Вопрос №1

Определение частичного предела последовательности

Определение. Предел любой подпоследовательности данной числовой последовательности называется частичным пределом этой последовательности.

По теореме Больцано-Вейерштрасса любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Верхний и нижний пределы последовательности

Определение. Наименьший частичный предел последовательности $\{a_n\}$ называется ее нижним пределом и обозначается как $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение. Наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$ называется ее верхним пределом и обозначается как $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Любая ограниченная последовательность имеет как верхний, так и нижний предел.

Любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел, конечный или бесконечный.

Если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то верхний, нижний и обычный пределы этой последовательности равны. Обратное тоже верно.

Фундаментальные (сходящиеся к себе) последовательности

Лемма (условие Коши). Пусть $\{x_n\}$ сходится. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N = N(\varepsilon) \;:\; \forall n \geq N,\ \forall m \geq N \ \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \;:\; \forall n \geq N \;:\; |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\forall n > N,\ \forall m > N \;:\; |x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел удовлетворяет условию Коши, если $\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N = N(\varepsilon) \;:\; \forall n \geq N, \forall m \geq N \ \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Определение. Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, также называются фундаментальными или сходящимися к себе.

Теорема о сходимости фундаментальной последовательности вещественных чисел

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел удовлетворяет условию Коши, то она сходится к конечному пределу.

Доказательство.

1. Убедимся, что если имеет место условие Коши, то $\{x_n\}$ - ограничена. Пусть $\varepsilon = 1$ и $m = N_1$. Тогда для всех $n \geq N_1 = N(1)$ имеем: $|x_n - x_{N_1}| < 1 \quad \Leftrightarrow x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$. Выберем минимум (a) и максимум (b) среди чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1-1}, x_{N_1}, x_{N_1+1}\}$. Тогда $a \leq x_n \leq b \; \forall n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $\{x_n\}$ - ограничена и по теореме Больцано-Вейерштрасса существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть ее предел равен x_0.

2. Убедимся, что $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для всех $\varepsilon > 0$ имеем: $\exists N_\varepsilon \; : \; \forall n, m \geq N_\varepsilon \; : \; |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists M_\varepsilon \; : \; \forall k \geq M_\varepsilon \; : \; |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $P = \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$. Тогда $P \geq M_\varepsilon \; \forall n_p \geq P \geq N_\varepsilon$. Поэтому $\forall n \geq N_\varepsilon \; : \; |x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_p}| + |x_{n_p} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Это означает по определению, что существует предел последовательности $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Критерий Коши

Следствие теоремы о сходимости. Для того чтобы последовательность вещественных чисел сходилась необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

Отметим, что это следствие (критерий Коши) на множестве $\mathbb{Q}$ является неверным. Например, последовательность нижних десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ сходится к $\sqrt{2}$, и, следовательно, не имеет рационального предела, хотя и удовлетворяет условию Коши.

Полнота множества вещественных чисел

Множество $\mathbb{R}$ является полным относительно введенной сходимости, в отличие от множества $\mathbb{Q}$.

Пример. Пусть $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

Решение. Имеем для любого n: $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \, : \, \forall N \; \exists n = N, \; \exists m = 2N = 2n \, : \, |H_n - H_m| \geq \frac{1}{2}$. Получается, последовательность не удовлетворяет условию Коши, это значит, что у неё не может быть конечного предела. Но последовательность монотонно возрастает, а значит, по теореме Вейерштрасса, у нее есть предел, равный $+\infty$.

Предел последовательности частичных сумм гармонического ряда

Пусть $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} H_n = +\infty$.

Решение. Имеем для любого $n = 1, 2, \ldots$: $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \, : \, \forall N \; \exists n = N, \; \exists m = 2N = 2n \, : \, |H_n - H_m| \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что последовательность $\{H_n\}$ не удовлетворяет условию Коши. Согласно следствию из теоремы Коши у последовательности $\{H_n\}$ не может существовать конечного предела. Но $\{H_n\}$ монотонно возрастает: $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0 \;\Rightarrow H_{n+1} > H_n$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, у нее есть предел. Но так как предел не может быть конечным, то он равен бесконечности: $\lim\limits_{n \to \infty} H_n = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = +\infty$.

Вопрос №2
Линейные пространства

Аксиоматическое определение векторного пространства над полем

Определение. Пусть k - произвольное поле. Линейным пространством над k называется множество X элементов, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A) На X задана бинарная операция $X \cdot X \to X$, обычно записывается аддитивно, как сложение: $(x, y) \mapsto x + y$. Множество X с указанной операцией образует абелеву группу (в такой группе групповая операция является коммутативной). Это означает следующее:

1 $x + y = y + x$ (коммутативность)

2 $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность)

3 Существует нейтральный элемент $\vec{0}$ из X, называемый нулевым вектором, такой, что $x + \vec{0} = x$ для всех $x \in X$

4 Для всех $x \in X$ существует противоположный ему вектор $(-x)$: $x + (-x) = 0$

B) На множестве $k \cdot X$ задана операция $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, называемая умножением векторов из X на скаляры из k и обладающая свойствами:

5 $1 \cdot x = x$ (унитарность) $(1, x) \mapsto x$

6 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$ (ассоциативность)

C) Сложение и умножение на скаляр связаны законами дистрибутивности:

7 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$

8 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x, y \in X$

Примечание: в 7 знак + имеет разную природу. Слева относится к элементам поля K (скалярам), а справа применяется к векторам из X.

Пример: возьмем множество $X = \mathbb{R}_+$ (положительные вещественные числа). Полагая

1. $x + y = xy \forall x, y \in X$

2. $\lambda \cdot x = x^\lambda$ (возведение x в степень $\lambda \in \mathbb{R}$).

убеждаемся в справедливости всех аксиом 1-8. Значит X в этом случае - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Нулевым вектором здесь служит $1 \in \mathbb{R}_+$.

Следствия

Из определения линейного пространства X с помощью систем аксиом извлекаются некоторые элементарные следствия. Приведем их в качестве примеров обращения с аксиомами.

1. $0 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in X$

   Доказательство. Из 7: $0 \cdot \vec{x} = (0+0)\vec{x} = 0\vec{x} + 0\vec{x}$. Добавив к обеим частям $-0\vec{x}$, получим $0\vec{x} = 0$. Аналогично $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (применяли 8)

2. Если $\lambda\vec{x} = 0$, то $\lambda = 0$ или $\vec{x} = 0$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда $\exists \lambda^{-1}$ и поэтому $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \lambda^{-1})\vec{x} = \lambda^{-1}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = 0$ (в силу следствия 1)

3. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}, \forall \vec{x} \in X$. Имеем $\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 + (-1))\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = 0$ (следствие 1)

Линейные комбинации векторов

Пусть X - линейное пространство над полем k. Для всех наборов скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k$ и векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определено выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$. Это выражение называется линейной комбинацией векторов x_i с коэффициентами λ_i.

- Умножение скаляра $\lambda \in k$ на линейную комбинацию - снова линейная комбинация: $\lambda(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum\limits_{i \in I} (\lambda\lambda_i) x_i$.

- Сумма любых линейных комбинаций - снова линейная комбинация: $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i \in I} \mu_i x_i = \sum\limits_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) x_i \in X$. Среди $\lambda_i + \mu_i$ при $i \in I$ лишь конечное число элементов поля k, отличных от нуля.

Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_i \in X | i \in I\}$ - это подмножество линейного пространства X. Тогда через $\langle M \rangle_k$ обозначается множество всевозможных линейных комбинаций векторов $x_i \in M$; $M \subset \langle M \rangle_k$

Множество $\langle M \rangle$ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры из k: $\lambda \in k$, $x, y \in \langle M \rangle \Rightarrow x + y \in \langle M \rangle, \lambda x \in \langle M \rangle$.

Линейные оболочки подмножеств векторного пространства

Определение. Множество $\langle M \rangle$ называют линейной оболочкой множества $M \subset X$.

Определение. Пусть X - векторное пространство над полем k, а Y - его подмножество. Если Y - аддитивная подгруппа в X, переходящая в себя при умножении на скаляры из k, то Y - тоже векторное пространство относительно операций сложения и умножения на скаляр, индуцированных операциями на X. В этом случае Y - линейное подпространство в X.

Пересечение любого числа векторных подпространств - это снова векторное подпространство.

Линейная оболочка $\langle M \rangle$ произвольной системы векторов $M \subset X$ является подпространством в X. При этом $\langle M \rangle$ - наименьшее из всех подпространств в X, содержащих в себе исходное множество M.

Определение. Подпространство $\langle M \rangle$ порождено векторами $x_i \in M$.

