Тема : Первообразная и неопределенный интеграл

$\mathbf{1^0}$. Определение первообразной, общий вид первообразной, обозначения неопределенных интегралов, примеры. $\mathbf{2^0}$. Основные свойства операции интегрирования. $\mathbf{3^0}$. Таблица неопределенных интегралов. $\mathbf{4^0}$. Формула интегрирования по частям, примеры. $\mathbf{5^0}$. Замена переменной интегрирования, примеры. $\mathbf{6^0}$. Интегрирование рациональных функции, примеры.

1^0. Одна из основных задач математического анализа состоит в отыскании функции по известной ее производной.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ числовой оси, если $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и при этом*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Если $F(x)$ — это первообразная для $f(x)$, то и любая функция вида $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Лемма. *Пусть функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке Δ числовой оси. Тогда любая другая первообразная $\Phi(x)$ для*

$f(x)$ *имеет на* Δ *вид* $\Phi(x) = F(x) + C$, *где* C *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т.е.

$$\Phi'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Тогда справедливы равенства

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Таким образом, разность $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ — это дифференцируемая на Δ функция, причем ее производная тождественно равна нулю на этом промежутке.

Как следует из формулы конечных приращений Лагранжа, это означает, что функция $\varphi(x)$ тождественно постоянна на промежутке Δ. $\square$

Таким образом, *первообразная данной функции на промежутке определена с точностью до аддитивной постоянной*.

Понятие первообразной естественным образом расширяется на случай *кусочно-дифференцируемых функций* на промежутке.

Определение. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на промежутке Δ числовой оси и имеет в Δ производную всюду кроме, возможно,* *конечного числа точек, причем в точках существования производной $F'(x)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда $F(x)$ также называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ.*

Доказанная выше лемма об общем виде дифференцируемой первообразной функции допускает следующее обобщение и на случай кусочно-дифференцируемой первообразной.

Лемма. *Пусть функция* $f(x)$ *на промежутке* Δ *числовой оси имеет кусочно-дифференцируемую первообразную* $F(x)$. *Тогда любая другая кусочно-дифференцируемая первообразная для* $f(x)$ *имеет на этом промежутке вид* $F(x)+C$, *где* C *— произвольная постоянная.*

Докажите лемму в качестве упражнения.

Любая первообразная функции $f(x)$ называется также *неопределенным интегралом* от этой функции. Для обозначения первообразной используется символ $\int f(x)dx$. В этом обозначении символ $\int$ называется знаком интеграла, группа символов $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией.

Операция отыскания (взятия) неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием* этой функции.

Таким образом, если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 1. Проинтегрировать гладкую функцию $f(x) = x^2$.

Рассмотрим дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Для любой точки x имеем равенство $F'(x) = x^2$. Следовательно, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ — это первообразная, или неопеределенный интеграл для $f(x) = x^2$:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Пример 2. Проинтегрировать кусочно-непрерывную функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Рассмотрим кусочно-дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $F(x) = |x|$. В любой точке $x \neq 0$ существует производная $F'(x)$ и при этом имеет место равенство

$$F'(x) = +1 \quad \text{при } x > 0, \qquad F'(x) = -1 \quad \text{при } x < 0.$$

Следовательно, $F'(x) = \operatorname{sgn} \mathrm{x}$ для любой точки $x \neq 0$, или

$$\int \operatorname{sgn} x \, dx = |x| + C.$$

2^0. Сформулируем основные свойства неопределенных интегралов.

$(\mathrm{I})_1$. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке Δ первообразную. Тогда всюду на Δ, кроме, возможно, конечного числа точек, имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big) = f(x) \Leftrightarrow d\Big(\int f(x)dx\Big) = f(x)dx.$$

$(\mathrm{I})_2$. Пусть функция $F(x)$ — непрерывная и кусочно-дифференцируемая на промежутке Δ числовой оси. Тогда $F(x)$ является первообразной для функции $F'(x)$ на Δ, т.е.

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Заметим, что здесь $F'(x)$ может быть не определена в конечном числе точек. В этих точках функцию $F'(x)$ можно задать (доопределить) произвольным образом, на справедливость интегральной формулы это никак не повлияет.

$(\mathrm{I})_3$. Аддитивность неопределенного интеграла. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на промежутке Δ первообразные. Тогда их сумма

$f + g$ также имеет на промежутке Δ первообразную и при этом

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$(\mathbf{I})_4$. Однородность неопределенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке Δ первообразную. Тогда для любого вещественного $\alpha \neq 0$ произведение $\alpha f(x)$ также имеет на промежутке Δ первообразную и при этом

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

При $\alpha = 0$ имеем равенство

$$\int 0 f(x)dx = \int 0 dx = C.$$

Пример 3. Проинтегрировать функцию

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x,$$

где α, β вещественные числа.

