② Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych i macierz dołączoną

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Zgodnie z definicją:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

dopełnienie algebraiczne odpowiadające elementowi a_{ij}

wyznacznik macierzy powstałej z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

(3) Wyznaczamy A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[A_{ij}\right]^T = -\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$A\cdot A^{-1} = \ldots = I_3$, $A^{-1}\cdot A = \ldots = I_3$ (ćw.)

Równania macierzowe

1) Równanie $AX=B$, gdzie $A\in M_{n\times n}$, $B\in M_{p\times n}$, $\det A\neq 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\boxed{X=A^{-1}B} \quad (X\in M_{n\times p})$$

Analogicznie:

2) $XA=B$, $A\in M_{n\times n}$, $B\in M_{p\times n}$, $\det A\neq 0$

$$\boxed{X=BA^{-1}} \quad (X\in M_{p\times n})$$

3) $AXB=C$, $A\in M_{n\times n}$, $B\in M_{p\times p}$, $C\in M_{n\times p}$, $\det A, \det B\neq 0$

$$\boxed{X=A^{-1}CB^{-1}} \quad (X\in M_{n\times p})$$

Uzasadnienie 1):

$AX=B \quad /\cdot A^{-1}$ (każdą stronę równania mnożymy przez A^{-1} – istn. z def. lewostronnie)

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}\cdot B$ $\qquad$ $A^{-1}A=I$ (z def.)

$\underline{X=A^{-1}B}$ $\qquad$ $IX=X$ (mac. jednostkowa jest elementem neutr. mnoż. mac.)