1 Логика предикатов

1.1 Алфавит сигнатуры σ

Соглашение

Если из контекста понятно, какие символы являются предикатными, а какие - функциональными., тогда разделение на P и F можно пропустить: $\sigma_{\mathbb{R}} = \{+^2, \cdot^2, 0^0, 1^0\}$, $\sigma_{set} = \{\in^2\}$. Если используемые символы имеют стандартную арность, например, $+, \cdot, 0, 1, \in$, то верхние индексы, показывающие эту арность, можно пропустить: $\sigma_{\mathbb{R}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$, $\sigma_{set} = \{\in\}$.

Определение

Пусть $\sigma = (P, F, \mu)$ - некоторая сигнатура. Тогда **алфавит** логики предикатов (или логики первого порядка) сигнатуры σ - это множество:

$$\mathcal{A}_{FOL}(\sigma) \rightleftharpoons \{\wedge, \vee, \to, \neg, (,)\top, \bot, \forall, \exists, =\} \cup P \cup F \cup \{x_i | i \in \omega\} \cup \{, \}$$

Здесь $V = \{x_i | i \in \omega\}$ - бесконечное множество **предметных** переменных.

1.2 Термы сигнатуры σ

Определение

Пусть $\sigma = (P, F)$ - сигнатура. Тогда **язык термов** $T(\sigma)$ сигнатуры σ можно определить как множество слов алфавита $\mathcal{A}_{FOL}(\sigma)$ по индукции:

1. если $x \in V$ - предметная переменная, то $x \in T(\sigma)$ является термом
2. если $f^n \in F$ - функциональный символ, $t_1, \ldots, t_n \in T(\sigma)$ - термы, то слово $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\sigma)$, т.е. является термом

Слова из $T(\sigma)$ называются **термами** сигнатуры σ.

Соглашение

Из определения следует, что если $c^0 \in F$ - константа, то $c() \in T(\sigma)$. В этом случае будем пропускать пустые скобки и вместо $c()$ писать просто c.

Соглашение

Далее будем предполагать, что набор переменных V содержит все стандартные символы для обозначения переменных, такие как x, y, z, x_1, y^i_j и так далее.

1.3 Примеры термов

Термы сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$

Следующие слова являются термами сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$:

- 0, 1, $\quad x$, $\quad x_1$, $\quad y$, z
- $+(0,1)$, $\quad +(x,1)$, $\quad +(y,y)$, $\quad \cdot(y,z)$
- $+(1,+(x,y))$, $\quad +(\cdot(x,y),\cdot(x,z))$, $\quad \cdot(+(x,1),\cdot(y,y))$

Те же термы, записанные в инфиксной форме:

- $0+1$, $\quad x+1$, $\quad y+y$, $\quad y\cdot z$
- $1+(x+y)$, $\quad (x\cdot y)+(x\cdot z)$, $\quad (x+1)\cdot(y\cdot y)$

1.4 Глубина и множество всех переменных терма

Определение

Для каждого терма $t \in T(\sigma)$ определим его **глубину** $d(t)$ и **множество переменных** $V(t)$ индукцией по построению:

- если $t = x \in V$ - предметная переменная, то
  - $d(t) = 0$
  - $V(t) = \{x\}$
- если $t = f(t_1,\ldots,t_n) \in T(\sigma)$, где $f^n \in F$ - функциональный символ, то
  - $d(t) = \max\{d(t_i) | 1 \le i \le n\} + 1$
  - $V(t) = \cup\{V(t_i) | 1 \le i \le n\}$

Глубина и переменные термов сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$

- $d(0+1) = 1, \quad V(0+1) = \emptyset$
- $d(x+1) = 1, \quad V(x+1) = \{x\}$
- $d((x \cdot y) + (x \cdot z)) = 2, \quad V((x \cdot y) + (x \cdot z)) = \{x, y, z\}$