Пользуясь свойствами первообразных, получаем

$$\int(\alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x)dx = \alpha \int x^2 dx + \beta \int \operatorname{sgn} x dx =$$

$$= \frac{\alpha}{3}x^3 + \beta|x| + C.$$

3^0. Знание производных элементарных функций дает таблицу неопределенных интегралов.

$$\mathbf{1.}\ \int 0\,dx = C. \qquad \mathbf{2.}\ \int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1.$$

$$\mathbf{3.}\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \qquad \mathbf{4.}\ \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}|x| + C.$$

$$5.\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C.$$

$$6.\ \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, \qquad \text{где} \qquad a > 0, a \neq 1.$$

При $a = e$ имеем из последнего равенства

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$7.\ \int \sin x dx = -\cos x + C. \qquad 8.\ \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \qquad 10.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\mathbf{11.}\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

Формулы 1–11 для неопределенных интегралов справедливы на тех промежутках числовой оси, на которых определены подынтегральные функции.

Для доказательства формул 1–11 достаточно продифференцировать функции в правой части и убедиться, что полученные производные совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

Производная элементарной функции — это также элементарная функция. Однако первообразная элементарной функции не всегда является элементарной функцией. Если все же некоторый неопределенный интеграл является элементарной функцией, то говорят, что этот интеграл вычисляется.

4^0. Будем рассматривать сейчас первообразные, имеющие производные во всех точках промежутка без исключения.

Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции* $u = f(x)$ *и* $v = g(x)$ *дифференцируемы на промежутке* Δ. *Тогда если произведение* $g(x)f'(x)$ *имеет на* Δ *первообразную, то и функция* $f(x)g'(x)$ *также имеет здесь же первообразную и при этом*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad \text{(IbP)}$$

Для доказательства формулы интегрирования по частям достаточно вычислить производную от функции в правой части равенства (IbP).

Иной вариант записи формулы (IbP):

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \text{(IbP}'\text{)}$$

Здесь $u = f(x)$, $dv = g'(x)dx$, т.е. $v = g(x)$.

Пример 4. Проинтегрировать функцию $\ln x$.

Возьмем в формуле интегрирования по частям $u = \ln x$ и $dv = dx$. Тогда $v = x$ и $du = \frac{dx}{x}$. После подстановки в (IbP') получим

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Возьмем в формуле интегрирования по частям $u = x$ и $dv = e^x dx$. Тогда справедливы равенства

$$v = e^x \quad \text{и} \quad du = dx.$$

После подстановки в (IbP′) получим

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

5^0. Для вычисления интегралов помимо интегрирования по частям часто применяется формула, связанная с заменой переменной интегрирования.

По-прежнему предполагаем, что рассматриваемые здесь первообразные имеют производные во всех без исключения точках операционного промежутка.

Теорема (формула замены переменной интегрирования). *Пусть функции* $f(y)$ *и* $\varphi(x)$ *определены на некоторых промежутках числовой оси,* $\varphi(x)$ *дифференцируема и при этом имеет смысл композиция* $f(\varphi(x))$*. Тогда произведение* $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ *имеет в качестве первообразной функцию* $F(\varphi(x))$*, где* $F(y)$ *— это первообразная для* $f(y)$*:*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy. \tag{ChV}$$

Сформулированная теорема сразу следует из формулы дифференцирования сложной функции.

Отметим, что равенство $(\mathbf{ChV})$ называют еще *формулой подстановки новой переменной интегрирования* (подстановка $y = \varphi(x)$).

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

Полагаем $y = \sin x$, тогда в соответствии с равенством (ChV) имеем

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx =$$

$$= \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Равенство (ChV), записанное в обратном порядке, т.е. в виде

$$\int f(y)\, dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx \qquad (\mathrm{ChV}')$$

называют иногда *методом замены переменной интегрирования*.

В качестве новой переменной при этом выступает $x = \varphi^{-1}(y)$, то есть для применимости формулы $(\mathbf{ChV'})$ функция $y = \varphi(x)$ должна иметь обратную на рассматриваемом множестве изменения переменной y.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, где $a > 0$.

