Conjuntos

Un conjunto puede ser visto como una colección de objetos. A los objetos que forman parte del conjunto los denominaremos **elementos** del conjunto.

Obs. • En Teoría de Conjuntos la noción de elemeto y conjunto no está definida, son objetos primitivos.

• En general notaremos:

- a los conjuntos con letras mayúsculas: A, B, C, etc.

- a los elementos de un conjunto con letras minúsculas: a, b, c, etc.

Si a es un elemento del conjunto A, diremos que a **pertenece** a A y escribimos $a \in A$.

Si a **no** es un elemento del conjunto A, diremos que a **no pertenece** a A y escribimos $a \notin A$.

Obs. $\sim (a \in A) \quad \Leftrightarrow \quad a \notin A$.

Formas de definir un conjunto:

- Por extensión: se nombran uno por uno los elementos del conjunto y se los encierra entre llaves. No importa el orden en que se los nombra.

Ejemplo: $A = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ ⬅ *A tiene 7 elementos*

$B = \{2, -2\}$ ⬅ *B tiene 2 elementos*

- Por comprensión: se nombran la o las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto. $A = \{x : P(x)\}$.

$$A = \{x : \text{ x es una nota musical}\}$$

$$C = \{x : x \text{ es par y } x > 0\}$$ ⬅ *C tiene infinitos elementos.*

$$= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par }\}$$

Tenemos:

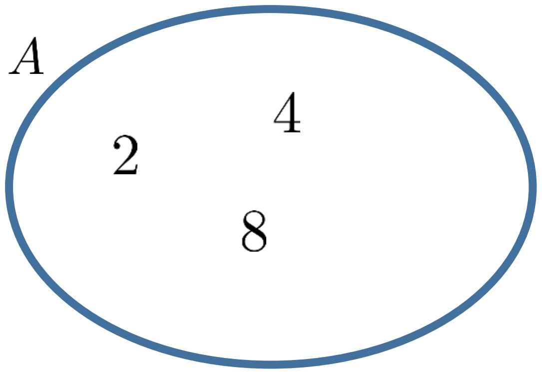
$$re \in A \qquad\qquad 10004 \in C$$

elemento *conjunto*

$$-28 \notin C$$

Se pueden utilizar diagramas de Venn para representar a conjuntos.

Ejemplo:



$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 8\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2^n, n \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq n \leq 3\} \end{aligned}$$

<u>Conjuntos especiales:</u>.

- **Conjunto vacío:.** Aquel que no tiene elementos. Simbólicamente: $\emptyset$ ó $\{\}$

  Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset$ **Obs:** $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

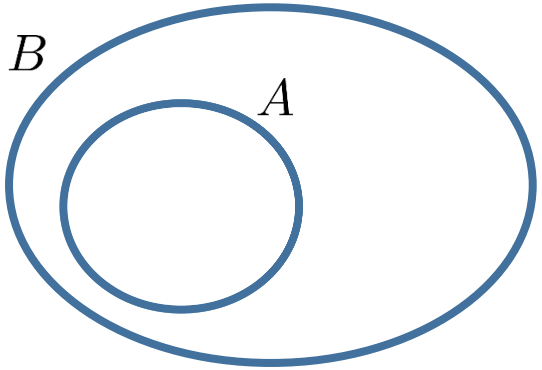
- **Conjunto universal:** Está formado por todos los eltos. que intervienen en el tema en cuestión.

  Simbólicamente: $\mathcal{U}$

Relaciones entre conjuntos:

Def. Dados don conjuntos A y B diremos que A está **incluido** en B si todo elemento de A lo es también de B. Escribimos: $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$



Obs. • Si $A \subseteq B$ también diremos que A es subconjunto de B ó B incluye a A.

• $A \nsubseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \sim (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x / \sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \quad \exists x : x \in A \wedge x \notin B$

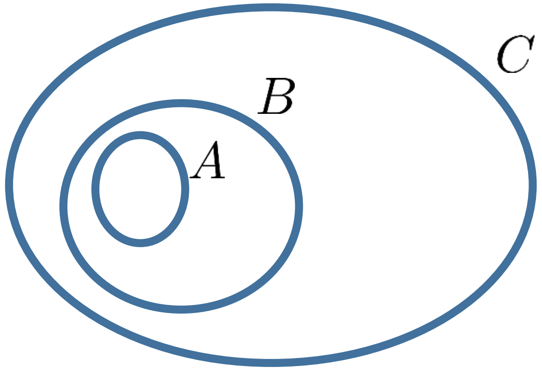
Diremos que dos conjuntos A y B son iguales y escribimos $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Propiedades de la inclusión: Cualquiera sean los conjuntos A, B y C se verifican:

1) $\emptyset \subseteq A$.

