Очевидно, що метод редукції це модифікований метод Гаусса, де виключення невідомих відбувається в спеціальному порядку. Вибраний порядок гарантує економію на обчисленнях при зменшені непотрібних шляхом запам'ятовування проміжнихрезультатів.

3.4 Прямий хід

1. Задаються значення для $q_j^{(0)} : q_j^{(0)} = F_j, j = 1, 2, \ldots, N-1$.

2. Перший крок для $k = 1$ робиться окремо по формулам, що враховють початкові дані $p_i^{(0)} \equiv 0$.

   Вирішуються рівняння для $p_j^{(1)}$ і обчислюються $q_j^{(1)}$:

$$\begin{aligned} &Cp_j^{(1)} = q_j^{(0)}, \\ &q_j^{(1)} = 2p_j^{(1)} + q_{j-1}^{(0)} + q_{j+1}^{(0)}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots, N-2. \end{aligned}$$

3. Для кожного фіксованого $k = 2, 3, \ldots, n-1$ обчислюється та зберігається вектори:

$$v_i^{(0)} = q_j^{(k-1)} + p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \quad j = 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \ldots, N - 2^k.$$

   Потім при фіксованому $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^{k-1}$ для кожного $j = 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \ldots, N - 2^k$ вирішуються рівняння

$$C_{l,k-1} v_j^{(l)} = v_j^{(l-1)}$$

   З однією незмінною матрицею , але різними правими частинами. В результаті будуть знайдені вектори $v_j^{\left(2^{k-1}\right)}$. Вектори $p_j^{(k)}$ и $q_j^{(k)}$ обчислюються по формулам:

$$\begin{aligned} &p_j^{(k)} = p_j^{(k-1)} + v_j^{\left(2^{k-1}\right)}, \\ &q_j^{(k)} = 2p_j^{(k)} + q_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + q_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \\ &j = 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \ldots, N - 2^k. \end{aligned}$$

3.5 Обернений хід

1. Задаются значення для Y_0 и $Y_N : Y_0 = F_0, Y_N = F_N$.

2. Для кожного фіксованого $k = n, n-1, \ldots, 2$ обчислюється і зберігаються вектори

$$v_j^{(0)} = q_j^{(k-1)} + Y_{j-2^{k-1}} + Y_{j+2^{k-1}},$$
$$j = 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \ldots, N - 2^{k-1}.$$

   Потім при фіксованому $l = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ для кожного $j = 2^{k-1}$, $3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \ldots, N - 2^{k-1}$ вирішуються рівняння

$$C_{l,k-1} v_j^{(l)} = v_j^{(l-1)}.$$

   В результаті знаходяться вектори $v_j^{\left(2^{k-1}\right)}$. Далі обчислюються Y_j за формулою

$$Y_j = p_j^{(k-1)} + v_j^{\left(2^{k-1}\right)}, \quad j = 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \ldots, N - 2^{k-1}.$$

3. Для $k = 1$ вирішується рівняння

$$CY_j = q_j^{(0)} + Y_{j-1} + Y_{j+1}, \quad j = 1, 3, 5, \ldots, N-1$$

РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Автор розділу - Коломієць Микола

4.1 Постановка задачі

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) = \varphi(x, y) \\ 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = Ae^{By} \sin \omega \\ u(x, 0) = A \sin \omega x \\ u(x, 1) = Ae^{B} \sin \omega x \\ \varphi(x, y) = Ae^{By}(\omega^2 - B^2) \sin \omega x \end{cases} \tag{4.1}$$

Розв'язок: $u(x, y) = Ae^{By} \sin(\omega x)$
Початкові значення: $A = B = 1, \omega = \pi$

4.2 Зведення

Візьмемо прямокутну сітку:

$$\omega = \{x_{i,j} = (ih_1, jh_2) \in G, 0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N, h_1 = 1/M, h_2 = 1/N\}$$

з границею γ, на прямокутнику $G = \{0 \leq x, y \leq 1\}$ треба вирішити різнісну задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$y_{x_1,x_1} + y_{x_2,x_2} = -\varphi(x), x \in \omega$$

$$y(x) = g(x), x \in \gamma$$

Після зведення рівняння до рівняння першого порядку та подальшою апроксимацією цієї системи різницевою схемою, отримаємо задачу з минулого розділу:

$$-Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} = F_j$$
$$Y_0 = F_0, Y_N = F_N$$

Тут Y_j-вектор розмірності $M-1$ елементами якого є значення сіткової функції $y(i,j) = y(x_{i,j})$ в внутрішніх j-тих вузлах сітки ω:

$$Y_j = (y(1,j), y(2,j), \dots, y(M-1,j)), 0 \le j \le N$$

C- квадратна матриця розмірності $M-1$ на $M-1$, яка відповідає різницевому оператору Δ:

$$\Lambda y = 2y - h_2^2 y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1,$$
$$y = 0, \quad x_1 = 0, l_1$$

Отже матриця C- є трьохдоганальною симетричною матрицею і тоді:

$$CY_j = (\Lambda y(1,j), \quad \Lambda y(2,j), \dots, \Lambda y(M-1,j))$$

F_j- права частина, вектор розмірності $M-1$:
1) для $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$F_j = \left(h_2^2 \bar{\varphi}(1,j), h_2^2 \varphi(2,j), \dots, h_2^2 \varphi(M-2,j), h_2^2 \bar{\varphi}(M-1,j)\right),$$

Де

$$\bar{\varphi}(1,j) = \varphi(1,j) + \frac{1}{h_1^2} g(0,j),$$
$$\bar{\varphi}(M-1,j) = \varphi(M-1,j) + \frac{1}{h_1^2} g(M,j).$$

2) для $j = 0, N$:

$$F_j = (g(1,j), g(2,j), \dots, g(M-1,j)).$$

Далі застосовуємо наш алгоритм і отриуємо розвязок

РОЗДІЛ 5 МЕТОД РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ (ФУР'Є)

Автор розділу - Кирило Кроча

5.1 Загальний огляд. Постановка задачі

Метод розділення змінних, який також часто називають методом Фур'є(така назва випливає з того, що під час знаходження розв'язку використовується його розклад в скінченну суму Фур'є) - це один з багатьох методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Ефективність цього методу залежить від того, наскільки швидко ми зможемо обчислити коефіцієнти Фур' є, а також як швидко зможемо зробити обернене перетворення. Розглянемо приклад - маємо функцію $f(i)$і ортонормовану систему $\mu_k(i), k = 0, 1, \ldots, N$, на сітці $\bar{\omega} = \{x_i = ih, 0 \le i \le N,$ $hN = l$, з коефіцієнтами перетворення Фур'є, обчисленими за формулою:

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{N} f(i)\mu_k(i)h, k = 0, 1 \ldots, N$$

Для такого випадку, обчислення усіх φ_k потребує $(N + 1)(N + 2)$ операцій множення, і $N(N + 1)$ операцій додавання. Для довільної системи $\mu_k(i)$ це ϵ мінімальна кількість необхідних операцій, але існують такі системи, на яких буде достатньо лише $O(N \ln N)$ обчислень.

5.2 Розв'язок задачі знаходження власних чисел оператору Лапласа у прямокутнику

Застосуємо метод розділення змінних для знаходження власних чисел λ_k та власних функцій $\mu_k(i, j)$ для оператору Лапласа.

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

Припустимо що в прямокутнику $G = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ маємо рівномірну прямокутну сітку $\bar{\omega}3$ кроками h_1, h_2. Позначимо ω внутрішність, а γ межу сітки $\bar{\omega}$.

Найпростіша задача знаходження власних чисел для оператору Лапласа з граничними умовами Діріхле має вигляд: знайти такі значення параметру λ, що буде існувати нетривіальний розв'язок $y(x)$ наступної задачі:

$$\begin{cases} \Lambda y(x) + \lambda y(x) = 0, x \in \omega \\ y(x) = 0, x \in \gamma \end{cases} \tag{5.1}$$

Ми будемо шукати власні функції (5.1), що відповідають власним числам λ_k, у вигляді:

$$\mu_k(i, j) = \mu_{k_1}^{(1)}(i)\mu_{k_2}^{(2)}(j), \quad k = (k_1, k_2)$$

Якщо підставимо функцію $\mu_k(i, j)$ на місце $y(x_{ij}) = y(i, j)$ в (1). Оскільки $\Lambda_1 y(i, j) = \frac{1}{h_1^2}[y(i+1, j) - 2y(i, j) + y(i-1, j)]$, бачимо, що оператор Λ_1 діє на сіткову функцію, яка залежить від i. Аналогічно, оператор Λ_2 діє на функцію, що залежить від j. Таким чином, підставляючи вид власних функцій в (1), отримуємо:

$$\mu_{k_2}^{(2)}(j)\Lambda_1\mu_{k_1}^{(1)}(i) + \mu_{k_1}^{(1)}(i)\Lambda_2\mu_{k_2}^{(2)}(j) + \lambda_k\mu_{k_1}^{(1)}(i)\mu_{k_2}^{(2)}(j) = 0 \tag{5.2}$$

Для $1 \le i \le N_1 - 1$ і $1 \le j \le N_2 - 1$, і також:

$$\mu_{k_1}^{(1)}(0) = \mu_{k_1}^{(1)}(N_1) = 0, \quad \mu_{k_2}^{(2)}(0) = \mu_{k_2}^{(2)}(N_2) = 0$$

З (5.2) отримуємо:

$$\frac{\Lambda_1\mu_{k_1}^{(1)}(i)}{\mu_{k_1}^{(1)}(i)} = -\frac{\Lambda_2\mu_{k_2}^{(2)}(j)}{\mu_{k_2}^{(2)}(j)} - \lambda_k$$

І оскільки права частина не залежить від i, то і ліва частина також не залежить від i. Провівши такі самі міркування щодо залежності від j, легко зрозуміти, що права і ліва частини - константи. В результаті маємо одновимірні задачі:

$$\Lambda_1 \mu_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_1}^{(1)} \mu_{k_1}^{(1)} = 0, \quad 1 \le i \le N_1 - 1$$
$$\mu_{k_1}^{(1)}(0) = \mu_{k_1}^{(1)}(N_1) = 0$$

Та

$$\Lambda_2 \mu_{k_2}^{(2)} + \lambda_{k2}^{(2)} \mu_{k_2}^{(2)} = 0, \quad 1 \le j \le N_2 - 1$$
$$\mu_{k_2}^{(2)}(0) = \mu_{k_2}^{(2)}(N_2) = 0$$

Розв'язки цих задач мають вигляд:

$$\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi}{2N_\alpha} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad k_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1$$
$$\mu_{k_1}^{(1)}(i) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{k_1 \pi i}{N_1}, \quad k_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$$
$$\mu_{k_2}^{(2)}(j) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2}, \quad k_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$$

Таким чином, власні функції та власні вектори для оператору Лапласа були знайдені:

$$\mu_k(i,j) = \mu_{k_1}^{(1)}(i) \mu_{k_2}^{(2)}(j) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi i}{N_1} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2}$$
$$0 \le i \le N_1, \quad 0 \le j \le N_2$$
$$\lambda_k = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}$$

Де $k_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2.$

5.3 Висновок

Метод розділення змінних дозволив нам перетворити отриману задачу у декілька одновимірних, для яких було значно легше знайти власні числа і функції, що дозволить спростити розв'язок задачі.