UNIDAD 1

LÓGICA PROPOSICIONAL

¿Qué es la lógica?

LÓGICA

La lógica es una ciencia formal, rama de la filosofía, que estudia los principios y estructuras del pensamiento.
En un sentido estricto, la lógica estudia el razonamiento deductivo.

LOGICA PROPOSICIONAL

Es la sistematización del razonamiento matemático. usa como elemento básico las proposiciones, las cuales poseen un valor de verdad.

- Todos los gatos son negros es proposición
- $x - 3 > 2$ no es prop.
- 2 es un número primo es prop.
- ¡Por favor, abre la puerta! no es prop.
- $4 + 2 = 5$ es prop.
- ¿Apagaste la luz? no es prop.

Definición: Entenderemos por proposición toda expresión lingüística (enunciado) respecto de la cual puede decirse si es verdadera o falsa.

La verdad y falsedad son los ***valores de verdad*** de una proposición. Escribiremos (V) para indicar que el valor de verdad de una proposición es Verdadero, y escribiremos (F) para indicar que el valor de verdad de una proposición es Falso.

El valor de verdad que se le asigna a una proposición es único. Es decir, ninguna proposición puede ser verdadera y falsa simultáneamente.

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas.

Las proposiciones simples, en el sentido gramatical, están formadas por un sujeto y un predicado.

Ejemplos:

- El número 1 es primo.
- Java es un lenguaje de programación.

Las proposiciones compuestas están formadas por más de una proposición simple, las cuales están unidas a través de conectivos lógicos.

Ejemplo:
Dos es un número primo y tres es un número impar

Las proposiciones simples usualmente se simbolizan con las letras: p, q, r, etc.

Ejemplo: Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

p: 5 es un número par $\sim(p) = F$

q: 4 es múltiplo de 2 $\sim(q) = V$

CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son las operaciones entre proposiciones

A través de expresiones como “o”, “y”, “no”, “si .... entonces”, “si y sólo si”, llamadas conectivos, se generan proposiciones simples o compuestas, partiendo de proposiciones simples.

Ejemplos:

p: El dos “no” es un número impar

q: Si llegamos temprano entonces saldremos a caminar

Los símbolos que usaremos para denotar estos conectivos se dan en la siguiente tabla:

Conectivo	Símbolo	Se escribe	Se lee
Negación	$\sim$	$\sim p$	no p
Conjunción	$\wedge$	$p\wedge q$	p y q
Disyunción	$\vee$	$p\vee q$	p o q
Implicación	$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	Si p entonces q
Equivalencia	$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	P si y solo si q

Definición

Una **Tabla de Verdad** representa los valores de verdad que puede tomar una proposición simple o compuesta, en función de todos los posibles valores de verdad de las proposiciones simples que intervienen.

Negación (~)

Anteponiendo la palabra "no" se forma la negación de cualquier proposición. Es decir obtenemos la proposición opuesta en el sentido de su valor de verdad

Ejemplo:

p: 3 es un número par $v(p) =$ F

~p: 3 no es un número par, o

~p: No es cierto que, 3 es un número par $v(\sim p) =$ V

Luego, si la proposición p es verdadera, su negación ~ p, es falsa , y si la proposición p es falsa, su negación es verdadera. Podemos describir ésta situación por medio de una tabla de verdad.

Tabla de verdad de la negación

p	~p
V	F
F	V

Conjunción($\wedge$)

La conexión de dos proposiciones por la palabra "y" se llama conjunción de proposiciones.

Ejemplo:

- p: 10 es múltiplo de 5 $v(p) = V$
- q: 2 es un número par $v(q) = V$
- r: 3 es un número negativo $v(r) = F$
- s: 5 es mayor que 6 $v(s) = F$

Entonces:

- $p \wedge q$: 10 es múltiplo de 5 y 2 es un número par $v(p \wedge q) = V$
- $r \wedge q$: 3 es un número negativo y dos es un número par $v(r \wedge q) = F$
- $r \wedge s$: 3 es un número negativo y 5 es mayor que 6 $v(r \wedge s) = F$

Tabla de verdad para la conjunción

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Una conjunción de proposiciones es verdadera cuando ambas proposiciones lo son; pero si al menos una de ellas es falsa, entonces toda la conjunción es falsa.

