Тема : Уравнения первого порядка неразрешенные относительно производной

$\mathbf{1^0}$. Уравнения, допускающие разложение на множители. $\mathbf{2^0}$. Метод параметризации. Пример. $\mathbf{3^0}$. Уравнения Лагранжа и Клеро.

3^0. Рассмотрим два конкретных класса неразрешенных относительно производной уравнений первого порядка, встречающих в приложениях.

Определение. *Уравнением Лагранжа называется следующее линейное относительно переменной x и функции y равенство*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

в котором $\varphi(\xi) \not\equiv \xi$ ни на каком интервале.

В этом уравнении переменная y явно выражена как функция переменных x и y', что соответствует первому из рассмотренных выше случаев.

Вводя параметры $u = x$ и $v = y'$, запишем соответствующее рассматриваемому случаю дифференциальное уравнение в дифференциалах du и dv:

$$[\varphi(v) - v]du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]dv = 0.$$

Предполагая, что $\varphi(v) - v \neq 0$, перейдем здесь к уравнению относительно производной $\frac{du}{dv}$:

$$\frac{du}{dv} + \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v) - v} u = -\frac{\psi'(v)}{\varphi(v) - v}.$$

Это уравнение является линейным относительно функции $u = u(v)$. Пусть его решение задается функцией $u = w(v, C)$.

Тогда *общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде* запишется следующим образом:

$$x = w(v, C), \qquad y = \varphi(v)w(v, C) + \psi(v).$$

Если функциональное уравнение

$$\varphi(v) - v = 0$$

имеет конечное или бесконечное (но счетное) семейство корней $v = v_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то функции

$$y = v_i x + \psi(v_i), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

также будут задавать решения уравнения Лагранжа.

Определение. *Если в уравнении Лагранжа* $\varphi(v) \equiv v$, *то оно принимает вид*

$$y = xy' + \psi(y')$$

и называется уравнением Клеро.

В параметрах u и v сопутствующее уравнению Клеро дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$[u+\psi'(v)]dv=0.$$

Это соотношение будет выполнено если

$$1).\ dv=0 \quad \text{или} \quad 2).\ u+\psi'(v)=0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение $v=C$, которому соответствует общее решение уравнения Клеро в виде семейство прямых:

$$y=Cx+\psi(C).$$

Второе же уравнение совместно с параметризацией исходного позволяет записать решение в параметрической форме

$$x = -\psi'(v), \quad y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Это *особое решение уравнения Клеро*. В каждой точке соответствующей ему интегральной кривой нарушается единственность решения задачи Коши.

Тема : Методы решения уравнений высокого порядка

$\mathbf{1^0}$. Общая постановка задачи. $\mathbf{2^0}$. Уравнения, не содержащие искомой функции и нескольких её последовательных производных. $\mathbf{3^0}$. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной. $\mathbf{4^0}$. Уравнения, однородные относительно переменных $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{\ldots}$, $\boldsymbol{y^{(n)}}$. $\mathbf{5^0}$. Уравнения, левая часть которых представляет собой точную производную.

1^0. Опишем некоторые методы, с помощью которых строится общее решение обыкновенного дифференциального уравнения заданного порядка n, $n \geqslant 2$.

Пусть уравнение записано в виде неразрешенном относительно старшей производной:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Неизвестная функция здесь $y = y(x)$.

Методы построения общего решения уравнений высокого порядка основаны на приёмах, позволяющих *свести их к тому или иному интегрируемому уравнению* — уравнению первого порядка одного из известных типов, описанных выше. В качестве целевых уравнений могут также выступать простейшие уравнения вида

$$y^{(k)} = f(x),$$

либо более общие линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = f(x),$$

или же иные уравнения, приемы интегрирования которых заведомо известны.

Суть приемов преобразования уравнений высокого порядка к более простому виду заключена в *последовательном понижении порядка уравнения*.

Опишем некоторые классы уравнений, для которых понижение порядка возможно, а также сами приемы, с помощью которых это делается.

