UNIDAD 2

CONJUNTOS

Los conceptos de **conjunto** y **elemento** se utilizan en matemática como términos básicos y su significado coincide con el que usamos en nuestro idioma.

Generalmente a los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas: A, B, C,…,X, Y, Z

Y a los elementos que lo forman, con letras minúsculas: a, b, c,…,x, y, z

Ejemplo:

Indicaremos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

Símbolos $\in$ y $\notin$

Dado un conjunto A

- $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ significa que a cumple con la o las condiciones que definen a los elementos del conjunto A y se lee "a pertenece a A", "a es un elemento de A" o "a está en A"
- $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ significa que a **NO** cumple con la o las condiciones que definen a los elementos del conjunto A y se lee "a no pertenece a A", "a no es un elemento de A" o "a no está en A"
- $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ equivale a decir **~($\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$)**, es decir $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \sim(\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A})$

Ejemplo:

$1 \in \mathbb{N}, \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}, \ \ \sqrt{3} \in \mathbb{R}, \ \ \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$

Un conjunto está bien definido, o bien determinado, cuando podemos precisar cuáles son sus elementos.

CONJUNTOS DEFINIDOS POR EXTENSIÓN Y POR COMPRENSIÓN

- **Conjuntos definidos por extensión**

La forma de definir a un conjunto por **EXTENSIÓN** es nombrar uno a uno todos los objetos que lo componen y encerrar esta lista entre llaves.

Ejemplo: $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$

El orden en que escribimos los elementos es irrelevante, ya que un conjunto está completamente determinado por los objetos que lo componen. En consecuencia:

{1, 2, 3, 4 } = {2, 1, 3, 4 } =…

Este ´manera puede ser poco práctica o imposible, algunas veces, cuando los conjuntos son muy extensos o infinitos.

Conjuntos definidos por comprensión

Para definir un conjunto por COMPRENSIÓN lo hacemos indicando una propiedad común a todos sus elementos y tal que sólo sus elementos la tengan.

Ejemplo:

A=$\{x \in \mathbb{N}: x < 5\}$

Ejemplos de conjuntos definidos por comprensión

- Conjunto de todos los números enteros múltiplos de 3

$A = \{x \in \mathbb{Z}: x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

- Conjunto de los números reales mayores que 5 y menores o iguales que 12

$B = \{x \in \mathbb{R}: 5 < x \leq 12\}$

Conjuntos especiales

- **Conjunto universal**

Depende de la disciplina en estudio, se fija de antemano y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. Se lo denota U.

- **Conjunto Unitario**

Es el que tiene un único elemento.

- **Conjunto vacío**

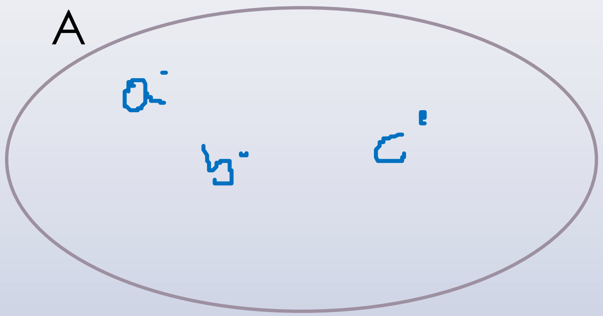
Es cuando el conjunto carece de elementos. Se lo denota { } o ∅ y puede ser definido por cualquier propiedad que no sea verificada por ningún objeto. Por ejemplo:

$\phi = \{ x \in N : 7 < x < 8 \}$

Diagrama de Venn

Son esquemas que se utilizan para representar conjuntos

Ejemplo: A={a,b,c}

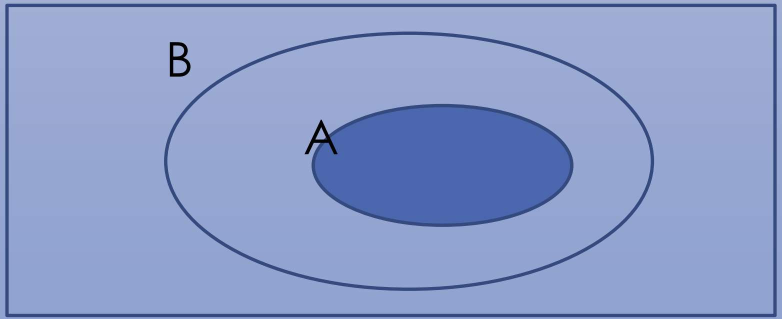


RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está incluido en B, o que A es un parte de B, o que A es un subconjunto de B, o que B contiene a A, si todo elemento de A pertenece a B. Se escribe $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U: x \in A \Rightarrow x \in B.$$



Ejemplo: Sean $A = \{x \in \mathbb{Z}: x\ es\ múltiplo\ de\ 9\}\ y\ B = \{x \in \mathbb{Z}: x\ es\ múltiplo\ de\ 3\}, demostrar\ que\ A \subseteq B$

Dpq $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$

Dem: Sea $x \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} x$ es múltiplo de 9 $\overset{(2)}{\Rightarrow} x = 9k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \cdot \underbrace{3k}_{\in \mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{Z} \overset{(3)}{\Rightarrow} x = 3t,\ t \in \mathbb{Z},\ t = 3k \overset{(4)}{\Rightarrow} x$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} x \in B \qquad \therefore A \subseteq B$

Referencias: (1) Def. del conj. A
(2) Def de múltiplo
(3) Ley de cierre
(4) def. de múltiplo
(5) Def. del conj. B

Propiedades de la relación de inclusión

1. Reflexiva: A ⊆ A, para todo conjunto A.
2. Antisimétrica: Si A ⊆ B y B ⊆ A entonces A = B.
3. Transitiva: Si A ⊆ B y B ⊆ C, entonces A ⊆ C.

Observación: El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, es decir ∅ ⊆ A, para todo conjunto A. En efecto, la implicación $\underbrace{\underbrace{\text{“}x \in \emptyset}_{F} \Rightarrow x \in A\text{”}}_{V}$ es verdadera, pues su antecedente es falso.

Negación de la inclusión

Se escribe $A \not\subseteq B$

Desarrollemos $A \subseteq B$ usando lógica

$A \not\subseteq B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim (A \subseteq B) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sim (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \exists x / \sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \Longleftrightarrow$

$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \exists x / \sim (\sim (x \in A) \vee x \in B) \overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \exists x / \sim\sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) \Longleftrightarrow$

$\overset{(6)}{\Longleftrightarrow} \exists x / x \in A \wedge x \notin B.$

$\therefore A \not\subseteq B \Longleftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \notin B$

Referencias

(1) Cambio de notación
(2) Def. de inclusión
(3) Neg. del cuantificador $\forall$
(4) def. de implicación
(5) Leyes de De Morgan
(6) Doble neg. y neg. de $\in$

Definición: Se dice que el conjunto A es igual al conjunto B, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Lo indicamos $A = B$.

Luego $A = B$ cuando todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es elemento de A, es decir A y B tienen los mismos elementos.

Veamos que la igualdad de conjuntos se traduce en una equivalencia lógica

$A = B$

$$A = B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} [(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A)] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} [\forall x : x \in A \Longleftrightarrow x \in B]$$

Referencias

(1) Def de igualdad

(2) Def de inclusión

(3) Def de equivalencia

Ejemplo:

Demostrar que $A = \{x \in \mathbb{R}: x < 3\}$ y B= $\{x \in \mathbb{R}: 2x - 5 < 1\}$ son iguales

Debemos probar que $A = B$

$\subseteq$) Dem. de $A \subseteq B$

Sea $x \in A \overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} x < 3 \overset{\text{PU}}{\Longrightarrow} 2x < 6 \overset{\text{PU}}{\Longrightarrow} 2x - 5 < 6 - 5 \Rightarrow 2x - 5 < 1 \overset{\text{Def } B}{\Longrightarrow} x \in B$ $\therefore A \subseteq B$.

$\supseteq$) Dem de $B \subseteq A$

Sea $x \in B \overset{\text{Def } B}{\Longrightarrow} 2x - 5 < 1 \Rightarrow 2x < 1 + 5 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \overset{\text{Def } A}{\Longrightarrow} x \in A$

$\therefore B \subseteq A$

$\therefore A = B$

Negación de la relación de igualdad

$A \neq B \Leftrightarrow \exists x \in U: (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$$A \neq B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim(A = B) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sim(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \sim(\forall x: x \in \Rightarrow x \in B \wedge \forall x: x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \sim(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \vee \sim(\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A) \Longleftrightarrow$$

$$\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \exists x / \sim(x \in A \Rightarrow x \in B) \vee \exists x / \sim(x \in B \Rightarrow x \in A) \Longleftrightarrow$$

$$\overset{(6)}{\Longleftrightarrow} \exists x / ((x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x / (x \in B \wedge x \notin A) \Longleftrightarrow \exists x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Referencias:

(1) Cambio de notación
(2) Def de igualdad
(3) Def de inclusión
(4) Leyes De Morgan
(5) neg. de cuantificador
(6) neg. implicación

La relación de inclusión no excluye la igualdad de los conjuntos. Si $A \subseteq B$ y además $A \neq B$, se dice que A es un subconjunto propio o una parte propia de B, o que A está contenido estrictamente en B. Lo notaremos A ⊂ B.

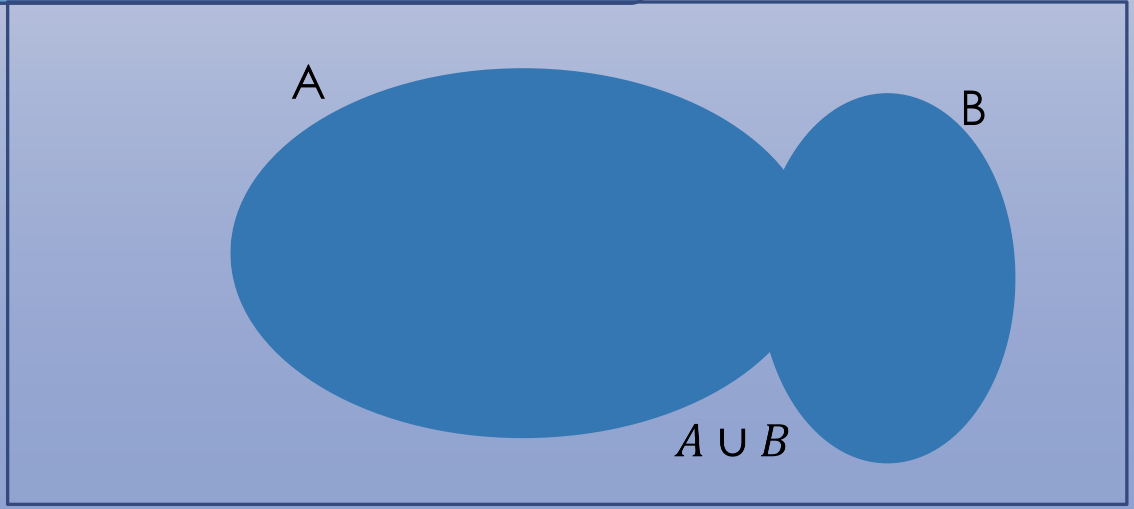
Propiedades de la igualdad de conjuntos:

1. Reflexiva: $A = A$, para todo conjunto A.
2. Simétrica: Si $A = B$ entonces $B = A$.
3. Transitiva: Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

Unión de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B. En notación:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



Recordemos que en Matemática, el conectivo "o" se usa en sentido no excluyente. En consecuencia, cuando decimos que un elemento está en A o en B no excluimos la posibilidad que esté en ambos conjuntos.

Ejemplo:

Sean los conjuntos

$A = \{ x \in \mathbb{N}: \ 2 < x \leq 6 \} = \{3, 4, 5, 6 \}$, y

$B = \{ x \in \mathbb{Z}: x \ es \ divisor \ de \ 6 \} = \{ 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 \}$.

Entonces: $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -6 \}$.

De la definición resulta que A ⊆ A ∪ B y B ⊆ A ∪ B.

Propiedades de la unión

1. **Idempotencia**: $A \cup A = A$.

Para demostrar la igualdad de los conjuntos $A \cup A$ y A hay que probar las dos inclusiones:

$i)\ A \cup A \subseteq A \quad y \quad ii)\ A \subseteq A \cup A$.

Ya vimos que ii) es consecuencia inmediata de la definición, todo conjunto está incluido en la unión de el mismo y cualquier otro conjunto.

Probemos $i)\ A \cup A \subseteq A$

Dem: Sea $x \in A \cup A \overset{\text{def } \cup}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in A \overset{\text{Idemp.}}{\Rightarrow} x \in A$

$\therefore A \cup A \subseteq A$

De i) y ii) $A \cup A = A$

2. Conmutativa: A ∪ B = B ∪ A.

Debemos probar que:

$$A \cup B = B \cup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ A \cup B \subseteq B \cup A \\ \wedge \\ 2)\ B \cup A \subseteq A \cup B \end{cases}$$

D/ 1) Sea $x \in A \cup B \overset{\text{Def} \cup}{\Longleftrightarrow} x \in A \vee x \in B \overset{\text{Conm}}{\Longleftrightarrow} x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow$

$\overset{\text{Def} \cup}{\Longleftrightarrow} x \in B \cup A$

luego $A \cup B \subseteq B \cup A$

La inclusión $B \cup A \subseteq A \cup B$ se demuestra por equivalencia

$\therefore A \cup B = B \cup A$

3. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Debemos probar que : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C) \\ 2) \ A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \end{cases}$

Dem :

Sea $x \in (A \cup B) \cup C \overset{\text{Def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cup B) \vee x \in C \overset{\text{Def } \cup}{\Longleftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$

$\overset{\text{Asoc. } \vee}{\Longleftrightarrow} x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \overset{\text{Def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in A \vee x \in (B \cup C) \overset{\text{Def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in A \cup (B \cup C)$

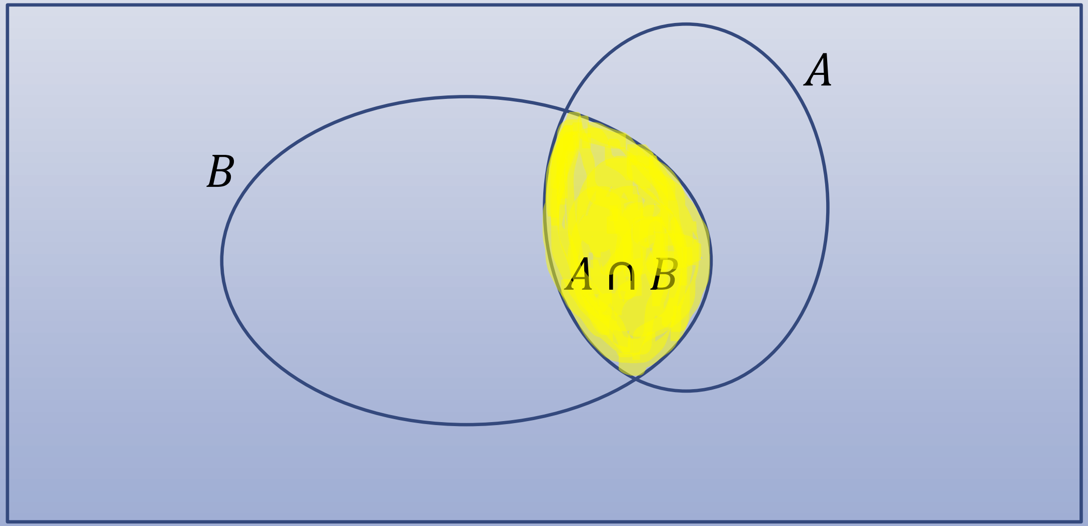
Hay veces en que podemos trabajar con la equivalencia en lugar de la implicación, de esta manera quedan demostrado las dos inclusiones

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Intersección de conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se llama intersección de A y B, y se indica $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos son los elementos comunes a A y a B, es decir los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \ y \ x \in B\}$$



De la definición se desprende inmediatamente que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Ejemplo:

Sean los conjuntos

$A = \{ x \in \mathbb{N}: 2 < x \leq 6 \} = \{3, 4, 5, 6 \}$, y

$B = \{ x \in \mathbb{Z}: x \text{ } es \text{ } divisor \text{ } de \text{ } 6 \} = \{ 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 \}$.

Entonces: $A \cap B = \{3, 6\}$

Si la intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto vacío, se dice que A y B son disjuntos.

Por ejemplo, el conjunto A de los números naturales pares y el conjunto B de los números naturales impares son disjuntos, ya que $A \cap B = \emptyset$.

Propiedades de la intersección

1. Idempotencia: $A \cap A = A$.
2. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$.
3. Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

→ Se demuestran en forma análoga a las propiedades de la unión

$\boxed{\textbf{Teorema 1: } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.}$

H) $A \subseteq B$ T) $A \cup B = B \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ A \cup B \subseteq B \\ \wedge \\ (2)\ B \subseteq A \cup B \end{cases}$

Dem(1) Sea $x \in A \cup B \overset{\text{Def } \cup}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in B \overset{\text{Hip}}{\Rightarrow} x \in B \vee x \in B \overset{\text{Idemp}}{\Rightarrow} x \in B$

$\therefore A \cup B \subseteq B$

Dem(2) Sea $x \in B \overset{\text{Adic}}{\Rightarrow} x \in B \vee x \in A \overset{\text{Conm.}}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in B \overset{\text{Def } \cup}{\Rightarrow} x \in A \cup B$

$\therefore B \subseteq A \cup B$

De (1) y (2) $A \cup B = B$

Teorema 2: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$

H) $A \subseteq B$ T) $A \cap B = A \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ A \cap B \subseteq A \\ (2)\ A \subseteq A \cap B \end{cases}$

Dem 1) Sea $x \in A \cap B \xRightarrow{\text{Def } \cap} x \in A \wedge x \in B \xRightarrow{\text{simpl.}} x \in A$

$\therefore A \cap B \subseteq A$

Dem 2) Sea $x \in A \xRightarrow{\text{Idemp}} x \in A \wedge x \in A \xRightarrow{\text{Hip)}} x \in A \wedge x \in B \xRightarrow{\text{Def } \cap} x \in A \cap B$

$\therefore A \subseteq A \cap B$

De 1) y 2) $A \cap B = A$

Leyes de absorción:

1. $A \cup (A \cap B) = A.$
2. $A \cap (A \cup B) = A.$

Demostraremos la primera $A \cup (A \cap B) = A$

Dem:

$\subseteq)$ Dpq $A \cup (A \cap B) \subseteq A$

Sea $x \in A \cup (A \cap B) \xRightarrow{\text{Def } \cup} x \in A \vee x \in A \cap B \xRightarrow{\text{Def } \cap} x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\xRightarrow{\text{Dist}} (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \xRightarrow{\text{simpl}} x \in A \vee x \in A \xRightarrow{\text{Idemp}} x \in A$

$\therefore A \cup (A \cap B) \subseteq A$

$\supseteq)$ Dpq $A \subseteq A \cup (A \cap B)$

Sea $x \in A \xRightarrow{\text{Adic}} x \in A \vee x \in A \cap B \xRightarrow{\text{def } \cup} x \in A \cup (A \cap B)$

$\therefore A \subseteq A \cup (A \cap B)$

De ambas demostraciones tenemos que

$A \cup (A \cap B) = A$

Leyes distributivas:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dem 1)

Dpq: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sea $x \in A \cup (B \cap C) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in A \vee x \in (B \cap C) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$

$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow$

$\overset{(5)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Luego $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cap C)$

La inclusión $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ se demuestra por equivalencia

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Referencias

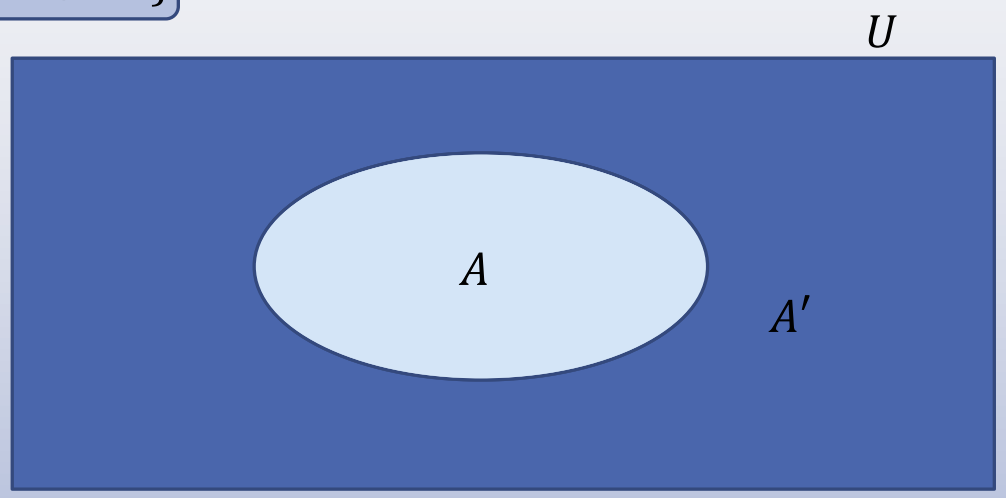
(1) Def. de unión
(2) def. de intersección
(3) distributiva
(4) def. de unión
(5) def. de intersección

Dem 2) Análoga

Complemento

Definición: Dado el conjunto A, se llama complemento de A y lo notamos A', al conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que $\mathbf{no}$ pertenecen a A.

$$\boxed{A' = \{x \in U : x \notin A\}}$$



Ejemplo: si U es el conjunto de los números enteros, A el conjunto de los números naturales, entonces A' es el conjunto de los números enteros negativos incluyendo al 0. Es decir:

$$U = \mathbb{Z} \; y \; A = \mathbb{N}, entonces \; A' = \mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

De la definición resulta en forma inmediata que:

$1. (A')' = A,$ $\quad 2. A \cup A' = U,$ $\quad 3. A \cap A' = \emptyset,$ $\quad 4. U' = \emptyset \quad y \quad 5. \emptyset' = U$

Teorema: $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$.

1) $\Rightarrow$) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

H) $A \subseteq B$ T) $B' \subseteq A'$

D/ Sea $x \in B' \overset{\text{Def}'}{\Rightarrow} x \notin B \overset{\text{H)}}{\Rightarrow} x \notin A \overset{\text{Def}'}{\Rightarrow} x \in A'$

luego $B' \subseteq A'$

2) $\Leftarrow$) $B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B$

H) $B' \subseteq A'$ T) $A \subseteq B$

D/ Sea $x \in A \overset{\text{Def}'}{\Rightarrow} x \notin A' \overset{\text{Hip}}{\Rightarrow} x \notin B' \overset{\text{Def}'}{\Rightarrow} x \in B$

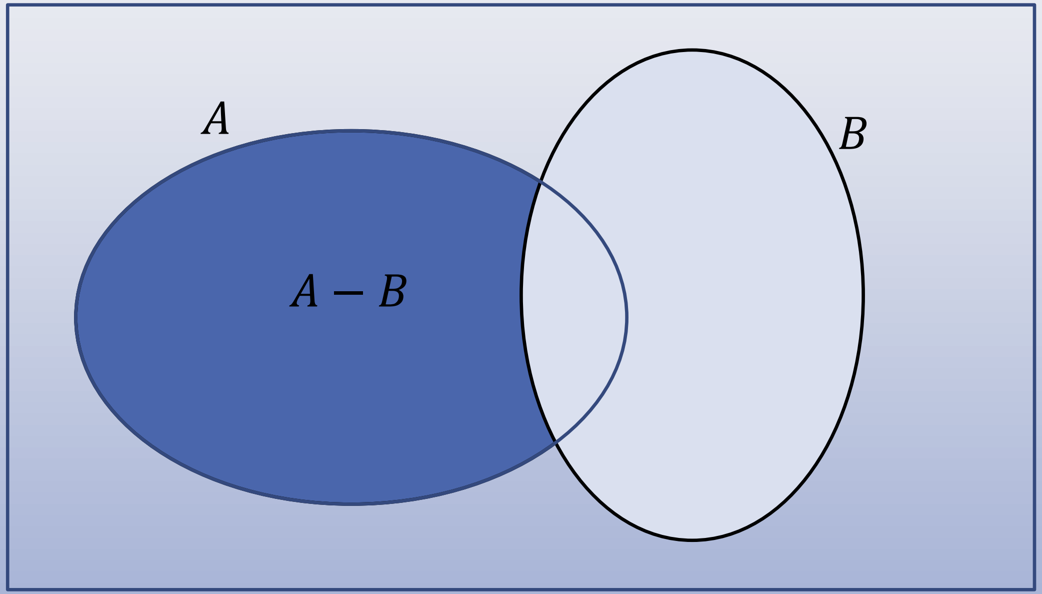
luego $A \subseteq B$

Por lo tanto $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$

Diferencia entre conjuntos

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia entre A y B, en ese orden, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se nota $A - B$.

$$A - B = \{x \in U : x \in A \ \ y \ \ x \notin B\}$$



Ejemplo:

Sea $A = \{2, 3, 4, 6. 7, 8\}$ y $B = \{3, 6, 7, 9, \ 11\}$

Tenemos que $A - B = \{2, 4, 8\}$ y $B - A = \{9, 11\}$

Observación: La siguiente propiedad es muy útil y resulta en forma inmediata de la definición de diferencia: $A - B = A \cap B'$.

Como casos particulares tenemos los siguientes:

- $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

- $A = B \Rightarrow A - B = \emptyset$ y $B - A = \emptyset$.

- $B - A = B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

- $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

H) $A \subseteq B$ T) $A - B = \emptyset$

La demostración se hará por el método absurdo

$\sim T \wedge H \Rightarrow$ Abs!

Por $\sim$T) $A - B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A - B \xRightarrow{Def -} x \in A \wedge x \notin B \xRightarrow{H)} \underbrace{x \in B \wedge x \notin B}_{\text{Abs!}}$

Luego $A - B = \emptyset$

- $B - A = B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

Demost. método absurdo

Por $\sim$t) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap B \xRightarrow{Def \cap} x \in A \wedge x \in B \xRightarrow{H)} x \in A \wedge x \in B - A$

$\xRightarrow{Def -} x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \xRightarrow{conmut} x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in B \xRightarrow{simpl} \underbrace{x \in A \wedge x \notin A}_{\text{Abs!}}$

Luego $A \cap B = \emptyset$

- $A = B \Rightarrow A - B = \emptyset$

Demost. por método absurdo $\neg T \wedge H \Rightarrow$ abs!

Por $\neg T$) $A - B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A - B \overset{\text{Def} -}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow$

$\overset{H)}{\Rightarrow} \underbrace{x \in B \wedge x \notin B}_{\text{Abs!}}$

luego $A - B = \emptyset$

- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Por álgebra de conjuntos

$(A - B) - C \overset{\text{Def} -}{=} (A - B) \cap C'$

$\overset{\text{Def} -}{=} A \cap B' \cap C'$

$\overset{\text{DM}}{=} A \cap (B \cup C)'$

$\overset{\text{Def} -}{=} A - (B \cup C)$ luego $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Antes de demostrar las leyes de De Morgan veamos lo siguiente

- $x \notin A \cup B$

$$x \notin A \cup B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A \cup B) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A \vee x \in B)$$

$$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\therefore\ x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

Referencia

(1) Cambio de notación

(2) def. de unión

(3) leyes de De Morgan

(4) neg. de $\in$

- $x \notin A \cap B$

$$x \notin A \cap B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A \cap B) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B) \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \notin B$$

$$\therefore\ x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

Referencias

(1) cambio de notación

(2) Def de intersección

(3) leyes de De Morgan

(4) neg $\in$

Leyes de De Morgan.

1. $(A \cap B)' = (A' \cup B')$
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(*)$ $x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$x \notin A \cap B \Longleftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

1) Debemos probar que $(A \cap B)' = (A' \cup B') \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ (A \cap B)' \subseteq (A' \cup B') \\ \wedge \\ (2)\ (A' \cup B') \subseteq (A \cap B)' \end{cases}$

Dem (1): Sea $x \in (A \cap B)' \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \notin A \cap B \overset{(*)}{\Longrightarrow} x \notin A \vee x \notin B \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \in A' \vee x \in B' \overset{\text{Def unión}}{\Longrightarrow} x \in A' \cup B'$ luego $(A \cap B)' \subseteq (A' \cup B')$

(2) Sea $x \in A' \cup B' \overset{\text{Def } \cup}{\Longrightarrow} x \in A' \vee x \in B' \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \notin A \vee x \notin B \overset{(*)}{\Longrightarrow} x \notin A \cap B \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \in (A \cap B)'$ luego $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$

De (1) y (2) $(A \cap B)' = (A' \cup B')$

2) Debemos probar que $(A \cup B)' = A' \cap B' \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ (A \cup B)' \subseteq A' \cap B' \\ \wedge \\ (2)\ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)' \end{cases}$

Dem (1) Sea $x \in (A \cup B)' \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \notin A \cup B \overset{(*)}{\Longrightarrow} x \notin A \wedge x \notin B \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \in A' \wedge x \in B' \overset{\text{Def } \cap}{\Longrightarrow} x \in A' \cap B'$

luego $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

(2) Sea $x \in A' \cap B' \overset{\text{Def } \cap}{\Longrightarrow} x \in A' \wedge x \in B' \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \notin A \wedge x \notin B \overset{(*)}{\Longrightarrow} x \notin A \cup B \overset{\text{Def compl}}{\Longrightarrow} x \in (A \cup B)'$

luego $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

De 1) y 2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Conjuntos finitos – Cardinalidad

Definición: Un conjunto es finito cuando contiene un número finito de elementos diferentes.

En caso contrario el conjunto es infinito.

Ejemplos:

- El conjunto de los habitantes de un determinado país es finito.
- El conjunto de los números naturales múltiplos de 3 es infinito.

Definición: Se llama cardinal de A al número de elementos del conjunto A y lo notamos por $\#A$ ó $|A|$ ó $n(A)$.

Teorema: Si A y B son dos conjuntos finitos, se cumple que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

$\boldsymbol{Ejemplo}$: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ y $B = \{1, 2, 3, 10, 12, 20\}$. Entonces $\#A = 8, \#B = 6$ y $\#(A \cap B) = 4$, por lo tanto $\#(A \cup B) = 8 + 6 - 4 = 10$.

Observaciones.

1. Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también son conjuntos finitos.
2. Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

El teorema anterior se puede extender a más de dos conjuntos. La generalización de este resultado se llama principio de inclusión – exclusión y es una técnica muy importante utilizada en los problemas de enumeración.

En el caso de tres conjuntos finitos se puede probar que:

Teorema: Si A, B y C son conjuntos finitos, entonces

$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.