MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2015 JAN PLHÁK

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Název práce na titulní list

Bakalářská práce

Jan Plhák

Vedoucí práce: Bc. Lukáš Vokřínek, PhD. **Brno 2015**

Bibliografický záznam

Autor:	Jan Plhák Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Název práce
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika
Vedoucí práce:	Bc. Lukáš Vokřínek, PhD.
Akademický rok:	2014/2015
Počet stran:	?? + ??
Klíčová slova:	Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo; Klíčové slovo

Bibliographic Entry

Author:	Jan Plhák Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Title of Thesis
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Mathematics
Supervisor:	Bc. Lukáš Vokřínek, PhD.
Academic Year:	2014/2015
Number of Pages:	?? + ??
Keywords:	Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword

Abstrakt

V této bakalářské/diplomové/rigorózní práci se věnujeme ...

Abstract

In this thesis we study ...

Místo tohoto listu vložte kopii oficiálního (podepsaného) zadání práce.

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl(-a) poděkovat ...

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou/diplomovou/rigorózní práci vypracoval(-a) samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno xx. měsíce 20xx . . . .

Jan Plhák

Obsah

Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře s efektivním algoritmem pro výpočet Smithova normálního tvaru celočíselných matic.

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel

$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel

$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel
$\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel

Kapitola 1

Smithův normální tvar

V této kapitole se budeme zbývat definicí Smithova normálního tvaru (budeme značit SNF) celočíselných matic $Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$, dokážeme jeho existenci pro libovolnou $A \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ a konečně uvedeme souvislost mezi SNF a konečně generovanými komutativními grupami.

Definice 1.1. Řekneme že matice A $\in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ je ve Smithově normálním tvaru jestliže

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a platí $q_i|q_{i+1}$ kde $i \in \{1,\dots,k-1\}$. Čísla q_i pak nazýváme *invariantními faktory*.

Věta 1.2 (O Smithově normálním tvaru)**.** *Pro libovolnou celočíselnou matici $B \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ existují invertibilní matice $P,Q \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ a matice A ve Smithově normálním tvaru takové, že platí*

$$B = P \cdot A \cdot Q$$

Smithův normální tvar je jednoznačný až na znaménka invariantních faktorů.

Než se pustíme do samotného důkazu této věty, je dobré si uvědomit, jak vlastně vypadají invertibilní celočíselné matice. To popisuje následující lemma.

Lemma 1.3. *Buď $A \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$. Pak je A invertiblní, právě tehdy když je čtvercová a* $\det(A) = \pm 1$.

Důkaz. Buď $A \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ invertibilní. Existuje tedy matice $A^{-1} \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ taková, že $AA^{-1} = E$. Pak je ovšem A^{-1} inverzí pro A také nad $\mathbb{Q}$. Proto A musí být čtvercová, neboť každá invertiblní matice nad $\mathbb{Q}$ je čtvercová a má nenulový determinant. Navíc platí

$$det(A) \cdot \det(A^{-1}) = det(AA^{-1}) = det(E) = 1$$

a protože determinant celočíselné matice je z definice determinantu také celočíselný, musí platit $det(A) = det(A^{-1}) = \pm 1$ neboť v okruhu $\mathbb{Z}$ máme pouze dvě jednotky a to právě ± 1.

Buď naopak $A \in Mat_{n \times m}\mathbb{Z}$ čtvercová s determinantem ± 1. Pak inverzní matici A^{-1} můžeme spočítat z algebraických doplňků jako

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot A_{adj} = \pm A_{adj}$$

nicméně prvky matice A_{adj} - algebraické doplňky - se vypočítají ze subdeterminantů (minorů) matice A a musí být proto celočíselné. Matice A^{-1} je tedy celočíselná. □

Z tohoto lemmatu tedy plyne, že pokud chceme celočíselnou matici B převést do SNF pomocí invertibilních matic, musíme tak činit pouze prostřednictvím matic majících determinant ± 1. Nyní tedy můžeme přikročit k důkazu samotné věty o SNF .

Důkaz. (Věty o Smithově normálním tvaru). Nejprve dokážeme existenci SNF . Pro tento účel budeme potřebovat Euklidův algoritmus. Ten funguje následujícím způsobem.

Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že $|a| > |b|$ vydělíme číslo a číslem b se zbytkem. Tedy $a = qb + c$. Pak ovšem platí, že $gcd(a,b) = gcd(b,c)$ neboť

$$gcd(a,b) = d \Rightarrow d|(a - qb) \Rightarrow d|c \Rightarrow d|gcd(b,c)$$

a naopak

$$gcd(b,c) = e \Rightarrow e|(qb + c) \Rightarrow e|a \Rightarrow e|gcd(a,b).$$

Takto můžeme postupovat rekurzivně a po konečném počtu kroků bude $c = 0$ a b příslušné danému kroku bude právě hledaný největší společný dělitel. Poznamenejme, že užití Euklidova algoritmu je z výpočetního hlediska výhodně, neboť má logaritmickou složitost.

Dále protože výsledné transformační matice P, Q musí být invertibilní nad $\mathbb{Z}$, plyne z předchozího lemmatu, že jejich determinant musí být roven ± 1. Evidentně tedy nemůžeme násobit řádek či sloupec matice jiným číslem než ± 1. Můžeme však prohodit libovolné dva řádky, protože to lze realizovat pomocí transformační matice,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

která má evidentně determinant roven -1. Analogicky můžeme prohazovat prohazovat libovolné dva sloupce. A konečně pomocí transformační matice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & m & & 1 & \\ & & & \dots & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

můžeme k libovolnému řádku přičíst m-násobek jiného řádku.

Nyní budeme postupovat následujícím způsobem. Na pozici $(1,1)$ přesuneme libovolný nenulový prvek matice B (Pokud $B = 0$, pak je již ve SNF a žádné operace provádět nemusíme). Pak postupně pro každý prvek pod a napravo od prvku b_1^1 aplikujeme Euklidův algoritmus (konkrétně jeho implementaci pomocí řádkových a sloupcových operací, která potřebuje pouze operace násobení řádku/sloupce číslem -1, přičítání násobku řádku/sloupce k jinému a prohazování dvou řádků/sloupců), čímž na pozici $(1,1)$ vyrobíme největší společný prvků v prvním sloupci a řádku. Tyto prvky můžeme tedy snadno vyeliminovat, čímž získáme matici ve tvaru

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Pokud nyní existuje nějaký prvek b_j^i, který ještě není dělitelný b_1^1, můžeme přičíst j-tý sloupec k prvnímu sloupci a opět vyrobit na pozici $(1,1)$ prvek b'^1_1 takový, že $b'^1_1 | b_1^1$ a zároveň $b'^1_1 | b_j^i$, který jej již dělit bude. Poznamenejme, že tento prvek bude nutně menší než původní b_1^1, díky čemuž náš algoritmus skončí po konečném počtu kroků.

Celkem máme algoritmus, který převede matici B do výše uvedeného tvaru a navíc $b_1^1 | b_j^i$. Označme takto vzniklou matici C a nechť $q_k = c_1^1$. Nyní můžeme postupovat indukcí a aplikovat tento algoritmus na submatici, která vznikne vynecháním prvního sloupce a řádku matice C. Neboť q_k dělil všechny prvky matice C, bude dělit i prvek v levém horním rohu submatice (označme jej q_{k+1}) po aplikaci výše uvedeného algoritmu. Dostáváme, že $q_k | q_{k+1}$, což jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat jednoznačnost. Označme

$$gcd_{i \times i}(A) = gcd\{det(X) | X \text{ je submatice } A \text{ tvaru } i \times i\}$$

Prvně ukážeme, že platí rovnost

$$q_1 \dots q_i = gcd_{i \times i}(A)$$

kde A je matice ve SNF . Pokud submatice X obsahuje k-tý řádek, ale neobsahuje k-tý sloupec matice A, bude její determinant evidentně nulový, neboť A je diagonální a X tak bude obsahovat nulový řádek. Stačí tedy uvažovat submatice jejichž diagonála leží na hlavní diagonále matice A. To znamená, že platí

$$gcd_{i \times i}(A) = gcd\{q_{k_1} \dots q_{k_i} | 1 \le k_1 < \dots < k_i \le r\}.$$

Navíc A je ve SNF , proto $q_i|q_{i+1}$ z čehož plyne

$$gcd\{q_{k_1}\dots q_{k_i}|1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq r\} = q_1\dots q_i,$$

což jsme chtěli dokázat.

