Ciągi i szeregi funkcyjne (cz. 1)

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągów funkcyjnych:

$$\text{(a)}\quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)}\quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

(a) Badamy najpierw zbieżność punktową ciągu funkcyjnego (f_n). W tym celu dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ tworzymy ciąg liczbowy $(f_n(x_0)) = (f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \ldots)$ i sprawdzamy jego zbieżność.
Zauważmy, że $f_n(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *(tzn. ciąg liczbowy, o którym mowa w poprzednim zdaniu jest stały)*. Stąd $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Dla $x_0 \neq 0$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{1+n^2x_0^2} = 0, \quad \text{gdyż } n^2x_0^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty \ (x_0^2 > 0).$$

(Należy pamiętać, że w powyższym napisie x_0 jest ustalone, a zmienia się n.)
Ostatecznie $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$.
Funkcję graniczną f ciągu funkcyjnego (f_n) "tworzymy wg recepty": argumentowi x_0 przyporządkowujemy wartość równą granicy ciągu liczbowego $(f_n(x_0))$. Zatem $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Możemy też napisać $f_n \underset{\mathbb{R}}{\to} f \equiv 0$. *(Zwykle w zapisach zamiast x_0 używamy x.)*

Sprawdzimy teraz, czy zbieżność jest jednostajna, tzn. czy granica ciągu (liczbowego) $a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ jest równa zeru. Graficznie kolejne wyrazy ciągu (a_n) mierzą "maksymalną" odległość między wykresami funkcji f_n a wykresem funkcji granicznej f. *(Formalne maksimum może nie istnieć dla pewnych, bądź wszystkich n - por. Przykład 4.2, Wykład 4.)* Zauważmy, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(1 - n|x|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + n^2x^2 \geq 2n|x|,$$

skąd dostajemy:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}} \colon |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

To oznacza, że $\frac{1}{2n}$ jest pewnym ograniczeniem górnym funkcji $|f_n - f|$, a stąd

$$0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wniosek: $f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$. *(Prawdą jest, że $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n}$, gdyż $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$.)*

(b) Mamy jak poprzednio $f_n(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}$, a więc $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Dla $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n(\frac{1}{n^2} + x^2)} = 0.$$

Stąd $f_n \underset{\mathbb{R}}{\to} f \equiv 0$. W celu obliczenia $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ zbadamy monotoniczność funkcji f_n na przedziale $[0, \infty)$ - to wystarczy z uwagi na nieparzystość f_n. Ponieważ

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},\ x \in \mathbb{R},$$

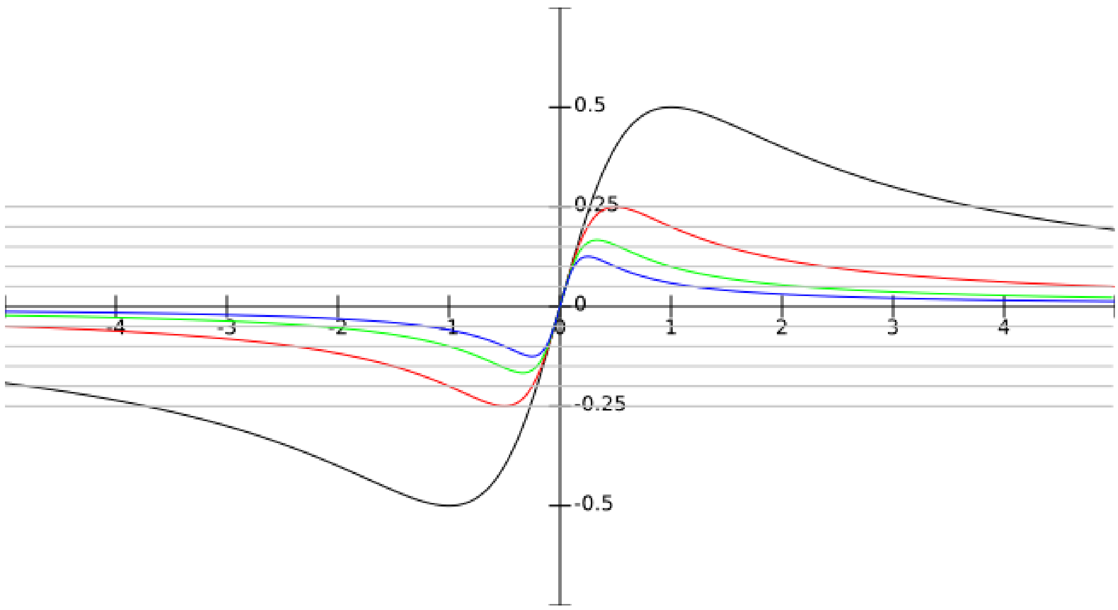
to $f_n \nearrow$ na $(0, \frac{1}{n})$, $f_n \searrow$ na $(\frac{1}{n}, \infty)$ i f_n osiąga maksimum lokalne w $x = \frac{1}{n}$. Ponieważ dodatkowo $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ i $f_n(0) = 0$, to $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$. Zatem ciąg nie jest zbieżny jednostajnie.

Uwaga: W obu podpunktach funkcja graniczna była ciągła. Gdyby tak nie było, nie trzeba obliczać $\sup |f_n - f|$. Wystarczy wykorzystać Wniosek 4.1, Wykład 4 (przy założeniu ciągłości f_n).

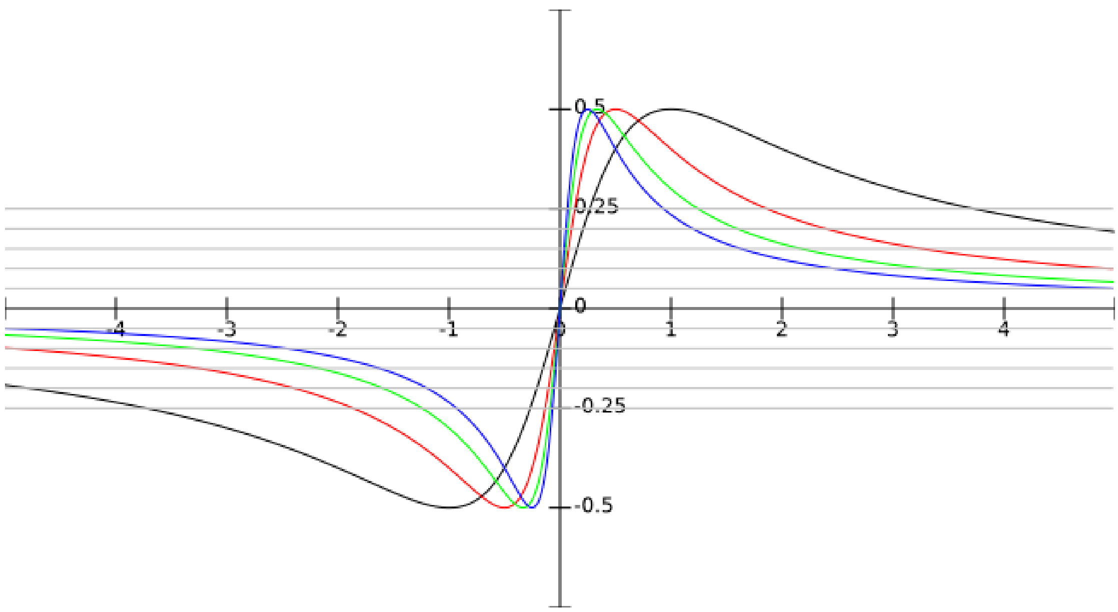
Interpretacja graficzna zbieżności jednostajnej

Def.: $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$, jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ \forall_{x\in A}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

"Wokół" wykresu funkcji granicznej zaznaczamy pasek epsilonowy $f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon$ (na rysunkach poniżej zakreskowany na szaro, $\varepsilon=1/4$). Definicja mówi, że w pasku dowolnej szerokości ($\forall_{\varepsilon>0}$) zawarte są prawie wszystkie ($\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}$) wykresy f_n w całości ($\forall_{x\in A}$): $f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$.



Przykład 1a ($f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f\equiv 0$). Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4. $\varepsilon=1/4$, $n_0\geq 3$.



Przykład 1b ($f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightarrow} f\equiv 0$). Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4.

Uwaga: W przykładzie 1b dla $\varepsilon>1/2$ można przyjąć $n_0=1$ (pasek jest na tyle szeroki, że mieszczą się w nim wszystkie wykresy). Ale dla $\varepsilon\leq 1/2$: n_0 nie istnieje ("garby" na wykresach f_n są za duże, aby zmieścić się w wąskim pasku).

2. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\sqrt{x^2+n^2}}$ na zbiorze $X = [0, \infty)$.

