1 Множества

1.1 Множества

Множество - это одно из ключевых понятий математики, можно даже сказать, что это *ключевое* понятие классической математики. Интуитивная идея, объясняющая понятие "множество состоит в том, что множество - это абстрактный набор произвольных элементов любого типа (в том числе математических моделей или объектов). Такое интуитивное представление множеств не является точным, однако оно позволяет работать с множествами, используя логику и здравый смысл.

Более точное определение понятия "множество"требует знаний формального языка, используемого в математической логики, который будет изучен позже в рамках этого курса, поэтому пока мы будем работать с множествами в их интуитивном представлении, как с "наборами элементов". Понятие "множество"является фундаментальным в классической математике, так как на нём базируются определения всех остальных математических объектов. Грубо говоря, можно утверждать, что все объекты классической математики - множества. Итак, без ограничения общности, можно сказать, что все элементы математического множества тоже являются множествами.

1.2 Обозначение множеств

Множества обозначаются буквами латинского алфавита, возможно с индексами. Так a, B_0, x^i, V^i_j - множества, и тот факт, что элемент a принадлежит (лежит в, является элементом) множеству A обозначается как $a \in A$. Символ $\in$ - обозначает *отношение принадлежности*.

Множество, состоящее из конечного числа элементов a_1 $a_2 \dots a_n$, где n - натуральное число (количество элементов), записывается как:
$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Символ $\dots$ здесь используется в качестве сокращения выражения "и так далее".

1.3 Объединение множеств

Определение

Пусть X и Y - множества. Тогда $X \cup Y$ - **объединение** множеств X и Y. Это множество состоит из элементов, принадлежащих любому из множеств X или Y. Другими словами, для любого элемента a, условие $a \in X \cup Y$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено $a \in X$ или $a \in Y$.

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{c, d, e\}$. Тогда $X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$

1.4 Пересечение множеств

Определение

Пусть X и Y - множества. Тогда $X \cap Y$ - **пересечение** множеств X и Y. Это множество состоит из элементов, лежащих одновременно в X и в Y. Другими словами, для любого элемента a, условие $a \in X \cap Y$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \in X$ и $a \in Y$.

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, c, d\}$. Тогда $X \cap Y = \{b, c\}$

1.5 Разность множеств

Определение

Пусть X и Y - множества. Тогда $X \setminus Y$ - **разность** множеств X и Y. Это множество состоит из элементов, принадлежащих X, но не являющихся элементами множества Y. Итак, для любого a, условие $a \in X \setminus Y$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \in X$ истинно, а $a \in Y$ ложно (можно записать как $a \notin Y$).

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, c, d\}$. Тогда $X \setminus Y = \{a\}$

1.6 Равенство множеств

Равенство - важное отношение между множествами. Оно определяется как:

Определение

Два множества X и Y называются **равными**, обозначается $X = Y$, тогда и только тогда, когда для любого a, $a \in X$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено $a \in Y$.

Другими словами, два множества равны, если они состоят из одинаковых элементов.

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, c, d\}$. Тогда $X \neq Y$

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, c, a\}$. Тогда $X = Y$

1.7 Пустое множество

Существует специальное множество, которое не содержит никаких элементов. Это множество называется *пустое множество*, и обозначается

$$\emptyset$$

Отметим, что по определению равенства множеств пустое множество *единственно*, поэтому любое другое множество, которое не содержит элементов равно $\emptyset$.

2 Свойства операций над множествами

2.1 Идемпотентность

Предложение

Для любого множества X верно следующее

1. $X \cap X = X$
2. $X \cup X = X$

- это свойство называется **идемпотентность** операций $\cap$ и $\cup$.
Также для любого множества X верно следующее:

1. $X \setminus X = \emptyset$

Эти свойства позволяют сокращать выражения, содержащие объединение/пересечение с другими множествами.

Доказательство

Это предложение очевидно следует из определений объединения, пересечения, разности и равенства множеств.

2.2 Свойства пустого множества

Предложение

Для любого множества X:

1. $X \cap \emptyset = \emptyset$
2. $X \cup \emptyset = X$
3. $X \setminus \emptyset = X$
4. $\emptyset \setminus X = \emptyset$

Эти тождества позволяют сокращать выражения, содержащие пустое множество.

Доказательство

Очевидное предложение, которое следует из определения операций над множествами и определения пустого множества.

2.3 Коммутативность

Предложение

Для любых множеств X и Y:

1. $X \cap Y = Y \cap X$
2. $X \cup Y = Y \cup X$

- свойство **коммутативности** операций $\cap$ и $\cup$.

