По предположению о гладкости $y(x)$ функция $\Delta(x)$ имеет конечный интеграл
$$\int_0^h (\Delta'')^2 dx = \int_0^h (y'')^2 dx < \infty,$$
также выполнены равенства $\Delta(0) = \Delta(h) = 0$, поэтому справедливо представление $\Delta(x)$ в виде ряда Фурье
$$\Delta(x) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \sin \frac{\pi l x}{h}\,.$$
В результате непосредственных вычислений имеем
$$\int_0^h [\Delta'(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\pi l}{h}\right)^2 d_l^2, \quad \int_0^h [\Delta''(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\pi l}{h}\right)^4 d_l^2.$$
Так как $l \geqslant 1$, то справедливо неравенство
$$\left(\frac{\pi l}{h}\right)^2 d_l^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi l}{h}\right)^4 d_l^2\,,$$
поэтому, суммируя по l, получаем
$$\int_0^h [\Delta'(x)]^2 dx \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h [\Delta''(x)]^2 dx = \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h [y'']^2 dx\,.$$
Последнее неравенство справедливо на каждом отрезке длины h, потому суммирование по всем i дает
$$\|y' - y_I'\|^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|y''\|^2.$$
Аналогично получаем
$$\int_0^h [\Delta(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty} d_l^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \|y''\|^2\,, \text{т. е.}\ \|y - y_I\| \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|y''\|. \qquad \triangleright$$

7.3. Методы прогонки и стрельбы. Метод Фурье

Рассмотрим эффективные методы решения разностных уравнений, основанные на специальных свойствах оператора задачи.

Метод прогонки. Пусть требуется найти решение системы уравнений:
$$\begin{aligned} c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0\,, & i &= 0\,,\\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} &= f_i\,, & 1 &\leqslant i \leqslant N-1\,,\\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N\,, & i &= N\,, \end{aligned} \tag{7.5}$$
или в векторном виде
$$A\,\mathbf{y} = \mathbf{f}\,,$$

где $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_N)^T$ — вектор неизвестных, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N)^T$ — заданный вектор правых частей, A — квадратная матрица размерности $(N+1) \times (N+1)$

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix}$$

Основная идея метода состоит в представлении решения в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\,, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 0\,, \tag{7.6}$$

для которого значения α_i, β_i и y_N вычисляются по коэффициентам исходной системы и правой части. Перепишем первое из уравнений (7.5) в виде (7.6). Имеем

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1\,, \quad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}\,, \;\; \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}\,.$$

Затем к полученному соотношению добавим уравнение из (7.5) при $i = 1$:

$$\begin{gathered} y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1\,, \\ -a_1 y_0 + c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1\,. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Исключим из этой системы переменную y_0

$$(c_1 - a_1\alpha_1) y_1 - b_1 y_2 = f_1 + a_1\beta_1$$

и перепишем полученное соотношение в виде (7.6)

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2\,, \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1}\,, \;\; \beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1}\,.$$

Следующий шаг аналогичен предыдущему: возьмем последнее соотношение и добавим к нему уравнение из (7.5) при $i = 2$

$$\begin{gathered} y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2\,, \\ -a_2 y_1 + c_2 y_2 - b_2 y_3 = f_2\,. \end{gathered}$$

Отличие этой пары уравнений от (7.7) состоит только в увеличении индексов на единицу, поэтому сразу можно написать результат шага

$$y_2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3\,, \quad \alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2\alpha_2}\,, \;\; \beta_3 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{c_2 - a_2\alpha_2}\,.$$

Таким образом, добавляя каждый раз к последнему полученному соотношению вида (7.6) следующее уравнение из системы (7.5), найдем формулы для вычисления α_i, β_i

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,.$$

Этот процесс закончится, когда мы придем к последнему уравнению системы (7.5), содержащему только два значения неизвестных:

$$\begin{gathered} y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N\,, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N\,. \end{gathered}$$

Исключая из этой системы y_{N-1}, получаем

$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}\ ,$$

что формально соответствует β_{N+1}.

Полученные соотношения называют *формулами правой прогонки.* Сформулируем алгоритм решения системы (7.5). Рекуррентно вычислить прогоночные коэффициенты α_i, β_i:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}\,, \quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}\ , \\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}\,, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}\ , \end{gathered}$$

где i последовательно принимает значения $1, 2, \ldots, N-1$. Эту часть алгоритма называют *прямым ходом* прогонки.

Вычислить y_N:

$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}\ .$$

Рекуррентно определить остальные компоненты вектора неизвестных

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\,, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 0\,.$$

Эту часть алгоритма называют *обратным ходом* прогонки. Данный метод является реализацией метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами.

Сформулируем достаточные условия корректности и устойчивости алгоритма.

Теорема. *Пусть коэффициенты системы* (7.5) *действительные и удовлетворяют условиям:* c_0, c_N, a_i, b_i *при* $i = 1, 2, \ldots, N-1$ *отличны от нуля и*

$$\begin{gathered} |c_i| \geqslant |a_i| + |b_i|\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ |c_0| \geqslant |b_0|\,, \quad |c_N| \geqslant |a_N|\,, \end{gathered}$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим. Тогда для формул метода прогонки справедливы следующие неравенства:

$$c_i - a_i\alpha_i \neq 0\,, \quad |\alpha_i| \leqslant 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

гарантирующие корректность и устойчивость метода.

7.27. Для решения системы (7.5) вывести формулы метода прогонки, в которых последующие компоненты вектора неизвестных вычисляются через предыдущие:

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}\,,$$

а прогоночные коэффициенты — наоборот:

$$\xi_i = \varphi(\xi_{i+1}; A)\,, \quad \eta_i = \psi(\eta_{i+1}, \xi_{i+1}; A)\,.$$

Такие соотношения называют *формулами левой прогонки.*

Ответ:
$$\xi_N = \frac{a_N}{c_N}\,, \qquad \xi_i = \frac{a_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}}\,, \qquad i = N-1, N-2, \ldots, 1\,,$$
$$\eta_N = \frac{f_N}{c_N}\,, \qquad \eta_i = \frac{f_i + b_i\eta_{i+1}}{c_i - b_i\xi_{i+1}}\,, \qquad i = N-1, N-2, \ldots, 0\,,$$
$$y_0 = \eta_0\,, \qquad y_{i+1} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1\,.$$

7.28. Для случая коэффициентов системы (7.5)

$$a_N = b_0 = 0\,, \quad a_i = b_i = 1\,, \quad c_i = c\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1\,,$$

комбинируя алгоритмы правой и левой прогонок, записать формулы для нахождения величины y_M, где $M = \dfrac{N+1}{2}$, N — нечетное.

Ответ: один из возможных вариантов имеет следующий вид:

$$\alpha_1 = 0\,, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{1}{c - \alpha_i}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, M-1\,,$$
$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}\,, \quad \beta_{i+1} = (f_i + \beta_i)\alpha_{i+1}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, M-1\,,$$
$$\xi_{N-i+1} = \alpha_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, M\,,$$
$$\eta_N = \frac{f_N}{c_N}\,, \quad \eta_i = (f_i + \eta_{i+1})\alpha_{N-i+1}\,, \quad i = N-1, N-2, \ldots, M\,,$$
$$y_M = \frac{\eta_M + \alpha_M\beta_M}{1 - \alpha_M^2}\,.$$

7.29. Можно ли применить метод прогонки, если коэффициенты системы (7.5) имеют вид $c_N = c_0 = 1\,, c_i = 2\,, i = 1, 2, \ldots, N-1\,,$ $a_i = 1\,,\; i = 1, 2, \ldots, N\,, b_i = 1\,,\; i = 0, 1, \ldots, N-1\,.$

Ответ: нельзя, знаменатель в формуле для y_N обращается в нуль. Система является вырожденной, так как $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ при $y_i \equiv 1$.

7.30. Записать формулы для решения системы

$$-a_0y_{N-1} + c_0y_0 - b_0y_1 = f_0\,, \quad i = 0\,,$$
$$-a_iy_{i-1} + c_iy_i - b_iy_{i+1} = f_i\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1\,,$$
$$y_N = y_0\,.$$

Указание. Решение y_i представить в виде линейной комбинации сеточных функций u_i и v_i

$$y_i = u_i + y_0v_i\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant N\,,$$

где u_i — решение неоднородной задачи

$$-a_iu_{i-1} + c_iu_i - b_iu_{i+1} = f_i\,,\; 1 \leqslant i \leqslant N-1\,, \quad u_N = u_0\,;$$

v_i — решение однородной задачи

$$-a_iv_{i-1} + c_iv_i - b_iv_{i+1} = 0\,,\; 1 \leqslant i \leqslant N-1\,, \quad v_N = v_0 = 1\,.$$

Ответ: $\alpha_2 = \dfrac{b_1}{c_1}\,, \qquad \beta_2 = \dfrac{f_1}{c_1}\,, \qquad \gamma_2 = \dfrac{a_1}{c_1}\,,$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,, \quad \gamma_{i+1} = \frac{a_i\gamma_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,,$$

где $i = 2, 3, \ldots, N$;

$$u_{N-1} = \beta_N\,, \qquad v_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N\,,$$
$$u_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}\,, \qquad v_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \gamma_{i+1}\,,$$

где $i = N-2, N-3, \ldots, 1$;

$$y_0 = \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1}u_1}{1 - \gamma_{N+1} - \alpha_{N+1}v_1}\,, \quad y_i = u_i + y_0 v_i\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N\,.$$

Данные соотношения называют *формулами циклической прогонки.*

7.31. Записать формулы пятиточечной прогонки для решения системы

$$\begin{array}{ll}
c_0y_0 - d_0y_1 + e_0y_2 = f_0\,, & i = 0\,,\\
-\,b_1y_0 + c_1y_1 - d_1y_2 + e_1y_3 = f_1\,, & i = 1\,,\\
a_iy_{i-2} - b_iy_{i-1} + c_iy_i - d_iy_{i+1} + e_iy_{i+2} = f_i\,, & 2 \leqslant i \leqslant N-2\,,\\
a_{N-1}y_{N-3} - b_{N-1}y_{N-2} + c_{N-1}y_{N-1} - d_{N-1}y_N = f_{N-1}\,, & i = N-1\,,\\
a_Ny_{N-2} - b_Ny_{N-1} + c_Ny_N = f_N\,, & i = N\,.
\end{array}$$

Указание. Решение y_i следует искать в виде

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} - \beta_{i+1}y_{i+2} + \gamma_{i+1}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant N-2\,,$$
$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \gamma_N\,.$$

Ответ: формулы для прогоночных коэффициентов имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{d_0}{c_0}\,, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\Delta_1}\,(d_1 - \beta_1 b_1)\,,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\Delta_i}\,[d_i + \beta_i(a_i\alpha_{i-1} - b_i)]\,, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1\,;$$

$$\gamma_1 = \frac{f_0}{c_0}\,, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\Delta_1}\,(f_1 + \gamma_1 b_1)\,,$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{1}{\Delta_i}\,[f_i - a_i\gamma_{i-1} - \gamma_i(a_i\alpha_{i-1} - b_i)]\,, \quad i = 2, 3, \ldots, N\,;$$

$$\beta_1 = \frac{e_0}{c_0}\,, \quad \beta_{i+1} = \frac{e_i}{\Delta_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2\,,$$

где $\Delta_1 = c_1 - \alpha_1 b_1$, $\Delta_i = c_i - a_i\beta_{i-1} + \alpha_i(a_i\alpha_{i-1} - b_i)$, $2 \leqslant i \leqslant N$.

Формулы для решения таковы:

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} - \beta_{i+1}y_{i+2} + \gamma_{i+1}\,, \quad i = N-2, N-3, \ldots, 0\,,$$
$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \gamma_N\,, \quad y_N = \gamma_{N+1}\,.$$

Приведенный алгоритм является реализацией метода Гаусса решения систем с пятидиагональными матрицами.

Метод стрельбы. Идею этого подхода наиболее просто изложить в терминах дифференциальных уравнений. Пусть требуется решить краевую задачу

$$u'' - p(x)\, u = f(x)\,, 0 < x < 1\,, u(0) = a\,, u(1) = b\,.$$

Построим частное решение $u_1(x)$ неоднородного уравнения

$$u_1'' - p(x)\, u_1 = f(x)\,,$$

удовлетворяющее условию $u_1(0) = a$, и какое-либо нетривиальное частное решение $u_2(x) \neq 0$ однородного уравнения

$$u_2'' - p(x)\, u_2 = 0\,,$$

удовлетворяющее условию $u_2(0) = 0$. Решение исходной задачи будем искать в следующем виде:

$$u(x) = u_1(x) + C\, u_2(x),$$

где постоянная C определяется из условия

$$u_1(1) + C\, u_2(1) = b\,.$$

Применим близкую идею к решению системы (7.5). Будем искать решение y_i в виде

$$y_i = \delta\, u_i + (1 - \delta)\, v_i\,,$$

где δ — параметр, подлежащий определению, а сеточные функции u_i и v_i удовлетворяют уравнениям

$$c_0 u_0 - b_0 u_1 = f_0\,, c_0 v_0 - b_0 v_1 = f_0 \quad \text{при } i = 0\,,$$

$$-a_i u_{i-1} + c_i u_i - b_i u_{i+1} = f_i\,, -a_i v_{i-1} + c_i v_i - b_i v_{i+1} = f_i \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant N - 1.$$

К этим системам для однозначного определения u_i и v_i необходимо добавить при $b_0 \neq 0$ начальные условия u_0 и v_0 $(u_0 \neq v_0)$. Если $b_0 = 0$, то добавляют значения u_1 и v_1 $(u_1 \neq v_1)$. Теперь можно последовательно определить $u_2, u_3, \ldots, u_N$ и $v_2, v_3, \ldots, v_N$. Неизвестный параметр δ найдем из уравнения

$$-a_N(\delta\, u_{N-1} + (1 - \delta)\, v_{N-1}) + c_N(\delta\, u_N + (1 - \delta)\, v_N) = f_N\,,$$

т. е.

$$\delta = \frac{f_N + a_N v_{N-1} - c_N v_N}{a_N(v_{N-1} - u_{N-1}) + c_N(u_N - v_N)}\,.$$

Метод стрельбы — хорошее дополнение к методу прогонки: области их корректности и устойчивости практически не пересекаются.

7.32. Для случая постоянных коэффициентов системы (7.5): $c_0 = 1$, $b_0 = 0$, $f_0 = 3$, $a_i = 1$, $c_i = \frac{26}{5}$, $b_i = 1$, $f_i = 0$, $a_N = 0$, $c_N = 1$, $f_N = 4$, найти решение методом стрельбы и проанализировать его устойчивость.

$\triangleleft$ Рассмотрим вспомогательные функции u_i и v_i. Из исходной системы имеем $u_0 = 3$. Так как $b_0 = 0$, положим $u_1 = \varphi$. Далее находим

$$u_{i+1} = \frac{26}{5}\, u_i - u_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1\,.$$

Это решение можно представить в виде

$$u_i = \frac{5\,\varphi - 3}{24}\;5^i + \frac{75 - 5\,\varphi}{24}\;5^{-i}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N\,.$$

Аналогично, полагая $v_1 = \psi$, приходим к формуле

$$v_i = \frac{5\,\psi - 3}{24}\;5^i + \frac{75 - 5\,\psi}{24}\;5^{-i}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N\,.$$

Используя вычисленные u_N и v_N, определим δ из уравнения

$$\delta\, u_N + (1-\delta)\, v_N = 4\,;$$

подставляя его значение в выражение $y_i = \delta\, u_i + (1-\delta)\, v_i$, получаем

$$y_i = 3\;\frac{5^{N-i} - 5^{i-N}}{5^N - 5^{-N}} + 4\;\frac{5^i - 5^{-i}}{5^N - 5^{-N}}\;.$$

В данном случае алгоритм является вычислительно неустойчивым. Действительно, $\max\limits_i |u_i|$ и $\max\limits_i |v_i|$ растут, как 5^N. Поэтому малым возмущениям значений $u_1 = \varphi$ и $v_1 = \psi$ соответствуют большие возмущения в u_N и v_N, следовательно, и в величине δ. Для исходной системы выполнены достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки, который и является здесь предпочтительным для нахождения y_i. $\triangleright$

7.33. Методом стрельбы найти решение системы

$$\begin{aligned} y_0 - y_1 &= 0\,, && i = 0\,,\\ y_{i-1} - y_i + y_{i+1} &= 0\,, && 1 \leqslant i \leqslant N-1\,,\\ y_N &= 1\,, && i = N\,. \end{aligned}$$

Проанализировать устойчивость и корректность метода.

$\triangleleft$ В исходной системе $b_0 \neq 0$, поэтому положим $y_0 = \varphi$. Далее находим

$$y_1 = y_0\,, \quad y_{i+1} = y_i - y_{i-1}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1\,.$$

Общая формула решения этой задачи Коши, зависящего от величины φ, имеет вид

$$y_i = \varphi\left[\cos\frac{i\,\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{i\,\pi}{3}\right]\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant N\,.$$

Для постоянной φ имеем уравнение

$$1 = y_N = \varphi\left[\cos\frac{N\,\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{N\,\pi}{3}\right]\,,$$

которое однозначно разрешимо при $N \neq -1 + 3\,k\,, k = 2, 3, \ldots$. Это ограничение для N является условием применимости (корректности) метода стрельбы. Сам алгоритм является вычислительно устойчивым, так как корни характеристического уравнения

$$\mu^2 - \mu + 1 = 0$$

комплексно сопряжены и по модулю равны единице, следовательно, не приводят к росту возмущений начальных данных. $\triangleright$

7.34. Для краевой задачи

$$-u'' + u = f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad u(0) + u'(0) = a\,, \quad u(1) + u'(1) = b\,,$$

построить трехточечную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2)$ и проанализировать устойчивость метода стрельбы для нахождения ее решения.

7.35. Для задачи

$$-u'' + u = f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad u(0) = a\,, \quad \int\limits_0^1 u(x)\,dx = b\,,$$

построить разностную схему и предложить метод нахождения ее решения.

Метод Фурье (базисных функций). Рассмотрим метод решения системы линейных уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$, при условии, что известны все собственные векторы и собственные значения матрицы A:

$$A\varphi^{(n)} = \lambda^{(n)}\varphi^{(n)},\ n = 1, ..., N,$$

и система $\{\varphi^{(n)}\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{R}^N$. Будем искать решение в виде $\mathbf{y} = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n\varphi^{(n)}$. Подставим данное разложение в исходную систему уравнений

$$A\left(\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n\lambda^{(n)}\varphi^{(n)} = \mathbf{f}.$$

Умножая последнее равенство скалярно на $\varphi^{(m)}$, $m = 1, \ldots, N$, и учитывая ортонормированность базиса, получим

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda^{(n)}c_n\varphi^{(n)}, \varphi^{(m)}\right) = (\mathbf{f}, \varphi^{(m)})\,,$$

т. е. $c_m\lambda^{(m)} = (\mathbf{f}, \varphi^{(m)})$. Отсюда находим коэффициенты $c_m = \dfrac{(\mathbf{f}, \varphi^{(m)})}{\lambda^{(m)}}$, $m = 1, \ldots, N$, и затем вычисляем вектор $\mathbf{y}$.

Проблема нахождения собственных векторов и собственных значений в общем случае значительно сложнее решения системы линейных уравнений, поэтому данный метод применяют для задач с известными собственными векторами и собственными значениями. Например, для решения задач, возникающих при аппроксимации уравнений в частных производных.

7.36. Найти методом Фурье решение задачи

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i,\ i = 1, ..., N-1,\ y_0 = y_N = 0,\ h = \frac{1}{N}.$$

Указание. В данном случае собственные векторы и собственные значения можно найти аналитически:

$$\varphi_i^{(n)} = \sqrt{2}\sin(\pi n i h), \quad \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h}{2}\right), \; n = 1, \ldots, N-1.$$

При этом $\varphi^{(n)}$ ортонормированы относительно стандартного скалярного произведения $(\varphi^{(n)}, \varphi^{(m)}) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} \varphi_i^{(n)} \varphi_i^{(m)} h$.

7.37. Найти методом Фурье решение задачи

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, ..., N-1, \; h = \frac{1}{N},$$

$$-\frac{2}{h^2}(y_1 - y_0) = f_0, \quad \frac{2}{h^2}(y_N - y_{N-1}) = f_N.$$

Указание. Собственные векторы и собственные значения имеют вид

$$\varphi_i^{(0)} = 1, \; \varphi_i^{(N)} = \cos(\pi N i h) = (-1)^i,$$

$$\varphi_i^{(n)} = \sqrt{2}\cos(\pi n i h), \; n = 1, \ldots N-1,$$

$$\lambda^{(0)} = 0, \; \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h}{2}\right), \; n = 1, \ldots N.$$

При этом $\varphi^{(n)}$ ортонормированы относительно следующего скалярного произведения:

$$(\varphi^{(n)}, \varphi^{(m)}) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i^{(n)} \varphi_i^{(m)} h + \frac{h}{2}\left(\varphi_0^{(n)}\varphi_0^{(m)} + \varphi_N^{(n)}\varphi_N^{(m)}\right).$$