Сделаем замену переменной $x = a \operatorname{sh} t$, где гиперболический синус $\operatorname{sh} t$ определяется равенством

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Вместе с синусом рассмотрим гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Несложно проверить, что $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. С учетом этого имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \operatorname{ch} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t}} dt = t + C,$$

где t находим как корень уравнения $a \operatorname{sh} t = x$. Подставляя сюда определение гиперболического синуса, получаем для e^t следующее квадратное уравнение:

$$(e^t)^2 - \frac{2x}{a}e^t - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a.$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

6^0. *Рациональной функцией* (или дробью) называется отношение двух полиномов, т.е. функция вида

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

где числитель задается равенством

$$Q_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m,$$

а знаменатель — равенством

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

Если $m < n$, то дробь называется *правильной*.

Для интегрирования рациональных функций используется следующее известное свойство полиномов с вещественными коэффициентами.

Лемма (разложение полинома на множители). *Любой полином* $P_n(x)$ *степени* n *с вещественными коэффициентами однозначно представим в виде произведения полиномиальных сомножителей вида*

$$(x-a)^k \quad \text{и} \quad \Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^k,$$

где числа a, α, β *— вещественны,* $\beta > 0$. *При этом сумма степеней всех сомножителей в* *представлении полинома* $P_n(x)$ *равна его степени* n.

Для того чтобы вычислить интеграл от рациональной функции следует сначала выделить ее *целую часть*.

Если дробь правильная, то ее целая часть равна нулю.

Если же степень m ее числителя не меньше степени n ее знаменателя, $m \geqslant n$, то целая часть дроби — это полином степени $m - n$. Интеграл от этого полинома легко вычисляется с помощью таблиц.

Вычитая из рациональной функции ее целую часть, получаем правильную дробь. Эту правильную дробь методом неопределенных коэффициентов представляют в виде суммы *простых дробей*, т.е. дробей вида

$$\frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{k}}} \quad \text{и} \quad \frac{\boldsymbol{Ax+B}}{((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2+\boldsymbol{\beta}^2)^{\boldsymbol{k}}}, \qquad \boldsymbol{k \geqslant 1}.$$

Лемма (интегрирование правильных дробей). *При интегрировании дроби вида* $\frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{k}}}$ *получается либо дробь того же вида* (*при* $\boldsymbol{k > 1}$), *либо функция вида* $\boldsymbol{A \ln |x-a|}$, (*при* $\boldsymbol{k = 1}$). *Первообразная простой дроби*

$$\frac{\boldsymbol{Ax+B}}{((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2+\boldsymbol{\beta}^2)^{\boldsymbol{k}}}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{k \geqslant 1},$$

представляет собой линейную комбинацию простых дробей того же вида и, возможно, функции $\mathbf{ln}\,((x-\alpha)^2+\beta^2)$ *или же функции* $\mathbf{arctg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$.

Докажите лемму в качестве упражнения, используя таблицу известных неопределенных интегралов.

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = \frac{1}{x^2+1}$ и $dv = dx$. Тогда получим

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \int x \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Выразив последнее слагаемое в итоговой правой части через все остальное и разделив результат на два, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 9. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Под интегралом здесь находится правильная дробь $f(x)$, допускающая следующее разложение в сумму простых дробей:

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Подставляя сюда уже найденное в предыдущем примере значение последнего интеграла, получаем искомый результат

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Тема : Определенный интеграл

$\mathbf{1^0}$. Разбиения промежутка: узлы, сетка, свойства разбиений. $\mathbf{2^0}$. Интегральные суммы Дарбу и Римана. $\mathbf{3^0}$. Определение интеграла Римана. Пример: интеграл ступенчатой функции. Теорема об ограниченности интегрируемой по Риману функции. $\mathbf{4^0}$. Критерий Римана интегрируемости функции. Колебание функции на промежутке. Следствие. $\mathbf{5^0}$. Определение и свойства колебания функции на множестве. Критерий Римана интегрируемости функции в терминах локальных колебаний.

1^0. Все рассматриваемые здесь промежутки предполагаются конечными и непустыми. В явном виде это предположение не всегда формулируется далее.

Определение. *Разбиением промежутка* $\boldsymbol{\Delta}$ *называется любое конечное множество попарно непересекающихся промежутков* $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\ldots$, $\boldsymbol{\Delta_N}$, *дающих в объединении весь исходный промежуток* $\boldsymbol{\Delta}$*:*

$$\boldsymbol{\Delta_j =< x_{j-1}, x_j >; \quad \Delta_j \neq \emptyset; \quad j = 1, 2, \ldots N},$$

$$i \neq j \Rightarrow \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset; \qquad \bigcup_{j=1}^{N} \Delta_j = \Delta.$$

Заданное разбиение промежутка Δ на N частей условимся обозначать следующим образом:

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}. \tag{τ_{N}}$$

В случае, если рассматривается сразу несколько разбиений промежутка, условимся использовать верхние и нижние индексы, т.е. писать

$$\tau_1(\Delta), \tau_2(\Delta), \dots; \quad \text{либо} \quad \tau'(\Delta), \tau''(\Delta), \dots.$$

Образующие разбиение $\tau(\Delta)$ мелкие промежутки нумеруются слева направо, т.е. таким образом, что для концов мелких промежутков выполняются неравенства

$$x_{j-1} \leqslant x_j \leqslant x_{j+1} \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Таким образом, для $\Delta = [a, b]$ и его разбиения $\tau(\Delta)$ имеют место неравенства

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N = b. \qquad (\tau'_{\mathrm{N}})$$

Определение. *Точки* x_0, x_1, ..., x_N *называются узлами разбиения* $\tau(\Delta)$.

Любой набор точек x_0, x_1, ..., x_N, с условием (τ'_{N}) задает некоторое разбиение $\tau(\Delta)$ промежутка $\Delta =< a, b >$.

В случае $N \geqslant 2$ соответствующих данному набору узлов разбиений промежутка может быть несколько.

Это возможно по той причине, что каждый из внутренних узлов x_1, x_2, ..., x_{N-1} можно включить в любой из двух соседствующих мелких промежутков, на общей границе которых этот узел лежит.

Пример. Пусть $\Delta = [a, b]$. Тогда точки

$$x_j = a + \frac{b-a}{N} j, \qquad j = 0, 1, \dots N,$$

задают узлы разбиения отрезка Δ на N равных по длине частей. В этом случае говорят о *равномерном распределении узлов*.

Определение. *Разбиение* $\tau'(\Delta)$ *называется продолжением разбиения* $\tau(\Delta)$, *если любой мелкий промежуток разбиения* $\tau'(\Delta)$ *содержится в некотором мелком промежутке разбиения* $\tau(\Delta)$.

Пример. Пусть $\Delta = [a, b]$. Тогда узлы

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b-a}{2}, \quad x_2 = b$$

задают разбиение отрезка Δ на две равные по длине части. Полагаем, что

$$x_{01} = \frac{x_1 - x_0}{2}, \quad x_{12} = \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Тогда узлы

$$x_0,\ x_{01},\ x_1,\ x_{12},\ x_2$$

задают разбиение $\tau'(\Delta)$ отрезка Δ на четыре равных по длине части. При этом $\tau'(\Delta)$ является продолжением разбиения $\tau(\Delta)$.

Любое продолжение разбиения

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_N\}$$

представляет собой объединение нескольких разбиений мелких промежутков Δ_j из исходного разбиения $\tau(\Delta)$.

Переход от разбиения $\tau(\Delta)$ к его продолжению $\tau'(\Delta)$ назовем *измельчением* соответствующей сетки узлов.

Если $\tau'(\Delta)$ — это продолжение $\tau(\Delta)$, а $\tau''(\Delta)$ — это в свою очередь продолжение $\tau'(\Delta)$, то $\tau''(\Delta)$ — это также продолжение и разбиения $\tau(\Delta)$ (более мелкое чем $\tau'(\Delta)$).

Лемма (об общем продолжении). *Для любых двух разбиений промежутка* Δ *существует третье разбиение этого же промежутка, продолжающее оба исходных разбиения.*

Доказательство. Пусть $\tau'(\Delta) = \{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{N_1}\}$ и $\tau''(\Delta) = \{\Delta''_1, \ldots, \Delta''_{N_2}\}$ — это два произвольных разбиения одного и того же промежутка Δ. Рассмотрим следующее множество:

$$\{\Delta'_i \cap \Delta''_j \mid i = 1, \ldots, N_1;\ j = 1, \ldots, N_2;\ \Delta'_i \cap \Delta''_j \neq \emptyset\}.$$

Заметим, что любое непустое пересечение $\Delta_i' \cap \Delta_j''$ двух промежутков — это снова промежуток числовой оси.

Таким образом, рассматриваемое множество непустых пересечений мелких компонент рассматриваемых разбиений — это снова разбиение исходного промежутка, продолжающее как $\tau'(\Delta)$ так и $\tau''(\Delta)$. $\square$

2^0. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ с разбиением $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}$. Введем следующие обозначения:

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x); \qquad m_i \leqslant M_i.$$

Если $\Delta_i =< x_{i-1}, x_i >$, то его длина задается равенством

$$|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$$

и обозначается иногда как Δx_i (приращение переменной x на промежутке $< x_{i-1}, x_i >$).

Определение. *Для заданной функции* $f(x)$, $x \in \Delta$, *линейные комбинации вида*

$$s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i |\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f,\tau) = \sum_{i=1}^{N} M_i |\Delta_i|$$

называются нижней и верхней интегральной суммой Дарбу соответственно.

