Réalisation d'une image fractale

> UTBM - P2023 - MV51 - TP2 - Julien CONSTANT

On rapporte le plan affine au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$
On considère le segment $\mathcal{M}_0 = [oa]$**, où** $a(0, 1)$

1. Lemmes techniques

1. **Écrire une fonction** $homothetie(k)$ **qui à partir du réel** k **non nul, renvoie la matrice projective** H **de l'homothétie de centre** o **et de rapport** k**.**

```
function H = homothetie(k)
    % Initialise une matrice identité
    H = eye(3);
    % Applique le facteur d'échelle sur les dimensions x et y
    H(1 : dim - 1, 1 : dim - 1) = H(1 : dim - 1, 1 : dim - 1) * k;
end
```

> La fonction homothétie crée une matrice de transformation homothétique en utilisant un facteur d'échelle k. La matrice est initialisée comme une matrice identité de dimension 3. Ensuite, le facteur d'échelle est appliqué aux dimensions x et y de la matrice en multipliant les sous-matrices correspondantes.

Exemple :

```
>> homothetie(3)

ans =

    3     0     0
    0     3     0
    0     0     1
```

2. **Écrire une fonction** $rotation(\alpha)$ **qui à partir de la mesure** α **considérée comme un réel ou un symbolique, renvoie la matrice projective** R **de la rotation de centre** o **et d'angle** α**.**

```
function R = rotation(alpha)
    R = [
        [cos(alpha), - sin(alpha), 0];
        [sin(alpha), cos(alpha), 0];
        [0, 0, 1]
    ];
end
```

> La fonction rotation crée une matrice de transformation de rotation en utilisant un angle α. La matrice de rotation est construite en utilisant cosinus et sinus. La matrice résultante est une matrice 3x3 où les éléments $[1, 1]$ et $[2, 2]$ sont déterminés par $cos(\alpha)$, les éléments $[1, 2]$ et $[2, 1]$ sont déterminés par $-sin(\alpha)$, et les éléments $[3, 3]$ sont égaux à 1.

Exemple :

```
>> rotation(pi/2)

ans =

    0.0000   -1.0000         0
    1.0000    0.0000         0
         0         0    1.0000
```

3. **Écrire une fonction $translate(a)$ qui à partir du point a connu par ses coordonnées dans le repère proposé, renvoie la matrice projective T de la translation de vecteur $\overrightarrow{oa}$.**

```
function T = translation(a)
    T = eye(3);
    % Transpose le vecteur de translation pour l'adapter aux dimensions
    % de la matrice
    a = transpose(a);

    % Affecte les composantes x et y du vecteur de translation aux
    % éléments correspondants de la matrice
    T(1 : 2, 3) = a;
end
```

> La fonction translation crée une matrice de transformation de translation en utilisant un vecteur de translation a. La matrice est initialement définie comme une matrice identité de dimension 3. Ensuite, le vecteur de translation est transposé pour s'adapter aux dimensions de la matrice de transformation. Les composantes x et y du vecteur de translation sont ensuite assignées aux éléments correspondants de la matrice de translation (colonne 3, lignes 1 et 2).

Exemple :

```
>> translation([2, 3])

ans =
    1     0     2
    0     1     3
    0     0     1
```

2. Construction d'une fractale

1. **Principe**

   On considère l'ensemble de transformations du plan $G = \{g_0, g_1, g_2\}$ où $g_0 = id$, $g_1 = t \circ r_1 \circ h$ et $g_2 = t \circ r_2 \circ h$

   - t **désigne la translation décrite ci-dessus ;**
   - h **désigne l'homothétie décrite ci-dessus ;**
   - r_1, r_2 **désignent respectivement les rotations décrites ci-dessus d'angles respectifs α et $-\alpha$.**

   On construit alors :

$$\mathcal{M}_1 = \bigcup_{i=0}^{2} g_i(\mathcal{M}_0)$$
$$\mathcal{M}_2 = \bigcup_{i=0}^{2} g_i(\mathcal{M}_1)$$

2. **Écrire une fonction $fract2(\mathcal{M}_0)$ qui génère l'image fractale $I_{\mathcal{M}_0}$ décrite ci-dessus.**

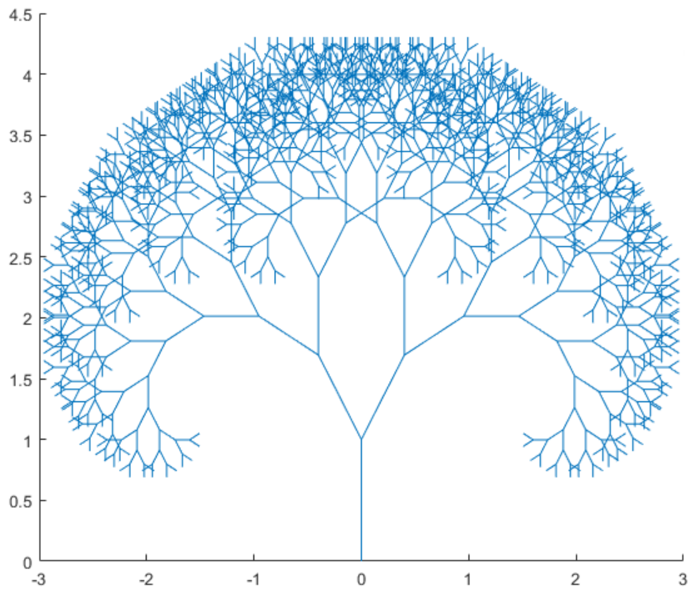
```
function fract2(M0, depth, alpha, h)
    o = M0(:, 1); % Point initial de la fractale
    a = M0(:, 2); % Point final de la fractale
    t = a - o; % Vecteur de translation entre les deux points

    % Trace une ligne entre les deux points
    line([o(1); a(1)], [o(2); a(2)]);

    if depth > 0
        % Réduit la profondeur de 1 à chaque récursion
        depth = depth - 1;

        % Génère les transformations pour la première récursion
        g1 = translation(t) * rotation(alpha) * homothetie(h) * [a(1) -
o(1); a(2) - o(2); 1];
        M_1 = [a(1), o(1) + g1(1); a(2), o(2) + g1(2)];
        fract2(M_1, depth, alpha, h);

        % Génère les transformations pour la deuxième récursion
        g2 = translation(t) * rotation(- alpha) * homothetie(h) * [a(1) -
o(1); a(2) - o(2); 1];
        M_2 = [a(1), o(1) + g2(1); a(2), o(2) + g2(2)];
        fract2(M_2, depth, alpha, h);
    end
end
```

> La fonction `fract2` extrait d'abord les points de départ o et d'arrivée a de la matrice $\mathcal{M}_0$. Ensuite on calcul le vecteur de translation t et on trace avec `line` la première itération de la

> fractale. Enfin on execute l'algorithme récursivement avec pour chaque récursion l'application d'une transformation au vecteur t dans l'ordre suivant : translation, rotation et homothétie. On obtient alors les coordonnées $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ en ajoutant les composantes transformées au point d'origine. Finalement on rappel la fonction `fract2` en diminuant la profondeur de 1 et en lui indiquant $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

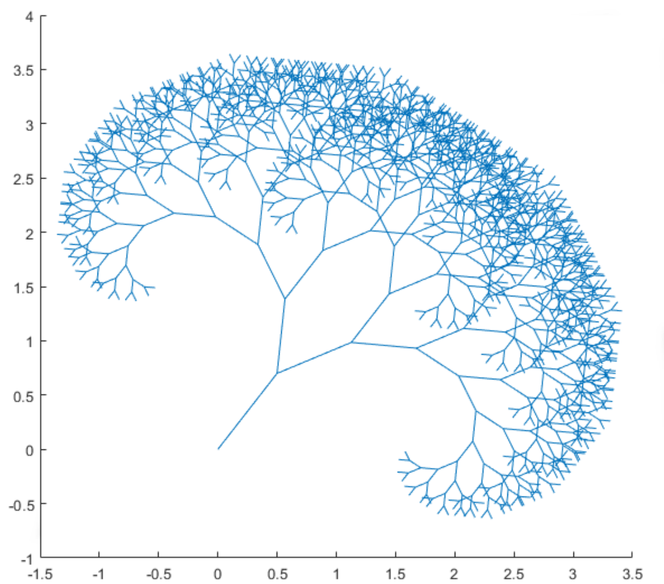
Exemple :

```
>> fract2([0, 0; 0, 1], 10, pi/6, .8);
```



3. **Réutiliser la fonction précédente pour générer une image $I_{\mathcal{M}'_0}$ issue d'un motif de base différent.**

```
>> fract2([0, .5; 0, .7], 10, pi/6, .8);
```



4. **Prolongement éventuels, proposez une version en trois dimensions de la question précédente**

Homothétie en trois dimensions

```
function H = homothetie3(k)
    H = eye(4);
    H(1 : 3, 1 : 3) = H(1 : 3, 1 : 3) * k;
end
```

Exemple :

```
>> homothetie3(3)

ans =
    3      0      0      0
    0      3      0      0
    0      0      3      0
    0      0      0      1
```

Rotation en trois dimensions

```
function R = rotation3(alpha_x, alpha_y, alpha_z)
    Rx = [
        1,              0,                0, 0;
        0, cos(alpha_x), - sin(alpha_x), 0;
        0, sin(alpha_x),   cos(alpha_x), 0;
        0,              0,                0, 1
    ];

    Ry = [
          cos(alpha_y), 0, sin(alpha_y), 0;
                     0, 1,            0, 0;
        - sin(alpha_y), 0, cos(alpha_y), 0;
                     0, 0,            0, 1
    ];

    Rz = [
        cos(alpha_z), - sin(alpha_z), 0, 0;
        sin(alpha_z),   cos(alpha_z), 0, 0;
                   0,              0, 1, 0;
                   0,              0, 0, 1
    ];
end
```

Exemple :

```
>> rotation3(pi/2, pi/2, pi/2)

ans =
    0.000     0.000     1.000     0.000
    0.000     1.000     0.000     0.000
   -1.000     0.000     0.000     0.000
    0.000     0.000     0.000     1.000
```

Translation en trois dimensions

```
function T = translation3(t)
    t = transpose(t);
    T = eye(4);
    T(1 : 3, 4) = t;
end
```

Exemple :

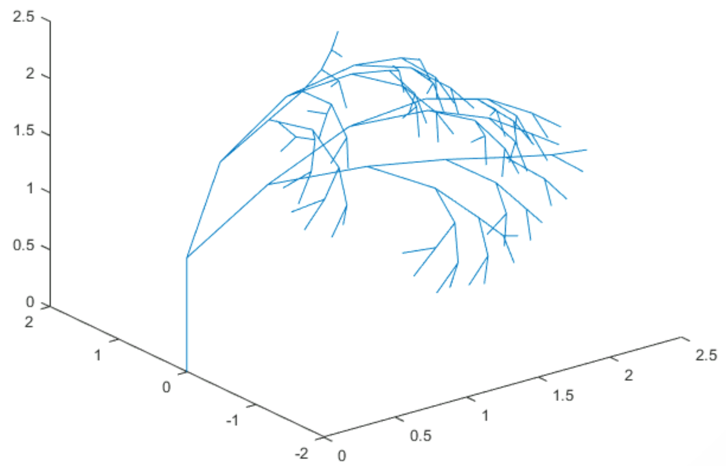
```
>> translation3([1, 2, 3])

ans =
    1     0     0     1
    0     1     0     2
    0     0     1     3
    0     0     0     1
```

Fractale en 3 dimensions

```
function fract3(M0, depth, alpha, h)
    o = M0(:, 1); % Point initial de la fractale
    a = M0(:, 2); % Point final de la fractale
    t = a - o; % Vecteur de translation entre les deux points

    % Trace une ligne entre les deux points
    line(M0(1, :), M0(2, :), M0(3, :));

    if depth > 0:
        depth = depth - 1;

        % Calcul des points de la récursion
        g1 = translation3(t) * rotation3(alpha, alpha, 0) * homothetie3(h) *
[a(1) - o(1); a(2) - o(2); a(3) - o(3); 1];
        M_1 = [a(1), o(1) + g1(1); a(2), o(2) + g1(2); a(3), o(3) + g1(3)];
        fract3(M_1, depth, alpha, h);

        g2 = translation3(t) * rotation3(- alpha, alpha, 0) * homothetie3(h)
* [a(1) - o(1); a(2) - o(2); a(3) - o(3); 1];
        M_2 = [a(1), o(1) + g2(1); a(2), o(2) + g2(2); a(3), o(3) + g2(3)];
        fract3(M_2, depth, alpha, h);
    end
end
```

Exemple :

```
>> fract3([0, 0; 0, 0; 0, 1], 6, pi/6, .8);
```



On remarque que la fractale ne parait pas "complète", pour palier à cela, on peut modifier la fonction `fract3` pour lui ajouter des récursions supplémentaires :

```
g3 = translation3(t) * rotation3(alpha, - alpha, 0) * homothetie3(h) * [a(1)
- o(1); a(2) - o(2); a(3) - o(3); 1];
M_3 = [a(1), o(1) + g3(1); a(2), o(2) + g3(2); a(3), o(3) + g3(3)];
fract3(M_3, depth, alpha, h);

g4 = translation3(t) * rotation3(- alpha, - alpha, 0) * homothetie3(h) *
[a(1) - o(1); a(2) - o(2); a(3) - o(3); 1];
M_4 = [a(1), o(1) + g4(1); a(2), o(2) + g4(2); a(3), o(3) + g4(3)];
fract3(M_4, depth, alpha, h);
```

Exemple :

```
>> fract3([0, 0; 0, 0; 0, 1], 6, pi/6, .8);
```