Это свойство позволяет произвольно менять местами аргументы в объединениях / пересечениях, результирующее множество не изменится.

Доказательство

Очевидно следует из определений.

2.4 Разность не коммутативна

Замечание

Отметим, что операция разности множеств не коммутативна: в общем случае неверно, что $X \setminus Y = Y \setminus X$.

Доказательство

Рассмотрим следующий пример. Пусть $X = \{a\}$ - одноэлементное множество, содержащее только один элемент a, и $Y = \emptyset$. Тогда $X \setminus Y = X \neq \emptyset = Y \setminus X$.

2.5 Ассоциативность

Предложение

Для любых множеств X, Y и Z:

- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

- **ассоциативность** операций $\cap$ и $\cup$.

Это свойство позволяет произвольно расставлять скобки внутри пересечений/объединений множеств - результирующее множество от этого не зависит. Это используется с целью сокращения выражений, вместо $(X \cap Y) \cap Z$ можно написать $X \cap Y \cap Z$, а вместо $(X \cup Y) \cup Z$ - $X \cup Y \cup Z$ соответственно.

Доказательство

Очевидно следует из определений.

2.6 Отношение включения

Помимо отношения равенства, рассмотрим очень важное отношение включения (содержится либо равно).

Определение

Два множества X и Y находятся в отношении *включения*, (*содержится либо равно*), обозначается как $X \subseteq Y$, тогда и только тогда, когда для любого a, такого, что $a \in X$, следует, что $a \in Y$. Также введем обозначение для строгого включения: $X \subset Y$ значит, что $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$.

Замечание

Нетрудно заметить, что для любых двух множеств X и Y, $X = Y$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Замечание

Пустое множество содержится в *любом другом* множестве: $\emptyset \subseteq A$. В частности: $\emptyset \subseteq \emptyset$.

2.7 Дистрибутивность

Предложение

Для любых множеств X, Y и Z:

1. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$,
2. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

- **дистрибутивность** операций $\cap$ и $\cup$ относительно друг друга
Дистрибутивность позволяет производить операции объединения/пересечения над скобками, содержащими противоположную операцию.

Доказательство

Докажем первое равенство. Для этого воспользуемся преобразуем равенство в отношение включения, т.е. будем доказывать, что $(X \cap Y) \cup Z \subseteq (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ и $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup Z$. Покажем первое включение: $(X \cap Y) \cup Z \subseteq (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. Рассмотрим элемент a, такой, что $a \in (X \cap Y) \cup Z$. Это означает, что имеет место один из двух случаев: $a \in X \cap Y$ или $a \in Z$. Рассмотрим эти случаи.

- Пусть $a \in X \cap Y$. Это означает, что $a \in X$ и $a \in Y$. Тогда очевидно, что $a \in X \cup Z$ и $a \in Y \cup Z$. Из определения $\cap$, следует, что $a \in (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$.

- Во втором случае рассуждаем аналогично: из того, что $a \in Z$ следует, что $a \in X \cup Z$ и $a \in Y \cup Z$, дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

покажем второе включение, т.е. $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup Z$. Пусть существует некоторый a, такой, что $a \in (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. Тогда $a \in X \cup Z$ и $a \in Y \cup Z$. Возможные варианты включения a:

- $a \in Z$. В этом случае ясно, что $a \in (X \cap Y) \cup Z$.

- $a \notin Z$. Отсюда следует, что $a \in X$ и $a \in Y$, это означает, что $a \in X \cap Y$, и снова получаем $a \in (X \cap Y) \cup Z$.

Оба случая соответствуют требованию: $a \in (X \cap Y) \cup Z$, итак, обратное включение доказано. Второе равенство доказывается аналогично.

2.8 Степень множества

Определение

Пусть A - множество. Множество $\mathcal{P}(A) \rightleftharpoons \{B | B \subseteq A\}$ называется **степенью** множества A.

Теорема

Если $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ - множество из n элементов, то множество $\mathcal{P}(A_n)$ состоит из 2^n элементов.

Доказательство

Индукция по n. При $n = 0$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, т.е. оно состоит из одного элемента.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение доказано для $n - 1$, т.е. $\mathcal{P}(A_{n-1})$ состоит из 2^{n-1} подмножеств. Произвольное подмножество A_n будет однозначно определяться как:

- подмножество, лежащее в A_{n-1}, т.е. являющееся элементом $\mathcal{P}(A_{n-1})$

- информация о наличии a_n в нём: истина или ложь.

