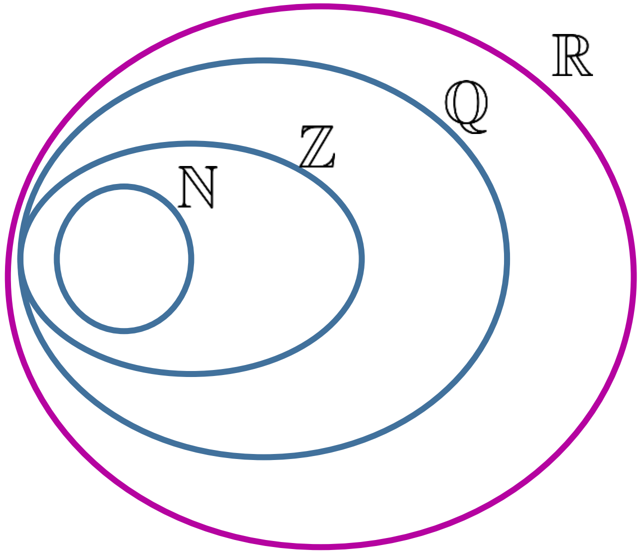
Números reales



Llamaremos **cuerpo ordenado real** a un sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ formado por:

- Un conjunto $\mathbb{R}$ cuyos elementos llamaremos *números reales*.
- Dos operaciones binarias sobre $\mathbb{R}$ llamadas *suma* $(+)$ y *producto* $(\cdot)$
- Una relación binaria sobre $\mathbb{R}$ llamada *menor* $(<)$

de forma tal que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifiquen las siguientes propiedades:

$$\left.\begin{array}{l}
(S_1)\ a+(b+c)=(a+b)+c \\
(S_2)\ a+b=b+a \\
(S_3)\ \exists\ 0\in\mathbb{R}\ \forall a\in\mathbb{R}: 0+a=a \\
(S_4)\ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists b\in\mathbb{R}:\ \ a+b=0
\end{array}\right\}\ \textit{Propiedades de la suma}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(M_1)\ a.(b.c)=(a.b).c \\
(M_2)\ a.b=b.a \\
(M_3)\ \exists\ 1\in\mathbb{R},\ 1\neq 0\ \forall a\in\mathbb{R}: 1.a=a \\
(M_4)\ \forall\ a\in\mathbb{R}-\{0\}\ \exists b\in\mathbb{R}:\ \ a.b=1
\end{array}\right\}\ \textit{Propiedades del producto}$$

(D) $a.(b+c)=a.b+a.c$

(E_1) Dados $a,b\in\mathbb{R}$ vale una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$(i)\ a=b \qquad (ii)\ a<b \qquad (iii)\ b<a$$

$$\left.\begin{array}{l}
(E_2)\ \text{Si } a<b \text{ y } b<c \text{ entonces } a<c \\
(E_3)\ \text{Si } a<b \text{ entonces } a+c<b+c \\
\boxed{(E_4)\ \text{Si } a<b \text{ y } 0<c \text{ entonces } a.c<b.c}
\end{array}\right\}\ \textit{Propiedades de la desigualdad}$$

Importante!!

Algunas observaciones a tener en cuenta:

(1) $a \leq b$ se lee *"a" es menor o igual a "b"* y significa que vale $a = b$ ó $a < b$.

$$\boxed{a \leq b \iff (a = b \vee a < b)}$$

(2) $a \leq x \leq b \iff (a \leq x \wedge x \leq y)$

(3) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

(4) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, para todo $a \neq 0$.

(5) $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$, con $b \neq 0$

(6) No está definido dividir por 0.

Propiedades útiles para resolver ecuaciones:

Todo $a, b \in \mathbb{R}$ verifica:

(1) $a.b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ ó $b = 0.$

(2) $\frac{a}{b} = 0, b \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$

Recordemos y no olvidemos!

(1) $a^2 - b^2 \quad = (a-b).(a+b)$

(2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(3) La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

puede resolverse utilizando la fórmula de Bhaskara.

puede reescribirse como $a(x - c_1)(x - c_2) = 0$ donde c_1 y c_2 son las soluciones de dicha ecuación.

