Жёсткие системы ОДУ. Динамика популяций

Сергеев Иван, 422

1 Постановка задачи

Рассматривается эволюция численностей двух видов, которые зависят от взаимодействия между ними и одного или двух медленно изменяющихся генетических признаков. Требуется исследовать зависимости численностей и их генетических признаков от времени.

1.1 Задача с одним генетическим признаком

Динамика популяций и эволюция одного генетического параметра заданы системой ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{7\alpha^2}y\right) \\ \dot{y} &= y\left(2\alpha - \frac{7\alpha^2}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon\left(2 - 7\alpha x\right) \end{cases} \tag{1}$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 3$, $0 \leq y_0 \leq 15$, $\alpha_0 = 0$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

1.2 Задача с двумя генетическими признаками

Численность двух популяций зависит от взаимодействия между ними и двух медленно меняющихся генетических признаков:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\left(2\alpha_1 - \frac{1}{2}x - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}y\right) \\ \dot{y} &= y\left(2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}x - \frac{1}{2}y\right) \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon\left(2 - 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}y\right) \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon\left(2 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}x\right) \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = 10$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

1.3 Задача с двумя генетическими признаками

Другой вариант предыдущей задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\left(2\alpha_1 - \frac{1}{2}x - \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}y\right) \\ \dot{y} &= y\left(2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3}x - \frac{1}{2}y\right) \\ \dot{\alpha}_1 &= \varepsilon\left(2 - 2\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3}y\right) \\ \dot{\alpha}_2 &= \varepsilon\left(2 - 2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3}x\right) \end{cases} \tag{3}$$

Начальные условия: $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$, $0 \leq x_0 \leq 40$, $0 \leq y_0 \leq 40$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = 10$. Время $0 \leq t \leq 2000$.

2 Используемые методы

Общие замечания

Используемые методы: явные методы Рунге-Кутты первого и четвёртого порядка точности, неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности.

Для удобства записи введены обозначения: u – вектор неизвестных, $f(u)$ – правая часть системы уравнений. В этих обозначениях системы уравнений 1-3 записываются в компактном виде:

$$\dot{u} = f\left(u\right)$$

Для явных методов Рунге-Кутты используется схема бегущего счёта. Для неявного метода . Погрешность метода Рунге-Кутты p-ого порядка можно оценить, используя результаты вычислений, проведённых с шагом по времени τ и с шагом $\frac{\tau}{2}$:

$$\epsilon = \frac{||u_n - u_{2n}||}{2^p - 1}$$

В численных расчётах используется схема с автоматическим выбором шага интегрирования: если погрешность на данном шаге превышает наперёд заданную, то шаг интегрирования уменьшается в 2 раза до достижения требуемой точности, а если погрешность на данном шаге много меньше заданной, шаг интегрирования увеличивается в 2 раза.

2.1 Явный метод Рунге-Кутты первого порядка точности

Таблица 1: Таблица Бутчера для явного метода Рунге-Кутты 1 порядка точности

0	0
	1

На каждом шаге выполняется пересчёт решения:

$$k_1 = f\left(u_n\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \tau \cdot k_1$$

2.2 Явный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Таблица 2: Таблица Бутчера для явного метода Рунге-Кутты 4 порядка точности

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

На каждом шаге выполняется пересчёт решения:

$$k_1 = f\left(u_n\right)$$

$$k_2 = f\left(u_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(u_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(u_n + k_3\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

2.3 Метод Хаммера-Холлинсворта (неявный метод Рунге-Кутты)

Таблица 3: Таблица Бутчера для неявного метода Рунге-Кутты 4 порядка точности

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Пересчёт решения на каждом шаге:

$$k_1 = f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\frac{1}{4}k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_2\right\}\right)$$

$$k_2 = f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_1 + \frac{1}{4}k_2\right\}\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

Метод Хаммера-Холлинсворта является неявным, поэтому его нельзя реализовать бегущим счётом.