Disyunción (∨)

Con la unión de proposiciones por la palabra "o" se obtiene la disyunción de proposiciones
Utilizaremos la palabra "o" en sentido no excluyente.

Ejemplo:

- p: 2 es un número positivo $v(p) = V$
- q: $2 + 5 = 6$ $v(q) = F$
- r: $7 < 5$ $v(r) = F$

Entonces:

- $p \vee r$: 2 es un número positivo o 7<5 $\boldsymbol{v}(p \vee r) =$ V
- $q \vee r$: $2 + 5 = 6 \; o \; 7 < 5$ $\boldsymbol{v}(q \vee r) =$ F

Tabla de verdad para la disyunción

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción de dos proposiciones será verdadera cuando al menos una de ellas sea verdadera. Caso contrario, esto es, si ambas son falsas, la disyunción es falsa.

Implicación

Si se combinan dos proposiciones por medio de las palabras "si ... entonces" se obtiene una proposición compuesta llamada implicación.
La proposición que sigue a la palabra "si" se llama antecedente y la que sigue a la palabra "entonces" se llama consecuente.

Ejemplo:

- p: 9 es un número divisible por 3 $v(p) = V$
- q: 3 es un divisor de 9 $v(q) = V$

Entonces:

- $p \Rightarrow q$: Si 9 es un número divisible por 3 entonces 3 es divisor de 9 $v(p \Rightarrow q) = V$

Tabla de verdad para la implicación

p	q	p⇒q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una implicación es falsa solo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es Falso.
En todos los demás casos la implicación será Verdadera

La implicación se puede escribir "si p entonces q", "q si p", "si p, q" o "p solo si q"

Equivalencia ($\Leftrightarrow$)

Otra expresión que aparece frecuentemente en Matemática es la frase "si y sólo si". Al unir dos proposiciones cualesquiera por medio de esta frase se obtiene una proposición compuesta que se llama **equivalencia**.

Ejemplo:

- p: Matías aprueba el curso de ingreso
- q: Matías entrará a la universidad

Entonces:

- $p \Leftrightarrow q$: Matías aprueba el curso de ingreso si y solo si entrará a la universidad $v(p \Leftrightarrow q) =$

La equivalencia $p \Leftrightarrow q$, es por definición la conjunción $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. De éste modo la tabla de valores de verdad de $p \Leftrightarrow q$, puede obtenerse mediante la tabla de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Tabla de verdad para la equivalencia

p	q	(p ⇒q)	(q ⇒p)	(p ⇒q) ∧ (q ⇒p) p⇔q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Una equivalencia es verdadera si las proposiciones simples que intervienen son ambas verdaderos o bien ambos falsos. En caso contrario la equivalencia es falsa.

Ejercicio: Dadas las siguientes proposiciones:

- p: 16 es múltiplo de 2 $\qquad v(p) = V$
- q: 2^2 no divide a 16 $\qquad v(q) = F$
- r: 16 no es un número primo $\qquad v(r) = V$
- s: $6 + 2 > 2^2$ $\qquad v(s) = V$

a) Escribir en lenguaje coloquial cada una de las siguientes proposiciones compuestas y analizar su valor de verdad

i. $\sim(p \vee \sim r) \Leftrightarrow s$

ii. $(p \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow q$

iii. $(q \wedge s) \vee (r \Rightarrow \sim p)$

iv. $r \wedge (\sim q \Leftrightarrow \sim s)$

i) $\underbrace{\underbrace{\sim\underbrace{(\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{\sim \underbrace{r}_{V}}_{F})}_{V}}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{s}_{V}}_{F}$

ii) $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{p}_{V} \Rightarrow \underbrace{\sim \underbrace{r}_{V}}_{F})}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{q}_{F}}_{V}$

iv) $\underbrace{\underbrace{r}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{q}_{F}}_{V} \Rightarrow \underbrace{\sim \underbrace{s}_{V}}_{F})}_{F}}_{F}$

Se pueden construir proposiciones compuestas de cualquier longitud a partir de proposiciones simples usando estos conectivos.

iii) $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{q}_{F} \wedge \underbrace{s}_{V})}_{F} \vee \underbrace{(\underbrace{r}_{V} \Rightarrow \underbrace{\sim \underbrace{p}_{V}}_{F})}_{F}}_{F}$

Tautologías (t)

