# Тема : Несобственные интегралы

**$1^0$**. Определение несобственного интеграла: интеграл по неограниченному интервалу, интеграл от неограниченной функции. Несобственные интегралы с двумя особыми пределами интегрирования. Интегрирование степенных особенностей. **$2^0$**. Свойства операции несобственного интегрирования. Примеры вычисления несобственных интегралов. **$3^0$**. Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признак совместной сходимости. Следствие. Функции сравнения, сравнения со степенными функциями. Пример. **$4^0$**. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Лемма о сходимости абсолютно сходящихся интегралов. Условно сходящиеся несобственные интегралы. **$5^0$**. Признаки Дирихле и Абеля. Примеры.

$3^0$. Проверять сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций удобно с использованием следующего *признака сравнения*.

**Теорема** (признак совместной сходимости). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и неотрицательны на промежутке* $[a, b)$ *и при этом*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to b - 0. \qquad \text{(fOg)}$$

Тогда, если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также сходится. Если же интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство этой теоремы дано на предыдущей лекции.

**Следствие.** *Если неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$*, определенные на* $[a,b)$*, имеют при* $x \to b-0$ *одинаковый порядок, то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно. В частности, это справедливо для функций, эквивалентных при* $x \to b-0$.

При исследовании сходимости несобственных интегралов от $f(x)$ функция $g(x)$ в признаке совместной сходимости и следствии из него называется *функцией сравнения*. В качестве функций сравнения часто выбираются функции, имеющие степенной порядок роста (или убывания):

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad b = +\infty; \qquad \alpha > 0,$$

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} \quad \text{при} \quad b \neq +\infty; \qquad \alpha > 0.$$

**Следствие.** *Пусть неотрицательная функция $f(x)$, непрерывная на $[a, +\infty)$, где $a > 0$, имеет при $x \to +\infty$ одинаковый порядок с функцией $g(x) = 1/x^{\alpha}$, то есть*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ и } g(x) = O(f(x)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

*Тогда интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

**Следствие.** *Пусть неотрицательная функция* $f(x)$, *непрерывная на* $[a, b)$, *где* $0 < a < b < +\infty$, *имеет при* $x \to b - 0$ *одинаковый порядок с функцией*

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}.$$

*Тогда при* $\alpha < 1$ *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится, а при* $\alpha \geqslant 1$ *этот же интеграл расходится.*

**Пример.** *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\, dx.$$

*Решение.* Подынтегральная функция здесь определена и неотрицательна на положительной полуоси. Оба предела интегрирования у интеграла $I$ особые. Представим $I$ в виде суммы двух интегралов, каждый из которых имеет ровно один особый предел интегрирования:

$$\boldsymbol{I} = \int\limits_0^1 \frac{\ln^{\alpha}(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\,dx +$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\,dx. \qquad (\mathrm{I}_+)$$

Сравним неотрицательную подынтегральную функцию $f(x)$ со степенной.

Имеем при $x \to +0$:

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x) \sim \operatorname{sh} x,$$

$$f(x) \sim \frac{(\operatorname{sh} x)^{\alpha}}{x^{1/4}(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + x^{1/4})} \sim \frac{x^{\alpha}}{x^{1/4}} = \frac{1}{x^{1/4-\alpha}}.$$

Следовательно, при условии, что $1/4 - \alpha < 1$ интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, а при $1/4 - \alpha \geqslant 1$ расходится.

Таким образом, необходимое и достаточное условие сходимости первого несобственного интеграла в правой части равенства $(\mathbf{I}_+)$ записывается как неравенство $\alpha > -3/4$.

При $x \to +\infty$ проведем следующие сравнения:

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \left(x + \ln\left(e^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right) \sim x,$$

$$f(x) \sim \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}} \sim \frac{x^{\alpha}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{1/2-\alpha}}.$$

Следовательно, при условии, что

$$\mathbf{1/2} - \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}$$

интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а при $\mathbf{1/2} - \boldsymbol{\alpha} \leqslant \mathbf{1}$ он же расходится. Таким образом, оба несобственных интеграла в правой части формулы ($\mathrm{I}_+$) сходятся тогда и только тогда когда числовой параметр $\boldsymbol{\alpha}$ лежит в интервале

$$-\mathbf{3/4} < \boldsymbol{\alpha} < -\mathbf{1/2}. \qquad \square$$

$4^0$. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет особый верхний предел. Это означает, по определению, что подынтегральная функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]$, где $\eta < b$, и при этом имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx.$$

