Principios Variacionales (correlativas: Análisis Matemático II, Álgebra II)

1. Fundamentos

Los modelos matemáticos en la ingeniería adoptan con mucha frecuencia la forma de ecuaciones diferenciales o integrales cuya resolución está fuera del alcance de los métodos exactos exigiendo métodos numéricos. Los desarrollos de los métodos de Rayleigh, Ritz y Galerkin mantienen términos como *matriz de rigidez* que permiten reconocer su origen en el campo de estructuras de la ingeniería civil. Siendo los principios variacionales más expresivos que las ecuaciones diferenciales, la relación entre un problema de contorno –formulación fuerte– con un problema de minimización de un funcional –formulación débil– condujo más tarde de un modo natural al método de los elementos finitos que se aplica al tratamiento de problemas elípticos (principalmente en el área de la elasticidad y régimen permanente), parabólicos (procesos de difusión dependientes del tiempo) e hiperbólicos (procesos de convección o propagación de ondas). Este curso proporciona los principios conceptuales necesarios para la construcción y resolución de modelos discretos de problemas continuos de la ingeniería, junto a las correspondientes estimaciones de los errores introducidos.

2. Objetivos

El curso pretende proporcionar a los estudiantes herramientas conceptuales que le permitan plantear y resolver problemas surgidos en diversas ramas de la ingeniería, con especial atención a los problemas estacionarios usualmente representados por ecuaciones diferenciales elípticas. La siguiente lista detalla las competencias esperadas por los alumnos al finalizar el curso.

a. Conocer las fuentes bibliográficas disponibles y distinguirlas en cuanto a su propósito, actualidad, formato, objetivos y alcance. Juzgar la conveniencia de utilizar una u otra según las necesidades o el ámbito del problema que pretenda resolver.
b. Reconocer los problemas que pueden ser tratados por métodos variacionales y juzgar la conveniencia de aplicarlos frente a otros métodos en competencia (como soluciones exactas o diferencias finitas).
c. Distinguir entre los tipos de problemas estacionarios y transitorios y en éstos los que se modelan por ecuaciones parabólicas o ecuaciones hiperbólicas.
d. Asignar interpretaciones a los principios variacionales en los términos de los conceptos propios de la disciplina a la que pertenecen los problemas que modelan (por ejemplo, energía de deformación elástica, energía potencial, trabajos virtuales…).
e. Relacionar los métodos variacionales globales con alguna interpretación del sustrato físico sobre el que se aplica (por ejemplo, estableciendo correspondencias entre el método de Ritz y los teoremas de Castigliano en elasticidad, el método de Galerkin y el teorema de los trabajos virtuales).
f. Concebir el método de Ritz como un problema de mínimos cuadrados ponderados en la norma de la energía del sistema y el método de Galerkin como un problema de minimización ponderado del error.
g. Describir las características esenciales de los métodos de Ritz y Galerkin, señalar sus diferencias en cuanto a requisitos y alcance, y juzgar la oportunidad de uso de uno u otro en dados casos particulares. Predecir las situaciones en que ambos métodos conducirán al mismo resultado.

h. Concebir el método de Colocación como una clase de métodos de Galerkin con funciones de ponderación impulsivas.

i. Aplicar los métodos de Ritz y Galerkin a casos sencillos de problemas variacionales unidimensionales y bidimensionales.

j. Construir los modelos diferenciales de problemas de contorno unidimensionales estacionarios y transformarlos en problemas variacionales, obteniendo la correspondiente funcional integral, introduciendo las condiciones de frontera naturales y esenciales.

k. Introducir una discretización del dominio de problemas unidimensionales identificando nodos y elementos y realizar una estimación del error del método de elementos finitos aplicado sobre ese subespacio discretizado.

3. Contenidos y su distribución

Los contenidos se distribuyen a través de seis unidades que se desarrollan en 11 clases semanales teórico-prácticas de 3 horas de duración. La Unidad I permite apreciar la evolución de los principios variacionales hasta su formulación matemática y su interacción con los métodos directos. La unidad II presenta los problemas clásicos resueltos por el cálculo variacional y en la unidad III se revisan las herramientas del Análisis y del Álgebra que permiten conectar los principios variacionales con los métodos directos globales, que son desarrollados para el problema elíptico unidimensional en la unidad IV y ampliado a otros problemas en la unidad V con la correspondiente descomposición en los elementos finitos en la unidad VI. La asignación de recursos temporales y bibliográficos se distribuye a través de las unidades según el siguiente detalle.

l. **Unidad I. [**Clase 1]. Los principios variacionales y el método de los elementos finitos. Desarrollo histórico conceptual e hitos notables. Galileo (1564–1642), Descartes (1596–1650), Fermat (1601–1665), Newton (1643–1727), Leibniz (1646–1716), R. Hooke (1635–1703), Jo. Bernoulli (1667–1748), Euler (1787-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833). Principios variacionales en la Física: Herón (*c.I a.c*), Fermat (1629), Maupertius (1740), Hamilton (1834), Gauss, Hertz, Dirichlet. Los métodos directos del cálculo variacional y los métodos de elementos finitos. El incremento de abstracción requerido por nuevos problemas. La inclusión de operadores no simétricos y la incorporación de la mecánica de fluidos. Los “Crímenes Variacionales en los Elementos Finitos”, según Lang. (Ciarlet y Lions 2003b, 3-15, Davies 2011, 1-7, Berdichevsky 2009a, 3-11, Brunt 2004, 1-3, Giaquinta y Hildebrandt 2004a, vi-xv).

m. **Unidad II.** [Clases 2 y 3]. El Cálculo Variacional clásico. Los problemas en el origen del cálculo de variaciones (problema de Dido, braquistócrona, isócrona (tautócrona), geodésicas, catenarias, problemas isoperimétricos). (K. Tang 2007c, 367-394, Strang 1987, 242-260). Distintos órdenes de proximidad. La variación δ de una funcional y sus propiedades. Extremos de funcionales y la anulación de la variación como condición necesaria. La ecuación de Euler-Lagrange. El lema fundamental del cálculo variacional. Casos particulares de la ecuación de Euler. El principio de Hamilton para campos conservativos y la función de Lagrange. Fronteras móviles. La noción general de los métodos directos. (Hildebrand 1973, 153-288, Elsgoltz 1977, 287-312, 324-340, 390-419, Brunt 2004, 4-26, Gelfand y Fomin 1963, 1-21, 192-197, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1965, 306-326) (Pita Ruiz 1995, 792-796, Krasnov, Makarenko y Kisielov 1992, 26-43, 50-68, 106-112, Troutman 1996, 13-34).

n. **Unidad III.** [Clases 4, 5]. Espacios de funciones con producto interno. Espacios hermíticos, normados y métricos. La desigualdad de Cauchy Schwarz. Proyecciones. Matrices definidas positivas (Strang 1986, 271-304, Lang 1997, 129-143). Los espacios L2(Ω), H1(Ω), H01(Ω). Formas lineales, bilineales y cuadráticas. Funcionales definidas por integrales. Formas simétricas y formas definidas positivas. Teoremas integrales. Identidades de Green. (Johnson 1992, 33-35, Kythe, Puri y Schäferkotter 1997, 350-353, Santaló 1993, 161-166, Marsden y Tromba 1991, 542, 544-549, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, 538-540) (Wallerstein 2002, 7-34, Brenner y Ridgway Scott 2008, 49-54). La formulación abstracta del problema variacional: el teorema de Lax-Milgram como sustento de la equivalencia entre el problema (M), la minimización del funcional F(u) = ½ *a*(u, u)–L(u) y el problema (V) de la determinación de u tal que *a*(u, v) = L(v) para todo v en $\mathbb{V}$. La norma en energía ||v||a $\stackrel{\text{def}}{=}$ *a*(v, v) como una norma equivalente a la norma en $\mathbb{V}$. Discretización del problema M (Mh, método de Ritz) y del problema V (Vh, Método de Galerkin) y sus formulaciones matriciales: la matriz de rigidez. Interpretación geométrica de Ritz en términos de mínimos cuadrados en el espacio normado en energía (Ern 2005, 30-36, Strang 1986, 304-308). Casos de equivalencia entre los métodos de Ritz y de Galerkin. Diferencias entre la minimización de la energía (Ritz) y la minimización del error (Galerkin) y su mayor alcance para incluir otros operadores. Relaciones entre los teoremas de Castigliano y de Trabajos virtuales con los métodos de Ritz y Galerkin. (Johnson 1992, 50-55, Rektorys 1990, 153-165, Reddy 2012, 133-174, 204-221, Wallerstein 2002, 40-52, 261-298, Brenner y Ridgway Scott 2008, 1-6, 60-65).

