Θέμα 1ο

$P(x|\omega_1) = N(\mu_1, \Sigma_1) \quad , \mu_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \;,\; \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 1,2 \end{pmatrix}$

$P(x|\omega_2) = N(\mu_2, \Sigma_2) \quad , \mu_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \;,\; \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{pmatrix}$

Το σύνολο απόφασης δίνεται από την εξής σχέση :

$$P(\omega_1|x) = P(\omega_2|x) \Leftrightarrow \frac{P(x|\omega_1)\cdot p(\omega_1)}{P(x)} = \frac{P(x|\omega_2)\cdot p(\omega_2)}{P(x)} \Leftrightarrow$$

$$P(x|\omega_1)\cdot p(\omega_1) = P(x|\omega_2)\cdot p(\omega_2) \Leftrightarrow P(x|\omega_1)\cdot p = P(x|\omega_2)\cdot(1-p) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|\Sigma_1|}}\cdot p\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1{}^{-1}(x-\mu_1)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|\Sigma_2|}}\cdot(1-p)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2{}^{-1}(x-\mu_2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1{}^{-1}(x-\mu_1)}}{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2{}^{-1}(x-\mu_2)}} = \frac{\sqrt{(2\pi)^2|\Sigma_1|}}{\sqrt{(2\pi)^2|\Sigma_2|}}\cdot\frac{(1-p)}{p} \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1{}^{-1}(x-\mu_1)+\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2{}^{-1}(x-\mu_2)} = \sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\cdot\frac{(1-p)}{p} \Leftrightarrow$$

$$(x-\mu_2)^T\Sigma_2{}^{-1}(x-\mu_2) - (x-\mu_1)^T\Sigma_1{}^{-1}(x-\mu_1) = 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) \Leftrightarrow$$

$$(x-\mu_1)^T\Sigma_2{}^{-1}(x-\mu_1) - (x-\mu_2)^T\Sigma_1{}^{-1}(x-\mu_2) + 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) = 0$$

Αυτή είναι η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε στο Matlab για το χάραγμα των γραφικών ωστόσο μπορεί να αναλυθεί παραπάνω :

$$\Leftrightarrow x^T\Sigma_1^{-1}x - x^T\Sigma_1^{-1}\mu_1 - \mu_1^T\Sigma_1^{-1}x + \mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1$$

$$-\left(x^T\Sigma_2^{-1}x - x^T\Sigma_2^{-1}\mu_2 - \mu_2^T\Sigma_2^{-1}x + \mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2\right) + 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^T\Sigma_1^{-1}x - 2\mu_1^T\Sigma_1^{-1}x + \mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1 - (x^T\Sigma_2^{-1}x - 2\mu_2^T\Sigma_2^{-1}x + \mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2) + 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

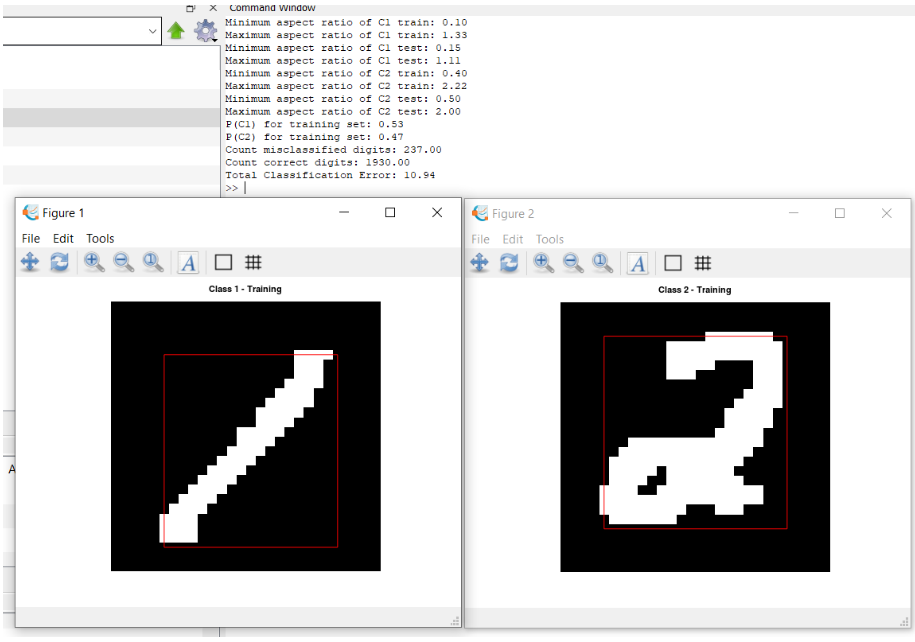
$$x^T\Sigma_1^{-1}x - 2\mu_1^T\Sigma_1^{-1}x + \mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1 - x^T\Sigma_2^{-1}x + 2\mu_2^T\Sigma_2^{-1}x - \mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2 + 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^T(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1})x + 2(\mu_2^T\Sigma_2^{-1} - \mu_1^T\Sigma_1^{-1})x + \mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1 - \mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2 + 2\ln\left(\frac{1-p}{p}\cdot\sqrt{\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}}\right) = 0$$