$\mathbf{2^0}$. Рассмотрим *уравнения, не содержащие искомой функции и нескольких её последовательных производных*.

Этому признаку удовлетворяют уравнения следующего вида:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad \text{где} \quad 1 \leq k < n.$$

Порядок уравнения понижается на k единиц с помощью замены $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Для функции $z(x)$ имеем уравнение

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Если это уравнение удается решить, то в результате получится промежуточное уравнение простейшего вида

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

Последовательно интегрируя его несколько раз, получаем

$$y(x) = \int (\ldots (\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}) dx) \ldots) dx +$$

$$+ C_{n-k+1} x^{k-1} + C_{n-k+2} x^{k-2} + \ldots + C_n.$$

Это и есть итоговая формула общего решения, содержащая n произвольных постоянных.

3^0. Рассмотрим *уравнения, не содержащие явно независимой переменной*, то есть уравнения следующего вида:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Предположим, что в этом уравнении независимой переменной является y, а производные же y', y'', ..., $y^{(n)}$ являются при этом функциями от y. Тогда имеют место равенства

$$y' = z(y), \quad y'' = z'(y)z(y),$$

$$y''' = z''y'z + z'^2y' = z''z^2 + zz'^2,$$

и так далее, вплоть до производной наивысшего порядка n. Здесь штрихи у функции z означают взятие производных по переменной y, а у функции y — по переменной x.

После подстановки пересчитанных производных в рассматриваемое уравнение оно преобразуется в уравнение порядка $n-1$ относительно функции $z(y)$.

Решив это уравнение, сможем найти затем функцию $y(x)$ как решение уравнения первого порядка $y' = z(y)$. в котором переменные разделяются.

При выполнении описанных преобразований необходимо контролировать процесс обращения в нуль того или иного знаменателя: в результате могут появиться дополнительные решения.

4^0. Рассмотрим *уравнения, однородные по переменным* y, y', ..., $y^{(n)}$.

Определение. *Однородными называются уравнения вида*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

с функцией F *в левой части такой, что*

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

где величина λ *вещественна.*

С помощью замены $y' = yz$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция, порядок однородного уравнения понижается на единицу. Имеем

$$y' = yz, \quad y'' = yz' + y'z = yz' + yz^2,$$
$$y''' = yz'' + y'z' + 2yzz' + y'z^2 =$$
$$= yz'' + 3yzz' + yz^3,$$

и т. д., вплоть до производной порядка n.

После подстановки пересчитанных производных в рассматриваемое уравнение оно преобразуется в уравнение порядка $n-1$ для функции $z(x)$.

Вследствие свойства однородности функции F преобразованное уравнение принимает вид

$$y^m F(x, z, z' + z^2, z'' + 3zz' + z^3, \ldots) = 0.$$

Отыскав решение этого уравнения — функцию $z = z(x)$, следует решить затем уравнение первого порядка

$$y' = yz(x)$$

с разделяющимися переменными. В результате получим формулу общего решения исходного однородного уравнения порядка n.

$\mathbf{5^0}$. *Уравнения, левая часть которых представляет собой точную производную от известной функции*. Этому признаку удовлетворяют уравнения вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

в которых функция в левой части допускает представление в виде полной производной от некоторой известной функции

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Иначе говоря, должно выполняться равенство

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big).$$

Порядок уравнений с указанным признаком понижается на единицу однократным интегрированием. Представление в виде полной производной не всегда легко обнаруживается, зачастую необходимо провести некоторые предварительные преобразования. При этом следует иметь ввиду, что при выполнении этих преобразований можно как потерять решения, так и приобрести лишние.

При решении задачи Коши для уравнений высокого порядка появляющиеся в процессе выкладок произвольные постоянные целесообразно находить сразу же после каждого интегрирования, используя для этого имеющиеся начальные данные.

Тема : Решение уравнений высокого порядка

$\mathbf{1^0}$. Формула общего решения уравнения высокого порядка. $\mathbf{2^0}$. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Общий вид и операторная форма записи. Характеристическое уравнение. Факторизованная форма. $\mathbf{3^0}$. Линейные однородные уравнения. Частные решения в виде экспонент. Формула общего решения в случае простых корней характеристического уравнения. Случай кратных вещественных корней. Случай комплексно сопряженных корней. $\mathbf{4^0}$. Линейные неоднородные уравнения. Основное правило общего решения. Метод неопределенных коэффициентов для уравнений со специальной правой частью. $\mathbf{5^0}$. Задачи для самостоятельного решения.

1^0. Простейшее дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$y^{(n)} = 0.$$

Решая его и проинтегрировав обе части n раз, получим

$$y(x) = a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Полученная формула общего решения в виде произвольного полинома степени $n-1$ содержит ровно n произвольных постоянных

a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}, являющихся коэффициентами этого полинома. Всякое решение, получаемое из общего при определенных значениях этих *постоянных интегрирования*, называется *частным* решением уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения порядка n в нормальной форме задается равенством

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Формула общего решения этого уравнения как и в случае простейшего, также *содержит в точности* n *произвольных постоянных интегрирования*.

То же самое утверждение справедливо и для уравнения, неразрешенного относительно старшей производной:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Напомним, что дифференциальное уравнение порядка n в нормальной форме

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

с помощью замены переменных сводится к *системе дифференциальных уравнений первого порядка*. В системе уравнений в качестве неизвестных выступает не только функция $y(x)$, но и ее производные $y'(x) = y_1(x)$,

$y'' = y_2(x)$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_{n-1}(x)$. В результате такой замены получается система

$$\begin{cases} y'(x) = y_1(x), \\ y_1'(x) = y_2(x), \\ \ldots \\ y_{n-2}'(x) = y_{n-1}(x), \\ y_{n-1}'(x) = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \end{cases}$$

$\mathbf{2^0}$. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Пусть в дальнейшем коэффициенты

$$a_1(x), \quad \ldots, \quad a_n(x)$$

и правая часть $f(x)$ этого уравнения *непрерывны на интервале* (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (1) называется *однородным*; в противном случае — *неоднородным*.

Линейное дифференциальное уравнение допускает также *запись в операторной форме*:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x). \quad (1')$$

Если при этом коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ постоянны, то говорят о *линейном уравнении* *с постоянными коэффициентами*. Этот тип уравнений является одним из важнейших в практических приложениях.

Теорема. *Задача Коши для уравнения (1) с начальными данными*

$$y(x_0) = y_1,\ y'(x_0) = y_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n \quad (2)$$

имеет единственное решение, какова бы не была точка x_0 из интервала (a, b). Это решение определено на всем интервале (a, b).

При работе с линейным уравнением удобно символ операции $\frac{d}{dx}$ заменить более коротким символом D. При этом линейное уравнение в операторной форме примет вид

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x). \quad (3)$$

Целью исследования линейного дифференциального уравнения служит формула его общего решения, а также формула для решения задачи Коши.

Вместе с линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

рассмотрим следующий полином:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Определение. *Полином $P(\lambda)$ называется характеристическим для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.*

Характеристический полином $P(\lambda)$ имеет те же самые коэффициенты, что и исходное линейное уравнение.

Определение. *Алгебраическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

называется характеристическим для данного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Из курса алгебры известно, что уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

имеет ровно n корней, вещественных или комплексных, возможно кратных.

По условию все коэффициенты характеристического полинома — это вещественные числа. Поэтому уравнение $P(\lambda) = 0$ вместе с любым комплексным корнем $a + bi$ имеет своим корнем и комплексно-сопряженное число $a - bi$, причем кратности корней $a + bi$ и $a - bi$ совпадают.

Пусть характеристическое уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет своими корнями вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, причем кратность корня λ_k равна α_k.

Пусть также корнями характеристического уравнения являются взаимно сопряженные комплексные числа

$$\lambda_{l+1},\ \overline{\lambda_{l+1}}, \quad \lambda_{l+2},\ \overline{\lambda_{l+2}}, \quad \ldots, \quad \lambda_{l+m},\ \overline{\lambda_{l+m}}.$$

При этом кратность каждого корня λ_{l+k} или $\overline{\lambda_{l+k}}$ условимся обозначать как β_k.

Таким образом, общее число n корней характеристического полинома допускает разложение в сумму неотрицательных слагаемых

$$n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l + 2\beta_1 + \ldots + 2\beta_m.$$

Используя корни характеристического уравнения λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n, запишем следующее дифференциальное уравнение:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\ldots(D - \lambda_n)y = 0. \tag{5}$$

Оказывается, что уравнение (3) совпадает с уравнением

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0.$$

Убедимся в этом для случая $n = 2$.

Производя над y операцию $D - \lambda_1$, получаем

$$(D - \lambda_1) y = \frac{dy}{dx} - \lambda_1 y.$$

Действуя на эту функцию оператором $D - \lambda_2$, приходим к соотношению

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y = \frac{d^2y}{dx^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{dy}{dx} + \lambda_1\lambda_2 y.$$

По условию λ_1 и λ_2 — это корни уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

По формулам Виета имеем

$$\lambda_1\lambda_2 = a_2, \quad \lambda_1+\lambda_2 = -a_1.$$

Следовательно,

$$(D - \lambda_2)(D - \lambda_1)y = \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y.$$

Таким образом, рассмотренные нами линейные однородные уравнения друг с другом действительно совпадают.

Аналогичным образом убеждаемся, что последовательно действуя на функцию y дифференциальными операторами

$$(D-\lambda_1), \quad (D-\lambda_2), \quad \ldots, \quad (D-\lambda_n)$$

в каком угодно порядке, в итоге получим тот же результат, как при действии на функцию y всего лишь одним дифференциальным оператором порядка n, то есть

$$\Big(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\Big) y =$$

$$= (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\ldots(D-\lambda_n) y.$$

3^0. Перейдем к *конструированию формулы общего решения для линейных уравнений с постоянными коэффициентами*.

Определение. *Линейное уравнение называется* однородным, *если его правая часть равна нулю, то есть если*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

В *факторизованной форме* линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

записывается в следующем виде:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \ldots (D - \lambda_n) y = 0. \qquad (LDE')$$

Функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ удовлетворяет этому уравнению:

$$(D - \lambda_1) C_1 e^{\lambda_1 x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} = 0,$$

и, следовательно,

$$(D - \lambda_n)(D - \lambda_{n-1}) \ldots (D - \lambda_1) C_1 e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Подобным же образом проверяется, что каждая из функций

$$y = C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad y = C_3 e^{\lambda_3 x}, \quad \ldots, \quad y = C_n e^{\lambda_n x}$$

решает уравнение (LDE').

Кроме того любая линейная комбинация

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

также удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

Если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различны между собой, то постоянные C_1, C_2, ..., C_n, входящие в рассматриваемую линейную комбинацию, независимы.

Следовательно, в этом случае равенство

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

задает общее решение линейного однородного уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Решение. В операторной форме это уравнение имеет вид

$$(D^2 - D - 2)y = 0.$$

Его характеристическое уравнение записывается следующим образом:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$. Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения задается формулой

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Здесь C_1 и C_2 — это произвольные постоянные. $\square$

Пусть среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического полинома имеются равные, на-пример, $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда сумма

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x}$$

содержит не две, а только одну произвольную постоянную $C = C_1 + C_2$. Поэтому при $\lambda_1 = \lambda_2$ приведенная выше формула решения содержит меньше чем n независимых постоянных и, значит, не задает общее решение.

