

# Fundamentos de Energia Elétrica

## Semana #6.5

(Alguns tópicos 🔄)

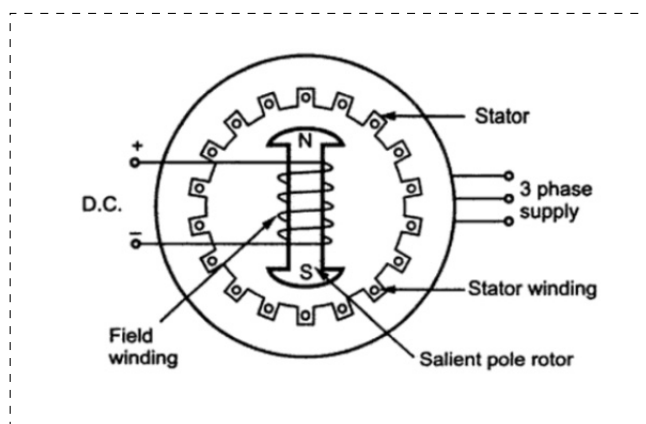


Imagem: Máquina síncrona

*Autores:*

**João Gonçalves** : 99995

↔ jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt

**Teresa Nogueira** : 100029

↔ maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt

# Índice

<b>1</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1	Energia e Potência. Diagrama de carga . . . . .	1
1.2	Potência em Sistemas de Energia Elétrica . . . . .	1
1.2.1	Potência Instantânea, Potência Ativa e Reativa, Potência Complexa e Aparente . . . . .	1
1.3	Sistema Elétrico Trifásico . . . . .	2
1.3.1	Tensão e Corrente . . . . .	2
1.3.2	Potência Instantânea, Potência Ativa e Reativa, e Potência Complexa . . . . .	3
1.3.3	Carga Ligada em Triângulo . . . . .	3
1.4	Valores por Unidade . . . . .	4
1.4.1	Sistemas Monofásicos . . . . .	4
1.4.2	Sistemas Trifásicos . . . . .	4
1.5	Transmissão de Energia . . . . .	5
1.5.1	Corrente Alternada . . . . .	5
1.6	Caracterização das Cargas . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Transformador e Máquina Assíncrona</b>	<b>6</b>
2.1	Equações de Maxwell . . . . .	6
2.2	Circuitos Magnéticos . . . . .	6
2.3	Transformador . . . . .	7
2.3.1	Funcionamento do Transformador . . . . .	7
2.3.2	Análise do Transformador . . . . .	9
2.3.3	Configurações Especiais do Transformador . . . . .	10
2.3.4	Transformador Trifásico . . . . .	11
2.4	Máquina Assíncrona . . . . .	12
2.4.1	Modelo Matemático e Esquema Equivalente . . . . .	13
2.4.2	Binário e Característica Binário-Velocidade . . . . .	14
2.4.3	Representação em Valores p.u. . . . .	14
2.4.4	Análise da Máquina Assíncrona . . . . .	15
2.4.5	Funcionamento como Gerador . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Máquina Síncrona</b>	<b>16</b>
3.1	Princípio de Funcionamento . . . . .	16
3.1.1	Reação do Induzido e Esquema Equivalente . . . . .	17
3.2	Características de Funcionamento . . . . .	18
3.2.1	Em Vazio e em Curto-circuito . . . . .	18
3.2.2	Em Carga . . . . .	19
3.2.3	Fórmulas da Potência Ativa e Reativa . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Linha Elétrica de Energia</b>	<b>21</b>
4.1	Modelos da Linha em Regime Estacionário . . . . .	21
4.1.1	Modelo Exato . . . . .	21
4.1.2	Esquema em $\pi$ Exato . . . . .	22
4.1.3	Esquema em $\pi$ Nominal (linhas médias) . . . . .	22
4.1.4	Nota sobre Funções Hiperbólicas . . . . .	22
4.2	Linha Terminada pela Impedância de Onda . . . . .	23
4.2.1	Linha com Perdas . . . . .	23
4.2.2	Linha sem Perdas . . . . .	23
4.3	Capacidade de Transporte . . . . .	24
4.3.1	Limite Térmico . . . . .	24
4.3.2	Limite de Estabilidade Estática . . . . .	24
4.3.3	Limite de Estabilidade da Tensão . . . . .	25
4.4	Parâmetros da Linha . . . . .	26

<b>5</b>	<b>Trânsito de Energia</b>	<b>27</b>
5.1	Sistema com $n$ barramentos . . . . .	27
5.1.1	Característica das equações . . . . .	28
5.1.2	Modelo Matemático . . . . .	29
5.2	Solução do Trânsito de Energia . . . . .	30
5.2.1	Cálculo das Tensões . . . . .	30
5.2.2	Potência Injetada no Nó de Balanço . . . . .	30
5.2.3	Potência Transitada nas Linhas . . . . .	30
5.3	Modelo de Corrente Contínua . . . . .	31
	<b>Referências</b>	<b>32</b>

# 1 Conceitos Básicos

## 1.1 Energia e Potência. Diagrama de carga

A relação básica entre energia e potência exprime-se por:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad W = \int P dt$$

onde  $W$  denota a energia (expressa em joule, J) e  $P$  a potência (expressa em watt, W).

A carga de um Sistema de Energia Elétrica (SEE), varia significativamente ao longo do dia, acompanhando a atividade humana. Para um diagrama de carga define-se

$$h_d = \frac{W}{P_{\max}} [\text{unidades de tempo}] \quad f_d = \frac{P_{\text{med}}}{P_{\max}} [\%], \text{ em que } P_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_T P dt$$

a *utilização diária da ponta*,  $h_d$ , como a relação entre a energia e a potência máxima; e também o *fator de carga diário*,  $f_d$ , como relação entre a potência média e a potência máxima.

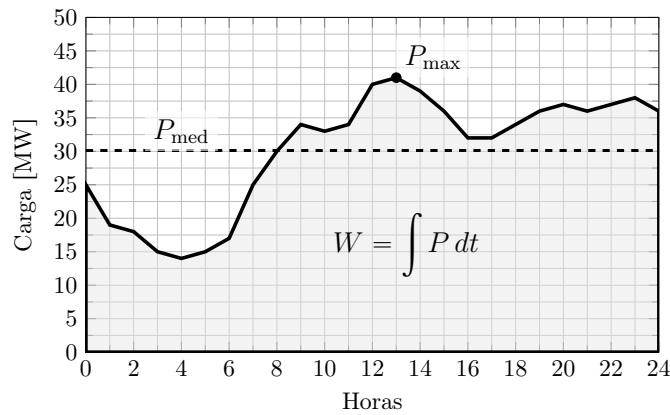


Fig. 1: Exemplo de diagrama de carga (diário)

## 1.2 Potência em Sistemas de Energia Elétrica

Os SEE atualmente funcionam quase na sua totalidade em corrente alternada — com uma frequência de 50 Hz na Europa e de 60 Hz nos EUA e no Brasil —, existindo casos especiais em que se utiliza a corrente contínua.[1]

### 1.2.1 Potência Instantânea, Potência Ativa e Reativa, Potência Complexa e Aparente

Considerando um sistema monofásico constituído por um gerador que dá origem a uma tensão  $v$  aos terminais de uma carga representada por uma impedância constante  $Z$ , define-se a *potência instantânea* transferida do gerador para a carga como

$$p = \overbrace{vi}^{\text{tensão } v} = \overbrace{\sqrt{2}V \cos(\omega t + \alpha_v)}^{\text{corrente } i} \cdot \overbrace{\sqrt{2}I \cos(\omega t + \alpha_i)}, \quad \forall (\alpha_v, \alpha_i) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] : \phi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$= VI \cos(\phi) - VI \cos(2\omega t - \phi)$$

em que  $\phi = \alpha_v - \alpha_i$  (desfasagem da tensão face à corrente). Massajando a expressão conclui-se

$$p = \underbrace{VI \cos(\phi)[1 - \cos(2\omega t)]}_{p_1} - \underbrace{VI \sin(\phi) \sin(2\omega t)}_{p_2}$$

Repare-se que a componente  $p_1$  tem valor médio constante e  $p_2$  tem valor médio nulo. A *potência ativa* é o valor médio da potência instantânea, e corresponde portanto à potência efetivamente transferida:

$$P = VI \cos(\phi) \quad [\text{W}]$$

A *potência reativa* é o valor máximo da componente da potência que oscila entre o gerador e a carga, cujo valor médio é nulo, resultante da variação da energia magnética/elétrica armazenada nos elementos da carga:

$$Q = VI \sin(\phi) \quad [\text{VAR}]$$

**Nota:** A grandeza  $\cos(\phi)$  designa-se por *fator de potência*,  $fp \triangleq P/S = \cos(\phi)$ .

§Em alguns países, como por exemplo no Japão, coexistem as duas frequências.

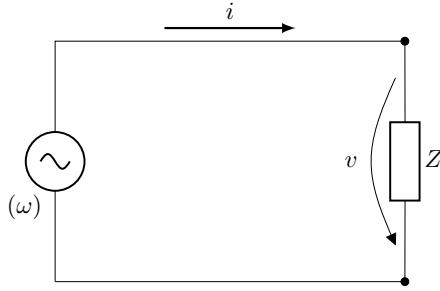


Fig. 2: Sistema monofásico em corrente alternada

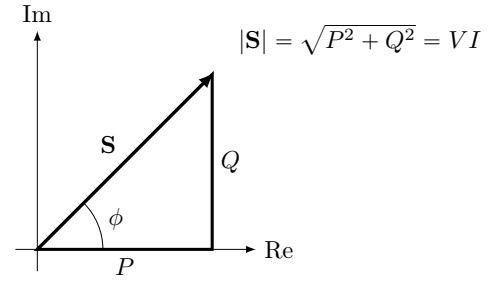


Fig. 3: Representação das potências

A *potência complexa* é definida pelo produto do fasor tensão pelo conjugado do fasor corrente:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = P + jQ \quad \text{em que} \quad \begin{cases} \mathbf{V} = V e^{j\alpha_v} \\ \mathbf{I} = I e^{j\alpha_i} \end{cases}$$

A *potência aparente* é definida como o módulo da potência complexa, i.e.,

$$S = |\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI \quad [\text{VA}]$$

Além disto, a potência aparente representa a potência média ao longo do tempo para circuitos que se comportam como puramente resistivos ( $\phi = 0$ ).

### 1.3 Sistema Elétrico Trifásico

**Motivação:** A energia elétrica é produzida, transportada e distribuída em *sistemas elétricos trifásicos*. A natureza pulsante da potência em sistemas monofásicos produz efeitos indesejáveis na operação dos sistemas elétricos. Nos motores elétricos, esta potência traduz-se num binário pulsante, por exemplo. A corrente trifásica elimina estas pulsações de potência e binário.

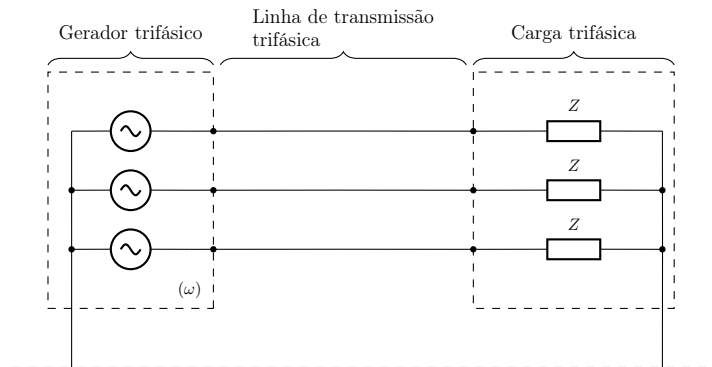


Fig. 4: Sistema trifásico simétrico

#### 1.3.1 Tensão e Corrente

Um gerador trifásico com os 3 enrolamentos em estrela produz 3 forças eletromotizes com frequência angular  $\omega = 2\pi f$ , desfasados  $\pm 2\pi/3 (= \pm 120^\circ)$ . A fase de referência, possui argumento nulo.

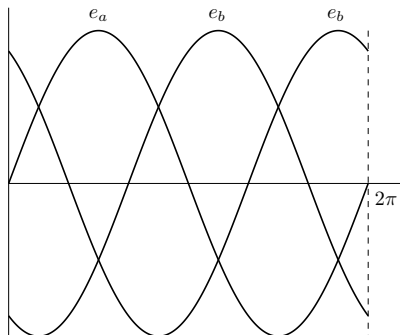


Fig. 5: Variação no tempo das f.e.m

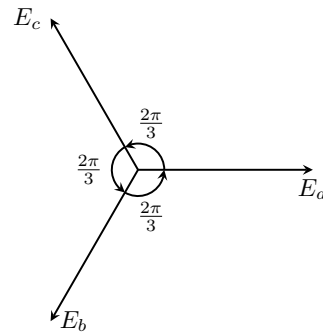
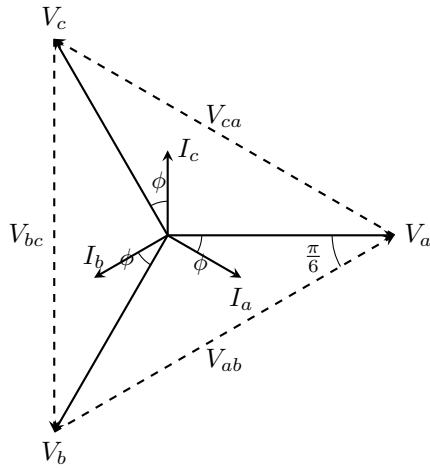


Fig. 6: Diagrama de fasores



**Fig. 7:** Fasores de tensão (simples e composta) e fasores de corrente num sistema trifásico simétrico.

As tensões simples ou fase-neutro são então:

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{2}V \sin(\omega t) & \mathbf{V}_a &= V e^{j0} \\ v_b &= \sqrt{2}V \sin(\omega t - 2\pi/3) & \mathbf{V}_b &= V e^{-j2\pi/3} \\ v_c &= \sqrt{2}V \sin(\omega t + 2\pi/3) & \mathbf{V}_c &= V e^{j2\pi/3} \end{aligned}$$

Num sistema trifásico, define-se o valor das *tensões fase-fase* (ou *tensões entre fases* ou *tensões compostas*):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_{bc} &= \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c \\ \mathbf{V}_{ca} &= \mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a \end{aligned} \rightarrow \boxed{V_L = V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = 2V \cos(\pi/6) = \sqrt{3}V \text{ (valor eficaz das compostas)}}$$

Uma vez que a carga é simétrica, as correntes escrevem-se:

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I \sin(\omega t - \phi) & \mathbf{I}_a &= I e^{-j\phi} \\ i_b &= \sqrt{2}I \sin(\omega t - \phi - 2\pi/3) & \mathbf{I}_b &= I e^{-j(2\pi/3 + \phi)} \\ i_c &= \sqrt{2}I \sin(\omega t - \phi + 2\pi/3) & \mathbf{I}_c &= I e^{j(2\pi/3 - \phi)} \end{aligned}$$

#### Notas:

1. “A soma das correntes nas três fases é nula, logo não é necessário um condutor a conectar o neutro do gerador com o da carga. Os dois neutros estão ao potencial da terra, quer no gerador quer na carga.”[1]
2. “Num sistema trifásico simétrico, todas as tensões simples podem ser medidas em relação a um neutro, que tem o mesmo potencial (zero) ao longo de todo o sistema.”[1]

### 1.3.2 Potência Instantânea, Potência Ativa e Reativa, e Potência Complexa

A potência transferida do gerador para a carga será a soma das potências instantâneas por fase:

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = 3VI \cos(\phi)$$

Verifica-se que a *potência trifásica instantânea* é constante, e igual a 3 vezes a potência ativa por fase.

Deste modo, a *potência ativa trifásica* escreve-se:

$$P = 3VI \cos(\phi) = \sqrt{3}V_L I \cos(\phi) \quad [\text{W}]$$

A *potência reativa trifásica* é definida como a soma algébrica das potências reativas em cada fase:

$$Q = 3VI \sin(\phi) = \sqrt{3}V_L I \sin(\phi) \quad [\text{VAr}]$$

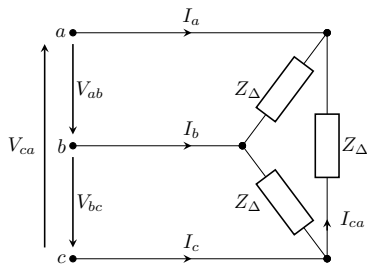
A *potências complexa e aparente para sistemas trifásicos* é dada por:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{VI}^* = P + jQ$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3VI = \sqrt{3}V_L I \quad [\text{VA}]$$

### 1.3.3 Carga Ligada em Triângulo

Outra forma de ligar a carga é em triângulo, situação em que cada impedância de carga  $\mathbf{Z}$  está sujeita à tensão entre fases.



**Fig. 8:** Carga ligada em triângulo.

As correntes  $\bar{I}_{ab}$ ,  $\bar{I}_{bc}$  e  $\bar{I}_{ca}$  são:

$$\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{Z}_{\Delta}} \quad \bar{I}_{bc} = \frac{\bar{V}_{bc}}{\bar{Z}_{\Delta}} \quad \bar{I}_{ca} = \frac{\bar{V}_{ca}}{\bar{Z}_{\Delta}}$$

A corrente na linha  $I_a$  é, por conseguinte:

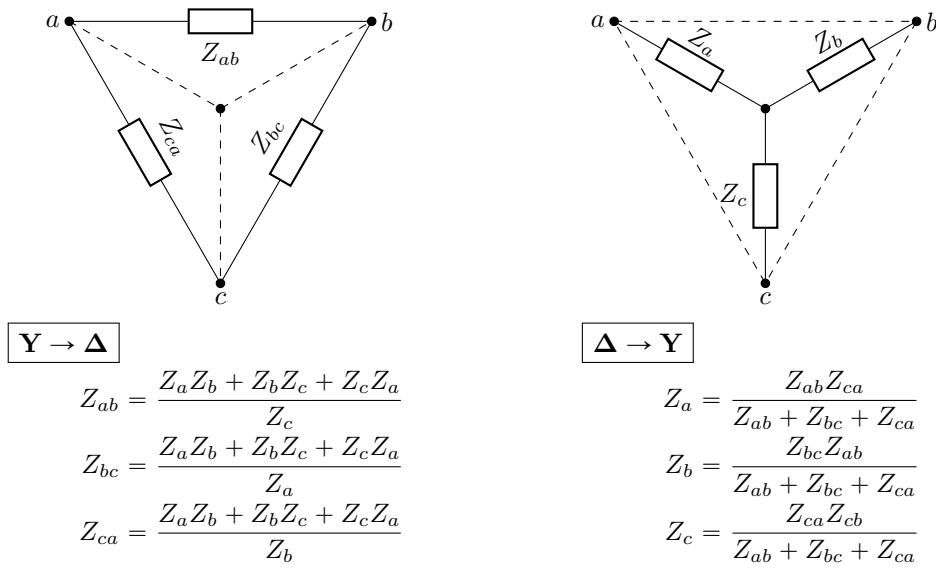
$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{ab} - \bar{V}_{ca}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{3\bar{V}_a}{\bar{Z}_{\Delta}}$$

A amplitude da corrente é **3 vezes maior** que na ligação da carga em estrela.

A potência absorvida pela carga ligada em triângulo é **3 vezes maior** que a ligada em estrela, para o mesmo valor de impedância de carga.

### 1.3.3.1 Conversão entre Ligação em Estrela e Ligação em Triângulo (wye $\rightleftharpoons$ delta)

Tab. 1: Transformações Y- $\Delta$  e  $\Delta$ -Y



## 1.4 Valores por Unidade

O uso de *valores por unidade* (p.u.) consiste na quantificação das grandezas elétricas como frações de valores de base, designados por valores nominais ou de plena carga. O valor p.u. de uma grandeza obtém-se por

$$\text{valor p.u.} = \frac{\text{valor da grandeza}}{\text{valor da base}}$$

**Nota:** O valor da grandeza pode ser um fasor/número complexo ou um valor instantâneo em unidades SI, enquanto o valor de base é um número real adequado. O valor de base pode ser postulado ou derivado.

### 1.4.1 Sistemas Monofásicos

Num sistema monofásico, postula-se:

a base de tensão [kV],  $V_b$  e a base de potência [MVA],  $S_b$

Os valores de base derivados são:

- base de corrente [kA],

$$I_b = S_b / V_b$$

- base de impedância [ $\Omega$ ],

$$Z_b = V_b / I_b = V_b^2 / S_b$$

- base de admitância [S],

$$Y_b = I_b / V_b = S_b / V_b^2$$

### 1.4.2 Sistemas Trifásicos

Analogamente, postula-se para base a tensão entre fases,  $V_b$ , e a potência aparente trifásica,  $S_b$ .

Temos a relação  $S_b = \sqrt{3} V_b I_b$ , de onde se derivam as restantes:

- base de corrente [kA],

$$I_b = S_b / \sqrt{3} V_b$$

- base de impedância [ $\Omega$ ],

$$Z_b = V_b / \sqrt{3} I_b = V_b^2 / S_b$$

- base de admitância [S],

$$Y_b = \sqrt{3} I_b / V_b = S_b / V_b^2$$

## 1.5 Transmissão de Energia

### 1.5.1 Corrente Alternada

Considerando uma linha de transmissão de energia modelada por um elemento indutivo com reatância  $X_L$ , pretende-se estabelecer a relação entre as potências ativa e reativa que transitam na linha e as tensões nos nós entre as quais ela está ligada.

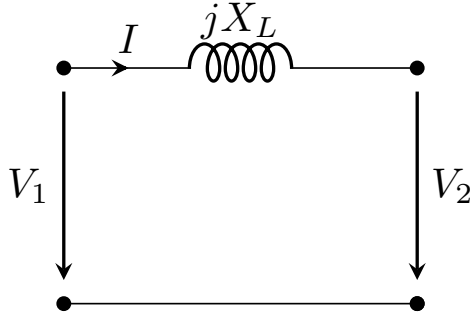


Fig. 9: Transmissão de energia — elemento indutivo.

A corrente que percorre a linha, definida como positiva no sentido  $1 \rightarrow 2$ :

$$I = \frac{V_1 - V_2}{jX_L}$$

A potência complexa  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \mathbf{V}_1 \mathbf{I}^* = \mathbf{V}_1 \frac{\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_2^*}{-jX_L} = \frac{V_1^2 - \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2^*}{-jX_L} \quad \text{em que} \quad \begin{cases} \mathbf{V}_1 = V_1 e^{j\theta_1} \\ \mathbf{V}_2 = V_2 e^{j\theta_2} \end{cases}$$

Seja  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  o ângulo de defasagem entre as tensões no nó 1 e no nó 2:

$$S_{12} = j \frac{V_1^2 - V_1 V_2 e^{j\theta}}{X_L} = \underbrace{\frac{V_1 V_2 \sin(\theta)}{X_L}}_{P_{12}} + j \underbrace{\frac{V_1^2 - V_1 V_2 \cos(\theta)}{X_L}}_{Q_{12}}$$

De forma análoga se deduzem as potência ativa e reativa na receção, positivas no sentido  $2 \rightarrow 1$ :

$$P_{21} = -\frac{V_1 V_2 \sin(\theta)}{X_L} \quad Q_{21} = \frac{V_2^2 - V_1 V_2 \cos(\theta)}{X_L}$$

Somando as duas equações vem que:

$$P_L = P_{12} + P_{21} = 0$$

$$Q_L = Q_{12} + Q_{21} = \frac{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\theta)}{X_L}$$

em que  $P_L$  e  $Q_L$  representam as perdas de potência ativa e reativa na linha. Uma vez que desprezamos a resistência, as perdas de potência ativa são nulas. As perdas de potência reativa não correspondem a perdas energéticas, no entanto, o balanço da potência reativa deve de ser fechado<sup>1</sup> como a potência ativa.

#### Notas:

1. O sentido do trânsito de potência ativa é determinado pelo ângulo de defasagem  $\theta$  entre as tensões de cada nó.
2. As amplitudes das tensões  $V_1$  e  $V_2$  influenciam o sentido de trânsito da potência reativa. Caso as tensões sejam de igual amplitude nos dois extremos  $V_1 = V_2 = V_n$  (tensão nominal), então:

$$Q_{med} = \frac{Q_{12} - Q_{21}}{2} = 0$$

O mesmo não acontece com o balanço de potência reativa  $Q_L = Q_{12} + Q_{21}$ , uma vez que os valores nos extremos não se anulam, i.e.,  $Q_{12} = Q_{21} = V_n^2(1 - \cos(\theta))/X_L$ . O que leva a

$$Q_L = \frac{2V_n^2(1 - \cos(\theta))}{X_L}$$

## 1.6 Caracterização das Cargas

As cargas típicas têm caráter indutivo, e agrupam-se em quatro tipos: (i) motores, (ii) iluminação, (iii) aquecimento e refrigeração e (iv) aparelhos eletrónicos. Normalmente são caracterizadas pela potência ativa  $P_C$  e pela potência reativa  $Q_C$  ou fator de potência  $\cos(\phi)$  (alternativamente poderá utilizar-se  $\tan(\phi)$ ):

$$\cos(\phi) = \frac{P_C}{\sqrt{P_C^2 + Q_C^2}} \quad \wedge \quad \tan(\phi) = \frac{Q_C}{P_C}$$

<sup>1</sup>Caso contrário, o desequilíbrio provocará flutuações nas tensões em diferentes partes do sistema, que levam a ineficiências energéticas.



## 2 Transformador e Máquina Assíncrona

### 2.1 Equações de Maxwell

É necessário um conjunto de quatro vetores para descrever os fenómenos do campo eletromagnético:

o campo elétrico,  $\mathbf{E}$  (unidades: V/m, volt por metro)

o campo de indução magnética,  $\mathbf{B}$  (unidades: T, tesla)

o campo de deslocamento elétrico,  $\mathbf{D}$  (unidades: C/m<sup>2</sup>, coulomb por metro quadrado)

o campo magnético,  $\mathbf{H}$  (unidades: A/m, ampère por metro)

Entre estes, os dois primeiros têm significado físico especial, uma vez que podem ser determinados experimentalmente e medidos.

Para fenómenos eletromagnéticos variáveis no tempo consideraram-se as equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{Lei de Indução}) \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho & (\text{Lei de Gauss}) \\ \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (\text{Lei de Ampère com a correção de Maxwell}) \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 & (\text{Lei de Gauss para o magnetismo}) \end{cases}$$

em que  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  (onde  $\varepsilon$  é a permissividade do meio, em F/m),  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  (onde  $\sigma$  é a condutividade do condutor, em S/m) e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  (onde  $\mu$  representa a permeabilidade do meio, em H/m).

### 2.2 Circuitos Magnéticos

É importante revisitar os conceitos fundamentais dos circuitos magnéticos:

$$\text{Tensão magnética: } u_m \triangleq \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\text{Fluxo magnético: } \Phi_m \triangleq \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\text{Relutância magnética: } R_m \triangleq \frac{u_m}{\Phi_m}$$

Salienta-se que o fluxo magnético obedece à *Lei dos Cortes* — análoga ao KCL — uma vez que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , temos que  $\sum_i^n \Phi_{m_i} = 0$  numa superfície fechada (ou “nó”); enquanto, em geral, a tensão magnética **não** obedece a nenhuma lei semelhante ao KVL.

As equações de Maxwell acima condensam duas leis essenciais a este capítulo:

**Lei de Indução:** A expressão « $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ » diz que um campo magnético que varia com o tempo é sempre acompanhado por um campo elétrico não-conservativo que varia espacialmente, e vice-versa.

$$\iint_{S_N} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S_N} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \iff \oint_{\partial S_N} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_N} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\therefore \text{e.m.f.} = - \frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

em que  $\Psi = N\Phi_m$  é definido como o *fluxo magnético ligado*.

**Lei de Ampère:** A expressão « $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ » afirma que campos magnéticos podem ser criados de duas formas: através de correntes elétricas, que é a lei de Ampère original, e por campos elétricos que variam no tempo, que é a correção proposta por Maxwell (nesta UC não consideramos este fenómeno).

$$\iint_{S_N} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_N} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \iff \oint_{\partial S_N} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{\partial S} = NI > 0 \text{ (quando } \mathbf{H} \text{ é concordante com } d\mathbf{r})$$

O fluxo ligado é uma quantidade proporcional à corrente — de onde se define o coeficiente de indução,

$$\Psi = N\Phi = \iint_{S_N} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = LI$$

§A constante  $N$  representa, naturalmente, o número de espiras do enrolamento em questão.

## 2.3 Transformador

### 2.3.1 Funcionamento do Transformador

#### 2.3.1.1 Transformador Ideal

Para o transformador monofásico ideal assumimos duas aproximações: enrolamentos com resistência nula e circuito magnético com relutância igualmente nula (isto implica que não existe dispersão).

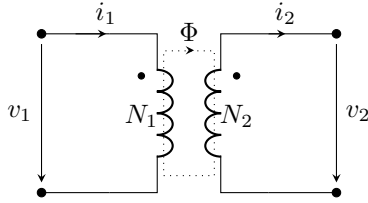


Fig. 10: Transformador ideal.

Neste primeiro modelo temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{V}_1 = j\omega N_1 \Phi \\ \mathbf{V}_2 = j\omega N_2 \Phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Uma vez que a resistência dos enrolamentos é nula e a reatância de dispersão também é nula, não há perdas de potência ativa nem de potência reativa. A potência complexa é igual nos dois lados do transformador:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 \iff \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* = \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^* \Rightarrow \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

É útil definir a relação de transformação  $m$ , o quociente entre o número de espiras do primário (enrolamento que recebe energia) e do secundário (enrolamento que cede energia):

$$m = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \text{ kV/kV}$$

onde  $V_{n1}$  é a tensão nominal primária e  $V_{n2}$  a tensão nominal secundária.

#### 2.3.1.2 Não Idealidades do Transformador e Corrente de Magnetização

O núcleo do transformador é normalmente constituído por ferro, que possui uma característica B-H não linear: a partir de um certo valor dos campos manifesta-se saturação. Acresce-se ainda o fenómeno da histerese, i.e., as trajetórias B-H são distintas para valores crescentes ou decrescentes do campo magnético.

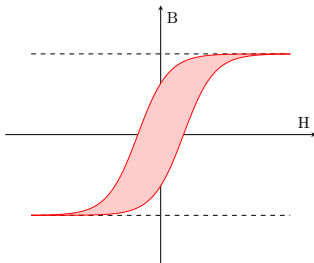


Fig. 11: Característica magnética do núcleo do transformador

O ponto de funcionamento na curva B-H está normalmente localizado próximo ao cotovelo que marca o início da saturação.

O fluxo magnético alternado dá origem a perdas no núcleo de ferro devidas à histerese e às correntes de fuga. “As primeiras resultam da energia necessária para orientar os domínios magnéticos do material na direção do campo; as segundas devem-se ao efeito de Joule resultante das correntes induzidas no ferro”[1].

Uma vez que a permeabilidade do ferro não é infinita, a relutância do circuito magnético não é nula. Introduce-se a *corrente de magnetização* necessária para criar o campo magnético  $\mathbf{H}$ , fornecida pela rede/gerador que alimenta o transformador.

A componente fundamental da corrente de magnetização, à frequência nominal, pode medir-se através de um ensaio em vazio do transformador (que veremos em seguida).

O esquema equivalente representa-se na Fig. 12: as componentes em fase e em quadratura da corrente de magnetização circulam através da condutância  $G_m$  e suscetância  $B_m$ , respetivamente. A componente transversal do esquema equivalente, pertence à modelação da corrente de magnetização. As componentes das impedâncias longitudinais são devido à resistência dos condutores e à reatância de dispersão.