Согласно критерию Коши, предел в правой части этого равенства существует тогда и только тогда когда для первообразной

$$\Phi(\eta) = \int\limits_a^{\eta} f(x)\, dx$$

выполняется следующее *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists b_\varepsilon \in (a, b)\colon \forall\, \xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \;\Rightarrow\; |\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| < \varepsilon.$$

Это условие на первообразную подынтегральной функции необходимо и достаточно для сходимости интеграла. Его (условие) называют *критерием Коши* сходимости несобственного интеграла.

**Определение.** *Пусть функция* $f(x)$ *определена на конечном промежутке* $[a, b)$ *и интегрируема по Риману на любом отрезке* $[a, \eta] \subset [a, b)$. *Если интеграл от* $|f(x)|$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся.*

**Лемма** (о сходимости). *Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$ и при этом интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$.*

*Если интеграл* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

*Доказательство.* Пусть отрезок $[a, \eta]$ вложен в промежуток $[a, b)$, $[a, \eta] \subset [a, b)$. По условию функция $f(x)$ интегрируема на $[a, \eta]$. Следовательно, ее модуль $|f(x)|$ — это также интегрируемая на $[a, \eta]$ функция. При этом для любых точек $\xi$, $\eta$ из $(a, b)$, $\xi < \eta$, имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_{\xi}^{\eta} |f(x)|\, dx. \qquad (1)$$

Для первообразной $\Phi(\eta) = \int\limits_a^\eta |f(x)|\,dx$ из сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ следует выполнение условия Коши:

$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists b_\varepsilon \in (a,b)\colon \forall\,\xi,\eta \in (b_\varepsilon, b) \;\Rightarrow\; |\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| < \varepsilon,$

или, что то же самое:

$$|\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| = \int\limits_{\xi}^{\eta} |f(x)|\, dx < \varepsilon. \qquad (2)$$

Для этих же точек $\xi$ и $\eta$ из интервала $(b_\varepsilon, b)$, применяя последовательно оценки (1) и (2), получаем

$$\Big|\int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)\, dx\Big| \leqslant \int\limits_{\xi}^{\eta} |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Следовательно, первообразная

$$\Psi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)dx$$

также удовлетворяет условию Коши. Это значит, что соответствующий $\Psi(\eta)$ несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по $[a, b]$, в силу критерия Коши, обязан сходиться. $\square$

Утверждение, обратное лемме о сходимости, несправедливо. В этой связи вводится понятие условно сходящихся интегралов.

**Определение.** *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится в то время как интеграл от* $|f(x)|$ *по* $[a,b]$ *расходится, то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называется условно сходящимся.*

Условно сходящиеся интегралы существуют.

**Пример.** *Исследовать на сходимость несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ *в зависимости от вещественных значений* $\alpha$.

*Решение.* 1) Пусть $\alpha \leqslant 0$. Тогда для любого натурального $n$ имеем следующее неравенство

$$\int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx \geqslant \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin x\, dx = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx = 2.$$

Таким образом, условие Коши для рассматриваемого несобственного интеграла не выполняется. Следовательно, интеграл расходится.

2) Пусть $\alpha > 1$. Тогда из оценки

$$\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad \forall\, x \in [1, +\infty)$$

следует, что

$$\left| \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx \right| \leqslant \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Таким образом, при $\alpha > 1$ рассматриваемый интеграл сходится абсолютно.

3) Пусть $\mathbf{0 < \alpha \leqslant 1}$. Имеем при этом

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x^{\alpha}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\bigg|_1^{+\infty} - \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

Учитывая, что $\alpha > 0$, получаем отсюда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \cos 1 - \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

Интеграл в правой части этого равенства сходится абсолютно:

$$\Bigl|\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx\Bigr| \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\,dx = -\frac{1}{x^\alpha}\Bigr|_1^{+\infty} = 1.$$

Таким образом, при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ сходится. Выясним, сходится ли он абсолютно.

