Ciągi i szeregi funkcyjne (cz. 2)

Zadanie 1. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności oraz sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$. Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2^n}$.

Znamy wzór na sumę szeregu geometrycznego. Dlatego w takim zadaniu szukamy czegoś, co nam przypomina szereg geometryczny, ewentualnie jego całkę lub pochodną. Pomocna też będzie następująca obserwacja:

Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności R_1, a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ma promień zbieżności R_2, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ ma promień zbieżności R, gdzie $R=\min(R_1,R_2)$ i zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Zatem dla $x\in(-R,R)$ (co najmniej, jeszcze do zbadania są krańce przedziału) zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2nx^n+x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

Nie warto w takim zadaniu wyznaczać R_1 i R_2 ze wzoru na promień zbieżności. Promienie nam się pokażą przy wyznaczaniu zbiorów zbieżności odpowiednich szeregów geometrycznych. Dla większej przejrzystości zajmiemy się osobno każdym z szeregów występujących po prawej ostatniego wzoru.

$$\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\overset{\text{Tw.5.12}}{\underset{x\in(-R_1,R_1)}{=\!=\!=}}2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'=$$

$$=\left|\begin{array}{c} q_1(x)=x \\ |q_1(x)|<1 \iff |x|<1 \\ \implies R_1=1 \end{array}\right|=2x\cdot\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\left|\begin{array}{c} q_2(x)=x \\ |q_2(x)|<1 \iff |x|<1 \\ \implies R_2=1 \end{array}\right|=\frac{1}{1-x}$$

Zatem $R=1$ i zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n\overset{x\in(-R,R)}{=\!=\!=}\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x+1}{(1-x)^2}\overset{ozn}{=\!=}S(x)$$

Pamiętamy, że operacje różniczkowania i całkowania szeregów potęgowych nie zmieniają promienia zbieżności. Niestety, nie jest dziedziczona zbieżność lub rozbieżność na krańcach przedziału zbieżności, czyli dla $x=\pm R$. W tym przykładzie, przy obliczaniu sumy pierwszego szeregu wykonaliśmy po drodze operację różniczkowania, ale zbiór zbieżności (**nie mylić** z przedziałem zbieżności) się nie zmienił. Zresztą, nawet gdyby się zmienił, to drugi szereg pozostaje rozbieżny na krańcach jako szereg geometryczny. Można też rzucić okiem na nasz wyjściowy szereg - jest on rozbieżny w ±1, bo w tych punktach nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Pozostaje obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2^n}$. Oczywiście $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2^n}=S\big(\frac{1}{2}\big)=6$ (przed podstawieniem sprawdziliśmy, że $\frac{1}{2}\in(-1,1)$).

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:

a) $f(x) = x\sin(3x^2)$ b) $f(x) = \ln(4 + x^2)$

Obliczyć $f^{(99)}(0)$ i $f^{(100)}(0)$.

Uwagi ogólne:

- W takim zadaniu staramy się wykorzystać gotowe rozwinięcia poznane na wykładzie, a jak się nie da, to patrzymy, czy nasza funkcja lub jej pochodna nie jest przypadkiem sumą szeregu geometrycznego. Jak ognia unikamy obliczania pochodnych, bo z tym są same kłopoty - nie dość, że łatwo o błąd, to jeszcze trzeba udowodnić poprawność wzoru na n-tą pochodną i wykazać, że reszta we wzorze Taylora zbiega do zera. Żaden z przykładów z zestawu 5 dostępnego na stronie prof. Dembińskiej nie wymaga tego ostatniego podejścia.
- Należy pamiętać rozwinięcia funkcji podane w wykładzie 6. I tu podpowiedź dotycząca $\sin x$ i $\cos x$ - jak się pamięta ten pierwszy wzór, to drugi można uzyskać za pomocą różniczkowania szeregu. Pomocny przy zapamiętaniu pierwszego może być fakt, że w rozwinięciu funkcji nieparzystych w szereg Maclaurina występują tylko nieparzyste potęgi x (czyli współczynniki przy tych parzystych są zerami). Analogiczna prawidłowość zachodzi dla funkcji parzystych.
- Nawet jeśli nie jest to jasno sformułowane w zadaniu, zawsze trzeba podać, dla jakich x podane rozwinięcie jest prawdziwe.
- Szeregi potęgowe można całkować i różniczkować wyraz po wyrazie wewnątrz przedziału zbieżności i promień zbieżności R pozostanie ten sam. Stosowne twierdzenia nie mówią natomiast, co się dzieje na brzegach tego przedziału. Trzeba pamiętać, żeby to zbadać.
- Jeżeli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to $f(0) = a_0$.

a) Wiemy, że $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Teraz w miejsce x wstawiamy $3x^2$:

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+3}$$

Rozwinięcie jest prawdziwe dla $x \in \mathbb{R}$. Z jednoznaczności rozwinięcia funkcji f w szereg Maclaurina wynika, że

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!} = \text{współczynnik przy } x^{99}.$$

$4n + 3 = 99$ dla $n = 24$, stąd

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!} = \frac{(-1)^{24} \cdot 3^{49}}{49!} \Longrightarrow f^{(99)}(0) = \frac{99! \cdot 3^{49}}{49!}$$

Podobnie,

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = \text{współczynnik przy } x^{100}.$$

Nie istnieje liczba naturalna n spełniająca równanie $4n + 3 = 100$, zatem ten współczynnik to 0, czyli $f^{(100)}(0) = 0$.

b) Nie mamy żadnego gotowca związanego z logarytmem, ale wykorzystamy to, że pochodna funkcji $g(x) = \ln(1 + x)$ rozwija się łatwo w szereg geometryczny. Mianowicie

$$g'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad q(x) = -x,\ |q(x)| < 1 \iff x \in (-1, 1).$$

Teraz skorzystamy z twierdzenia o całkowaniu szeregu potęgowego (Tw.5.13).

Sposób I (z wykorzystaniem całki nieoznaczonej):
Dla $x \in (-1,1)$:

$$\ln(1+x)+C = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Stałą C wyznaczamy podstawiając $x=0$:

$$\ln(1+x)+C=0 \implies C=0.$$

Przy tej metodzie trzeba koniecznie pamiętać, że $g(0)=a_0$, co nie zawsze jest równe zeru.

Sposób II (z wykorzystaniem całki oznaczonej):
Dla $x \in (-1,1)$:

$$g(x)-g(0)=\ln(1+x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Z kolei przy tej metodzie, łatwo zapomnieć o $g(0)$.

Wiemy, że promień zbieżności uzyskanego szeregu jest równy 1, pozostaje zbadać jego zbieżność dla $x=\pm 1$. Z kryterium Leibniza wykazujemy zbieżność dla $x=1$. Z kolei dla $x=-1$ uzyskany szereg jest rozbieżny jako szereg harmoniczny. Co nie dziwi, bo funkcja $g(x)$ nie jest w tym punkcie określona i jej granica prawostronna jest niewłaściwa.
Ostatecznie po przenumerowaniu:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \quad \text{dla } x\in(-1,1]. \tag{1}$$

Wyprowadzone rozwinięcie uzupełnia listę rozwinięć podanych w Tw. 6.2.
Przy okazji zauważmy, że: $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
Teraz przystępujemy do zasadniczej części zadania. Przekształcamy wzór funkcji $f(x)$, tak żeby można było wykorzystać wzór (1):

$$f(x)=\ln(4+x^2)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right).$$

Wstawiamy $\frac{x^2}{4}$ w miejsce x we wzorze (1) i dostajemy:

$$f(x)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{4^n n}.$$

Równość zachodzi dla x spełniających warunek $\frac{x^2}{4}\in(-1,1]$, czyli $x\in[-2,2]$.
Przed symbolem sumy został nam $\ln 4$. Jest to a_0 naszego szeregu. Akurat w tym przykładzie nie da się go wciągnąć pod symbol sumy.

Teraz pochodne:
$f^{(99)}(0)=0$, bo współczynniki przy nieparzystych potęgach x są zerami.
$f^{(100)}(0)=100!\cdot(\text{współczynnik przy } x^{100}) = 100!\cdot\frac{(-1)^{51}}{4^{50}\cdot 50} = -\frac{100!}{4^{50}\cdot 50}$

Inny sposób: Zauważyć, że f' jest sumą szeregu geometrycznego i zastosować tw. o całkowaniu szeregu potęgowego wyraz po wyrazie.

Zadanie 3. Rozwinąć w szereg Taylora o środku w punkcie $x_0 = 2$ funkcję $f(x) = \frac{5x-12}{x^2-3x}$. Obliczyć $f^{(100)}(2)$.

Zaczynamy od tego, że rozkładamy funkcję $f(x)$ na ułamki proste i tak przekształcamy mianowniki, żeby uzyskać w nich wyrażenia $1 - a(x-2)$, dla odpowiednio dobranego a:

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{x-3} = \frac{4}{2+(x-2)} + \frac{1}{(x-2)-1} = \frac{2}{1-(-\frac{x-2}{2})} - \frac{1}{1-(x-2)}.$$

Teraz zauważamy że te ułamki to sumy pewnych szeregów geometrycznych:

$$\frac{2}{1-(-\frac{x-2}{2})} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{x-2}{2}\Big)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n-1}}$$

dla $q_1(x) = -\frac{x-2}{2}$. Ten szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow x \in (0,4)$. Z kolei

$$\frac{1}{1-(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$$

dla $q_2(x) = x-2$. Ten szereg jest zbieżny zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q_2| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow x \in (1,3)$. Zatem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} - 1\Big)(x-2)^n$$

dla $x \in (1,3)$ (na tym przedziale oba szeregi „składowe” są zbieżne).
Teraz pochodna. Z jednoznaczności rozwinięcia funkcji f w szereg Taylora wynika, że

$$\frac{f^{(100)}(2)}{100!} = \text{współczynnik przy } (x-2)^{100}.$$

Zatem

$$\frac{f^{(100)}(2)}{100!} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} - 1 \Longrightarrow f^{(100)}(2) = 100!\Big(\frac{1}{2^{99}} - 1\Big)$$

Zadanie 4. I na koniec przykład podstępny, do samodzielnego rozwiązania: rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = 2x^{10} - x^4 + 2x + 13$.