$\langle M \rangle$ также называют линейной оболочкой множества M и обозначают $\langle M \rangle = \operatorname{span}\{x_i \in M : i \in I\}$.

Примеры векторных пространств

1. Нульмерное пространство. Над любым полем k определено одноэлементное векторное пространство $X = \{0\}$. Закон умножения на скаляры: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. Основное поле k - это одномерное координатное пространство. По определению, $X = k$, операции совпадают. Если 1 - единица поля k, то $k = \langle 1 \rangle$ - линейная оболочка, порожденная множеством $\{1\}$.

3. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ - это векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{R}$ - это векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4. Пространство k^n - это n-мерное пространство ($k^n = k \cdot k \cdot \ldots \cdot k$). Операции:

   (a) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$, где $\lambda_j \in k$ и $\mu_j \in k$

   (b) $\forall v \in k$ имеем $v(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (v\lambda_1, v\lambda_2, \ldots, v\lambda_n)$, где $\lambda_j \in k$

   При $k = \mathbb{R}$, получаем вещественное координатное пространство $\mathbb{R}^n$

5. Пусть D - произвольное непустое множество, k - поле. Обозначим k^D множество функций $f : D \mapsto k$, наделенное операциями сложения и умножения на скаляры:

   (a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$

   (b) $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in D$

   Тогда k^D - линейное пространство функций.

6. Пусть (a, b) - интервал числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда линейное пространство $\mathbb{R}^{(a+b)}$ содержит в качестве подпространства пространство $C(a, b)$ всех непрерывных на (a, b) функций. Пространство $C(a, b)$ содержит в качестве подпространства $C^{(1)}(a, b)$ пространство всех непрерывно дифференцируемых на (a, b) функций.

7. Многочлены f от переменной t с коэффициентами из поля k, имеющие степени, меньшие n, с обычными операциями сложения и умножения на скаляр, образуют векторное пространство P_n.

Кольцо квадратных матриц с коэффициентами из поля. Определение структуры векторного пространства

Определение. Пусть есть поле k. Матрицей называется прямоугольная таблица элементов k, содержащая m строк одинаковой длины n.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \underset{i \in 1,\dots,n,\ j \in 1,\dots,m}{a_{ij}}$$

i - номер строки, j -номер столбца матрицы. Матрица размера $m \cdot n$ (иногда пишут $A_{m \times n}$). Также элементы матрицы называются её коэффициентами. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - образуют главную диагональ матрицы. Матрицы, у которых все элементы, за исключением элементов главной диагонали, равны 0, называются, диагональными.

Определение. Суммой двух матриц A и B называется матрица C, в которой все элементы попарно складываются: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Определение. Произведение матрицы A на скаляр λ - умножение каждого элемента a_{ij} на скаляр λ.

Определение. Матрица $-A = (-1)A$ называется противоположной матрицы A. Справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
8. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)A$

Таким образом, квадратные матрицы образуют линейное пространство над полем k. Обозначение: $M_n(k)$.

Определение. Произведением матриц A и B называется матрица $C = AB$, в которой элементы: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, $i \in 1, \ldots, n$, $j \in 1, \ldots, m$.

Векторное пространство $M_n(k)$ с введенной операцией умножения является кольцом.

Определение линейно зависимых и линейно независимых систем элементов векторного пространства

Пусть X - линейное пространство над полем k.

Определение. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из X называются линейно-зависимыми, если существует некоторая их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $\exists \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \in k : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, причем $\exists j : \alpha_j \neq 0$.

Определение. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ не являются линейно зависимыми, то их называют линейно независимыми: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теорема. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, где $n \geq 2$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists j :$ v_j является линейной комбинацией остальных векторов.

Если некоторая подсистема векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима, то и вся система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима.

Если система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независимая.

Теорема ($s \leq t$). Если каждый из векторов линейно независимой системы $e_1, e_2, \dots, e_s$ является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \dots, f_t$, то $s \leq t$.

Эквивалентные системы векторов

Определение. Две системы векторов считаются эквивалентными, когда каждый вектор одной системы является линейной комбинацией другой системы.

Эквивалентные линейно зависимые системы могут состоять из разного числа векторов.

Одна из эквивалентных систем может быть линейно независимой, а другая при этом - линейно зависимой.

Число элементов в линейно независимых эквивалентных системах

Следствие теоремы $s \leq t$**.** Любые две эквивалентные системы линейно независимых векторов векторного пространства X содержат одинаковое количество элементов.