Лекция № 8

Нечеткие модели

Fuzzy model

Методы представления нечетких знаний

Нечеткость связана с отсутствием точных границ области определений и свойственна большинству понятий.

Эта *нечеткость границ* приводит к тому, что в общем случае оказывается невозможным решать вопрос о соответствии данного объекта и данного понятия (класса) по принципу *да/нет*. Часто можно только говорить о степени соотнесенности одного другому, оценивая ее, например, в интервале от **1** (определенное ***да***) до **0** (определенное ***нет***).

Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его непринадлежности происходит *не скачком*, а *плавно*, причем принадлежность объекта классу выражается числом из интервала [0,1].

Методы представления нечетких знаний

Аналогичные рассуждения можно отнести и к отдельным свойствам объектов. Не всегда можно четко рассуждать о таких свойствах объектов, как *вес, цвет, температура, размер* и т.п.

Нет четкой границы между тяжелым и легким, темным и светлым, холодным и горячим, большим и маленьким и т.п.

Методы представления нечетких знаний

Методы представления нечетких знаний были предложены американским профессором **Лотфи Заде** в 1965 году в книге:

Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его использование в принятии приближенных решении. М.: Мир, 1976.

Заде ввел два фундаментальных понятия:

- **лингвистическая переменная** и
- **нечеткое множество**.

Понятие лингвистической переменной

Сначала дадим неформальное определение.

Лингвистическая переменная (ЛП) – это переменная, значениями которой являются слова или выражения естественного (иногда искусственного) языка.

Переменную ***Возраст*** можно рассматривать как лингвистическую переменную, если она принимает не числовые значения (например, от 0 до 100), а лингвистические значения, такие как *молодой, старый, очень молодой, очень старый* и т.п.

Аналогично можно ввести ЛП ***Температура_тела_больного*** со значениями *нормальная, повышенная, высокая, очень высокая* и т.п.

Понятие лингвистической переменной

Лингвистическая переменная описывается следующим набором:

$(N, T(N), U, G, M)$, где

N – название лингвистической переменной,

$T(N)$ – терм-множество N, т.е. совокупность ее лингвистических значений,

U – универсальное множество,

G – синтаксическое правило, порождающее терм-множество $T(N)$,

M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению X ставит в соответствие его смысл $M(X)$, причем $M(X)$ обозначает нечеткое подмножество множества U (т.е. подмножество, границы которого размыты).

Понятие лингвистической переменной

Рассмотрим лингвистическую переменную, описывающую возраст человека, тогда:

N - «возраст»;

U - множество целых чисел из интервала [0, 100];

T(N) - значения «молодой», «зрелый», «старый» и т.п.

G – может включать термы «очень», «не очень». Такие добавки позволяют образовывать новые значения: «очень молодой», «не очень старый» и пр.

M - математическое правило, определяющее вид функции принадлежности для каждого значения образованного при помощи правила *G*.
Эта функция задает информацию о том, людей какого возраста считать молодыми, зрелыми, старыми;

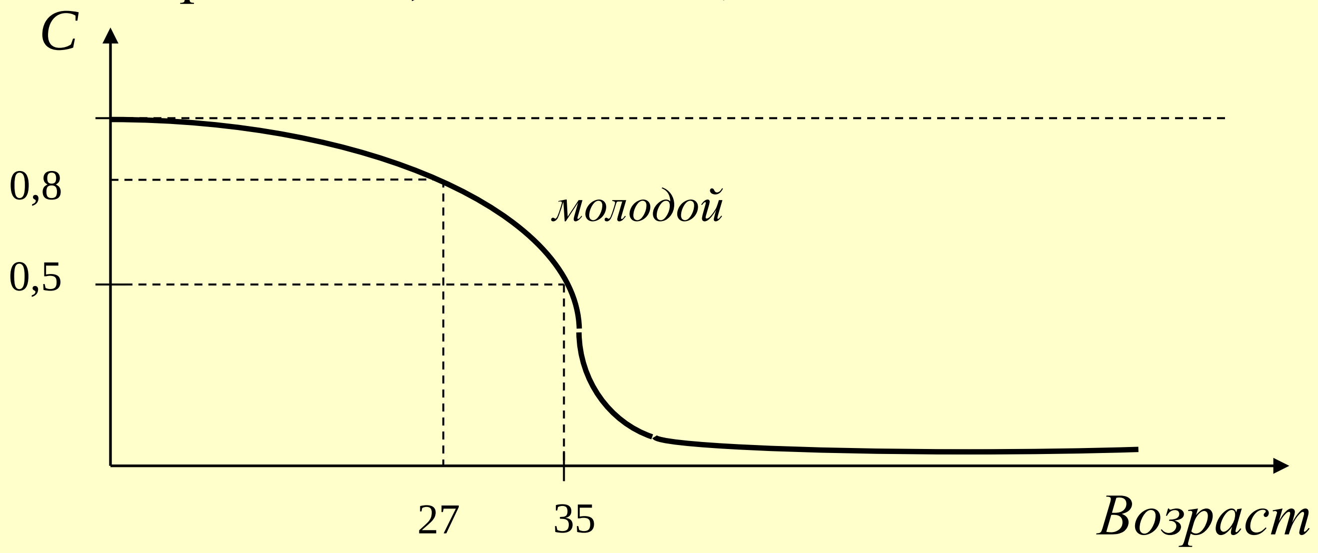
Понятие лингвистической переменной

Смысл *M(X)* лингвистического значения *X* характеризуется функцией принадлежности

$c : U \to [0,1]$,

которая каждому элементу $u \in U$ ставит в соответствие значение совместимости этого элемента с *X* .

Так, например, совместимость возраста 27 лет со значением *молодой* может быть равна 0.8, а 35 лет – 0,5.



Понятие лингвистической переменной

Таким образом, с помощью лингвистических переменных можно приближенно описывать понятия и явления (свойства) не поддающиеся точному описанию.

Если понимать ***истинность*** как лингвистическую переменную со значениями *истинно, почти истинно, не очень истинно* и т.п., то мы переходим к так называемой **нечеткой логике**, на которую могут опираться приближенные рассуждения.

Пример.

Пусть x – мало,

x и y – примерно равны,

тогда y – более или менее мало.

Нечеткие множества

Ранее, при рассмотрении смысла лингвистической переменной мы уже столкнулась с нечетким подмножеством определив его как множество с размытыми или нечеткими границами.

По-английски Fuzzy – означает нечеткий, размытый. Поэтому иногда нечеткие множества называют размытыми множествами или множествами Заде (Zadeh set) – по имени их автора.

Дадим более строгое определение нечеткого множества.

Нечеткое множество (НМ)

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \}$$

определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$, или непосредственно в виде функции принадлежности

$$\mu_A(x): X \to [0,1].$$

Нечеткие множества

Универсальным множеством (УМ) X нечеткого множества A называется область определения функции принадлежности μ_A.

Носителем НМ A называется множество таких точек в X, для которых

$\mu_A(x)>0$.

Высотой НМ A называется величина $\sup\limits_{X} \mu_A(x)$.

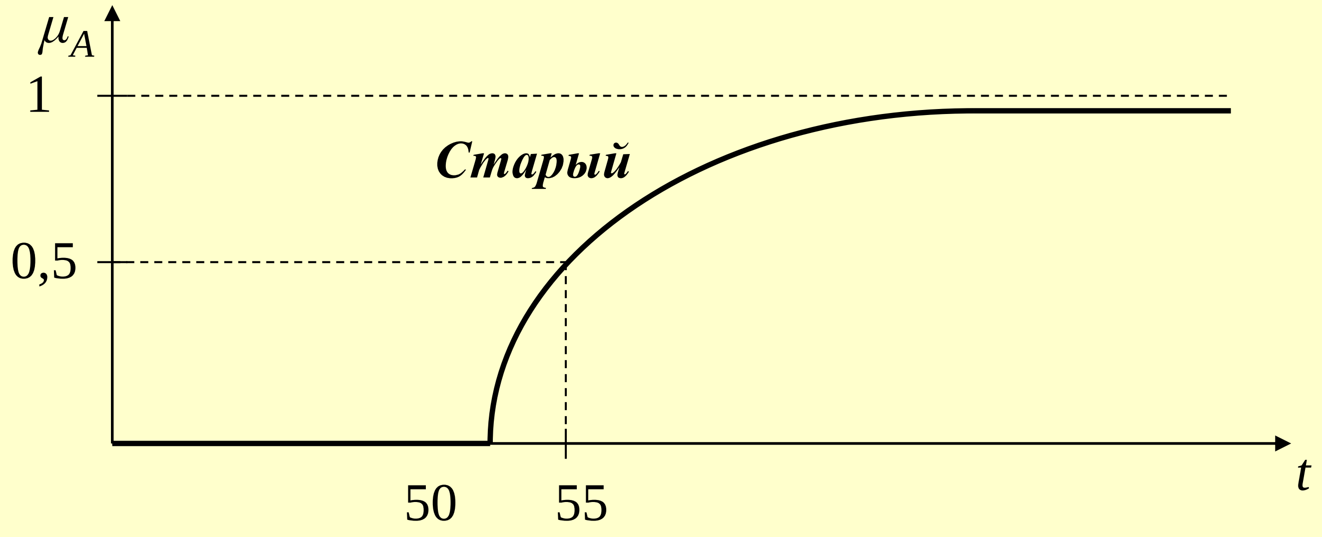
Точкой перехода НМ A называется такой элемент множества X, степень принадлежности которого множеству A равна 0.5.

Пример нечеткого множества

Пусть УМ *X* представляет собой интервал [0,100], и переменная *x*, принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как *возраст*. Нечеткое подмножество универсального множества *X*, обозначаемое термином ***старый***, можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \le x \le 50, \\ \left(1 + \left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, \text{ при } 50 < x \le 100 \end{cases}$$

В этом примере *носителем* НМ ***старый*** является интервал [50,100], *высота* близка к 1, а *точкой перехода* является значение x=55.



Запись нечетких множеств

Обычно НМ *A* универсального множества X записывается в виде

$$A = \mu_1|x_1 + \mu_2|x_2 + \ldots + \mu_n|x_n,$$

где μ_i, $i=1,\ldots,n$ - степень принадлежности элемента x_i НМ *A*.

Пример:

НМ ***Несколько*** = 0.5|2 + 0.8|3 + 0.9|4 + 1|5 + 1|6 +1|7 +0.8|8 + 0.5|9

Если носитель НМ имеет мощность континуума, то используется следующая запись:

$$A = \int_X \mu_A(x)|x,$$

где знак $\int$ обозначает объединение одноточечных НМ $\mu_A(x)|x$, $x \in X$.

Пример

$$НМ\ \textbf{старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} | x$$

Операции над нечеткими множествами

1. **Дополнение** НМ А:

$$\neg A = \int_X (1-\mu_A(x)) \mid x$$

Операция дополнения соответствует логическому отрицанию.

2. **Объединение** НМ А и В:

$$A + B = \int_X (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \mid x$$

Объединение соответствует логической связке «или».

3. **Пересечение** НМ А и В:

$$A \cap B = \int_X (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \mid x$$

Пересечение соответствует логической связке «и».

Операции над нечеткими множествами

4. **Произведение** НМ А и В:

$$A * B = \int_X (\mu_A(x) * \mu_B(x)) \mid x$$

Таким образом, любое НМ A^m, где m - положительное число, следует понимать как

$$A^m = \int_X (\mu_A(x))^m \mid x$$

Пример

Пусть мы имеем универсальное множество $X = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10$

и два его нечетких подмножества A и B, причем

$A = 0.8|3 + 1|5 + 0.6|6$

$B = 0.7|3 + 1|4 + 0.5|6$

Тогда

1. **Дополнение** A

$\neg A = 1|1 + 1|2 + 0.2|3 + 1|4 + 0.4|6 + 1|7 + 1|8 + 1|9 + 1|10$

2. **Объединение** A и B

$A + B = 0.8|3 + 1|4 + 1|5 + 0.6|6$

3. Пересечение НМ A и B

$A \cap B = 0.7|3 + 0.5|6$

4. Произведение НМ A и B:

$A * B = 0.56|3 + 0.3|6$

$A^2 = 0.64|3 + 1|5 + 0.36|6$

Нечеткие отношения

Для выполнения нечетких выводов необходимо уметь представлять нечеткие отношения.

Если X - декартово произведение n универсальных множеств

$X_1, X_2, \ldots, X_n$,

то n-арное нечеткое отношение (НО) R в X определяется как нечеткое подмножество универсального множества X:

$$R = \int_{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n} \mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где μ_R - функция принадлежности НМ R.

В отличие от обычного определения отношения в математике:

$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

Примеры нечетких отношений

Распространенными примерами НО являются *много больше чем*, *имеет сходство*, *близко к* и т.д.

Например, если X1=X2=(– ∞,+ ∞), то отношение *близко к* можно определить следующим образом:

$$\textit{близко к} = \int_{X_1 \times X_2} e^{-a*|x1 - x2|} \mid (x_1, x_2),$$

где *a* - коэффициент масштабирования.

Использование нечеткой логики в экспертных системах

Особенности нечеткой логики

В нечеткой логике определены эквиваленты операций И, ИЛИ и НЕ:

p1 И p2 = min (p1, p2) (т.е. меньшее)

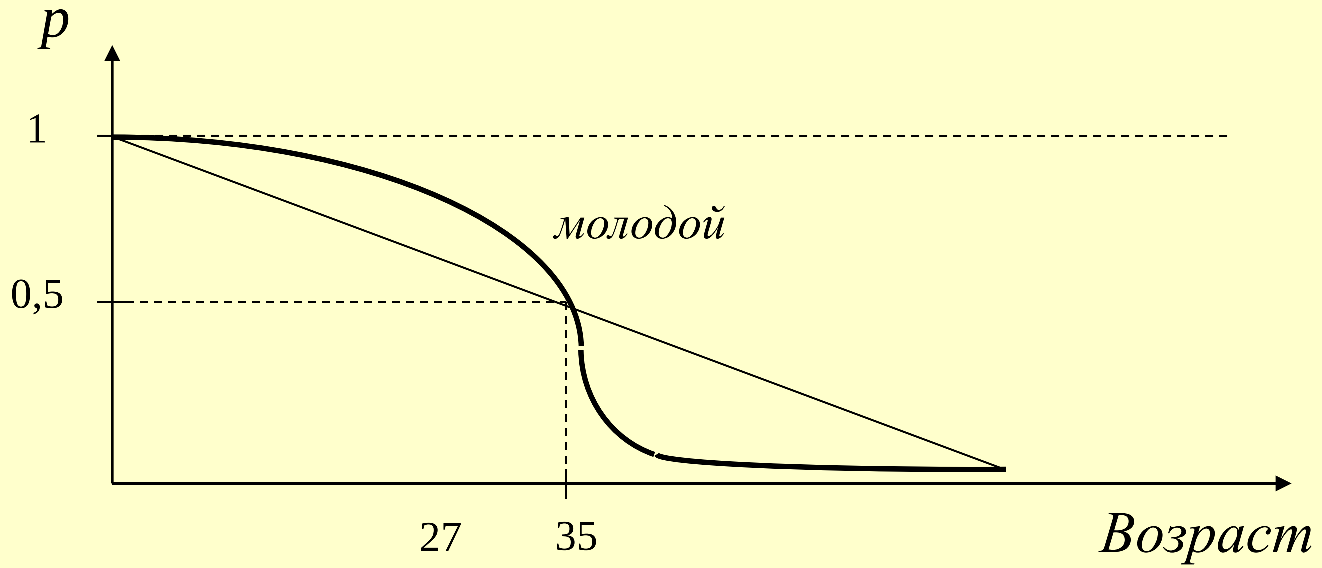
p1 ИЛИ p2 = max (p1, p2) (т.е. большее)

НЕ p1 = 1 - p1 (т.е. «обратное значение»)

Таким образом, нечеткие сведения можно комбинировать на основе строгих логических методов. Поэтому нечеткая логика может применяться в практических системах, например, в экспертных системах и системах поддержки принятия решений.

Особенности нечеткой логики

Слабым местом в нечеткой логике является функция принадлежности, вернее ее выбор. Предположим, что Петру 35 лет. Насколько истинно предположение, что он *молодой*? Равна ли его истинность величине 0.5, поскольку он прожил примерно полжизни, или 0.6?



Какова должна быть функция принадлежности, каков должен быть ее график (кривая или прямая)?

Проблема выбора функции принадлежности

Для предпочтения одного вида функции другому нет серьезных рациональных обоснований, поэтому в реальной задаче могут присутствовать десятки и сотни подобных функций, каждая из которых до некоторой степени является произвольной.

Поэтому в практических системах, использующих нечеткую логику, например, в системе REVEAL, предусматриваются средства, позволяющие пользователю легко модифицировать различные функции принадлежности и/или устанавливать форму их графика.

Проблема выбора функции принадлежности

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Наибольшее распространение получили:

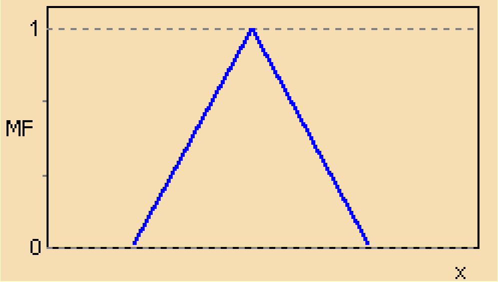
- треугольная,
- трапецеидальная и
- гауссова функции принадлежности.

Проблема выбора функции принадлежности

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел (a,b,c), и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению:

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1-\dfrac{x-b}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, \text{ в остальных случаях.} & \end{cases}$$

При (b-a)=(c-b) имеем случай симметричной треугольной функции принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки (a,b,c).

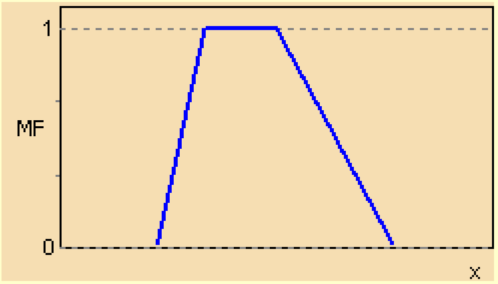


Проблема выбора функции принадлежности

Аналогично для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1,\ b\le x\le c & \\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0,\ \text{в остальных случаях.} & \end{cases}$$

При (b-a)=(d-c) трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

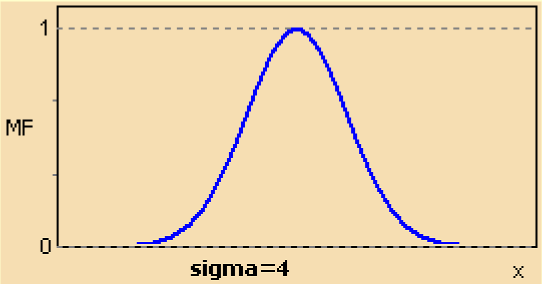


Проблема выбора функции принадлежности

Функция принадлежности гауссова типа описывается формулой

$$MF(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

и оперирует двумя параметрами. Параметр *c* обозначает центр нечеткого множества, а параметр σ отвечает за крутизну функции.



Проблема взвешивания отдельных сведений

Еще одной проблемой при использовании нечеткой логики является проблема взвешивания отдельных сведений и их использование в «нечетких правилах».

Предположим, что имеется два нечетких правила с одним и тем же следствием:

Правило 1: **если** a **И** b **то** c.

Правило 2: **если** e **ИЛИ** f **то** c.

При этом известны степени истинности (определенности) *a*, *b*, *e* и *f*:

$p(a) = 1$; $p(b) = 0.8$; $p(e) = 0.5$; $p(f) = 0.4$.

Тогда из *Правила 1 степень истинности*

$p(c) = \min(1, 0.8) = 0.8$,

а из *Правила 2* $p(c) = \max(0.5, 0.4) = 0.5$.

Какое из этих значений *p(c)* выбрать? Первое, второе? А может быть взять их среднее арифметическое?

Схема Шортлиффа. Использование коэффициентов уверенности

Шортлифф (E. Shortliffe) разработал схему, основанную на так называемых коэффициентах уверенности, которые он ввел для измерения степени доверия к любому данному заключению, являющемуся результатом полученных к этому моменту свидетельств.

Коэффициент уверенности – это разность между двумя мерами:

КУ [h : e] = МД [h : e] - МНД [h : e], (1)

где

КУ [h : e] – уверенность в гипотезе *h* с учетом свидетельств *e*,

МД [h : e] – мера доверия гипотезе *h* при заданных свидетельствах *e*,

МНД [h : e] – мера недоверия гипотезе *h* при свидетельствах *e*.

КУ может изменяться от -*1 (абсолютная ложь)* до +*1 (абсолютная истина),* причем *0* означает *полное незнание.*

Схема Шортлиффа. Использование коэффициентов уверенности

Таким образом *КУ* – это простой способ взвешивания свидетельств «за» и «против».

Заметим, что приведенная формула не позволяет отличить случай противоречащих свидетельств (и МД, и МНД обе велики) от случая недостаточной информации (и МД, и МНД обе малы), что иногда бывает полезно.

Заметим также, что ни КУ, ни МД, ни МНД, не являются вероятностными мерами.

МД и МНД подчиняются некоторым аксиомам теории вероятности, но не являются выборками какой-нибудь популяции, и, следовательно, им нельзя дать статическую интерпретацию. Они просто позволяют упорядочить гипотезы в соответствии с той степенью обоснованности, которая у них есть.

Схема Шортлиффа.
Взвешивание свидетельств

Шортлифф ввел формулу уточнения для взвешивания свидетельств.

Формула уточнения позволяет непосредственно сочетать новую информации со старыми результатами. Она применяется и мерам доверия и недоверия, связанным с каждым предположением.

Формула для МД выглядит следующим образом:

МД [h : e1, e2] = МД [h : e1] + МД [h : e2](1 - МД [h : e1])* , (2)

где запятая между свидетельствами *e1* и *e2* означает,

что *e2* следует за *e1*.

Аналогичным образом уточняются значения *МНД*.

Смысл формулы состоит в том, что эффект второго свидетельства *e2* на гипотезу *h* при заданном свидетельстве *e1* сказывается в смещении *МД* в сторону полной определенности на расстояние, зависящее от второго свидетельства.

Схема Шортлиффа. Формула уточнения

Формула (2) имеет два важных свойства:

1. Она **симметрична** в том смысле, что порядок *e1* и *e2* не существенен.
2. По мере накопления подкрепляющих свидетельств *МД* (или *МНД*) движется к определенности.

Вернемся к примеру

Правило 1: ***если*** *a* ***И*** *b* ***то*** *c*.

Правило 2: ***если*** *e* ***ИЛИ*** *f* ***то*** *c*.

При этом степени истинности *a*, *b*, *e* и *f*:

$$p(a) = 1;\ p(b) = 0.8;\ p(e) = 0.5;\ p(f) = 0.4\ .$$

Из *Правила 1 степень определенности* $p(c) = \min(1, 0.8) = 0.8$,

из *Правила 2* $p(c) = \max(0.5, 0.4) = 0.5$.

Схема Шортлиффа. Формула уточнения

Применяя формулу (2) получаем:

МД [c : Правило 1, Правило 2] =

МД [c : Правило 1] + МД [c : Правило 2](1 - МД [c : Правило 1])*

= 0.8 + 0.5(1 – 0.8) = 0.9.*

Итак *МД [c : Правило 1, Правило 2] = 0.9.*

Т.о. объединенная мера доверия оказывается выше, чем при учете каждого свидетельства, взятого отдельно.
Это согласуется с нашей интуицией, что несколько показывающих одно и то же направление свидетельств подкрепляют друг друга.

Кроме того, можно поменять порядок применения правил 1 и 2, но на результатах это не отразится.

Схема Шортлиффа. Надежность правил

Схема Шортлиффа допускает также возможность того, что правила, как и данные, могут быть ненадежными. Это позволяет описывать более широкий класс ситуаций.

Каждое правило снабжается *«коэффициентом ослабления»* (числом от 0 до 1), показывающим **надежность правила**.

Так, если в нашем примере мы снабдим *Правило 1* коэффициентом ослабления ***0.6***, а *Правило 2* – коэффициентом ***0.8***, получим следующее:

*МД [с : Правило 1] = min (1, 0.8)*0.6 = 0.48*

*МД [с : Правило 2] = = max (0.5, 0.4)*0.8 = 0.4*

Применяя формулу уточнения (2) получаем:

МД [с : Правило 1, Правило 2] =

МД [с : Правило 1] + МД [с : Правило 2](1 - МД [с : Правило 1])*

= 0.48 + 0.4(1 – 0.48) = 0.48 + 0.208 = 0.688 .*

Схема Шортлиффа. Порог уверенности

Часто вводят так называемый **порог уверенности** *(ПУ) – число от 0 до 1*.

Если КУ некоторого заключения меньше этого числа *(ПУ)*, то таким заключением можно пренебречь.

Таким образом, не принимая во внимание утверждения с малым весом, можно существенно сократить пространство поиска решений.

Выводы.

Хотя схема Шортлиффа не достаточно теоретически обоснована, но она хорошо зарекомендовала себя в практических приложениях, в частности в экспертной системе MYCIN и последовавшими за ней другими системами.