Zadania domowe z Analizy Matematycznej II - część 1 (całka Riemanna, całki niewłaściwe, zastosowania geometryczne całek, szeregi liczbowe)

Zadanie 1. *Obliczyć następujące granice:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{5^3}+\sqrt[n]{5^6}+\sqrt[n]{5^9}+\cdots+\sqrt[n]{5^{3n}}\right)$, **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+(2n-1))^2}\right)$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5n+4}+\frac{1}{5n+8}+\frac{1}{5n+12}+\cdots+\frac{1}{5n+4n}\right)$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{2i-1}{2n}$, **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{2i}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$.

Zadanie 2. *Udowodnić, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[-1,1]$, to*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx.$$

Zadanie 3. *Nie wykonując żadnych rachunków wyznaczyć wartości całek:*

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}dx$, **(b)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^3-2x)e^{|x|}dx$.

Zadanie 4. *Obliczyć podane całki niewłaściwe lub wykazać, że są rozbieżne:*

(a) $\int_5^{\infty}\frac{dx}{(5+x)\sqrt{x}}$, **(b)** $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+2)^3}$, **(c)** $\int_0^1\frac{1-\ln x}{x^2}dx$,

(d) $\int_{-\infty}^0 e^{3x}x^2dx$, **(e)** $\int_0^{\infty}e^{-3x}\sin 2xdx$, **(f)** $\int_6^{\infty}\frac{dx}{x^4-3x^2-4}$,

(g) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, **(h)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}$, **(i)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$,

(j) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3+x^2+x}$, **(k)** $\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Zadanie 5. *Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:*

(a) $\int_0^{2\pi}\frac{2+\sin x-3\cos x}{\sqrt{x}}dx$, **(b)** $\int_{-\infty}^0\frac{(x-1)^4}{e^{-x^2}+1}dx$.

Zadanie 6. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:*

(a) $y=4x-x^2$ *i* $x+y=0$, **(b)** $y=6\sqrt{x}$ *i* $y=x+8$,

(c) $y=\frac{8}{x^2(x^2+16)}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$, **(d)** $y=\arcsin x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$,

(e) $y=\frac{x^2}{2}$ *i* $y=\frac{1}{1+x^2}$.

Zadanie 7. *Udowodnić, że pole powierzchni elipsy o równaniu* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *dane jest wzorem* $P = \pi ab$.

Zadanie 8. *Obliczyć pole obszaru leżącego wewnątrz kardioidy* $r = 1 - \cos\theta$ *i na zewnątrz okręgu* $r = 1$.

Zadanie 9. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach*

(a) $r = \sin^2\theta$, **(b)** $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + 4y^2$.

Zadanie 10. *Obliczyć długości łuków krzywych danych poniższymi funkcjami:*

(a) $y = \sqrt{1 - x^2}$ *dla* $0 \le x \le 0,5$, **(b)** $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ *dla* $x \in [0, 1]$,

(c) $y = \ln(1 - x^2)$ *dla* $0 \le x \le 0,5$.

Zadanie 11. *Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX*

(a) *krzywej* $y = \mathrm{tg}x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, **(b)** *półokręgu o równaniu* $x^2 + y^2 = 2y,\ 0 \le y \le 1$.

Zadanie 12. *Czy podane szeregi są zbieżne? Jeśli tak, wyznaczyć ich sumę.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$,

ODPOWIEDZI:

1. (a) $\int_0^1 5^{3x}dx = \frac{124}{3\ln 5}$ (b) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{3}$ (d) $\int_0^1 \frac{dx}{5+4x} = \frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}$
(e) $\int_0^1 \mathrm{arctg}x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ (f) $\int_0^1 \ln(1+2x)dx = \frac{3\ln 3}{2} - 1$ i granica $= \exp\left(\frac{3\ln 3}{2} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{e}$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(\sin x)dx + \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$
$\int_{-\pi}^{0} f(\sin x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(\sin(x+2\pi))dx = \{t = x + 2\pi\} = \int_{\pi}^{2\pi} f(\sin t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(\sin x)dx$
Stąd $\int_{-\pi}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(\sin x)dx + \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx$

3. WSKAZÓWKA: Wystarczy zauważyć, że funkcje podcałkowe są nieparzyste.

4. (a) $\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$ (zastosować podstawienie $t = \sqrt{x}$) (b) $\frac{1}{4}$
(c) całka rozbieżna ($\lim_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{\alpha}^{1} = \infty$)
(d) $\lim_{T\to -\infty}\left[(\frac{1}{3}T^2 - \frac{2}{9}T + \frac{2}{27})e^{3T}\right]_T^0 = \frac{2}{27}$
(e) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-3T}(2\cos 2T + 3\sin 2T)}{13}\right]_0^T = \frac{2}{13}$
(f) $\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{20}\ln|\frac{T-2}{T+2}| - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}T\right]_6^T = -\frac{\pi}{10} + \frac{1}{20}\ln 2 + \frac{1}{5}\mathrm{arctg}6$
(g) $\lim_{S\to 0^+}[\arcsin(x-1)]_S^1 + \lim_{T\to 2^-}[\arcsin(x-1)]_1^T = \pi$
(h) 0 (zastosować podstawienie: $t = x^2$)
(i) całka rozbieżna
(j) $\lim_{T\to\infty}\left[\ln\frac{T}{\sqrt{T^2+T+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2T+1}{\sqrt{3}}\right]_1^T = \ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$
(k) całka rozbieżna, ponieważ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{-1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1/2}^{0}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
i np. całka $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ jest rozbieżna, co wynika z kryterium porównawczego:
$\forall_{x\in(0,\frac{1}{2}]}\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \ge \frac{1}{x} > 0$ oraz $\int_0^{1/2}\frac{dx}{x} = \infty$

5. (a) zbieżna bezwzględnie (b) rozbieżna

6. (a) $\frac{125}{6}$ (b) 8 (c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{8}(\mathrm{arctg}\frac{3}{4} - \mathrm{arctg}\frac{1}{4})$ (d) $\pi - 2$ (e) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

8. pole$=\frac{\pi}{4} + 2$ **9.** (a) pole$=\frac{3\pi}{8}$ (b) pole$=\frac{5\pi}{2}$.

10. (a) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$ (b) $\int_0^1\sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\right)^2}dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$ (c) $\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx = \ln 3 - \frac{1}{2}$

11. (a) $\pi(1 - \frac{\pi}{4})$ (b) $\frac{10\pi}{3} - \pi^2$ **12.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\ln 2$