2) $A \subseteq A$.

3) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

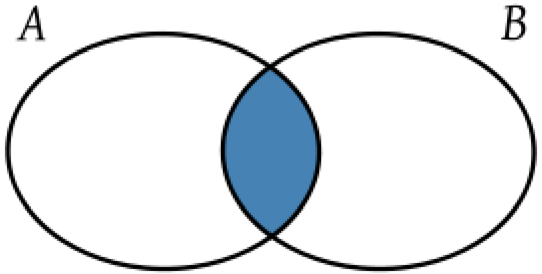


Operaciones entre conjuntos:

Def. Dados dos conjuntos A y B llamaremos:

1) Intersección de A y B: al conjunto formado por los elementos comunes de A y B.

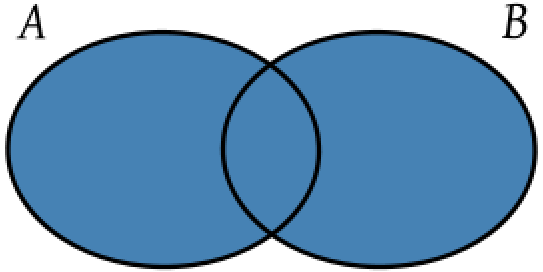
$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}}$$



Gráficamente

2) Unión de A y B: al conjunto formado por los elementos que están en A ó en B.

$$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}}$$



Gráficamente

Obs. • $x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B)$

• $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

Obs. • $x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; \sim (x \in A \cap B) \;\Leftrightarrow\; \sim (x \in A \wedge x \in B) \;\Leftrightarrow\; x \notin A \vee x \notin B$

• $x \notin A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \notin A \wedge x \notin B$

Obs. Si $A \cap B = \emptyset$, es decir A y B no tienen elementos en común diremos que A y B son **disjuntos**.

Propiedades de la unión e intersección:

1. Conmutativas:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

2. Asociativas:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Distributivas:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Leyes de absorción:

a) $A \cup (A \cap B) = A$

b) $A \cap (A \cup B) = A$

5. Leyes de idempotencia:

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

6. Leyes de identidad:

a) $A \cup \varnothing = A$

b) $A \cup U = U$

c) $A \cap \varnothing = \varnothing$

d) $A \cap U = A$

Teorema. Dados dos conjuntos A y B:

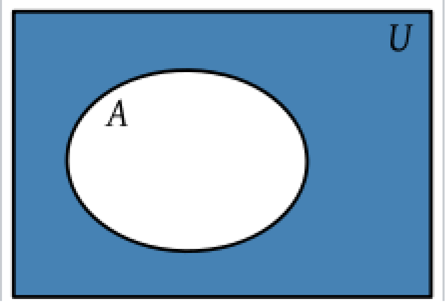
$$1)\ A \subseteq B \text{ si y sólo si } \quad A \cap B = A.$$

$$1)\ A \subseteq B \text{ si y sólo si } \quad A \cup B = B.$$

3) Complemento de A:

llamaremos complemento de A al conjunto formado por los elementos que están en el el conjunto universal $\mathcal{U}$ pero que no están en A.

$$\boxed{A' = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}}$$



Gráficamente

Obs. También se puede notar por $\overline{A}$ ó A^c.

Propiedades del complemento:

7. Complementación doble

$(A')' = A$

8. a) $A \cup A' = U$

b) $A \cap A' = \varnothing$

9. a) $U' = \varnothing$

b) $\varnothing' = U$

10. Leyes de De Morgan:

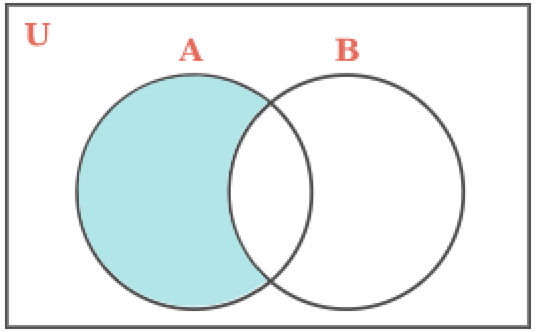
a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3) Diferencia de conjuntos:

llamaremos diferencia entre los conjuntos A y B (en ese orden) al conjunto formado por todoso los elementos que están en A pero no en B.

$$\boxed{A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}}$$



Gráficamente

Cardinal de un conjunto:

Sea A un conjunto finito. Llamaremos **cardinal** de A y lo notaremos por $|A|$ al número de elementos del conjunto A.

- Si A tiene n elementos, escribimos $|A| = n$
- Si $A = \emptyset$ entonces $|A| = 0$.
- También se puede notar al cardinal de A por $\#A$.

Cardinal de la unión de 2 conjuntos.

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$