Выполним преобразования, чтобы свести схему к решению системы нелинейных уравнений. Будем использовать обозначения

$$l_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_1 + \frac{1}{4}k_2; \quad l_2 = k_2$$

Отсюда

$$l_2 = k_2 = f\left(u_n + \tau \cdot l_1\right)$$

Выразим $\frac{1}{4}k_1$ через l_1 и l_2.

$$\frac{1}{4}k_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_1\right) = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{-1} \cdot \left(l_1 - \frac{1}{4}k_2\right) = \left(2\sqrt{3} - 3\right) \cdot \left(l_1 - \frac{1}{4}k_2\right)$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\frac{1}{4}k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_2\right\}\right) = \\
&= f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\left(2\sqrt{3} - 3\right)l_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4}\left(2\sqrt{3} - 3\right)\right)k_2\right\}\right) = \\
&= f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\left(2\sqrt{3} - 3\right)l_1 + \frac{1}{3}\left(3 - 2\sqrt{3}\right)l_2\right\}\right) = \\
&= f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\left(2\sqrt{3} - 3\right)l_1 + \frac{1}{3}\left(3 - 2\sqrt{3}\right) \cdot f\left(u_n + l_1\right)\right\}\right)
\end{aligned}$$

Подставляя полученное в определение l_1, получаем систему нелинейных уравнений, в которых содержится только неизвестный вектор l_1:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_1 + \frac{1}{4}k_2 = \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot f\left(u_n + \tau \cdot \left\{\left(2\sqrt{3} - 3\right)l_1 + \frac{1}{3}\left(3 - 2\sqrt{3}\right) \cdot f\left(u_n + l_1\right)\right\}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(u_n + l_1\right) = \\
&= \frac{1}{12}\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \cdot f\left(u_n + \frac{\tau}{3} \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right) \cdot \left(3l_1 - f\left(u_n + l_1\right)\right)\right) + \frac{1}{4}f\left(u_n + l_1\right)
\end{aligned}$$

Выразим k_2 и k_1 через l_1:

$$k_2 = l_2 = f\left(u_n + \tau \cdot l_1\right)$$

$$k_1 = \frac{\left(l_1 - \frac{1}{4} l_2\right)}{\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)} = 3 \cdot \frac{4 l_1 - l_2}{3 + 2\sqrt{3}}$$

Как было указано выше, пересчёт решения осуществляется по формуле:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

Таким образом, мы свели схему к решению системы нелинейных уравнений на l_1. Решение этой системы будем искать численно с помощью метода Ньютона.

В общем виде в методе Ньютона для решения уравнения $\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{v}\right) = 0$ следующее приближение ищется в виде:

$$\boldsymbol{v}^{k+1} = \boldsymbol{v}^k + \Delta \boldsymbol{v}^k$$

Разложив $\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{v}\right)$ в ряд Тейлора, получим СЛАУ для нахождения $\Delta \boldsymbol{v}^k$:

$$\begin{gathered} g_1^k + \left(\frac{\partial g_1}{\partial v_1}\right)^k \Delta v_1^k + \dots + \left(\frac{\partial g_1}{\partial v_n}\right)^k \Delta v_n^k = 0 \\ \dots \\ g_n^k + \left(\frac{\partial g_n}{\partial v_1}\right)^k \Delta v_1^k + \dots + \left(\frac{\partial g_n}{\partial v_n}\right)^k \Delta v_n^k = 0 \end{gathered}$$

Если обозначить $H = \left(\frac{\partial g_j}{\partial v_j}\right)^k$ матрицу Якоби правой части уравнения на l_1 и $\boldsymbol{\Delta v} = \Delta v^k$ и $\boldsymbol{g} = g_i^k$ векторы неизвестных и правых частей, систему уравнений можно коротко записать в матричном виде:

$$H \cdot \boldsymbol{\Delta v} = -\boldsymbol{g}$$

Матрица Якоби H выражается через матрицу Якоби правой части исходного уравнения:

Матрицы Якоби для систем 1-3:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 - x - \frac{2}{7\alpha^2} y & -\frac{2}{7\alpha^2} x & \frac{4}{7\alpha^3} xy \\ -\frac{7\alpha^2}{2} y & 2\alpha - \frac{7\alpha^2}{2} x - y & 2y - 7\alpha xy \\ -7\varepsilon\alpha & 0 & -7\varepsilon x \end{pmatrix}$$

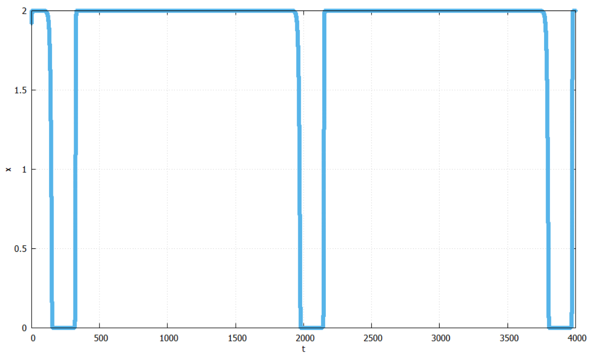
$$J_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} y & -\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} x & 2x - 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} xy & 2\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3} xy \\ -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} y & 2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} x - y & 2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3} xy & 2y - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} xy \\ 0 & -2\varepsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} & -2\varepsilon\frac{1}{\alpha_2^2} y & 4\varepsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^3} y \\ -2\varepsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} & 0 & 4\varepsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x & -2\varepsilon\frac{1}{\alpha_1^2} x \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x - \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3} y & -\frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3} x & 2x - 3\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3} xy & 3\frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^4} xy \\ -\frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3} y & 2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^3} x - y & 3\frac{\alpha_2^3}{\alpha_1^4} xy & 2y - 3\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3} xy \\ 0 & -2\varepsilon\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^3} & -4\varepsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2^3} y & 6\varepsilon\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^4} y \\ -2\varepsilon\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^3} & 0 & 6\varepsilon\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} x & -4\varepsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x \end{pmatrix}$$

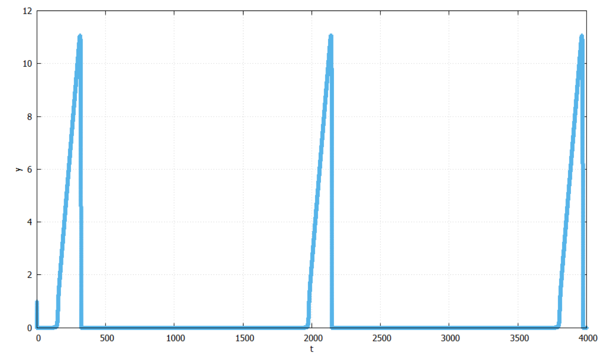
3 Результаты численных расчётов

Рис. 1: Задача 1. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

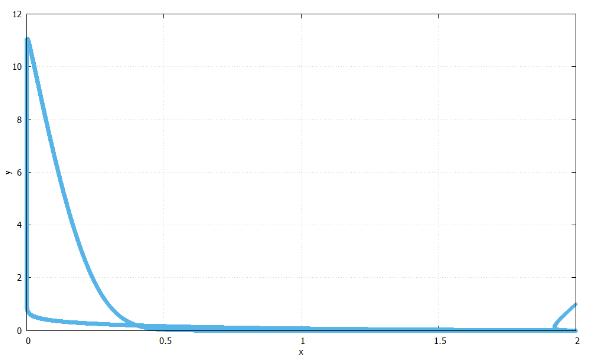
(a) $x\,(t)$



(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha\,(t)$

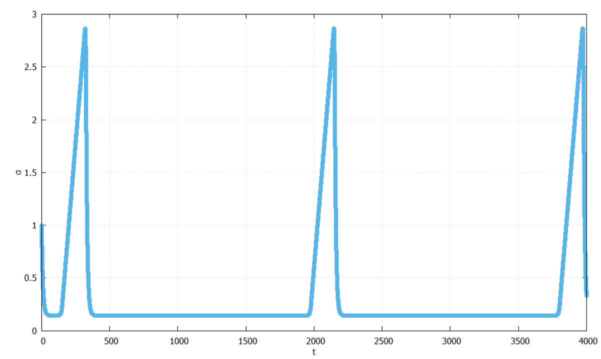
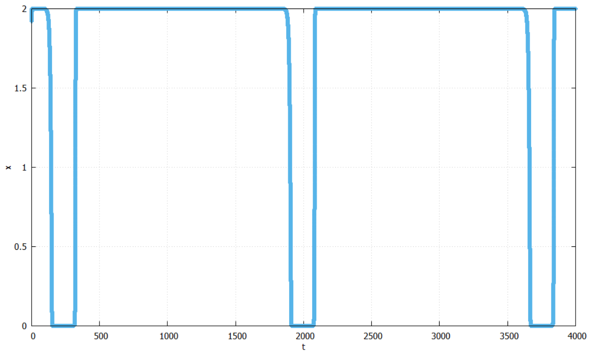
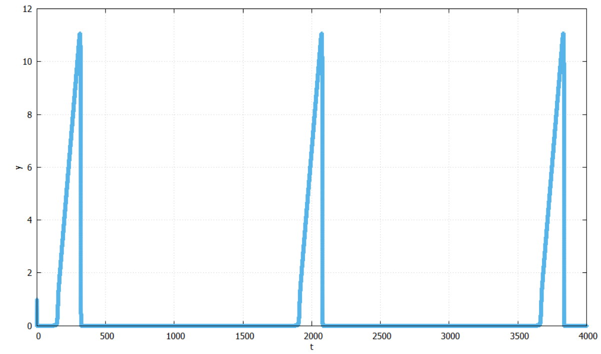