o. **Unidad IV.** [Clases 6 y 7]. Problemas estacionarios bien planteados (Samarskii y Vabishchevich 2007, 1-4). Un problema elíptico: la ecuación de Poisson (Laplace) con condiciones de Dirichlet homogéneas [–Δu = f, u(Ω) = 0]. Modelo unidimensional de un problema clásico de la elasticidad: deformación de una barra elástica con solicitación axil distribuida. La formulación fuerte (diferencial) del problema de contorno y la formulación débil (variacional). Interpretación en términos de trabajo y energía. Condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de las soluciones fuertes y débiles. Otras interpretaciones del problema elíptico: configuración estacionaria de temperaturas en un medio conductor sometido a una fuente de calor distribuida. (Johnson 1992, 14-18, 33-37, Reddy 2012, 221-232, Rektorys 1990, 153-165, Chen 2005, 1-8, Ern 2005, 1-5) (Larsson y Thomée 2009, 15-16, 20-23). Nociones generales de otros métodos: (a) Series ortonormales; (b) Courant; (c) Colocación; (d) Máximo descenso. (Rektorys 1990, 146-152, 166-177, Luenberger y Ye 2008, 233-241).

p. **Unidad V.** [Clases 8 y 9]. Formulación y resolución variacional de problemas unidimensionales y bidimensionales en el domino global. Modelos simples en la mecánica del continuo (Schäfer 2006, 20-39). Problemas elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Ejemplos de aplicación de Galerkin, Ritz y Colocación (Hoffman 2001, 711-723, Kythe, Puri y Schäferkotter 1997, 273-292, Gerald y Wheatley 1994, 482-490, Brenner y Ridgway Scott 2008, 49-54, 56-58, Chen 2005, 1-6). Interpretaciones en el campo de la elasticidad, hidrodinámica, electrostática, transferencia de calor. Vigas con diferentes condiciones de apoyo y carga. La ecuación biarmónica. Placas sometidas a torsión. (Reddy 2012, 232-262, Wallerstein 2002, 285-300, Powers 1987).

q. **Unidad VI.** [Clases 10 y 11]. Introducción a los elementos finitos, definición (Brenner y Ridgway Scott 2008, 69-71, Ciarlet y Lions 2003b, 62-65, Chen 2005, 1-8, Ern 2005, 5-9, Chapra y Canale 2004, 898-902). Su origen como respuesta a las limitaciones de los métodos variacionales globales y a los métodos de diferencias finitas (Strang 1986, 303-305). El caso unidimensional. La discretización en elementos y las funciones seccionalmente lineales (sombrero, *hat*, chapeau). La matriz de rigidez tridiagonal y el vector de cargas. Estructura especial para particiones uniformes. Estimación del error (caso elíptico unidimensional) introducido por la discretización. Nodos y elementos. Condiciones de Dirichlet y de Neumann. Condiciones de frontera esenciales y naturales. El ensamblado ajustando condiciones de contorno esenciales. Características del sistema lineal con matriz tridiagonal definida positiva. (Johnson 1992, 18-25, 40-42, Gerald y Wheatley 1994, 490-496, Hoffman 2001, 724-739, Reddy 2012, 433-454, Prenter 1989, 201-225) (Cordero Barbero, y otros 2006, 288-290, Brenner y Ridgway Scott 2008, 7-10, Fish y Belytschko 2007, 11-22, 41-53, Chapra y Canale 2004, 902-911, Burden y Faires 2002, 726-739). El método en 2D, los elementos y las funciones de forma. Los ajustes en la frontera (Gerald y Wheatley 1994, 579-594, Hoffman 2001, 739-752, Rektorys 1990, 503-210, Chapra y Canale 2004, 911-915, Schäfer 2006, 107-110). Problemas parabólicos con elementos finitos (Hoffman 2001, 752-759, Gerald y Wheatley 1994, 642-647, Johnson 1992, 146-152, Larsson y Thomée 2009, 120-123). Problemas hiperbólicos y elementos finitos (Gerald y Wheatley 1994, 685-687, Johnson 1992, 167-180, Larsson y Thomée 2009, 201-209).

4. Evaluación de los aprendizajes

El progreso de los aprendizajes se controla y realimenta mediante las actividades prácticas consignadas en la correspondiente guía de trabajos prácticos. La acreditación de los aprendizajes se instrumenta mediante la aprobación de un trabajo práctico.

