4. SZEREGI LICZBOWE

1. Korzystając z definicji, zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + (-2)^n)$$

2. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli:

(a) dla każdego $p \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

(b) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lim_{p\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

3. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + \sin n!}{3n^3 - 2} \qquad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^7 n} \qquad \text{(d*)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})$$

* *Wskazówka*: najpierw pokazać, że $\forall n \in \mathbb{N} \ \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

4. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będzie szeregiem zbieżnym oraz $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n \geq 0$. Pokazać, że wówczas zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_n b_{n+1}}$.

5. Udowodnić **ilorazowe kryterium porównawcze**:

Jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geq 0$ *i* $b_n > 0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty)$, *to wówczas*

- *ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- *ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

to znaczy oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.*

6. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(2n-1)!}{n^{2n}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+3)} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1/n}}{(\sqrt{4n^2+2n-1})^{n+1}}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n n^5}{(6+(-1)^n)^n} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\operatorname{arctg} n}} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{100n} - 1)^n$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - n) \qquad \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{6^n}$$

7. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregów, udowodnić, że:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0 \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!)^n}{n^{n^2}} = \infty.$$

8. Zbadać zbieżność szeregów w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}_+$:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$$

W (b) wykorzystać kryterium całkowe.

9. Czy podane szeregi są zbieżne bezwzględnie, warunkowo czy są rozbieżne?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \left(\frac{4n+1}{7n+2}\right)^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

10. Niech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych, a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dowolonym ciągiem liczb rzeczywistych. Oznaczmy $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Wykazać, że:

(a) jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbieżny.

(b) jeśli $a_n \geq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Podać przykład ciągów $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

11. Czy następujące szeregi są warunkowo zbieżne?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{12} n}{n} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + (-1)^n}$$

$$\text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+2)(n+3)/2}}{n+2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}$$

$$\text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}) \cos n\pi$$

12. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}) - (-1)^n}{\ln n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{\pi n}{3}$$

13. Zbadać zbieżność szeregu w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$$