Рис. 2: Задача 1. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

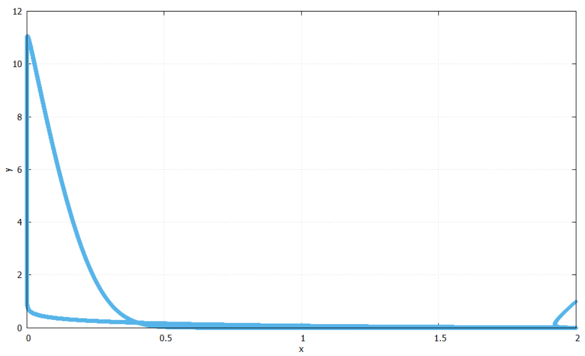
(a) $x\,(t)$



(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha\,(t)$

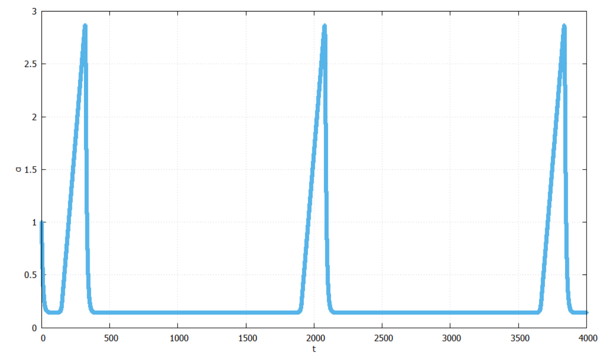


Рис. 3: Задача 1. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

(a) $x\,(t)$

TODO

(b) $y\,(t)$

TODO

(c) $y\,(x)$

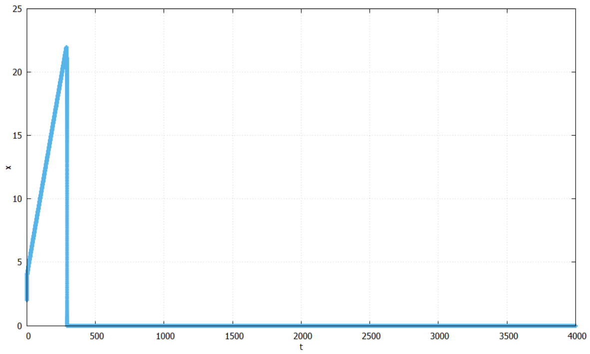
TODO

(d) $\alpha\,(t)$

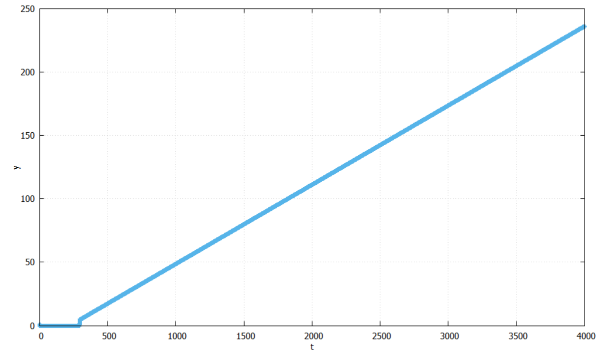
TODO

Рис. 4: Задача 2. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

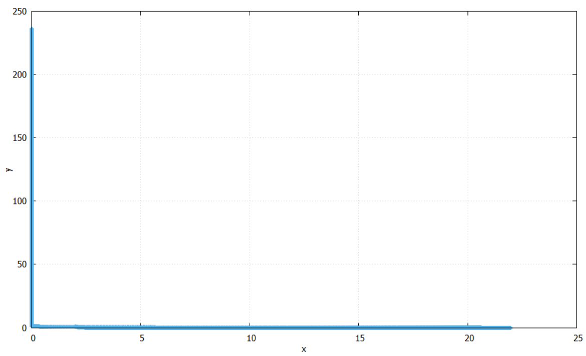
(a) $x\,(t)$



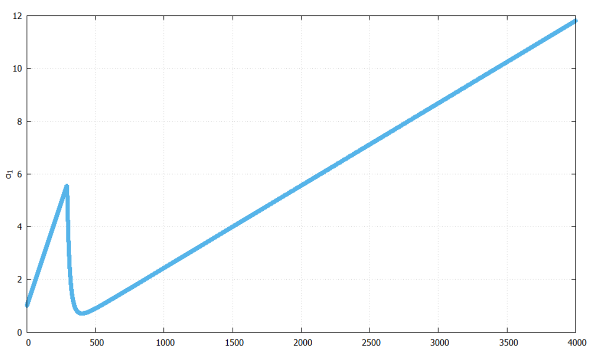
(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha_1\,(x)$