Проверим, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ решением рассматриваемого уравнения вместе с функцией $e^{\lambda_1 x}$ является также функция $xe^{\lambda_1 x}$:

$$(D - \lambda_1)(xe^{\lambda_1 x}) = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 xe^{\lambda_1 x} - \lambda_1 xe^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x},$$

$$(D - \lambda_2)(D - \lambda_1)(xe^{\lambda_1 x}) = \lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = 0.$$

В этом случае ту часть в формуле общего решения уравнения, которая соответствует совпадающим корням $\lambda_1 = \lambda_2$, записывают в следующем виде:

$$(C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}.$$

В более общем случае совпадать могут сразу несколько корней характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m.$$

Тогда соответствующая этим корням часть в формуле общего решения принимает вид

$$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x}.$$

В этой части присутствуют ровно m произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_m, которые можно изменять независимо друг от друга.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

Решение. В операторной форме это уравнение имеет вид

$$(D^3 + D^2 - 5D + 3)y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -3$. Часть слагаемых в формуле общего решения, соответствующая корню $\lambda_1 = 1$ кратности два, имеет вид

$$(C_1 + C_2 x)e^x.$$

Следовательно, формула общего решения исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-3x}.$$

Здесь C_1, C_2 и C_3 — это произвольные постоянные. $\square$

Если имеется два комплексно сопряженных корня характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i, \quad \beta \neq 0,$$

то в формуле общего решения этой паре корней будет соответствовать сумма вещественнозначных слагаемых следующего вида:

$$e^{\alpha x}\,[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x].$$

Пусть характеристический полином линейного однородного уравнения имеет кратные комплексные корни $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$, каждый кратности m.

Тогда этой паре корней в формуле общего

решения будет соответствовать веществен-нозначное слагаемое вида

$$e^{\alpha x}\Big[(C_0 + C_1x + \ldots + C_{m-1}x^{m-1})\cos\beta x +$$

$$+(B_0 + B_1x + \ldots + B_{m-1}x^{m-1})\sin\beta x\Big].$$

Отметим, что в этом выражении имеется в точности $2m$ произвольных постоянных.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

имеет комплексно сопряженные корни

$$\lambda_1 = -1 + i \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -1 - i.$$

Поэтому $\alpha = -1$, $\beta = 1$, и общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x].$$

Здесь C_1 и C_2 — это произвольные постоянные. $\square$

Сформулируем *основное правило построения общего решения для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами*.

1) Каждому вещественному корню

$$\lambda_k, \quad k = 1, \dots, l,$$

характеристического уравнения следует поставить в соответствие α_k функций следующего вида:

$$e^{\lambda_k x}, \quad xe^{\lambda_k x}, \quad \dots, \quad x^{\alpha_k - 1} e^{\lambda_k x}.$$

Здесь α_k — кратность корня λ_k.

2) Каждой паре комплексно сопряженных корней λ_{l+k}, $\overline{\lambda_{l+k}}$, где $\lambda_{l+k} = \mu_k + i\nu_k$, характеристического уравнения следует поставить в соответствие $2\beta_k$ функций следующего вида:

$$e^{\mu_k x}\cos\nu_k x, \quad xe^{\mu_k x}\cos\nu_k x, \ldots, x^{\beta_k-1}e^{\mu_k x}\cos\nu_k x,$$

$$e^{\mu_k x}\sin\nu_k x, \quad xe^{\mu_k x}\sin\nu_k x, \ldots, x^{\beta_k-1}e^{\mu_k x}\sin\nu_k x.$$

Здесь β_k — кратность корня $\lambda_{l+k} = \mu_k + i\nu_k$.

Общее число функций, сопоставленных характеристическому полиному, определяется равенством

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_l + 2\beta_1 + \ldots + 2\beta_m = n.$$

Все эти сопоставленные характеристическому полиному функции в совокупности *линейно независимы на всей числовой прямой*.

Кроме того все эти функции являются решениями линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0},$$

что проверяется непосредственной их подстановкой в уравнение.

Именно функции из этого, построенного по корням характеристического полинома множества, *образуют фундаментальную систему решений* исходного линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Это означает, что *любое решение рассматриваемого линейного однородного уравнения представимо в виде линейной комбинации функций* из этой системы. Коэффициентов в такой линейной комбинации будет n штук, то есть в итоговой формуле будет ровно n призвольных постоянных.