Universidad Nacional del Comahue
Facultad de Economía y Administración
Departamento de Matemática

TRABAJO PRÁCTICO N°4 NÚMEROS NATURALES
PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

1. a) Desarrollar las siguientes sumatorias o productorias, según sea el caso y calcular el resultado.

$i)\ \sum_{i=1}^{6}(i+1)$

$ii)\ \prod_{i=1}^{6} 2$

$iii)\ \sum_{i=1}^{9}(-1)^{i+1}\left(\frac{2i+1}{i+2}\right)$

$iv)\ \prod_{a=0}^{5}(a-1)^2$

$v)\ \sum_{i=1}^{9} 2t$

$vi)\ \sum_{t=1}^{9} 2t-1$

b) Expresar utilizando el símbolo de sumatoria o productoria según corresponda.

$i)\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15$

$ii)\ a_{r+1}+a_{r+2}+a_{r+3}+a_{r+4}+a_{r+5}+a_{r+6}+a_{r+7}$

$iii)\ -1+9-25+49-\cdots+225$

$iv)\ 2-2^3+2^5-2^7+2^9-\cdots+2^{217}-2^{219}+2^{221}$

2. Demostrar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$a)\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$b)\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-3^{i-1}\right)=\frac{n+1-3^n}{2}$

$c)\ \sum_{i=1}^{n} i\cdot 3^{(i-1)}=\frac{1+(2n-1)\cdot 3^n}{4}$

$d)\ \sum_{i=1}^{n}(5\cdot i-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$

$e)\ \sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$f)\ \sum_{t=0}^{n} 2^t=2^{n+1}-1$

$g)\ \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\ \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$

3. Teniendo en cuenta las siguientes igualdades inducir la ley general, expresar utilizando Σ y demostrar por inducción

i.
$$7 = \frac{7(7-1)}{6}$$
$$7 + 7^2 = \frac{7(7^2-1)}{6}$$
$$7 + 7^2 + 7^3 = \frac{7(7^3-1)}{6}$$
$$\vdots$$

iii.
$$1 = \frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2}$$
$$1 + 4 = \frac{2\cdot(3\cdot 2-1)}{2}$$
$$1 + 4 + 7 = \frac{3\cdot(3\cdot 3-1)}{2}$$
$$\vdots$$

ii.
$$2 = 3 - 1$$
$$2 + 6 = 3^2 - 1$$
$$2 + 6 + 18 = 3^3 - 1$$
$$2 + 6 + 18 + 54 = 3^4 - 1$$
$$\vdots$$

iv.
$$(-1)^1 = \frac{(-1)^1-1}{2}$$
$$(-1)^1 + (-1)^2 = \frac{(-1)^2-1}{2}$$
$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = \frac{(-1)^3-1}{2}$$
$$\vdots$$

4. Utilizando el inciso del ejercicio 2 que corresponda en cada caso:
   a) Determinar si:
$$\sum_{i=1}^{5}\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}i(i+1)\right)+2\right] = 115$$
   b) Dejar expresado, de la forma más reducida posible el resultado de:
$$\sum_{i=20}^{40} 4\cdot\left(\frac{1}{2}-3^{i-1}\right)-2$$
   c) Encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que:
$$\sum_{i=1}^{n}(5\cdot i-3) = 297$$

5. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar su respuesta.

$a)$ $\sum_{i=1}^{n}(i+3) = n^3+2$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$

$b)$ Los tres primeros y los tres últimos términos de la sumatoria $\sum_{i=3}^{120}(-1)^{i-1}\frac{2^{(i-1)}}{3^{(i+1)}}$

son: $\frac{4}{81}-\frac{8}{243}+\frac{16}{3^6}-\cdots-\frac{2^{117}}{3^{119}}+\frac{2^{118}}{3^{120}}-\frac{2^{119}}{3^{121}}$

$c)$ El resultado de $\prod_{j=1}^{5} a\cdot\prod_{i=1}^{6} 2\cdot a$ es $2^6\cdot a^{11}$