Szeregi liczbowe

Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

   $a_n = 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \geqslant 0.$

   Stosujemy kryterium Cauchy'ego:

   $$\sqrt[n]{a_n} = 2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e} < 1$$

   Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

   Stosujemy kryterium d'Alemberta (jak jest silnia, to najczęściej to kryterium jest użyteczne):

   $a_n = \frac{n^n}{3^n n!} > 0$

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{3} < 1$$

   Zatem na mocy kryterium d'Alemberta badany szereg jest zbieżny.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

   Zastosujemy kryterium porównawcze. Skorzystamy przy tym z nierówności:

   $$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

   $$x \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant \frac{4}{\pi}x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

   (Szacujemy obie funkcje przez styczną i sieczną, w tym drugim przypadku wystarczy zrobić rysunek i wszystko staje się jasne). Zauważmy, że dla wystarczająco dużych n (czyli $n \geqslant 2$) możemy stosować powyższe nierówności (oszacowania górne, ale dolne mogą się przydać w innych zadaniach, dlatego zostały przypomniane). Mamy więc dla $n > 1$:

   $$0 \leqslant a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{4}{\pi n^{\frac{3}{2}}} = b_n$$

   Jak wiadomo z wykładu, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$, czyli także $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny (pomnożenie przez stałą różną od 0 nic tu nie zmienia). Zatem na mocy kryterium porównawczego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}}$

   Na pierwszy rzut nieuważnego oka mogłoby się wydawać, że skoro n podnosimy do potęgi większej niż 1, to już wszystko wiadomo. Tak jednak nie jest, bo wykładnik nie jest stałą

i zbiega do 1, co sugeruje, że szereg jest rozbieżny. Zastosujemy kryterium porównawcze ilorazowe (dowód kryterium to jedno z zadań z zestawu 4).
Mamy $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}} > 0$, weźmy do porównania szereg o wyrazie ogólnym $b_n = \dfrac{1}{n} > 0$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \in (0,\infty)$$

Zatem z rozbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika rozbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zwracamy uwagę na to, że nie ma znaczenia, czy badamy granicę ciągu $\dfrac{a_n}{b_n}$, czy $\dfrac{b_n}{a_n}$. Kryterium rozstrzyga, gdy granica ilorazu należy do $(0,\infty)$. Jeżeli pierwsza jest równa g i należy do tego przedziału, to druga jest równa $1/g$ i też do niego należy.

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}$

Zastosujemy kryterium całkowe. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$, $x \geq 2$. Oczywiście f jest nieujemna (nawet dodatnia). Mamy:

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x(3 - \ln x)}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3.$$

Stąd *(Tw. 9.5, AM 1)* f jest nierosnąca na przedziale $[e^3, \infty)$. Weźmy $n_0 = [e^3] + 1$. Zbadajmy zbieżność całki niewłaściwej:

$$\int_{n_0}^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x}\, dx = \lim_{\alpha\to\infty} \left[\frac{\ln^4 x}{4}\right]_{n_0}^{\alpha} = \infty.$$

Zatem szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny, a więc *(Uwaga 3.1, AM 2)* rozbieżny jest nasz szereg.

(Można inaczej?)

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$

Postawmy sobie bardziej szczegółowe pytanie: jeśli jest zbieżny, to jakiego typu jest to zbieżność? Łatwo widać (np. z tw. o 3 ciągach), że warunek konieczny zbieżności jest spełniony (gdyby nie był, to wnioskowalibyśmy o rozbieżności). Zbadamy teraz zbieżność bezwzględną (tzn. zbieżność szeregu modułów):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}.$$

Ponieważ $\frac{n}{n^2+3} \geq \frac{n}{n^2+3n^2} = \frac{1}{4n} > 0$, to z kryterium porównawczego wynika, że szereg modułów jest rozbieżny, a zatem nasz szereg **nie jest zbieżny bezwzględnie** *(uwaga: nie mówimy «jest rozbieżny bezwzględnie»)*. I znów uwaga: gdyby był zbieżny bezwzględnie, to byłby zbieżny (może brzmi to trywialnie językowo, ale matematycznie zbieżność i zbieżność bezwzględna to osobno definiowane pojęcia z łączącym je związkiem *(Tw. 4.1, AM 2)*). Zauważmy teraz, że spełnione są założenia kryterium Leibniza, gdyż ciąg $a_n = \frac{n}{n^2+3} \to 0$ oraz

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-n^2 - n + 3}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} < 0 \text{ dla } n \geq 2,$$

czyli po pominięciu pierwszego wyrazu ciąg (a_n) jest malejący. A zatem nasz szereg jest **zbieżny** (i to **warunkowo**, bo bezwzględnie zbieżny nie jest). Formalnie (jak w poprzednim zadaniu) trzeba by zastosować *Uwagę 3.1.* Gdyby nie pytać o rodzaj zbieżności, kryterium Leibniza wystarczy.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}}$

Oznaczmy i zauważmy jednocześnie: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$, $b_n = (-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$. Mamy:

- $((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$
- $(\cos\frac{n\pi}{2}) = (0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$
- $(b_n) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$,

a więc $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots)$. Stąd $0 \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq 1$ dla każdego n. Szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta.