UNIDAD 3

´NÚMEROS REALES

NÚMEROS REALES

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es el cuerpo de los números reales

- $\mathbb{R}$ Es un conjunto de elementos que se denominan **números reales**

- (Op1) Una operación binaria "+" llamada suma, se nota "a + b" y se lee "a más b"

  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b \in \mathbb{R}$

- (Op2) Una operación binaria " ·" denominada producto, se nota "a · b" y se lee "a por b"

  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b \in \mathbb{R}$

LA SUMA Y EL PRODUCTO DE NÚMEROS REALES SATISFACEN LOS SIGUIENTES AXIOMAS

(S1) Ley asociativa de la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$

(S2) Ley conmutativa de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$

(S3) Existencia de elemento neutro para la suma:
$\exists\, 0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$

(S4) Existencia de opuesto aditivo o simétrico:
$\forall a \in \mathbb{R}: \exists\, b \in \mathbb{R} / a + b = b + a = 0$

(M1) Ley asociativa del producto: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(M2) Ley conmutativa del producto: $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a$

(M3) Existencia de elemento neutro para el producto:
$\exists\, 1 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(M4) Existencia de inverso multiplicativo: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \exists\, c \in \mathbb{R} / a \cdot c = c \cdot a = 1$

(D) Ley distributiva del producto respecto de la suma:
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Notaciones:

- El inverso aditivo del elemento a se nota con $-a$, entonces

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : \exists - a \in \mathbb{R} / a + (-a) = (-a) + a = 0$$

- Si $a \neq 0$ entonces el inverso multiplicativo del elementos a se denota por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, es decir,

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, a \neq 0\, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

- Para representar al elemento $a + (-b)$ escribiremos $a - b$, es decir,

$$a + (-b) = a - b$$

- Si $b \neq 0$ entonces al elemento $a \cdot b^{-1}$ lo notaremos $\frac{a}{b}$, esto es,

$$a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos: Resolver los ejercicios que se dan a continuación aplicando la propiedad distributiva

1) $x(2y - z + 1) = x \cdot 2y - x \cdot z + x \cdot 1 = 2xy - xz + x$

2) $4x - 3x = x(4 - 3) = x \cdot 1 = x$

$= x$

3) $-(3x + 2) = -3x - 2$

PROPIEDADES

U1) Uniformidad de la suma: Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

U2) Uniformidad del producto: Si $a = b$ entonces $ac = bc$

Estas propiedades se justifican a partir de la definición de operación binaria

A partir de estos axiomas y propiedades se pueden deducir las siguientes propiedades:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

1) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (Propiedad cancelativa de la suma)

2) $-(-a) = a$

3) El neutro de la suma es único

4) El opuesto aditivo de un número es único

5) El neutro del producto es único

6) El inverso multiplicativo de un elemento no nulo es único

7) $((a^{-1})^{-1} = a, si\ a \neq 0$

8) Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$

Proposición:

Sean $a, b, \in \mathbb{R}$

1) $-(a+b) = -a - b$

2) $a \cdot 0 = 0$

3) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

4) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) y\, (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

5) $Si\ a \neq 0\ y\ b \neq 0$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

6) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \quad b \neq 0, d \neq 0$

7) $b \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, c \neq 0$

8) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$

9) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$

10) $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

11) $\frac{a}{b} \neq 0 \; y \; b \neq 0$ entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

1. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$

2. CUADRADO DE BINOMIO

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$

3. ¿Es válido afirmar que $(a + b)^2 = a^2 + b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$?

La igualdad planteada, en general, no es válida. Para justificar que una igualdad no se verifica para todos los valores de a y b damos un contraejemplo, que consiste en mostrar con algún ejemplo particular que la afirmación o la igualdad no es válida.

Si $a = 1$ y $b = 2$ entonces $(a + b)^2 = (1 + 2)^2 = 9$, $a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$ y $9 \neq 5$ por lo tanto no se cumple la igualdad.

4. ¿Es válido afirmar que $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}, a \neq 0$?

Si probamos con algunos valores de a y b observamos que la igualdad se verifica, vamos a intentar hacer una prueba para demostrar que es válida para todos los valores de a y b con $a \neq 0$.

5. ¿Es válido afirmar que $\frac{a}{a+b} = 1 + \frac{a}{b}, a \neq 0 \ y \ b \neq 0$

La expresión $\frac{a}{a+b}$ no se puede simplificar ni tampoco es válida la propiedad distributiva, veamos con un contraejemplo que no cumple la igualdad.

Si $a = 4 \ y \ b = -2$, resulta: $\frac{a}{a+b} = \frac{4}{4+(-2)} = \frac{4}{2} = 2,\ 1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{4}{-2} = 1 - 2 = -1$ y $2 \neq -1$
por lo que hemos encontrado un contraejemplo que afirma que la igualdad anterior no es cierta.

ECUACIONES

- Una ecuación es una proposición que muestra una igualdad entre dos expresiones algebraicas que tiene uno o varios datos desconocidos.

- La cantidad desconocida se llama incógnita. Cuando el valor desconocido es uno solo, la ecuación se dice con una incógnita. Es común que utilicemos la letra x para simbolizar la cantidad desconocida, aunque podemos usar cualquier letra del alfabeto.

- El conjunto solución de una ecuación es el conjunto de todos los números que, sustituidos en la ecuación, la convierte en una afirmación verdadera. Decimos que esos números satisfacen la ecuación. Podría ocurrir que la ecuación no tenga solución, en ese caso el conjunto solución es vacío.

Ejemplo:

1) Resolver la ecuación $4x - 3 = 2$

$$4x - 3 = 2 \iff 4x = 5$$

$$\iff x = \frac{5}{4} \qquad S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$$

2) Encontrar la solución de $2x + 3 = 2x - 5$

$$2x+3=2x-5 \overset{PU}{\Longleftrightarrow} 2x=2x-5-3 \overset{PU}{\Longleftrightarrow} 2x-2x=-8 \Longleftrightarrow \underbrace{0=-8}_{Abs!}$$

$$S=\emptyset$$

3) Encontrar la solución de $2x + 3 = 2x + 3$

$$2x+3=2x+3 \Longleftrightarrow 2x-2x=3-3 \Longleftrightarrow \underbrace{0=0}_{\checkmark}$$

$$S=\mathbb{R}$$

4) $3x^2 + 9x = 0 \Longleftrightarrow 3x(x+3)=0 \underset{x}{\Longleftrightarrow} 3x=0 \vee x+3=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=-3$

$$a\cdot b=0 \Longleftrightarrow a=0 \vee b=0$$

$$S=\{0,-3\}$$

5) $\frac{x^3-3x^2}{x-3}=0$ CI : $x-3\neq 0$

CI : $x-3\neq 0$ $S_{CI}=\mathbb{R}-\{3\}$

1era forma

$\frac{x^3-3x^2}{x-3}=0 \iff \frac{x^2\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=0 \iff x^2=0$

$\iff x=0$ $S=\{0\}$

2a forma : $\frac{a}{b}=0 \iff a=0, b\neq 0$

Luego $x^3-3x^2=0 \iff x^2(x-3)=0 \iff$

$\iff x^2=0 \vee x-3=0 \iff x=0 \vee x=3$

$S_1=\{0,3\}$ Debemos tener en cuenta la CI luego la solución final es $S=\{0\}$

6) $\frac{x^3+2x^2}{x^2}=x+2$ CI $x^2\neq 0$ $S_{CI}=\mathbb{R}-\{0\}$

1) $\frac{x^3+2x^2}{x^2}=x+2 \iff \frac{\cancel{x^2}(x+2)}{\cancel{x^2}}=x+2 \iff x-x=2-2 \iff \underbrace{0=0}_{V}$

$S_1=\mathbb{R}$ pero no olvidemos la CI

luego $S=S_1\cap S_{CI}$.

$S=\mathbb{R}-\{0\}$

7) $\dfrac{3(x-2)-(x+1)}{x-2}=2$

CI : $x-2\neq 0$, $S_{CI}=\mathbb{R}-\{2\}$]

No podemos trabajar con el distinto y lo hacemos por el complemento $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

1) $\dfrac{3(x-2)-(x+1)}{x-2}=2 \Longleftrightarrow 3(x-2)-(x+1)=2(x-2) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3(x-2)-(x+1)-2(x-2)=0 \Longleftrightarrow x-2-(x+1)=0 \Longleftrightarrow x-2-x-1=0$

$\Longleftrightarrow -3=0$ Abs! $S_1=\emptyset$ luego $S=\emptyset$

otra forma

CI : $x-2\neq 0$

$\dfrac{3(x-2)-(x+1)}{x-2}=2 \Longleftrightarrow 3-\dfrac{(x+1)}{x-2}=2 \Longleftrightarrow -\dfrac{(x+1)}{x-2}=-1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dfrac{-x-1}{x-2}=-1 \Longleftrightarrow -x-1=-1(x-2) \Longleftrightarrow -x-1=-x-2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -x+x=-2+1 \Longleftrightarrow 0=-1$ Abs!

$S=\emptyset$

8) Sea $S = \{x \in \mathbb{R} / 2x^4 - 6x^2 + 4 = 0\}$. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

1) $S = \{\,\}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}: x > 0 \Longrightarrow x \in S$
3) $\forall x \in S: x > 0 \Longrightarrow x^4 \leq 4$
4) $\exists x \in S: 2x^4 - 4x^2 = 0$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una combinación de números y letras unidos por operaciones matemáticas elementales.
A las letras se las denomina variables
y a los números coeficientes numéricos.

EXPRESIONES REALES

Una cuestión importante en muchas ocasiones que se trabaja con expresiones algebraicas o racionales, es determinar que valores de la variable es posible sustituirle para obtener como resultado un número real.

Veamos algunos ejemplos:

Determinar para qué valores de x las siguientes expresiones tienen resultado real:

1) $\frac{3}{-x-4}$ Si tenemos una fracción (un cociente) el denominador tiene que ser distinto de cero, luego

$-x-4 \neq 0$ y como trabajamos trabajamos con el complemento

$-x-4=0 \Longleftrightarrow x=-4$, $S=\mathbb{R}-\{-4\}$ o $S: x \in \mathbb{R}-\{-4\}$

2) $\frac{x-1}{x^2-2x-3}$ $x^2-2x-3 \neq 0$

luego $x^2-2x-3=0$. $x_{1,2}=\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}=\frac{2 \pm 4}{2}=$ $x_1=3$, $x_2=-1$

$\therefore S=\mathbb{R}-\{-1,3\}$

3) $\frac{x+2}{x^2+1}$

$x^2+1 \neq 0$

$x^2+1=0 \Longleftrightarrow x^2=-1$, sabemos que $x^2 \geq 0$ luego $x^2+1 \neq 0$ para todo x

$S=\mathbb{R}$

RELACIÓN DE ORDEN EN $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ el cuerpo de los números reales es un cuerpo ordenado con la relación "<"

Además de las operaciones que hemos visto, en $\mathbb{R}$ se define una relación de orden, que indicamos "<". Si a y b son dos números en $\mathbb{R}$, escribimos $a < b$ y se lee "a menor que b".

En la recta real esto significa que a está a la izquierda de b.

Por otro lado también podemos pensar que $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, es decir a es menor que b si $b - a$ es un número positivo.

Observaciones:

1) Es usual utilizar el símbolo ">". Si expresamos $a > b$, esto se lee "a mayor que b", y lo que indica es que $b < a$.

2) Escribimos $a \leq b$, y decimos que "a es menor o igual que b", para indicar que $a < b$ o $a = b$, y escribimos $a \geq b$, y se lee "a es mayor o igual que b" para indicar que $a > b$ o $a = b$

3) Decimos que $a\ es\ positivo$ si $a > 0$ y que $a\ es\ negativo$ si $a < 0.$

4) Escribimos $a < b < c$ para indicar que $a < b\ y\ b < c$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **con la relación $\leq$ es ordenado ya que cumple con:**

- Propiedad reflexiva: $\forall\ a \in \mathbb{R}: a \leq a$
- Propiedad antisimétrica: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$
- Propiedad transitiva: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$

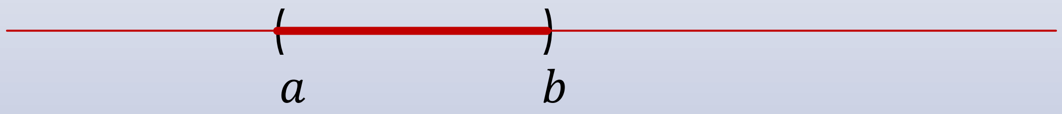
INTERVALOS

Clasificación de intervalos y representación gráfica

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se definen los conjuntos siguientes llamados intervalos de extremo inferior a y extremo superior b de la siguiente manera:

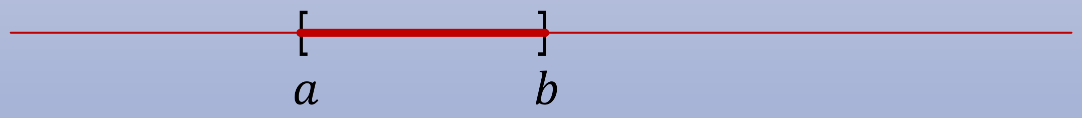
- Intervalo abierto:

$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \}$



- Intervalo cerrado:

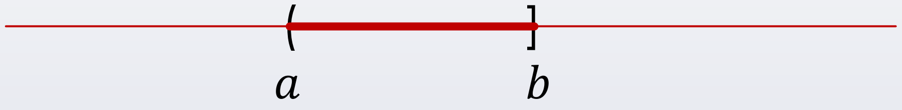
$[a , b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$



- Intervalo semiabierto o semicerrado:

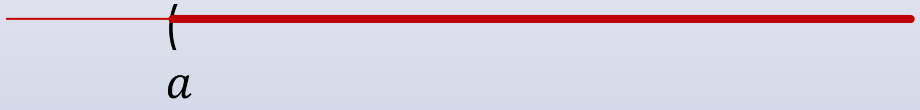
$[a\,,b) \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,, a \leq x < b\}$

$(a\,,b] \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,, a < x \leq b\}$

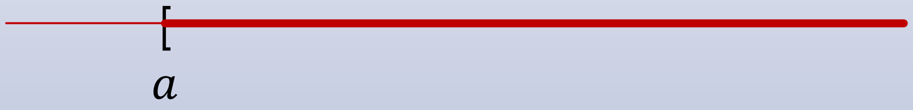


- Semirrectas:

$(a,+\infty) \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,, a < x\}$



$[a,+\infty) \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,, a \leq x\}$



$(-\infty,a) \;=\; \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$

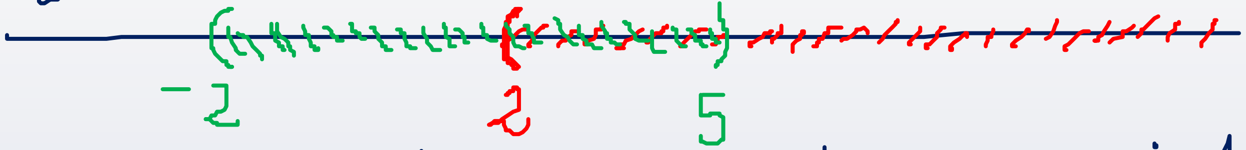
$(-\infty,a] \;=\; \{x \in \mathbb{R}\,, x \leq a\}$

Observación: $+\infty$ y $-\infty$ no son números sino símbolos que indican todos los números reales hacia la derecha o hacia la izquierda respectivamente de un cierto número fijo.

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Ejemplos: 1) Sean $A=\{x\in\mathbb{R} / x>2\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R} / -2<x\le 5\}$

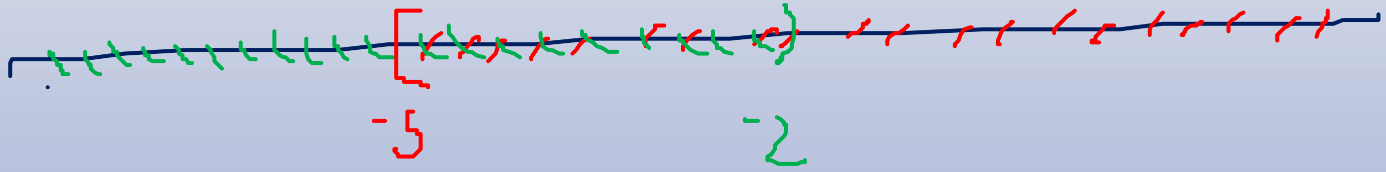
Encontrar $A\cap B$



$A\cap B$ son los x que están en el intervalo pintado con 2 colores

$A\cap B=(2,5)$ y $A\cup B=(-2,+\infty)$

2) $A=[-5,+\infty)$ $\quad B=\{x\in\mathbb{R} / -2>x\}$



$A\cap B=[-5,-2)$ $\quad A\cup B=\mathbb{R}$