Wybrane zagadnienia Algebry
Lista zadań

Jacek Cichoń
WIT, PWr, 2023/24

1 Wstęp

Lab: Zadanie 1

Liczbami Gaussa nazywamy pierścień $\mathbb{Z}[\imath] = \{a+b\imath : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z dodawaniem i dzieleniem odziedziczonym z liczb zespolonych. Na $\mathbb{Z}[\imath]$ określamy funkcję (zwaną normą) $N(a+b\imath) = a^2+b^2$. Dla $x, y \in \mathbb{Z}[\imath]$ określamy $x|y \longleftrightarrow (\exists z \in \mathbb{Z}[\imath])(y = x \cdot z)$

1. Napisz algorytm dzielenia z resztą w pierścieniu liczb Gaussa $\mathbb{Z}[\imath]$, czyli algorytm, który dla danych $x, y \in \mathbb{Z}[\imath]$, $y \neq 0$ wyznaczy $q, r \in \mathbb{Z}[\imath]$ takie, że $x = q \cdot y + r$ oraz $N(r) < N(y)$.
2. Największym wspólnym dzielnikiem liczb $u, v \in \mathbb{Z}[\imath]$ nazywamy takie $d \in \mathbb{Z}[\imath]$, że $(d|u) \wedge (d|v)$ oraz

$$(\forall x \in \mathbb{Z}[\imath])(x|u \wedge x|v \rightarrow x|d) \ .$$

   Oprogramuj algorytm wyznaczania NWD dla $\mathbb{Z}[\imath]$.
3. Oprogramuj funkcję wyznaczającą $NWW(x, y)$ dla $x, y \in \mathbb{Z}[\imath]$.
4. Ideał generowany przez liczby $a_1, \ldots, a_k$ oznaczamy przez $(a_1, \ldots, a_k)$. Korzystając z poprzednich dwóch podpunktów znajdź takie c i d, że $(3 + 4\imath, 1 + 3\imath) = (c)$ oraz $(3 + 4\imath) \cap (1 + 3\imath) = (d)$.

Lab: Zadanie 2

Wielomian $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ interpretujemy jako ciąg $[a_0, \ldots, a_n]$.

1. Napisz algorytm dzielenia z resztą w pierścieniu wielomianów $\mathbb{R}[x]$.
2. Oprogramuj algorytm wyznaczania NWD dla $\mathbb{R}[x]$.
3. Oprogramuj funkcję wyznaczającą $\mathrm{NWW}(x, y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}[x]$.
4. Korzystając z poprzednich dwóch podpunktów znajdź takie $c(x), d(x) \in \mathbb{R}[x]$, że $(1 + x^2, 1 + 2x + x^2) = (c)$ oraz $(1 + x^2) \cap (1 + 2x + x^2) = (d)$.

Ćwicz.: Zadanie 1

Rozważ prostą przechodzącą przez punkt $(-1, 0)$ o współczynniku kierunkowym $t \in \mathbb{R}$. Znajdź drugi punkt przecięcia tej prostej z okręgiem $x^2 + y^2 = 1$. Wyraź otrzymane rozwiązanie jako funkcję $p(t) = (x(t), y(t))$ oraz wyznacz obraz $\{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Ćwicz.: Zadanie 2

Rozważ prostą przechodzącą przez punkt $(-1, 0)$ o współczynniku kierunkowym $t \in \mathbb{R}$. Znajdź drugi punkt przecięcia tej prostej z hiperbolą $x^2 - y^2 = 1$. Wyraź otrzymane rozwiązanie jako funkcję $p(t) = (x(t), y(t))$ oraz wyznacz obraz $\{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Niech k będzie ciałem. Dla wielomianów $f_1, \ldots, f_k \in k[x_1, \ldots, k_n]$ przez $V(f_1, \ldots, f_k)$ oznaczamy zbiór

$$V(f_1, \ldots, k_k) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : (\forall i \in \{1, \ldots, k\})(f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0)\} \ .$$

Zbiór ten nazywamy **rozmaitością algebraiczną** generowaną przez wielomiany $f_1, \ldots, f_k$ w **przestrzeni afinicznej** k^n.

Lab: Zadanie 3

Skorzystaj z jakiejś biblioteki (np. `mplot3d` z `Matplotlib`) do wyświetlenia następujących rozmaitości algebraicznych w $\mathbb{R}^3$:

1. $V(z - x^2 - y^2)$
2. $V(z^2 - x^2 - y^2)$
3. $V(z - x^2 + y^2)$
4. $V(xz, yz)$

Lab: Zadanie 4

Krzywą czterolistną nazywaną krzywą zadaną następującym równaniem

$$r(\theta) = \sin(2\theta)$$

we współrzędnych biegunowych.

