

Жёсткие системы ОДУ. Динамика популяций

Сергеев Иван, 422

1 Постановка задачи

Рассматривается эволюция численностей двух видов, которые зависят от взаимодействия между ними и одного или двух медленно изменяющихся генетических признаков. Требуется исследовать зависимости численностей и их генетических признаков от времени.

1.1 Задача с одним генетическим признаком

Динамика популяций и эволюция одного генетического параметра заданы системой ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{7\alpha^2}y \right) \\ \dot{y} &= y \left(2\alpha - \frac{7\alpha^2}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon (2 - 7\alpha x) \end{cases} \quad (1)$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 3$, $0 \leq y_0 \leq 15$, $\alpha_0 = 0$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

1.2 Задача с двумя генетическими признаками

Численность двух популяций зависит от взаимодействия между ними и двух медленно меняющихся генетических признаков:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \left(2\alpha_1 - \frac{1}{2}x - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}y \right) \\ \dot{y} &= y \left(2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}x - \frac{1}{2}y \right) \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon \left(2 - 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y \right) \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon \left(2 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x \right) \end{cases} \quad (2)$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = 10$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

1.3 Задача с двумя генетическими признаками

Другой вариант предыдущей задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \left(2\alpha_1 - \frac{1}{2}x - \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}y \right) \\ \dot{y} &= y \left(2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3}x - \frac{1}{2}y \right) \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon \left(2 - 2\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3}y \right) \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon \left(2 - 2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3}x \right) \end{cases} \quad (3)$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = 10$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

2 Используемые методы

Общие замечания

Используемые методы: явные методы Рунге-Кутты первого и четвёртого порядка точности, неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности.

Для удобства записи введены обозначения: u – вектор неизвестных, $f(u)$ – правая часть системы уравнений. В этих обозначениях системы уравнений 1-3 записываются в компактном виде:

$$\dot{u} = f(u)$$

Для явных методов Рунге-Кутты используется схема бегущего счёта. Для неявного метода. Погрешность метода Рунге-Кутты p -ого порядка можно оценить, используя результаты вычислений, проведённых с шагом по времени τ и с шагом $\frac{\tau}{2}$:

$$\epsilon = \frac{\|u_n - u_{2n}\|}{2^p - 1}$$

В численных расчётах используется схема с автоматическим выбором шага интегрирования: если погрешность на данном шаге превышает наперёд заданную, то шаг интегрирования уменьшается в 2 раза до достижения требуемой точности, а если погрешность на данном шаге много меньше заданной, шаг интегрирования увеличивается в 2 раза.

2.1 Явный метод Рунге-Кутты первого порядка точности

Таблица 1: Таблица Бутчера для явного метода Рунге-Кутты 1 порядка точности

0	0
	1

На каждом шаге выполняется пересчёт решения:

$$k_1 = f(u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \tau \cdot k_1$$

2.2 Явный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Таблица 2: Таблица Бутчера для явного метода Рунге-Кутты 4 порядка точности

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

На каждом шаге выполняется пересчёт решения:

$$k_1 = f(u_n)$$

$$k_2 = f\left(u_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(u_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(u_n + k_3)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2.3 Метод Хаммера-Холлинсворта (неявный метод Рунге-Кутты)

Таблица 3: Таблица Бутчера для неявного метода Рунге-Кутты 4 порядка точности

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Пересчёт решения на каждом шаге:

$$\begin{aligned} k_1 &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ \frac{1}{4} k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2 \right\} \right) \\ k_2 &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 + \frac{1}{4} k_2 \right\} \right) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{\tau}{2} (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Метод Хаммера-Холлинсворта является неявным, поэтому его нельзя реализовать бегущим счётом. Выполним преобразования, чтобы свести схему к решению системы нелинейных уравнений. Обозначим

$$l_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 + \frac{1}{4} k_2; \quad l_2 = k_2$$

Отсюда

$$l_2 = k_2 = f(u_n + \tau \cdot l_1)$$

Выразим $\frac{1}{4} k_1$ через l_1 и l_2 .

$$\frac{1}{4} k_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 \right) = (2\sqrt{3} - 3) \cdot \left(l_1 - \frac{1}{4} k_2 \right)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} k_1 &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ \frac{1}{4} k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2 \right\} \right) = \\ &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ (2\sqrt{3} - 3) l_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4} (2\sqrt{3} - 3) \right) k_2 \right\} \right) = \\ &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ (2\sqrt{3} - 3) l_1 + \frac{1}{3} (3 - 2\sqrt{3}) l_2 \right\} \right) = \\ &= f \left(u_n + \tau \cdot \left\{ (2\sqrt{3} - 3) l_1 + \frac{1}{3} (3 - 2\sqrt{3}) \cdot f(u_n + \tau \cdot l_1) \right\} \right) = \\ &= f \left(u_n + \frac{(2\sqrt{3} - 3) \tau}{3} \{ 3l_1 - f(u_n + \tau \cdot l_1) \} \right) \end{aligned}$$

Подставляя полученное в определение l_1 , получаем систему нелинейных уравнений относительно l_1 :

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 + \frac{1}{4} k_2 = \\ &= \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{12} \cdot f \left(u_n + \frac{(2\sqrt{3} - 3) \tau}{3} \cdot (3l_1 - f(u_n + \tau \cdot l_1)) \right) + \frac{1}{4} f(u_n + \tau \cdot l_1) \end{aligned}$$

Выразим k_2 и k_1 через l_1 :

$$k_2 = l_2 = f(u_n + \tau \cdot l_1)$$

$$k_1 = (2\sqrt{3} - 3) \cdot (4l_1 - l_2)$$

Как было указано выше, пересчёт решения осуществляется по формуле:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2} (k_1 + k_2)$$

Таким образом, мы свели схему к решению системы нелинейных уравнений на l_1 . Решение этой системы будем искать численно с помощью метода Ньютона.

Представим уравнение на l_1 в виде $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = 0$, где переменной является $v = l_1$, а функция

$$g = \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{12} \cdot f\left(u_n + \frac{(2\sqrt{3} - 3)\tau}{3} \cdot (3l_1 - f(u_n + \tau \cdot l_1))\right) + \frac{1}{4}f(u_n + \tau \cdot l_1) - l_1$$

Следующее приближение решения уравнения ищется в виде:

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \Delta \mathbf{v}^k$$

Разложив $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ в ряд Тейлора, получим СЛАУ для нахождения $\Delta \mathbf{v}^k$:

$$\mathbf{g}^k + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)^k \cdot \Delta \mathbf{v}^k = 0$$

Если обозначить $H = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right)^k$ матрицу Якоби правой части уравнения на l_1 и $\Delta \mathbf{v} = \Delta v^k$ и $\mathbf{g} = g_i^k$ векторы неизвестных и правых частей, систему уравнений можно коротко записать в матричном виде:

$$H \cdot \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{g}$$

Отсюда поправка

$$\Delta \mathbf{v} = -H^{-1} \cdot \mathbf{g}$$

Матрица Якоби H выражается через матрицу Якоби правой части исходного уравнения:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{12} \cdot J \left(u_n + \frac{(2\sqrt{3} - 3)\tau}{3} \cdot (3l_1 - f(u_n + \tau \cdot l_1)) \right) \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 3)\tau}{3} \cdot (3E - \tau \cdot J(u_n + \tau \cdot l_1)) + \frac{\tau}{4} J(u_n + \tau \cdot l_1) - E = \\ &= \frac{\tau}{12} J \left(u_n + \frac{(2\sqrt{3} - 3)\tau}{3} \cdot (3l_1 - f(u_n + \tau \cdot l_1)) \right) \cdot (3E - \tau \cdot J(u_n + \tau \cdot l_1)) + \frac{\tau}{4} J(u_n + \tau \cdot l_1) - E \end{aligned}$$

Матрицы Якоби для систем 1-3:

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} 1 - x - \frac{2}{7\alpha^2}y & -\frac{2}{7\alpha^2}x & \frac{4}{7\alpha^3}xy \\ -\frac{7\alpha^2}{2}y & 2\alpha - \frac{7\alpha^2}{2}x - y & 2y - 7\alpha xy \\ -7\epsilon\alpha & 0 & -7\epsilon x \end{pmatrix} \\ J_2 &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}y & -\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}x & 2x - 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}xy & 2\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}xy \\ -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}y & 2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}x - y & 2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3}xy & 2y - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}xy \\ 0 & -2\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} & -2\epsilon\frac{1}{\alpha_2^2}y & 4\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^3}y \\ -2\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} & 0 & 4\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}x & -2\epsilon\frac{1}{\alpha_1^2}x \end{pmatrix} \\ J_3 &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x - \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}y & -\frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}x & 2x - 3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}xy & 3\frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}xy \\ -\frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3}y & 2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3}x - y & 3\frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^4}xy & 2y - 3\frac{\alpha_2}{\alpha_1^4}xy \\ 0 & -2\epsilon\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3} & -4\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}y & 6\epsilon\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}y \\ -2\epsilon\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3} & 0 & 6\epsilon\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}x & -4\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Результаты численных расчётов