5. Bibliografía Básica

- Davies, D. *The Finite Element Method. An Introduction with Partial Differential Equations. Second Edition.* Segunda. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- Elsgoltz, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Segunda edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1977.
- Hoffman, Joe D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists. Second Edition Revised and Expanded.* Segunda Edición Revisada y Aumentada. New York: McGraw-Hill, 2001.
- Krasnov, Mijaíl, Grigori Makarenko, y Alexandr Kisielov. *Cálculo Variacional.* Primera edición en español. Traducido por Carlos Vega. Moscú-Madrid: Mir-Rubiños, 1992.

6. Bibliografía pertinente

La longitud del listado obedece al objetivo de que el estudiante conozca las fuentes bibliográficas disponibles y pueda formularse una composición de su propósito, actualidad, formato, objetivos y alcance., para eventualmente juzgar la conveniencia de utilizar una u otra según las necesidades o el ámbito del problema que pretenda resolver.

- Agati, Pierre, y Nicholas Mattera. *Mécanique Appliquée. Resistence des Matériaux, Mecánique des fluides, Themodynamique.* Primera. Paris: DUnod, 1996.

- Apostol, Tom. *Calculus. Volume II. Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability.* Segunda edición. Vol. II. 2 vols. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- Berdichevsky, Viktor. *Interaction of Mechanics and Mathematics. Variational Principles of Continuum Mechanics. I. Fundamentals.* Primera. Berlin: Springer, 2009a.
- Brenner, Susanne, y Louise Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Third edition.* Tercera. New York: Springer, 2008.
- Brunt, Bruce van. *The Calculus of Variations.* Primera. New York: Springer, 2004.
- Burden, Richard, y Douglas Faires. *Análisis Numérico. Séptima edición.* Séptima edición. Traducido por Cengage Learning Brooks Cole. México D. F.: Thomson, 2002.
- Butcher, J. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* Primera. San Francisco: John Wiley & Sons, 2008.
- Chapra, Steven, y Raymond Canale. *Métodos numéricos para ingenieros con programas de aplicación.* Cuarta edición [Original 2002, Numerical methods for engineers with software and programming applications]. Traducido por María del Carmen Roa Hano. México, D. F.: McGraw-Hill, 2004.
- Chen, Zhagxin. *Finite Element Methods and Their Applications.* Primera. Berlin: Springer, 2005.
- Ciarlet, Phillip, y Jacques Louis Lions. *Handbook of Numerical Analysis. Volume II.* Tercera. Amsterdam: Elsevier, 2003b.
- Cordero Barbero, Alicia, José Luis Hueso Pagoaga, Eulalia Martínez Molada, y Juan Ramón Torregosa Sánchez. *Problemas Resueltos de MétodosNnuméricos.* Primera. Madrid: Thomson, 2006.
- Costa, David. *An Invitation to Variational Methods In Differential Equations.* Primera. Boston: Birkhäuser, 2007.
- Dautray, Robert, y Jacques-Louis Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 2. Functional and Variational Methods.* Segunda. Traducido por Ian Sneddon. Berlin: Springer, 1988b.
- Elliot, Charles, y Jack Ockendom. *Weak and variational methods for moving boundary problems.* Primera. Boston: Pitman Books Limited, 1982.
- Ern, Alexandre. *Éléments finis.* Primera. Paris: Dunod, 2005.
- Escofier, Jean-Pierre. *Histoire des Mathématiques.* Primera. Paris: Dunod, 2008.
- Fish, Jacob, y Ted Belytschko. *A First Course in Finite Elements.* Primera. London: John Wiley & Sons, 2007.
- Gelfand, I, y S. Fomin. *Calculus of Variations.* Primera. Traducido por Richard Silverman. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1963.
- Gerald, Curtis, y Patrick Wheatley. *Applied Numerical Analysis.* Quinta edición. Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- Giaquinta, Mariano, y Stefan Hildebrandt. *Calculus of Variations I.* Primera. Berlin: Springer, 2004a.
- Hildebrand, Francis. *Métodos de la Matemática aplicada.* Primera edición. [Original 1952: Methods of applied mathematics]. Traducido por Enrique Schwarz y Nilda Di Nápoli. Buenos Aires: Eudeba, 1973.

- Holmes, Mark. *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations.* Segunda. New York: Springer, 2007.
- Igor, Konnov. *Equilibrium Models and Variational Inequalities.* Primera. Amsterdan: Elsevier, 2007.
- Ingle, Vinay, y John Proakis. *Digital Signal Processing ussing Matlab V.* Primera. Boston: Thomson, 2004.
- Johnson, Claes. *Numerical solution of partial differential equations by the finite elemnt method.* Primera . Lund, Sweden: Studentlitteratur, 1992.
- Kattan, Peter. *Matlab Guide to Finite Elements. An Interactive Approach.* Segunda. Berlin: Springer, 2012.
- Kolmogorov, A. N., y S. V. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Segunda edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1975.
- Krasnov, Mijáil, Alexandr Kiseliov, y Grigori Makárenko. *EcuacionesIntegrales.* Primera. Traducido por Juan José Tolosa. Madrid: Mir, 1982.
- Krupkova, Olga. *The Geometry of Ordinary Variational Equations.* Primera. Berlin: Springer, 1997.
- Kythe, Prem, Pratao Puri, y Schäferkotter. *Partial differential equations and mathematica.* Primera edición. New York: CRC Press, 1997.
- Lang, Serge. *Undergraduate Analysis. Second edition.* Segunda. New York: Springer, 1997.
- Larsson, Stig, y Vidar Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods.* Segunda. Berlin: Springer, 2009.
- Luenberger, David, y Yinyu Ye. *Linear and Nonlinear Programming.* Tercera. New York: Springer, 2008.
- Marsden, Jerrold E., y Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- Maurice, y Yannick Privat. *Mathématiques de l'ingénieur.* Segunda. Paris: Dunod, 2012.
- Pipkin, Allen. *A Course on Integral Equations.* Primera edición. New York: Springer-Verlag New York, 1991.
- Pita Ruiz, Claudio. *Cálculo Vectorial.* Primera edición. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, 1995.
- Powers, David. *Boundary Value Problems. Third Edition.* Tercera. London: 1987, 1987.
- Prenter, Paddy. *Splines and Variational Methods.* Primera. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- Reddy, John. *Energy Principles and Variational Mehods in Applied Maechanics.* Tercera. New York: John Wiley & Sons, 2012.
- Rektorys, Karel. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering.* Segunda. Traducido por Michael Basch. Dordrecht: Reidel, 1990.
- Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

- —. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.
- Samarskii, Alexander, y Peter Vabishchevich. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics.* Primera. Berlin: Walter de Gruyter, 2007.
- Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.
- Schäfer, Michael. *Computational Engineering. Introduction to Numerical Methods.* Primera. Berlin: Springer, 2006.
- Slivker, Vladimir. *Mechanics of Structural Elements Theory and Applications.* Primera. Berlin: Springer, 2007.
- Strang, Gilbert. *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* Primera edición en español de la original en inglés Linear Algebra, Second edition. Traducido por Manuel López Mateos y Margarita de Meza. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley, 1986.
- —. *Introduction to applied mathematics.* Primera. Massachusetts: Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- Tang, Kwon. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists. Vol 3. Fourier Analysis, Partial Differential Equations and Variational Methods.* Primera. Berlin: Springer, 2007c.
- Tang, Kwong-Tin. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists. Vector Analysis, OrdinaryDifferential Equations and Laplace Transforms.* Primera. Berlin: Springer, 2007b.
- —. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists. Vol 1. Complex Analysis, Determinants and Matrices.* Primera. Berlin: Springer, 2007a.
- Timoshenko, S. *Resistencia de Materiales.* Segunda. Traducido por Tomás Delgado Pérez de Alba. Madrid: Espasa Calpe, 1957.
- Tisserand, Étienne, Jean-François Pautex, y Patrick Schweitzer. *Analyse et Traitement des Signaux. Méthodes et applications au son et à l'image. Cours et exercices corrigés.* Segunda. Paris: Dunod, 2008.
- Troutman, J. L. *Variational calculus with elementary convexity.* Primera edición. New York: Springer-Verlag, 1996.
- Wallerstein, David. *A Variational Approach to Structural Analysis.* Primera. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- Wazwaz, Abdul. *Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications.* Primera. Dordretch: Springer, 2011.
- Woodford, Chris, y Chris Phillips. *Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition.* Segunda. Dordretch: Springer, 2012.
- Yang, Won Young, Wenwu Cao, Tae-Sang Chung, y John Morris. *Applies Numerical Methods Using Matlab.* Primera. New York: John Wiley & Sons, 2005.

