Kontynuując:

$$\det A = a_{21}\cdot\underbrace{(-1)^{2+1}}_{=-1}\cdot M_{21} + a_{22}\cdot\underbrace{(-1)^{2+2}}_{=1}\cdot M_{22} =$$

$$= -a_{21}\cdot\det[a_{12}] + a_{22}\cdot\det[a_{11}] =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

Komentarz: Aby policzyć wyznacznik macierzy kwadr. st. 2 należy od iloczynu elementów na głównej przekątnej odjąć iloczyn pozostałych dwóch elementów.

Przykład „na liczbach":

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = \underset{a_{11}}{-3}\cdot\underset{a_{22}}{(-5)} - \underset{a_{21}}{(-1)}\cdot\underset{a_{12}}{7} = 15+7 = 22$$

(2) $n=3$. Niech $A=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Obliczymy $\det A$ dwoma sposobami:

(a) Rozwinięcie Laplace'a względem k_3 (trzeciej kolumny)

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$ { bierzemy kolejne elementy k_3 i mnożymy je przez ich dopełnienia algebraiczne; powstałe iloczyny dodajemy do siebie }

$$= \underset{a_{13}}{7}\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{M_{13}} + \underset{a_{23}}{1}\cdot\underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{M_{23}} + \underset{a_{33}}{5}\cdot\underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{M_{33}}$$

$$= 7\cdot(2\cdot 0-(-1)\cdot 5) - 1\cdot(-3\cdot 0-(-1)\cdot(-1)) + 5(-3\cdot 5 - 2\cdot(-1)) =$$
$$= 7\cdot 5 - (-1) + 5\cdot(-13) = 35+1-65 = -29$$

(b) Rozwinięcie Laplace'a względem w_3 (trzeciego wiersza)

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{-1}_{a_{31}}\cdot\underbrace{(-1)^{3+1}}_{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}_{M_{31}} + \underbrace{5}_{a_{33}}\cdot\underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{M_{33}}$$

$$= -1\cdot(-1-35)+5\cdot(-15+2) = 36+5(-13) = 36-65 = -29$$

Komentarz. Sposób (b) jest korzystniejszy, bo z uwagi na zerowy element w trzecim wierszu, jeden składnik w rozwinięciu Laplace'a wyzerował się.

(3) Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{rozwinięcie Laplace'a}}{\underset{\text{wzgl. } k_1}{=}} a_{11}\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{rozwinięcie Laplace'a}}{\underset{\text{wzgl. „nowej" } k_1}{=}} a_{11}\cdot a_{22}\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{itd...}}{=} a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

Fakt. Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej, trójkątnej dolnej i diagonalnej jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej.