Nom : **Groupe :**

LIFLC – Interro n^{o}4'

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Tout document interdit.

Question 1. On considère les signatures suivantes :

- Symboles de termes : $\{\texttt{rouget} : 0,\ \texttt{requin} : 0,\ \texttt{thon} : 0,\ \texttt{laitue\_de\_mer} : 0\}$,
- Symboles de prédicats : $\{= : 2, \texttt{Mange} : 2,\ \texttt{Poisson} : 1,\ \texttt{Algue} : 1\}$.

Modéliser en logique du premier ordre les propositions suivantes :

1. Il y a un poisson qui mange une algue mais aucun poisson.
2. Si un poisson est mangée par un unique poisson alors il existe une algue qui est mangée par tout poisson.

Question 2. Soit E un ensemble défini inductivement par

$$\begin{cases} & \rightarrow & F \\ e & \rightarrow & Z(n,e) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ e_1, e_2 & \rightarrow & W(e_1, e_2) \end{cases}$$

1. Décrire (détailler les cas) comment prouver par induction qu'une propriété P est vérifiée par tout élément de E.
2. Que peut-on dire de E si on n'a pas la première règle ?

Question 3. On considère les signatures suivantes :

- Symboles de termes : $\{a : 0, b : 0\}$
- Symboles de prédicats : $\{A : 1, B : 1, C : 1, D : 1\}$

Montrer que le séquent suivant est prouvable à l'aide de la déduction naturelle :

$$\{(\exists z, C(z)), (\forall x, C(x) \Rightarrow A(x) \Rightarrow D(x)), \forall x, A(x)\} \vdash \exists y, D(y)$$

Assez difficile, on vérifiera bien que l'arbre de preuve décrit *en partant des axiomes* la construction du séquent.

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma\ \textit{ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$

Nom : **Groupe :**

LIFLC – Interro n°4

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Tout document interdit.

Question 1. On considère les signatures suivantes :
- — Symboles de termes : $\{\texttt{papillon} : 0,\ \texttt{mante} : 0,\ \texttt{frelon} : 0,\ \texttt{mirabelle} : 0\}$,
- — Symboles de prédicats : $\{\texttt{Mange} : 2,\ \texttt{insecte} : 1,\ \texttt{fruit} : 1\}$.

Modéliser en logique du premier ordre la proposition suivante :
1. Il y a un insecte qui mange tous les insectes mais aucun fruit.
2. S'il y a un insecte qui mange un insecte alors tout insecte est mangé par un insecte qui mange aussi un fruit (le même pour tous).

Question 2. Soit E un ensemble défini inductivement par

$$\begin{cases} & \rightarrow & V(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ e_1, e_2 & \rightarrow & R(e_1, e_2) \\ e_1, e_2 & \rightarrow & S(e_1, e_2) \end{cases}$$

1. Décrire (détailler les cas) comment prouver par induction qu'une propriété P est vérifiée par tout élément de E.
2. Que peut-on dire de E si on n'a pas la première règle ?

Question 3. On considère les signatures suivantes :
- — Symboles de termes : $\{e_1 : 0, e_2 : 0\}$
- — Symboles de prédicats : $\{H : 1, I : 1, J : 1, K : 1\}$

Montrer que le séquent suivant est prouvable à l'aide de la déduction naturelle :

$$\{(\forall x, J(x)), (\forall x, J(x) \Rightarrow I(x) \Rightarrow H(x)), \exists x, I(x)\} \vdash \exists y, H(y)$$

Assez difficile, on vérifiera bien que l'arbre de preuve décrit *en partant des axiomes* la construction du séquent.

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma \textit{ ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$