<u>Θέμα 2ο</u>

Σε αυτό το θέμα υλοποιήθηκε ένας απλός ταξινομητής Bayes ο οποίος θα μπορεί να ταξινομεί δείγματα σε δύο κλάσεις C1,C2 των ψηφίων 1 και 2 αντίστοιχα. Για τα ψηφία χρησιμοποιήθηκε το αρχείο mnist.mat το οποίο περιέχει χειρόγραφες εικόνες των αριθμητικών ψηφίων από το 0 ως το 9. Για την ταξινόμηση των ψηφίων σε δύο κλάσεις χρησιμοποιήθηκε ο λόγος όψεως (aspect ratio) που είναι λόγος μήκους και ύψους του κάθε ψηφίου.

Παρακάτω φαίνεται η ελάχιστη και μέγιστη τιμή του aspect ratio που καταγράφηκε συνολικά και δύο τυχαία ψηφία ένα από κάθε κλάση όπου έχει σχεδιαστεί ένα παραλληλόγραμμο στα όρια του aspect ratio. Επίσης φαίνονται οι apriori πιθανότητες καθώς και το σφάλμα ταξινόμησης ως το ποσοστό των λανθασμένων αποφάσεων του ταξινομητή στο σύνολο των δειγμάτων.



Θέμα 3ο

$$P(x|\omega_1) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma_1^2}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$P(x|\omega_2) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_2^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma_2^2}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 1 \quad , \sigma_2 = 2 \quad , L = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad P(\omega_1) = P(\omega_2)$$

$$l_1 = 0 \cdot P(\omega_1|x) + 1 \cdot P(\omega_2|x) = P(\omega_2) \cdot P(x|\omega_2)$$

$$l_2 = 0{,}5 \cdot P(\omega_1|x) + 0 \cdot P(\omega_2|x) = 0{,}5 \cdot P(\omega_1) \cdot P(x|\omega_1)$$

Αποφασίζω :

$$\begin{cases} \omega_1 & l_1 < l_2 \Leftrightarrow l_1 - l_2 < 0 \\ \omega_2 & l_1 > l_2 \Leftrightarrow l_1 - l_2 > 0 \end{cases}$$

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow P(\omega_2)P(x|\omega_2) = 0{,}5P(\omega_1)P(x|\omega_1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} - x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} - 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} - 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} \cdot e^{-\frac{3x^2}{8}} = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{3\cdot x^2}{8}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2 \cdot e^{-\frac{3\cdot x^2}{8}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{3\cdot x^2}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3 \cdot x^2}{8} = -\ln 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \cdot \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \ln 2} \quad , \quad x \geq 0$$

	0		$2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\ln 2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$e^{-\frac{x^2}{8}}$		$+$		$+$	
$\left(1-2\cdot e^{-\frac{3\cdot x^2}{8}}\right)$		$-$		$+$	
$x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\left(1-2\cdot e^{-\frac{3\cdot x^2}{8}}\right)$		$-$		$+$	

Άρα τελικά αποφασίζω :

$$\begin{cases} \omega_1 \quad , \quad x < 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\ln 2} \\ \omega_2 \quad , \quad x > 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\ln 2} \end{cases}$$

<u>Θέμα 4ο</u>

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = U\Sigma V^{-1} = U\Sigma V^T$$

$$A = X^T X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda I\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)\vec{v} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)^2-0) + (\lambda-1-0) + (\lambda-1) \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Αρά τελικά $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ και λ_3=0.