#### Perdas no Transformador

Cumulativamente, podemos calcular as perdas no transformador conforme a diferença

$$\text{Perdas} = P_1 - P_2 = P_{cu} + P_{fe}$$

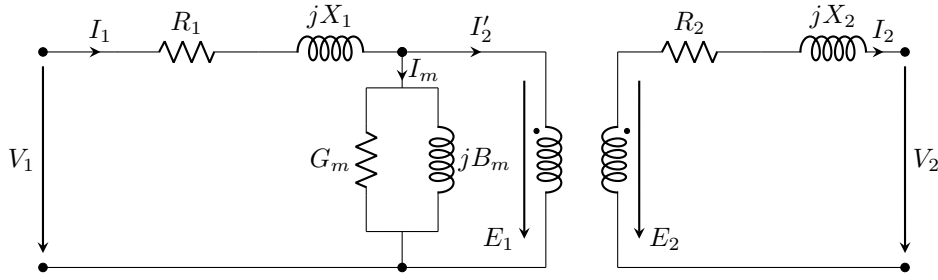
em que  $P_1$  e  $P_2$  representam a potência ativa no primário e no secundário, respetivamente. A distribuição destas perdas corresponde à contribuição do circuito elétrico (nos enrolamentos de cobre) e do circuito magnético (no núcleo de ferro):

$$P_{cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \simeq R_t I_2^2 \quad \wedge \quad P_{fe} \simeq G_m V_1^2$$

§A tensão nominal, também conhecida como tensão nominal de operação, é um valor específico de tensão elétrica que um equipamento, dispositivo ou sistema elétrico é projetado para operar de forma ideal e segura.

### 2.3.1.3 Esquema Equivalente do Transformador

Um primeiro esquema equivalente do transformador pode ser dado por:



**Fig. 12:** Esquema Equivalente do transformador.

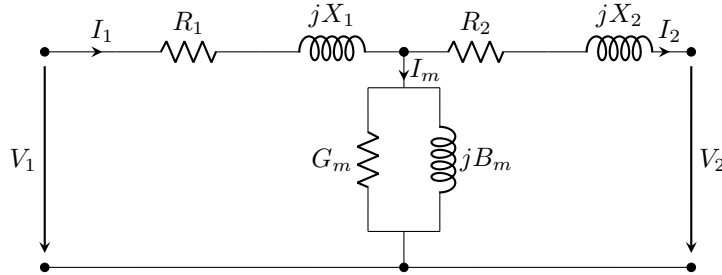
$$\begin{cases} E_1 = V_1 - (RI_1 + jX_1I_1) \\ E_2 = V_2 + RI_2 + jX_2I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = I_m + I_2' \\ I_2' = \frac{N_2}{N_1}I_2 \end{cases}$$

Se tomarmos as tensões de base, do lado do primário e do secundário, pelas respectivas tensões nominais, i.e.,  $V_{b1} = V_{n1}$  e  $V_{b2} = V_{n2}$ , a relação do transformador em valores p.u. é

$$m = \frac{V_{n1pu}}{V_{n2pu}} = \frac{V_{n1}}{V_{b1}} \frac{V_{b2}}{V_{n2}} = 1.0 \text{ p.u.}$$

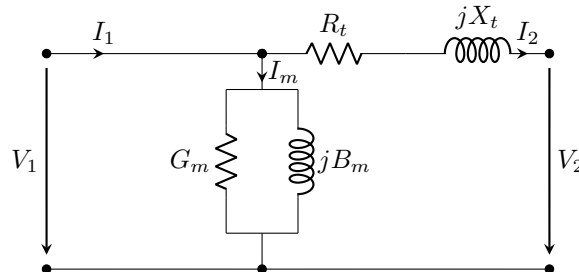
Esta conclusão indica que o transformador ideal pode ser removido do esquema equivalente da rede, uma vez que a relação de transformação é unitária.

Chegamos assim ao esquema equivalente em T:



**Fig. 13:** Esquema Equivalente em T do transformador.

O fluxo no núcleo mantém-se constante pelo que as admitâncias do ramo transversal que modelam a corrente de magnetização se podem considerar constantes. A corrente de magnetização é pequena (alternativamente, a impedância do ramo transversal é muito maior que impedância longitudinal dos dois lado), logo, o ramo transversal pode ser levado para um dos extremos, resultando no esquema em L:



**Fig. 14:** Esquema Equivalente em L do transformador.

$$\begin{cases} R_t = R_1 + R_2 \\ X_t = X_1 + X_2 \end{cases} \quad Z_t = R_t + jX_t$$

### 2.3.2 Análise do Transformador

#### 2.3.2.1 Ensaio em Vazio

Aplica-se a tensão nominal ao enrolamento que produz a menor corrente de magnetização, e o outro enrolamento em aberto.

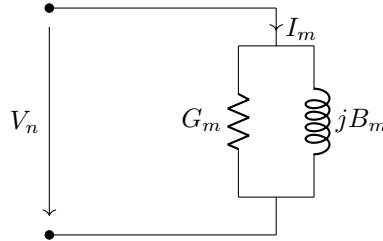


Fig. 15: Transformador com o secundário em aberto.

Os valores de  $G_m$  e  $B_m$  obtêm-se através das medidas da tensão aplicada  $V_n$ , corrente de magnetização  $I_m$  e potência de perdas em vazio  $P_0$ :

$$G_m = \frac{P_0}{V_n^2} \quad B_m = -\sqrt{\left(\frac{I_m}{V_n}\right)^2 - G_m^2}$$

**Nota:** A suscetância  $B_m$  é negativa de forma a que a reatância respetiva seja indutiva.

#### 2.3.2.2 Ensaio em Curto-Circuito

Através de um ensaio em curto-circuito do transformador pode medir-se o módulo da impedância de  $Z_t$  (normalmente designada por impedância de curto circuito  $Z_{cc}$ ). Aplica-se um curto circuito a um dos enrolamentos e alimenta-se o outro com uma tensão reduzida (tensão de curto-circuito  $V_{cc}$ ), de modo a que a corrente fique no seu valor nominal (de modo a não fritar o circuito).

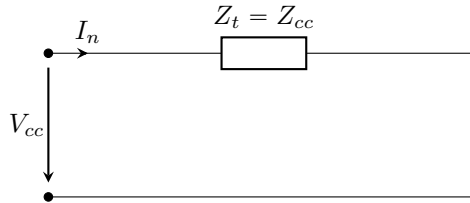


Fig. 16: Transformador em curto-circuito.

**Nota:** O paralelo de duas resistências é aproximadamente a mais pequena. Como o ramo transversal possui uma impedância muito elevada, é possível desprezar o ramo e a respetiva corrente de magnetização.

$$\begin{cases} V_{cc} = Z_{cc} I_n \\ I_n = 1.0 \text{ p.u.} \end{cases} \rightarrow \boxed{V_{cc} = Z_{cc}}$$

Para decompor a impedância de curto-circuito nas suas componentes resistiva e reativa, é preciso conhecer a potência  $P_{cc}$ :

$$R_t = \frac{P_{cc}}{I_n^2} = P_{cc} \quad Z_{cc} = V_{cc} = \sqrt{R_t^2 + X_t^2} \quad X_t = \sqrt{Z_t^2 - R_t^2}$$

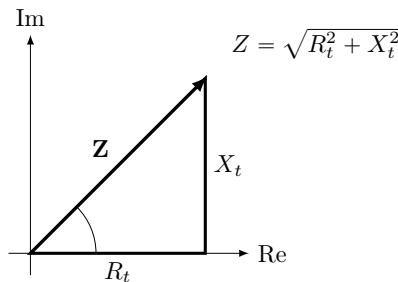


Fig. 17: Decomposição da impedância total equivalente.

### 2.3.3 Configurações Especiais do Transformador

#### 2.3.3.1 Transformador com Três Enrolamentos

Trata-se de um transformador com três enrolamentos à volta do mesmo núcleo como se representa na Fig. 18.

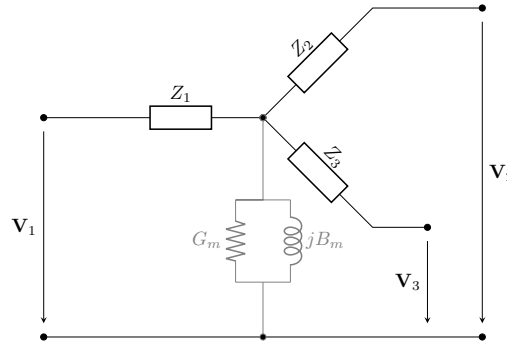


Fig. 18: Transformador com três enrolamentos.

No caso de se pretender representar a admitância de magnetização, liga-se entre o nó fictício e o neutro.

As impedâncias do sistemas monofásico equivalente, podem ser obtidas através de três ensaios de curto-circuito (primário-secundário, primário-terciário e secundário-terciário), nos quais se medem  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$  e  $Z_{23}$ , respetivamente:

$$\begin{cases} Z_{12} = Z_1 + Z_2 \\ Z_{13} = Z_1 + Z_3 \\ Z_{23} = Z_2 + Z_3 \end{cases}$$

De onde resulta que

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}}{2} \\ Z_2 = \frac{Z_{12} + Z_{23} - Z_{13}}{2} \\ Z_3 = \frac{Z_{13} + Z_{23} - Z_{12}}{2} \end{cases}$$

#### 2.3.3.2 Autotransformador

Num autotransformador existe apenas um enrolamento, existindo portanto uma ligação elétrica e magnética como se representa abaixo.

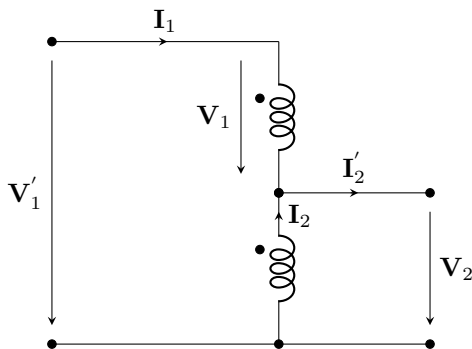


Fig. 19: Autotransformador.

Sendo válidas as seguintes relações:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \quad \wedge \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$$

A potência aparente fornecida ao primário é dada por

$$\begin{aligned} S'_1 &= V'_1 I_1 = (V_1 + V_2) I_1 = V_1 I_1 \frac{m+1}{m} \\ &= S_1 \frac{m+1}{m} \end{aligned}$$

E a potência cedida por este ao secundário é

$$\begin{aligned} S'_2 &= V_2 I'_2 = V_2 (I_1 + I_2) = V_2 I_2 \frac{m+1}{m} \\ &= S_2 \frac{m+1}{m} \end{aligned}$$

Conclui-se que a potência nominal do autotransformador é mais elevada que a configuração com dois enrolamentos separados. Acresce ainda o facto de que tem um maior rendimento energético, uma vez que a corrente em cada enrolamento é a mesma nas duas configurações.

Esta vantagem resulta numa redução de custo, especialmente quando a relação de transformação se aproxima de 1 (normalmente usa-se quando a relação de transformação é menor que 3:1)[1].

As desvantagens do autotransformador incluem a falta de isolamento galvânico entre os enrolamentos e uma corrente de curto-circuito mais elevada uma vez que a impedância de curto-circuito é menor.

### 2.3.4 Transformador Trifásico

Para sistemas trifásicos é usual utilizar um banco de transformadores (conjunto de três transformadores monofásicos), ou um transformador trifásico como se apresenta na Fig. X.

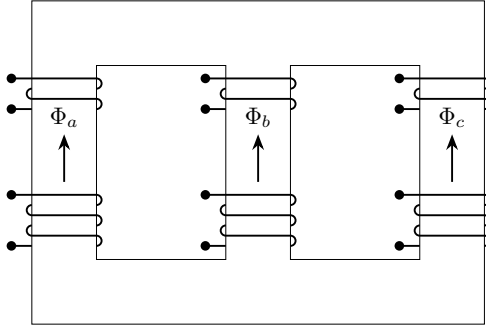


Fig. 20: Transformador trifásico.

Comparando as duas configurações, é natural que o transformador trifásico requiera menos materiais (ferro, cobre, etc) que o banco de três transformadores, sendo portanto mais económico. No entanto, perde em termos de fiabilidade, dado que é mais difícil de reparar (no banco de transformadores só se substitui um ponto de falha normalmente).

Os fluxos magnéticos no núcleo também gozam da mesma simetria que as tensões simples, tendo uma soma nula a qualquer instante. Não é necessário um circuito magnético de retorno, à semelhança do que acontece às correntes nos sistemas trifásicos simétricos.

Consideramos os seguintes tipos de ligação para os transformadores trifásicos: Y/Y, Y/Δ, Δ/Y e Δ/Δ, existindo ainda a ligação em *zig-zag* que foge do âmbito da Unidade Curricular.

A relação de transformação de um transformador Y/Y e Δ/Δ é um número real, uma vez que as tensões no primário e no secundário estão em fase. A polaridade dos enrolamentos é de extrema importância em transformadores trifásicos (assinalado com uma bola preta nas figuras abaixo).

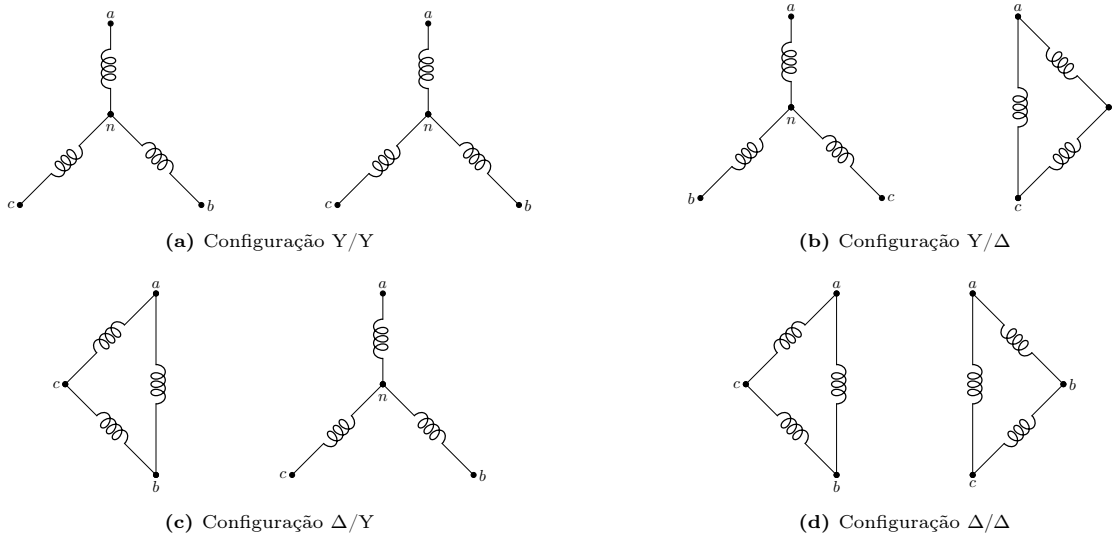


Fig. 21: Tipos de ligação de transformadores trifásicos.

Em transformadores Y/Δ ou Δ/Y, existe uma defasagem entre as tensões no primário e no secundário, o que leva a uma relação de transformação complexa.

Tomando como referência a configuração Y/Δ, representada na Fig. 19 (b), observa-se que

$$\mathbf{V}_2^{ac} = \mathbf{V}_2^a - \mathbf{V}_2^c = \mathbf{V}_2^a(1 - e^{j120^\circ}) = \sqrt{3}\mathbf{V}_2^a e^{-j30^\circ}$$

Sendo  $N_1$  o número de espiras do primário e  $N_2$  o número de espiras do secundário, temos

$$\mathbf{V}_1^a = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2^{ac} = \sqrt{3} \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2^a e^{-j30^\circ} \implies m = \frac{\mathbf{V}_1^a}{\mathbf{V}_2^a} = \sqrt{3} \frac{N_1}{N_2} e^{-j30^\circ} \iff \boxed{\mathbf{V}_1^a = m \mathbf{V}_2^a}$$

Concluimos que a tensão simples secundária está  $30^\circ$  em avanço face à correspondente tensão primária.

De forma análoga para as correntes, em que  $\mathbf{I}_2^{ac} = (N_1/N_2)\mathbf{I}_1^a$ , e  $\mathbf{I}_2^{ba} = (N_1/N_2)\mathbf{I}_1^b = (N_1/N_2)\mathbf{I}_1^a e^{-j120^\circ}$

$$\mathbf{I}_2^a = \mathbf{I}_2^{ac} - \mathbf{I}_2^{ba} = \mathbf{I}_1^a \frac{N_1}{N_2} (1 - e^{-j120^\circ}) = \sqrt{3} \frac{N_1}{N_2} \mathbf{I}_1^a e^{j30^\circ} \implies \boxed{\mathbf{I}_2^a = m^* \mathbf{I}_1^a}$$

Combinando as expressões das tensões e das correntes chegamos a:

$$\boxed{3\mathbf{V}_1^a \mathbf{I}_1^{a*} = 3\mathbf{V}_2^a \mathbf{I}_2^{a*}}$$

## 2.4 Máquina Assíncrona

Um motor assíncrono (também designado por *motor de indução*) recebe energia da rede elétrica e fornece energia mecânica a uma carga (também pode funcionar como gerador): é um conversor eletromecânico.

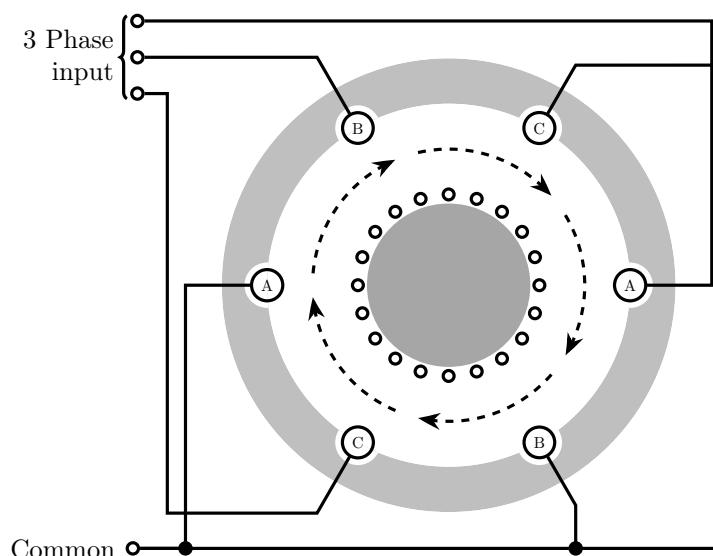
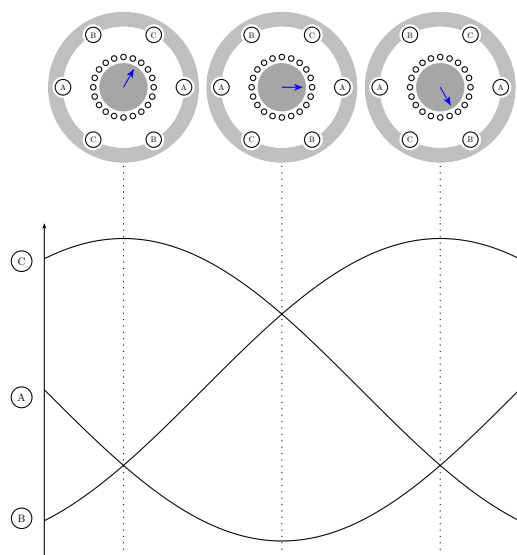


Fig. 22: Motor de indução trifásico.

A máquina assíncrona trifásica é constituída por um estator (camada exterior) e um rotor (camada interior). Da aplicação de um sistema trifásico de tensões ao enrolamento do estator, resulta no entreferro um fluxo magnético girante, o qual induz no enrolamento do rotor uma f.e.m. Uma vez que o rotor está em curto circuito (rotor em gaiola) ou fechado através de circuito exterior (rotor bobinado), esta f.e.m. dá origem a correntes que circulam no rotor, produzindo um binário motor.



### No motor de indução:

- A energia AC fornecida ao estator do motor cria um campo magnético que roda em sincronismo com as oscilações AC.
- O rotor gira a uma velocidade um pouco mais lenta do que o campo do estator. O campo magnético do estator está, portanto, a mudar ou a rodar relativamente ao rotor.
- Isto induz uma corrente oposta no rotor, que é efetivamente a segunda bobina do motor.
- O fluxo magnético rotativo induz correntes nas bobinas do rotor, de forma semelhante às correntes induzidas nas bobinas secundárias de um transformador.

Estando o motor em repouso, as correntes no rotor têm uma frequência igual à da tensão de alimentação; à medida que o rotor acelera, por ação do binário motor, aquela frequência vai diminuindo.

Se o motor estiver em vazio, a frequência e a amplitude das correntes no rotor são muito próximas de zero. Estando o motor a acionar uma carga mecânica que oferece um binário resistente, a frequência e a resultante amplitude das *correntes rotóricas* terão um valor correspondente ao binário motor necessário para estabilizar a marcha da máquina.

Em termos de **balanço energético**, a energia recebida da rede elétrica é transferida para o rotor por efeito indutivo, deduzida das perdas no ferro do estator e no cobre do enrolamento respetivo. Subtraindo as perdas no rotor e as perdas mecânicas, obtém-se a potência mecânica final fornecida à carga.

### 2.4.1 Modelo Matemático e Esquema Equivalente

Definimos a *velocidade síncrona* do rotor como:

$$n_s = \frac{60f}{p} [\text{rpm}] \implies \omega_s = n_s \frac{2\pi}{60} = \frac{2\pi f}{p} [\text{rad/s}]$$

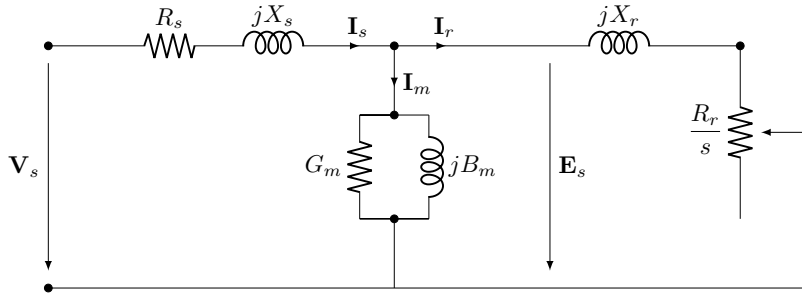
em que  $f$  é a frequência da tensão de alimentação e  $p$  o número de pares de pólos do enrolamento do estator.

A diferença entre a velocidade síncrona e a velocidade de rotação do rotor ( $n_r$ ), expressa em em p.u. (ou percentagem) na base da primeira, designa-se por *escorregamento* (ou *deslizamento*):

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s} = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s}$$

onde  $\omega_s$  e  $\omega_r$  são as velocidades angulares respetivas. O escorregamento tem um valor muito baixo em vazio, e vai aumentando à medida que a carga aumenta.

Podemos modelar a máquina síncrona através de um esquema equivalente em T, à semelhança do que se faz para o transformador (ver Apêndice X para mais detalhes):



**Fig. 23:** Esquema equivalente em T da máquina assíncrona.

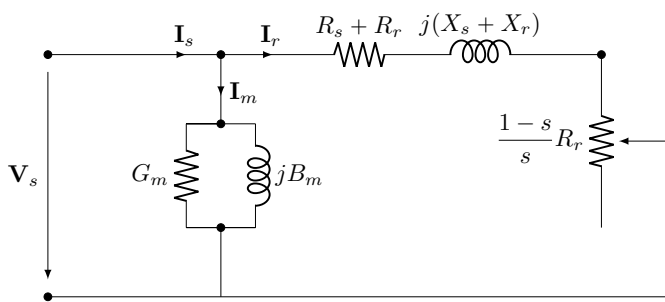
A potência transferida para o rotor corresponde à potência consumida na resistência fictícia ( $R_r/s$ ), que é igual à potência fornecida pela rede menos as perdas no estator e no circuito magnético:

$$P_r = 3 \frac{R_r}{s} I_r^2$$

A potência mecânica é igual à potência  $P_r$  menos as perdas no rotor:

$$P_M = P_r - 3R_r I_r^2 = 3 \frac{1-s}{s} R_r I_r^2$$

O esquema equivalente pode ser modificado de forma a modelar a carga mecânica:



**Fig. 24:** Esquema equivalente em L da máquina assíncrona.

Podemos deslocar o ramo longitudinal de modo a obter o esquema equivalente em L. No entanto,  $I_m$  é maior neste contexto (relativamente ao transformador), o que torna o esquema numa aproximação mais grosseira.

$$\begin{cases} I_r = \frac{V_s}{R_s + R_r/s + j(X_s + X_r)} \\ I_m = (G_m + jB_m)V_s \\ I_s = I_m + I_r \end{cases}$$

A potência perdida é dada por

$$\therefore P_s = 3G_m V_s^2 + 3 \left( R_s + \frac{R_r}{s} \right) I_r^2$$

Donde resulta o rendimento:

$$\eta = \frac{P_M}{P_s} = \frac{(1-s)/s \cdot R_r I_r^2}{3G_m V_s^2 + 3(R_s + R_r/s) I_r^2}$$

**Nota:** O motor assíncrono representa uma carga indutiva para a rede de alimentação com

$$Q_s = -3B_m V_s^2 + 3(X_s + X_r) I_r^2$$



### 2.4.2 Binário e Característica Binário-Velocidade

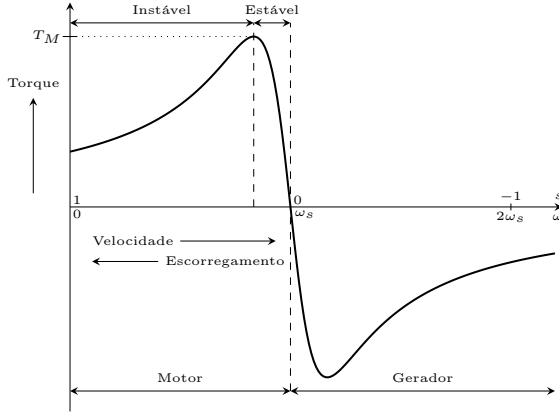
Para além da potência, interessa calcular o binário:

$$T = \frac{P_M}{\omega_r} = \frac{P_M}{\omega_s(1-s)} = \frac{3R_r I_r^2}{s\omega_s}$$

Como  $I_r^2 = V_s^2 / [(R_s + R_r)^2 + (X_s + X_r)^2]$ , temos que:

$$T = \frac{3V_s^2}{\omega_s} \frac{R_r}{(R_s + R_r)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

A região de funcionamento como motor corresponde a  $s > 0$  ou seja, a velocidade de rotação é menor que a do sincronismo; o funcionamento como gerador é caracterizado por  $s < 0$ , uma vez que neste caso  $\omega_r > \omega_s$ .



**Fig. 25:** Característica binário-velocidade

O binário de arranque, com  $s = 1$ , é dado por:

$$T_{arr} = \frac{3V_s^2}{\omega_s} \frac{R_r}{(R_s + R_r)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

E a corrente de arranque é

$$I_{arr} = \frac{V_s}{R_s + R_r + j(X_s + X_r)}$$

Queremos reduzir esta corrente, quando  $\omega_r = 0$  e  $s = 1$ , especialmente em motores de potência elevada, mas isto resulta na diminuição de  $T_{arr}$ , o que se pode revelar problemático para certas cargas mecânicas.

### 2.4.3 Representação em Valores p.u.

No contexto da máquina assíncrona, normalmente especifica-se a tensão e corrente nominais, e a potência mecânica. Tomam-se os valores da tensão e da corrente nominais como base, calcula-se a potência aparente de base:

$$S_b = \sqrt{3}V_b I_b$$

Tomando como valor base para a velocidade angular:

$$\omega_b = \omega_s = \frac{2\pi f}{p} \implies \omega_r = 1 - s$$

As restantes equações ficam

$$P_r = \frac{R_r}{s} I_r^2 \quad \rightarrow \quad P_M = P_r - R_r I_r^2 = \frac{1-s}{s} R_r I_r^2$$

$$\begin{cases} P_s = G_m V_s^2 + (R_s + R_r/s) I_r^2 \\ Q_s = -B_m V_s^2 + (X_s + X_r) I_r^2 \end{cases}$$

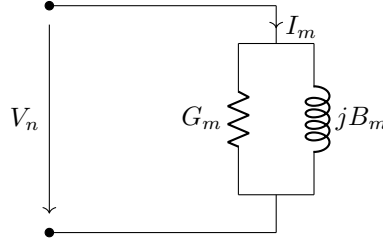
$$T = \frac{P_M}{\omega_r} = \frac{P_M}{1-s} = V_s^2 \frac{R_r/s}{(R_s + R_r/s)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

$$\begin{cases} T_{arr} = V_s^2 \frac{R_r}{(R_s + R_r)^2 + (X_s + X_r)^2} \\ T_{max} = \frac{V_s^2}{2} \frac{1}{R_s + \sqrt{R_s^2 + (X_s + X_r)^2}} \end{cases}$$

## 2.4.4 Análise da Máquina Assíncrona

### 2.4.4.1 Ensaio em Vazio

Semelhante ao ensaio que se faz no transformador para determinar os parâmetros transversais. Aplica-se a tensão nominal ao estator da máquina sem qualquer carga mecânica no veio ( $s \approx 0$ ).



**Fig. 26:** Esquema equivalente do ensaio em vazio.

Os valores de  $G_m$  e  $B_m$  obtêm-se igualmente das medidas da tensão aplicada  $V_n$ , corrente de magnetização  $I_m$  e potência de perdas em vazio  $P_0$ :

$$G_m = \frac{P_0}{V_n^2} \quad B_m = -\sqrt{\left(\frac{I_m}{V_n}\right)^2 - G_m^2}$$

### 2.4.4.2 Ensaio com Rotor Bloqueado

Neste ensaio o rotor é mantido parado ( $s \approx 1$ ), o que resulta numa resistência  $R(1-s)/s$  nula. O esquema equivalente é igual ao do ensaio em curto-circuito no transformador. Aplica-se uma tensão reduzida ao estator até a corrente atingir o valor nominal.

$$\begin{cases} V_{cc} = Z_{cc} I_n \\ I_n = 1.0 \text{ p.u.} \end{cases} \rightarrow \boxed{V_{cc} = Z_{cc}}$$

Para decompor a impedância de curto-circuito nas suas componentes resistiva e reativa, é preciso conhecer a potência  $P_{cc}$ :

$$R_t = \frac{P_{cc}}{I_n^2} = P_{cc} \quad Z_{cc} = V_{cc} = \sqrt{R_t^2 + X_t^2} \quad X_t = \sqrt{Z_t^2 - R_t^2}$$

## 2.4.5 Funcionamento como Gerador

A máquina assíncrona, além das suas funções habituais, também pode operar como gerador, sendo especialmente utilizada em centrais de baixa potência alimentadas por fontes renováveis. Ao contrário da máquina síncrona, que possui um sistema de excitação próprio, a máquina assíncrona requer uma corrente de magnetização do exterior, normalmente fornecida pela rede elétrica.

Quando funciona como gerador, a máquina assíncrona tem certas características específicas. Recebe energia mecânica (de um motor, por exemplo) e entrega energia elétrica à rede. No entanto, mesmo fornecendo energia ativa, continua a absorver energia reativa, o que exige compensação através de uma bateria de condensadores. Dependendo das condições, esta bateria pode ser ajustada para que o gerador assíncrono também forneça energia reativa.

(Adicionar imagem)

Um ponto interessante é que um gerador assíncrono pode auto-excitar-se quando está em vazio e ligado a um condensador, dependendo da capacitância do condensador. Na prática, a ligação deste gerador à rede pode ser feita de duas formas distintas: rodando a uma velocidade próxima da nominal ou utilizando uma bateria de condensadores de valor apropriado. A segunda opção evita sobre-correntes indesejadas.

### 3 Máquina Síncrona

A maior parte da energia elétrica que consumimos provém de *geradores síncronos* ou *alternadores trifásicos*, fundamentais nos Sistemas de Energia Elétrica. Estas máquinas transformam energia mecânica em elétrica através da lei da indução eletromagnética de Faraday (conversores mecanoelétricos).

O termo *síncrona* refere-se à capacidade destas máquinas operarem a uma velocidade e frequência constantes, em sintonia com outras ligadas à mesma rede. Na prática, um gerador pode receber energia mecânica de várias fontes, como turbinas hidráulicas ou a vapor, e converter essa energia em eletricidade com eficiência elevada. Curiosamente, estas máquinas também podem funcionar como motores, absorvendo energia elétrica e fornecendo energia mecânica (funcionamento como *motor síncrono*).

#### 3.1 Princípio de Funcionamento

A máquina síncrona é constituída por uma massa metálica fixa (*estator*) na qual está instalado o *enrolamento induzido*, e por uma massa metálica rotativa (*rotor*) no qual está bobinado o *enrolamento indutor* (ou de *excitação*):

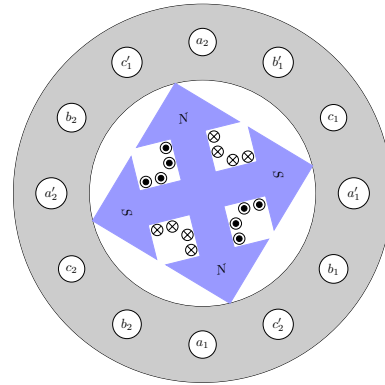
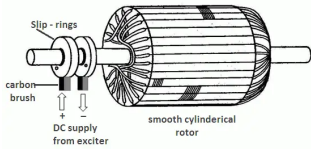
O enrolamento indutor é percorrido por uma corrente contínua, que dá origem a um fluxo magnético que se fecha através do entreferro e do estator. Uma vez que o rotor, acionado pela máquina motriz, roda com velocidade constante, cria-se no entreferro um fluxo magnético girante.

O enrolamento do estator é constituído por bobinas, alojadas em cavas; as bobinas correspondente a uma fase são colocadas em cavas diretamente opostas. De acordo com a Lei de Indução, o fluxo magnético girante produz uma tensão que origina uma corrente num circuito externo ligado aos respetivos terminais. Estes enrolamentos são desfasados fisicamente por  $120^\circ$  para que com a rotação uniforme do rotor sejam produzidas tensões desfasadas de  $120^\circ$  no tempo, constituindo um sistema trifásico simétrico.

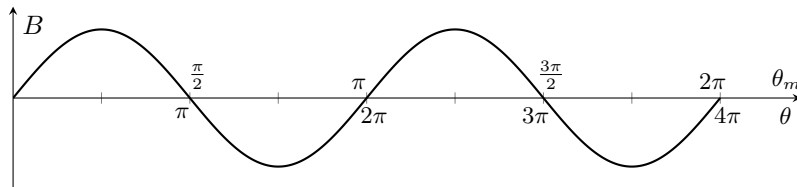
Para uma máquina com um par de pólos, a frequência da tensão induzida em ciclos por segundo (Hz) iguala a velocidade do rotor em rotações por segundo. Assim, para 50 Hz a velocidade de rotação deverá ser de 3000 rpm. No entanto, é costume as máquinas terem mais pares de pólos (magnéticos), por exemplo 4:

Cada fase é um par de enrolamentos (4 cavas):  
 $a_1a'_1$  e  $a_2a'_2$ ,  $b_1b'_1$  e  $b_2b'_2$ ,  $c_1c'_1$  e  $c_2c'_2$ .

Em cada instante são induzidas tensões iguais nos dois enrolamentos de cada fase, as quais se somam por estarem em série.



Para esta situação já é necessário criar uma distinção entre o ângulo elétrico e o ângulo mecânico, de acordo com a distribuição espacial do campo magnético:



**Fig. 27:** Distribuição espacial da indução magnética  $B$  para uma máquina de 4 pólos ( $\theta_m$  — rad. mecânicos;  $\theta$  — rad. elétricos)

Numa máquina com  $p$  pares de pólos temos  $\theta = p\theta_m$  em que  $\theta$  é o ângulo elétrico e  $\theta_m$  o ângulo mecânico. A frequência angular da tensão induzida  $\omega$  vem então:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = p \frac{d\theta_m}{dt} = p\omega_r$$

em que  $\omega_r$  é a velocidade angular do rotor. E a frequência da tensão (Hz) relaciona-se com a velocidade de rotação do motor,  $n_r$  (rpm), pela expressão:

$$f = p \frac{n_r}{60}$$

A variação espacial da indução magnética  $\mathbf{B}$  ao longo do entreferro é sinusoidal, i.e.,  $B = B_{max} \cos(p\alpha)$ , em que  $B_{max}$  é o valor máximo medido no centro da cabeça do pólo e  $\alpha$  o ângulo que define um ponto ao longo do entreferro, medido em radianos mecânicos a partir do eixo magnético do rotor.

O fluxo magnético por pólo  $\Phi$  é o integral da indução magnética ao longo de uma revolução completa

$$\Phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_{max} \cos(p\alpha) \cdot lr d\alpha = \frac{2B_{max}lr}{p}$$

onde  $l$  é o comprimento axial do estator e  $r$  o raio interior. O fluxo ligado  $\Psi$  com a fase  $a$  do estator (referência), admitindo um enrolamento com  $N$  espiras, é dado por

$$\Psi = N\Phi \cos(\theta)$$

onde  $\theta$  é o ângulo do eixo do rotor em radianos elétricos, medidos a partir do eixo magnético do enrolamento da fase  $a$  do estator.

$$\theta = p\omega_r t = \omega t$$

$$\therefore \Psi = N\Phi \cos(\omega t)$$

Pela Lei de Indução, a tensão induzida na fase  $a$  é

$$e = -\frac{d}{dt}\Psi = \omega N\Phi \sin(\omega t)$$

Esta tensão induzida (*força eletromotriz*), é sinusoidal, com frequência  $\omega = 2\pi f$  e está desfasada  $\pi/2$  em atraso relativamente ao fluxo. É costume definir o valor eficaz desta grandeza (fase-neutro):

$$E = \frac{\omega N\Phi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi f N\Phi \implies e = \sqrt{2}E \sin(\omega t)$$

### 3.1.1 Reação do Induzido e Esquema Equivalente

Quando o gerador está em carga e é alimentado, o sistema trifásico de correntes simétricas que se dá no enrolamento estatórico origina um campo magnético girante no entreferro, uma vez que as correntes em cada fase estão desfasadas por  $120^\circ$  temporalmente e espacialmente. Este fenómeno designa-se por reação do induzido, i.e., a aparição deste campo magnético à velocidade de sincronismo que se soma ao campo devido à corrente de excitação.

O fluxo magnético resultante é uma combinação dos três fluxos individuais devido às correntes no estator (vamos tomar a fase  $a$  como referência):

$$\Psi_r = Li_a + Mi_b + Mi_c$$

onde  $L$  e  $M$  são as indutâncias própria e mutua, respetivamente. Em regime trifásico simétrico,  $\sum i_x = 0$ ,

$$\therefore \Psi_r = (L - M)i_a$$

A tensão induzida por estas correntes na fase  $a$  é portanto

$$e_r = -\frac{d}{dt}\Psi_r = -(L - M)\frac{di_a}{dt}$$

A tensão aos terminais do gerador em carga é a soma da f.e.m. devido ao indutor com a tensão devido à reação do induzido

$$v = e + e_r = e - (L - M)\frac{di_a}{dt}$$

Em regime vetorial temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{E} - j\omega(L - M)\mathbf{I} \\ &= \mathbf{E} - jX_s\mathbf{I} \end{aligned}$$

Conhecendo a tensão aos terminais e a corrente, calcula-se a f.e.m. por

$$\mathbf{E} = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I}$$

onde a grandeza  $X_s$  recebe o nome de reatância síncrona. Normalmente também inclui a reatância de dispersão do estator, que não foi considerada na análise anterior. É pratica comum expressar  $X_s$  em p.u., referida aos valores nominais  $S_n$  e  $V_n$ :

$$X_s = X_{s(p.u.)} \frac{V_n^2}{S_n} [\text{p.u.}]$$

Em regime estacionário (trifásico simétrico) o esquema equivalente pode ser representada por

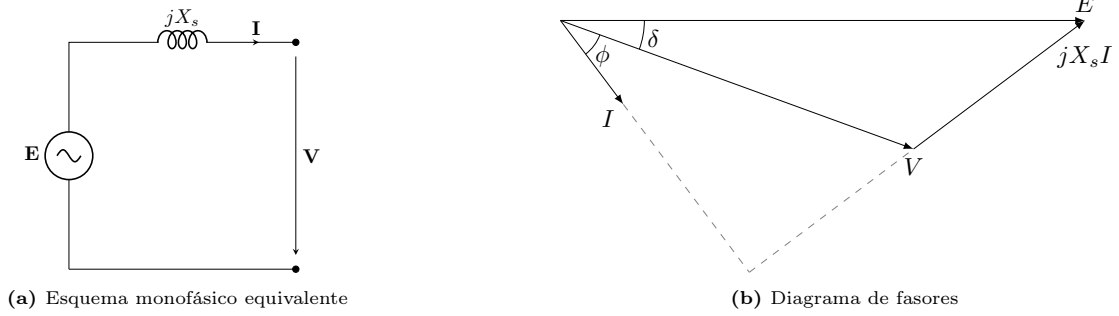


Fig. 28: Máquina síncrona como gerador

Despreza-se a resistência dos enrolamentos (valor pequeno face à reatância); admite-se que  $\mathbf{I}$  está desfasado com um atraso de ângulo  $\phi$  relativamente à tensão  $\mathbf{V}$ , e a f.e.m.  $\mathbf{E}$  por um ângulo  $\delta$  também relativamente à tensão, designado por ângulo de potência.

## 3.2 Características de Funcionamento

### 3.2.1 Em Vazio e em Curto-circuito

A característica em vazio é a curva da f.e.m.  $E$  (tensão em vazio) em função da corrente de excitação  $I_{exc}$ , com a máquina a rodar à velocidade nominal (sincronismo), movida pela máquina de acionamento.

A curva característica em vazio exhibe uma zona linear (cuja linha tangente é a reta entreferro), para valores baixos de corrente de excitação. Apresenta a não-linearidade resultante de saturação do ferro, quando o fluxo magnético excede um determinado valor limite.

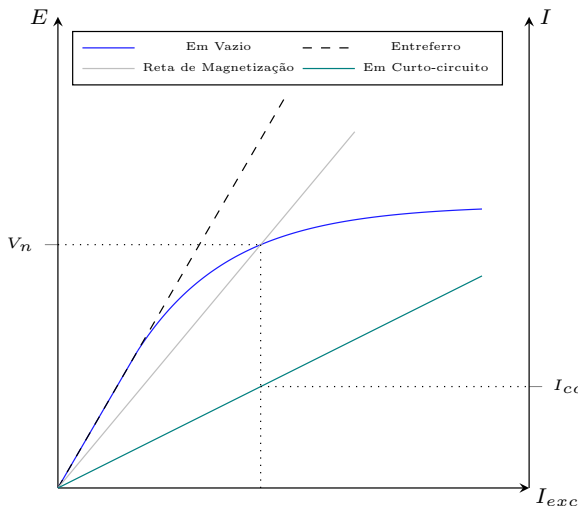
Na operação próxima à tensão nominal, aproxima-se a máquina a outra fictícia que não exhibe saturação, caracterizada pela reta de magnetização que passa pela origem e pelo ponto correspondente à tensão nominal.

A característica em curto-circuito é a curva da corrente no estator  $I$  em função de  $I_{exc}$ , com a máquina a rodar à velocidade síncrona, e os enrolamentos do estator em curto-circuito.

A curva característica em curto-circuito é linear, uma vez que o fluxo magnético tem um valor muito baixo nestas condições (não se manifesta a saturação).

Podemos calcular a reatância  $X_s$  a partir das características em vazio e em curto-circuito. Lembramos que  $E \propto \omega$ , ao fixarmos  $I_{exc}$  correspondente à tensão nominal no ensaio em vazio,  $\mathbf{E} = \mathbf{V}_n$ . No ensaio em curto-circuito,  $\mathbf{E} = jX_s \mathbf{I}_{cc}$ , então, para o  $I_{exc}$  fixo escolhido anteriormente, e como  $E \propto \omega$  é um valor fixo à tensão nominal, temos que  $V_n = X_s I_{cc}$ , isto é:

$$\therefore X_s = \frac{V_n}{I_{cc}}$$



(imagem)

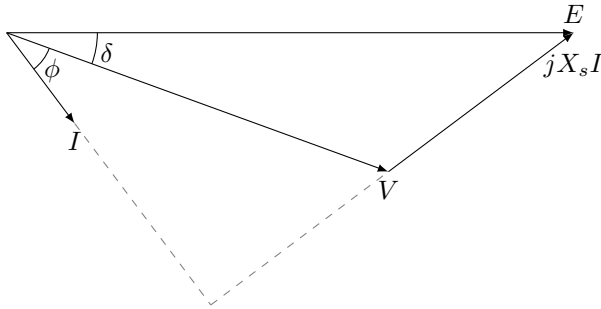
Fig. 29: Característica em vazio e em curto-circuito

### 3.2.2 Em Carga

A potência nominal de uma máquina síncrona é a máxima potência aparente à tensão nominal com  $\text{fp} = 0.85, 0.90, 0.95$  que pode fornecer continuamente. O fator que a limita é o aquecimento devido às correntes que percorrem os enrolamentos (limite térmico).

Potência ativa < potência nominal  $\rightarrow$  limitada pela potência da máquina de acionamento.

Quando a máquina está a funcionar à velocidade síncrona e está excitada de modo a apresentar a sua tensão nominal em vazio, podemos assumir que a corrente de carga aumentará gradualmente a partir de zero até atingir o seu valor nominal, mantendo um fator de potência constante.



Do diagrama de fasores, retiramos as seguintes equações:

$$E \sin(\delta) = X_s I \cos(\phi)$$

$$E \cos(\delta) = V + X_s I \sin(\phi)$$

Resolvendo em ordem a  $V$  e eliminando o ângulo  $\delta$ , obtém-se:

$$V = \sqrt{E^2 - X_s^2 I^2 \cos^2(\phi)} - X_s I \sin(\phi)$$

Supondo  $E$  constante, a tensão  $V$  vai experimentar variação:

Pressupondo uma máquina síncrona com reactância síncrona  $X = 1$  p.u. e velocidade nominal constante, com corrente de excitação constante para a tensão nominal em vazio, observamos a variação da tensão nos terminais à medida que a corrente de carga varia de 0 a 1 p.u. para diferentes fatores de potência. Calculando os extremos:

Para  $\text{f.p.} = 1$ :

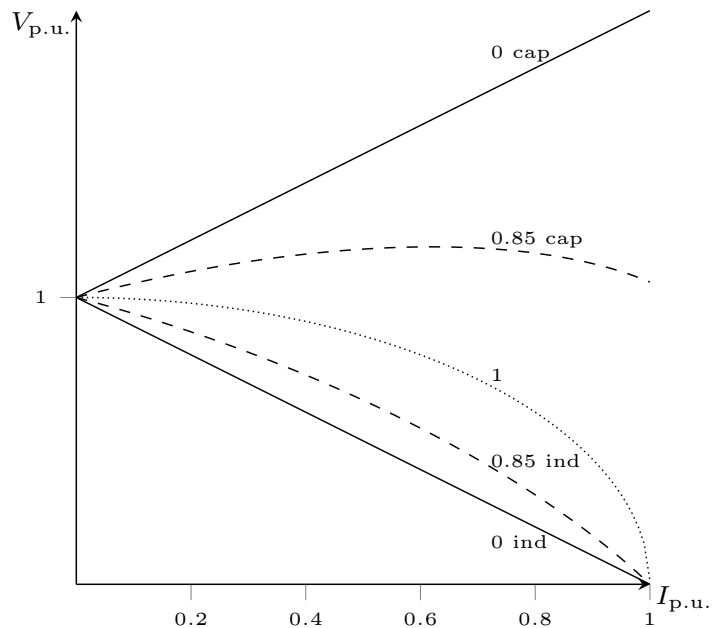
$$V^2 + X_s^2 I^2 = E^2 \rightarrow \text{Elipse}$$

Para  $\text{f.p.} = 0$ :

Indutivo:  $V = E - X_s I$

Capacitivo:  $V = E + X_s I$

A variação da tensão com a corrente é linear.



