# Тема : Уравнения в полных дифференциалах и методы их решения

$\mathbf{1^0}$. Определение уравнения в полных дифференциалах, необходимое и достаточное условие, построение общего решения. $\mathbf{2^0}$. Интегрирующий множитель: определение, примеры. $\mathbf{3^0}$. Интегрирующий множитель для линейных уравнений, примеры. $\mathbf{4^0}$. Интегрирующий множитель для однородных уравнений, сведение к уравнению с разделяющимися переменными, примеры. $\mathbf{5^0}$. Достаточный признак существования интегрирующего множителя для уравнений в симметричной форме.

$1^0$. Важный класс интегрируемых дифференциальных уравнений первого порядка образуют *уравнения в полных дифференциалах*.

**Определение**. *Уравнение вида*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой непрерывно дифференцируемой функции* $F(x, y)$.

Для полного дифференциала функции имеет место равенство

$$\boldsymbol{dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.}$$

Если исходное уравнение — в полных дифференциалах, то должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy.}$$

Это возможно лишь при условии, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Для того чтобы чтобы выполнялись эти равенства, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Если это тождество имеет место, то функцию $F(x, y)$ находим с помощью интегрирования. Именно, интегрируя равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

по переменной $x$ (предполагая при этом, что $y$ величина постоянная), определим функцию $F(x,y)$ с точностью до произвольного слагаемого, которое может зависеть от $y$:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \Phi(x,y) + \varphi(y).$$

Дифференцируя полученное равенство по переменной $y$ и учитывая, что $F_y(x, y) = N(x, y)$, получаем для функции $\varphi(y)$ следующее уравнение:

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}.$$

Правая часть здесь *обязательно окажется функцией, зависящей только от* $y$.

Интегрируя полученное уравнение по переменной $y$, находим функцию $\varphi(y)$. Подставляя результат в соотношение

$$F(x,y) = \Phi(x,y) + \varphi(y),$$

находим в итоге и функцию $F(x,y)$. Общее решение уравнения в полных дифференциалах определяется теперь формулой

$$F(x,y) = C.$$

Это равенство задает неявно $y$ как функцию от $x$.

**Пример.** Решить уравнение

$$(3x^2 - y^2)dx + (3y^2 - 2xy)dy = 0.$$

**Решение.** Для этого уравнения имеем

$$M(x, y) = 3x^2 - y^2; \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -2y;$$

$$N(x, y) = 3y^2 - 2xy; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y.$$

Таким образом, это уравнение в полных дифференциалах во всей плоскости.

Найдем соответствующую уравнению функцию $F(x, y)$, дифференциал которой совпадает с его левой частью. По условию должно быть

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = 3y^2 - 2xy.$$

Интегрируя по $y$, получаем

$$F(x, y) = \int_0^y (3\xi^2 - 2x\xi)d\xi + C(x) =$$

$$= \left(\xi^3 - x\xi^2\right)\Big|_0^y + C(x) = y^3 - xy^2 + C(x).$$

Кроме того должно выполняться равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 - y^2.$$

Дифференцируя по $x$ уже полученное для $F(x, y)$ представление, приходим к уравнению

$$-y^2 + C'(x) = 3x^2 - y^2, \qquad C'(x) = 3x^2.$$

Имеем далее $C(x) = x^3 + C_1$ и, следовательно,

$$F(x, y) = y^3 - xy^2 + x^3.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения неявно задается равенством

$$\boldsymbol{y^3 - xy^2 + x^3 = C.}$$

Эта же формула называется *полным интегралом* рассматриваемого уравнения. $\square$

$2^0$. Условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

выполняется не всегда. Поэтому не всякое дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Но оказывается, почти всегда существует такая функция $\mu(x, y)$, что после умножения на эту функцию уравнение преобразуется в уравнение в полных дифференциалах.

Другими словами, существует такая функция $\mu(x, y)$, что выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x, y)M(x, y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x, y)N(x, y)\Big).$$

**Определение.** *Функция* $\mu(x, y)$, *обладающая тем свойством, что*

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x, y)M(x, y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x, y)N(x, y)\Big),$$

*называется интегрирующим множителем для исходного уравнения в симметричной форме.*

Если интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ известен и не обращается в нуль, то после умножения уравнения на $\mu(x, y)$ общее решение полученного уравнения в полных дифференциалах находится по изложенной выше схеме.

Общее решение домноженного уравнения

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

*задает и общее решение исходного уравнения.*

**Пример.** Найти интегрирующий множитель для дифференциального уравнения

$$(2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

**Решение.** Это уравнение записано в симметричном виде с коэффициентами

$$M(x,y) = 2xy - x^2y - \frac{y^3}{3}; \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x - x^2 - y^2;$$

$$N(x,y) = x^2 + y^2; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Найдем соответствующий ему интегрирующий множитель $\mu(x, y)$.

Выпишем определяющее уравнение для интегрирующего множителя:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Разделим обе части этого равенства на $\mu$, затем перегруппируем слагаемые и приведем уравнение к виду

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Подставляя сюда явные выражения коэффициентов $M(x,y)$ и $N(x,y)$, получаем

$$(x^2+y^2)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} =$$

$$= -(x^2+y^2).$$

Будем искать решения этого уравнения, которые зависят только от $x$. В этом случае получаем равенство

$$(x^2+y^2)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -1.$$

Следовательно, $\mu(x) = e^{-x}$. После умножения на $e^{-x}$, получаем следующее уравнение в полных дифференциалах:

$$e^{-x}(2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + e^{-x}(x^2+y^2)dy = 0.$$

Ищем соответствующий первый интеграл:

$$F(x,y) = \int e^{-x}(2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + \varphi(y) =$$

$$= y\int e^{-x}(2x - x^2)dx - \frac{y^3}{3}\int e^{-x}dx + \varphi(y) =$$

$$= yx^2e^{-x} + \frac{y^3}{3}e^{-x} + \varphi(y).$$

Дифференцируя полученное равенство по $y$, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-x}(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^{-x}(x^2 + y^2).$$

Следовательно, $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi(y) = C$. Таким образом, общее решение исходного уравнения задается равенством

$$ye^{-x}(x^2 + \frac{y^2}{3}) = C.$$

Здесь $C$ — произвольная постоянная. $\square$

$3^0$. В общем случае нахождение интегрирующего множителя представляет собой весьма трудную задачу. Пример, когда ее удается решить, дают линейные уравнения.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка в нормальной форме

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Умножим обе его части на функцию

$$\mu(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi},$$

а результат запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi}\right) = Q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi}.$$

Интегрируя обе его части, получаем

$$y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi} = C + \int Q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi)\,d\xi}dx.$$

**Пример.** Найти общее решение уравнения

$$(4-x^2)y' + xy = 4$$

**Решение.** Это линейное уравнение первого порядка. Приведем его к нужномувиду, отыскав интегрирующий множитель по формуле

$$\mu(x) = \frac{1}{4-x^2}\, e^{\int \frac{t}{4-t^2}\, dt} =$$

$$= \frac{1}{4-x^2}\, e^{-\frac{1}{2}\ln(4-x^2)} = \frac{1}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Умножив на $\mu(x)$ обе части исходного уравнения, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dy + \frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}\,dx = 0.$$

Левая часть здесь представляет собой полный дифференциал от некоторой функции.

Интегрируя коэффициент при $dy$ по переменной $y$, находим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} + \varphi(x).$$

Производная по $x$ от полученного выражения должна совпадать с функцией при $dx$ в симметричной записи:

$$\frac{xy}{(\sqrt{4-x^2})^3}+\varphi'(x)=\frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Следовательно, $\varphi'(x)=-\frac{4}{(\sqrt{4-x^2})^3}$, и далее

$$\varphi(x)=-4\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Общий интеграл исходного уравнения записывается в следующем виде:

$$\frac{y}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = C,$$

или $y = x + C\sqrt{4-x^2}$. Здесь $C$ — произвольная постоянная. $\square$

Для линейного уравнения в симметричной форме

$$dy - [f(x)y + g(x)]dx = 0$$

интегрирующий множитель можно найти в виде функции, зависящей только от $x$. Этот множитель задается равенством

$$\mu(x) = e^{-\int f(x)dx}.$$

**Пример**. Найти общее решение уравнения

$$dy - [y \operatorname{tg} x + \cos x]dx = 0.$$

**Решение.** Находим интегрирующий множитель по формуле

$$\mu(x) = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x.$$

Умножая на него обе части уравнения, получаем

$$(\cos x - y \sin x)dy + \cos^2 x\, dx = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y \cos x - \int \cos^2 x dx = C.$$

Вычисляя неопределенный интеграл в этой формуле, имеем далее

$$\boldsymbol{y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x = C,}$$

или, что то же самое

$$\boldsymbol{(2y - \sin x)\cos x - x = C.}$$

Это равенство задает общее решение исходного уравнения. $\square$

$4^{0}$. Для дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — функции одинаковой степени однородности, интегрирующий множитель можно найти в виде отношения

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}.$$

При этом знаменатель дроби не должен обращаться в ноль.

Исходное уравнение, умноженное на интегрирующий множитель, принимает вид

$$\frac{M(x,y)dx}{xM(x,y)+yN(x,y)}+\frac{N(x,y)dy}{xM(x,y)+yN(x,y)}=0.$$

Преобразуем это уравнение в уравнение с разделяющимися переменными, пользуясь условием, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — одинаковой степени однородности $\alpha$.

Сделаем замену $y = tx$. Тогда получим

$$M(x, y) = x^{\alpha} P(t); \qquad N(x, y) = x^{\alpha} Q(t);$$

$$dy = tdx + xdt.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\frac{x^{\alpha}(P(t)dx + tQ(t)dx + Q(t)xdt)}{x^{\alpha}(P(t)x + Q(t)tx)} = 0,$$

$$\frac{(P(t) + Q(t)t)dx}{(P(t) + Q(t)t)x} + \frac{xQ(t)dt}{x(Q(t)t + P(t))} = 0.$$

Произведя сокращения одинаковых множителей в числителе и знаменателе, получаем уравнение

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(t)dt}{Q(t)t + P(t)} = 0.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $F(x, t)$, определяемой из соотношений

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{Q(t)}{Q(t)t + P(t)}.$$

Следовательно, $F_{xt} = F_{tx} = 0$, а значит имеем $dF(x, y) = 0$. Нетрудно видеть, что

$$F(x, t) = \ln|x| + g(t),$$

где

$$g(t) = \int \frac{Q(t)}{Q(t)t + P(t)}\,dt.$$

**Пример**. Найти общее решение уравнения

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

**Решение.** Коэффициенты уравнения здесь — однородные функции степени 1. Найдем интегрирующий множитель по формуле

$$\mu = \frac{1}{x(x-y)+y(x+y)} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Домножив уравнение на $\mu$, запишем полученный результат в виде

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}d\Big(\ln(x^2 + y^2)\Big) + d\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big) = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Это — искомая формула общего решения.

$\square$

Пусть дифференциальное уравнение представлено в виде

$$M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy + M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy = 0,$$

где функции $M_1(x,y)$, $N_1(x,y)$ имеют однородность степени $\alpha_1$, а $M_2(x,y)$, $N_2(x,y)$ — однородность степени $\alpha_2$.

Тогда для каждой степени однородности $\alpha_1$, $\alpha_2$ рекомендуется найти свой интегрирующий множитель.

**Пример**. Найти общее решение уравнения

$$(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0.$$

**Решение.** Преобразуем уравнение к виду

$$2x^3y^2dx + 2x^2y^3dy = ydx + xdy.$$

Правая часть представляет собой дифференциал от произведения

$$ydx + xdy = d(xy).$$

Интегрирующий множитель для левой части зададим равенством

$$\mu_1 = \frac{1}{x2x^3y^2 + y2x^2y^3} = \frac{1}{2y^2x^2(x^2+y^2)}.$$

Умножив и разделив левую часть уравнения на $\mu_1$, получим

$$2y^2x^2(x^2+y^2)\left[\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\right] =$$

$$= y^2x^2(x^2+y^2)d\ln(x^2+y^2).$$

В последнем равенстве использовано тождество

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2).$$

Таким образом, уравнение допускает запись в виде

$$y^2 x^2 (x^2 + y^2) d \ln(x^2 + y^2) = d(xy).$$

Сделаем здесь совместную замену переменных

$$xy = t, \qquad x^2 + y^2 = z.$$

В новых переменных полученное выше уравнение принимает вид

$$t^2 z \frac{1}{z} dz = dt.$$

Интегрируя при $t \neq 0$, получим

$$\int dz = \int \frac{dt}{t^2}, \qquad z = -\frac{1}{t} + C.$$

Итоговая формула общего решения имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 = -\frac{1}{xy} + C.$$

Здесь $C$ — произвольная постоянная.

При $t = 0$ имеем $x = 0$ и $y = 0$. Обе эти функции задают решения исходного уравнения. $\square$

$5^0$. Пусть для функции $w(x,y)$ выполняется тождество

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) - M(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)} = \psi\big(w(x,y)\big).$$

Тогда интегрирующий множитель для уравнения в симметричной форме можно найти по формуле

$$\mu(x,y) = e^{\int \psi(t)dt}\Big|_{t=w(x,y)}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

есть функция $\psi(x)$, то есть зависит только от $x$, тогда и интегрирующий множитель зависит только от $x$:

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x) dx}.$$

б) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)}$$

есть функция $\psi(y)$, то есть зависит только от $y$, тогда и интегрирующий множитель зависит только от $y$:

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}.$$

в) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)}$$

зависит только от произведения $xy$, то и интегрирующий множитель зависит только от этого произведения. Этот множитель имеет вид

$$\mu(xy) = e^{\int \psi(t)dt}\Big|_{t=x\cdot y}.$$

г) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y) - M(x,y)}$$

зависит только от суммы $x + y$, то и интегрирующий множитель зависит только от суммы. Этот множитель имеет вид

$$\mu(x+y) = e^{\int \psi(t)dt}\Big|_{t=x+y}.$$

При умножении уравнения на интегрирующий множитель область определения его коэффициентов может уменьшиться.

Для того чтобы при этом не потерять решения, необходимо непосредственно на исходном уравнении проверить, являются ли его решениями функции, порождаемые исключенными из рассмотрения точками.

# Тема : Уравнения первого порядка неразрешенные относительно производной

$\mathbf{1^0}$. Уравнения, допускающие разложение на множители. $\mathbf{2^0}$. Метод параметризации. Пример. $\mathbf{3^0}$. Уравнения Лагранжа и Клеро.

$1^0$. Перейдём к исследованию уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной. Общий вид уравнений этого класса:

$$F(x, y, y') = 0.$$

В простейшем случае левая часть данного уравнения элементарным образом представляется в виде произведения некоторых выражений, разрешенных относительно производной:

$$F(x, y, y') = (y' - f_1(x, y)) \cdot \ldots \cdot (y' - f_m(x, y)).$$

При этом исходное дифференциальное уравнение распадается на $m$ уравнений

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \ldots, \ y' = f_m(x, y).$$

Решение каждого из них представляет собой решение всего уравнения, то есть представляет собой ветвь общего решения.

Уточним, что если одно из указанных уравнений имеет особое решение, то и исходное уравнение будет иметь это решение в качестве особого. Кроме того, заметим, что помимо решений, порожденных уравнениями $y' = f_k(x, y)$, решениями могут быть функции, склеенные из решений различных уравнений $y' = f_k(x, y)$ и $y' = f_l(x, y)$, то есть из различных ветвей общего решения.

Рассмотрим простейший частный случай неразрешённого относительно производной уравнения:

$$F(y') = 0.$$

Пусть функциональное уравнение $F(\xi) = 0$ имеет конечное или бесконечное счётное число вещественных корней

$$\xi = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае общее решение дифференциального уравнения $F(y') = 0$ неявно задается соотношением

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

В случае, если решения уравнения $F(\xi) = 0$ заполняют некоторый интервал, этой формулой определяются вообще говоря, не все решения.

Более сложным для исследования представляется уравнение вида

$$F(x, y') = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно производной и тем самым перейти к конечной или бесконечной совокупности уравнений $y' = f_k(x)$. Общим решением тогда будет совокупность функций

$$y = \int f_k(x) dx + C.$$

$2^0$. В элементарных функциях дифференциальное уравнение не всегда разрешимо. Иногда бывает легче воспользоваться иным методом, дающим представление решения в параметрической форме.

Изложим *метод параметризации* в применении к общему уравнению первого порядка

$$F(x, y, y') = 0.$$

**Определение**. *Уравнение* $F(x, y, y') = 0$ *допускает параметрическое представление*, если существуют функции

$$\varphi(u, v), \quad \psi(u, v) \quad \text{и} \quad \chi(u, v)$$

параметров $u$ и $v$ такие, что имеет место тождество

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0.$$

Для любого решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка выполняется основное соотношение

$$dy = y' dx.$$

Заменим в этом соотношении величины $x$, $y$ и $y'$ их параметрическими представлениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Тогда получим равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right). \qquad (\mathbf{P})$$

Относительно переменных $(u,v)$ это равенство представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в симметричном виде.

Пусть решение уравнения ($\mathbf{P}$) найдено в форме $v = w(u,C)$. Тогда решение исходного дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ допускает задание в следующем параметрическом виде:

$$x = \varphi(u, w(u, C)), \qquad y = \psi(u, w(u, C)).$$

Если же решение уравнения (**P**) найдено в форме $u = w(v, C)$, то параметрическое задание решения исходного дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ имеет следующий вид

$$x = \varphi(w(v, C), v), \qquad y = \psi(w(v, C), v).$$

Если окажется, что параметр $u$ (или соответственно $v$) явно представим как функция переменной $x$, то от параметрического представления решения можно перейти к обычному:

$$y = \Psi(x, C).$$

Практическое применение метода параметризации затрудняется исходной проблемой нахождения функций $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ и $\chi(u, v)$, обеспечивающих параметризацию уравнения $F(x, y, y') = 0$. Опишем два случая, когда указанное затруднение легко преодолевается.

Пусть исходное уравнение $F(x, y, y') = 0$ *разрешимо относительно неизвестной функции*, то есть преобразуется к виду

$$y = \psi(x, y').$$

В этом случае в качестве параметров $u$ и $v$ рекомендуется брать переменные $x$ и $y'$. С учетом этого выбора имеем соотношения

$$x = \varphi(u, v) \equiv u, \;\; y = \psi(u, v), \;\; y' = \chi(u, v) \equiv v.$$

Уравнение (P) при этом принимает вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - v\right) du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = 0. \tag{P'}$$

Получив решение этого уравнения в виде $v = w(u, C)$, следует затем записать общее решение исходного уравнения $y = \psi(x, y')$ в следующей параметрической форме:

$$y = \psi(u, v), \quad \text{или} \quad y = \psi\bigl(x, w(x, C)\bigr).$$

Если дифференциальное уравнение ($\mathbf{P}'$) в переменных $u$ и $v$ имеет дополнительное решение $v = \alpha(u)$, то и соответствующая ему функция $y = \psi(x, \alpha(x))$ также может оказаться дополнительным решением исходного уравнения $y = \psi(x, y')$.

Рассмотрим теперь случай, когда исходное уравнение *разрешимо относительно независимой переменной*, то есть может быть записано в виде

$$x = \varphi(y, y').$$

В качестве параметров $u$ и $v$ тогда рекомендуется брать переменные $y$ и $y'$. При этом соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$x = \varphi(u, v), \;\; y = \psi(u, v) \equiv u, \;\; y' = \chi(u, v) \equiv v.$$

Уравнение (P) при этом записывается сле-дующим образом:

$$\left(1 - v\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) du - v\frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0. \qquad (\mathrm{P}'')$$

Пусть решение этого уравнения имеет вид $v = w(u, C)$. Тогда общее решение исходного уравнения $x = \varphi(y, y')$ допускает следующее параметрическое задание:

$$x = \varphi(u, v), \quad \text{или} \quad x = \varphi\big(y, w(y, C)\big).$$

Если дифференциальное уравнение ($\mathrm{P}''$) в переменных $u$ и $v$ имеет дополнительное решение $v = \alpha(u)$, то и соответствующая ему функция $x = \varphi(y, \alpha(y))$ может оказаться дополнительным решением исходного уравнения.

**Пример**. Найти общее решение уравнения

$$x - y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3.$$

**Решение.** Введем параметр $y' = p$, тогда уравнение запишется в виде

$$F(x, y, p) \equiv x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0.$$

Выразив из этого равенства переменную $y$, получим

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3.$$

Взяв от обеих частей этого равенства дифференциал, получим соотношение

$$dy = dx - \frac{8}{9} p dp + \frac{8}{9} p^2 dp.$$

Подставляя сюда равенство $dy = pdx$, получаем следующее дифференциальное уравнение в симметричной форме:

$$(p-1)dx = \frac{8}{9} p(p-1)dp.$$

Это уравнение распадается на два

$$1).\ p = 1 \quad \text{и} \quad 2).\ dx = \frac{8}{9}p\,dp.$$

Уравнение $p = 1$, или $dy = dx$, имеет решение

$$y = x + C.$$

Значение постоянной $C$ здесь согласуем с равенством

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3,$$

в котором нужно взять $p = 1$. В результате получим

$$y = x - \frac{4}{27}.$$

Решая уравнение 2), получаем $x = \frac{4}{9}p^2 + C$. Согласуя это параметрическое представление с равенством

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3,$$

находим решение исходного уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \frac{4}{9}p^2 + C, \\ \\ y = \frac{8}{27}p^3 + C. \end{cases}$$

Выразим параметр $p$ из второго равенства полученной системы:

$$p = \frac{3}{2}(y - C)^{\frac{1}{3}},$$

Подставив это выражение в первое уравнение, получим следующее семейство интегральных кривых исходного уравнения:

$$x = (y - C)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Общее решение исходного уравнения задается этим равенством и дополняется уравнением $y = x - \frac{4}{27}$. $\square$