Имеем для любого натурального $n$ и с учетом неравенства $\alpha \leqslant 1$ следующую оценку:

$$\int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geqslant \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2n\pi} \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, при $\alpha \leqslant 1$ условие Коши для несобственного интеграла

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx$$

не выполняется, то есть он расходится. Это означает, что при $0 < \alpha \leqslant 1$ этот несобственный интеграл сходится условно. $\square$

$5^0$. Ряд признаков сходимости несобственных интегралов основан на разложении подынтегральной функции в произведение сомножителей со специальными свойствами.

Приведем без доказательства формулировку одного из этих признаков и проиллюстрируем примером его применение.

**Теорема** (признак Дирихле). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, а ее первообразная $\Phi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ ограничена на промежутке $[a, +\infty)$. Пусть кроме того есть монотонная функция $g(x)$, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.*

**Пример.** *Исследовать на сходимость несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx$ *в зависимости от вещественных значений* $\alpha$.

*Решение.* Интеграл имеет один особый предел интегрирования в точке $+\infty$. При $\alpha \leqslant 0$ этот интеграл расходится, что следует из оценки

$$\int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx \geqslant \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

и критерия Коши для несобственных интегралов.

Пусть $\alpha > 0$. В этом случае применим признак Дирихле. Возьмем

$$f(x) = \sin x \quad \text{и} \quad g(x) = (x+\cos x)^{-\alpha}.$$

Подынтегральная функция представляет собой произведение $f(x)g(x)$.

При этом первообразная $\Phi(\eta) = -\cos\eta$ функции $f(x) = \sin x$ ограничена на полуоси $\eta > 0$.

Функция $g(x) = (x + \cos x)^{-\alpha}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ и $g'(x) \leqslant 0$ при $\alpha > 0$ и $x > 1$.

В соответствии с принципом Дирихле интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Сходится ли интеграл абсолютно? Имеем эквивалентность

$$\left|\frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\right| \sim \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Согласно лемме о сходимости, исходный интеграл сходится абсолютно тогда и только тогда когда

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\,dx < +\infty.$$

Последний интеграл, как уже было доказано, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Таким образом, исходный интеграл сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$. Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то сходимость условная, при $\alpha > 1$ сходимость абсолютная. $\square$

Приведем без доказательства формулировку еще одного именного признака сходимости несобственного интеграла.

**Теорема** (признак Абеля). *Пусть функция* $g(x)$ *монотонна и ограничена при* $x > a$, *а функция* $f(x)$ *интегрируема на любом отрезке* $[a, \eta]$, *причем интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится. Тогда интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *также сходится.*

Эквивалентная формулировка признака сходимости Абеля:

*если интеграл от* $a$ *до* $+\infty$ *сходится, то подынтегральную функцию можно умножить на ограниченную и монотонную функцию и интеграл от такого произведения, взятый от* $a$ *до* $+\infty$, *также будет сходящимся*.

# Тема : Числовые ряды

$\mathbf{1^0}$. Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сумма ряда. $\mathbf{2^0}$. Необходимое условие сходимости ряда. $\mathbf{3^0}$. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда. $\mathbf{4^0}$. Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости, признак сравнения, теорема о совместной сходимости. Примеры. Гармонический ряд. Эйлерова постоянная. $\mathbf{5^0}$. Признак сходимости Коши. Следствие: признак Коши в предельной форме. Примеры. Признак сходимости Даламбера. Следствие: признак Даламбера в предельной форме. Примеры. $\mathbf{6^0}$. Интегральный признак сходимости монотонно убывающей числовой последовательности. Пример. $\mathbf{7^0}$. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

$1^0$. С помощью операции предельного перехода понятие суммы нескольких конечных чисел обобщается на случай счетного, т.е. бесконечного, числа слагаемых. Сформулируем основные определения.

**Определение.** *Для любой заданной последовательности комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *выражения вида*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k \qquad \text{(S)}$$

*называются числовыми рядами.* При этом $z_n$ *называется общим членом ряда, а сумма*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{S$'$}$$

*называется частичной суммой ряда.*

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_k = z_{n+k}$, называется $n$-м *остатком ряда* (S) и обозначается как следующая бесконечная сумма:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_k + \ldots.$$

**Определение.** *Числовой ряд* (S) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел:*

$$\exists\, s_\infty : \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty, \qquad\qquad |s_\infty| < +\infty.$$

Если же предел последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда $(\mathrm{S})$ не существует или равен $\pm\infty$, то ряд называется *расходящимся*.

**Определение.** *Если числовой ряд* $(\mathrm{S})$ *сходится, то предел последовательности его частичных сумм называется суммой ряда:*

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Заметим, что произвольная числовая последовательность $\{z_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots.$$

Частичная сумма с номером $n$ указанного ряда совпадает с элементом $z_n$ исходной последовательности.

Таким образом, задача исследования ряда на сходимость эквивалентна задаче исследования на сходимость некоторой числовой последовательности.

Иными словами, теория числовых рядов представляет собой специальный раздел теории числовых последовательностей.

Отметим, что ряды во многих случаях оказываются более удобными для разного рода аналитических операций как при доказательстве существования пределов, так и при вычислении этих пределов.

**Пример.** *Найти сумму ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

*Решение*. Имеем равенство

$$z_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Поэтому частичная сумма ряда представима в виде

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, находим сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

$\square$

**Пример.** *Выяснить, сходится ли ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

*Решение.* Оценим частичную сумму $s_n$ ряда сверху:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + (1 - \frac{1}{n}), \qquad n \geqslant 2.$$

Таким образом, монотонная последовательность частичных сумм $s_n$ удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{0 \leqslant s_n < 2, \qquad \forall\, n = 1, 2, \ldots.}$$

По теореме Вейерштрасса, монотонно возрастающая и ограниченная последовательность $s_n$ обязана иметь некоторый конечный предел, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. $\square$

**Пример.** *Выяснить, сходится ли ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

*Решение.* Оценим частичную сумму $s_n$ ряда снизу:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, видим, что $s_n$ стремится к бесконечности, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится. $\square$

$2^0$. Сформулируем необходимое условие сходимости числового ряда.

**Теорема.** *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится, то имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0. \tag{NC}$$

*Доказательство.* Представим общий член $z_n$ исходного ряда в следующем виде:

$$z_n = s_n - s_{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

По условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, т.е. существует предел

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Переходя в равенстве $z_n = s_n - s_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, получим в результате искомое необходимое условие $(\mathbf{NC})$. $\square$

Заметим, что условие $(\mathbf{NC})$ является необходимым следствием сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, но не обеспечивает этой сходимости, т.е. не является достаточным.

Подтверждающий это замечание пример дает ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, который, как это уже установлено, расходится и при этом

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

**Пример.** *Найти сумму ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

*где* $q$ *— комплексное число.*

*Решение.* Имеем равенство $z_k = q^k$. Пусть

$q \neq 1$, тогда для частичной суммы ряда справедливо представление

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

При $|q| < 1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

т.е. ряд сходится.

Если $q = 1$, то $s_n = n$ и, следовательно, ряд расходится.

При $|q| > 1$ ряд расходится: в этом сдучае не выполнено необходимое условие $(\mathbf{NC})$ его сходимости.

Отметим еще, что при $q = -1$ справедливы равенства $s_{2n} = 0$ и $s_{2n+1} = 1$ и поэтому предела последовательности $s_n$ частичных сумм не существует. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ вообще не имеет суммы (ни конечной, ни бесконечной). $\square$

Пусть последовательность частичных сумм $s_n$ ряда является стационарной, т.е. существует номер $N$, начиная с которого все суммы $s_n$ совпадают друг с другом:

$$s_{n+1} = s_n, \qquad n = N, N+1, \ldots.$$

Тогда $z_n = s_n - s_{n-1} = 0$ при $n = N+1,\, N+2,\, \ldots$ и сумма ряда превращается в обычную сумму конечного числа слагаемых.

$3^0$. Сформулируем некоторые свойства сходящихся рядов, вытекающие из уже известных вам свойств сходящихся последовательностей.

**Теорема** (об остатках). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится, то и любой его остаток* $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ *также сходится. Если некоторый остаток* $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ *ряда сходится, то и сам ряд также сходится.*

*Доказательство.* Для любых номеров $n$ и $p$,

$n > p$, имеет место равенство

$$\sum_{k=p+1}^{n} z_k = s_n - s_p.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится к сумме $S$.

Тогда существует предел последовательности $s_n - s_p$ при $n \to \infty$, и этот предел равен

$S - s_p$. Следовательно, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p+1}^{n} z_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = S - s_p,$$

т.е. остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k$ сходится.

Обратно, пусть какой-нибудь остаток $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ сходится и его сумма равна $r_p$. Тогда при

$n > p$ имеет место равенство

$$s_n = s_p + \sum_{k=p+1}^{n} z_k.$$

Предел выражения справа при $n \to \infty$ существует и равен $s_p + r_p$. Следовательно, существует и предел последовательности слева, равный той же величине $s_p + r_p$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится. $\square$

**Теорема.** *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ *сходятся, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k + w_k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(z_k - w_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C z_k,$$

*где* $C$ *— комплексное число, также сходятся и при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k \pm w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \; \sum_{k=1}^{\infty} C z_k = C \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Утверждения теоремы следуют из соответствующих теорем о пределах, примененных к последовательностям частичных сумм соответствующих рядов. Иная формулировка той же теоремы: *сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, получая при этом также сходящиеся ряды. Общий для всех членов ряда сомножитель можно вынести за знак суммы ряда.*

**Теорема** (критерий Коши). *Числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

*сходится тогда и только тогда когда выполняется следующее условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon : \forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon. \quad \text{(CC)}$$

*Доказательство.* Условие (CC) совпадает с условием Коши для последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, как это следует из равенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k = s_{n+p} - s_n.$$

Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно критерию Коши для сходящейся числовой последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм рассматриваемого ряда. $\square$

$4^0$. Отдельное место в теории рядов занимают числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными неотрицательными членами, $a_k \geqslant 0$.

Последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм для любого такого ряда является монотонно возрастающей.

По этой причине у этой последовательности всегда имеется предел, причем этот предел конечен тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ограничена. В противном случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится и его сумма равна $+\infty$.

Таким образом, получаем следующий *критерий сходимости*: ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

**Теорема** (признак сравнения). *Пусть* $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ *при любом натуральном* $n$ *и* $a_n = O(b_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *также сходится.*

*Если же ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *также расходится.*

Докажите этот признак сравнения в качестве упражнения.

**Следствие.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *и* $b_n \geqslant 0$ *для всех натуральных* $n$, *причем последовательности* $a_n$ *и* $b_n$ *одного порядка при* $n \to \infty$.

*Тогда ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Из условий следствия имеем $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$ при $n \to \infty$. Применяя предыдущую теорему, получаем требуемое утверждение.

**Теорема** (о совместной сходимости). *Пусть при любом натуральном $n$ справедливы неравенства $a_n > 0$, $b_n > 0$, и при этом существует такое натуральное число $M$, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \forall\, n \geqslant M.$$

*Тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$*, а из расходимости* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует расходимость* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$*.*

*Доказательство.* В условиях теоремы имеем следующие неравенства:

$$0 < \frac{a_{M+1}}{a_M} \leqslant \frac{b_{M+1}}{b_M}, \quad \ldots, \quad 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

где $n > M$. Перемножая их, получаем при всех $n > M$ следующее соотношение

$$\frac{a_n}{a_M} \leqslant \frac{b_n}{b_M} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leqslant \left(\frac{a_M}{b_M}\right) b_n.$$

Таким образом, $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$.

По предыдущей теореме имеем требуемое.

$\square$

**Пример.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^2},$$

*где $x$ — вещественное число.*

*Решение.* Справедливы оценки

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 kx}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2},$$

и при этом $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$

По признаку сходимости, рассматриваемый ряд сходится. $\square$

**Пример.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

*Решение.* Для частичной суммы ряда имеет место равенство

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1).$$

Таким образом, $s_n$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$, т.е. ряд расходится. $\square$

**Пример.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

*Решение.* Согласно формуле Тейлора имеем

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Следовательно, $a_k = f(k) \sim \dfrac{1}{2k^2}$ при $k \to \infty$, при этом ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

В соответствии со следствием из признака сходимости ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. $\square$

Заметим, что для частичной суммы $s_n$ ряда из предыдущего примера справедливо следующее представление

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Как уже установлено, существует предел $s_n$ при $n \to \infty$, т.е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Поэтому имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, для частичной суммы гармонического ряда справедлива эквивалентность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n + C \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Константа $C$ из этого асимптотического равенства называется *эйлеровой постоянной* и для нее справедливо представление

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] \approx 0.577.$$