Για λ_1= 3 :

$$(A-\lambda_1 I)\overrightarrow{v_1}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 1-3 & 0 \\ 1 & 0 & 1-3 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_1}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{1,1}-v_{1,2}-v_{1,3}=0 \\ -v_{1,1}-2v_{1,2}=0 \\ -v_{1,1}-2v_{1,3}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{1,1}-v_{1,2}-v_{1,3}=0 \\ v_{1,1}=2v_{1,2} \\ v_{1,1}=2v_{1,3} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Και κανονικοποιώντας το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$\frac{\overrightarrow{v_1}}{\|\vec{v}\|}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Για λ_2= 1 :

$$(A-\lambda_2 I)\overrightarrow{v_2}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_2}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{2,1}-v_{2,2}-v_{2,3}=0 \\ -v_{2,1}=0 \\ v_{2,1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{2,2}=v_{2,3} \\ v_{1,2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Και κανονικοποιώντας το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$\frac{\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_2}\|}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Για λ_3= 0 :

$$(A-\lambda_3 I)\overrightarrow{v_3}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-0 & -1 & 1 \\ -1 & 1-0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-0 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_3}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overrightarrow{v_3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{3,1}-v_{3,2}+v_{3,3}=0 \\ -v_{3,1}+v_{3,2}=0 \\ v_{3,1}+v_{3,3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{3,1}=v_{3,2} \\ v_{3,2}=-v_{3,3} \\ v_{3,3}=-v_{3,1} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Και κανονικοποιώντας το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$\frac{\overrightarrow{v_3}}{\|\overrightarrow{v_3}\|}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Επομένως :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$B = XX^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow B\vec{u} - \lambda I\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (B - \lambda I)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 — 1(-1) = 0 \Leftrightarrow (4 - 4\lambda + \lambda^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \ , \lambda_2 = 1$$

Αρά τελικά $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 1$

Για $\lambda_1 = 3$:

$$(B - \lambda_1 I)\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\overrightarrow{u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u_{1,1} - u_{1,2} = 0 \\ -u_{1,1} - u_{1,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_{1,1} = -u_{1,2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Και κανονικοποιώντας το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$\frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_2 = 1$:

$$(B - \lambda_2 I)\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix}\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_{2,1} - u_{2,2} = 0 \\ -u_{2,1} + u_{2,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$u_{2,1} = u_{2,2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Και κανονικοποιώντας το ιδιοδιάνυσμα είναι :

$$\frac{\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_2}\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως :

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Εν τέλει :

$$X = U\Sigma X^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Η καλύτερη rank-1 προσέγγιση είναι επομένως :

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Θέμα 5^o</u>

Στη πέμπτη άσκηση ζητήθηκε η εφαρμογή της μεθόδου Principal Component Analysis(PCA) για να μειωθούν οι διαστάσεις των δεδομένων. Αρχικά εφαρμόστηκε σε δεδομένα δύο διαστάσεων και στη συνέχεια σε μεγαλύτερο σύνολο δεδομένων 5000 εικόνων προσώπου.

Για την υλοποίηση της μεθόδου έγιναν τα παρακάτω:

•Φορτώθηκε το αρχείο data1.mat και απεικονίστηκαν τα 2D δεδομένα για σύγκριση πιο μετά.

•Με τη συνάρτηση featureNormalize.m επιστρέφουμε την είσοδο(τα αρχικά δείγματα) κανονικοποιημένη με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1(standardization).

•Στη συνάρτηση myPCA.m υπολογίζεται ο πίνακας συνδιασποράς των normalized data σύμφωνα με τον τύπο: $\Sigma = 1/mX^TX$. Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση [U,S,~] = svd() του Octave. Στη συνέχεια σχεδιάστηκαν οι κύριες συνιστώσες του PCA μαζί με τα αρχικά δείγματα.

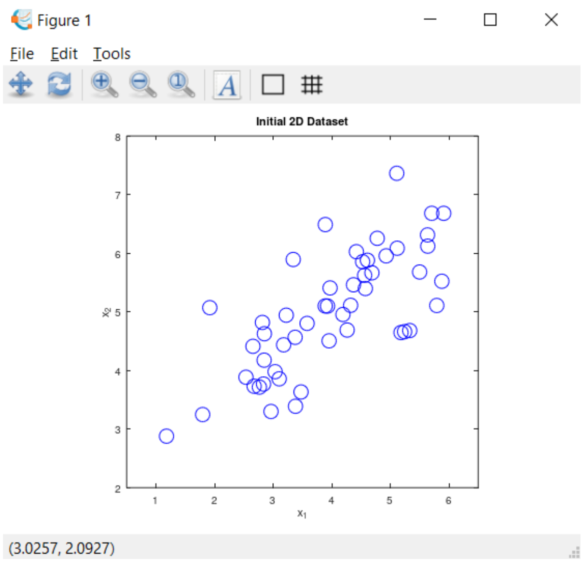
•Υπολογίζεται η συνεισφορά κάθε κύριας συνιστώσας στη συνολική διακύμανση και στη συνέχεια με την συνάρτηση projectData.m θα επιστραφούν τα δείγματα Z μειωμένης διάστασης με είσοδο τα αρχικά δεδομένα X, τις κύριες συνιστώσες U και τον αριθμό των διαστάσεων K.