Son formas proposicionales que toman el valor de verdad **Verdadero**, independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: Comprobar que $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ es una tautología

p	q	p ⇒q	(p ⇒q) ∧ p	[(p ⇒q) ∧ p] ⇒q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Contradicción (c)

Son formas proposicionales que toman el valor de verdad **Falso**, independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: La proposición $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow q]$ es una contradicción

p	q	p ∧q	(p ∧q)⇒q	~[(p ∧q)⇒q]
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Aquellas proposiciones compuestas cuya tabla de valores de verdad la conforman verdaderos y falsos, se llaman **contingencias**

Ejemplo: La Proposición $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

p	q	p ∧q	p ∨q	(p ∧q) ∨(p ∨q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

Implicaciones asociadas

Sea la implicación $p \Rightarrow q$, que llamaremos directa. En conexión con ella, se presentan otras tres, obtenidas por permutaciones o negaciones del antecedente y consecuente:

- $q \Rightarrow p$ llamada recíproca
- $\sim p \Rightarrow \sim q$ llamada contraria
- $\sim q \Rightarrow \sim p$ llamada contrarrecíproca

Ejercicio:

a) Comprobar que la implicación directa y la contrarrecíproca son equivalentes

p	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Implicaciones lógicas

1. Adición: $p \Rightarrow (p \vee q)$
2. Simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$
3. Modus ponens: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
4. Modus tollens: $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
5. Silogismo disyuntivo: $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
6. Silogismo hipotético: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
7. Absurdo: $(p \Rightarrow c) \Rightarrow \sim p$

Leyes Lógicas: EQUIVALENCIAS

1. Doble negación: $\sim \sim p \Leftrightarrow p$

2. Leyes conmutativas:
   i. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
   ii. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
   iii. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

3. Leyes asociativas:
   i. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
   ii. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

4.- Leyes distributivas:
   i. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
   ii. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5. Leyes de idempotencia:
   i. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
   ii. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

6.- Leyes de De Morgan:
   i. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
   ii. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

7.- Implicación: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

8. Contrarrecíproca:

   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

9. Leyes de identidad
   i. $(p \vee c) \Leftrightarrow p$
   ii. $(p \wedge c) \Leftrightarrow c$
   iii. $(p \vee t) \Leftrightarrow t$
   iv. $(p \wedge t) \Leftrightarrow p$

b) Demostrar que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. **Definición de la implicación**

p	q	~p	p ⇒ q	~ p ∨ q	(p ⇒ q) ⇔ (~ p ∨ q)
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

c) Demostrar que $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$. **Negación de la implicación**

p	q	~q	p ⇒ q	p ∧ ~q	~(p ⇒ q)	~(p ⇒ q) ⇔(p ∧ ~q)
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

d) Demostrar que $[(p \wedge q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$

$[(p \wedge q) \Rightarrow p] \overset{(1)}{\Leftrightarrow} [\sim (p \wedge q) \vee p] \overset{(2)}{\Leftrightarrow} [(\sim p \vee \sim q) \vee p] \Leftrightarrow$

$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} [(\sim p \vee p) \vee \sim q] \overset{(4)}{\Leftrightarrow} t \vee \sim q \overset{(5)}{\Leftrightarrow} t$

(1) Def. implicación

(2) De Morgan

(3) Asoc. y conmutativa

4) $(\sim p \vee p) \Leftrightarrow t$

5) Ley de identidad

e) Enumerar las leyes lógicas usadas

$[[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(1)} [[\sim (\sim p \wedge q) \vee (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(2)} [[\sim (\sim p \wedge q) \vee c] \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(3)}$

$\Leftrightarrow_{(3)} [\sim (\sim p \wedge q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(4)} [(\sim\sim p \vee \sim q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(5)} [(p \vee \sim q) \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(6)} [(\sim q \vee p) \wedge \sim q] \Leftrightarrow_{(7)}$

$\Leftrightarrow_{(7)} [(q \Rightarrow p) \wedge \sim q]$

(1) Def. implicación

(2) $(r \wedge \sim r) \Leftrightarrow c$

(3) Ley de identidad

(4) De Morgan

(5) Doble negación

(6) Conmutativa

(7) Def. de implicación

Ejercicios

a) Hallar los posibles valores de verdad de las proposiciones simples sabiendo que 1

$\sim[r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)] \wedge [(p \vee \sim m) \wedge \sim s]$ es verdadera

$\sim[r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)] \wedge [(p \vee \sim m) \wedge \sim s]$ es V, luego $\sim[r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)]$ es V y $[(p \vee \sim m) \wedge \sim s]$ es V. 2

1) $\sim[r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)]$ es V, luego $[r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)]$ es F y como es una implicación falsa tenemos que $\boxed{r \text{ es V}}$ y $(\sim p \Rightarrow q)$ es F. $(\sim p \Rightarrow q)$ es una implicación falsa, luego $\boxed{\sim p \text{ es V}}$ y $\boxed{q \text{ es F}}$

Luego tenemos $v(r) = V$, $v(\sim p) = V$, luego $v(p) = F$ y $v(q) = F$

2) $[(p \vee \sim m) \wedge \sim s]$ es V y como es una conjunción tenemos que $(p \vee \sim m)$ es V y $\sim s$ es V.

- $(p \vee \sim m)$ es V y p es F luego $\sim m$ es V, entonces m es F
- $\sim s$ es V luego s es F

En conclusión: $v(p) = F$ $\quad v(r) = V$ $\quad v(s) = F$

$v(q) = F$ $\quad v(m) = F$

b) Sabiendo que el valor de verdad de $(p \Longrightarrow q)$ es verdadero y r es falso, hallar si es posible, el valor de verdad de $(\sim q \wedge p) \Leftrightarrow [(r \Rightarrow q) \vee r]$.

Datos

$\sim(p \Rightarrow q) = V$

$\sim(r) = F$

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ Si $p \Rightarrow q$ es V entonces $\sim(p \Rightarrow q)$ es F
- $\underbrace{\sim(p \Rightarrow q)}_{F} \underset{\text{Def} \Rightarrow}{\Leftrightarrow} \sim(\sim p \vee q) \underset{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} (\sim\sim p \wedge \sim q) \underset{\text{doble neg}}{\Leftrightarrow} p \wedge \sim q \underset{\text{conmut.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\sim q \wedge p}_{F}$

$$\underbrace{\underbrace{(\sim q \wedge p)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{(r \Rightarrow q)}_{V} \vee \underbrace{r}_{F}]}_{V}}_{F}$$

c) Sabiendo que el valor de verdad de $p \Rightarrow \sim(\sim q \wedge \sim s)$ es falso, hallar si es posible, el valor de verdad de $(\sim p \wedge s) \Leftrightarrow [r \Rightarrow (\sim q \vee \sim u)]$.

Por dato $p \Rightarrow \sim(\sim q \wedge \sim s)$ es F y como es una implicación tenemos que $\boxed{p \text{ es } V}$ y $\sim(\sim q \wedge \sim s)$ es F.

- La negación $\sim(\sim q \wedge \sim s)$ es F entonces $\sim q \wedge \sim s$ es V
- $\sim q \wedge \sim s$ es V por ser una conjunción se tiene que $\sim q$ es V y $\sim s$ es V
- $\sim q$ es V entonces $\boxed{q \text{ es } F}$ y $\sim s$ es V entonces $\boxed{s \text{ es } F}$

Conclusión: $v(p) = V$, $v(q) = F$, $v(s) = F$

Vemos: $$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{p}_{V}}_{F} \wedge \underbrace{s}_{F})}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{[r \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{q}_{F}}_{V} \vee \sim u)}_{V}]}_{V}}_{F}$$

- En la disyunción si una de las prop. es V, la disyunción es V
- En la implicación si el consecuente es V la implicación es V
- Concluimos que el valor de verdad de la prop. dada es F

d) Sabiendo que el valor de verdad de $(\sim p \Rightarrow q)$ es falso y $\sim(m \vee \sim s)$ es verdadero, hallar si es posible, el valor de verdad de $(p \wedge m) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$.

- Por dato $\sim p \Rightarrow q$ es falso y como es una implicación tenemos que $\sim p$ es V y q es falso.
  Como $\sim p$ es V entonces p es F
- $\sim(m \vee \sim s)$ es V y como es una negación entonces $m \vee \sim s$ es F
- $(m \vee \sim s)$ es F, al ser una disyunción tenemos que m es F y $\sim s$ es F
- $\sim s$ es F entonces s es V

Conclusión: $v(p) = F$, $v(q) = F$, $v(m) = F$, $v(s) = V$

Veamos: $\underbrace{(\underbrace{p}_{F} \wedge \underbrace{m}_{F})}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{q}_{F}}_{V} \vee r)}_{V} \wedge \underbrace{s}_{V}]}_{V}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{F}$

- En la disyunción si una de las prop. es V, la disyunción es V
- Concluimos que la prop. dada es F.