(e) $\alpha_2\,(t)$

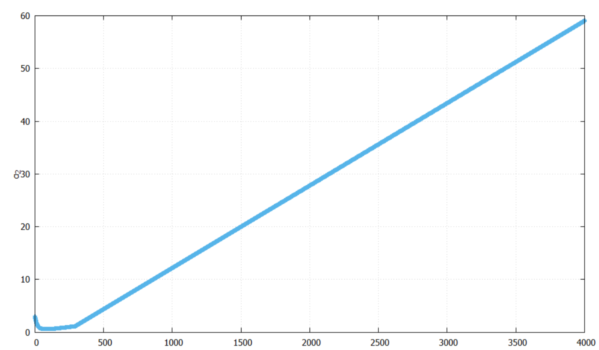
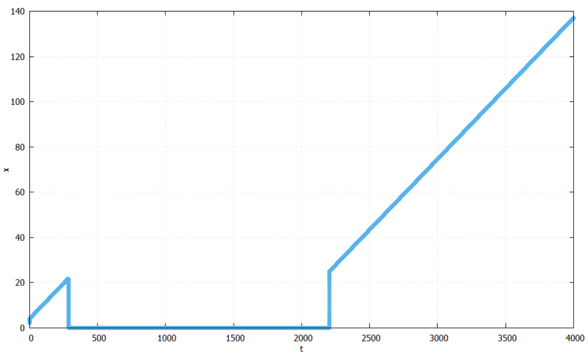
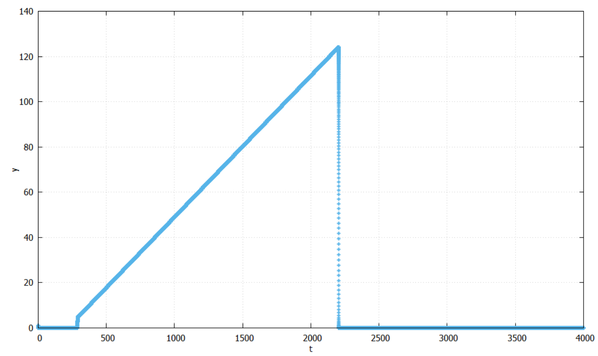


Рис. 5: Задача 2. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

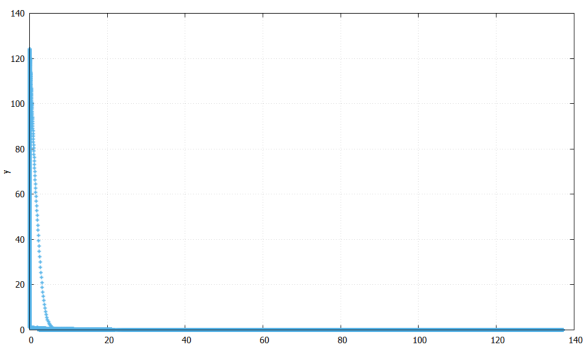
(a) $x\,(t)$



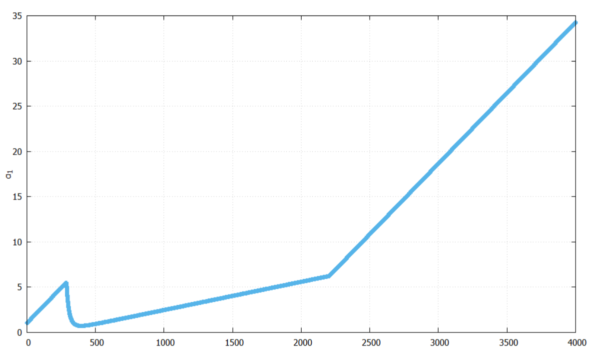
(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha_1\,(x)$



