5. CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE. SZEREGI POTĘGOWE.

1. Zbadać punktową i jednostajną zbieżność następujących ciągów funkcyjnych:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},\ x \in \mathbb{R}$ (b) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n},\ x \in \mathbb{R}$

(c) $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x},\ x \in [1,\infty)$ (d) $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x},\ x \in [1,2]$

(e) $f_n(x) = n\,\mathrm{e}^{-nx^2},\ x \in (0,+\infty)$ (f) $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n},\ x \in (0,1)$

2. Zbadać punktową i jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{n},\infty\right) \\ -1, & x \in \left(-\infty,-\frac{1}{n}\right] \\ nx, & x \in \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

(a) na zbiorze $\mathbb{R}$, (b) na każdym ze zbiorów $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$, gdzie $a > 0$.

3. Podać przykład ciągu funkcyjnego (f_n) funkcji nieciągłych zbieżnego jednostajnie do funkcji f takiego, że: (a) f jest ciągła, (b) f jest nieciągła. Odpowiedzi uzasadnić.

4. Czy podane szeregi są zbieżne jednostajnie na zbiorach $\mathbf{X}$?

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}, \quad \mathbf{X} = \mathbb{R}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-n^2x}, \quad \mathbf{X} = [0,\infty).$$

5. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X, to na zbiorze X jest zbieżny jednostajnie również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

6. Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{5/2}}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny, a jej pochodna jest funkcją ciągłą.

7. Wyznaczyć zbiory punktów zbieżności następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}(x-3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+7)(x+3)^n}{(n^2+1)9^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^{n+1}}{9+3(-1)^n}\right)^n (1+x)^{3n}$

8. Wyznaczyć zbiory punktów zbieżności oraz sumy następujęcych szeregów:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n2^{n+1}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1)x^{2n}$, obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{9^n}$

9. Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje i podać promienie zbieżności uzyskanych szeregów:

(a) $f(x) = \frac{x}{4-x}$ (b) $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$, obliczyć $f^{(25)}(0)$ (c) $f(x) = \sinh x^2$

(d) $f(x) = \sin 7x \cos 3x$ (e) $f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}$, obliczyć $f^{(200)}(0)$ i $f^{(201)}(0)$ (f) $f(x) = \arcsin x$

10. Rozwinąć w szereg Taylora, w otoczeniu punktu $x_0 = -2$, funkcję $f(x) = \frac{3}{1-4x}$. Podać promień zbieżności uzyskanego szeregu. Obliczyć $f^{(57)}(-2)$.

11. Załóżmy, że f ma pochodne wszystkich rzędów w każdym punkcie przedziału (a,b) oraz istnieją stałe $M > 0,\ c > 0$ takie, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in(a,b)}\ |f^{(n)}(x)| \leq Mc^n.$$

Wykazać, że f jest sumą swojego szeregu Taylora dla każdego $x_0 \in (a,b)$.

12*. Rozważając odpowiednią resztę we wzorze Taylora, wykazać, że funkcja $f(x) = \ln(1+x)$ jest rozwijalna w szereg Taylora w zbiorze $(-1,1]$.