JFTT - Lista 4 Zadanie 6

Jakub Jaśków 268416

2 lutego 2024

Polecenie

Pokaż, że język

$$L = \{a^n b^n c^i : i \neq n\}$$

nie jest bezkontekstowy.

Lematy

Lemat o Pompowaniu (L.o.P.

Lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych - niech L - język bezkontekstowy. Istnieje wtedy n - (stała pompowania) zależna tylko od danego języka L taka, że jeżeli $z \in L \wedge |z| \geq n$ to $z = uvwxy$ oraz:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- $(\forall i \geq 0)\ uv^i wx^i y \in L$

Lemat Ogdena

Lemat Ogdena - niech L - język bezkontekstowy. Instnieje wtedy n - (stała pompowania) zależna od danego języka L taka, że jeśli w słowie $z \in L$ oznaczymy $\geq$ n liter to z możemy zapisać jako $z = uvwxy$ oraz:

- v i x mają łącznie oznaczoną co najmniej jedną literę
- vwx ma co najwyżej n oznaczonych liter
- $(\forall i \geq 0)\ uv^i wx^i y \in L$

Rozwiązanie

0.1 L.o.P dla języków bezkontekstowych

Najpierw sprawdźmy czy zadanie da się rozwiązać za pomocą **L.o.P dla języków bezkontekstowych**.

Załóżmy nie wprost, że L - bezkontekstowy. Weźmy z takie, że $z \in L \wedge z = a^l b^l c^k$, gdzie $l = n + 1 \wedge l \neq k$ i $|z| \geq n$ (n - stała z L.o.P).

#1 : $k = l - 1, v = aa, x = bb$

1. $i = 0$, $z = a^{l-2} b^{l-2} c^k = a^{l-2} b^{l-2} c^{l-1}$
2. $i = 1$, $z = a^l b^l c^k = a^l b^l c^{l-1}$
3. $i \geq 2$, $z = a^{l-2(i-1)} b^{l-2(i-1)} c^k = a^{l-2(i-1)} b^{l-2(i-1)} c^{l-1}$

$\#\mathbf{2}$ **:** $k = l + 1, v = cc, x = \epsilon$

1. $i = 0$, $z = a^l b^l c^{k-2} = a^l b^l c^{l-1}$
2. $i \geq 1$, $z = a^l b^l c^k = a^l b^l c^{l-1+2i}$

$\#\mathbf{3}$ **:** $k \leq l - 2, v = a, x = b$

1. $i = 0$, $z = a^{l-1} b^{l-1} c^k$, gdzie $k \leq l - 2 < l - 1$
2. $i = 1$, $z = a^l b^l c^k$
3. $i \geq 2$, $z = a^{l+i-1} b^{l+1-1} c^k$, gdzie $k \leq l - 2 < l - 1 < m + i - 1$

$\#\mathbf{4}$ **:** $k \geq l + 2, v = c, x = \epsilon$

1. $i = 0$, $z = a^l b^l c^{k-1}$, gdzie $k - 1 \geq l + 1$
2. $i = 1$, $z = a^l b^l c^k$
3. $i \geq 2$, $z = a^l b^l c^{k+i-1}$, gdzie $k + i - 1 > l + 2$

Niestety L.o.P. nie zadziałał - każdy rozważany wyżej przypadek należy dalej do języka.

Lemat Ogdena

Zadanie to da się jednak rozwiązać używając **Lematu Ogdena**.
Załóżmy nie wprost, że L - bezkontekstowy. Niech n - stała z **Lematu Ogdena**. $l = n + 1$ a $z = a^l b^l c^{l!+l}$. Musimy ozanczyć co najmniej n liter, więc oznaczamy całe b^l. Nasze vwx ma ozanczonych co najwyżej n liter. Oznacza to, że rozpatrywane przez nas części z muszą zawierać:

1. przynajmniej jedno a i jedno b,
2. tylko oznaczone b,
3. przynajmniej jedno c i jedno oznaczone b,

Nie możemy jednocześnie pompować a i c.

$\#\mathbf{1}$ **:** $vx = b^k, n \geq k \geq 1$

$i = 0$, $a^l b^{l-k} c^{l!+l} \notin L$

$\#\mathbf{2}$ **:** $vx = b^k c^j$**,** $n \leq k + j$**,** $k, j \geq 1$

$i = 0$, $a^l b^{l-k} c^{l!+l-k} \notin L$

$\#\mathbf{3}$ **:** $vx = a^k b^j$**,** $n \leq k + j$**,** $k, j \geq 1$**, niech** $i = l!/j + 1$

$i = 0$, $a^{l+(l!/j)*k} b^{l+(l!/j)*j} c^{l!+l} = a^{l+(l!/j)*k} b^{l!+l} c^{l!+l} \notin L$

Z powyższych zapisów wynika, że dla wybranego słowa z z języka L oraz dowolnego podziału spełniającego założenia **Lematu Ogdena** znajdziemy i takie, że słowo $z' = uv^i wx^i y \notin L$. Sprzeczność z założeniami -> L nie jest bezkontekstowy.