Поскольку существует 2^{n-1} элементов в $\mathcal{P}(A_{n-1})$, и каждое подмножество из $\mathcal{P}(A_{n-1})$ создаёт ровно два подмножества в $\mathcal{P}(A_n)$: в котором содержится a_n и то, в котором этого элемента гарантированно нет $2 * 2^{n-1} = 2^n$ элементов в $\mathcal{P}(A_{n-1})$.

3 Декартовы произведения

3.1 Математические понятия

Как было сказано в предыдущей теме, все математические объекты на самом деле являются множествами. Тогда естественным образом возникает вопрос: как различные математические объекты, такие как числа, функции, различные пространства и так далее, представить в виде множеств? Чтобы ответить на этот вопрос, мы последовательно введем несколько понятий, описывающих основные математические модели.

Для начала отметим, что множество состоящее из двух элементов, например $\{a, b\}$, не зависит от порядка, в котором расположены элементы a и b, т.е. $\{a, b\} = \{b, a\}$. Поэтому двухэлементный набор также называют *неупорядоченной парой*. Как мы можем определить *упорядоченную* пару элементов?

3.2 Упорядоченная пара

Определение

Пусть a, b - два элемента. **Упорядоченная пара** (a, b) - это множество

$$(a, b) \rightleftharpoons \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Здесь и далее символ $\rightleftharpoons$ будет читаться как "равный по определению".

Замечание

По определению ясно, что если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$, потому что $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{a, b\}\}$.

3.3 Упорядоченный кортеж

Далее нам нужно определить не только упорядоченную пару, но и упорядоченную тройку, упорядоченную четвёрку и так далее, т.е. упорядоченный набор из n элементов. Упорядоченный набор из n элементов называется **кортеж** длины n. Определение кортежа проводится по индукции: если кортеж длины $n-1$ уже определён, мы можем определить кортеж длины n, используя операцию создания упорядоченной пары.

3.4 Кортеж длины n

Определение

Пусть n - натуральное число. **кортеж** длины n (n-местный кортеж), обозначается $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и определяется следующим образом:

- если $n = 1$, то $(a_1) \rightleftharpoons a_1$,
- если $n > 1$, то $(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ - кортеж. Тогда $l(\bar{a}) = n$ - длина этого кортежа.

3.5 Конкатенация кортежей

Мы можем определить операцию конкатенации над кортежами.

Определение

Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ - два кортежа. Тогда $\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b} \rightleftharpoons (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ - **конкатенация** кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Предложение

Ясно, что $l(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = l(\bar{a}) + l(\bar{b})$

3.6 Декартово произведение множеств

Теперь мы готовы определить очень важное понятие (фактически операцию) над множествами: декартово произведение множеств. Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - это множество всех n-местных кортежей из элементов, принадлежащих соответствующим множествам A_i:

Определение

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечная последовательность множеств. Тогда их **Декартово произведение** определяется как:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightleftharpoons \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

$\times$ обычно используется для обозначения прямого произведения.

3.7 Декартова степень множества

Если все множества A_i в декартовом произведении $A_1 \times \ldots \times A_n$ равны некоторому множеству A, то Декартово произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ называется n-й **Декартовой степенью** A и обозначается A^n (A с верхним индексом - n-я степень):

$$A^n \rightleftharpoons \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

3.8 Декартово произведение не ассоциативно

Замечание

Декартово произведение не ассоциативно, т.е. верно, что

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

Доказательство

Чтобы доказать неравенство, проанализируем эти два произведения. Первое состоит из пар вида

$$(a, (b, c)), \quad \text{где} \;\; a \in A, b \in B, c \in C$$

а второе состоит из пар вида

$$((a, b), c), \quad \text{где} \;\; a \in A, b \in B, c \in C$$

Понятно, что эти пары не могут быть равны.

3.9 Разложение декартова произведения

Несмотря на то, что декартово произведение не ассоциативно, оно допускает некоторое разложение на двухместное декартово произведение.

Лемма 1

Для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Доказательство

По определению декартова произведения:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\} = \{((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) | a_i \in A_i\} =$$

$$= \{(\bar{a}, a_n) | a_n \in A_n, \bar{a} \in A_1 \times \ldots \times A_{n-1}\} = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

3.10 Мощность декартова двухместного произведения

Лемма 2

Пусть A, B - множества, A состоит из n элементов, а B состоит из m элементов. Тогда декартово произведение $A \times B$ содержит $n \cdot m$ элементов.

Доказательство

Сколько существует пар вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$? Существует n вариантов выбора a, и для каждого фиксированного a существует m вариантов выбора b. Отсюда следует, что существует $n \cdot m$ возможных пар $(a, b) \in A \times B$, следовательно, $A \times B$ содержит $n \cdot m$ пар.

3.11 Мощность конечного декартова произведения

Теорема

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - последовательность конечных множеств, A_i содержит k_i элементов (здесь $1 \leq i \leq n$). Тогда декартово произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ будет содержать $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ элементов.

Доказательство

Индукция по n. Основание индукции: при $n = 1$ это очевидно, при $n = 2$ это выполняется по лемме 2. Шаг индукции. По предположению индукции, $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ содержит $k_1 \cdot \ldots \cdot k_{n-1}$ элементов. По лемме 1, $X = A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$, а по лемме 2 X содержит $(k_1 \cdot \ldots k_{n-1}) \cdot k_n$ элементов.

Следствие

Если множество A содержит k элементов, n - натуральное число, то A^n содержит k^n элементов.

4 Отображения

4.1 Неформальное понятие отображения

Одно из наиболее общих понятий в математике - понятие отображения. (функции), которая отображает одно множество в другое. Неформально говоря, под отображением обычно подразумевают некоторое *правило*, *закон*, сопоставляющий аргумент функции с её значением. Но если мы хотим выразить все основные математические понятия в терминах множеств, то мы не можем полагаться на такое определение, потому что не понятно, что именно означает "правило "закон "метод"и так далее.

4.2 Строгое определение отображения

Определение

Пусть A и B - два множества. Тогда **отображение** f из A в B - это такое подмножество $f \subseteq A \times B$, что для любого $a \in A$ и для любого $b_1, b_2 \in B$:

$$\text{из } (a, b_1) \in f \text{ и } (a, b_2) \in f \text{ следует, что } b_1 = b_2$$

т.е. для любого $a \in A$ существует только один $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$. Факт того, что f - отображение из A в B, обозначается как:

$$f : A \to B \text{ или } A \xrightarrow{f} B$$

Множество всех отображений из A в B обозначается как

$$B^A = \{f | f : A \to B\}$$

Это определение не использует таких неоднозначных понятий, как "закон "правило "метод но сводит понятие отображения к *множеству пар элементов*, которые удовлетворяют определенным условиям, имеющим однозначный смысл: каждому аргументу должно соответствовать только одно значение. Где $(a, b) \in f$ можно записать как $f(a) = b$, элемент a называется **аргументом**, а b - **значением** отображения f от аргумента a или **образом** элемента a из отображения f. Факт того, что $f(a) = b$ можно записать следующим образом:

$$f : a \mapsto b \text{ или } a \overset{f}{\mapsto} b$$

Если $f(a) = b$, то элемент a называется **прообразом** элемента b из отображения f.

4.3 Область определения и область значений

Определение

Для любого отображения $f : A \to B$ можно определить два множества:

- **область определения** $dom(f) = \{a | (a, b) \in f\}$
- **область значений** $cod(f) = \{b | (a, b) \in f\}$

пример

Пусть $A = \{a, b\}$ и $f : A \to A$, где $f = \{(a, b)\}$. Тогда $cod(f) = \{b\} \neq A$ и $dom(f) = \{a\} \neq A$

4.4 Функция

Определение

Пусть A - множество, n - натуральное число. Тогда отображение $f : A^n \to A$ называется n-**местной функция** или **операцией** на множестве A.

В качестве примера функции мы можем рассмотреть классические арифметические функции на множестве натуральных/рациональных/действительных чисел. Но нужно помнить, что в теоретическом представлении множеств функция - это *множество пар* чисел, а не символическое преобразование, такое как $f(x, y) = x^2 - y^3 + 4x$, определяющее функцию в общем смысле.

4.5 Тождественное отображение

Определение

Для любого множества A можно определить **тождественное отображение** - функцию $id_A : A \to A$. Эта функция определяется как:

$$id_A \rightleftharpoons \{(a, a) | a \in A\}$$

Тождественное отображение id_A также иногда называют **диагональ** множества A. Это отображение называется тождественным, потому что его значение совпадает с аргументом:

$$id_A(a) = a$$

4.6 Классы отображений

Определение

Пусть $f : A \to B$ - некоторое отображение. Тогда это отображение называется

- **инъективным** (**"однозначным"отображением**), тогда и только тогда, когда для любых двух разных аргументов $a_1, a_2 \in A$ образы $f(a_1)$ $f(a_2)$ также различны. Обозначается как $f : A \xrightarrow{1:1} B$
- **сюръективный** (**отображением "на"**), тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in B$ существует такой $a \in A$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \twoheadrightarrow B$
- **всюду определённым**, тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ существует такой $b \in B$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \rightarrowtail B$
- **биективным** (**"взаимно-однозначным"соответствием**), тогда и только тогда, когда оно инъективно, сюръективно и всюду определено. Обозначается как $f : A \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} B$

4.7 Характеризация сюръективности

Предложение

Для любого отображения $f : A \to B$:

1. $f : A \twoheadrightarrow B$ (т.е. f сюръективно) $\Leftrightarrow cod(f) = B$
2. $f : A \rightarrowtail B$ (т.е. f всюду определено) $\Leftrightarrow dom(f) = A$

Доказательство

Очевидно по определению.