Funciones proposicionales

Vimos antes que existen expresiones que dependen de una o más variables que no son proposiciones ya que no se les puede asignar un valor de verdad, pero si le damos "valores" a esas variables se transforman en proposiciones con su correspondiente valor de verdad.
Al conjunto de valores que toma la variable se le llama dominio de interpretación

Ejemplos
$x > 3,\qquad x + 2 < 5 \wedge 2x > 1$

A estas expresiones que dependen de una o más variables se les denomina **funciones proposicionales**

Ejemplo:
p(x): $x + 2 > 1 \ \wedge\ 2x \geq 1$

Según el universo que le asignemos a la variable x, esta función proposicional va a tomar un valor de verdad
Si $x \in \mathbb{N}$ tenemos que p(x) es verdadera

Cuantificadores

Cuantificador universal

$\forall x \in U: p(x)$ Leemos: para todo x perteneciente a U se verifica la proposición $p(x)$

Ejemplo:
Consideremos la proposición, "Todos los números naturales son positivos"

Más formalmente, podríamos escribir, "Para todo x natural, se verifica que x es positivo"

Si $p(x)$ indica "x es positivo", podríamos escribir: para todo x natural: $p(x)$.

Entonces en símbolos: ∀ ∈ ℕ: p(x)

Cuantificador existencial

$\exists x \in U \,/\, p(x)$ Se lee "Existe un (o para algún) x perteneciente a U tal que verifica la proposición $p(x)$"

Ejemplo:
"Existe un número primo x entero tal que x es impar"
se traduce en: $\exists x \in \mathbb{N} / \, p(x) \wedge q(x)$, donde $p(x)$ es "x es primo" y $q(x)$ es "x es impar".

Ejemplos:
Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $\forall x \in \mathbb{N}: x \geq 1$ es V

D/ Los números naturales tienen primer elemento que es 1, y todos los demás números naturales se obtienen sumando uno al anterior luego 1 es el menor de los nº naturales.
∴ todos los números naturales son mayores o iguales a 1.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 1$ es F

Contraejemplo: si $x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ tenemos que $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} \not\geq 1$

c) $\exists x \in \mathbb{Z}: x \geq 1$ es V

Existe $x = 2$, $2 \in \mathbb{Z}$ y $2 \geq 1$

d) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < -1$ es F

$\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < -1) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq -1$ es V

$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 0 \geq -1 \end{cases}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ luego $x^2 \geq -1$

Negación de los cuantificadores

Existe una importante conexión entre los dos cuantificadores (∀ x) y (∃ x). Se puede ver intuitivamente que:

$$\sim(\forall \in U: p(x)) \Leftrightarrow \exists \in U / \sim p(x)$$

$$\sim(\exists \in U / p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U : \sim p(x)$$

Ejemplo:

Negar la siguiente proposición: $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N}: [y \geq 4 \Rightarrow (xy \leq -6 \vee xy \geq 6)]$.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{N}: [y \geq 4 \Rightarrow (xy \leq -6 \vee xy \geq 6)])$$

$$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / \sim[y \geq 4 \Rightarrow (xy \leq -6 \vee xy \geq 6)]$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / \sim[\sim(y \geq 4) \vee (xy \leq -6 \vee xy \geq 6)]$$

$$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / [\sim\sim(y \geq 4) \wedge \sim(xy \leq -6 \vee xy \geq 6)]$$

$$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / [y \geq 4 \wedge \sim(xy \leq -6 \vee xy \geq 6)]$$

$$\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / [y \geq 4 \wedge (\sim(xy \leq -6) \wedge \sim[xy \geq 6])]$$

$$\overset{(6)}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N} / [y \geq 4 \wedge (xy > -6 \wedge xy < 6)]$$

(1) neg de cuantif.
(2) Def. implicación
(3) De Morgan
(4) Doble negación
(5) De Morgan
(6) negación de $\leq$, negación de $\geq$

Métodos de demostración

Recordemos que un Teorema es un enunciado verdadero, que es necesario demostrar. Consta de:

- Hipótesis: formada por proposiciones verdaderas, son los datos del teorema.
- Tesis: Proposición que hay que demostrar mediante un razonamiento lógico.

