

Grafos y Música

Juan David Martínez Mercado

2020-II

Introducción

Cuando se empieza a aprender teoría musical es común empezar con los tonos y semitonos, notas y silencios, intervalos, grados y las escalas musicales, todo esto para poder luego escribirlo y leerlo en un pentagrama, que suele ser difícil de comprender al principio; una alternativa a todo esto es convertir los conceptos básicos como semitonos, notas y escalas, en un grafo circular si representamos una octava en un piano o un camino cuando es una melodía o partitura; en este proyecto se buscara diseñar un modelo basado en teoría de grafos para entender de otra forma los conceptos básicos de teoría musical, con esto se podrá analizar una partitura de forma más orgánica calculando el centro del grafo generado, de esta forma cuando se quiere saber que notas son más frecuentes podremos usar una representación gráfica que dibuje los vértices con mayor grado mas grandes, o también crear un árbol de expansión de la partitura que muestre de una forma diferente la canción.

Descripción del problema

Se quiere traducir, visualizar y encontrar una relación entre la complejidad de la obra según la cantidad de vértices y la excentricidad usando los conceptos básicos de teoría musical, tales como notas, tonos, acordes y octavas representados en un grafo.

Objetivo general

Diseñar un modelo en grafos que represente las notas musicales básicas y los semitonos o tonos, e implementar el algoritmo que ayude a encontrar el cuerpo de la partitura xml, definiendo el cuerpo como un árbol de expansión y crear un algoritmo que calcule el centro del grafo.

Objetivos específicos

- Definir que representan los acordes, tonos y las notas, para luego pasarlos al formato de un grafo.
- Crear el algoritmo que lea los archivos con extensión xml (los cuales son las partituras en un formato digital) para convertir la partitura en un grafo.
- Utilizar el algoritmo de Floyd para calcular la matriz de distancia mínima que se utilizara para calcular el centro.
- Crear el algoritmo de búsqueda en anchura que sera usado para simplificar la partitura.
- Probar el grafo que se obtuvo de la partitura y aplicarle el algoritmo de búsqueda en anchura para encontrar su árbol de expansión.

Marco teórico

A continuación se definirán los términos que se usaran en este proyecto.

Grafos

Definimos un grafo G como una terna que consiste en un conjunto de vértices llamado $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asocia a cada arista un par de vértices (extremos) no necesariamente distintos.[1]

Bucle

Es una arista cuyos extremos son iguales.

Aristas múltiples o paralelas

Son aristas que tienen el mismo par de extremos.

Grafo simple

Definimos un grafo simple $G = (V, E)$ como un grafo sin bucles ni aristas múltiples, siendo E los pares no ordenados de vértices.

Ciclo

Es un grafo simple con el mismo número de vértices y aristas cuyos vértices pueden ubicarse alrededor de un círculo de tal manera que dos vértices son adyacentes si aparecen de manera consecutiva sobre el círculo.

Grafo acíclico

Es un grafo sin ciclos.

Grafo conexo

Un grafo G es conexo si existe un u,v -camino entre cada par $uv \in V(G)$.

Subgrafo

Un subgrafo ($H \subseteq G$) de un grafo G es un grafo H tal que:

- $V(H) \subseteq V(G)$
- $E(H) \subseteq E(G)$
- La asignación de extremos a las aristas en H es la misma que en G .

Subgrafo inducido

de G es un subgrafo G' de G tal que contiene todas las aristas adyacentes al subconjunto de vértices de G . [2]

Subgrafo de expansión

Un subgrafo de expansión de G es un subgrafo con conjunto de vértices $V(G)$.

Caminata

Una caminata en un grafo G es una lista $v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ de vértices y aristas tal que $\forall 1 \leq i \leq k$ la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i .

Sendero

Un sendero se define como una caminata sin aristas repetidas.

Camino

Un camino es un sendero sin vértices repetidos.

Árbol

Un árbol es un grafo simple, acíclico y conexo.

Árbol de expansión

Un árbol de expansión de un grafo G es un subgrafo de expansión que es un árbol.

Distancia

Si G tiene un u, v -camino, la distancia de u a v notada $d(u, v)$ es la longitud mínima de un u, v -camino. Si G no tiene dicho camino la distancia es ∞ .

Excentricidad

La excentricidad de un vértice u es:

$$\epsilon(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

Centro

El centro de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad.

Música

En este proyecto usaremos el sistema de afinación construido mediante la división de la octava en doce partes iguales llamadas semitonos temperados, es decir el temperamento igual.[3]

Frecuencia

La frecuencia es el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier evento periódico.[4]

Nota

Una nota es un monosílabo (en el sistema inglés de notación) que representa una frecuencia de sonido.

Acorde

Tres o mas notas tocadas al mismo tiempo se define como acorde.

Intervalo

Un intervalo es la distancia que existe entre dos notas. Esta distancia se mide en unidades de semitonos o tonos (un tono equivale a dos semitonos). El intervalo mínimo de medio tono es siempre igual entre una nota y su consecutiva en el temperamento igual, de modo que:

$$F_{n+1} = F_n 2^{\frac{1}{12}}$$

Donde F es la frecuencia.[5]

Escala

Una escala es una serie de sonidos que van desde la frecuencia más baja a la más alta siguiendo intervalos de frecuencia definidos.[6]

Escalas mayores

Las escalas mayores son escalas diatónicas (todos los intervalos sucesivos son de uno o medio tono) y heptatónicas (se construyen con siete notas).[5]

Escalas menores

Las escalas menores son también escalas diatónicas y heptatónicas. Un aspecto importante es que si bien solo existe un tipo de escala mayor, existen tres variaciones de la escala menor. Estas tres variaciones son la escala menor natural, la armónica y la melódica.[5]

Escalas pentatónicas

Las escalas pentatónicas, como su nombre indica, se construyen a partir de solo cinco notas. Estas cinco notas pueden pertenecer o bien a la escala mayor o a la escala menor. Según el caso puede distinguirse entre escalas pentatónicas mayores o escalas pentatónicas menores.[5]

Grados musicales

Los grados musicales son los nombres que reciben las notas de una escala según su posición con respecto a la nota principal de la escala.[5]

Octava

Se denomina octava al intervalo de ocho grados entre dos notas de la escala musical en un piano.[6]

Partitura

Una partitura es un documento que indica como debe interpretarse una composición musical.

Modelamiento del problema

Para poder resolver el problema se dará a cada concepto una interpretación; así pues los nodos de los grafos que se presentaran en este proyecto se definen como las notas o acordes, las aristas serán, ya sea los intervalos en una octava o la siguiente nota en una partitura, su peso dependerá en cual de los dos estemos, si es una escala entonces el peso de cada arista sera de $\frac{1}{2}$, es decir un semitono, y si estamos en una partitura el peso de la arista sera de 1, con esto tendremos dos tipos de grafos, un grafo circular que representa la octava, y un grafo dirigido que representa la partitura; cabe aclarar que las escalas pentatónicas son subgrafos de las escalas diatónicas que a su vez son subgrafos de una octava o escala cromática.

Solución propuesta

Se planea hacer un programa en el lenguaje de programación Python que lea archivos xml con la librería music21, extrayendo de estos archivos las notas y los acordes que serán usados para crear el grafo, el cual sera representado en dos y tres dimensiones para poder visualizarlo, y también usar el algoritmo de Floyd para encontrar la matriz con los caminos mínimos que sera de utilidad para hallar el centro, y por ultimo se utilizara el algoritmo de búsqueda en anchura para encontrar un árbol de expansión.

Bibliografía

- [1] Douglas B. West, Introduction to graph theory, 2005.
- [2] http://www.unipamplona.edu.co/unipamplona/portalIG/home_23/recursos/general/11072012/grafo3.pdf
- [3] https://es.wikipedia.org/wiki/Temperamento_igual
- [4] <https://es.wikipedia.org/wiki/Frecuencia>
- [5] https://www.acordespiano.com/escalas/#Escalas_cromaticas
- [6] <http://www.ehu.eus/acustica/espanol/musica/somues/somues.html>