Глава 8

Дифференциальные уравнения

В главе рассмотрено численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Общая теория разностных схем применена для построения дискретных аналогов дифференциальных задач с начальными или краевыми условиями. Конкретизированы понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости. Особое внимание уделено исследованию методов решения и оценкам погрешности.

8.1. Задача Коши

Конкретизируем в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{8.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{8.2}$$

общие понятия разностного метода. Пусть, для простоты, рассматривается равномерная сетка $x_k = x_0 + kh$, $k \geqslant 0$. Тогда *разностной схемой для задачи (8.1), (8.2)* называют семейство разностных уравнений

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{-i}y_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} b_{-i}f_{k-i}, \quad k = n, n+1, \ldots, \tag{8.3}$$

с известными начальными условиями $y_0 = y(x_0)$, $y_1, \ldots, y_{n-1}$, где a_{-i}, b_{-i} не зависят от h, $a_0 \neq 0$ и $f_{k-i} = f(x_{k-i}, y_{k-i})$.

Разностная задача (8.3) аппроксимирует на решении (8.1) дифференциальную на отрезке $[x_0, x_0 + X]$ с порядком p, если для функции погрешности

$$r_k^h = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{-i}y(x_{k-i}) - \sum_{i=0}^{n} b_{-i}f(x_{k-i}, y(x_{k-i}))$$

справедлива оценка $\|r^h\|_{F_h} \leqslant ch^p$ и выполнено условие нормировки $\lim\limits_{h\to 0} \| f_h \|_{F_h} = \| f \|_F$. Напомним, что постоянные c и p не зависят от шага h.

В общем случае задача (8.3) — нелинейная система, поэтому аппроксимацию левой и правой частей уравнения (8.1) нужно рассматривать отдельно. При оценке порядка аппроксимации разностной схемы следует также учитывать порядок, с которым начальные условия аппроксимируют значения точного решения задачи (8.1), (8.2) в соответствующих узлах сетки. Если рассматривается только уравнение (8.1) без начального условия (8.2), то под разностной схемой понимают систему (8.3), а ее начальные условия во внимание не принимают.

Рассмотрим характеристическое уравнение для левой части разностной схемы (фактически для аппроксимации уравнения $y' = 0$):

$$F(\mu) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_{-i}\mu^{n-i} = 0\,.$$

Схема называется *α-устойчивой*, если выполнено следующее условие: все корни характеристического уравнения принадлежат единичному кругу и на границе круга нет кратных корней. Это условие является необходимым. Можно показать, что для любой разностной схемы, не удовлетворяющей условию α-устойчивости, существует дифференциальное уравнение с бесконечно-дифференцируемой правой частью, для которого даже при отсутствии округлений и погрешностей в начальных данных, решение его разностного аналога не стремится к непрерывному решению при измельчении шага.

Если в задаче не приведен конкретный вид правой части, то устойчивость понимают в смысле α-устойчивости.

8.1. Показать, что необходимым и достаточным условием аппроксимации уравнения (8.1) разностными уравнениями (8.3) является выполнение равенств: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{-i} = 0,\ -\sum\limits_{i=0}^{n} ia_{-i} = 1,\ \sum\limits_{i=0}^{n} b_{-i} = 1\,.$

$\lhd$ Пусть $y(x)$ — произвольная гладкая функция. Тогда условия аппроксимации для левой и правой частей уравнения (8.1) означает справедливость соотношений в произвольном узле x_k, $k \geqslant n$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{-i}y_{k-i} = y'(x_k)\,,\ \lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n} b_{-i}f(x_{k-i}, y_{k-i}) = f(x_k, y_k).$$

Согласно формуле Тейлора,

$$y(x-ih) = y(x) - ihy'(x) + O(h^2),$$

$$f(x-ih, y(x-ih)) = f(x, y(x)) + O(h).$$

Подставляем эти выражения в условия аппроксимации, имеем

$$\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{-i}\right) y(x_k) - \left(\sum_{i=0}^{n} ia_{-i}\right) y'(x_k) + O(h)\right] = y'(x_k),$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} b_{-i}\right) f(x_k, y(x_k)) + O(h)\right] = f(x_k, y(x_k)),$$

откуда в силу произвольности функции $y(x)$ и следует необходимость и достаточность указанных в условии задачи равенств. $\rhd$

8.2. Проверить, аппроксимирует ли разностная схема уравнение (8.1):

1) $\frac{1}{h}(y_k - y_{k-1}) = f_{k-1}$; 2) $\frac{1}{h}(y_k - y_{k-1}) = \frac{1}{2}(f_k + f_{k-1})$;

3) $\frac{1}{h}(y_k - y_{k-1}) = \frac{1}{2}(3f_{k-1} - f_{k-2})$; 4) $\frac{1}{3h}(y_k - y_{k-3}) = f_{k-1}$;

5) $\frac{1}{8h}(y_k - 3y_{k-2} + 2y_{k-3}) = \frac{1}{2}(f_{k-1} + f_{k-2})$; 6) $\frac{1}{2h}(3y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}) = f_k$.

Указание. Использовать условия, сформулированные в 8.1.

Ответ: 1) да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да.

8.3. Для задачи $y'+y=x+1$, $y(0)=0$ рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+\frac{y_{k+1}+y_k}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)h+1, \quad y_0=0.$$

Каков порядок аппроксимации на решении данной схемы?

Ответ: второй.

8.4. Для задачи $y'+y=x+1$, $y(0)=0$ рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}+y_k=kh+1, \quad y_0=0, \quad y_1=0.$$

Каков порядок аппроксимации на решении данной схемы? Можно ли его улучшить?

Ответ: первый; можно, если положить $y_1 = h$, то порядок аппроксимации равен двум. В отличие от дифференциального случая для разностной задачи необходимы два начальных условия. Поэтому аппроксимация решения в точке $x=h$ — часть формальной аппроксимации дифференциального оператора L.

8.5. Пусть для решения задачи $y'+5y=5$, $y(0)=2$ построена следующая разностная схема:

$$\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}+5y_k=5, \quad y_0=2,\ y_1=2-5h.$$

Исследовать ее аппроксимацию и сходимость.

◁ Схема имеет второй порядок аппроксимации на решении. Проанализируем сходимость. Несложно показать, что точные решения дифференциальной и разностной задач имеют вид

$$y(x)=\mathrm{e}^{-5x}+1,$$

$$y_k=1+C_1\mu_1^k+C_2\mu_2^k, \quad \mu_{1,2}=-5h\pm\sqrt{1+25h^2},\ |\mu_1|<1,\ |\mu_2|>1.$$

Так как коэффициенты C_1, C_2 находятся из начальных условий y_0, y_1:

$$1+C_1+C_2=2, \quad 1+C_1\mu_1+C_2\mu_2=2-5h,$$

то имеем $C_1, C_2 \neq 0$. Следовательно, решение разностной задачи содержит растущую компоненту, и разностная схема на больших промежутках времени неверно отражает решение дифференциальной задачи, хотя схема α-устойчива и разностное решение сходится на любом конечном интервале к решению дифференциальной задачи. ▷

8.6. Для задачи

$$y'+a(x)y=f(x), \quad y(0)=c$$

рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+\left(\alpha_1 a(x_k)+\alpha_2 a(x_{k+1})\right)\left(\beta_1 y_k+\beta_2 y_{k+1}\right)=\gamma_1 f(x_k)+\gamma_2 f(x_{k+1}),$$

$$y_0=c.$$

Какими следует выбрать α_k, β_k и γ_k, чтобы получить второй порядок аппроксимации на решении?

Ответ: все коэффициенты равны $\frac{1}{2}$.

8.7. Построить для уравнения (8.1) разностную схему с наивысшим порядком аппроксимации p на решении

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}.$$

Указание. Использовать метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем, заменив f на y' и сдвинув (для удобства вычислений) индексы заменой $j = k-1$.

Ответ: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6}, a_0 = \frac{2}{3}, p = 4$.

8.8. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\theta \, \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta) \, \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k \quad \text{при} \quad \theta \in [0, 1].$$

Ответ: схема устойчива при $\theta = 0$ и $1 \geqslant \theta \geqslant \frac{1}{2}$.

8.9. При каких a, b и c схема

$$\frac{1}{h} \left(y_k + a y_{k-1} - a y_{k-3} - y_{k-4} \right) = b f_{k-1} + c f_{k-2} + b f_{k-3}$$

для уравнения $y' = f$ имеет максимальный порядок аппроксимации на решении? Выполнено ли условие α-устойчивости?

$\lhd$ Учитывая необходимые условия аппроксимации (см. 8.1), запишем систему для определения коэффициентов

$$2\,a + 4 = 1, \quad 2\,b + c = 1, \quad 8 + a = 3\,b,$$

или $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{13}{6}$, $c = -\frac{10}{3}$. При этом характеристическое уравнение имеет вид

$$(\mu^2 - 1) \left(\mu^2 - \frac{3}{2} \, \mu + 1 \right) = 0,$$

т. е. условие α-устойчивости выполнено.

Без учета нормировки $\lim\limits_{h \to 0} \| f_h \|_{F_h} = \| f \|_F$ можно прийти к неверному ответу: $a = 28, b = 12, c = 36$, для которого условие α-устойчивости не выполнено. $\rhd$

8.10. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} + l \psi_{k-1} = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad h = \frac{1}{N} \ ,$$

$$\frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h} - l \varphi_{k-1} = 0, \quad \psi_0 = b, \quad k = 1, \, \ldots \, , N,$$

к решению дифференциальной задачи

$$u' + lv = 0\,, \quad u(0) = a\,,$$
$$v' - lu = 0\,, \quad v(0) = b$$

на отрезке $x \in [0,1]$ при $l = \mathrm{const} \neq 0$, используя решения обеих задач.

$\lhd$ Запишем дифференциальную задачу в виде

$$\mathbf{y}' = -A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{d},$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{y} = \exp(-Ax)\,\mathbf{d}.$$

Так как $\lambda_{1,2}(A) = \pm\,\mathrm{i}\,l$, то, обозначив через X матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, получаем

$$\mathbf{y} = X \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix} X^{-1}\mathbf{d}.$$

Для нахождения решения разностной задачи представим ее в виде

$$\mathbf{y}_k^h = A_h \mathbf{y}_{k-1}^h, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mathbf{y}_0^h = \mathbf{d},$$

где

$$\mathbf{y}_k^h = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \quad A_h = I - hA = \begin{pmatrix} 1 & -hl \\ hl & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{y}_k^h = (A_h)^k\,\mathbf{y}_0^h$, то

$$\mathbf{y}_k^h = X \begin{pmatrix} (1 - \mathrm{i}lh)^k & 0 \\ 0 & (1 + \mathrm{i}lh)^k \end{pmatrix} X^{-1}\mathbf{d}\,.$$

При нахождении $(A_h)^k$ использовано совпадение собственных векторов матриц A_h и A и связь между их собственными числами

$$\lambda(A_h) = 1 - h\lambda(A)\,.$$

Можно показать, что $\exp(\pm\mathrm{i}lx_k) - (1 \pm \mathrm{i}lh)^k = O(h)$, и так как по условию $kh \leqslant 1$, то для $k = 1, 2, \ldots, N$ имеем $\|\mathbf{y}(x_k) - \mathbf{y}_k^h\|_\infty = O(h)$. Вводя в пространстве $\mathbf{Y}_h$ норму

$$\|\mathbf{y}_h\|_{\mathbf{Y}_h} = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} (\|\mathbf{y}_k^h\|_\infty),$$

приходим к следующей оценке сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи

$$\|(\mathbf{y})_h - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{Y}_h} = O(h).$$

Таким образом, схема имеет первый порядок сходимости. $\rhd$

8.11. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотрим схему

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad k \geqslant 0\,.$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

◁ Для разностной задачи имеем

$$y_N = (1+h)y_{N-1} = (1+h)^N y_0 = (1+h)^N,$$

а точное решение дифференциальной задачи при $x = x_N$ равно $y(x_N) = \exp(x_N)$. Пусть $x_N = N\,h = 1$, тогда

$$y(x_N) - y_N = \mathrm{e} - (1+h)^{1/h} = \mathrm{e} - \exp\left[\frac{1}{h}\ln(1+h)\right] =$$
$$= \mathrm{e}\left(1 - \exp\left[-\frac{h}{2} + O(h^2)\right]\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}\,h + O(h^2). \qquad ▷$$

Ответ: $c_1 = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

8.12. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотрим схему

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2}, \quad y_0 = 1, \quad k \geqslant 0.$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

Ответ: $c_1 = 0$.

8.13. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотрим схему

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \mathrm{e}^h, \quad k \geqslant 1.$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

Указание. Вывести формулу

$$y_k = y_0\left[\frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\,\mu_1^k - \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\,\mu_2^k\right] + y_1\left[-\frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\,\mu_1^k + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\,\mu_2^k\right],$$

где $\mu_{1,2}$ — корни уравнения $\mu^2 + 2h\mu - 1 = 0$:

$$\mu_1 = -h + \sqrt{1+h^2} = 1 - h + \frac{h^2}{2} + O(h^4),\ \mu_2 = -\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + O(h^4).$$

Ответ: $c_1 = 0$.

8.14. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотрим схему

$$4\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 3\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \mathrm{e}^h, \quad k \geqslant 1.$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянные c_1 и c_2 для $x_N = Nh = 1$.

Ответ: эта схема неустойчива, сходимости нет.

8.15. Для задачи $y' + y = \cos 2x$, $y(0) = 0$, построить трехточечную разностную схему второго порядка сходимости.

Ответ: например,

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = \cos(2hk), \quad y_0 = 0, \quad y_1 = h, \quad k \geqslant 1.$$

8.16. Для задачи $y' + 5y = \sin 2x$, $y(0) = 2$, построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.

Ответ: например,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\,\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = \frac{\sin(2h(k+1)) + \sin(2hk)}{2}\,, \quad y_0 = 2, \quad k \geqslant 0.$$

8.17. Для задачи $y' - y = \exp 2x$, $y(0) = 1$, построить трехточечную разностную схему второго порядка сходимости.

Ответ: например,

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - y_k = \exp(2hk), \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + 2h, \quad k \geqslant 1.$$

8.18. Для задачи $y' - 2y = \exp x$, $y(0) = 1$, построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.

Ответ: например,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - (y_{k+1} + y_k) = \frac{\exp(h(k+1)) + \exp(hk)}{2}\,, \quad y_0 = 1, \quad k \geqslant 0.$$

8.19. Привести пример неустойчивой разностной схемы, аппроксимирующей уравнение $y' = f(x, y)$ строго: 1) с первым порядком; 2) со вторым порядком; 3) с третьим порядком.

Указание. Например, можно взять заведомо α-неустойчивую схему

$$4\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 3\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = c\,f_{k-1} + d\,f_k + e\,f_{k+1}$$

и методом неопределенных коэффициентов получить заданный порядок аппроксимации.

8.20. Найти главный член погрешности аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = \frac{f_k + 4f_{k-1} + f_{k-2}}{6}\,.$$

Ответ: $-\dfrac{h^4}{180}\,y^{(5)}(\xi)$, схема α-устойчива.

8.21. Найти главный член погрешности аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{5\,f_k + 8\,f_{k+1} - f_{k+2}}{12}\,.$$

Ответ: $\dfrac{h^3}{24}\,y^{(4)}(\xi)$, схема α-устойчива.

8.22. Найти главный член погрешности аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_{k+4} - y_k}{4h} = \frac{2\,f_{k+1} - f_{k+2} + 2\,f_{k+3}}{3}\,.$$

Ответ: $\dfrac{7\,h^4}{90}\,y^{(5)}(\xi)$, схема α-устойчива.

8.23. Найти главный член погрешности аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\frac{y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2}}{6h} = \frac{2f_{k-1} + f_{k-2}}{3}\,.$$

Методы Рунге—Кутты и Адамса. Один из наиболее популярных подходов к решению задачи Коши для уравнений первого порядка $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ заключается в следующем. Зафиксируем некоторые числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $p_1, \ldots, p_q$, $\beta_{i,j}$, $0 < j < i \leqslant q$, и последовательно вычислим

$$k_1(h) = hf(x,\, y),$$
$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h,\, y + \beta_{2,1}k_1(h)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k_q(h) = hf(x + \alpha_q h,\, y + \beta_{q,1}k_1(h) + \cdots + \beta_{q,q-1}k_{q-1}(h)).$$

Расчетная формула имеет вид

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h).$$

Обозначим погрешность метода на шаге через $\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$. Если $f(x,\, y)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов, то справедлива формула Тейлора

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\, h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!}\, h^{s+1},$$

где $0 < \theta < 1$. Выберем параметры метода α_i, p_i, $\beta_{i,j}$ так, что $\varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(s)}(0) = 0$. Тогда величина s называется *порядком метода.*

8.24. Построить метод при $q = 1$ и записать формулу погрешности.

◁ Имеем

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x,\, y), \quad \varphi(0) = 0,$$
$$\varphi'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x,\, y))|_{h=0} = f(x,\, y)(1 - p_1),$$
$$\varphi''(h) = y''(x+h).$$

Равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для всех гладких функций $f(x,\, y)$ только в случае $p_1 = 1$. Для погрешности этого метода на шаге получаем выражение

$$\varphi(h) = \frac{y''(x+\theta h)h^2}{2}\,. \qquad \triangleright$$

8.25. Построить все методы при $q = 2$.

◁ Запишем расчетную формулу в виде

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x,\, y) - p_2 hf(\bar{x},\, \bar{y}),$$

где $\bar{x} = x + \alpha_2 h$, $\bar{y} = \beta_{21} h f(x, y)$. Вычислим производные функции $\varphi(h)$:

$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x,y) - p_2 f(\bar{x},\bar{y}) - p_2 h(\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)),$$
$$\varphi''(h) = y''(x+h) - 2p_2(\alpha_2 f_x(\bar{x},\bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)) - p_2 h(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) +$$
$$+ 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y) + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2),$$
$$\varphi'''(h) = y'''(x+h) - 3p_2(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)) +$$
$$+ \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2) + O(h).$$

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f, \quad y'' = f_x + f_y f, \quad y''' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y y''.$$

Подставим в выражения $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$, $\varphi'''(h)$ значение $h=0$; воспользовавшись этими соотношениями, получим

$$\begin{gathered}\varphi(0) = y - y = 0,\\ \varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f(x, y),\\ \varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2) f_x(x, y) + (1 - 2p_2\beta_{21}) f_y(x, y) f(x, y),\\ \varphi'''(0) = (1 - 3p_2\alpha_2^2) f_{xx}(x, y) + (2 - 6p_2\beta_{21}) f_{xy}(x, y) f(x, y) +\\ + (1 - 3p_2\beta_{21}^2) f_{yy}(x, y)(f(x, y))^2 + f_y(x, y) y''(x).\end{gathered} \tag{8.4}$$

Соотношение $\varphi'(0) = 0$ выполняется при всех $f(x, y)$, если

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \tag{8.5}$$

соотношение $\varphi''(0) = 0$ выполняется, если

$$1 - 2p_2\alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad 1 - 2p_2\beta_{21} = 0. \tag{8.6}$$

Таким образом, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ при всех $f(x, y)$, если выполнены три соотношения (8.5), (8.6) относительно четырех параметров. Задавая произвольно один из параметров, получим различные методы Рунге—Кутты с $s = 2$. Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ получаем $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$. При $p_1 = 0$ получаем $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$. В случае уравнения $y' = y$, согласно (8.4), имеем $\varphi'''(0) = y$ независимо от значений p_1, p_2, α_2, β_{21}. Отсюда следует, что нельзя построить формул Рунге—Кутты со значениями $q = 2$ и $s = 3$. ▷

8.26. Определить порядок метода s для следующей совокупности формул при $q = 3$:

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf(x + h, y - k_1 + 2k_2), \quad z(h) = y(x) + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}.$$

Ответ: $s = 3$.

8.27. Определить порядок метода s для следующей совокупности формул при $q = 4$:

$$k_1 = hf(x,\, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2},\, y + \frac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2},\, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x + h,\, y + k_3),$$
$$z(h) = y(x) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Ответ: $s = 4$.

8.28. Доказать, что погрешность метода на шаге $\varphi(h)$ имеет главный член, т. е. справедливо представление вида

$$\varphi(h) = \psi(x,\, y)h^{s+1} + O(h^{s+2}).$$

$\lhd$ Пусть в уравнении $y' = f$ функция $f(x, y)$ и все ее производные до порядка $s + 1$ включительно равномерно ограничены в области $G: \;\; x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \;\; -\infty < y < \infty$. Тогда также равномерно ограничены производные всех решений уравнения $y' = f$ до порядка $s+2$ включительно. В этом случае согласно формуле Тейлора представление погрешности можно записать в уточненной форме

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!}\, h^{s+1} + \frac{\varphi^{(s+2)}(\theta h)}{(s+2)!}\, h^{s+2}.$$

Отсюда имеем

$$\varphi^{(s+1)}(0) = y^{(s+1)}(0) - z^{(s+1)}(0).$$

Величины $y^{(s+1)}(0)$ и $z^{(s+1)}(0)$ явно выражаются через значения в точке $(x,\, y)$ функции f и ее производных порядка не выше s. Правая часть равенства дифференцируема $s+1$ раз, отсюда следует, что функция $\psi(x,\, y)$ дифференцируема в области G и ее производные ψ_x и ψ_y равномерно ограничены в этой области. Аналогично устанавливается, что величина $\varphi^{(s+2)}(\theta h)$ равномерно ограничена при $x_0 \leqslant x < x + h \leqslant x_0 + X$. Таким образом, искомое соотношение имеет место. $\rhd$

8.29. Найти главный член погрешности расчетной формулы

$$y^*_{j+1} = y_j + hf(x_j,\, y_j),$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\,(f(x_j,\, y_j) + f(x_{j+1},\, y^*_{j+1})).$$

Ответ: $(B - A)h^3$, где $B = \frac{f_y y''}{6}$, $A = \frac{f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}(y')^2}{12}$.

8.30. Найти главный член погрешности расчетной формулы

$$y_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2}\, f(x_j,\, y_j),$$
$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}\,,\, y_{j+1/2}\right).$$

Ответ: $\left(B + \frac{A}{2}\right) h^3$, где $B = \frac{f_y y''}{6}$, $A = \frac{f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}(y')^2}{12}$.

Формулы Адамса. *Явной формулой Адамса* для решения уравнения $y' = f(x, y)$ называют выражение

$$y_k - y_{k-1} = h \sum_{i=0}^{m} \gamma_i \nabla^i f_{k-1};$$

неявная формула Адамса имеет вид

$$y_k - y_{k-1} = h \sum_{i=0}^{m} \bar{\gamma}_i \nabla^i f_k,$$

где

$$\nabla^i f_k = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j f_{k-j},$$

а коэффициенты γ_i и $\bar{\gamma}_i$ определяются следующим образом:

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_0 = 1,$$

$$\gamma_i = \int_0^1 \prod_{k=1}^{i} \left(1 - \frac{u}{k}\right) du\,, \quad \bar{\gamma}_i = \gamma_i - \gamma_{i-1} = -\int_0^1 \frac{u}{i} \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{u}{k}\right) du\,,\ i \geqslant 1.$$

8.31. Вывести явные формулы Адамса p-го порядка точности для $p = 2, 3, 4$.

Ответ: $y_{j+1} = y_j + (3\,f_j - f_{j-1})\,\frac{h}{2}\,, \quad p = 2;$

$$y_{j+1} = y_j + (23\,f_j - 16\,f_{j-1} + 5\,f_{j-2})\,\frac{h}{12}\,, \quad p = 3;$$

$$y_{j+1} = y_j + (55\,f_j - 59\,f_{j-1} + 37\,f_{j-2} - 9\,f_{j-3})\,\frac{h}{24}\,, \quad p = 4.$$

8.32. Вывести неявные формулы Адамса p-го порядка точности для $p = 2, 3, 4$.

Ответ: $y_{j+1} = y_j + (f_{j+1} + f_j)\,\frac{h}{2}\,, \quad p = 2;$

$$y_{j+1} = y_j + (5\,f_{j+1} + 8\,f_j - f_{j-1})\,\frac{h}{12}\,, \quad p = 3;$$

$$y_{j+1} = y_j + (9\,f_{j+1} + 19\,f_j - 5\,f_{j-1} + f_{j-2})\,\frac{h}{24}\,, \quad p = 4.$$

8.33. Показать, что для коэффициентов γ_i в формулах Адамса при $i \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\gamma_i \approx \frac{\mathrm{const}}{\ln i}\,, \quad \bar{\gamma}_i \approx \frac{\mathrm{const}}{i \ln i}\,.$$

Уравнения второго порядка. Рассмотрим следующую задачу:

$$y'' = f(x, y, y')\,, \quad y(x_0) = a, \ \ y'(x_0) = b. \tag{8.7}$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(x) = y'(x)$, ее можно свести к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} v' &= f(x, y, v), \quad & v(x_0) &= b, \\ y' &= v, & y(x_0) &= a, \end{aligned}$$

а для ее решения применить рассмотренные выше методы.

Однако алгоритмы, ориентированные на специальный класс задач, часто более эффективны. Далее будем предполагать, что функция f не зависит от y':

$$f(x, y, y') \equiv f(x, y)\,.$$

В этом случае (по аналогии с задачей Коши для уравнения первого порядка) *разностной схемой на равномерной сетке* $x_k = x_0 + kh$, $k \geqslant 0$ называют семейство разностных уравнений

$$\frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{n} a_{-i} y_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} b_{-i} f_{k-i}\,, \quad k = n, n+1, \ldots\,. \tag{8.8}$$

с известными начальными условиями $y_0 = y(x_0)$, $y_1, \ldots, y_{n-1}$, где a_{-i}, b_{-i} не зависят от h, $a_0 \neq 0$ и $f_{k-i} = f(x_{k-i}, y_{k-i})$.

Схему для уравнения второго порядка называют *α-устойчивой*, если выполнено следующее условие: все корни характеристического уравнения принадлежат единичному кругу и на границе круга нет кратных корней, за исключением двукратного корня, равного единице.

8.34. Получить необходимые и достаточные условия аппроксимации уравнения (8.7) разностными уравнениями (8.8).

Ответ: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{-i} = 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n} i a_{-i} = 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 a_{-i} = 2$, $\sum\limits_{i=0}^{n} b_{-i} = 1$.

8.35. Определить порядок аппроксимации на решении разностной схемы Нумерова

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \frac{f_{k+1} + 10 f_k + f_{k-1}}{12}\,.$$

Ответ: главный член погрешности равен $\frac{h^4}{240}\, y^{(6)}(\xi), p = 4$.

8.36. Определить порядок аппроксимации на решении разностной схемы

$$\frac{y_{k+1} - y_k - y_{k-2} + y_{k-3}}{3\,h^2} = \frac{5\,f_k + 2\,f_{k-1} + 5\,f_{k-2}}{12}\,.$$

Ответ: главный член погрешности равен $\frac{17\,h^4}{720}\, y^{(6)}(\xi), p = 4$.

8.2. Краевая задача

Рассмотрим первую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$-(k(x)\,u')' + p(x)\,u = f(x)\,, 0 < x < 1\,, u(0) = u(1) = 0\,.$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1$, $0 \leqslant p(x) \leqslant p_1$. На любом из концов отрезка краевое условие может быть задано в виде линейной комбинации функции и производной $a\,u + b\,u' = c$. В этом случае следует обратить внимание на способ его аппроксимации. Если это не оговаривается специально, то в задачах параграфа сетка на отрезке $[0, 1]$ выбирается равномерной: $x_i = i\,h$, $i = 0, \ldots, N$, $N\,h = 1$.