Veamos los métodos para demostrar un teorema:

1) Método Directo.

Es el que relaciona la hipótesis con la tesis mediante una implicación directa verdadera.
Partimos de la verdad de la hipótesis y a través de pasos lógicos correctos llegamos a la tesis. Esto es si la hipótesis es verdadera, y la implicación $H \Rightarrow T$ es verdadera, resulta, de la tabla de valores de verdad, que debe ser verdadera la tesis. Es decir: $H \Rightarrow T$

Ejemplo: Demostrar usando el método directo la siguiente proposición

Demostrar que *"Si x es múltiplo de 9 entonces $4x - 60$ es múltiplo de 12"*

H) x es múltiplo de 9

T) $4x - 60$ es múltiplo de 12

D/ Por H) x es múltiplo de 9 $\overset{(1)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} / x = 9k$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} / 4x = 4 \cdot 9k$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} / 4x = 36k$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} / 4x - 60 = 36k - 60$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} / 4x - 60 = 12(3k - 4)$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} \exists k' = 3k - 4 \in \mathbb{Z} / 4x - 60 = 12k'$

$\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $4x - 60$ es múltiplo de 12

$\therefore$ Si x es múltiplo de 9 entonces $4x - 60$ es múltiplo de 12

(1) Def de múltiplo

(2) Prop. uniforme del producto

(3) resolución prod.

(4) P. U. de la suma

(5) Factor común

(6) El prod y la resta es cerrado en $\mathbb{Z}$

(7) Def. de múltiplo

2) Métodos Indirectos.

A veces resulta más fácil vincular la hipótesis con la tesis indirectamente.

a) Método del Contrarrecíproco:

Partimos de la negación de la tesis a través de pasos lógicos correctos, llegamos a la negación de la hipótesis. Esto es: $\sim T \Rightarrow \sim H$.

Ejemplo:

Demostrar que "Si x + y es impar entonces x o y es impar"

H) $x + y$ es impar

T) x es impar o y es impar

D/ método contrarrecíproco

$\sim$T) x es par e y es par

$\sim$H) $x + y$ es par

Dem: Por $\sim$T) x es par e y es par $\overset{(1)}{\Longrightarrow} x = 2k \wedge y = 2k'$, $k, k' \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} x \cdot y = 2k \cdot 2k'$, $k, k' \in \mathbb{Z} \overset{(3)}{\Longrightarrow} xy = 2(k \cdot 2k')$, $k, k' \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} xy = 2k''$, $k'' = k \cdot 2k'$, $k'' \in \mathbb{Z} \overset{(5)}{\Longrightarrow} xy$ es par

$\therefore$ Si $x+y$ es impar entonces x o y es impar

(1) Def de nº par

(2) multiplicamos miembro a miembro

(3) Asoc.

(4) Ley de cierre

(5) Def de nº par

b) Método por Reducción al Absurdo:

Partimos de la negación de la tesis y usando la hipótesis llegamos a un absurdo.
Esto es: $\sim T \wedge H \Rightarrow$ Absurdo.

Ejemplo:
Demostrar que "Si a^2 es múltiplo de 2 entonces a es múltiplo de 2"

H) a^2 es múltiplo de 2
T) a es múltiplo de 2
Método reducción al absurdo
~T) a no es múltiplo de 2
H) a^2 es múltiplo de 2

(1) Def de múltiplo
(2) reemplazo a
(3) resolver cuadrado de binomio
(4) ?.U
(5) F.C
(6) Ley de cierre
(7) Def de nº par

D/ De ~T ∧ H tenemos que a no es múltiplo de 2 y a^2 es múltiplo de 2 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $a = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \wedge a^2 = 2t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} (2k+1)^2 = 2t, k, t \in \mathbb{Z} \overset{(3)}{\Rightarrow} 4k^2+4k+1 = 2t, k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} 1 = -4k^2-4k+2t, k, t \in \mathbb{Z} \overset{(5)}{\Rightarrow} 1 = 2(-2k^2-2k+t), k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} 1 = 2k', k' \in \mathbb{Z}, k' = -2k^2-2k+t \Rightarrow$ 1 es par Abs!

$\therefore$ Si a^2 es múltiplo de 2 entonces a es múltiplo de 2