UNIDAD 4

NÚMEROS NATURALES
INDUCCIÓN

SUMATORIA

Sumar los seis primeros números impares: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

Sumar los 40 primeros números impares : $\overbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9} + \cdots + 41 + \cdots + 51 + \cdots + 79$

$2k+1$

$$\sum_{i=0}^{39} 2i + 1$$

Para evitar ambigüedades vamos a presentar un símbolo auxiliar, que llamamos sumatoria

que es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego $\sum$

$$\sum_{i=h}^{n} a_i$$

Límite superior

Término general

Limite inferior (Contador)

Ejemplos: Desarrollar las siguientes sumatoria

$$\sum_{i=1}^{5}(i-1) = \underbrace{1-1}_{i=1} + \underbrace{2-1}_{i=2} + \underbrace{3-1}_{i=3} + \underbrace{4-1}_{i=4} + \underbrace{5-1}_{i=5} = 1+2+3+4 = 10$$

$$\sum_{i=0}^{6} i^2 = \underbrace{0^2}_{i=0} + \underbrace{1^2}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{3^2}_{i=3} + \underbrace{4^2}_{i=4} + \underbrace{5^2}_{i=5} + \underbrace{6^2}_{i=6}$$

$$= 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

$$= 91$$

Ejemplos

$$\sum_{i=1}^{7} i-3 = \underbrace{1}_{i=1} + 2 + \cancel{3} + 4 + 5 + 6 + 7 - \cancel{3} = 25$$

$$\sum_{i=1}^{6} 2t = \underbrace{2t}_{i=1} + \underbrace{2t}_{i=2} + 2t + 2t + 2t + 2t = 6 \cdot 2t = 12t$$

$$\sum_{i=1}^{5}(3i-2) = \underbrace{3\cdot 1-2} + \underbrace{3\cdot 2-2} + \underbrace{3\cdot 3-2} + \underbrace{3\cdot 4-2} + \underbrace{3\cdot 5-2}$$

$$= 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4 + 3\cdot 5 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2$$

$$= 3\,\underbrace{(1+2+3+4+5)} - 2 - 2 - 2 - 2 - 2$$

$$\sum_{i=1}^{5}(3i-2) = 3\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} -2$$

$$\sum_{i=6}^{15} 2i = \underbrace{2\cdot 6}_{i=6} + 2\cdot 7 + 2\cdot 8 + 2\cdot 9 + 2\cdot 10 + 2\cdot 11 + 2\cdot 12 + 2\cdot 13 + 2\cdot 14 + 2\cdot 15$$

$$2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 = \sum_{i=1}^{5} 2i$$

$$\sum_{i=1}^{15} 2i = \sum_{i=1}^{5} 2i + \sum_{i=6}^{15} 2i \Longrightarrow \sum_{i=6}^{15} 2i = \sum_{i=1}^{15} 2i - \sum_{i=1}^{5} 2i$$

PROPIEDADES DE SUMATORIA

Sean a_i y b_i expresiones reales y sea $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$1)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3) $\sum_{i=1}^{n} a = na$

Ejercicios: Expresar utilizando el símbolo de sumatoria

$a)\ 2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6 =$

$$\sum_{i=2}^{6} 2\cdot i$$

$b)\ -1+4-7+10-13+16 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i}(3\cdot i-2)$

$$\sum_{i=0}^{5} (-1)^{(i+1)}(3i+1)$$

$c)\ 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \quad = \sum_{i=1}^{n} 2^i$

$$\begin{array}{c} 3^1 \quad 3^2 \quad 3^3 \\ d)\ \frac{3}{10}, \frac{9}{100}, \frac{81}{10000}, \ldots. \\ 10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \end{array} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{10^i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{10}\right)^i$$

PRODUCTORIA

$\prod$ Símbolo que se utiliza para abreviar la notación de un producto cuyos factores admiten cierta ley de formación

Ejemplo: Desarrollar la siguiente productoria y dar el resultado

1) $\prod_{i=1}^{4} 2i = 2\cdot 1 \cdot 2\cdot 2 \cdot 2\cdot 3 \cdot 2\cdot 4 = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \cdot 16$

$= 2^4 \prod_{i=1}^{4} i$

2) $\prod_{i=1}^{5} 2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5$

Ejemplo: Escribir con notación de productoria

1) $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 27) \cdot (2 \cdot 81)$ $= 2 \cdot 3^1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3^4$

$$= \prod_{i=1}^{4} 2 \cdot 3^i$$

2) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = \prod_{i=0}^{4} 2^i$

PROPIEDADES DE PRODUCTORIA

Si a_i y b_i son expresiones reales y sea k una constante real entonces

1) $\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

2) $\prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

3) $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$

MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Llamaremos números naturales al menor subconjunto A de $\mathbb{R}$ que verifica:
$1 \in A$ y si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$.
Al conjunto de los números naturales lo notaremos por $\mathbb{N}$.
De esta manera, tenemos que N= {1, 2, 3, . . .}.