Propiedades útiles para resolver inecuaciones:

Todo $a, b \in \mathbb{R}$ verifica:

(1) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a.c > b.c$.

$$(2)\ a.b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a > 0 \wedge b > 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge b < 0) \end{array}\right.$$

$$(3)\ a.b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a > 0 \wedge b < 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge b > 0) \end{array}\right.$$

$$(3)\ \tfrac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a > 0 \wedge b > 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge b < 0) \end{array}\right.$$

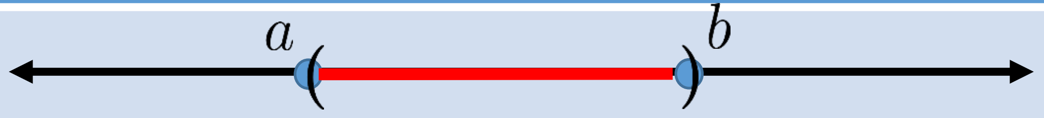
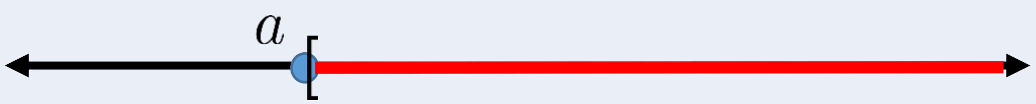
$$(4)\ \tfrac{a}{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a > 0 \wedge b < 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge b > 0) \end{array}\right.$$

Obs. Vale también para $\leq$ y $\geq$.
En el caso del cociente:

$$(3)\ \tfrac{a}{b} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a \geq 0 \wedge b > 0) \\ \vee \\ (a \leq 0 \wedge b < 0) \end{array}\right.$$

Intervalos de números reales:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$llamaremos **intervalos** a los siguientes conjuntos:

Intervalo	Representación
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
$[-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
$[-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	

A tener en cuenta:

- $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$

- $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$, n par $\quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$

- $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$, n impar $\quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

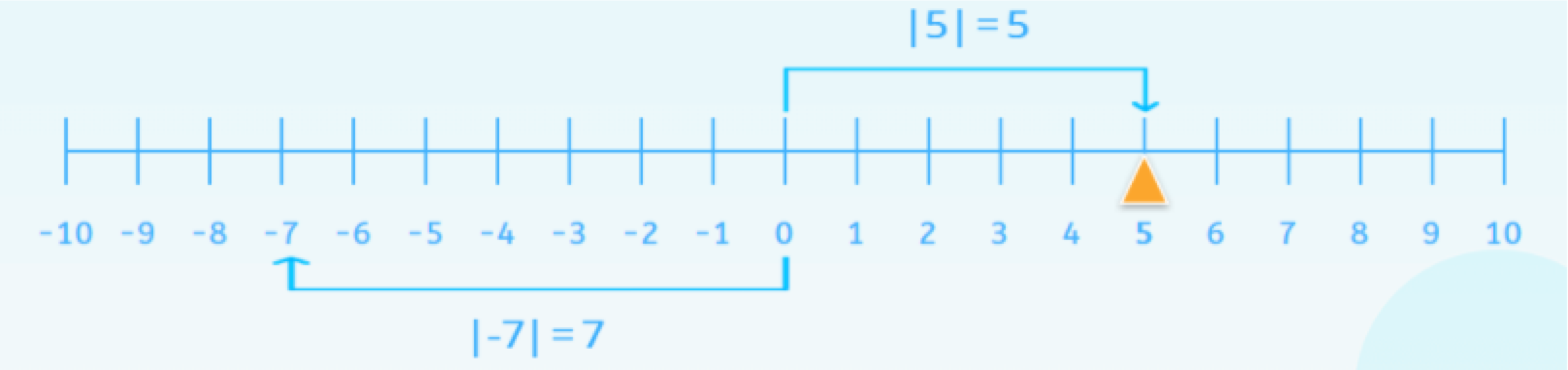
Valor Absoluto:

Def. El **valor absoluto** de un número real x se nota por $|x|$ y se define como:

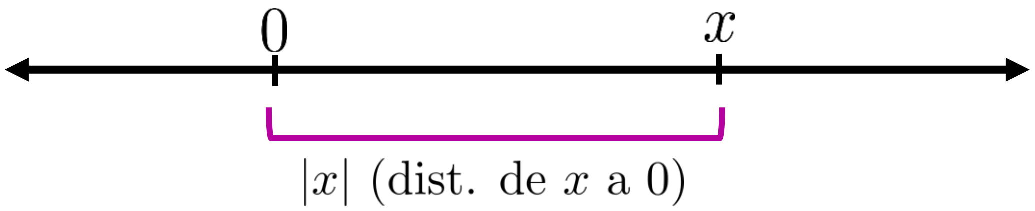
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Ejemplos:

$|5| = 5$ $\qquad$ $|-7| = -(-7) = 7$ $\qquad$ $|0| = 0$ $\qquad$ $|2-\pi| = \pi - 2$

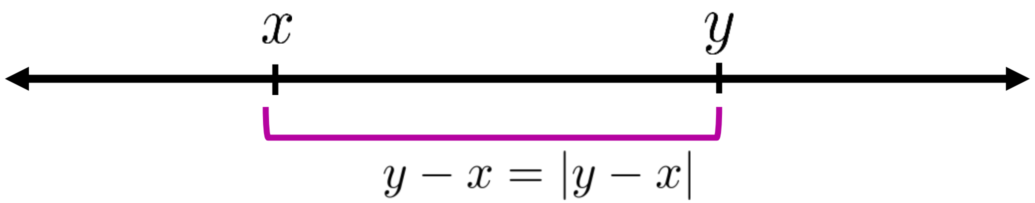


Obs. • $|x|$ se puede interpretar como la distancia del número x al 0.

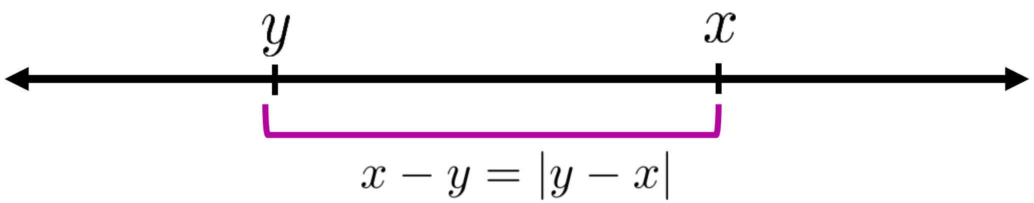


• $|x-y|$ se puede interpretar como la distancia del número x al núemro y.

– Supongamos $y > x \quad \Rightarrow \quad y - x > 0 \quad \Rightarrow \quad |y-x| = y - x$.



– Supongamos $y < x \quad \Rightarrow \quad y - x < 0 \quad \Rightarrow \quad |y-x| = -(y-x) = x - y$



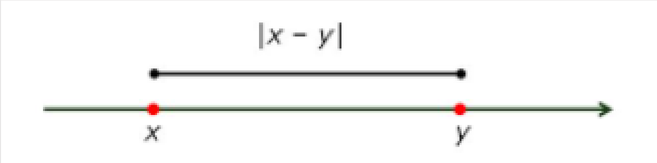
Propiedades básicas de valor absoluto:

(1) $|x| \geq 0,$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(2) $|x| = |-x|.$

(3) $|x - y| = |y - x|.$



(4) $-|x| \leq x \leq |x|.$

(5) $|x.y| = |x|.|y|.$

(6) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$

Propiedades útiles para resolver ecuaciones e inecuaciones:

Si $a > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$ entonces valen:

(1) $|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a \vee x = -a$

(2) $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a.$ (También vale para $\leq$)

(3) $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x > a \vee x < -a.$ (También vale para $\geq$)

(4) $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \vee x = -y.$

(5) $\sqrt{x^2} = |x|.$

Más propiedades:

(1) $|x|^2 = x^2 = |x|^2.$

(2) $|x + y| \leq |x| + |y|.$ (Decigualdad triangular)

En gral: $|x + y| \neq |x| + |y|.$ **Importante!!**

Interpretación geométrica del valor absoluto:

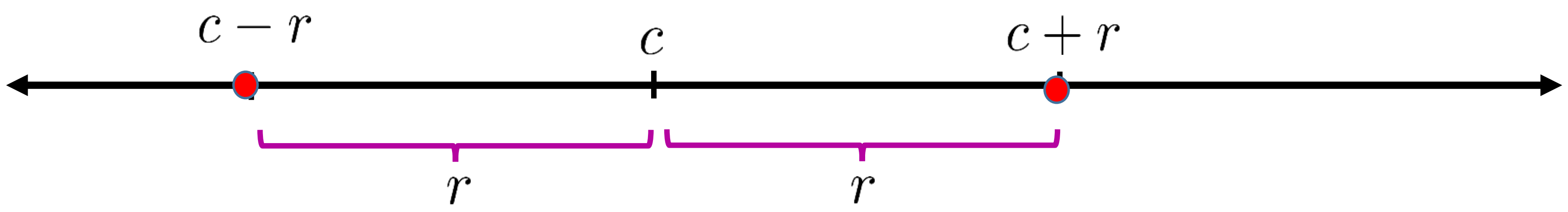
Recordemos: $|x-y| = d(x,y)$ (distancia entre x e y)

- Luego, hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\underbrace{|x-c|}_{\text{(distancia de } x \text{ a } c\text{)}} = r \qquad \text{donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } r \geq 0,$$

se corresponde con hallar **todos** los x cuya distnaica a c es **igual** a r.

Gráficamente:



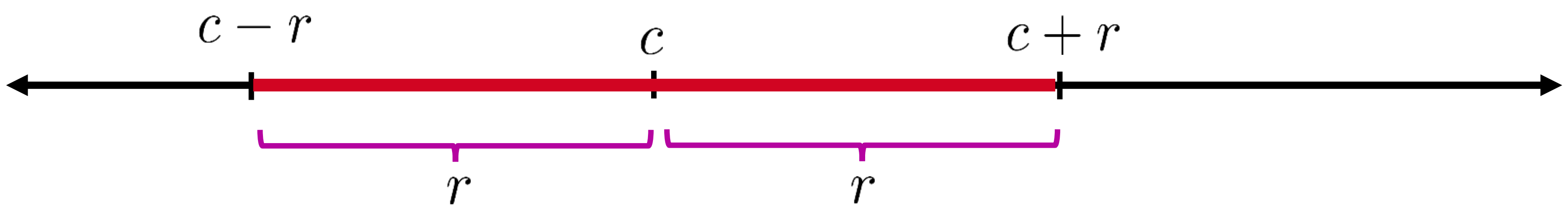
Solución: $\{c-r, c+r\}$

- Luego, hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\underbrace{|x - c|}_{\text{(distancia de } x \text{ a } c)} < r \qquad \text{donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } r \geq 0,$$

se corresponde con hallar **todos** los x cuya distancia a c es **menor** a r.

Gráficamente:



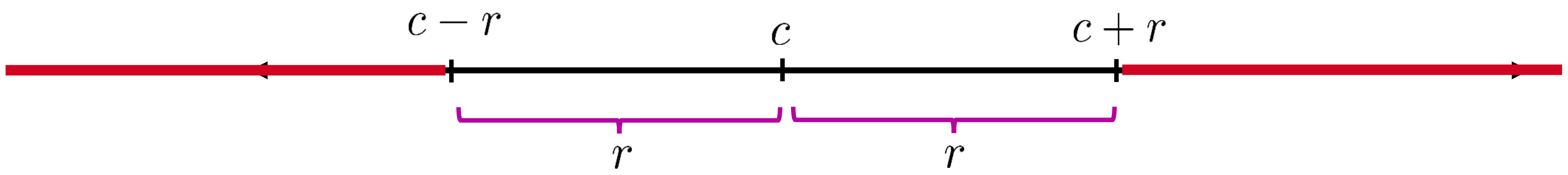
Solución: $x \in (c - r, c + r)$

- Luego, hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\underbrace{|x-c|}_{\text{(distancia de } x \text{ a } c\text{)}} > r \qquad \text{donde } c \in \mathbb{R} \text{ y } r \geq 0,$$

se corresponde con hallar **todos** los x cuya distancia a c es **mayor** a r.

Gráficamente:



Solución: $x \in (-\infty,\ c-r) \cup (c+r,\ +\infty)$