Wykorzystamy kryterium Weierstrassa. Oznaczmy $f_n(x) = \dfrac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\sqrt{x^2+n^2}}$. Zauważmy, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [0, \infty)$ zachodzi:

$$|f_n(x)| \leq \frac{\frac{\sqrt{x}}{n}}{\sqrt{x^2+n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{x}{x^2+n^2}}.$$

Skorzystaliśmy z nierówności $\sin x \leq x$ dla $x \geq 0$. Badając monotoniczność funkcji $g_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$, $x \geq 0$, dochodzimy do wniosku, że $0 \leq g_n(x) \leq g_n(n) = \frac{1}{2n}$. Zatem

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in[0,\infty)}\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}}.$$

Ponieważ szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ jest zbieżny, to nasz szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, \infty)$.

3. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregu:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+7)^n}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^{2n-1} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-1)^{4n}}{16^n}$$

(a) Oznaczenia w rozwiązaniu zgodne z Wykładem 5. Jest to szereg potęgowy o środku $x_0 = -7$ i współczynnikach $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Obliczmy promień zbieżności danego szeregu ze wzoru Cauchy'ego-Hadamarda. Ponieważ

$$1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{2n^2}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

to z tw. o 3 ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, czyli $R = 1$. Przedziałem zbieżności jest więc przedział $(-8, -6)$. Badamy zbieżność szeregu potęgowego na krańcach przedziału zbieżności.
Dla $x = -6$ dostajemy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, który jest rozbieżny (kryt. porównawacze, sprawdzić!).
Dla $x = -8$ mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, który jest zbieżny (kryt. Leibniza, sprawdzić!). Dodatkowo zbieżność jest warunkowa (dlaczego?).
Odp.: Zbiorem punktów zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $[-8, -6)$.

(b) Napiszmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^{2n-1} = 3x + 18x^3 + 81x^5 + \ldots$$

Pierwszy sposób: Potraktujmy x jako parametr, a tym samym nasz szereg jako szereg liczbowy (z parametrem). Znajdziemy zbiór tych parametrów, dla których szereg jest zbieżny (będzie to szukany zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego). Dla $x = 0$ jest to szereg zbieżny (szereg zer). Dla pozostałych x zbadajmy zbieżność bezwzględną (oczywiście dla $x > 0$ jest to szereg o wyrazach dodatnich i poniższy rachunek jest po prostu badaniem zbieżności), korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)3^{n+1}x^{2n+1}|}{|n3^n x^{2n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3x^2(n+1)}{n} = 3x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\wedge\ x \neq 0).$$

Wynika stąd, że dla $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ szereg jest zbieżny. Dla $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ zachodzi $|n3^n x^{2n-1}| = n3^n|x|^{2n-1} \geq 3^n(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2n-1} = 3^n\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3^n} = \sqrt{3}$, a więc $n3^n x^{2n-1} \nrightarrow 0$, czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Ostatecznie zbiorem zbieżności danego szeregu jest przedział $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. *(por. dowód Tw. 5.9)*

Drugi sposób: Zauważmy, że $a_{2n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ oraz $a_{2n-1} = n3^n$, $n = 1, 2, \dots$ (w szeregu są tylko wyrazy z nieparzystymi potęgami). Chcemy skorzystać ze wzoru Cauchy'ego-Hadamarda. Rozpatrzmy 2 podciągi ciągu $(\sqrt[n]{|a_n|})$:

- $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- $\sqrt[2n-1]{|a_{2n-1}|} = \sqrt[2n-1]{n3^n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{3}$, gdyż
  $\sqrt{3} = \sqrt[2n]{3^n} \leq \sqrt[2n-1]{n3^n} \leq \sqrt[2n-1]{2n-1}\,\sqrt[2n-2]{3^{n-1} \cdot 3} = \sqrt[2n-1]{2n-1} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[2n-2]{3} \to \sqrt{3}$

Stąd $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{3}$, czyli $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Przedział zbieżności: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
Dla $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm n\sqrt{3}),$$

zatem w obu przypadkach szereg jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności).

(c) Po podstawieniu $y = (x-1)^4$ dostajemy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 y^n}{16^n}$. Promień zbieżności tego szeregu jest równy $R = 16$. Dla $y = \pm 16$ szereg jest rozbieżny (w obu przypadkach nie jest spełniony warunek konieczny). Zatem zbiorem punktów zbieżności pomocniczego szeregu jest zbiór $(-16, 16)$, czyli nasz szereg jest zbieżny dla x takich, że

$$-16 < (x-1)^4 < 16 \;\Leftrightarrow\; |x-1| < 2 \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, 3).$$