Étude des groupes, sous-groupes et transformations de motifs

> UTBM - P2023 - MV51 - TP1 - Julien CONSTANT

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note r_θ la rotation de centre O et d'angle θ, s la symétrie orthogonale de miroir $(O, \vec{i})$.

1. Outils de base

1. **Écrire une fonction `rote(θ, (x, y))` qui, à partir d'un point $m(x, y)$ et de θ fournit le couple (x', y') des coordonnées du point $m' = r_\theta(m)$.**

   On utilise la matrice de rotation usuelle suivante à laquelle on multiplie un point $M(x, y)$:

   $$r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Ce qui donne le code suivant :

   ```
   % rote.m

   function [m] = rote(theta, M)
     theta_deg = theta * pi / 180;
     r = [cos(theta_deg), -sin(theta_deg); sin(theta_deg), cos(theta_deg)];
     m = r * M';
   end
   ```

   Exemple :

   ```
   >> rote(90, [1, 0])

   ans =
     0.0000
     1.0000
   ```

2. **Écrire une fonction `sym((x, y))` qui à partir d'un point $m(x, y)$ fournit le couple (x', y') des coordonnées du point $m' = s(m)$.**

   Pour écrire la symétrie selon l'axe $O\vec{i}$, il suffit de prendre l'opposée de la première composante y du point $M(x, y)$.

   Ce qui donne le code suivant :

```
% symmetry_oi.m

function res = symmetry_oi(M)
  x = M(1);
  y = M(2);
  res = [x -y];
end
```

Exemple :

```
>> symmetry_oi([4, 3])

ans =
   4
  -3
```

2. Étude du groupe diédral $(D_{2n}, \circ)$ pour $n = 4$

On pose d'abord $n = 4$ et $r_\theta = r_{\pi/2}$.

1. **On considère l'ensemble des transformations du plan défini par**

$$D_8 = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_{2n-1}\} = \{r^0, r^1, r^2, r^3, s, s \circ r^1, s \circ r^2, s \circ r^3\}$$

En utilisant les résultats des travaux dirigés, rappeler le lemme fondateur et écrire les fonctions :

   - `trad_dec_qu(k)`**, qui à partir de $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, fournit (α, β) tel que, en base quatre, k s'écrive $\alpha\beta$;**
   - `trad_qu_dec((α, β))`**, qui à partir de (α, β) considéré comme écriture en base quatre, renvoie l'entier décimal k associé.**

Le lemme fondateur vu en TD est le suivant :

$$r^0 = \sigma_0; r^1 = \sigma_1; r^2 = \sigma_2; r^3 = \sigma_3; s = \sigma_4; s \circ r^1 = \sigma_5; s \circ r^2 = \sigma_6; s \circ r^3 = \sigma_7;$$
$$\forall i, j, k \in 0, \ldots, 7 \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$$

Et lorsque $i_10 = (\alpha_i \beta_i)_4; j_10 = (\alpha_j \beta_j)_4$ alors $k = (\alpha\beta)_4$ avec $\alpha = (\alpha_i + \alpha_j) \times \mod (2)$ et $\beta = (-1^{\alpha_j} \beta_j + \beta_j) \times \mod (4)$.

On obtient les fonctions suivantes dans Matlab :

```
% trad_dec_qu.m

function [alpha, beta] = trad_dec_qu(k)
  alpha = fix(k / 4);
  beta = mod(k, 4);
end
```

```
% trad_qu_dec.m

function k = trad_qu_dec(ab)
  alpha = ab(1);
  beta = ab(2);
  k = 4 * alpha + beta;
end
```

Exemple :

```
k = 23;
[a, b] = trad_dec_qu(k);
disp([a, b]); % affiche [5, 3]

ab = [1, 2];
k = trad_qu_dec(ab);
disp(k); % affiche 6
```