Supongamos que tenemos una función proposicional cuantificada universalmente que depende de un número natural n, si dicha proposición es falsa, podemos justificar este hecho, mostrando que existe un valor $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual no se verifica la proposición.

Ejemplo: consideremos el siguiente enunciado

$\forall n \in \mathbb{N}: (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)\ es\ múltiplo\ de\ 5$

$n=1 \Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ y 15 es múltiplo de 5

$n=2 \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ y 105 " de 5

$n=3 \Rightarrow 5 \cdot 7 \cdot 9 = \_\_\_$ y $\_\_\_$ es múltiplo de 5

$n=4 \Rightarrow 7 \cdot 9 \cdot 11 = 693$ y 693 no es múltiplo de 5

por lo tanto $\exists\, n=4$ tal que $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ no es múltiplo de 5

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 7 \\ \hline 693 \end{array}$$

Supongamos ahora que tenemos una función proposicional cuantificada universalmente que depende de un número natural n y comprobamos que dicha proposición es verdadera para una cierta cantidad de números naturales.
¿Cómo podríamos probar que vale para todo $n \in \mathbb{N}$?

Teorema: Si $p(n)$ es una proposición relativa al número natural n y verifica que

1. $p(1)$ es verdadera
2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, si $p(k)$ es verdadera entonces $p(k+1)$ es verdadera.

Entonces $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$$p(n): n^2 + n \text{ es multiplo de } 2\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Paso 1) Dpq $P(1)$ es V es decir: Dpq $P(1)$: 1^2+1 es múltiplo de 2

$1^2+1 = 1+1 = 2$ y 2 es múltiplo de 2 ya que $\exists\ 1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$2 = 2 \cdot 1$ $\therefore P(1)$ es V

Paso 2) Sup que $P(K)$ es V dpq $P(K+1)$ es V

HI) $P(K)$: K^2+K es múltiplo de 2, es decir $P(K)$: $\boxed{K^2+K = 2t, t \in \mathbb{Z}}$

T) $P(K+1)$: $(K+1)^2+K+1$ es múltiplo de 2, es decir $P(K+1)$: $(K+1)^2+K+1 = 2h, h \in \mathbb{Z}$

D/ $(K+1)^2+K+1 = K^2+2K+1+K+1 = \underbrace{K^2+K} + 2K+2 = 2t+2K+2, t \in \mathbb{Z}$

$= 2(t+K+1) = 2h, h \in \mathbb{Z}, h = t+K+1$

luego $(K+1)^2+K+1 = 2h, h \in \mathbb{Z}$, ent. $(K+1)^2+K+1$ es múltiplo de 2

luego $P(K) \Rightarrow P(K+1)$ es V

$\therefore P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1(2n+7)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Dpq $P(1)$ es V, $P(1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i(i+2) = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6}$ $\quad n=1$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i(i+2) = 1(1+2) = 1\cdot 3 = 3$
- $\displaystyle\frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} = \frac{2\cdot 9}{6} = \frac{18}{6} = 3$

son iguales $\therefore P(1)$ es V

2) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es V, Sup $P(k)$ es V dpq $P(k+1)$ es V

HI) $P(k)$: $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i(i+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}}$

T) $P(k+1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2) = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2) = \underbrace{1(1+2)+2(2+2)+\dots+k(k+2)}+(k+1)(k+3)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} i(i+2) + (k+1)(k+3)$$

$$\overset{HI}{=} \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)(k+3)}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+7)+6(k+3)]}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6k+18)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+13k+18)}{6}$$

$$k_1, k_2 = \frac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{4}$$

$$= \frac{-13 \pm 5}{4}$$

$$k_1 = -2$$

$$k_2 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\,2\,(k+2)\left(k+\frac{9}{2}\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

$\therefore P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es V

De 1), 2) $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1) Dpq P(1) es V, es decir dpq: $P(1): \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1}$ es V

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

son iguales

$\therefore P(1)$ es V

2) Dpq $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es V

HI) $P(k): \boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}}$

T) $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$

D/ $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{HI}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$\therefore P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es V

$\therefore P(n)$ es V, $\forall\, n \in \mathbb{N}$