```
Filtragem Adaptativa - TIP7188

Kenneth Brenner dos Anjos Benicio - 519189

Professores: Charles Casimiro e Guilherme Barreto
```

Lista de Exercícios 02: Filtragem Linear Ótima

Sumário

Problema 1

Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação $\mathbf{R}_\mathbf{x}$ de um vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ é dada por

$$\mathbf{R}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}_{\mathbf{x}d}$ entre o vetor de entrada $\mathbf{x}$ e a resposta desejada $d(n)$ é

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}d} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.

SOLUÇÃO:

Isso pode ser realizado de forma simples pelo uso da equação do filtro ótimo de wiener

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{opt} &= \mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd}, && (1)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, && (2)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, && (3)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}. && (4)
\end{aligned}$$

(b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?

SOLUÇÃO:

$$\mathbb{E}\{e^2(n)\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xd} + w^T\mathbf{R}_X\mathbf{w} \qquad (5)$$

Ao aplicar o vetor descoberto no item anterior obtem-se o erro mínimo

$$\begin{aligned}
e_{min} &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}_{opt}^T\mathbf{p}_{xd} + w_{opt}^T\mathbf{R}_X\mathbf{w}_{opt}, && (6)\\
e_{min} &= \sigma_d^2 - 2\begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, && (7)\\
e_{min} &= \sigma_d^2 - 2 * 0.25 + 0.25, && (8)\\
e_{min} &= \sigma_d^2 - 0.25. && (9)
\end{aligned}$$

Dessa forma o erro é dependente da variância do sinal desejado.

(c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz $\mathbf{R}_\mathbf{x}$ e de seus autovetores associados.

SOLUÇÃO:

Utilizando a decomposição matricial em autovalores (EVD) é possível reescrever a matrix de correlação como abaixo

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}. \qquad (10)$$

A matriz $\mathbf{\Lambda}$ contémm os autovalores λ_i e a matriz $\mathbf{Q}$ os respectivos autovetores. Em posse dessa relação é possível reescrever a equação do fitro ótimo de wiener como

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{opt} &= \mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd}, && (11)\\
\mathbf{w}_{opt} &= (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1})^{-1}\mathbf{p}_{xd}, && (12)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{p}_{xd}. && (13)
\end{aligned}$$

É possível verificar de imediato que essa propriedade é bem útil uma vez que a inversa de uma matriz diagonal é certamente menos custosa que a inversa da matriz de autocorrelação completa.

Problema 2

Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

em que $J_{\min}$ é o mínimo erro médio quadrático, $\mathbf{w}$ é o filtro de Wiener, e $\mathbf{A}$ é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix},$$

em que $d(n)$ é o sinal desejado e $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

SOLUÇÃO:

Inicialmente deve-se calcular a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbb{E}\{\begin{bmatrix} d(n) \\ x(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d(n)^T & x(n)^T \end{bmatrix}\}, && (14)\\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{d(n)d(n)^T\} & \mathbb{E}\{d(n)x(n)^T\} \\ \mathbb{E}\{x(n)d(n)^T\} & \mathbb{E}\{x(n)x(n)^T\} \end{bmatrix}. && (15)
\end{aligned}$$

Dando as devidas nomeações aos termos a expressão acima reduz-se a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{xd}^T \\ \mathbf{p}_{xd} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Multiplicando-se a expressão acima pelo vetor $[1 - \mathbf{w}]^T$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \mathbf{p}_{xd}^T \\ \mathbf{p}_{xd} & \mathbf{R}_X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix}, && (17)\\
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{xd}^T\mathbf{w} \\ \mathbf{p}_{xd} - \mathbf{R}_X\mathbf{w} \end{bmatrix}. && (18)
\end{aligned}$$

Por fim, resta apenas aplica a equação ótima do filtro de wiener $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{xd}^T\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd} \\ \mathbf{p}_{xd} - \mathbf{R}_X\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd} \end{bmatrix}, && (19)\\
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{xd}^T\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd} \\ \mathbf{p}_{xd} - \mathbf{I}_X\mathbf{p}_{xd} \end{bmatrix}, && (20)\\
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{xd}^T\mathbf{R}_X^{-1}\mathbf{p}_{xd} \\ 0 \end{bmatrix}, && (21)\\
\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{min} \\ 0 \end{bmatrix}. && (22)
\end{aligned}$$

Problema 3

Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura abaixo ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