Konečně ukážeme, že největší společný dělitel subdeterminantů je invariantní vzhledem k elementárním řádkovým operacím (invariance vzhledem k sloupcovým operacím pak plyne ze symetrie).

Invariance vzhledem k násobení řádku číslem -1 a vzhledem k prohození řádků je zřejmá, neboť tyto operace maximálně změní znaménko některých subdeterminantů. To ovšem nemá žádný vliv na výsledného největšího společného dělitele. Pro přičítání násobku řádku je situace ovšem poněkud složitější. Každý nový subdeterminant je pak celočíselnou kombinací subdeterminantů předchozí matice. Z toho plyne, že

$$gcd_{i\times i}(A)|gcd_{i\times i}(A').$$

Jak jsme ale ukázali dříve, operace přičtení řádku je invertibilní. Můžeme tedy celý proces zopakovat opačným směrem a stejnou argumentací dostáváme

$$gcd_{i\times i}(A')|gcd_{i\times i}(A).$$

Největší společný dělitel subdeterminantů se tedy nezmění.

Předpokládejme nyní, že SNF není jednoznačný a existují matice A,C a P,Q,T,U takové, že platí $B = P\cdot A\cdot Q = T\cdot C\cdot U$, kde A,C jsou různé a ve SNF a P,Q,T,U jsou celočíselné invertibilní matice. Pak násobení invertibilními maticemi P,Q,T,U odpovídá postupnému provádění elemntárních řádkových a sloupcových úprav, o kterých jsme ovšem dokázali, že nemění největšího společného dělitele subdeterminantů. To speciálně znamená, že hlavní minory matic A,C ve Smithově normálním tvaru jsou si rovny a proto i invariatní faktory musí být stejně. To je spor s předpokladem. Smithův normální tvar je tedy jednoznačný.

□

1.1 Podkapitola

1.1.1 Odstavec

Kapitola 2

Triangularizace celočíselných matic

V této kapitole se budeme zabývat popisem algoritmu pro výpočet redukovaného schodovitého tvaru celočíselných matic. Tento algoritmus představil Arne Storjohann v článku nazvaném „*A fast+practial+deterministic algorithm for triangularizing integer matrices*" [6]. Definujme nejdříve tvar matice, jehož vytvoření bude našim cílem.

Definice 2.1. Řekneme že matice $A \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ je v redukovaném schodovitém tvaru (RST) jestliže splňuje následující podmínky:

(c1) Buď r hodnost matice A. Pak prvních r řádků je nenulových.

(c2) Pro každé $1 \leq i \leq r$ buď $A[i, j_i]$ první nenulový prvek v i-tém řádku. Pak $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(c3) Pro každé $1 \leq i \leq r$ platí $A[i, j_i] > 0$.

(c4) Pro každé $1 \leq k < i \leq r$ platí $A[i, j_i] > A[k, j_i] \geq 0$.

Poznámka 2.2. Poznamenejme, že první a druhá podmínka nám zaručují schodovitý tvar matice A. Tento však zjevně není jednoznačný. Proto je nutné přidat ještě podmínky (*c3*) a (*c4*). (*c3*) zajišťuje, že členy nad pivoty budou kladné a (*c4*) říká, že prvky nad pivoty budou pivoty omezeny. Tyto podmínky pak určují tvar matice A jednoznačně vzhledem k elementárním operacím.

Příklad 2.3. Pro ilustraci uvádíme následující matici v RST :

$$\begin{pmatrix} 2 & 33 & 6 & 0 & 39 & 73 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 444 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V následujících podkapitolách nejdříve popíšeme několik klíčových procedur, které budou upravovat vstupní matici A, pomocí unimodulárních (mající determinant roven ± 1, tedy invertibilních) matic. Tyto procedury postupně propojíme a v poslední podkapitole pak obdržíme samotný algoritmus pro výpočet RST .

2.1 GCD redukce

Jak jsme viděli již v důkazu věty o Smithově normálním tvaru, častou operací, kterou s maticí při převodu do SNF provádíme, je eliminace všech prvků nacházejících se pod nějakým námi zvoleným pivotem. Takováto eliminace je poměrně náročná, neboť pro každý prvek musíme vytvářet největší společný dělitel s pivotem. Bylo by proto výhodné, kdybychom mohli nějakým způsobem upravit prvky ve sloupci tak, že největší společný dělitel nějakých dvou prvků daného sloupce bude zároveň největším společným dělitelem všech prvků daného sloupce. A přesně to je obsahem následující věty.

Věta 2.4 (GCD redukce)**.** *Nechť $B \in Mat_{n\times m}\mathbb{Z}$ je matice $(k+2)\times k$ a $rank(B) = 2$, kterou můžeme zapsat jako*

$$B = \begin{pmatrix} N & \bar{N} \\ a & \bar{a} \\ b_1 & \bar{b_1} \\ \vdots & \vdots \\ b_k & \bar{b_k} \end{pmatrix},$$

kde N je kladné. Pak existuje deterministický algoritmus, který pro matici B vypočte unimodulární matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & c_1 & \cdots & c_k \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

takovou, že bude platit

$$CB = \begin{pmatrix} N & \bar{N} \\ a_s & \bar{a}_s \\ b_1 & \bar{b_1} \\ \vdots & \vdots \\ b_k & \bar{b_k} \end{pmatrix} \text{ kde dgsdgddg sdgsdgsdgdgsdgdsdg}$$

a navíc CB bude splňovat následující podmínky:

1. *hlavní submatice $\begin{pmatrix} N & \bar{N} \\ a_s & \bar{a}_s \end{pmatrix}$ je regulární a*
2. $gcd(x,N) = gcd(x,N,b_1,b_2,\cdots,b_k)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $k > 0$. Pokud by k bylo nulové, můžeme zřejmě za C zvolit identitu, které splní naše požadavky. Dále můžeme předpokládat, že hlavní submatice je regulární a tedy platí $N\bar{a} - \bar{N}a \neq 0$. Pokud by tomu tak nebylo, přičteme k druhému řádku nějaký řádek $2 < l \leq k+2$, pro který platí $N\bar{b_l} - \bar{N}b_l \neq 0$. Takový řádek jistě bude existovat, neboť matice B má plnou hodnost. Výsledná matice pak bude mít hlavní submatici regulární. Pro takto upravenou matici můžeme spočítat hledané koeficienty c_i a konečně ke koeficientu c_l přičteme 1, což bude přesně odpovídat onomu přičtení l-tého řádku. □

2.2 Podkapitola

Závěr

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetuer lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetuer eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetuer varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetuer non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetuer vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

Příloha

Sem můžete přidat přílohu. Pokud chcete "přílohy", tak upravte definici záhlaví v souboru sci.muni.thesis.sty, viz řádek 644.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetuer lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetuer eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetuer varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetuer non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetuer vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

Seznam použité literatury

[1] S. J. Monaquel a K. M. Schmidt, *On M-functions and operator theory for non-self-adjoint discrete Hamiltonian systems*, v „Special Issue: 65th birthday of Prof. Desmond Evans“, J.Comput. Appl. Math. **208** (2007), č. 1, 82–101.

[2] M. Murata, *Positive solutions and large time behaviors of Schrödinger semigroups, Simon's problem*, J. Funct. Anal. **56** (1984), č. 3, 300–310.

[3] J. Qi a S. Chen, *Strong limit-point classification of singular Hamiltonian expressions*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), č. 6, 1667–1674 (elektronicky).

[4] Z. Pospíšil, *An inverse problem for matrix trigonometric and hyperbolic functions on measure chains*, v „Colloquium on Differential and Difference Equations — CDDE 2002“ (Brno, 2002), Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math. **13**, str. 205–211, Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[5] R. Šimon Hilscher a P. Zemánek, *Friedrichs extension of operators defined by linear Hamiltonian systems on unbounded interval*, v „Equadiff 12“, Proceedings of the Conference on Differential Equations and their Applications (Brno, 2009), J. Diblík, O. Došlý, P. Drábek a E. Feistauer, editoři, Math. Bohem. **135** (2010), č. 2, 209–222.

[6] A. Storjohann, *A Fast+Practical+Deterministic Algorithm for Triangularizing Integer Matrices*, Cosi, Springer-Verlag, Zurich, 1996.