4.8 Композиция отображений

Определение

Пусть A, B, C - три множества и даны два отображения: $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тогда можно определить **композицию** отображений f и g. Это отображение $f \circ g : A \to C$, определённое следующим образом: для любого элемента $a \in A$

$$(f \circ g)(a) \rightleftharpoons g(f(a))$$

Обратите внимание, что это определение верно.

4.9 Свойства композиции

Предложение

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ - отображения. Тогда:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ - ассоциативность операции $\circ$
2. $f \circ id_B = f$
3. $id_A \circ f = f$

Доказательство

2 и 3 - очевидно, что касается 1, достаточно отметить, что для любого $a \in A$,

$$((f \circ g) \circ h)(a) = h(f \circ g(a))) = h(g(f(a)))$$

$$(f \circ (g \circ h))(a) = (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Правые части уравнений равны, значит и левые тоже.

4.10 Композиция и классы отображений

Предложение

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ - отображения. Тогда:

1. если $f : A \overset{1:1}{\to} B$ и $g : B \overset{1:1}{\to} C$, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\to} C$
2. если $f : A \twoheadrightarrow B$ и $g : B \twoheadrightarrow C$, то $f \circ g : A \twoheadrightarrow C$
3. если $f : A \rightarrowtail B$ и $g : B \rightarrowtail C$, то $f \circ g : A \rightarrowtail C$
4. если $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$ и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$

Доказательство

Докажем 1 от противного. Предположим, что $f \circ g$ - не инъективно. Это значит, что существуют такие $a_1, a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $(f \circ g)(a_1) = (f \circ g)(a_2)$. Пусть $b_1 = f(a_1)$ и $b_2 = f(a_2)$. Тогда $(f \circ g)(a_1) = g(b_1) = (f \circ g)(a_2) = g(b_2)$, т.е. $g(b_1) = g(b_2)$. Так как g инъективно, $b_1 = b_2$, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$. Но f также инъективно, поэтому $a_1 = a_2$ - противоречие. Остальные случаи доказываются аналогично.

4.11 Обратное отображение

Определение

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ - два отображения. Тогда g называется **обратным** к f, тогда и только тогда, когда $f \circ g = id_A$ и $g \circ f = id_B$.

Предложение

Если для некоторого отображения $f : A \to B$ существует обратное отображение, то f сюръективно и всюду определено.

Доказательство

Докажем сюръективность. Если f не сюръективно, то существует такой $b \in B$, что $b \notin cod(f)$. Но по определению $id_B = (g \circ f)(b) = f(g(b)) = b$, т.е. если $a = g(b)$, то $(a, b) \in f$, т.е. $b \in cod(f)$ - противоречие. Всюду определенность доказывается аналогично.

4.12 Инъективность обратного отображения

Предложение

Если для отображения $f : A \to B$ существует обратное, то f инъективно.

Доказательство

В противном случае существуют такие $a_1, a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$. По условию $f \circ g = id_A$, т.е. $(f \circ g)(a) = a$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a_1 = (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b) = g(f(a_2)) = (f \circ g)(a_2) = a_2$ - противоречие.

Следствие

Если для некоторого $f : A \to B$ существует обратное отображение, то f биективно.

4.13 Единственность обратного отображения

Предложение

Если существует обратное отображение к $f : A \to B$, то оно единственно.

Доказательство

Предположим, что $g_1, g_2 : B \to A$ два обратных отображения к f. Тогда предположим, что для некоторого $b \in B$ $a_1 = g_1(b) \neq a_2 = g_2(b)$.

По сюръективности f, элемент b имеет прообраз a из отображения f. Следовательно,

$$a = id_A(a) = (f \circ g_1)(a) = g_1(f(a)) = g_1(b) = a_1$$

Аналогично можно доказать, что

$$a = id_A(a) = (f \circ g_2)(a) = g_2(f(a)) = g_2(b) = a_2$$

т.е. $a_1 = a_2$ - противоречие.

4.14 Образ множества

Определение

Рассмотрим отображение $f : A \to B$. Тогда для любого подмножества $X \subseteq A$ можно определить

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

- **образ** множества X из отображения f.