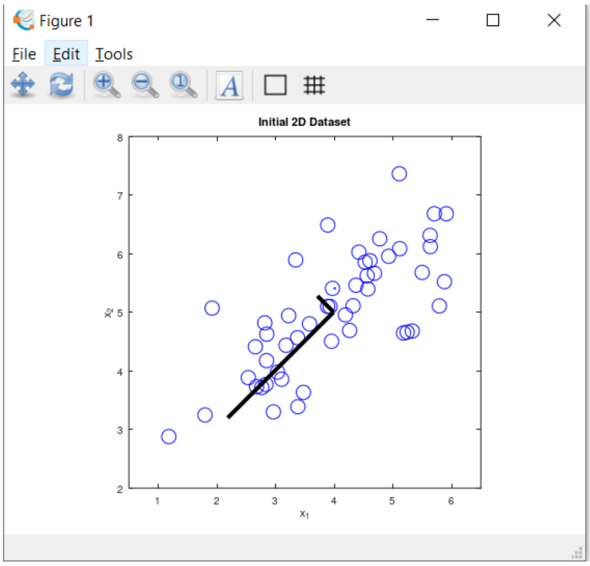
•Αφού προβάλαμε τα δεδομένα σε χώρο μικρότερων διαστάσεων, μέσω της recoverData.m θα προβάλουμε κάθε δείγμα πίσω στον αρχικό χώρο ώστε να ανακτήσουμε τα προσεγγιστικά δεδομένα στο χώρο των υψηλών διαστάσεων (ανάποδη διαδικασία από την projectData.m).

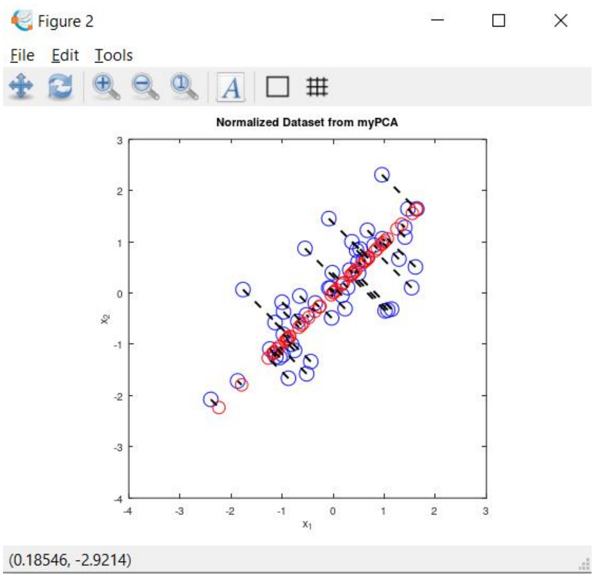
Τέλος όλα τα παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν για τις 5000 χιλιάδες εικόνες που δίνονται από το αρχείο faces.mat και συγκεκριμένα για τα πρώτα 100 πρόσωπα.

Παρακάτω φαίνονται τα output και τα plots που παράγονται από τον κώδικα για την άσκηση 5:

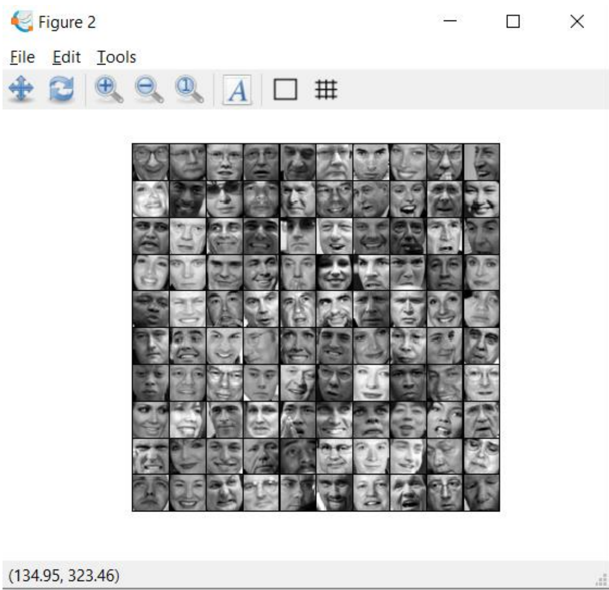
```
Reading and Visualizing initial 2D dataset.

Program paused. Press enter to continue.
Top eigenvector:
 U(:,1) = -0.707107 -0.707107

(you should expect to see -0.707107 -0.707107)
Program paused. Press enter to continue.
 PCvariance = 0.867765 0.132235

(you should expect to see 0.8678 and 0.1322)

Dimension reduction of dataset samples.

Projection of the first example: 1.481274

(this value should be about 1.481274)

Approximation of the first example: -1.047419 -1.047419

(this value should be about  -1.047419 -1.047419)

Program paused. Press enter to continue.

Loading face dataset.

Program paused. Press enter to continue.

Running PCA on face dataset.
(this mght take a minute or two ...)

Program paused. Press enter to continue.

Dimension reduction for face dataset.

The projected data Z has a size of: 5000 100

Program paused. Press enter to continue.

Visualizing the projected (reduced dimension) faces.


Program paused. Press enter to terminate.
```



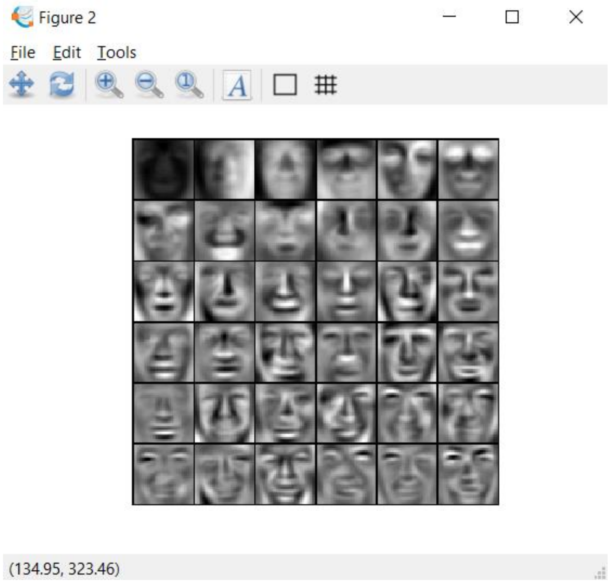


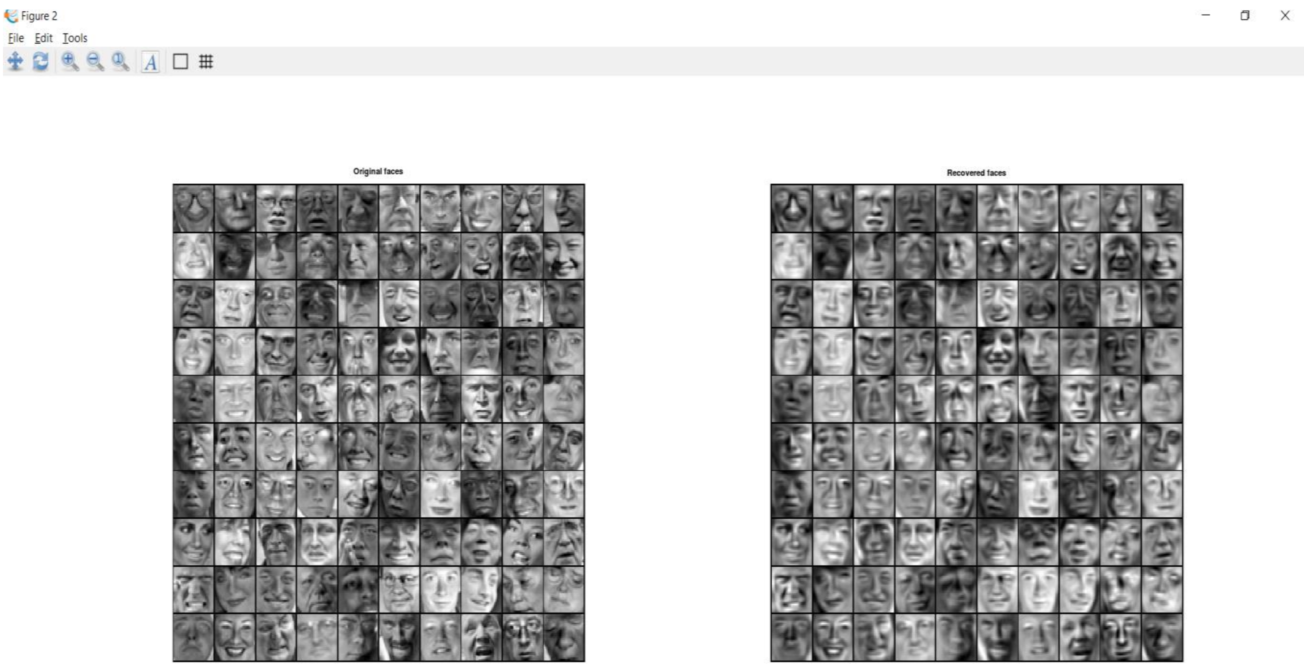


Original first 100 faces:



Faces after PCA applied:





Θέμα 6^o

$$P(x|\omega_1) = N(\mu_1, \Sigma_1) \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$P(x|\omega_2) = N(\mu_2, \Sigma_2) \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0{,}5$$

$$S_W = \sum_{i}^{2} P(w_i)\Sigma_i = \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{2}\Sigma_2 = \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/2 & 9/2 \\ 9/2 & 13/2 \end{bmatrix}$$

$$S_w^{-1} = \frac{1}{\frac{13}{2}\cdot\frac{13}{2} - \frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 13/2 & -9/2 \\ -9/2 & 13/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 13/2 & -9/2 \\ -9/2 & 13/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/44 & -9/44 \\ -9/44 & 13/44 \end{bmatrix}$$

$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2) = \begin{bmatrix} 13/44 & -9/44 \\ -9/44 & 13/44 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 13/44 & -9/44 \\ -9/44 & 13/44 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -105/44 \\ 5/44 \end{bmatrix}$$

Θέμα 7^o

Στη τελευταία άσκηση του σέτ ζητήθηκε η εφαρμογή της μεθόδου Linear Discriminant Analysis(LDA) για να μειωθούν οι διαστάσεις ενός feature vector και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με την μέθοδο PCA που υλοποιήσαμε παραπάνω. Αρχικά εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος σε 2D τεχνητά δεδομένα δύο κλάσεων που βρίσκονται στο αρχείο data2.mat.

Ότι αφορά τη μέθοδο PCA οι συναρτήσεις είναι ίδιες με παραπάνω χωρίς αλλαγές.
Για τη μέθοδο LDA έγινε η εξής διαδικασία:

•Φορτώθηκε το αρχείο data2.mat και απεικονίστηκαν τα 2D δεδομένα και πιο μετά δουλέψαμε με το πασίγνωστο dataset fiisheriris.mat.

•Υλοποιήθηκε η ίδια συνάρτηση που είχαμε και για τη μέθοδο PCA, featureNormalize.m όπου επιστρέφει την είσοδο(τα αρχικά δείγματα) κανονικοποιημένη με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1(standardization).

•Υλοποιήθηκε επίσης η συνάρτηση fisherLinearDiscriminant.m η οποία υλοποιεί των αλγόριθμο LDA.

•Με την συνάρτηση projectDataLDA.m θα επιστραφούν τα δείγματα Z μειωμένης διάστασης .

•Αντίστοιχα υλοποιήθηκε και η συνάρτηση recoverDataLDA.m που θα κάνει το αντίθετο από την projectDataLDA.m , δηλαδή θα κάνει ανακατασκευή των δειγμάτων μειωμένης διάστασης στον αρχικό χώρο προβάλλοντας τα στην κατεύθυνση του διανύσματος προβολής LDA.

•Αφού έγιναν όλα αυτά συγκρίθηκε η προβολή του PCA και του LDA για τα δεδομένα από dataset data2.m.

•Για το αρχείο fisheriris.mat οι παραπάνω συναρτήσεις δεν άλλαξαν ωστόσο υλοποιήθηκε μια ακόμα συνάρτηση myLDA.m, η οποία δέχεται σαν είσοδο τα κανονικοποιημένα δείγματα, τα labels της κλάσης και των αριθμό διαστάσεων που θέλουμε να μειώσουμε το χώρο των χαρακτηριστικών. Επιλέχθηκε NewDim =2 και από τα δεδομένα εισόδου στη συνάρτηση υπολογίζονται τα εξής:

•Apriori πιθανότητες των κλάσεων

•Μέσες τιμές των κλάσεων

•Ολικό μέσο

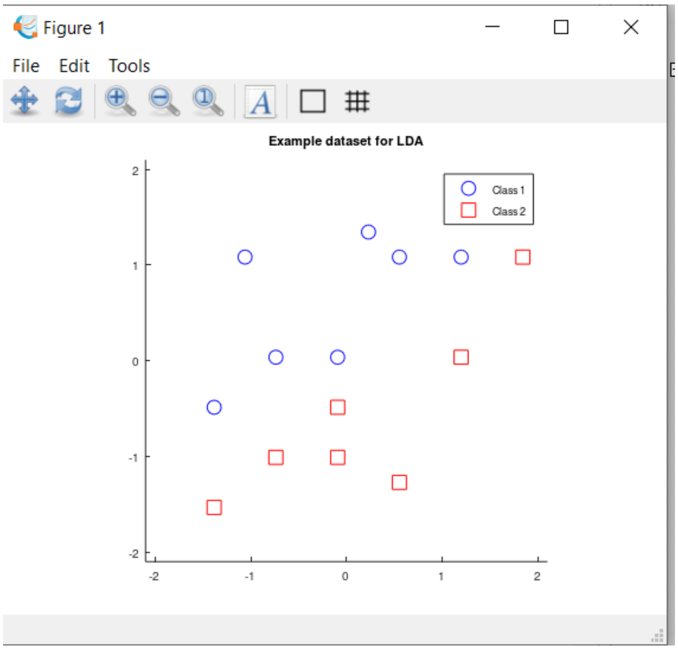
•Within-Class Scatter Matrix S_W

•Between-Class Scatter Matrix S_B

•και τον πίνακα $S_W{}^{-1}S_b$ όπου εφαρμόστηκε eigendecomposition

•Τέλος εφαρμόστηκαν τα διανύσματα προβολής που υπολογίστηκαν στη συνάρτηση myLDA.m πάνω στα δείγματα και σχεδιάστηκαν σε 2D επίπεδο με διαφορετικά χρώματα για κάθε κλάση.

Παρακάτω φαίνονται τα plots που παράγονται από τον κώδικα για την άσκηση 7:



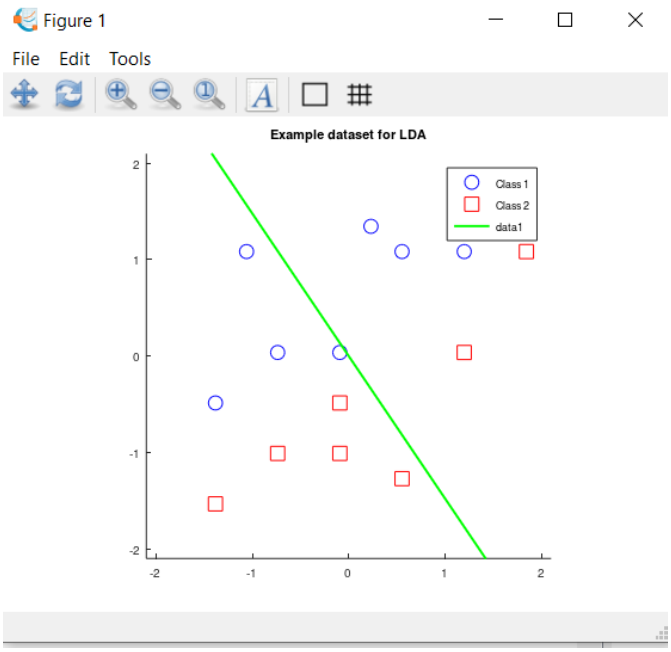


Figure 1
File Edit Tools
Example dataset for LDA
Class 1
Class 2
data1

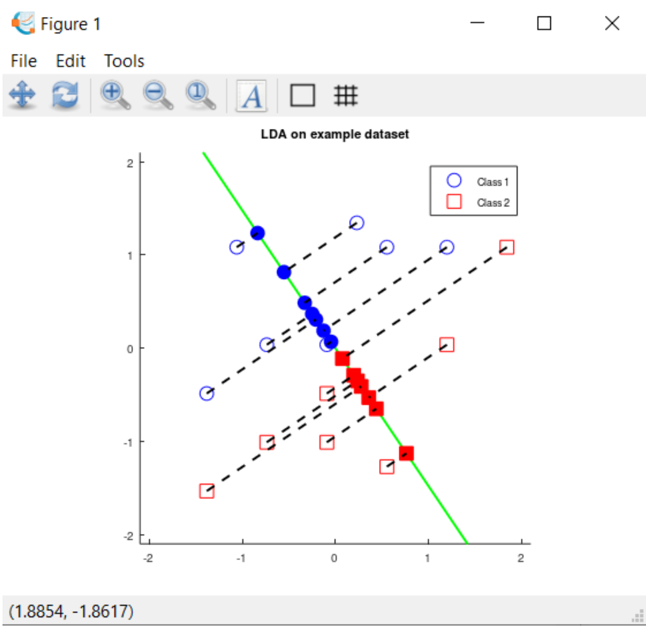


Figure 1
File Edit Tools
LDA on example dataset
Class 1
Class 2
(1.8854, -1.8617)