(e) $\alpha_2\,(t)$

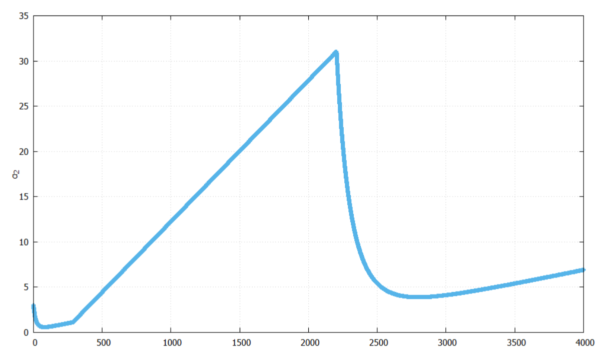


Рис. 6: Задача 2. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

(a) $x\left(t\right)$

TODO

(b) $y\left(t\right)$

TODO

(c) $y\left(x\right)$

TODO

(d) $\alpha_1\left(x\right)$

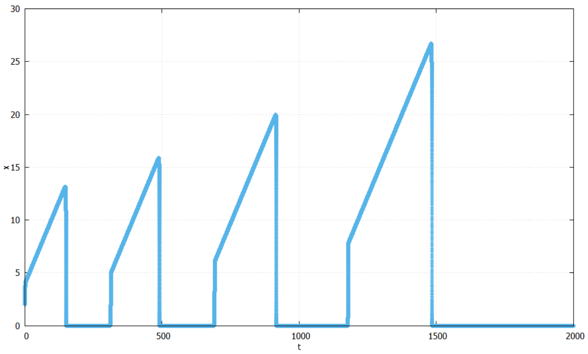
TODO

(e) $\alpha_2\left(t\right)$

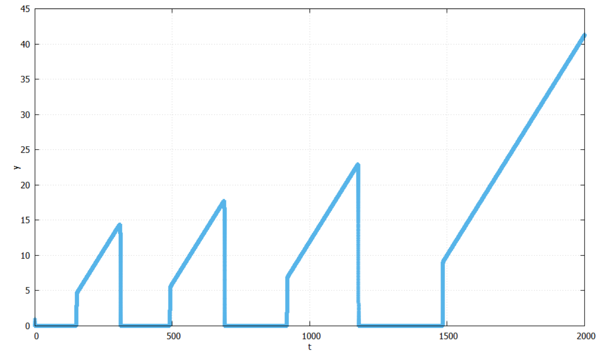
TODO

Рис. 7: Задача 3. Явный метод Рунге-Кутты 1 порядка точности

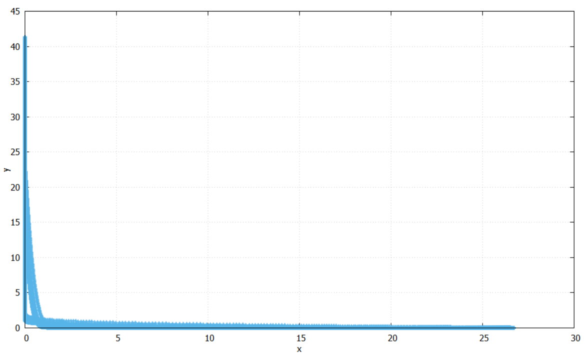
(a) $x\,(t)$



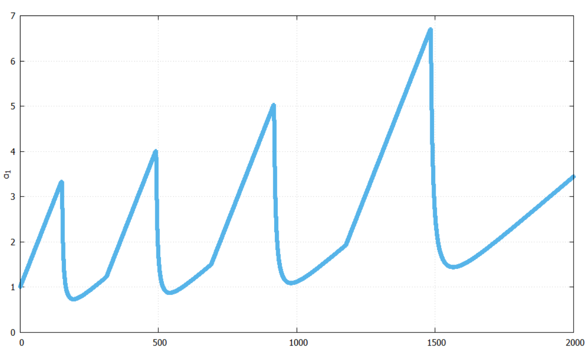
(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha_1\,(x)$



(e) $\alpha_2\,(t)$

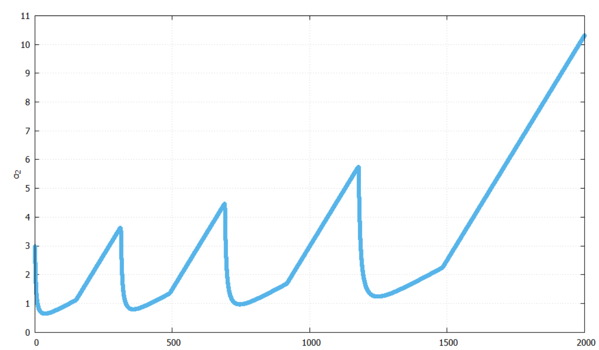
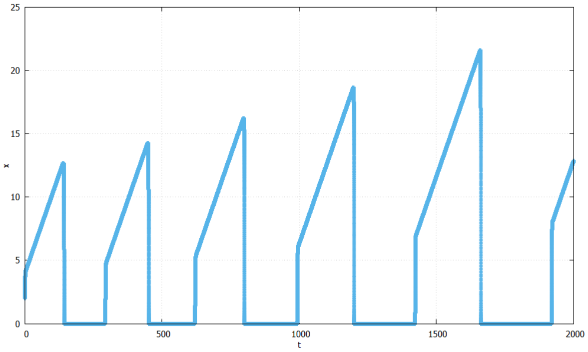
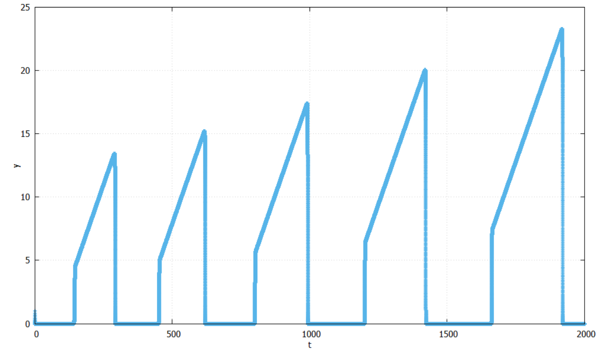


Рис. 8: Задача 3. Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

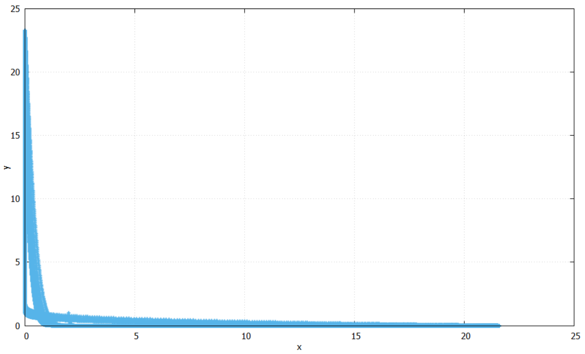
(a) $x\,(t)$



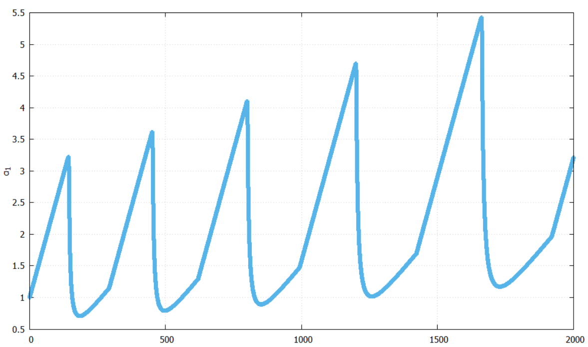
(b) $y\,(t)$



(c) $y\,(x)$



(d) $\alpha_1\,(x)$



(e) $\alpha_2\,(t)$

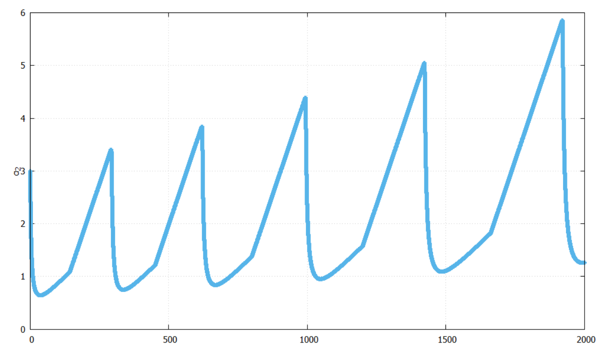


Рис. 9: Задача 3. Неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка точности

(a) $x\,(t)$

TODO

(b) $y\,(t)$

TODO

(c) $y\,(x)$

TODO

(d) $\alpha_1\,(x)$

TODO

(e) $\alpha_2\,(t)$

TODO

Список литературы

[1] *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 523 с.

[2] *Кондрашов А.С., Хибник А.И.* Экогенетические модели как быстро-медленные системы. Исследования по математической биологии. 1996. С. 88-123