Рис. 1: Задача 1. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

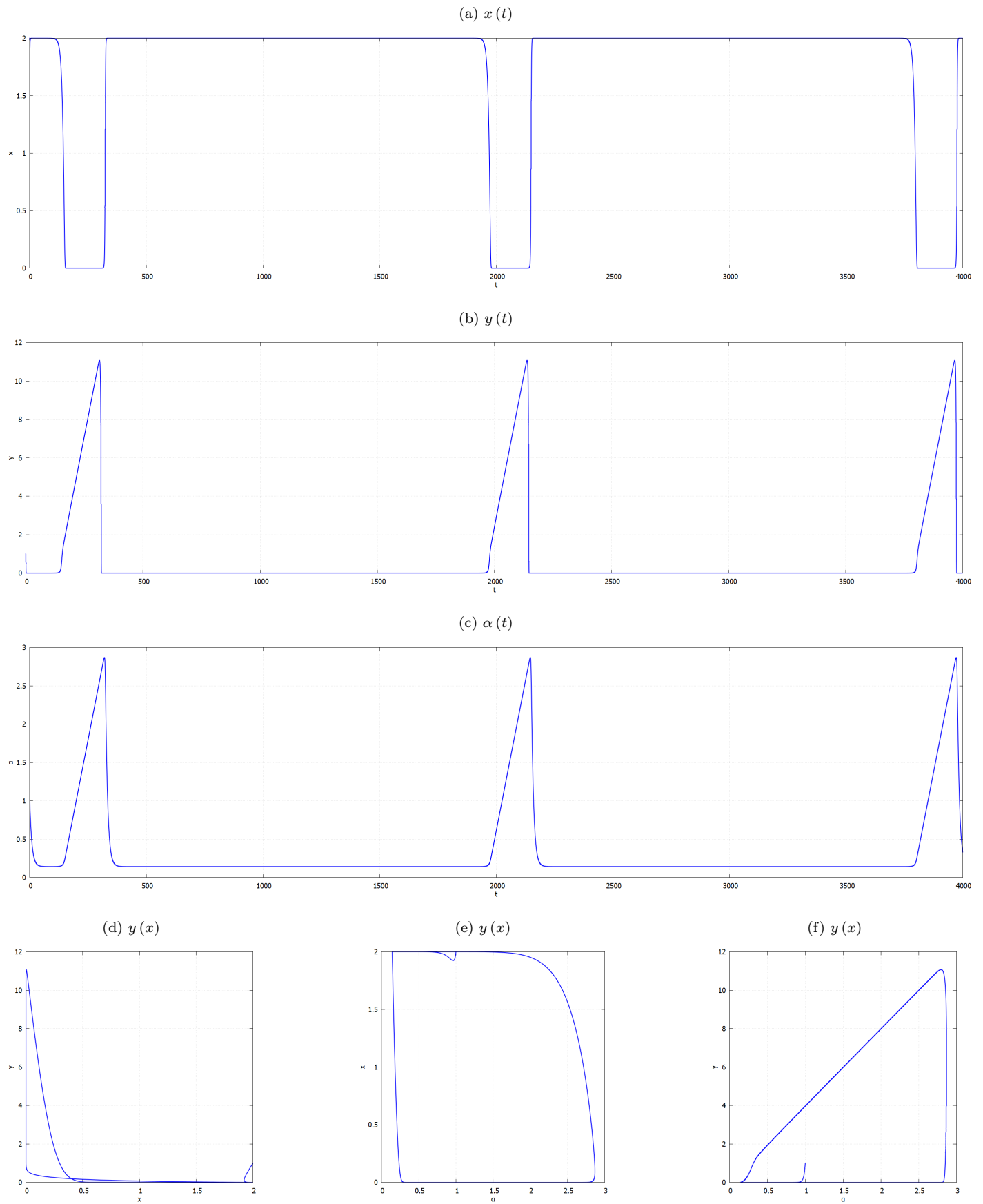
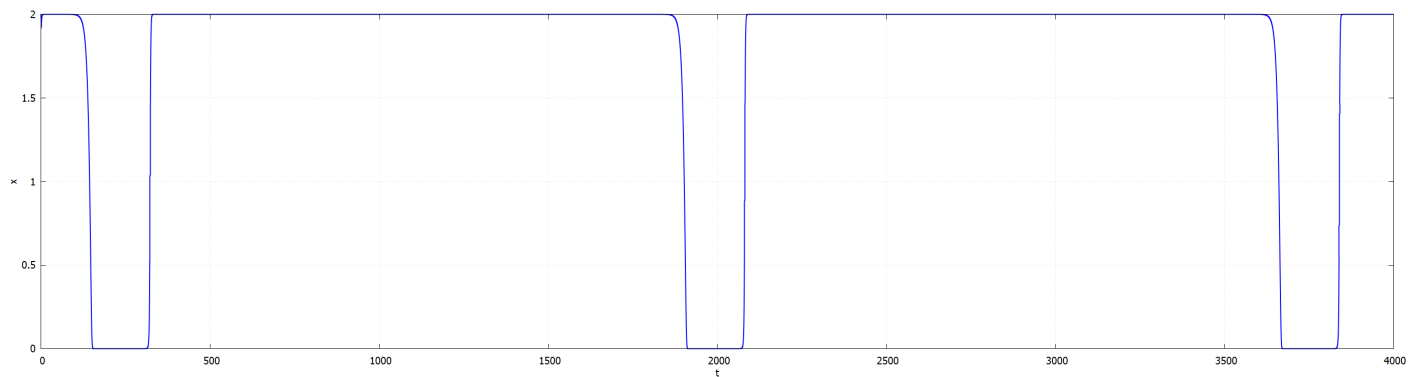
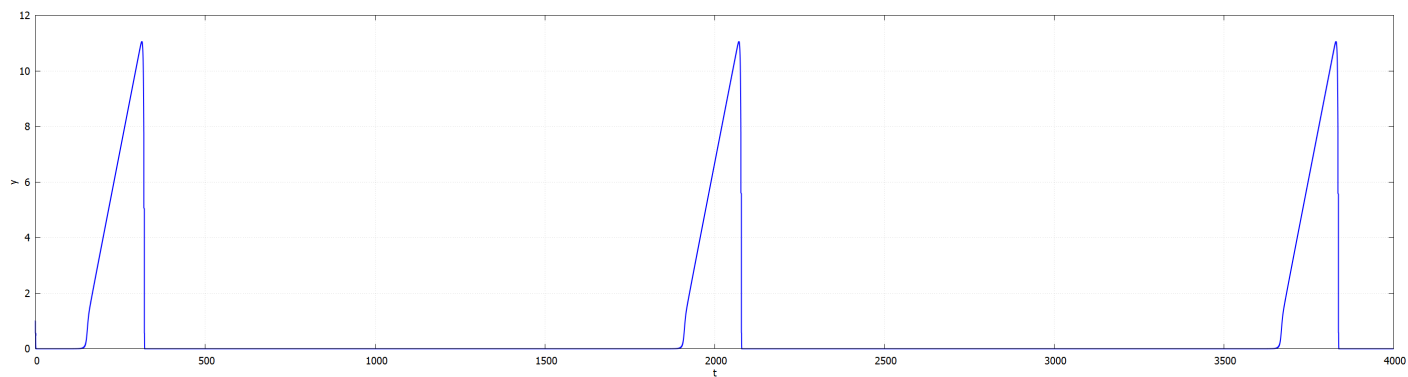