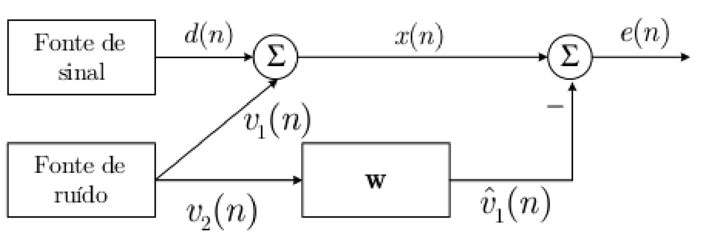

Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

SOLUÇÃO:

Inicialmente é necessário calcular a equação de erro do sistema aqui proposto

$$e(n) = x(n) - \hat{v_1} = x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n) \qquad (23)$$

Em seguida faz-necessário calcular a função mean square error(MSE) que é facilmente fornecida pela manipulação algébrica abaixo

$$\begin{aligned}
e^2(n) &= [x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)][x(n) - \mathbf{w}^T v_2(n)]^T, && (24)\\
e^2(n) &= x^2(n) - 2x(n)\mathbf{w}^T v_2(n) + \mathbf{w}^T v_2(n) v_2^T \mathbf{w}. && (25)
\end{aligned}$$

Sendo considerado que o filtro apresenta coeficientes constantes é possível aplicar o operador Valor Esperado de forma a obter a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{e^2(n)\} &= \mathbb{E}\{x^2(n)\} - 2\mathbf{w}^T\mathbb{E}\{x(n)v_2(n)\} + \mathbf{w}^T\mathbb{E}\{v_2(n)v_2(n)^T\}\mathbf{w}, && (26)\\
\mathbb{E}\{e^2(n)\} &= \sigma_x^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w}. && (27)
\end{aligned}$$

Por fim, basta encontrar o $\mathbf{w}$ que minimiza o MSE acima. Para chegar a esse fim, calcula-se o gradiante quanto ao $\mathbf{w}$ igualando-se o resultado da operação a zero

$$\begin{aligned}
\nabla_\mathbf{w}\mathbb{E}\{e^2(n)\} &= -2\mathbf{p}_{xv_2} + 2\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} = 0, && (28)\\
-\mathbf{p}_{xv_2} + \mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} &= 0, && (29)\\
\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} &= \mathbf{p}_{xv_2}. && (30)
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade matricial abaixo é possível resolver a equação acima para obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{R}_{v_2}\mathbf{w} &= \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, && (31)\\
\mathbf{I}\mathbf{w} &= \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}, && (32)\\
\mathbf{w} &= \mathbf{R}_{v_2}^{-1}\mathbf{p}_{xv_2}. && (33)
\end{aligned}$$

Onde é possível reescrever o termo final como

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{v_2}^{-1}(\mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{v_1} + \mathbf{p}_{v_2}) \qquad (34)$$

Problema 4

Seja um processo estocástico dado pela expressão abaixo onde $S(n)$ é um processo estocástico WSS dado e a é uma constante.

$$x(n) = s(n+a) + s(n-4a),$$

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo $D(s) = s(n-a)$, o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal $d(n)$ possua média nula e variância unitária.

(a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

SOLUÇÃO:

(b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.

SOLUÇÃO:

(c) Compare as soluções dos dois.

SOLUÇÃO:

Problema 5

Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação: $r_x(0) = 1$ e $r_x(1) = 0$. Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é

$$\sigma_d^2 = 24.40$$

e o vetor de correlação cruzada é $\mathbf{p}_{\mathbf{x}d} = [2 \;\; 4.5]^T$. Encontre:

(a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.

SOLUÇÃO:

A partir dos coeficientes fornecidos é possível escrever a matrix de correlação necessário para o filtro ótimo de wiener como uma matriz identidade de ordem 2

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Ao utilizar a solução fechada do problema chega-se ao seguinte vetor resultado

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{opt} &= \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{xd}, && (36)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix}, && (37)\\
\mathbf{w}_{opt} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix}. && (38)
\end{aligned}$$

(b) A superfície definida por $J(\mathbf{w})$. Faça um gráfico da mesma.

SOLUÇÃO:

Para obter a expressão que define a superfície basta desenvolver a expressão para o erro médio

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(w) &= \mathbb{E}\{e^2(n)\}, && (39)\\
\mathbf{J}(w) &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xd} + w^T\mathbf{R}_X\mathbf{w}. && (40)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente na expressão da superfície

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(w_0, w_1) &= 24.40 - 2\begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 w_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, && (41)\\
\mathbf{J}(w_0, w_1) &= 24.40 - 4w_0 - 9w_1 + w_0^2 + w_1^2. && (42)
\end{aligned}$$

Utilizando um software gráfico é possível traçar a superfície variando os coeficientes de filtro dentro de um intervalo de $[-100, 100]$