2. **Utiliser les résultats antérieurs et le travail préparatoire mené en td, pour construire la table $(tab(i,j))_{0\leq i,j\leq 2n-1}$ de la loi $\circ$ sur D_8. Pour ce faire, on écrira une fonction `compose(σi, σj)` qui à partir des transformations σ_i et σ_j de D_8, détermine l'entier k compris entre 0 et $2n-1$ défini par : $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$.**

   Voici une implémentation de la fonction `compose(σi, σj)` :

```
% compose.m

function k = compose(sigma_i, sigma_j)
  alpha = mod((sigma_i(1) + sigma_j(1)), 2);
  beta = mod((-1)^(alpha_j) * beta_i + beta_j, 4);
  k = trad_qu_dec([alpha, beta]);
end
```

   Pour construire la table de la loi $\circ$ sur D_8, on peut utiliser la fonction suivante :

```
function res = tab(n)
  v = 0 : (2 * n - 1);
  comb = combvec(v, v);
  comb1 = comb(1, :);
  comb2 = comb(2, :);
  arr = arrayfun(@compose, comb1, comb2);
  res = reshape(arr, 2 * n, 2 * n);
end
```

Exemple:

```
>> tab(4)

ans =
  0   1   2   3   4   5   6   7
  1   2   3   0   7   4   5   6
  2   3   0   1   6   7   4   5
  3   0   1   2   5   6   7   4
  4   5   6   7   0   1   2   3
  5   6   7   4   3   0   1   2
  6   7   4   5   2   3   0   1
  7   4   5   6   1   2   3   0
```

3. **Faire le plan des propriétés à établir pour démontrer que $(D_8, \circ)$ est un groupe non abélien; on fournira le plan sommaire des algorithmes qui permettront de l'établir.**
   Écrire une fonction `inverse(i)` qui, à partir de la transformation σ_i envoie le numéro j de son inverse dans le groupe; on évitera tout algorithme de recherche poussif et on privilégiera d'éventuels résultats théoriques obtenus en travaux dirigés.

   Un groupe abélien consiste en un groupe dont la loi de composition est commutative. Pour montrer que D_8 n'est pas abélien, il suffit de démontrer que la loi de composition interne de ce groupe n'est pas commutative.

   Ainsi pour $(D_8, \circ)$, il faut démontrer que $\exists i, j$ tels que $\sigma_i \circ \sigma_j \neq \sigma_j \circ \sigma_i$. Or ce résultat est déjà démontrer lorsqu'on observe le tableau obtenu dans la question précédente. En effet, le tableau n'est pas symétrique par rapport à sa diagonale, démontrant qu'il existe plusieurs cas où $\sigma_i \circ \sigma_j \neq \sigma_j \circ \sigma_i$.

   Pour déterminer l'inverse de σ_i, noté σ_j on peut utiliser la propriété de l'inverse : $\sigma_i \circ \sigma_j = id$. Par conséquent, on doit déterminer i et j tel que $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_0$, il suffit alors de regarder dans le tableau précédemment obtenu pour déterminer l'intersection entre i et j qui correspond à σ_0 :

```
% inverse.m

function j = inverse(i)
  t = tab(4);
  row_i = t(i + 1, :);
  j = find(row_i == 0) - 1;
end
```

4. **Stocker la table relative au groupe diédral D_8.**

```
>> tableau_d8 = tab(4)

tableau_d8 =
  0   1   2   3   4   5   6   7
  1   2   3   0   7   4   5   6
```

```
  2   3   0   1   6   7   4   5
  3   0   1   2   5   6   7   4
  4   5   6   7   0   1   2   3
  5   6   7   4   3   0   1   2
  6   7   4   5   2   3   0   1
  7   4   5   6   1   2   3   0
```

5. **Déterminer l'ensemble des sous-groupes de D_8, en utilisant les sous-groupes engendrés par chacun des éléments du groupe, puis par deux éléments bien choisis.**
    - **Construire les outils logiciels nécessaires en prévoyant leur généralisation éventuelle.**
    - **Fournir le diagramme de Hasse des sous-groupes de D_8. pour la relation d'inclusion.**

    Pour cela, nous allons utiliser deux fonctions pour générer les sous-groupes, la première permet de générer un sous-groupe à partir d'un ensemble donné de fonction, dont chaque fonction du groupe diédral est représentée par son index $(\sigma_0, \sigma_1, ...)$:

```
% sous_groupe.m

function sous_groupe(vec)
  while true
    comb = combvec(vec, vec)
    comb1 = comb(1, :);
    comb2 = comb(2, :);

    arr = arrayfun(@compose, comb1, comb2);
    nvec = unique([vec arr]);

    if isequal(nvec, unique(vec))
      vec = nvec;
      break;
    end

    vec = nvec;

  end
  vec(end + 1; 8) = -1;
  res = vec;
end
```

La seconde, permet à partir de la première de créer tous les groupes généré par un ensemble de fonction. On arrête la génération de sous-groupe lorsque l'on a trouvé tous les sous-groupes possibles (on retombe sur des combinaisons déjà trouvées) :

```
function res = tous_les_sous_groupes()
  elements = 0 : 2 * 4 - 1;
  max_card = 0;
  sub_groups_arr = [];
  index = 0;
```

```
  while max_card < length(elements) - 1:
    index = index + 1;
    vec = nchoosek(elements, index);
    [nvec, ~] = size(vec);

    for row_i = 1 : 1 : nvec
      row_curr = vec(row_i, :);
      ngroup = sous_groupe(row_curr);
      sub_groups_arr = [sub_groups_arr; ngroup];

      if sum(ngroup >= 0) > max_card
        max_card = sum(ngroup >= 0);
      end
    end
  end

  res = unique(sub_groups_arr, 'rows');
end
```

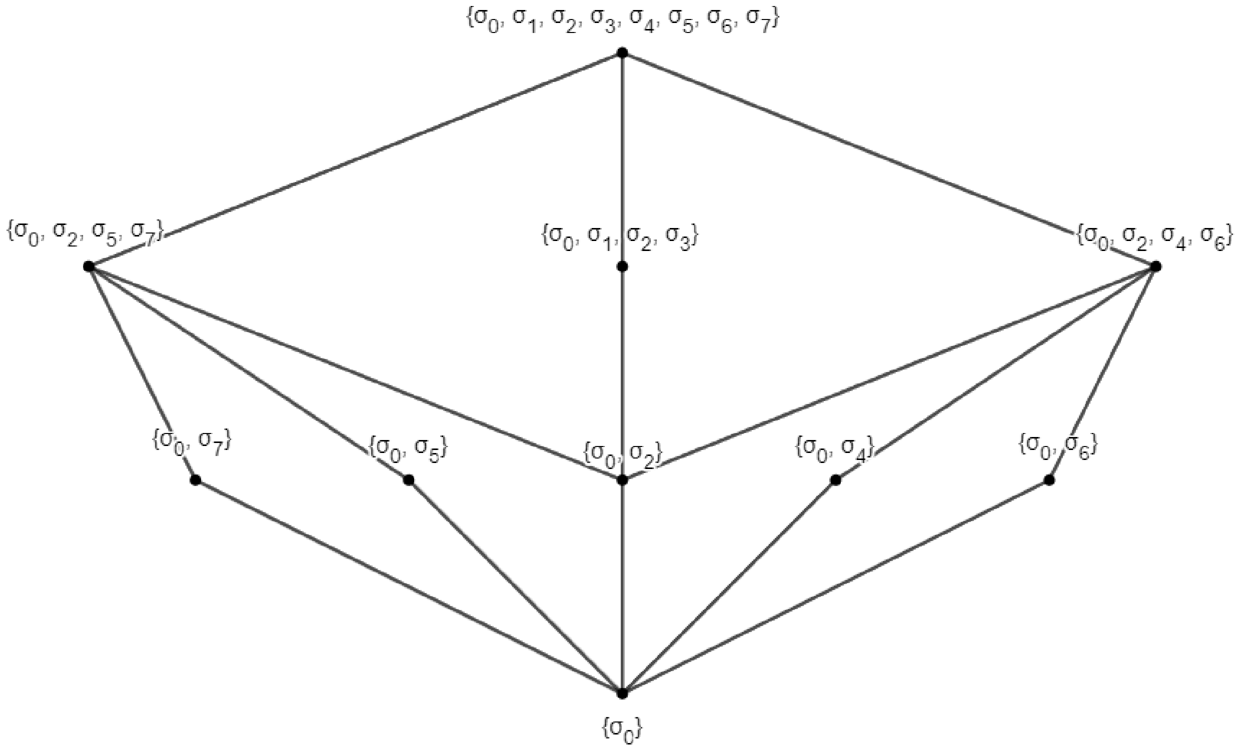
On peut alors générer tous les sous-groupes de D_8 :

```
>> tous_les_sous_groupes()

ans =
  0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
  0  1  2  3 -1 -1 -1 -1
  0  1  2  3  4  5  6  7
  0  2 -1 -1 -1 -1 -1 -1
  0  2  4  6 -1 -1 -1 -1
  0  2  5  7 -1 -1 -1 -1
  0  4 -1 -1 -1 -1 -1 -1
  0  5 -1 -1 -1 -1 -1 -1
  0  6 -1 -1 -1 -1 -1 -1
  0  7 -1 -1 -1 -1 -1 -1
```

