Вопрос №1
Исследование функций и построение их графиков

Определение точки экстремума

Определение. Точка экстремума - точка области определения функции, в которой достигается максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве. Если достигается максимальное значение - точка максимума, если минимальное - точка минимума.

Признаки экстремума функции одной переменной

Теорема Ферма (необходимый признак существования экстремума функции). Если точка x_0 - точка экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует.

Определение. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ.

пример. рассмотрим функцию $y = x^3$ в точке $x = 0$ производная функции равна нулю, следовательно точка $x = 0$ является критической точкой. Однако, если посмотреть на график функции, она возрастает на всей области определения, поэтому точка $x = 0$ не является точкой экстремума на этой функции. Таким образом, условия о том, что производная функции в точке равна нулю или не существует, являются необходимыми условиями экстремума, но не достаточными, поскольку можно привести и другие примеры функций, для которых эти условия выполняются, но экстремума в соответствующей точке функция не имеет. Поэтому нужно располагать достаточными признаками, позволяющими судить, имеется ли в конкретной критической точке экстремум и какой именно - максимум или минимум.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремума функции). Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если при переходе через эту точку производная функции меняет знак, причём, если знак меняется с "плюса"на "минус то точкой максимума, а если с "минуса"на "плюс то точкой минимума.

Если же вблизи точки x_0 производная сохраняет знак, то это означает, что функция либо только убывает, либо только возрастает в некоторой окрестности точки x_0. В этом случае в точке x_0 экстремума нет.

Теорема (Второй достаточный признак). Если в точке $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 является точкой экстремума. При этом:

1. Если $f''(x_0) > 0$, то в данной точке минимум
2. Если $f''(x_0) < 0$, то в данной точке максимум

Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

По способам их нахождения выделяют три вида асимптот: вертикальные $x = a$, горизонтальные $y = b$ и наклонные $y = kx+b$. Горизонтальные являются частными случаями наклонных (при $k = 0$).

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена хотя бы в некоторой полуокрестности точки $x = a$ и хотя бы один из ее односторонних пределов в этой точке бесконечен, т.е. равен $+\infty$ или $-\infty$. Тогда прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Таким образом, вертикальные асимптоты графика функции следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения (если это конечные числа).

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при значениях аргумента, достаточно больших по абсолютной величине, и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

Может случиться, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b_1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b_2$, $b_2 \neq b_1$, причем b_1 и b_2 - конечные числа, тогда график имеет две различные горизонтальные асимптоты: левостороннюю и правостороннюю. Если же существует лишь один из конечных пределов b_1 или b_2, то график имеет либо одну левостороннюю, либо одну правостороннюю горизонтальную асимптоту.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена при значениях аргумента, достаточно больших по абсолютной величине, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Заметим, что если хотя бы один из указанных пределов бесконечен, то наклонной асимптоты нет. Наклонная асимптота так же, как и горизонтальная, может быть односторонней.

Примеры.

1. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т.е. совпадающую с осью Oy) на границе области определения, так как предел функции при $x \to +0$ равен $-\infty$: $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

2. График функции $y = \frac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, так как $y \to \infty$ при $x \to 5$.

3. График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот: $x = \pm\frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{2}$; $x = \pm\frac{5\pi}{2}$; $\ldots$. Это следует из того, что $\operatorname{tg} x$ стремится к ∞, когда x стремится к значениям $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$ или $-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$.

4. График функции $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

Схема исследования функции

Этапы	Задачи
1) Элементарное исследование	A) Нахождение области определения и множества зн B) Установление простейших свойств: чётности и неч C) Нахождение точек пересечения с осями координа D) Определение участков постоянства знака
2) Исследование с помощью предела	A) Нахождение точек разрыва и выявление их харак B) Нахождение односторонних пределов в точках ра C) Поведение функции на $\pm\infty$ D) Нахождение области непрерывности E) Нахождение вертикальных и наклонных асимпто
3) Исследование первой производной	A) Нахождение y' B) Нахождение критических точек: $y' = 0$ или y' не C) Исследование критических точек (по первому до D) Определение максимумов и минимумов функции E) Нахождение участков монотонности
4) Исследование второй производной	A) Нахождение y'' B) Нахождение точек, в которых возможен перегиб: C) Исследование характера этих точек (по изменени D) Определение точек перегиба E) Нахождение участков выпуклости и вогнутости
Построение графика функции	

Вопрос №2
Линейные и Евклидовы пространства

Определение евклидова векторного пространства

Определение. Евклидовым векторным пространством называется вещественное линейное пространство X с заданным на нем скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, для которого выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x\rangle > 0\ \forall x \neq 0$, иначе $\langle x, x\rangle = 0$
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, x\rangle$

$\forall x, y \in X$ скалярное произведение – вещественное число.

Скалярное произведение и его свойства

По определению, $\langle x, y\rangle$ - это произведение длин векторов на косинус угла между ними: $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\phi$. Если $x = (x_1, x_2, x_3)$, разложение по базису пространства $\mathbb{R}^3$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, то длина $|x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. Если $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, то $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Длина вектора в евклидовом пространстве

Пусть X - евклидово векторное пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$.

Определение. Длиной или нормой вектора $x \in X$ называется неотрицательное вещественное число $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \langle v, v\langle^{\frac{1}{2}}$.

Пример. поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ представляет собой одномерное евклидово векторное пространство, длина вектора в котором совпадает с абсолютным значением (модулем) соответствующего вещественного числа.

Линейно зависимые и линейно независимые векторы

Пусть X - линейное пространство над полем k.

Определение. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из X называются линейно-зависимыми, если существует некоторая их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $\exists \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \in k : \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n = 0$, причем $\exists j : \alpha_j \neq 0$.

Определение. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ не являются линейно зависимыми, то их называют линейно независимыми: $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теорема. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, где $n \geq 2$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists j :$ v_j является линейной комбинацией остальных векторов.

Если некоторая подсистема векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима, то и вся система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима.

Если система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независимая.

Теорема $(s \leq t)$. Если каждый из векторов линейно независимой системы $e_1, e_2, \ldots, e_s$ является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_t$, то $s \leq t$.

Базис в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть X - линейное пространство, $\dim X = n$. Любая система из n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ называется базисом пространства X. Базис нульмерного пространства – пустое множество.

Теорема о свойствах базиса. Следствия

Пусть X - линейное пространство над полем k с базисом $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Тогда

I каждый вектор v из X можно представить единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство. Возьмем базис и дополнительный вектор v из X. В этом множестве $n+1$ элементов и по определению $\dim X$ - это линейно зависимая система векторов, или $\exists a, a_1, a_2, \dots, a_n \in k\colon av + a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n = 0$ (существует такой набор коэффициентов, при которых система сводится в ноль). Из неравенства нулю следует наличие обратного элемента, поэтому v представим в виде $v = -a^{-1}a_1e_1 - a^{-1}a_2e_2 - \dots - a^{-1}a_ne_n$. То есть вектор представлен в виде линейной комбинации базиса.

Докажем, что такое представление единственное. Пусть $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_ne_n$. $v = f_1e_1 + f_2e_2 + \dots + f_ne_n$. Тогда $(b_1 - f_1)e_1 + (b_2 - f_2)e_2 + \dots + (b_n - f_n)e_n = 0$. Так как базис линейно независим, такое возможно, только если все коэффициенты равны 0. Это означает, что разложения одинаковы.

II любую систему из $s \leq n$ линейно независимых векторов пространства X можно дополнить до базиса.

Доказательство. Пусть $1 \leq s \leq n$ и имеется система $f_1, f_2, \dots, f^s$ линейно независимых векторов из X. Рассмотрим следующее множество из $s+n$ элементов:

$$f_1, f_2, \dots, f_s, e_1, e_2, \dots, e_n. \tag{1}$$

Преобразуем это множество следующим образом: если вектор e_n линейно выражается через предыдущие векторы цепочки, то исключим его из нашего множества, иначе оставим и перейдем к e_{n-1}. Если выражается – снова убираем и так далее до e_1.

Получили такое множество:

$$f_1, f_2, \dots, f_s, e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{it}. \text{ (всего } t+s). \tag{2}$$

Предположим, что имеется такая нетривиальная (содержащая ненулевые элементы) линейная комбинация векторов, что $a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + b_1 e_{i1} + \ldots + b_{it} e_{it} = 0$. Среди b найдётся хотя бы один ненулевой элемент (иначе в силу линейно независимости f получим что все a равны 0, что будет противоречить нетривиальности комбинации).

Таким образом, множество номеров $\{j : b_j \neq 0\} \neq \emptyset$. Возьмем такой максимальный номер k. Тогда элемент b_k будет иметь обратный $\Rightarrow$ значит мы можем выразить $e_k = -b^{-1k} a_1 f_1 + \ldots + b^{-1k} a_s f_s + \ldots$. Получается, что система линейно зависима, это противоречит ее построению. Следовательно, не существует нетривиальных линейных комбинаций $f_1, \ldots, f_s, e_{i1}, \ldots, e_{it}$: из них можно составить ноль. Выходит, эта система линейно независима.

Но в соответствии с I, любой вектор выражается через базис, а значит и через систему 1. Но все векторы системы 1 линейно выражаются через векторы системы 2.

Таким образом, система 2 максимальна и линейно независима. То есть существует базис.

Следствия:

1. Любой вектор $v \in x$, $v \neq 0$ может быть включён в базис X
2. Пусть X_1, X_2 - подпространства X, $\dim X_1 = M_1$, $\dim X_2 = M_2$, $X_1 \subset X_2$, $X_1 \neq X_2$. Тогда $M_1 < M_2$

Матрицы

Определение. Пусть есть поле k. Матрицей называется прямоугольная таблица элементов k, содержащая m строк одинаковой длины n.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = \underset{i \in 1,\ldots,n,\ j \in 1,\ldots,m}{a_{ij}}$$

i - номер строки, j -номер столбца матрицы. Матрица размера $m \cdot n$ (иногда пишут $A_{m \times n}$). Также элементы матрицы называются её коэффициентами. $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - образуют главную диагональ матрицы. Матрицы, у которых все элементы, за исключением элементов главной диагонали, равны 0, называются, диагональными.

Определение. Суммой двух матриц A и B называется матрица C, в которой все элементы попарно складываются: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Определение. Произведение матрицы A на скаляр λ - умножение каждого элемента a_{ij} на скаляр λ.

Определение. Матрица $-A = (-1)A$ называется противоположной матрицы A. Справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
8. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)A$

Таким образом, квадратные матрицы образуют линейное пространство над полем k. Обозначение: $M_n(k)$.

Определение. Произведением матриц A и B называется матрица $C = AB$, в которой элементы: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$, $i \in 1, \ldots, n$, $j \in 1, \ldots, m$.

Векторное пространство $M_n(k)$ с введенной операцией умножения является кольцом.

Определители матриц произвольных порядков, их свойства

Формулы нахождения определителя матрицы

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} - дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путём вычёркивания i-й строки и j-го столбца.

Пусть $A = (a_{ij})$ - квадратная матрица размера nn. Пусть также задан некоторый номер строки i либо номер столбца j матрицы A. Тогда определитель $\det A$ может быть вычислен по следующим формулам:

- **Разложение по i-й строке**: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}$

- **Разложение по j-му столбцу**: $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$,

где A_{ij} - алгебраическое дополнение к минору, расположенному в строке с номером i и столбце с номером j. A_{ij} также называют алгебраическим дополнением к элементу a_{ij}.

Свойства определителей

- $\det E = 1$ (Определитель единичной матрицы равен 1);

- $\det CA = C^n \det A$ (Определитель является однородной функцией степени n на пространстве матриц размера nn;

- $\det A = A$ (Определитель матрицы не меняется при её транспонировании);

- $\det AB = \det A \cdot \det B$ (Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка);

- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, причём матрица A обратима тогда и только тогда, когда обратим её определитель $\det A$;

- При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель умножается на ?1;
- Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю;
- Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя;
- Если хотя бы одна строка (столбец) матрицы нулевая, то определитель равен нулю;
- Если две (или несколько) строки (столбца) матрицы линейно зависимы, то её определитель равен нулю;
- При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится;
- Пусть A - матрица размера nn. Тогда $\det AX = \det A \cdot \det X$ для любой матрицы X размера nn;
- Если произведение матриц равно нулю $CX = 0$, и матрица C - квадратная, тогда $(\det C)X = 0$.

Обращение квадратных матриц

Определение. Обратная матрица - такая матрица A^{-1}, при умножении на которую исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена, то есть её определитель не равен нулю. Для неквадратных матриц и вырожденных матриц обратных матриц не существует.

Методы нахождения обратных матриц

:

1. **С помощью матрицы алгебраических дополнений.** Матрица, обратная матрице A, представима в виде $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det A}$, где $\mathrm{adj}(A)$

- присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы).

2. **Метод Гаусса.** Пусть задана квадратная матрица: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ припишем к столбцам матрицы A справа столбцы единичной матрицы того же порядка. Получим матрицу: $M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$.

   С помощью элементарных преобразований строк приведем матрицу M к матрице, в левой части которой будет стоять единичная матрица: $N = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$. Полученная таким образом матрица, стоящая в правой части матрицы N, и будет обратной матрицей к матрице A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Свойства обратной матрицы

- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$;
- $E^{-1} = E$.

Системы линейных алгебраических уравнений

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

Здесь m - количество уравнений, а n - количество переменных, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные, которые надо определить, коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ и свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ предполагаются известными. Индексы коэффициентов в системах линейных уравнений (a_{ij}) формируются по следующему соглашению: первый индекс (i) обозначает номер уравнения, второй (j) - номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

Определение. Система называется однородной, если все её свободные члены равны нулю $(b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0)$, иначе - неоднородной.

Определение. Квадратная система линейных уравнений - система, у которой количество уравнений совпадает с числом неизвестных $(m = n)$. Система, у которой число неизвестных больше числа уравнений является недоопределённой, такие системы линейных алгебраических уравнений также называются прямоугольными. Если уравнений больше, чем неизвестных, то система является переопределённой.

Определение. Решение системы линейных алгебраических уравнений - совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что их соответствующая подстановка вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему обращает все её уравнения в тождества.

Определение. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает. Совместная система с единственным решением называется определённой, при наличии более одного решения - недоопределённой.

Система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

или: $AX = B$. Здесь A - это матрица системы, X - столбец неизвестных, а B - столбец свободных членов.

Метод Гаусса

Пусть исходная система имеет вид 3, а её матричное представление – 4. Тогда, согласно свойству элементарных преобразований над строками, основную матрицу этой системы можно привести к ступенчатому виду (эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов):

1. Выбирают первый слева столбец матрицы, в котором есть хоть одно отличное от нуля значение.

2. Если самое верхнее число в этом столбце ноль, то меняют всю первую строку матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.

3. Все элементы первой строки делят на верхний элемент выбранного столбца.

4. Из оставшихся строк вычитают первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.

5. Далее проводят такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.

6. После повторения этой процедуры $n-1$ раз получают верхнюю треугольную матрицу

7. Вычитают из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.

8. Повторяют предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получают единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

Решение систем с помощью обратных матриц

Метод решения систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем через обратную матрицу состоит в следующем.

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5}$$

Тогда её можно переписать в матричной форме: $AX = B$, где A - основная матрица системы, B и X - столбцы свободных членов и решений системы соответственно: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Умножим это матричное уравнение слева на A^{-1} - матрицу, обратную к матрице A: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$, получаем $X = A^{-1}B$. Правая часть этого уравнения даст столбец решений исходной системы.

Правило Крамера

Метод Крамера - это метод решения систем линейных уравнений. Он применяется только к системам линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель отличен от нуля.

Любая крамеровская система уравнений размера nn имеет единственное решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое определяется формулами $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i - определитель матрицы, полученной из основной матрицы A заменой i-го столбца на столбец свободных членов системы, а Δ - определитель основной матрицы.