1. Quando o fator de potência é unitário ou indutivo:

- A tensão diminui à medida que a corrente de carga aumenta.
- Isso ocorre devido ao efeito desmagnetizante da reação do induzido, onde o fluxo magnético se subtrai do fluxo principal.

2. Quando o fator de potência é capacitivo:

- A tensão aumenta à medida que a corrente de carga.
- Isso ocorre porque a reação do induzido tem um efeito magnetizante, onde o fluxo magnético se soma ao fluxo principal, especialmente em correntes relativamente baixas.

Se se pretender manter constante a tensão então há que atuar sobre a corrente de excitação que condiciona  $E$ . Para uma dada potência ativa, sendo a amplitude de tensão  $V$  constante a variação da corrente de excitação altera  $E$  donde resulta uma variação de intensidade  $I$  e  $\sin(\phi)$ . A equação anterior pode reescrever-se:

$$E = \sqrt{V^2 + X_s^2 I^2 + 2V X_s I \sin(\phi)}$$

Pressupondo novamente a máquina síncrona com reactância síncrona  $X = 1$  p.u. com tensão nominal aos terminais, observamos a variação da f.e.m  $E$  à medida que a corrente de carga varia de 0 a 1.0 p.u. para diferentes fatores de potência e potência ativa. Calculando os extremos:

**Para  $P = 0$ :**

$$E = V \pm X_s I \rightarrow \text{Linear}$$

$\cos(\phi) = 0$  e consequentemente,  $\sin(\phi) = \pm 1$

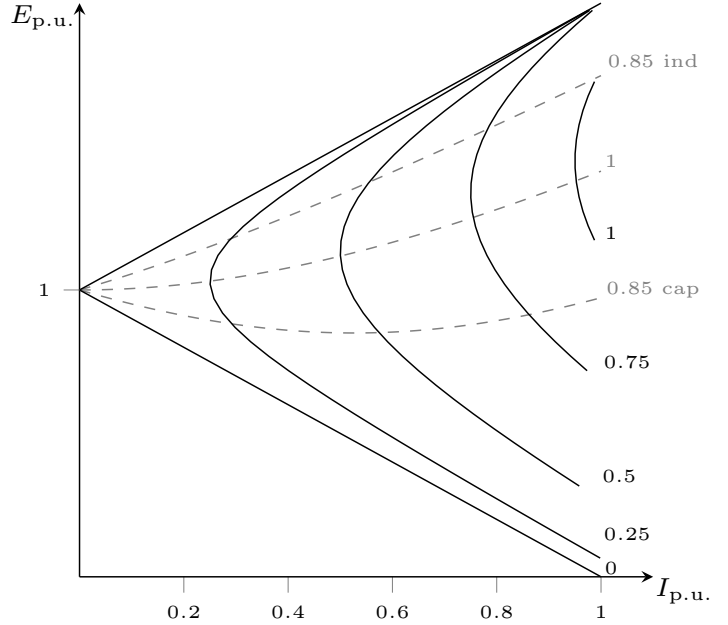
**Para  $P = 1$ :**

$$E = \sqrt{V^2 + X_s^2 I^2}$$

$$E^2 - I^2 = 1 \rightarrow \text{Hiperbole}$$

$\cos(\phi) = 1$  e consequentemente,  $\sin(\phi) = 0$

O fator de potência encontra-se representado a traço interrompido.



1. O valor da corrente de carga é mínimo para f.p. = 1 (O traço interrompido interceta as curvas hiperbólicas no mínimo relativo ao eixo das abcissas) aumentando à medida que o fator de potência diminui.
2. Quando traçadas em função da corrente de excitação, estas curvas são conhecidas pela designação de curvas em V. O seu andamento é semelhante ao gráfico da variação da tensão, ainda que não idêntico, por força da saturação da característica em vazio  $E(I_{exc})$ .

### 3.2.3 Fórmulas da Potência Ativa e Reativa

Tomando a tensão aos terminais de  $V$  como referência, a potência complexa fornecida pelo gerador é:

$$\begin{aligned} S_G &= P_G + jQ_G = \mathbf{VI}^* = V e^{j0} e^{j\phi} = V I e^{j\phi} \\ P_G &= V I \cos(\phi) \quad Q_G = V I \sin(\phi) \end{aligned}$$

Relembrando as expressões do diagrama de fasores, podemos escrever as potências ativa e reativa da seguinte forma:

$$\begin{cases} E \sin(\delta) = X_s I \cos(\phi) \\ E \cos(\delta) = V + X_s I \sin(\phi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_G = \frac{EV}{X_s} \sin(\delta) \\ Q_G = \frac{V}{X_s} (E \cos(\delta) - V) = \frac{V}{X_s} \Delta \end{cases}$$

O ângulo de potência  $\delta$  não é uma variável de controlo. Sendo o gerador um conversor mecanoelétrico, a potência ativa gerada é (à parte as perdas) igual à potência mecânica fornecida pela máquina motriz. Note-se que  $\delta$  depende da f.e.m.  $E$  e, por conseguinte, da corrente de excitação:

Constata-se que a potência reativa depende da diferença  $\Delta$ . Admitindo constante a tensão  $V$ :

$E \cos(\delta) = V \rightarrow$  A potência reativa é controlável através da corrente de excitação que determina a  $E$ .

A excitação normal é definida para  $\delta = 0$ .

$E \cos(\delta) > V \rightarrow$  A máquina fica sobreexcitada e fornece potência reativa.

$E \cos(\delta) < V \rightarrow$  A máquina fica subexcitada e absorve potência reativa.

## 4 Linha Elétrica de Energia

A transmissão de energia elétrica é realizada pelo campo eletromagnético criado pela tensão entre os condutores e pela corrente que neles flui.

As linhas são normalmente aéreas, constituídas por condutores de alumínio ou de cobre. Os condutores (sujeitos ao peso e uma força longitudinal) descrevem uma linha designada por *catenária*, a qual para pequenas distâncias se aproxima de uma parábola.

A tensão nominal de uma linha determina a sua capacidade de transporte, i.e., quanto maior a tensão, maior é a potência transmitida. As tensões mais elevadas requerem naturalmente um isolamento mais pronunciado, bem como maiores distâncias entre condutores e entre estes e a terra.

### 4.1 Modelos da Linha em Regime Estacionário

#### 4.1.1 Modelo Exato

Considerando um troço de uma fase de uma linha com comprimento infinitesimal  $dx$ , onde  $v$  é a tensão fase-neutro e  $i$  a corrente por fase, funções do tempo e da distância  $x$  medida a partir do emissor, podemos escrever:

$$\begin{cases} v(x) - v(x + dx) = R dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t} \\ i(x) - i(x + dx) = G dx v + C dx \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = Gv + C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = (R + j\omega L)\mathbf{I} \\ -\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} = (G + j\omega C)\mathbf{V} \end{cases}$$

Definem-se a característica (ou impedância) da onda  $\mathbf{Z}_0$  ( $\Omega$ ) e constante de propagação  $\gamma$  ( $\text{m}^{-1}$ ):

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{R + jX}{G + jB}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{(R + jX)(G + jB)} = \alpha + j\beta$$

onde  $\alpha$  é o fator de atenuação e  $\beta$  o fator de defasagem.

Para obtermos as soluções definimos as seguintes EDOs, após derivar e substituir:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\mathbf{V} \\ \frac{d^2 \mathbf{I}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\mathbf{I} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} = \gamma^2 \mathbf{V} \\ \frac{d^2 \mathbf{I}}{dx^2} = \gamma^2 \mathbf{I} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V}_e \cosh(\gamma x) - \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_e \sinh(\gamma x) \\ \mathbf{I} = -\frac{\mathbf{V}_e}{\mathbf{Z}_0} \sinh(\gamma x) + \mathbf{I}_e \cosh \gamma x \end{cases}$$

As soluções obtidas são para uma distância qualquer entre o emissor e o recetor. Interessa o caso específico no extremo do recetor ( $\mathbf{V}_r, \mathbf{I}_r$ ) em que  $x = d$ . Sob a forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma d) & -\mathbf{Z}_0 \sinh(\gamma d) \\ -1/\mathbf{Z}_0 \cdot \sinh(\gamma d) & \cosh(\gamma d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma d) & \mathbf{Z}_0 \sinh(\gamma d) \\ 1/\mathbf{Z}_0 \cdot \sinh(\gamma d) & \cosh(\gamma d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

Podemos apresentar a equação sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

em que os parâmetros  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{D} &= \cosh(\gamma d) = \cosh(\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{Z}_0 \sinh(\gamma d) = \frac{\mathbf{Z}_0 \sinh(\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T})}{\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}} \\ \mathbf{C} &= \frac{\sinh(\gamma d)}{\mathbf{Z}_0} = \frac{\mathbf{Y}_T \sinh(\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T})}{\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{Z}_L = (R + j\omega L)d$  e  $\mathbf{Y}_T = (G + j\omega C)d$  são a impedância longitudinal e admitância transversal totais, respetivamente.

Para uma linha sem perdas, a impedância longitudinal e a admitância transversal são imaginários puros, logo, a impedância característica e a constante de propagação são real e imaginária pura, respetivamente:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta, \quad \text{onde } \beta \text{ é a constante de fase}$$



#### 4.1.2 Esquema em $\pi$ Exato

Para a modelação da linha numa rede interligada é conveniente utilizarmos um esquema equivalente em  $\pi$  como se apresenta em baixo. O ramo longitudinal possui uma impedância  $\mathbf{B}$  e os dois ramos transversais uma admitância  $(\mathbf{A} - 1)/\mathbf{B}$ .

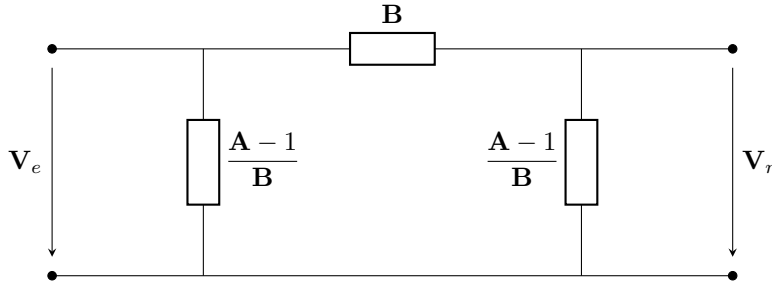


Fig. 30: Esquema equivalente em  $\pi$  exato

#### 4.1.3 Esquema em $\pi$ Nominal (linhas médias)

Os valores da impedância longitudinal e admitâncias transversais no esquema em  $\pi$  são, respetivamente:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}_0 \sinh(\gamma d)$$

$$\frac{\mathbf{A} - 1}{\mathbf{B}} = \frac{\cosh(\gamma d) - 1}{\mathbf{Z}_0 \sinh(\gamma d)} = \frac{1}{\mathbf{Z}_0} \tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)$$

Para linhas em que  $d \leq 250$  km, verifica-se que  $\gamma d \ll 1$ , o que implica que  $\sinh(\gamma d) \approx \gamma d$  e  $\tanh(\gamma d/2) \approx \gamma d/2$ .

Esta simplificação resulta em:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}_0 \gamma d = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Y}_T}} \sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T} = \mathbf{Z}_L$$

$$\frac{\mathbf{A} - 1}{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_0} \frac{\gamma d}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{Y}_T}{\mathbf{Z}_L}} \frac{\sqrt{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}}{2} = \frac{\mathbf{Y}_T}{2}$$

o que se traduz na simplificação do esquema equivalente apresentado na Fig. 31.

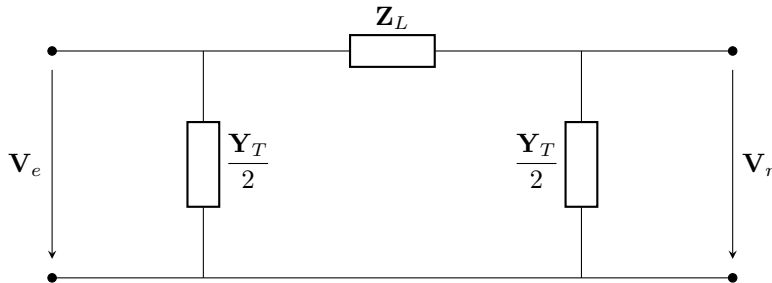


Fig. 31: Esquema equivalente em  $\pi$  nominal

As equações do esquema em  $\pi$  nominal escrevem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{2} & -\mathbf{Z}_L \\ -\mathbf{Y}_T \left(1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{4}\right) & 1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{2} & \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{Y}_T \left(1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{4}\right) & 1 + \frac{\mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

#### 4.1.4 Nota sobre Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas têm uma relação íntima com as funções trigonométricas, como revelam as definições:

$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$	$\sinh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$	$\tanh(w) = \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$
$\cos(u) = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$	$\sin(v) = \frac{e^{jv} - e^{-jv}}{2j}$	$\tan(w) = \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{j(e^{jw} + e^{-jw})}$
$\therefore \cos(u) = \cosh(ju)$	$\therefore j \sin(v) = \sinh(jv)$	$\therefore j \tan(w) = \tanh(jw)$

## 4.2 Linha Terminada pela Impedância de Onda

### 4.2.1 Linha com Perdas

Se a linha for terminada por  $\mathbf{Z}_0$ , a relação entre a tensão e a corrente ao longo da linha simplifica-se consideravelmente. Temos, neste caso,  $\mathbf{V}_r = \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_r$ , o que leva à reconstrução da relação:

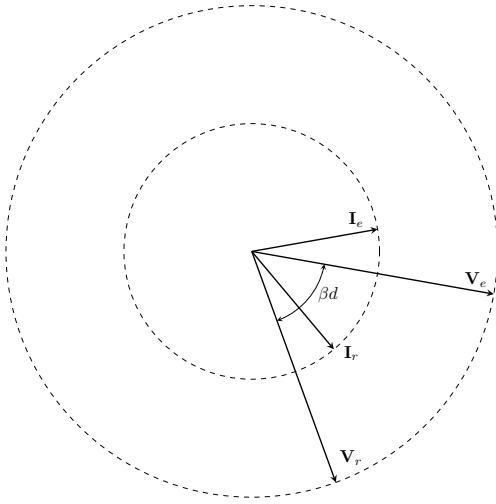
$$\mathbf{V}_e = (\cosh(\gamma d) + \sinh(\gamma d)) \mathbf{V}_r = e^{\gamma d} \mathbf{V}_r$$

$$\mathbf{I}_e = (\sinh(\gamma d) + \cosh(\gamma d)) \mathbf{I}_r = e^{\gamma d} \mathbf{I}_r$$

Dividindo as expressões anteriores, descobrimos a relação:

$$\frac{\mathbf{V}_e}{\mathbf{I}_e} = \frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_r} = \mathbf{Z}_0$$

Este resultado implica que na emissão a linha apresenta, tal como na receção, a impedância de onda. Verifica-se esta relação para qualquer outro ponto genérico da mesma.



**Fig. 32:** Tensão e corrente numa linha terminada por  $\mathbf{Z}_0$

A constante de propagação é um número complexo, i.e.,  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Substituindo, vem que

$$\frac{V_r}{V_e} = \frac{I_r}{I_e} = e^{-\alpha d}$$

$$\arg(\mathbf{V}_e) - \arg(\mathbf{V}_r) = \arg(\mathbf{I}_e) - \arg(\mathbf{I}_r) = \beta d$$

Conclui-se que a tensão e a corrente ao longo da linha se vão atenuando da emissão para a receção com o fator de atenuação  $\alpha$ , ao mesmo tempo que sofrem uma rotação no sentido negativo, com o fator de defasagem  $\beta$ . A impedância de onda é tipicamente capacitiva (argumento entre  $0^\circ$  e  $-15^\circ$ ), pelo que a corrente está avançada em relação à tensão. A atenuação e a rotação variam linearmente com o comprimento da linha (na representação ao lado a atenuação não é muito acentuada).

### 4.2.2 Linha sem Perdas

Como já mencionado acima, admitindo uma linha sem perdas, temos uma impedância de onda resistiva pura e uma constante de propagação imaginária pura (sem nulo o fator de atenuação):

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta, \quad \text{em que } \beta = \omega\sqrt{LC}$$

A velocidade da onda eletromagnética ao longo da linha pode ser dada por  $\nu = 1/\sqrt{LC}$ , de que resulta:

$$\beta = \frac{\omega}{\nu}$$

O comprimento de onda  $\lambda$  é dado por pela relação:

$$\lambda = \frac{\nu}{f} = 2\pi \frac{\nu}{\omega}$$

A defasagem entre as tensões na emissão e na receção podem então escrever-se como:

$$\beta d = 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

Uma vez que  $\alpha = 0$ , as amplitude da tensão e da corrente ao longo da linha (que estão em fase) mantêm-se constantes, o que resulta em:

$$\frac{V}{I} = Z_0$$

Supondo que trabalhamos à tensão nominal, a linha transporta a *potência natural*  $P_n$ :

$$P_n = \frac{V_n^2}{Z_0}$$

Nestas condições,  $\omega C d V^2 = \omega L d I^2$ , i.e., “a *potência reativa gerada pela capacitância da linha iguala a absorvida pela respetiva reatância*”[1]. Caso a carga seja superior a  $Z_0$ , a linha gera potência reativa e a tensão sobe ao longo da linha,  $V_r > V_e$ . O recíproco ocorre para cargas inferiores a  $Z_0$  (a linha consome reativa, e  $V_r < V_e$ ).

### 4.3 Capacidade de Transporte

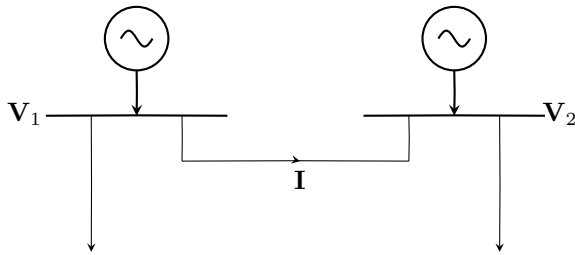
#### 4.3.1 Limite Térmico

Uma linha elétrica tem a sua capacidade de transporte influenciada pelo aumento da temperatura. Este aumento é causado pelas perdas devido ao efeito de Joule, que ocorrem com a passagem da corrente elétrica. A temperatura sobe até que a taxa de dissipação de calor equilibre a potência de perdas, tendo o seu valor máximo de ser limitado.

- O **limite térmico** determina a capacidade de transporte em cabos subterrâneos e linhas de curta ou média distância (inferior a 150-200 km).
- Os cabos subterrâneos são isolados e o seu isolamento pode ser danificado se a temperatura ultrapassar um valor máximo entre 90 e 120°C.
- Os condutores das linhas aéreas expandem-se com o aumento da temperatura. Tal altera a sua trajetória (a catenária dilata), reduzindo a distância a objetos próximos.
- O limite térmico destas linhas varia com a temperatura exterior. Por exemplo, a 35°C, é aproximadamente 2/3 do valor a 15°C. Devido a esta característica, a capacidade de transporte no verão é notavelmente menor do que no inverno.

#### 4.3.2 Limite de Estabilidade Estática

Num sistema com dois barramentos, ambos com geração e carga, ligados por uma linha com geradores que mantêm estáveis as amplitudes das tensões nos barramentos, ignorando a admitância transversal da linha, a corrente no sentido de  $1 \rightarrow 2$  e a potência complexa na emissão são:



$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_L + jX_L} \quad \mathbf{S}_{12} = \mathbf{V}_1 \mathbf{I}^* = \frac{V_1^2 - V_1 V_2 e^{j\theta}}{R_L - jX_L}$$

onde  $R_L$  e  $X_L$  são a resistência e a reatância da linha e  $\theta$  a defasagem entre  $V_1$  e  $V_2$ .

A partes reais e imaginária da potência complexa fornecem a potência ativa e reativa:

$$P_{12} = V_1^2 \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + V_1 V_2 \frac{X_L \sin(\theta) - R_L \cos(\theta)}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$Q_{12} = V_1^2 \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} + V_1 V_2 \frac{X_L \cos(\theta) + R_L \sin(\theta)}{R_L^2 + X_L^2}$$

Considerando que a potência ativa transmitida pela linha, convencionalmente positiva no sentido  $1 \rightarrow 2$ , é o valor médio das potência na emissão e na receção (parte real da potência complexa negada):

$$P = \frac{P_{12} - P_{21}}{2} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_1 V_2 \sin(\theta)$$

Admitindo que  $V_1 = V_2 = V_n$ :

$$P = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_n^2 \sin(\theta) = P_{\max} \sin(\theta) \rightarrow \boxed{P_{\max} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} V_n^2 \simeq \frac{V_n^2}{X_L}}$$

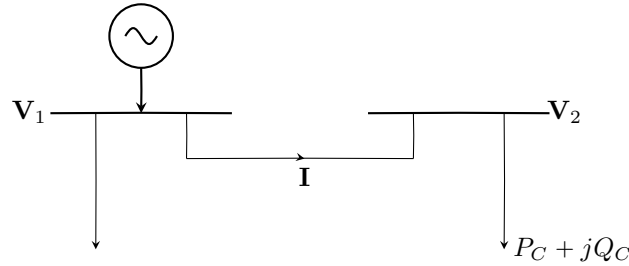
1. A capacidade de transporte da linha aumenta quadraticamente com a tensão.
2. A capacidade de transporte é inversamente proporcional à reatância da linha.
3. O valor máximo do trânsito de potência ativa ocorre para  $\theta = \pm\pi/2$ , que corresponde ao limite de estabilidade estática da marcha síncrona dos dois geradores:

$$C_s = \frac{\partial P}{\partial \theta} = P_{\max} \cos(\theta)$$

Quando  $\theta = \pm\pi/2$ , o coeficiente anula-se, perdendo o sincronismo entre geradores.

### 4.3.3 Limite de Estabilidade da Tensão

Considere-se um sistema com dois barramentos ligados por uma linha, no qual um gerador ligado a um barramento alimenta uma carga ligada ao outro:



Considerando fixa a tensão no barramento 1, a tensão no barramento 2 varia com a carga. Desprezando a admitância transversal da linha, tem-se:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + (R_L + jX_L)\mathbf{I}$$

Sendo  $\mathbf{V}_1 = V_1 e^{j0}$  e  $\mathbf{V}_2 = V_2 e^{j\theta}$ :

$$\mathbf{I} = \left( \frac{\mathbf{S}_C}{\mathbf{V}_2} \right)^* = \frac{P_C - jQ_C}{V_2 e^{j\theta}}$$

Substituindo na equação anterior, obtém-se:

$$V_1 = V_2 e^{-j\theta} + (R_L + jX_L) \frac{P_C - jQ_C}{V_2 e^{j\theta}}$$

ou ainda:

$$V_1 V_2 e^{j\theta} = V_2^2 + (R_L + jX_L)(P_C - jQ_C)$$

Decompondo em parte real e imaginária, vem:

$$V_1 V_2 \cos \theta = V_2^2 + R_L P_C + X_L Q_C$$

$$V_1 V_2 \sin \theta = X_L P_C - R_L Q_C$$

Quadrando e somando estas equações, obtém-se a equação biquadrática:

$$V_2^4 + \underbrace{[2(R_L P_C + X_L Q_C) - V_1^2]}_b V_2^2 + \underbrace{(R_L^2 + X_L^2)(P_C^2 + Q_C^2)}_c = 0$$

Cuja solução é dada por:

$$V_2 = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad \theta = \arcsin\left(\frac{X_L P_C - R_L Q_C}{V_1 V_2}\right)$$

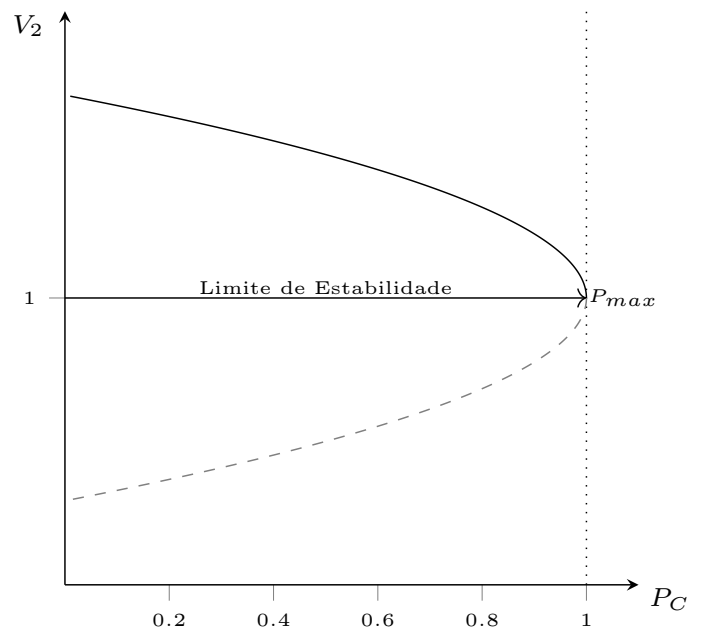
Para valores crescentes da potência d carga  $P_C$ , mantendo-se constante o fator de potência, a amplitude  $V_2$  varia como apresentado. Observa-se o fenómeno do colapso de tensão quando a potência ativa da carga atinge um limite, a partir do qual o sistema se torna instável:

→ A ponta corresponde à potência máxima que pode ser fornecida à carga. Para além deste ponto, cargas adicionais provocam uma queda tanto na tensão como na potência (ilustrada a tracejado).

Para f.p. = 1:

$$P_{max} = \frac{V_n^2}{2X_L}$$

Este valor é metade do que prevalece quando a tensão é mantida no valor nominal em ambos os extremos da linha.



#### 4.4 Parâmetros da Linha

As linhas elétricas são caracterizadas pela impedância longitudinal e admitância transversal, geralmente expressas em  $\Omega/\text{km}$  e  $\text{S}/\text{km}$ , respetivamente. Os modelos comuns consideram a resistência e a reactância longitudinais; a suscetância transversal é considerada em linhas longas, enquanto a condutância transversal é muitas vezes ignorada.

Ao contrário dos circuitos de parâmetros concentrados, estas linhas têm parâmetros distribuídos ao longo do seu comprimento, o que resulta num tempo de propagação não nulo para o campo eletromagnético, que viaja à velocidade da luz:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot c_0$$

onde  $c_0 = 300'000 \text{ km/s}$  é a velocidade da luz no vácuo.

## 5 Trânsito de Energia

O *Trânsito de Energia*<sup>§</sup> é a solução em regime estacionário de um sistema de energia elétrica, compreendendo os geradores, a rede e as cargas. Nos SEE, é preferível especificar as potências ativas e reativas fornecidas pelos geradores como variáveis de controlo, em vez das correntes injetadas, o que resulta num modelo muito simples para aqueles elementos. As tensões nos nós são as variáveis de estado, e as potências ativas e reativas de carga assumem o carácter de variáveis de perturbação.

O número de nós (barramentos) e de ramos (linhas e transformadores) é muito elevado — da ordem das centenas ou milhares — para um sistema de grande porte e as equações que o modelam são não-lineares, o que exige o recurso a um método de cálculo *potente*.

O trânsito de energia compreende os seguintes passos:

1. Formulação de um modelo matemático que represente com suficiente rigor o sistema físico real.
2. Especificação do tipo de barramentos e das grandezas referentes a cada um.
3. Solução numérica das equações do trânsito de energia, a qual fornece o valor das amplitudes e argumentos das tensões em todos os barramentos.
4. Cálculo das potências que transitam em todos os ramos — linhas e transformadores.

### 5.1 Sistema com $n$ barramentos

Começamos por analisar o caso mais simples de um sistema com dois barramentos ligados por uma linha ( $n = 2$ ), que irá servir para introduzir as características do trânsito de energia.

Cada barramento é alimentado por geradores que fornecem as potências complexas  $\mathbf{S}_{G1}$  e  $\mathbf{S}_{G2}$ , respetivamente a cada barramento. A estes barramentos estão ligadas cargas que consomem  $\mathbf{S}_{C1}$  e  $\mathbf{S}_{C2}$ . A linha de transmissão pode ser representada pelo equivalente em  $\pi$ , conforme apresentado na Fig. X (b).

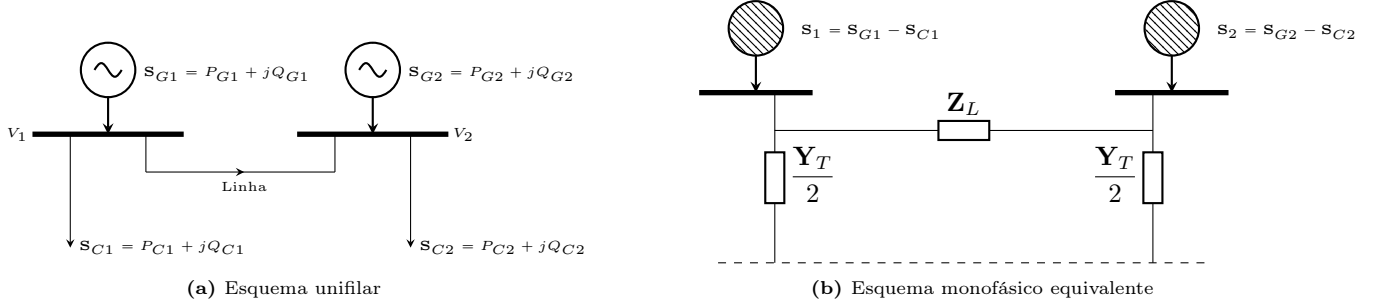


Fig. 33: Sistema com dois barramentos

Definimos a *potência injetada*  $\mathbf{S}$  como a diferença entre as potências gerada e consumida em cada barramento. Para este exemplo temos:

$$\mathbf{S}_1 = P_1 + jQ_1 = (P_{G1} - P_{C1}) + j(Q_{G1} - Q_{C1})$$

$$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = (P_{G2} - P_{C2}) + j(Q_{G2} - Q_{C2})$$

Conclui-se que se num dado barramento a geração for superior à carga, a potência injetada será positiva; o oposto ocorre na situação inversa. Os geradores fictícios que entregam as potências injetadas nos barramentos são representados na Fig. X (b) por círculos sombreados.

A corrente injectada num barramento  $\mathbf{I}$  está relacionada com a potência injetada pela equação:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{S}^*}{\mathbf{V}^*} = \frac{P - jQ}{\mathbf{V}^*}$$

A aplicação da primeira lei de Kirchhoff aos barramentos 1 e 2 conduz às equações nodais:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{S}_1^*}{\mathbf{V}_1^*} = \frac{\mathbf{Y}_T}{2} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{\mathbf{Z}_L} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{S}_2^*}{\mathbf{V}_2^*} = \frac{\mathbf{Y}_T}{2} \mathbf{V}_2 + \frac{1}{\mathbf{Z}_L} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{S}_1^*}{\mathbf{V}_1^*} = \mathbf{y}_{11} \mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12} \mathbf{V}_2 \\ \frac{\mathbf{S}_2^*}{\mathbf{V}_2^*} = \mathbf{y}_{21} \mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22} \mathbf{V}_2 \end{cases}$$

<sup>§</sup>Também designado por *Trânsito de Potência* ou *Fluxo de Potência* (*Power Flow* ou *Load Flow*).

Podemos assim definir a *matriz das admitâncias nodais*:

$$\begin{cases} y_{11} = \frac{Y_T}{2} + \frac{1}{Z_L} \\ y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_L} \\ y_{22} = \frac{Y_T}{2} + \frac{1}{Z_L} \end{cases} \rightarrow [\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

Sob a forma matricial, as equações nodais escrevem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mathbf{V}^* \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}][\mathbf{V}]$$

Note-se que estas equações relacionam tensões e potências (e não correntes), o que as torna não lineares, uma alternativa será:

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{Z}] \begin{bmatrix} \mathbf{S}^* \\ \mathbf{V}^* \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Y}]^{-1} = [\mathbf{Z}]$$

onde  $[\mathbf{Z}]$  é a *matriz das impedâncias nodais*.

Em notação compacta,  $\mathbf{S}_i^*$ , pode ser reescrito como:

$$\mathbf{S}_i^* = P_i - jQ_i = \mathbf{V}_i^* \sum_{j=1}^2 \mathbf{y}_{ij} \mathbf{V}_j, \quad i = 1, 2$$

As equações do trânsito de energia escrevem-se também na forma real, cabendo a cada barramento duas equações. Normalmente, exprime-se a tensão em notação polar e a admitância complexa em notação retangular:

$$\mathbf{V}_i = V_i e^{j\theta_i} \quad \mathbf{y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

onde  $G_{ij}$  e  $B_{ij}$  são a condutância e a suscetância nodais, respetivamente. Por substituição na fórmula de notação compacta obtemos:

$$P_i - jQ_i = \sum_{j=1}^2 (G_{ij} + jB_{ij}) V_i V_j e^{(j\theta_j - \theta_i)}, \quad i = 1, 2$$

Decompondo nas partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} P_i &= P_{Gi} - P_{Ci} = \sum_{j=1}^2 V_i V_j \left[ G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \right], \quad i = 1, 2 \\ Q_i &= Q_{Gi} - Q_{Ci} = \sum_{j=1}^2 V_i V_j \left[ G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right], \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

### 5.1.1 Característica das equações

As equações do trânsito de energia exibem as seguintes características:

- As equações são algébricas, porque modelam matematicamente o sistema em regime estacionário<sup>1</sup>.
- As equações são não-lineares, o que torna impossível uma solução por via analítica. Usando um computador digital, pode no entanto obter-se uma solução numérica.

As equações do balanço de potência ativa e das respetivas perdas  $P_L$  são dadas por:

$$\begin{aligned} P_{G1} + P_{G2} &= P_{C1} + P_{C2} + P_L \\ P_L &= (V_1^2 + V_2^2)G_{11} + 2V_1V_2G_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

De forma análoga obtemos equação de balanço de potência reativa e as respetivas perdas  $Q_L$ :

$$\begin{aligned} Q_{G1} + Q_{G2} &= Q_{C1} + Q_{C2} + Q_L \\ Q_L &= -(V_1^2 + V_2^2)B_{11} - 2V_1V_2B_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

As perdas são função dos módulos e argumentos das tensões.

<sup>1</sup>Se se tratasse de um regime dinâmico, teríamos equações diferenciais.

Para o sistema em estudo existem 12 variáveis: quatro potências activas  $P_{G1}$ ,  $P_{C1}$ ,  $P_{G2}$  e  $P_{C2}$ , quatro potências reactivas  $Q_{G1}$ ,  $Q_{C1}$ ,  $Q_{G2}$  e  $Q_{C2}$ , das tensões  $V_1$  e  $V_2$  e dois argumentos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por conseguinte, temos que especificar oito destas variáveis, restando quatro incógnitas que podem ser obtidas por solução das quatro equações do trânsito de energia de que dispomos. Contudo, a solução do trânsito de energia é limitada por dois obstáculos:

1. Não é possível especificar as potências geradas nos dois barramentos, uma vez que não se conhecem as perdas, que são função das incógnitas.
2. Não é possível calcular os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , somente a sua diferença  $\theta_1 - \theta_2$ .

A solução do problema requer agora os seguintes passos:

1. Conhecer ou estimar as cargas activas e reactivas impostas pelos consumidores.
2. Especificar a tensão e o argumento no barramento 1 (normalmente toma-se  $\theta_1 = 0$ ), que passa a desempenhar o papel de barramento de referência, bem como as potências activa e reactiva geradas no barramento 2.
3. Resolver as equações do trânsito de energia para obter a tensão e o argumento no barramento 2 e as gerações activa e reactiva no barramento 1, que assume assim também o papel de barramento de *balanço*<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Porque permite fechar o balanço energético do sistema: geração = carga + perdas.

### 5.1.2 Modelo Matemático

A generalização das equações do trânsito de energia para um sistema com  $n$  barramentos é trivial. Considere-se o barramento genérico  $i$  do sistema, por definição, a potência injetada  $\mathbf{S}_i = P_i + jQ_i$  é dada por

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{G_i} - \mathbf{S}_{C_i} = (P_{G_i} - P_{C_i}) + j(Q_{G_i} - Q_{C_i})$$

Representando a linha  $k$ , ligada entre os nós  $i$  e  $j$  pelo esquema equivalente em  $\pi$ , a aplicação da KCL ao barramento  $i$  resulta em:

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{S}_i^*}{\mathbf{V}_i^*} = \mathbf{y}_{ii}\mathbf{V}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{y}_{ij}\mathbf{V}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_{ij}\mathbf{V}_j$$

onde

$$\mathbf{y}_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{(\mathbf{Y}_T)_k}{2} + \frac{1}{(\mathbf{Z}_L)_k} \right)$$

$$\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_{ji} = -\frac{1}{(\mathbf{Z}_L)_k}$$

A matriz das admitâncias nodais possui dimensão  $n \times n$ :

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \dots & \mathbf{y}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{n1} & \dots & \mathbf{y}_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é simétrica e complexa no caso geral, podendo ser decomposta em:

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{G}] + j[\mathbf{B}]$$

onde  $[\mathbf{G}]$  e  $[\mathbf{B}]$  são a matriz de condutâncias nodais e matriz de suscetâncias nodais, respetivamente.

O elemento diagonal  $\mathbf{y}_{ii}$  é dado pela soma das admitâncias de todos os ramos ligados ao nó  $i$  (este valor é sempre diferente de zero), enquanto a elemento não diagonal  $\mathbf{y}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) é dado pelo simétrico da admitância do ramo que liga os nós  $i$  e  $j$  (o valor é nulo caso não estejam ligados). Note-se que esta é uma matriz esparsa, uma vez que numa rede elétrica cada nó só está ligado àqueles que lhe são vizinhos.

Massajando a expressão da corrente injetada, obtemos:

$$\mathbf{S}_i^* = P_i - jQ_i = \mathbf{V}_i^* \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_{ij}\mathbf{V}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Esta é a forma complexa das equações do trânsito de energia, em número igual ao de barramentos da rede.



As equações do trânsito de energia escrevem-se na forma real e resultam então num conjunto de  $2n$  equações que exprimem o balanço de energia ativa e reativa:

$$P_i = P_{G_i} - P_{C_i} = \sum_{j=1}^n V_i V_j \left[ G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right], \quad i = 1, \dots, n$$

$$Q_i = Q_{G_i} - Q_{C_i} = \sum_{j=1}^n V_i V_j \left[ G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right], \quad i = 1, \dots, n$$

## 5.2 Solução do Trânsito de Energia

### 5.2.1 Cálculo das Tensões

O primeiro passo é o cálculo das tensões nos barramentos. Dada a não-linearidade das equações do trânsito de energia, a solução tem de ser numérica, com base num método iterativo. Utiliza-se normalmente:

1. Método de Gauss-Seidel.
2. Método de Newton-Raphson.
3. Método do Desacoplamento.

Nos métodos computacionais, independentemente do escolhido, tudo começa com uma estimativa inicial das tensões nos barramentos. A partir desta, é feita uma correção para que se aproxime mais da solução final.

Após a primeira iteração, o processo é repetido até que as amplitudes das tensões atinjam a precisão desejada. Se o método for convergente, cada iteração aprimora a solução. No entanto, há situações em que o método pode não levar a uma solução.

### 5.2.2 Potência Injetada no Nó de Balanço

Uma vez obtida a convergência das tensões, é possível calcular a potência injectada no barramento de balanço. Para isso, utiliza-se a equação seguinte, que é excluída do processo iterativo de cálculo das tensões, uma vez que é especificada a tensão no nó de balanço:

$$P_1 - jQ_1 = \mathbf{V}_1^* \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_{1j} V_j$$

Se existirem múltiplos barramentos de balanço, então é preciso calcular a potência complexa injectada em cada um, utilizando as respetivas equações de trânsito de energia.

### 5.2.3 Potência Transitada nas Linhas

Finalmente, é necessário calcular os trânsitos de potência activa e reactiva nas linhas. A potência complexa  $\mathbf{S}_{ij}^k$  que transita na linha  $k$ , ligada entre os nós  $i$  e  $j$ , medida no nó  $i$  e definida como positiva na direcção  $i \rightarrow j$ , é dada por:

$$\mathbf{S}_{ij}^k = P_{ij}^k + jQ_{ij}^k = \mathbf{V}_i (\mathbf{I}_{ij}^k)^* = \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}^*} + \frac{\mathbf{Y}_{T_k}^*}{2} \right) V_i^2 - \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}^*} \mathbf{V}_i \mathbf{V}_j^*$$

Analogamente, a potência complexa no extremo da linha ligado ao nó  $j$ , definida como positiva na direcção  $j \rightarrow i$ , é dada por:

$$\mathbf{S}_{ji}^k = P_{ji}^k + jQ_{ji}^k = \mathbf{V}_j (\mathbf{I}_{ji}^k)^* = \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}^*} + \frac{\mathbf{Y}_{T_k}^*}{2} \right) V_j^2 - \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}^*} \mathbf{V}_j \mathbf{V}_i^*$$

onde:

$$\mathbf{Z}_{L_k} = R_k + jX_k$$

$$\mathbf{Y}_{T_k} = j\omega C_k$$

$R_k$ ,  $X_k$  e  $C_k$  são, respetivamente, a resistência, a reactância e a capacitância totais da linha.

Definindo:

$$G_k = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}} \right) = \frac{R_k}{R_k^2 + X_k^2} \quad B_k = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_k}} \right) = -\frac{X_k}{R_k^2 + X_k^2} \quad B'_k = \operatorname{Im} \left( \frac{\mathbf{Y}_{T_k}}{2} \right) = \frac{\omega C_k}{2}$$

e somando  $\mathbf{S}_{ij}^k$  e  $\mathbf{S}_{ji}^k$ , obtêm-se as perdas de potência activa  $P_L$  e reativa  $Q_L$  na linha:

$$\mathbf{S}_{ij}^k + \mathbf{S}_{ji}^k = \underbrace{(P_{ij}^k + P_{ji}^k)}_{P_L} + j \underbrace{(Q_{ij}^k + Q_{ji}^k)}_{Q_L} \implies \begin{cases} P_L = G_k [V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j)] \\ Q_L = -(B_k + B'_k)(V_i^2 + V_j^2) + 2B_k V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j) \end{cases}$$

### 5.3 Modelo de Corrente Contínua

Em estudos de planeamento, que requerem um elevado número de trânsitos de energia, usa-se por vezes um modelo simplificado do sistema de energia eléctrica, designado por *modelo de corrente contínua* (*D.C. Load Flow*), que dispensa o recurso a métodos iterativos. Trata-se de um modelo linearizado que permite calcular um valor aproximado dos trânsitos de potência activa na rede, baseando-se nas seguintes hipóteses simplificativas:

1. Toma-se a amplitude de tensão igual a 1,0 p.u. em todos os barramentos.
2. Não se considera o trânsito de potência reactiva.
3. Consideram-se nulas a resistência e a admitância transversal dos ramos.
4. Admite-se que a diferença entre os argumentos das tensões nos barramentos de ligação de cada ramo é pequena, donde:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_i - \theta_j) &\approx 1 \\ \sin(\theta_i - \theta_j) &\approx \theta_i - \theta_j\end{aligned}$$

Uma vez que se desprezam a resistência e a admitância transversal dos ramos, a matriz das condutâncias nodais é nula, e os elementos da matriz das susceptâncias nodais são dados por:

$$\begin{aligned}B_{ij} &= -\left(\frac{1}{X_{i1}} + \dots + \frac{1}{X_{in}}\right) & \text{se } i = j \\ B_{ij} &= \frac{1}{X_{ij}} & \text{se } i \neq j\end{aligned}$$

Donde:

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} = 0$$

O número de nós da rede determina os elementos da matriz de susceptâncias. Os elementos da diagonal principal são iguais à soma das susceptâncias ligadas ao barramento. Note-se que a susceptância dos elementos indutivos é negativa; os elementos fora da diagonal principal são o simétrico da susceptância que liga os barramentos. É importante ressaltar que, no caso de elementos indutivos, esta susceptância é positiva.

As equações do trânsito de energia escrevem-se então:

$$\begin{aligned}P_i &= \sum_{j=1}^n V_i V_j [G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)] \\ &\approx \sum_{j=1}^n B_{ij} (\theta_i - \theta_j) = \theta_i \sum_{j=1}^n B_{ij} - \sum_{j=1}^n B_{ij} \theta_j = - \sum_{j=1}^n B_{ij} \theta_j \\ Q_i &= \sum_{j=1}^n V_i V_j [G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] \\ &\approx \sum_{j=1}^n -B_{ij} = 0\end{aligned}$$

Em notação matricial:

$$[P] = [B'][\theta] \iff [\theta] = [B']^{-1}[P]$$

onde  $[B']$  representa a matriz das susceptâncias nodais negada (i.e.,  $[B'] = -[B]$ ),  $[P]$  o vetor das potências injetadas e  $[\theta]$  o vetor dos argumentos das tensões. Note-se que a matriz  $[B]$  não inclui a linha e a coluna correspondentes ao nó de balanço (caso contrário seria uma matriz singular, i.e., não teria inversa).

Nestes moldes, a potência ativa transitada no ramo  $i - j$  é dada por:

$$\begin{aligned}P_{ij} &= B_{ij} V_i V_j \sin(\theta_i - \theta_j) = \frac{V_i V_j}{X_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \\ &\approx B_{ij} (\theta_i - \theta_j) = \frac{1}{X_{ij}} (\theta_i - \theta_j)\end{aligned}$$

Este modelo é análogo ao de uma rede em corrente contínua se se interpretar  $P$  como a corrente,  $\theta$  como a tensão e  $X$  como a resistência. Uma vez que não é considerada a resistência dos ramos, o modelo conduz a perdas nulas na rede. Podemos mitigar isto através de uma aproximação. As perdas no ramo  $i - j$  calculam-se fazendo  $V_i = V_j = 1,0$  p.u., de onde vem (vista a dedução acima):

$$P_{Lij} = 2G_{ij}[1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]$$

## Referências

- [1] José Pedro Sucena Paiva. *Redes de Energia Eléctrica: uma Análise Sistémica*. IST Press, 2005.
- [2] J. A. Brandão Faria. *Electromagnetic Foundations of Electrical Engineering*. Wiley, 2008.
- [3] Rui Castro and Eduarda Pedro. *Exercícios de Redes e Sistemas de Energia Eléctrica*. IST Press, 2013.
- [4] Olle I. Elgerd. *Electric Energy Systems Theory: an Introduction*. McGraw-Hill, 1982.
- [5] John J. Grainger and William D. Stevenson. *Power System Analysis*. McGraw-Hill, 1994.