Рис. 2: Задача 1. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

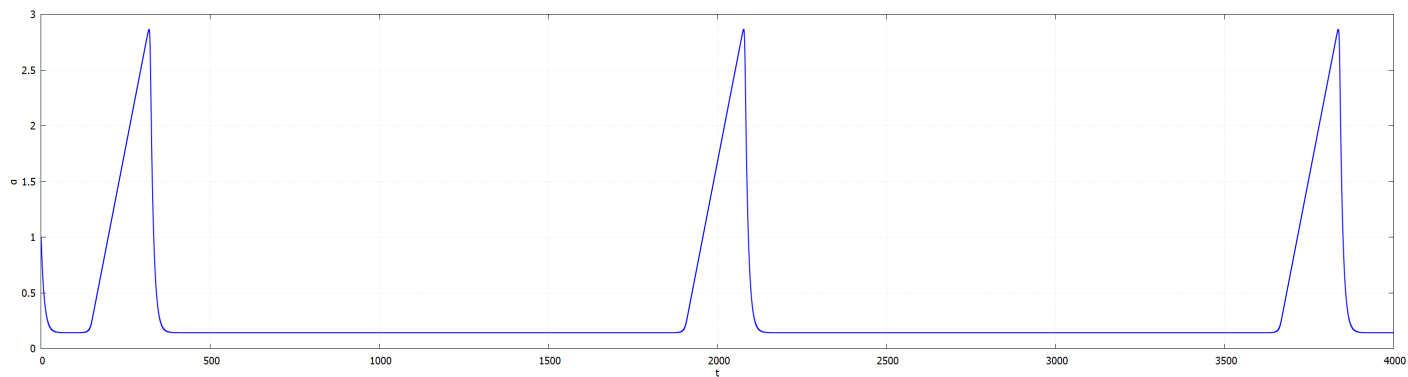
(a) $x(t)$



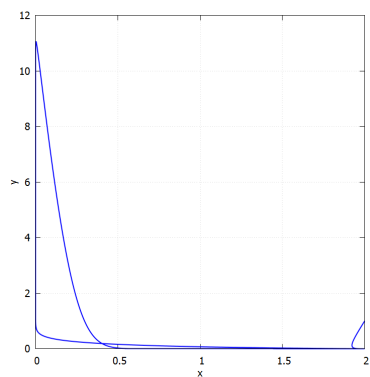
(b) $y(t)$



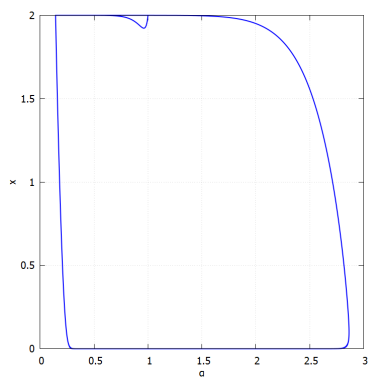
(c) $\alpha(t)$



(d) $y(x)$



(e) $y(x)$



(f) $y(x)$

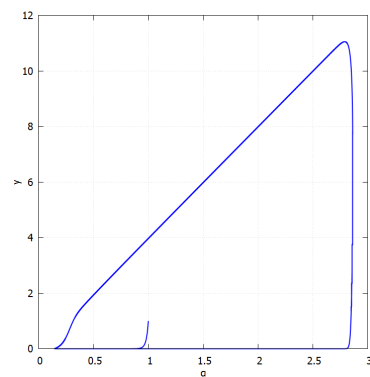
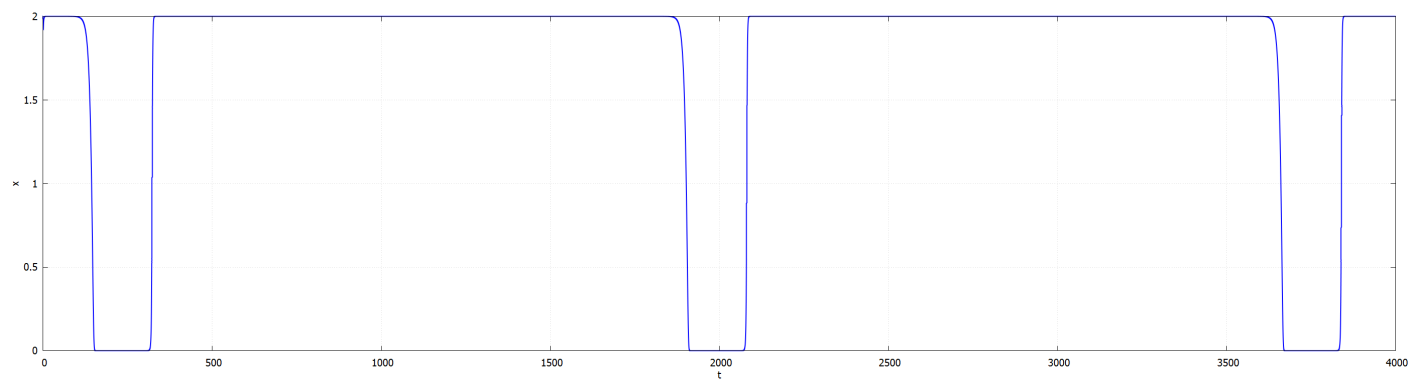
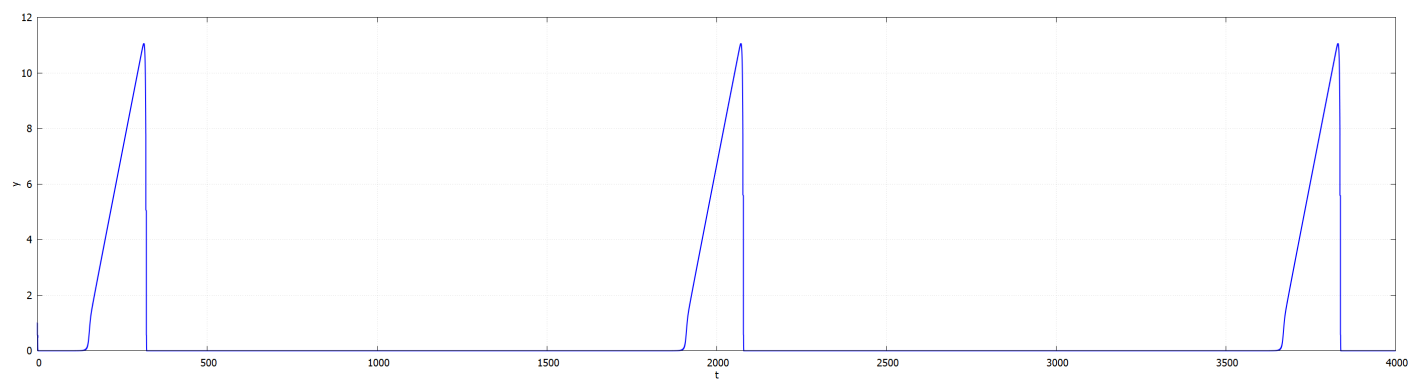