On obtient respectivement les ensembles suivants :

$$\{\sigma_0\};\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\};\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7\};\{\sigma_0,\sigma_2\};\{\sigma_0,\sigma_2,\sigma_4,\sigma_6\};\{\sigma_0,\sigma_2,\sigma_5,\sigma_7\};$$
$$\{\sigma_0,\sigma_4\};\{\sigma_0,\sigma_5\};\{\sigma_0,\sigma_6\};\{\sigma_0,\sigma_7\};$$

Et le diagramme de Hasse suivant :



3. Étude du groupe diédral $(D_{2n}, \circ)$ pour n quelconque

Reprendre la théorie antérieure (hormis la question 5, dans un premier temps...) pour un entier n quelconque supérieur à 2. On écrira les fonctions généralisées de celles déjà écrites, en considérant n comme paramètre complémentaire.

Généralisation des fonctions `trad_dec_qu(k)` et `trad_qu_dec((α, β))` pour fonctionner avec n'importe quelle base n :

```
% trad_dec_n.m

function [alpha, beta] = trad_dec_n(k)
  alpha = fix(k / n);
  beta = mod(k, n);
end
```

```
% trad_n_dec.m

function k = trad_n_dec(ab, n)
  alpha = ab(1);
  beta = ab(2);
  k = n * alpha + beta;
end
```

Généralisation de la fonction `compose(σi, σj)` pour fonctionner avec n quelconque, la composée de σ_i par σ_j pour D_{2n} :

```
% compose_n.m

function k = compose_n(sigma_i, sigma_j, n)
  [alpha_i, beta_i] = trad_dec_n(sigma_i);
  [alpha_j, beta_j] = trad_dec_n(sigma_j);

  alpha = mod(alpha_i + alpha_j, n);
  beta = mod((-1)^(alpha_j) * beta_i + beta_j, n);

  k = trad_n_dec([alpha, beta], n);
end
```

Généralisation de la fonction de génération de tableau `tab(n)` :

```
% tab_n.m

function res = tab_n(n)
  v = 0 : (2 * n - 1);
  comb = combvec(v, v);
  comb1 = combinations(1, :);
  comb2 = combinations(2, :);

  arr = arrayfun(@compose_n, comb1, comb2, n * ones(1, length(comb1)));
  res = reshape(arr, 2 * n, 2 * n);
end
```

Généralisation de la fonction inverse `inverse(i)` pour D_{2n} :

```
% inverse_n.m

function j = inverse_n(i, n)
  t = tab_n(n);
  row_i = t(i + 1, :);
  j = find(row_i == 0) - 1;
end
```

Généralisation de la fonction `sous_groupe(i)` pour D_{2n} :

```
% sous_groupe_n.m

function res = sous_groupe_n(i, n)
  while true:
    comb = combvec(vec, vec);
    comb1 = comb(1, :);
    comb2 = comb(2, :);
```

```
    arr = arrayfun(@compose_n, comb1, comb2, n * ones(1, length(comb1)));
    nvec = unique([vec arr]);

    if isequal(nvec, unique(vec))
      vec = nvec;
      break;
    end

    vec = nvec;
  end
  vec(end + 1 : 2 * n) = -1;
  res = vec;
end
```

Généralisation de la fonction `tous_les_sous_groupes()` pour D_{2n} :

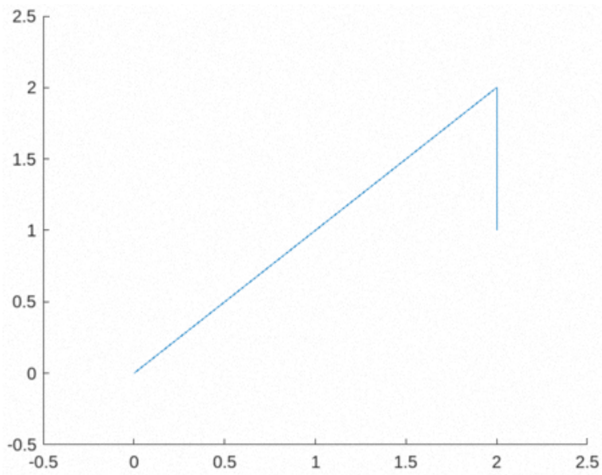
```
% tous_les_sous_groupes_n.m

function res = tous_les_sous_groupes_n(n)
  elements = 0 : 2 * n - 1;
  max_card = 0;
  sub_groups_arr = [];
  index = 0;

  while max_card < length(elements) - 1:
    index = index + 1;
    vec = nchoosek(elements, index);
    [nvec, ~] = size(vec);

    for row_i = 1 : 1 : nvec
      row_curr = vec(row_i, :);
      ngroup = sous_groupe_n(row_curr, n);
      sub_groups_arr = [sub_groups_arr; ngroup];

      if sum(ngroup >= 0) > max_card
        max_card = sum(ngroup >= 0);
      end
    end
  end

  res = unique(sub_groups_arr, 'rows');
end
```

4. Transfère d'un motif

On considère un motif de base $\mathcal{M}_0 = [OA] \cup [AB]$ constitué de la réunion des segments indiqués, avec $A(2,2)$ et $B(2,1)$.
On fait opérer les transformations du plan sur les points, comme d'ordinaire, via $\sigma \times m = \sigma(m)$.

Visualisation du motif de base $\mathcal{M}_0$:

```
% Motif de base M0

>> M = [0, 0; 2, 2; 2, 1];

M =
  0 0
  2 2
  2 1

>> plot(M(:, 1), M(:, 2), -.5, -.5, 2.5, 2.5);
```



1. **Pour chaque sous-groupe H de D_8, représenter le motif $\mathcal{M}_H$ obtenu en faisant opérer le sous-groupe H sur $\mathcal{M}_0$. On pourra écrire une fonction `creat_motif(H)` qui à partir du sous-groupe passé comme paramètre sous une forme choisie par l'étudiant, produira une figure représentant $\mathcal{M}_H$.**

   On réalise donc la fonction `creat_motif(H)` à l'aide des fonctions des précédents points et ce, afin de faire correspondre chaque σ_k à sa combinaison d'application correspondante :

```
% apply_sigma.m

function res = apply_sigma(sigma_k, point, n)
  theta = 360 / n;
  nb_rot = mod(sigma_k, n);
  nb_sym = fix(sigma_k / n);
  npoint = point;

  for i = 1 : nb_sym
    npoint = symmetry_oi(npoint);
  end

  for i = 1 : nb_rot
    npoint = rote(theta, npoint);
  end
```

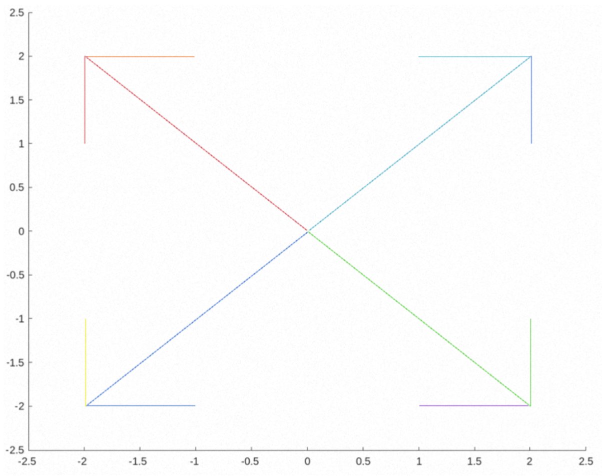
```
    res = npoint;
end
```

```
% apply_sigma_motif

function final = apply_sigma_motif(sigma_k, motif, n)
  nmotif = zeros(size(motif));

  for row_i = 1 : length(motif)
    nmotif(row_i, :) = apply_sigma(sigma_k, motif(row_i, :), n);
  end

  final = nmotif;
end
```

```
% creat_motif.m

function [] = creat_motif(motif, h, n)
  all_motif = [];

  clf
  hold on

  for i = 1 : length(h)
    nmotif = apply_sigma_motif(h(i), motif, n);
    all_motif = [all_motif; nmotif];
    plot(nmotif(:, 1), nmotif(:, 2));
  end

  axis([min(all_motif(:,1)) -.5 max(all_motif(:,1)) +.5 ...
min(all_motif(:,2)) -.5 max(all_motif(:,2)) +.5])

  hold off
end
```

On peut créer alors le motif suivant :

```
>> creat_motif(M, [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], 4);
```



2. **Expliquez brièvement, mais avec précision, quelle stratégie vous adopterez, si vous devez transférer un motif obtenu à partir d'une forme de base élémentaire, sous l'opération d'un groupe donné.**

   Dans la mesure ou les fonctions données précédemment sont déjà généralisées, il suffit de modifier l'angle de rotation θ en fonction de n si l'on souhaite transférer un motif obtenu à partir d'une forme de base sous l'opération d'un groupe quelconque.

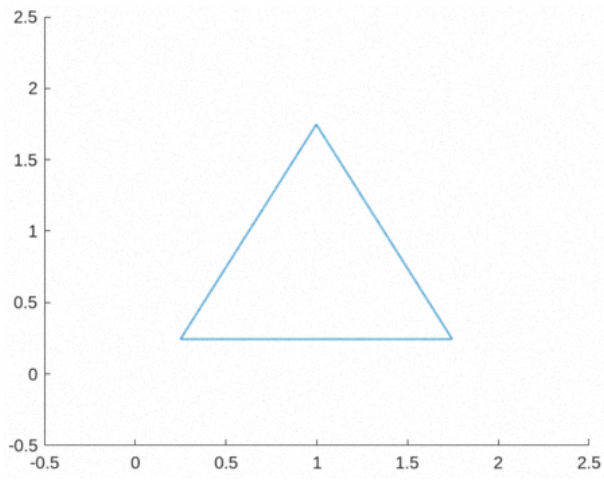
   Par exemple, pour $n = 3$, on a :

$$\theta = 2 \times \pi / 3 = \frac{2\pi}{3}$$

3. **Prolongement éventuel : reprendre l'exercice avec un motif de base $\mathcal{M}_0$ plus élaboré !**

   Prenons le groupe D_{21} à un triangle :

```
>> T = [1 1; 1.5 2; 2 1; 1 1];

T =
   1.0000    1.0000
   1.5000    2.0000
   2.0000    1.0000
   1.0000    1.0000

>> plot(T(:, 1), T(:, 2), .5, .5, 2.5, 2.5);
```



Ce qui donne une fois complet :