1. Narysuj wykres tej krzywej na płaszczyźnie.
2. Spróbuj znaleźć wielomian $w(x, y)$ taki, że $r[\mathbb{R}] = V(w)$.

Lab: Zadanie 5

Zapoznaj się poleceniami systemu Wolfram Alpha służącymi go działań na wielomianach (np. PolynomialQuotientRemainder) oraz generowania krzywych i powierzchni zadawanych równaniami parametrycznymi.

2 Wielomiany i rozmaitości

Ćwicz.: Zadanie 3

Które z następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ są rozmaitościami algebraicznymi:

1. skończony podzbiór $\mathbb{R}^2$
2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

Ćwicz.: Zadanie 4

Ustalmy ciało k liczbę $n \geqslant 1$. Pokaż, że rodzina rozmaitości algebraicznych w k^n jest domknięta na skończone sumy oraz skończone przekroje. Czy jest ona domknięta na operację dopełnienia?

Lab: Zadanie 6

Zaproponuj algorytm który wyznacza punkty minimalne dla skończonych podzbiorów $A \subseteq \mathbb{N}^k$ dla porządku

$$(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} (x_j \leqslant y_i)$$

1. Ile jest punktów minimalnych w zbiorze $\{n, k) \in \mathbb{N}^2 : n \cdot k \geqslant 11\}$?
2. Ile jest punktów minimalnych w zbiorze $\{n, k) \in \mathbb{N}^2 : (n - 10)^2 + (y - 10)^2 \leqslant 25\}$?

Ćwicz.: Zadanie 5

Załóżmy, że k jest ciałem oraz $A \subseteq k^n$. Niech

$$I(A) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : (\forall a \in A)(f(a) = 0)\} .$$

Pokaż, że $I(A)$ jest ideałem.

Ćwicz.: Zadanie 6

Pokaż, że $I(V(x^n, x^m)) = \langle x, y \rangle$ dla dowolnych $n, m \geqslant 1$.

Ćwicz.: Zadanie 7

Ideał I nazywamy radykalnym, jeśli z tego, że $x^n \in I$ wynika, że $x \in I$.

1. Pokaż, że ideały postaci $I(A)$ są radykalne.
2. Pokaż, że ideał $\left\langle X^2, y^2 \right\rangle$ nie jest radykalny.

Ćwicz.: Zadanie 8

Niech k będzie dowolnym nieskończonym ciałem.

1. Pokaż, że dowolny wielomian $f \in k[x, y]$ można zapisać w postaci
$$f = g(x) + (x - y)h(x, y)$$
dla pewnego wielomianu $g \in k[x]$ oraz $h \in k[x, y]$.
2. Pokaż, że $I(V(x - y)) = \langle x - y \rangle$.

Ćwicz.: Zadanie 9

Pokaż, że $I(V(x^n, x^m)) = \langle x, y \rangle$ dla dowolnych $n, m \geqslant 1$.

Ćwicz.: Zadanie 10

Niech $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Załóżmy, że $a, b, c, q \in R$ oraz $a = q \cdot b + c$. Pokaż, że
$$\langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle \ .$$

Lab: Zadanie 7

Wyznacz za pomocą dowolnego systemu obliczeń algebraicznych

1. GCD $\left(x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2x - 1, x^3 - 1\right)$
2. GCD $\left(x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2\right)$

Ćwicz.: Zadanie 11

Czy wielomian $x^2 - 2$ należy do następującego ideału
$$\left\langle x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2 \right\rangle \ ?$$

Lab: Zadanie 8

Napisz pseudokod procedury, która dla danych wielomianów $f, g \in k[x]$ znajduje takie $A, B \in k[x]$, że $nwd(f, g) = A \cdot f = B \cdot g$.
Wskazówka: Wzoruj się na algorytmie wyznaczania największego wspólnego dzielnika dla liczb całkowitych

Ćwicz.: Zadanie 12

W zadaniu tym zajmujemy wielomianami z pierścienia $\mathbb{C}[x]$.

1. Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie niezerowym wielomianem. Pokaż, że $V(f) = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem stałym.
2. Załóżmy, że $f, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x]$. Pokaż, że $V(f_1, \ldots, f_k) = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$
3. Opisz procedurę rozstrzygającą, czy dla danych wielomianów $f, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x]$ rozmaitość $V(f_1, \ldots, f_k)$ jest niepusta.

Ćwicz.: Zadanie 13

Załóżmy, że $f \in \mathbb{C}[x]$ jest wielomianem postaci

$$f = c(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \cdots (x - a_k)^{r_k} \ ,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_k$ są parami różne oraz $c \neq 0$. Niech

$$f_{red} = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) \ .$$

1. Pokaż, że $V(f) = \{a_1, \ldots, a_k\}$.
2. Pokaż, że I jest ideałem oraz, że $I(V(f)) = \langle f_{red} \rangle$.
3. Pokaż, że

$$f_{red} = \frac{f}{gcd(f, f')} \ ,$$

gdzie f' oznacza formalną pochodną wielomianu f.

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń