macierze są równe, jeśli mają równe odpowiednie elementy. Zatem:

→ z porównania I i III macierzy:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3a+4c=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1-2c \\ b=-2d \\ 3(1-2c)+4c=0 \\ 3\cdot(-2d)+4d=1 \end{cases} \Big\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2c=0 & c=\frac{3}{2} \\ -2d=1 & d=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=\frac{3}{2} \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

→ z porównania II i III mac:

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+4b=0 \\ c+3d=0 \\ 2c+4d=1 \end{cases}$$ po rozwiązaniu to samo, co wyżej

Zatem $A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Sprawdzenie:

$A\cdot A^{-1}= \ldots = I_2, \; A^{-1}A = \ldots = I_2$ (ćw.)

Tw. (własności macierzy odwrotnej)
Niech $A, B \in M_{n\times n}, n\in\mathbb{N}$ będą macierzami odwracalnymi, zaś $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wówczas macierze: $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^k, k\in\mathbb{N}$ są odwracalne oraz:

(1) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(5) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$

(6) $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k} =: A^{-k}$

Def. Macierz $A \in M_{n\times n}$ nazywamy nieosobliwą, jeśli $\det A \neq 0$. W przeciwnym przypadku A nazywamy osobliwą.

Tw. (1) Macierz $A \in M_{n\times n}$ jest odwracalna $\Longleftrightarrow$ A jest nieosobliwa

(2) Jeśli $A \in M_{n\times n}$ jest nieosobliwa, to:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot [A_{ij}]^{T}}$$, gdzie

PRAKTYCZNY WZÓR WYZNACZANIA A^{-1}.

$[A_{ij}]_{n\times n}$ jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A (patrz: def. wyznacznika)

Macierz $[A_{ij}]^{T}$ nazywamy macierzą dołączoną.

P Wyznaczyć A^{-1}, jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Sprawdzamy, czy macierz jest nieosobliwa

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{w_1 - 2w_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{rozw. wzgl. } k_3}{=} 1\cdot\underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= -6+1 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ mac. nieosobliwa

$\Rightarrow$ odwracalna.