1. CAŁKA RIEMANNA

1. Wykorzystując definicję, obliczyć całkę Riemanna:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}, \quad 0 < a < b.$$

Wsk.: Jako punkty pośrednie można wybrać średnie geometryczne odpowiednich punktów podziału. (Dlaczego to wystarcza do obliczenia całki?)

2. Niech $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$, zaś $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$, gdzie d_n oznacza ilość odcinków podziału π_n. Czy wynika stąd, że $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest normalnym ciągiem podziałów?

3. Korzystając z pojęcia całki, obliczyć następujące granice:

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + \sin\pi \right)$

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2n-1} \right)$

(d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ *Wsk.: Obliczyć najpierw* $\displaystyle \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right)$.

4. Czy z całkowalności funkcji $|f|$ wynika całkowalność f?

5. Stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie dla całki oznaczonej (zacytować), obliczyć

$$\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

6. Udowodnić, że jeśli f jest funkcją ciągłą i nieparzystą na przedziale $[-a, a]$,$a > 0$, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

7. Udowodnić, że jeśli f jest funkcją ciągłą i parzystą na przedziale $[-a, a]$,$a > 0$, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$$

8. Pokazać, że $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)\sin x}{1 + \sin^{2020} x}\, dx = 0.$

9. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[0, 1]$, to

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx.$$

10. Obliczyć $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$

11. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej (przytoczyć), obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}.$$

12. Niech

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x dx \qquad \text{i} \qquad I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x dx.$$

Rozstrzygnąć, czy prawdziwa jest nierówność $I_1 < I_2$.

2. CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

1. Obliczyć podane całki niewłaściwe lub wykazać, że są rozbieżne

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x+1)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}+9\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8xdx}{x^4+4x^2+3}$ (e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{1-x^2}$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

2. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}dx$

3. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych w zależności od parametru(ów)

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^{\alpha}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}(x+2)}{x+1}\,dx$

4. Udowodnić nierówność

$$\int_2^{\infty} e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{4e^4}$$