Из этого определения сразу следует, что для заданных f и τ *нижняя сумма Дарбу не пре-*

восходит верхнюю, т.е. справедливо неравенство

$$s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau). \qquad (\mathrm{D}_{\leqslant})$$

Лемма (поведение сумм Дарбу при измельчении). *Пусть разбиение $\tau(\Delta)$ промежутка Δ является продолжением разбиения $\tau'(\Delta)$ этого же промежутка. Тогда справедливы оценки*

$$s(f,\tau') \leqslant s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau'). \qquad (\mathrm{D},\tau,\tau')$$

Доказательство. Продолжение $\tau(\Delta)$ получим из $\tau'(\Delta)$, последовательно осуществив конечное число шагов, на каждом из которых ровно один из образующих начальное разбиение $\tau'(\Delta)$ мелких промежутков делится на два непересекающихся промежутка, принадлежащих продолжению $\tau(\Delta)$.

Пусть на каком-либо из указанных элементарных измельчений начального разбиения

$\tau'(\Delta)$ его мелкий промежуток Δ_i разделяется на два непустых непересекающихся промежутка Δ_{i_1} и Δ_{i_2}:

$$\Delta_i = \Delta_{i_1} \cup \Delta_{i_2}, \qquad \Delta_{i_1} \cap \Delta_{i_2} = \emptyset.$$

Тогда получим равенство $|\Delta_i| = |\Delta_{i_1}| + |\Delta_{i_2}|$.

Введем обозначения

$$m_{i_1} = \inf_{x \in \Delta_{i_1}} f(x), \qquad m_{i_2} = \inf_{x \in \Delta_{i_2}} f(x).$$

Тогда имеют место соотношения

$$\boldsymbol{\Delta}_{i_1} \subset \boldsymbol{\Delta}_i \quad \Longrightarrow \quad m_{i_1} \geqslant m_i;$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{i_2} \subset \boldsymbol{\Delta}_i \quad \Longrightarrow \quad m_{i_2} \geqslant m_i.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$m_{i_1}|\boldsymbol{\Delta}_{i_1}| \geqslant m_i|\boldsymbol{\Delta}_{i_1}|; \qquad m_{i_2}|\boldsymbol{\Delta}_{i_2}| \geqslant m_i|\boldsymbol{\Delta}_{i_2}|.$$

Складывая их, получаем

$$m_{i_1}|\boldsymbol{\Delta}_{i_1}| + m_{i_2}|\boldsymbol{\Delta}_{i_2}| \geqslant m_i(|\boldsymbol{\Delta}_{i_1}| + |\boldsymbol{\Delta}_{i_2}|) = m_i|\boldsymbol{\Delta}_i|.$$

Это означает, что *при измельчении сетки* (разделении промежутка на два мелких непересекающихся промежутка) *нижняя сумма Дарбу не убывает*, т.е. первая из искомых оценок $(\mathrm{D}, \tau', \tau)$ справедлива:

$$s(f, \tau') \leqslant s(f, \tau).$$

Аналогично, в случае верхних сумм Дарбу вводим обозначения

$$M_{i_1} = \sup_{x \in \Delta_{i_1}} f(x), \qquad M_{i_2} = \sup_{x \in \Delta_{i_2}} f(x).$$

Далее имеем

$$\boldsymbol{\Delta_{i_1} \subset \Delta_i \qquad \Longrightarrow \qquad M_{i_1} \leqslant M_i;}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{i_2} \subset \Delta_i \qquad \Longrightarrow \qquad M_{i_2} \leqslant M_i.}$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\boldsymbol{M_{i_1}|\Delta_{i_1}| \leqslant M_i|\Delta_{i_1}|; \qquad M_{i_2}|\Delta_{i_2}| \leqslant M_i|\Delta_{i_2}|.}$$

Складывая их, получаем

$$\boldsymbol{M_{i_1}|\Delta_{i_1}| + M_{i_2}|\Delta_{i_2}| \leqslant M_i(|\Delta_{i_1}| + |\Delta_{i_2}|) = M_i|\Delta_i|.}$$

Таким образом, *при измельчении сетки* (разделении промежутка на два мелких непересекающихся промежутка) *верхняя сумма Дарбу не возрастает*, т.е. справедлива последняя из оценок $(\mathrm{D}, \tau', \tau)$:

$$\boldsymbol{S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau')}.$$

Объединяя обе полученные оценки с неравенством $(\mathrm{D}_{\leqslant})$, получаем требуемое. $\square$