Principios Variacionales. Cronograma 2013. Jueves 13.00 a 16.00. Sede Las Heras 2214

Correlatividades: Análisis Matemático II, Álgebra II. Total 11 clases.

Clase	Fecha	Detalle de contenidos y bibliografía localizada
1	*29.08.2013*	Los principios variacionales y el método de los elementos finitos. Desarrollo histórico conceptual e hitos notables. Galileo (1564–1642), Descartes (1596–1650), Fermat (1601–1665), Newton (1643–1727), Leibniz (1646–1716), R. Hooke (1635–1703), Jo. Bernoulli (1667–1748), Euler (1787-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833). Principios variacionales en la Física: Herón (*c.I a.c*), Fermat (1629), Maupertius (1740), Hamilton (1834), Gauss, Hertz, Dirichlet. Los métodos directos del cálculo variacional y los métodos de elementos finitos. El incremento de abstracción requerido por nuevos problemas. La inclusión de operadores no simétricos y la incorporación de la mecánica de fluidos. Los “Crímenes Variacionales en los Elementos Finitos”, según Lang. (Ciarlet y Lions 2003b, 3-15, Davies 2011, 1-7, Berdichevsky 2009a, 3-11, Brunt 2004, 1-3, Giaquinta y Hildebrandt 2004a, vi-xv).
2	*05.09.2013*	El Cálculo Variacional clásico. Los problemas en el origen del cálculo de variaciones (problema de Dido, braquistócrona, isócrona (tautócrona), geodésicas, catenarias, problemas isoperimétricos). (K. Tang 2007c, 367-394, Strang 1987, 242-260). Distintos órdenes de proximidad. La variación δ de una funcional y sus propiedades. Extremos de funcionales y la anulación de la variación como condición necesaria
3	12.09.2013	Sistemas dinámicos lineales. La exponencial matricial. Desacoplamiento del sistema. La extensión al caso no diagonalizable. Matriz de Jordan. Implementación en Matlab. El espacio de fases. El diagrama traza-determinante y la discriminación de los tipos de estabilidad.
4	19.09.2013	Espacios de funciones con producto interno. Espacios hermíticos, normados y métricos. La desigualdad de Cauchy Schwarz. Proyecciones. Matrices definidas positivas (Strang 1986, 271-304, Lang 1997, 129-143). Los espacios L2(Ω), H1(Ω), H01(Ω). Formas lineales, bilineales y cuadráticas. Funcionales definidas por integrales. Formas simétricas y formas definidas positivas. Teoremas integrales. Identidades de Green. (Johnson 1992, 33-35, Kythe, Puri y Schäferkotter 1997, 350-353, Santaló 1993, 161-166, Marsden y Tromba 1991, 542, 544-549, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, 538-540) (Wallerstein 2002, 7-34, Brenner y Ridgway Scott 2008, 49-54).
5	26.09.2013	La formulación abstracta del problema variacional: el teorema de Lax-Milgram como sustento de la equivalencia entre el problema (M), la minimización del funcional F(u) = ½ *a*(u, u)–L(u) y el problema (V) de la determinación de u tal que *a*(u, v) = L(v) para todo v en $\mathbb{V}$. La norma en energía ||v|| a ≝ *a*(v, v) como una norma equivalente a la norma en $\mathbb{V}$. Discretización del problema M (Mh, método de Ritz) y del problema V (Vh, Método de Galerkin) y sus formulaciones

		matriciales: la matriz de rigidez. Interpretación geométrica de Ritz en términos de mínimos cuadrados en el espacio normado en energía (Ern 2005, 30-36, Strang 1986, 304-308). Casos de equivalencia entre los métodos de Ritz y de Galerkin. Diferencias entre la minimización de la energía (Ritz) y la minimización del error (Galerkin) y su mayor alcance para incluir otros operadores. Relaciones entre los teoremas de Castigliano y de Trabajos virtuales con los métodos de Ritz y Galerkin. (Johnson 1992, 50-55, Rektorys 1990, 153-165, Reddy 2012, 133-174, 204-221, Wallerstein 2002, 40-52, 261-298, Brenner y Ridgway Scott 2008, 1-6, 60-65).
6	03.10.2013	Problemas estacionarios bien planteados (Samarskii y Vabishchevich 2007, 1-4). Un problema elíptico: la ecuación de Poisson (Laplace) con condiciones de Dirichlet homogéneas [$-\Delta u = f$, $u(\Omega) = 0$]. Modelo unidimensional de un problema clásico de la elasticidad: deformación de una barra elástica con solicitación axil distribuida. La formulación fuerte (diferencial) del problema de contorno y la formulación débil (variacional). Interpretación en términos de trabajo y energía. Condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de las soluciones fuertes y débiles. (Johnson 1992, 14-18, 33-37, Reddy 2012, 221-232, Rektorys 1990, 153-165, Chen 2005, 1-8, Ern 2005, 1-5).
7	10.10.2013	Otras interpretaciones del problema elíptico: configuración estacionaria de temperaturas en un medio conductor sometido a una fuente de calor distribuida. (Johnson 1992, 14-18, 33-37, Reddy 2012, 221-232, Rektorys 1990, 153-165, Chen 2005, 1-8, Ern 2005, 1-5) (Larsson y Thomée 2009, 15-16, 20-23). Nociones generales de otros métodos: (a) Series ortonormales; (b) Courant; (c) Colocación; (d) Máximo descenso. (Rektorys 1990, 146-152, 166-177, Luenberger y Ye 2008, 233-241).
8	17.10.2013	Formulación y resolución variacional de problemas unidimensionales y bidimensionales en el domino global. Modelos simples en la mecánica del continuo (Schäfer 2006, 20-39). Problemas elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Galerkin, Ritz (Hoffman 2001, 711-723, Kythe, Puri y Schäferkotter 1997, 273-292, Gerald y Wheatley 1994, 482-490, Brenner y Ridgway Scott 2008, 49-54, 56-58, Chen 2005, 1-6).
9	24.10.2013	Ejemplos de aplicación de Galerkin, Ritz y Colocación (Hoffman 2001, 711-723, Kythe, Puri y Schäferkotter 1997, 273-292, Gerald y Wheatley 1994, 482-490, Brenner y Ridgway Scott 2008, 49-54, 56-58, Chen 2005, 1-6). Interpretaciones en el campo de la elasticidad, hidrodinámica, electrostática, transferencia de calor. Vigas con diferentes condiciones de apoyo y carga. La ecuación biarmónica. Placas sometidas a torsión. (Reddy 2012, 232-262, Wallerstein 2002, 285-300, Powers 1987).
10	31.10.2013	Introducción a los elementos finitos, definición (Brenner y Ridgway Scott 2008, 69-71, Ciarlet y Lions 2003b, 62-65,

		Chen 2005, 1-8, Ern 2005, 5-9, Chapra y Canale 2004, 898-902). Su origen como respuesta a las limitaciones de los métodos variacionales globales y a los métodos de diferencias finitas (Strang 1986, 303-305). El caso unidimensional. La discretización en elementos y las funciones seccionalmente lineales (sombrero, *hat*, chapeau). La matriz de rigidez tridiagonal y el vector de cargas. Estructura especial para particiones uniformes. Estimación del error (caso elíptico unidimensional) introducido por la discretización. Nodos y elementos. Condiciones de Dirichlet y de Neumann.
11	07.11.2013	Condiciones de frontera esenciales y naturales. El ensamblado ajustando condiciones de contorno esenciales. Características del sistema lineal con matriz tridiagonal definida positiva. (Johnson 1992, 18-25, 40-42, Gerald y Wheatley 1994, 490-496, Hoffman 2001, 724-739, Reddy 2012, 433-454, Prenter 1989, 201-225) (Cordero Barbero, y otros 2006, 288-290, Brenner y Ridgway Scott 2008, 7-10, Fish y Belytschko 2007, 11-22, 41-53, Chapra y Canale 2004, 902-911, Burden y Faires 2002, 726-739). El método en 2D, los elementos y las funciones de forma. Los ajustes en la frontera (Gerald y Wheatley 1994, 579-594, Hoffman 2001, 739-752, Rektorys 1990, 503-210, Chapra y Canale 2004, 911-915, Schäfer 2006, 107-110). Problemas parabólicos y elementos finitos (Hoffman 2001, 752-759, Gerald y Wheatley 1994, 642-647, Johnson 1992, 146-152, Larsson y Thomée 2009, 120-123). Problemas hiperbólicos y elementos finitos (Gerald y Wheatley 1994, 685-687, Johnson 1992, 167-180, Larsson y Thomée 2009, 201-209).