WYKŁAD 4

Wyznacznik macierzy kwadratowej – def i własności
Macierz odwrotna

Def. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $n\in\mathbb{N}$ nazywamy liczbę oznaczoną $\det A$ zdefiniowaną rekurencyjnie:

(1) $n=1 \Rightarrow \det[a_{11}]=a_{11}$ (tzn. wyznacznik macierzy 1×1 jest równy jedynemu elementowi tej macierzy)

(2) $n\geq 2 \Rightarrow \det A = a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$ (*),
gdzie i jest dowolną liczbą naturalną ze zbioru $\{1,2,3,\ldots n\}$, natomiast $A_{ik}=(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$, $k=1,2,\ldots n$, gdzie M_{ik} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i k-tej kolumny.

Liczbę A_{ik} nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} macierzy A, zaś liczbę M_{ik} nazywamy minorem stopnia $(n-1)$ macierzy A (odpowiadającym elementowi a_{ik}).

Wzór (*) nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem i-tego wiersza.

Uwagi

(1) Wzór (*) można zastąpić rozwinięciem Laplace'a względem j-tej kolumny:

$$\det A = a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj},\ j\in\{1,2,\ldots n\}$$

(2) wartość wyznacznika nie zależy od wyboru wiersza (kolumny), względem którego (której) dokonujemy rozwinięcia.

Inne oznaczenia wyznacznika (poza det A):

$$|A| \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Uwaga
w oznaczeniu macierzy używamy nawiasów kwadratowych (nie należy tych oznaczeń mylić!)

Przykłady

1) $n=2$. Chcemy obliczyć wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 2: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = $ {wybieramy dowolny (z dwóch) wiersz np. drugi; tzn. wybieramy „i" z definicji ($i=2$)}

$= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} = $ {A_{21} – dopełnienie algebraiczne elementu a_{21} tzn. $A_{21}=(-1)^{2+1} \cdot M_{21}$, gdzie M_{21} to wyznacznik MNIEJSZEJ macierzy powstałej przez skreślenie w mac. A drugiego wiersza i pierwszej kolumny

czyli $M_{21} = \det[a_{12}] = a_{12}$

Podobnie
$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} =$
$= (-1)^4 \cdot \det[a_{11}] = a_{11}$