Рис. 3: Задача 1. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

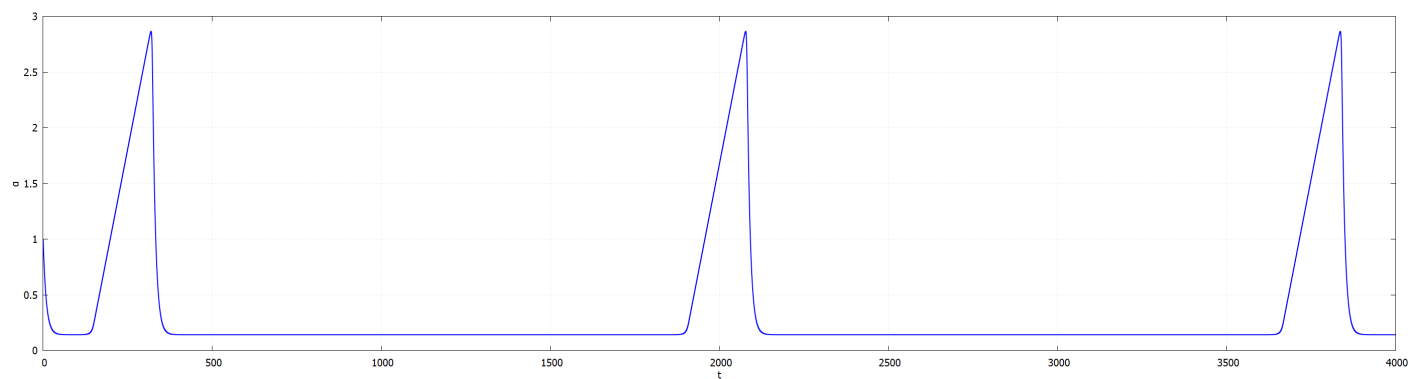
(a) $x(t)$



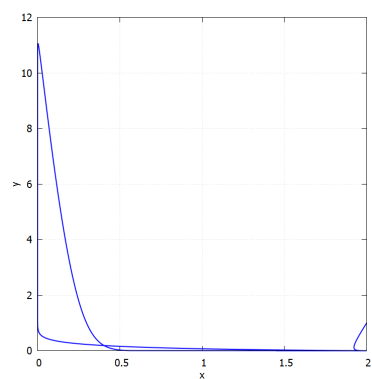
(b) $y(t)$



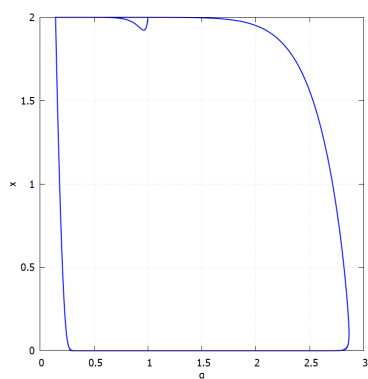
(c) $\alpha(t)$



(d) $y(x)$



(e) $y(x)$



(f) $y(x)$

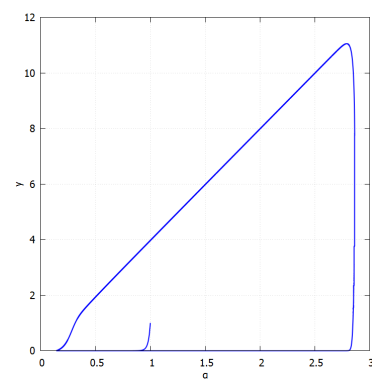
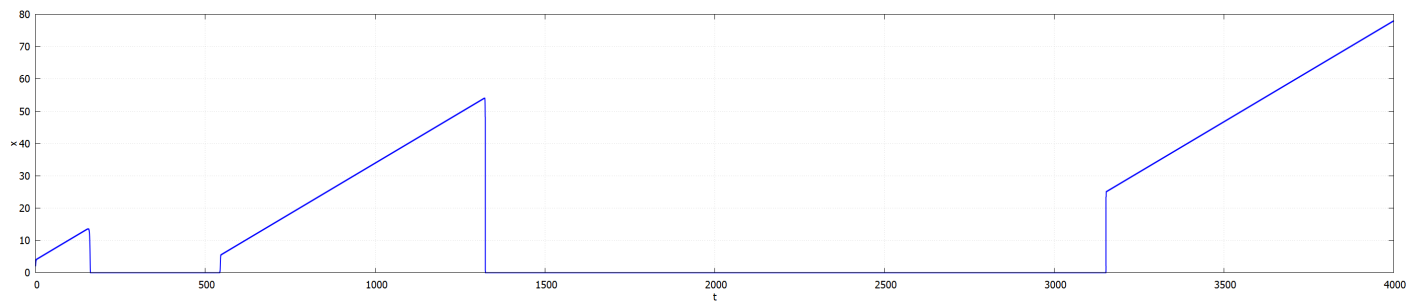
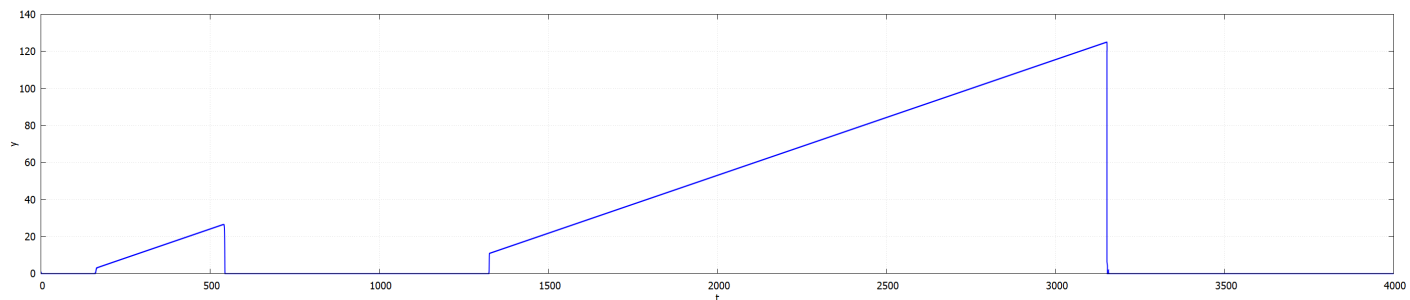


Рис. 4: Задача 2. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

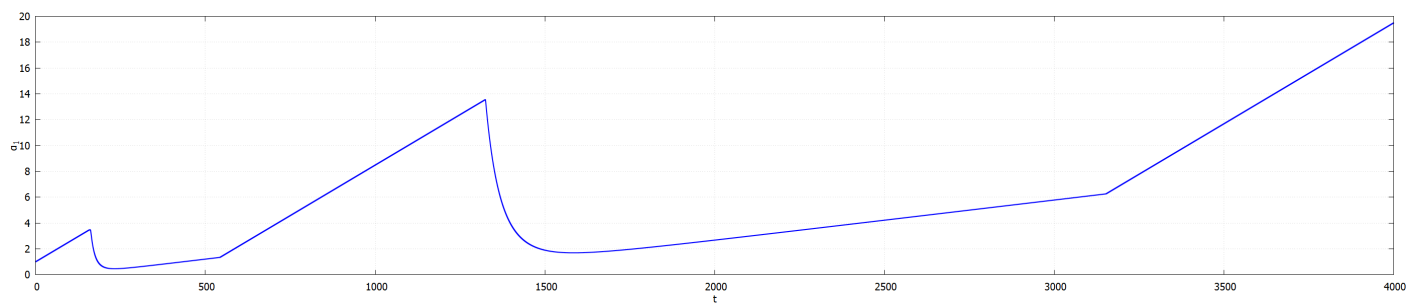
(a) $x(t)$



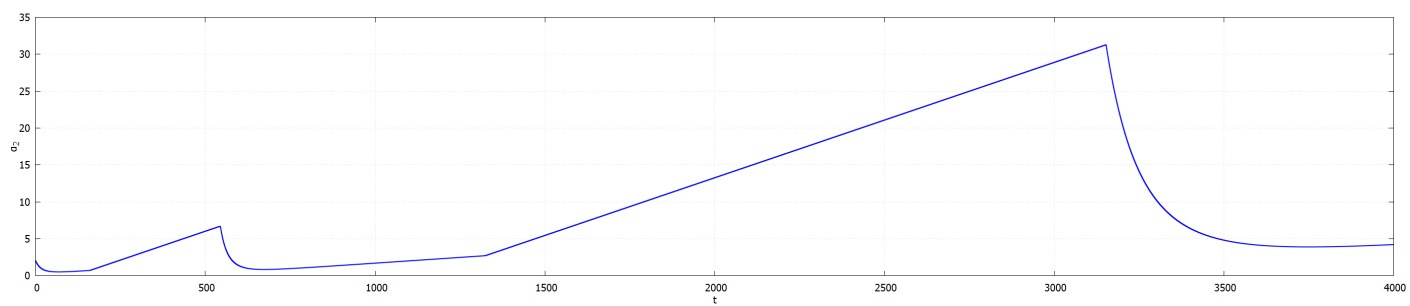
(b) $y(t)$



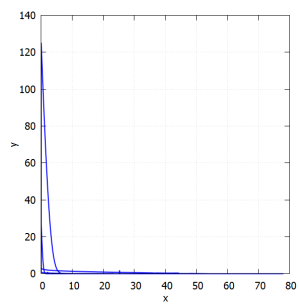
(c) $\alpha_1(x)$



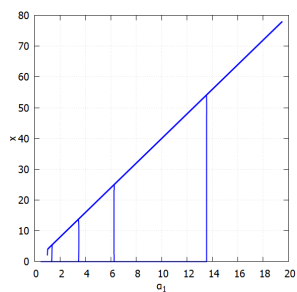
(d) $\alpha_2(t)$



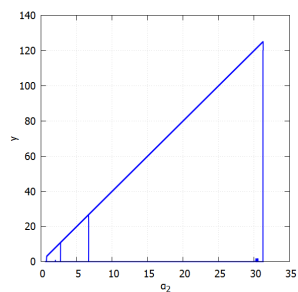
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

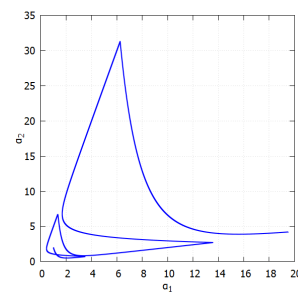
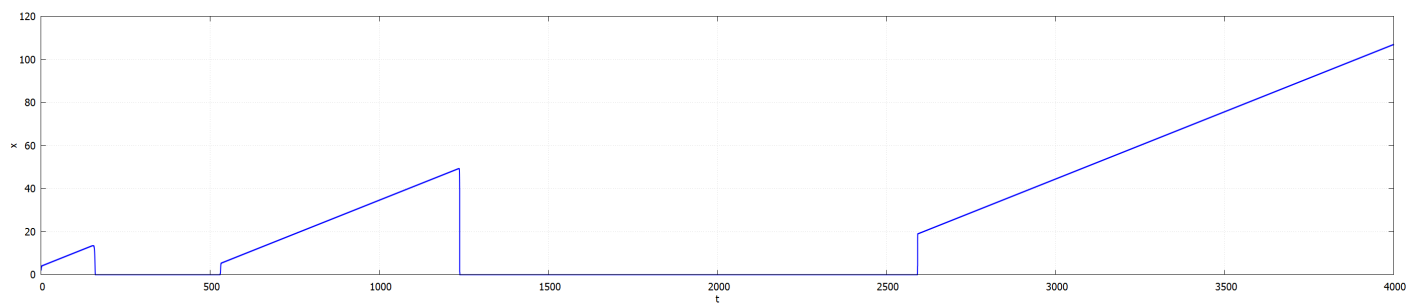
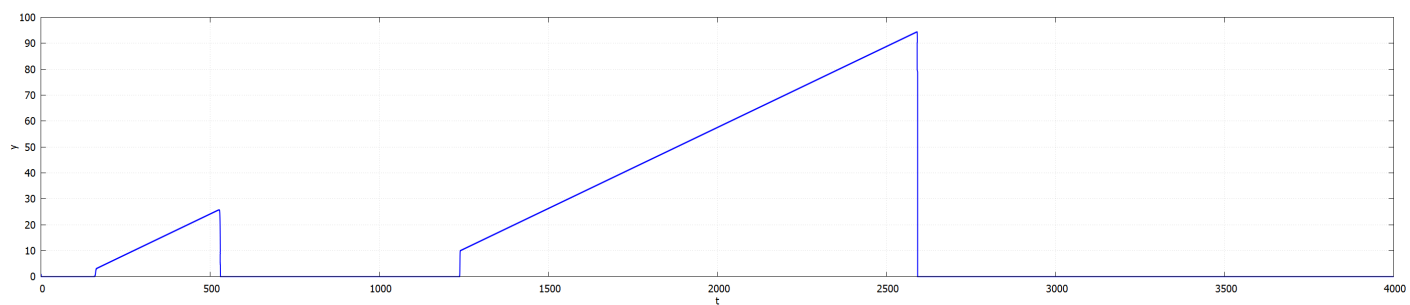


Рис. 5: Задача 2. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

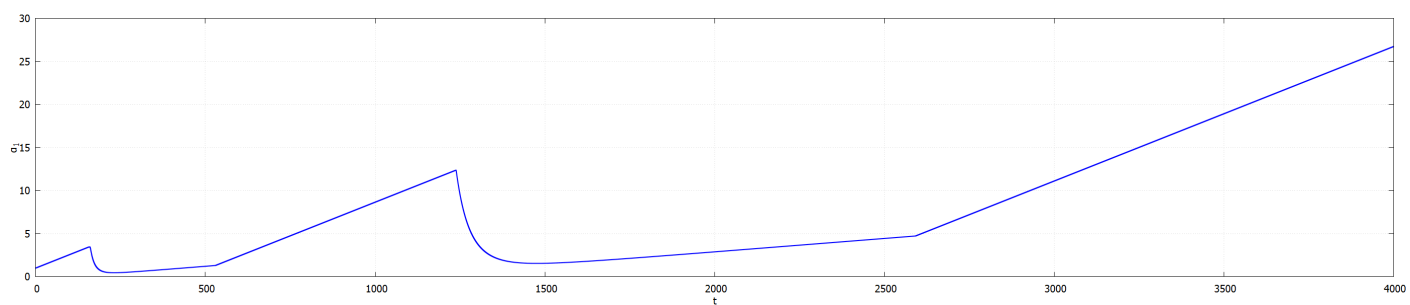
(a) $x(t)$



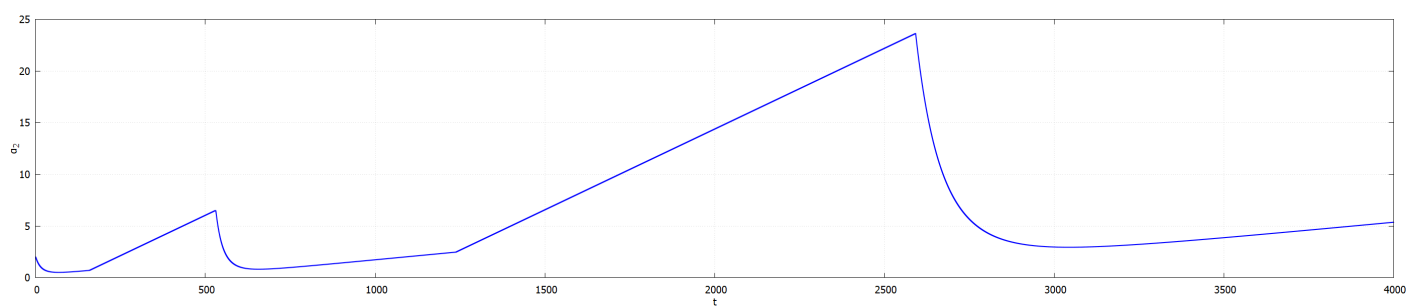
(b) $y(t)$



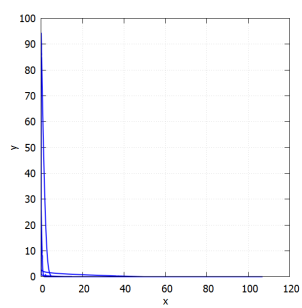
(c) $\alpha_1(x)$



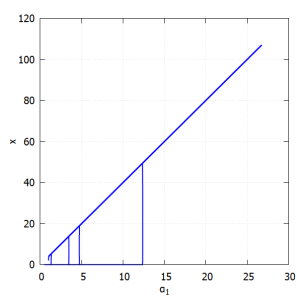
(d) $\alpha_2(t)$



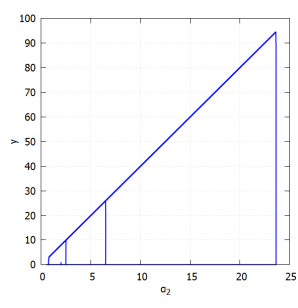
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

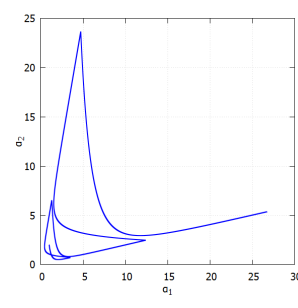
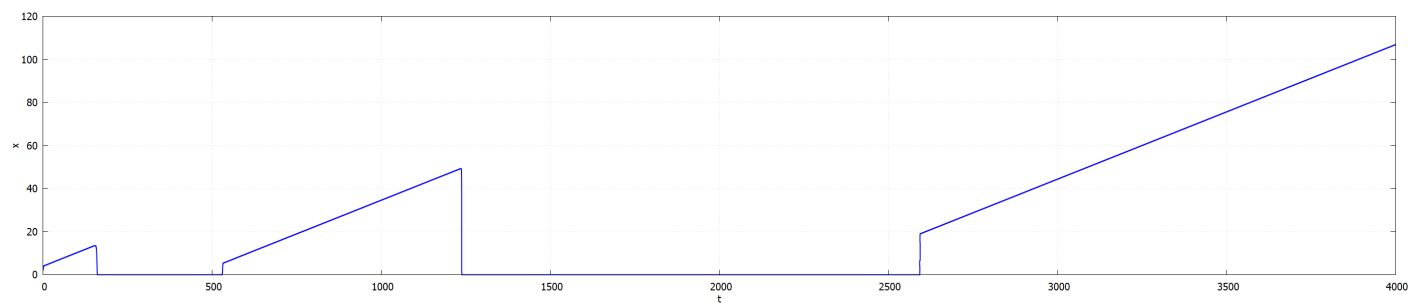
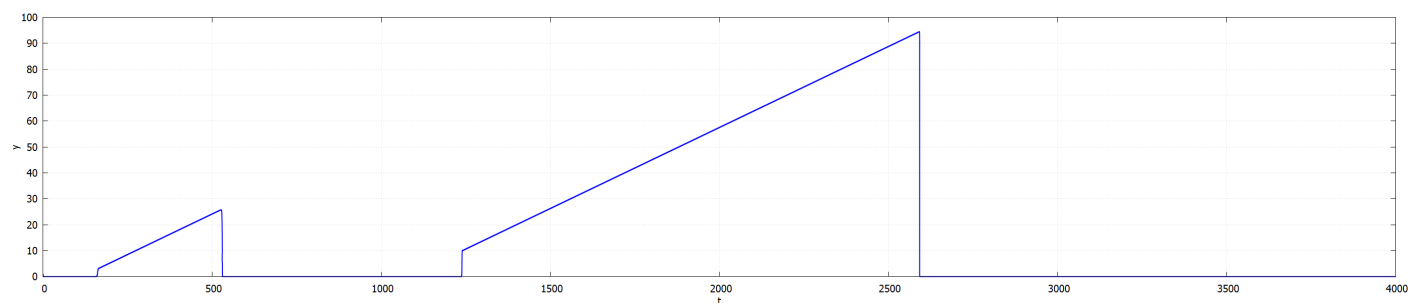


Рис. 6: Задача 2. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

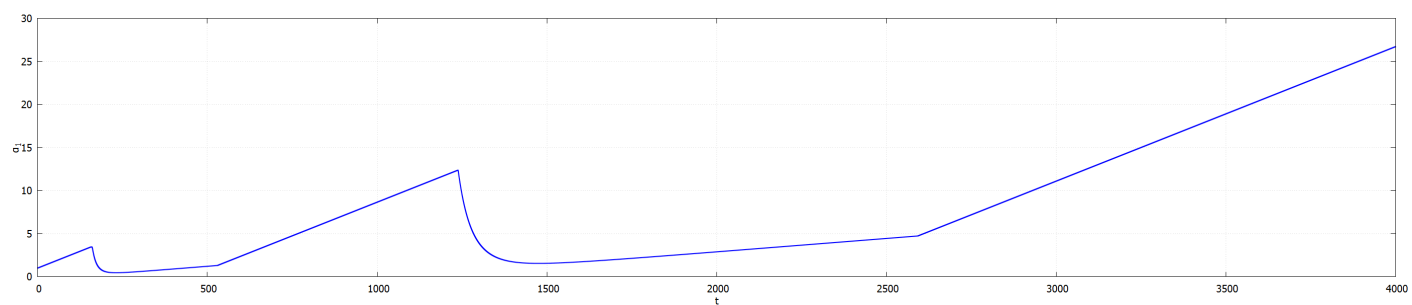
(a) $x(t)$



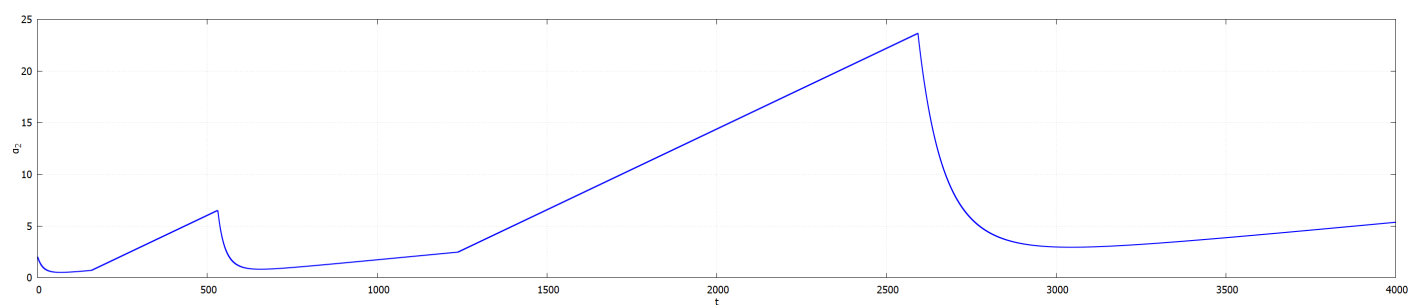
(b) $y(t)$



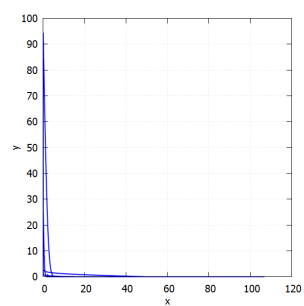
(c) $\alpha_1(x)$



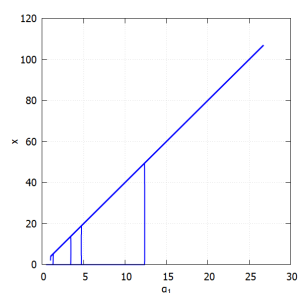
(d) $\alpha_2(t)$



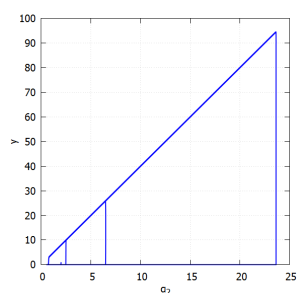
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

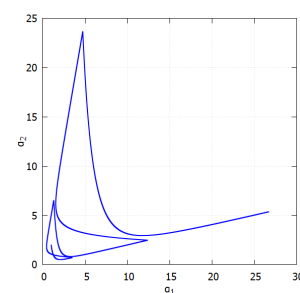
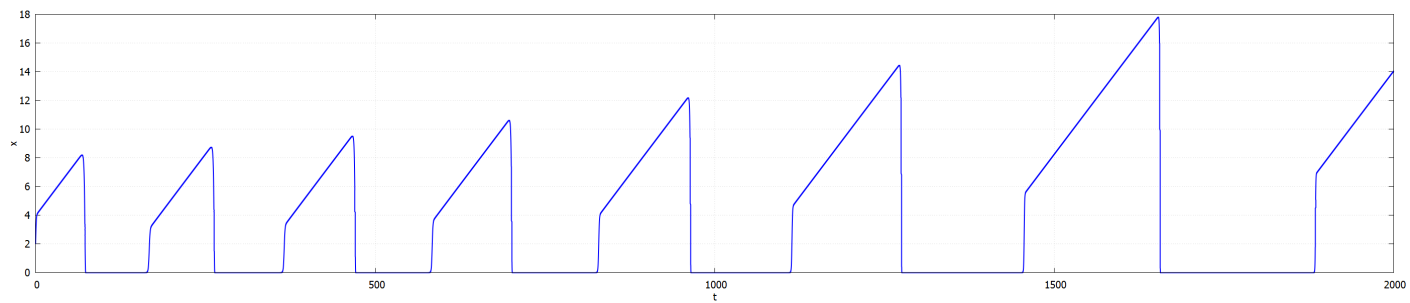
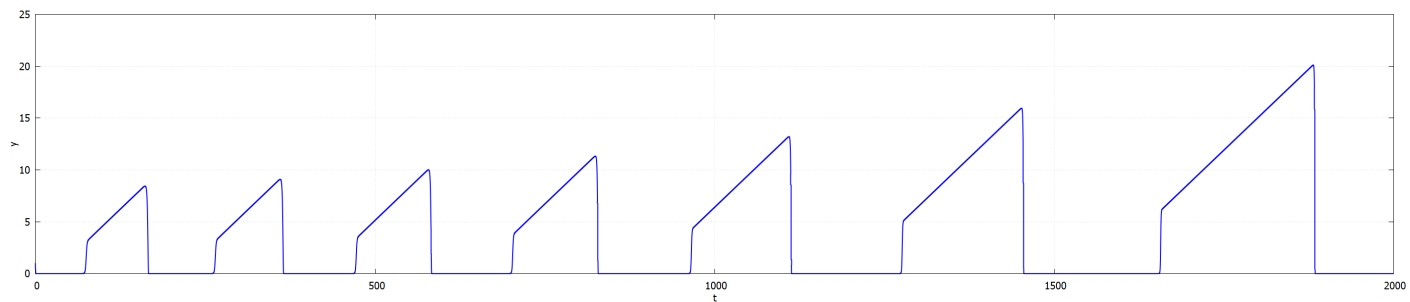


Рис. 7: Задача 3. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

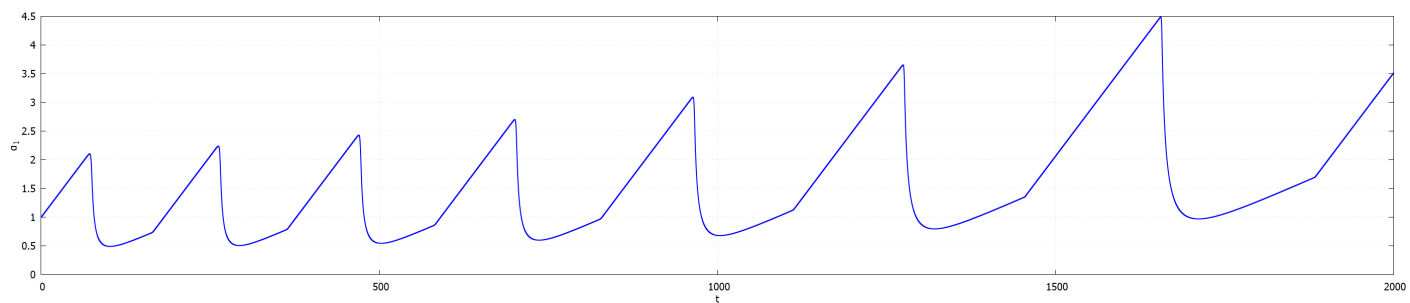
(a) $x(t)$



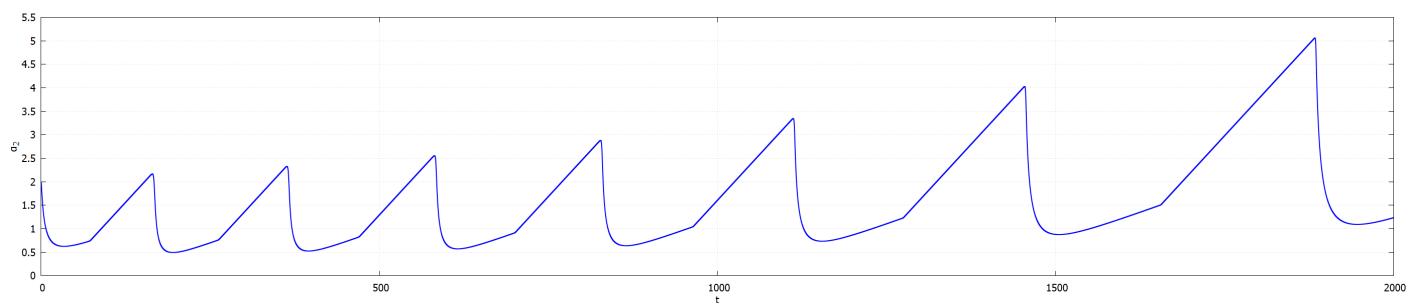
(b) $y(t)$



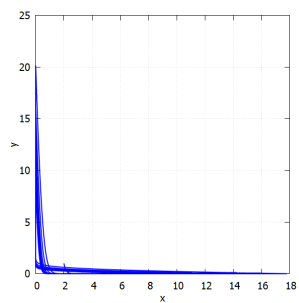
(c) $\alpha_1(x)$



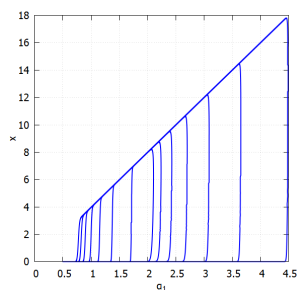
(d) $\alpha_2(t)$



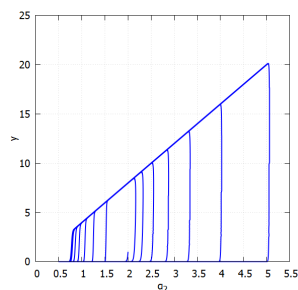
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

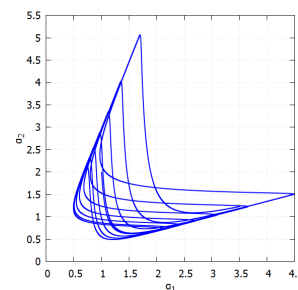
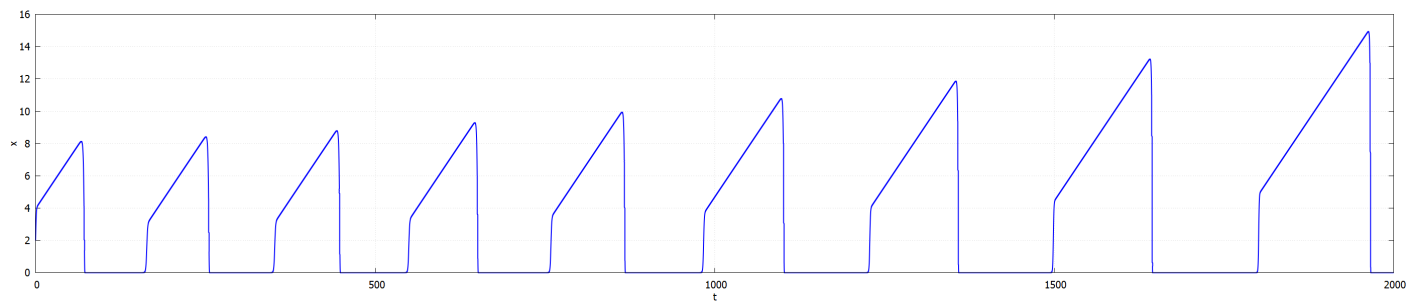
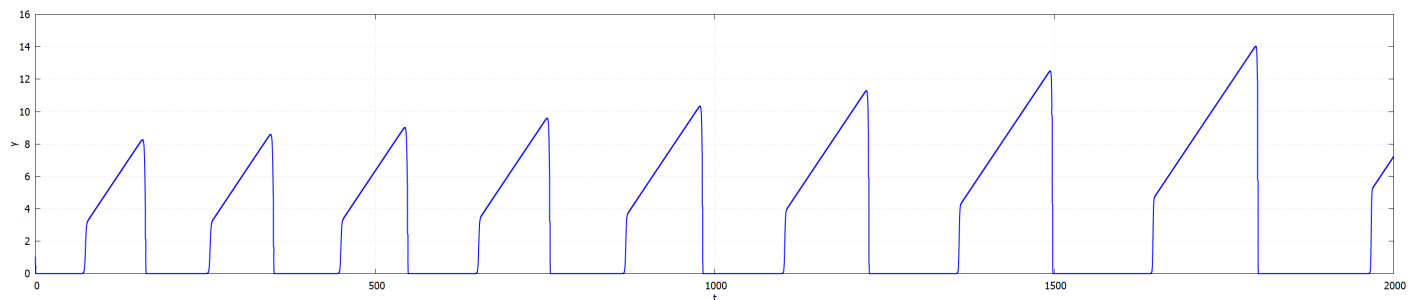


Рис. 8: Задача 3. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

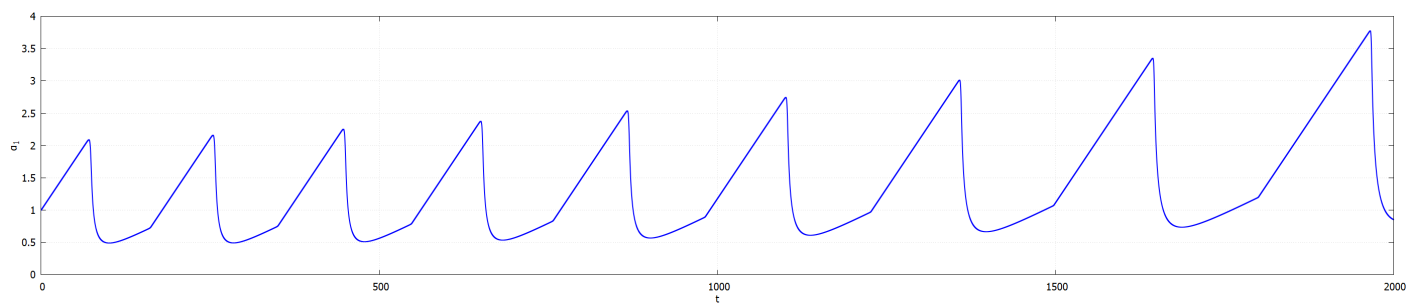
(a) $x(t)$



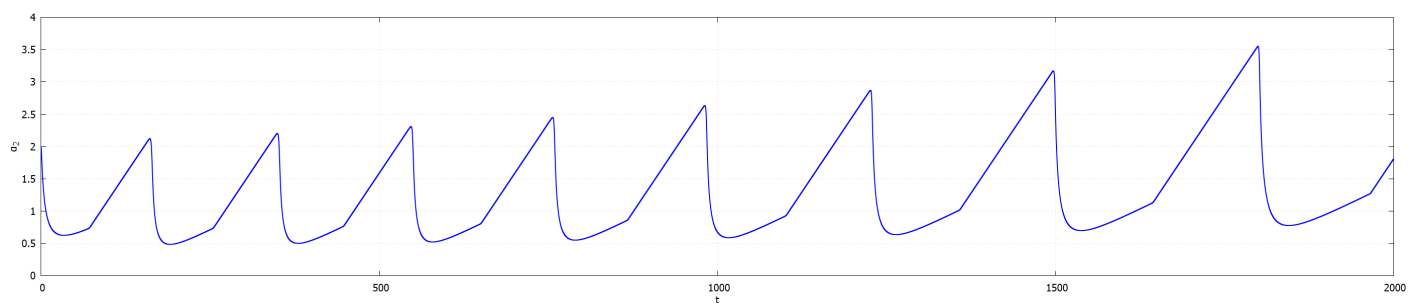
(b) $y(t)$



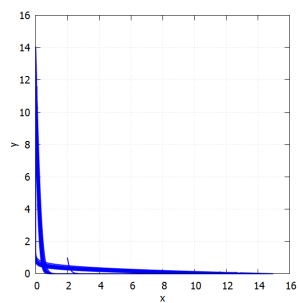
(c) $\alpha_1(x)$



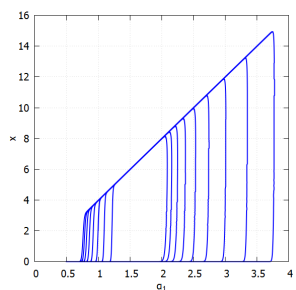
(d) $\alpha_2(t)$



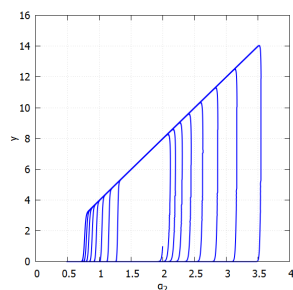
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

