Elementos de álgebra - Módulo I

Toda la información: pedco.uncoma.edu.ar Elementos de álgebra

- **Teoría:** Valeria Castaño.

  Lunes y Viernes de 16 a 17:30 hs. (Virtual)

- **Práctica:** Romina Ojeda - Ariela Garcés - René Morari.

  Grupo A: Lunes de 9 a 12 hs. (Presencial) Ed. Fac. Informática.

  Grupo B: Miércoles de 9 a 12 hs. (Presencial) Ed. Fac. Informática.

- **Consultas:** Lunes y Viernes después de la teoría. (Virtual)

- **Primer parcial:** Temas: Lógica - Conjuntos - Números reales - Números naturales.

- **Segundo parcial:** Temas: Números enteros - Números complejos - Matrices y determinates - Sistemas de ecuaciones lineales - Polinomios.

Presenciales.

IMPORTANTE: **Respetar el módulo.**

Mail de contacto para módulo I: cvaleria@gmail.com

Lógica clásica

Se llama **proposición** a toda oración respecto de la cual puede decirse si es verdadera o falsa.

Ej: La pandemia de Covid 19 duró un año. FALSO

Obs:

- Las notaremos en general con letras minúsculas: p, q, r, etc.
- Si la proposición p es verdadera diremos que su **valor de verdad es verdadero** y escribimos $v(p) = V$.
- Si la proposición p es falsa diremos que su **valor de verdad es falso** y escribimos $v(p) = F$.

Llamaremos proposición **simple** ó **atómica** a toda proposición que no contiene propiamente otra proposición.

Ejemplos:

- Python es um lenguaje de programación. *proposición simple*
- $\underbrace{\text{París es la capital de Francia}}_{p}$ y $\underbrace{\text{Madrid es la capital de España}}_{q}$. *proposición compuesta*

conectivo

Obs. El valor de verdad de una proposición compuesta dedende del valor de verdad de las proposiciones atómicas involucradas en ella.

Para poder armar proposiciones o fórmulas compuestas utilizaremos los **conectivos lógicos**: $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

- Negación: $\sim$ ó $\neg$

La negación de la proposición p es la proposición: "No p".

Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplo:

p : Una mano tiene 5 dedos.

$\sim p$: Una mano **no** tiene 5 dedos (No es verdad que una mano tiene 5 dedos)

Como $v(p) = V$ entonces $v(\sim p) = F$

- Conjunción: $\wedge$

La unión de dos proposiciones p, q por medio del conectivo "y" se denomina **conjunción** de proposiciones. En símbolos: $p \wedge q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Disyunción: $\vee$

La unión de dos proposiciones p, q por medio del conectivo "o" se denomina **disyunción** de proposiciones. En símbolos: $p \vee q$.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Implicación: $\Rightarrow$

La **implicación** de dos proposiciones p, q es al proposición: "si p entonces q". En símbolos: $p \Rightarrow q$.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$$\underset{\textit{antecedente}}{p} \Rightarrow \underset{\textit{consecuente}}{q}.$$

Obs. Si el antecedente es falso,
la implicación SIEMPRE resulta verdadera.

Obs. Otras formas de escribir $p \Rightarrow q$ pueden ser:

- Si p, q.
- Sólo si q, p.
- q, si p.
- p es condición suficiente para q.
- q es condición necesaria para p.

- Equivalencia o doble implicación: $\Leftrightarrow$

La **equivalencia** de dos proposiciones p, q es al proposicón: "p si y sólo si q". En símbolos: $p \Leftrightarrow q$.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Obs. Es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones tiene el MISMO valor de verdad.

Obs. $p \Leftrightarrow q$ también puede escribirse como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Si tenemos una proposición que involucra una, dos o más proposiciones y conectivos lógicos podemos determinar su valor de verdad mediante **tablas de verdad**.

Ejemplo:

1) $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

2) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$	
V	V	V	F	V		V
V	F	F	F	F		V
F	V	V	V	V		V
F	F	V	V	V		V

3) $p \wedge \sim (q \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$\sim (p \Rightarrow r)$	$p \wedge \sim (q \Rightarrow r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Obs. La cantidad de filas en una tabla de verdad correspondiente a una proposición es 2^n, donde n es el número de proposiciones simples involucradas en la proposición.

Diremos que una proposición o fórmula que involucra a proposiciónes simples: p, q, r, etc. es una:

- TAUTOLOGÍA: Si siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de p, q, r, etc.
- CONTRADICCIÓN: Si siempre es **falsa**, independientemente de los valores de verdad de p, q, r, etc.
- CONTINGENCIA: Si no es ni tautología, ni contradicción.

Equivalencia lógica: Diremos que dos proposiciones p y q son equivalentes si la proposición $p \Leftrightarrow q$ es una tautología.

Implicación lógica: Diremos que una proposición p implica lógicamente a una proposición q si la proposición $p \Rightarrow q$ es una tautología.

Implicaciones asociadas: Sea $p \Rightarrow q$ una implicación a la cual llamaremos **directa**. Asociada a ella tenemos las siguientes implicaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \textbf{Recíproca:}\quad q \Rightarrow p. \\[1ex] \bullet\ \textbf{Contraria:}\quad \sim p \Rightarrow \sim q. \end{array}\right\}\ \textit{son equivalentes}$$

- **Contrarrecíproca:** $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Obs. $\underset{\textit{directa}}{\underset{\downarrow}{p \Rightarrow q}}$ es equivalente a $\underset{\textit{contrarrecíproca}}{\underset{\downarrow}{\sim q \Rightarrow \sim p}}$.

Equivalencias lógicas de uso frecuente

1.- Doble negación:

$$\sim\sim p \Leftrightarrow p$$

2.- Leyes conmutativas:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

3.- Leyes asociativas:

$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas:

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

5.- Leyes de idempotencia:

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

6.- Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Me dice cómo negar una conjunción ó una disyunción

7.- Implicación:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Me permite escribír una implicación en términos de $\vee$ y $\sim$

8.- Contrarrecíproca:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Representando con **t** una tautología y con **c** una contradicción:

9.- Leyes de identidad:

$$(p \vee \mathbf{c}) \Leftrightarrow p$$

$$(p \vee \mathbf{t}) \Leftrightarrow \mathbf{t}$$

$$(p \wedge \mathbf{c}) \Leftrightarrow \mathbf{c}$$

$$(p \wedge \mathbf{t}) \Leftrightarrow p$$

10.- Reducción al absurdo:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow \mathbf{c}]$$

Negación de una implicación:

$$\sim (p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \sim q)$$

Implicaciones lógicas de uso frecuente

1.- Adición:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

2.- Simplificación:

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

3.- Modus ponens:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

4.- Absurdo:

$$(p \Rightarrow \mathbf{c}) \Rightarrow \sim p$$

5.- Transitividad de la implicación:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Cuantificadores:

Notaremos por $P(x)$ a una propiedad asociada al objeto x.

Ejemplo: $\quad x$ *es par*.

Def: $P(x)$ es un **función proposicional** en la variable x si existe al menos una sustitución de x por una constante que la transforme en proposición.

Ejemplo: Consideremos $P(x): x + 1$ es impar entonces

$P(1):$ $\mathbf{1} + 1$ es impar $\Leftarrow$ es una proposición falsa.

$P(2):$ $\mathbf{2} + 1$ es impar $\Leftarrow$ es una proposición verdadera.

Utilizaremos los conectivos lógicos $(\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ para relacionar a las funciones proposicionales..

También consideraremos funciones proposicionales en 2, 3 o más variables.

Ejemplo: $P(x, y) : (x + y)^2 = x^2 + y^2$

Si $x = 1$ e $y = 2$ entonces $P(1, 2) : (1 + 2)^2 = 1^2 + 2^2$ es falsa.

Podemos obtener proposiciones a partir de una función proposicional $P(x)$ de las siguientes formas:

- Particularizando ésta, es decir, dándoles valores a la variable.

- Anteponiéndole un cuantificador

1) $\forall x : P(x)$ (*para todo x se cumple $P(x)$*)

2) $\exists x : P(x)$ (*para algún x se cumple $P(x)$*)

Sea A un conjunto de posibles valores de x:

1) La proposición $\forall x \in A : P(x)$ se lee "para todo x en A se cumple $P(x)$" y es **verdadera** si para cada $c \in A$, $P(c)$ es verdadera.

2) La proposición $\exists x \in A : P(x)$ se lee "existe un elemento x en A que cumple $P(x)$" ó "algún x de A cumple $P(x)$", y es **verdadera** si al menos hay un valor $a \in A$ que hace que $P(a)$ sea verdadera.

Negación de proposiciones cuantificaddas: Debemos seguir las siguientes reglas:

- $\sim (\forall x \in A : P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A / \sim P(x))$
- $\sim (\exists x \in A / P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : \sim P(x))$

De esto se desprenden las siguientes equivalencias útiles:

- $\forall x \in A : P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sim (\exists x \in A / \sim P(x)))$
- $\exists x \in A / P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sim (\forall x \in A : \sim P(x)))$

Métodos de demostración:

Def. Un **teorema** es un enunciado que es verdadero y que es necesario demostrar. Consta de dos partes:

Hipótesis.

Tesis.

Simbólicamente: $\boxed{H \quad \Rightarrow \quad T}$

Demostrar un teorema es demostrar que la implicación $H \Rightarrow T$ es verdadera.
Se pueden utilizar los siguientes métodos:

1) **Método directo:** $H \quad \Rightarrow \quad T$

Consiste en suponer que las hipótesis son verdaderas y utilizarlas para demostrar mediante reglas de inferencias válidas que la tesis también lo es.

2) **Métodos indirectos:**

$a)$ **Contrarrecíproco o cantrapositiva:** $\sim T \quad \Rightarrow \quad \sim H$

Consiste en aplicar el método directo para probar la implicación $\sim T \Rightarrow \sim H$. Es decir, suponer que la negación de la tesis es verdadera y utilizarla para probar la negación de la hipótesis.

$b)$ **Reducción al absurdo:** $H \;\wedge\; \sim T \quad \Rightarrow \quad Abs.$

Consiste en suponer que $H \Rightarrow T$ es falsa, es decir, que la hipótesis y la negación de la tesis son verdaderas a la vez y llegar a un absurdo.

Obs: 1) En ningún método se puede suponer que la tesis es verdadera.

2) Para demostrar un enunciado de la forma $p \Leftrightarrow q$ debemos probar los teoremas $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.