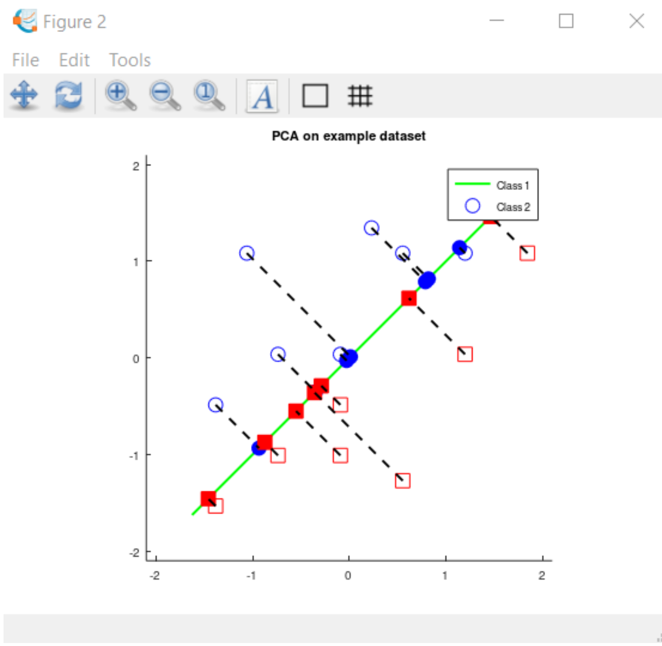


Figure 2
File Edit Tools
PCA on example dataset
Class 1
Class 2

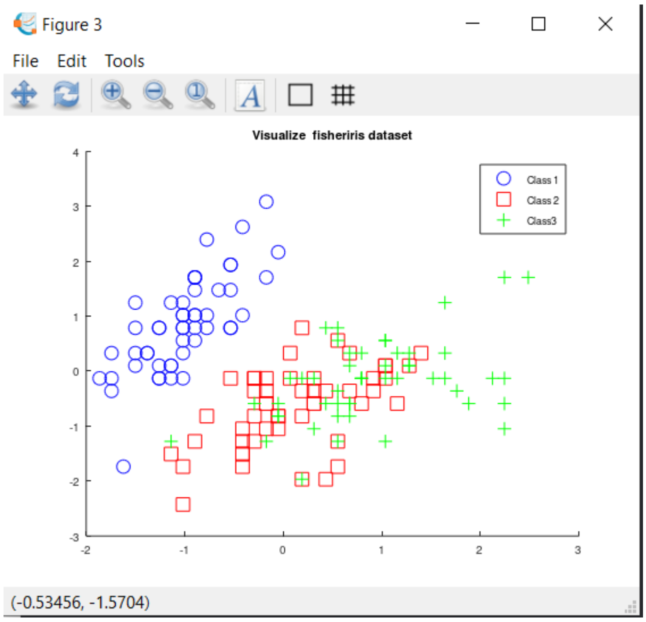


Figure 3
File Edit Tools
Visualize fisheriris dataset
Class 1
Class 2
Class3
(-0.53456, -1.5704)

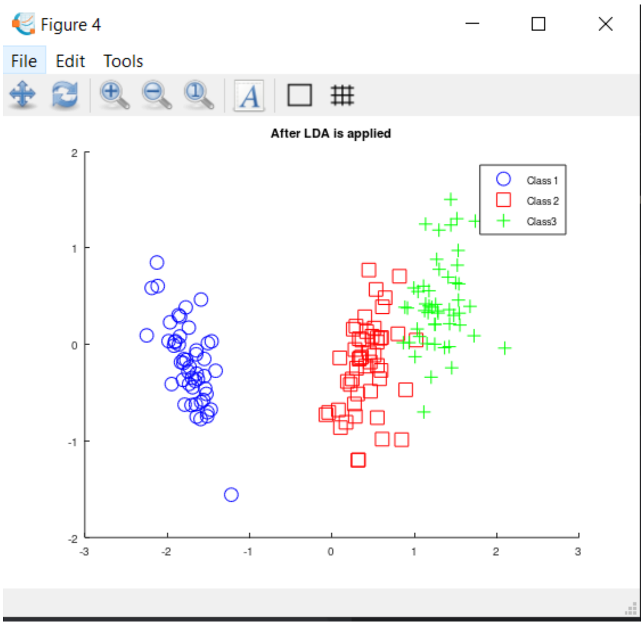


Figure 4
File Edit Tools
After LDA is applied
Class 1
Class 2
Class3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3