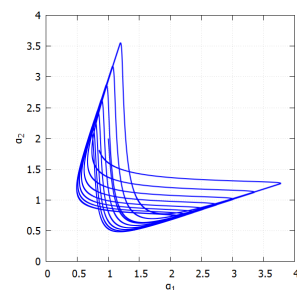
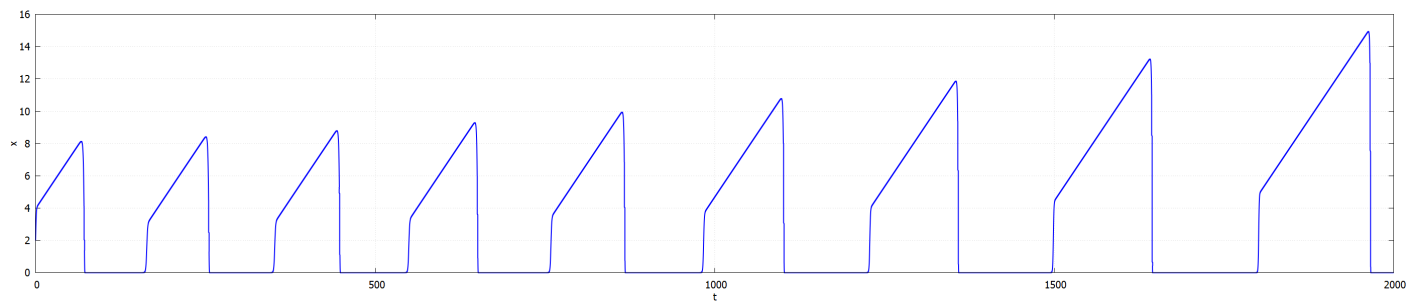
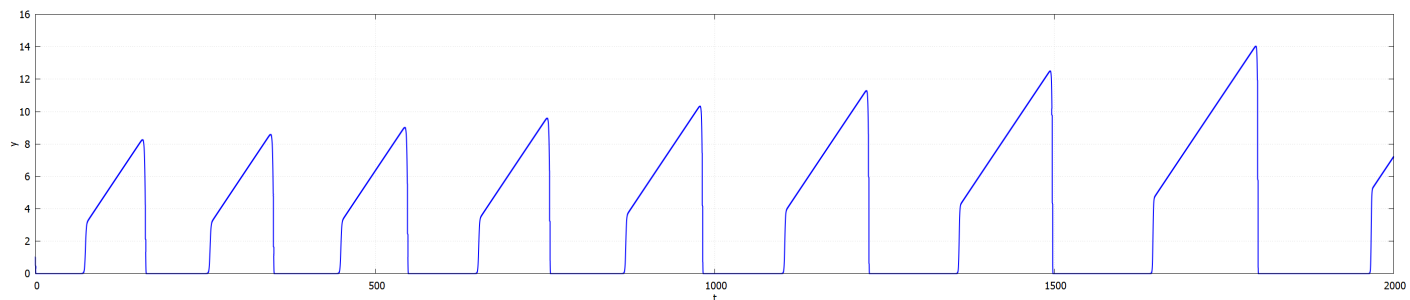


Рис. 9: Задача 3. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

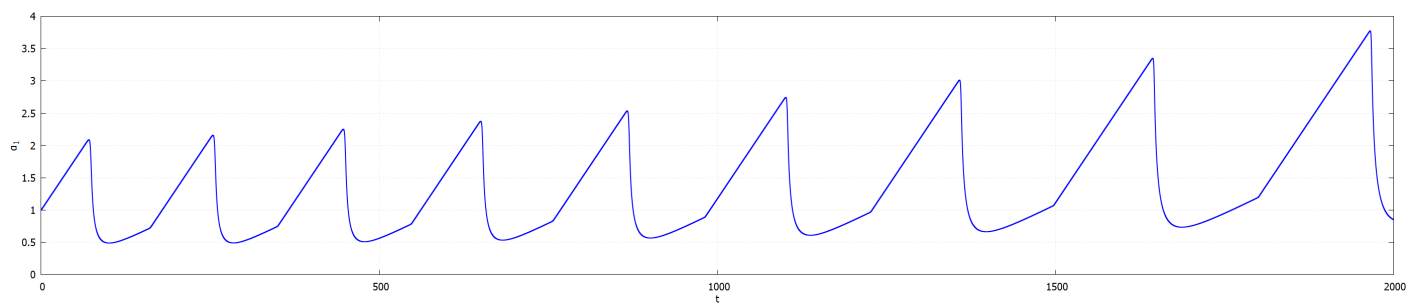
(a) $x(t)$



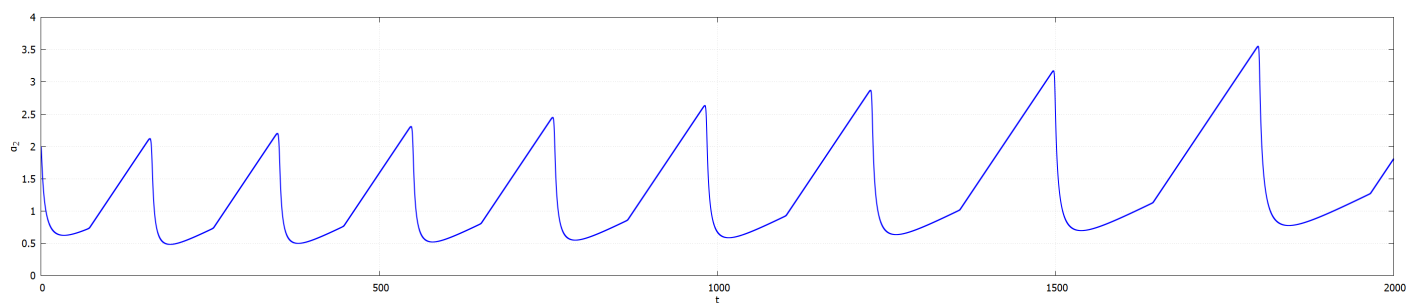
(b) $y(t)$



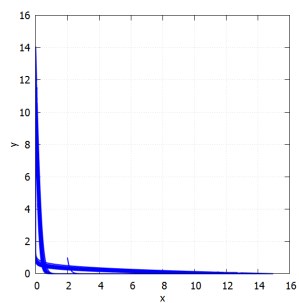
(c) $\alpha_1(x)$



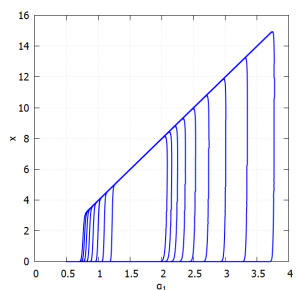
(d) $\alpha_2(t)$



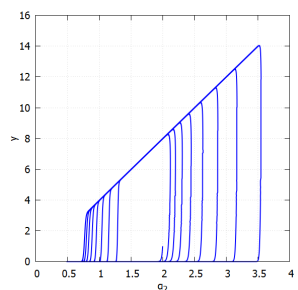
(e) $y(x)$



(f) $y(x)$



(g) $y(x)$



(h) $y(x)$

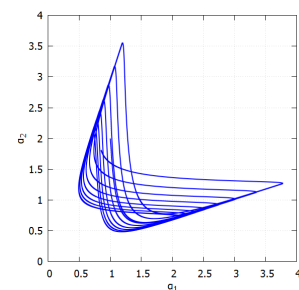


Таблица 4: Используемые начальные данные

	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
Погрешность	δ	$2^{-4} = 0.0625$	δ	$2^{-4} = 0.0625$	δ	$2^{-4} = 0.0625$
Параметр системы	ε	$2^{-7} = 0.0078125$	ε	$2^{-7} = 0.0078125$	ε	$2^{-7} = 0.0078125$
Время моделирования	T	4000	T	4000	T	2000
Наибольший шаг интегрирования	dt_0	$2^{-8} = 0.00390625$	dt_0	$2^{-8} = 0.00390625$	dt_0	$2^{-8} = 0.00390625$
Начальные значения системы	$x(0)$	2	$x(0)$	2	$x(0)$	2
	$y(0)$	1	$y(0)$	1	$y(0)$	1
	$\alpha(0)$	1	$\alpha_1(0)$	1	$\alpha_1(0)$	1
			$\alpha_2(0)$	2	$\alpha_2(0)$	2

Список литературы

- [1] *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 523 с.
- [2] *Кондрашов А.С., Хибник А.И.* Экогенетические модели как быстро-медленные системы. Исследования по математической биологии. 1996. С. 88-123