Образы и прообразы Фурье

Определение. *Для любой локально суммируемой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, порождаемый ею интеграл*

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \widehat{f}(\xi),$$

если только он существует, называется образом Фурье функции f. Интеграл же

$$\mathrm{V.P.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x}\, dx = \widetilde{f}(\xi),$$

комплексно сопряженный предыдущему, называется прообразом Фурье порождающей его функции f.

Свойства преобразования Фурье

Определение. *Оператор, сопоставляющий заданной локально суммируемой функции ее образ Фурье, называется преобразованием Фурье* $\boldsymbol{F}$. *Если же функции сопоставляется ее прообраз Фурье, то оператор называется обратным преобразованием Фурье и обозначается символом* $\boldsymbol{F}^{-1}$.

В соответствии с этим определением имеем:

$$F : f(x) \rightarrowtail \widehat{f}(\xi) \quad \text{и} \quad F^{-1} : f(x) \rightarrowtail \widetilde{f}(\xi).$$

2^0. Установим ряд свойств преобразования Фурье.

1) Оператор преобразования Фурье линеен:

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2) Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет образом Фурье функцию $\widehat{f}(\xi)$. Тогда для любого вещественного a и положительного α определены образы Фурье функций $f(x+a)$ и $f(\alpha x)$, причем

$$F[f(x+a)] = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi), \quad F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big). \quad (\mathrm{a}\alpha)$$

3) Пусть функция $f(x)$ имеет прообраз Фурье $\widetilde{f}(\xi)$. Тогда для любого вещественного b и положительного β определены прообразы Фурье функций $f(x+b)$ и $f(\beta x)$, причем

$$F^{-1}[f(x+b)] = e^{ib\xi}\widetilde{f}(\xi),$$

$$F^{-1}[f(\beta x)] = \frac{1}{\beta}\widetilde{f}\left(\frac{\xi}{\beta}\right). \quad (\mathrm{b}\beta)$$

4) Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке этой прямой условию Дини. Тогда имеют место равенства

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f. \qquad (\mathbf{IF})$$

Эти формулы означают, что операторы F и F^{-1} взаимно обратны. По этой причине равенства $(\mathbf{IF})$ называются *формулами обращения* для преобразования Фурье.

Косинус- и синус- преобразования Фурье

Определение. *Для любой функции $f(x)$, заданной и локально суммируемой на промежутке $(0,+\infty)$ числовой оси интеграл*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos yx\,dx = F_C[f]$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции f, а интеграл

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin yx\,dx = F_S[f]$$

называется ее же синус-преобразованием Фурье.

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ справедливы равенства

$$F[f] = F_c[f] = F^{-1}[f].$$

Если же функция $f(x)$ нечетная, $f(x) = -f(-x)$, то имеют место соотношения

$$F[f] = -iF_s[f] = -F^{-1}[f].$$

Примеры

Пример. *Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции* $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Решение. Из определения имеем

$$F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos yx \, dx,$$

$$F_S[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin yx \, dx.$$

Применяя к интегралу $F_C[f]$ формулу интения по частям к интегралу $F_S[f]$, то получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin yx\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\sin yx\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \\ + y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos yx\,dx,$$

или же, в символьных обозначениях:

$$F_S[f] = yF_C[f].$$

Подставляя это равенство в уже полученное соотношение $F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_S[f]$, находим

$$F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_S[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - y^2F_C[f].$$

Следовательно, искомые преобразования имеют вид

$$F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}, \qquad F_S[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{1+y^2}. \quad \square$$

Образ Фурье производной и производная образа Фурье

Теорема (образ Фурье производной). *Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также имеет здесь же кусочно непрерывную первую производную $f'(x)$, которая абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.*

Тогда для образа и прообраза Фурье производной f' справедливы формулы

$$F[f'] = i\xi \widehat{f}(\xi) \quad \text{и} \quad F^{-1}[f'] = -i\xi \widetilde{f}(\xi).$$

Доказательство. Используя определение образа Фурье и формулу интегрирования по частям, получаем равенство

$$\boldsymbol{F}[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Из формул $(\mathbf{F}_{\pm})$ следует, что

$$f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [f(x) e^{-i\xi x}] - \lim_{x \to -\infty} [f(x) e^{-i\xi x}] = 0.$$

Таким образом, формула для $F[f']$ упрощается и принимает вид

$$F[f'] = i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = i\xi F[f].$$

Формула для прообраза $F^{-1}[f']$ выводится аналогично. $\square$

Справка:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0. \qquad (\mathrm{F}_{\pm})$$

Теорема (производная образа Фурье). *Пусть вещественные функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция $\widehat{f}(\xi)$ всюду непрерывно дифференцируема и при этом справедлива формула*

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = -iF[xf(x)].$$

Следствие. *Пусть функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция $\widehat{f}(\xi)$ имеет на всей числовой прямой непрерывные производные до порядка n включительно и при этом справедливы формулы*

$$\frac{d^k\widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пространство *S* быстро убывающих функций

$\mathbf{5^0}$. Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и при этом как она сама так и ее производные любого порядка стремятся к нулю быстрее любой степени $1/x$, т.е. для любого $k = 0, 1, \ldots$ и при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы асимптотические равенства

$$f^{(k)}(x) = o\Big(\frac{1}{x^n}\Big) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty.$$

Множество всех функций $f(x)$, обладающих указанными свойствами, принято обозначать как S.

Равенство Парсеваля

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)\,dx = (f, g) \qquad \forall\, f, g \in S.$$

Эта формула, называемая *равенством Парсеваля*, справедлива для сомножителей f и g из гораздо более широкого класса нежели пространство S.

Точнее, равенство Парсеваля имеет место для любых двух функций из пространства L_2, т.е. таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx < +\infty.$$