1.5 Формулы сигнатуры σ

Определение

Пусть $\sigma = (P, F)$ - сигнатура. Тогда **язык формул** $F(\sigma)$ сигнатуры σ можно определить как множество слов алфавита $\mathcal{A}_{FOL}(\sigma)$ по индукции:

1. если $t_1, t_2 \in T(\sigma)$ - два терма, то $(t_1 = t_2) \in F(\sigma)$
2. если $p^n \in P$ - предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n \in T(\sigma)$ - термы, то $p(t_1, \ldots, t_n) \in F(\sigma)$
3. если $\phi \in F(\sigma)$, то $\neg\phi \in F(\sigma)$
4. если $\phi, \psi \in F(\sigma)$, то $(\phi \bullet \psi) \in F(\sigma)$ для любого $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
5. если $\phi \in F(\sigma)$, $x \in V$ - предметная переменная, то $Qx\phi \in F(\sigma)$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$ - кванторы.

Слова из множества $F(\sigma)$ называются **формулами** сигнатуры σ.

Формулы, полученные по 1 и 2 называются **атомарными**.

1.6 Примеры формул

Формулы сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$

Следующие слова являются формулами сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$:

- $0 = 0$, $1 = 0$, $\quad x = (x+1), \quad x = y + (x \cdot z)$
- $(1 = 0) \wedge (x + y = y + x)$
- $\exists x (x = 1)$
- $\forall y \; ((y + y = 0) \rightarrow (y = 0))$
- $\forall x \forall y \; (x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x)$

Формулы сигнатуры σ_{set}

Символ $\in$ будем записывать в инфиксной форме, т.е. вместо $\in (x, y)$ запишем $x \in y$.

- $x \in y, \quad (x \in y) \wedge (x \in z)$
- $\exists x \forall y \neg (y \in x)$
- $\forall x \forall y ((x \in y) \vee (y \in x))$
- $\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \rightarrow \exists t \in x (z \in t))$

1.7 Глубина и множество свободных переменных формулы

Определение

Для любой формулы $\phi \in F(\sigma)$ определим её **глубину** $d(t)$ и множество **свободных переменных** $FV(t)$ индукцией по построению:

- если $\phi = (t_1 = t_2)$, то $d(\phi) = 0$ и $FV(\phi) = V(t_1) \cup V(t_2)$
- если $\phi = p(t_1, \ldots, t_n) \in T(\sigma)$, то $d(\phi) = 0$ и $FV(\phi) = \cup \{V(t_i) | 1 \leq i \leq n\}$
- если $\phi = \neg \psi$, то $d(\phi) = d(\psi) + 1$ и $FV(\phi) = FV(\psi)$
- если $\phi = (\psi_1 \bullet \psi_2)$, то $d(\phi) = \max(d(\psi_1), d(\psi_2)) + 1$ и $FV(\phi) = FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2)$
- если $\phi = Qx\psi$, то $d(\phi) = d(\psi) + 1$ и $FV(\phi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$.

Замечание

Формула ϕ является атомарной $\Leftrightarrow d(\phi) = 0$.

1.8 Примеры множеств свободных переменных

Свободные переменные формул сигнатуры $\sigma_{\mathbb{R}}$

- $FV(1=0)=\emptyset, \quad FV(x=(x+1))=\{x\}$
- $FV((1=0)\wedge(x+y=y+x))=\{x,y\}, \quad FV(\exists x(x=1))=\emptyset$
- $FV(\forall y\ ((y+y=0)\to(y=0)))=\emptyset$
- $FV(\forall y\ (x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+x))=\{x\}$

Свободные переменные формул сигнатуры σ_{set}

- $FV(x\in y)=\{x,y\}, \quad FV((x\in y)\wedge(x\in z))=\{x,y,z\}$
- $FV(\exists x\forall y\neg(y\in x))=\emptyset$
- $FV(\forall x\forall y((x\in y)\vee(y\in x)))=\emptyset$
- $FV(\forall x\forall z((z\in y)\to\exists t\in x(z\in t)))=\{y\}$

1.9 Предложения сигнатуры σ

Обозначение

Пусть ϕ - формула сигнатуры σ. Тогда запись $\phi(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_1,\ldots,x_n\in V$ - множество предметных переменных, означает, что $FV(\phi)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$, а переменные x_i упорядочены по индексам своего первого вхождения. Вместо $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ можно также писать $\phi(\bar{x})$ где $\bar{x}$ - кортеж переменных. Аналогичное обозначение может использоваться при записи термов.

пример

Если $\phi=p(y,x)\wedge\forall z(q(z,y)\to(p(z,x)\wedge\neg r(t,z)))$, то для такой формулы напишем $\phi(y,x,t)$ чтобы показать, что $FV(\phi)=\{x,y,t\}$

Определение

Формула ϕ называется **предложением** или **замкнутой формулой**, тогда и только тогда, когда $FV(\phi)=\emptyset$.

1.10 Мощность множества формул сигнатуры σ

Определение

мощность сигнатуры $\sigma = (P, F, \mu)$ - это мощность множества $P \cup F$. В дальнейшем будем писать $|\sigma|$ для обозначения мощности сигнатуры σ.

Теорема (мощность множества формул)

Для любой сигнатуры $\sigma = (P, F, \mu)$ выполнено следующее $|F(\sigma)| = \max(\omega, |\sigma|)$.

Доказательство

Отметим, что $|\mathcal{A}_{FOL}(\sigma)| = \max(|\sigma|, \omega)$. поскольку $F(\sigma) \subseteq \mathcal{A}^*_{FOL}(\sigma)$, $|F(\sigma)| \leq |\mathcal{A}^*_{FOL}(\sigma)| = \max(\omega, |\sigma|)$. Для любой сигнатуры σ в $F(\sigma)$ существуют формулы вида

$$\underbrace{\neg\neg\ldots\neg}_{n}(x = x)$$

следовательно, $|F(\sigma)| \geq \omega$. Чтобы показать, что $|\sigma| \leq |F(\sigma)|$, построим инъективное отображение $f : P \cup F \to F(\sigma)$ следующим образом. Для любых $s \in P \cup F$, таких, что $\mu(s) = n$, определим

$$f(s) = \begin{cases} (x = s(x, \ldots, x)), & \text{if } s \in F, \\ s(x, \ldots, x) & \text{if } s \in P \end{cases}$$

□

1.11 Обогащение/обеднение сигнатур

Определение

Пусть $\sigma_1 = (P_1, F_1, \mu_1)$, $\sigma_2 = (P_2, F_2, \mu_2)$ - две сигнатуры. Тогда σ_2 является **обогащением** сигнатуры σ_1 (а σ_1 является **Обеднением** сигнатуры σ_2), тогда и только тогда, когда

- $P_1 \subseteq P_2$
- $F_1 \subseteq F_2$
- для любого символа $s \in P_1 \cup F_1$ верно, что $\mu_1(s) = \mu_2(s)$

Это отношение обозначается как $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$

пример

- $\{+^2\} \subseteq \{+^2, \cdot^2\} \subseteq \{+^2, \cdot^2, \leq^2\}$
- $\{+^2, \cdot^2\} \not\subseteq \{+^1, \cdot^2, \leq^2\}$

1.12 Означивание предметных переменных

Определение

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ - некоторая структура, V_0 - некоторое множество предметных переменных. Отображение $\gamma : V_0 \to M$ называется **означиванием** переменных V_0 в структуре M.

Замечание

В отличие от означивания *пропозициональных переменных*, значение означивания предметных переменных не является *истинным* значением (истина-ложь), а является, скорее, *объектным* значением - некоторый элемент (объект) в структуре.

Обозначение

Пусть $\gamma : V_0 \to M$ - означивание переменных V_0 в структуре $\mathcal{M}$, v - некоторые предметные переменные и $a \in M$. Тогда

$$\gamma_a^v = \begin{cases} (\gamma \setminus \{(v, \gamma(v))\}) \cup \{(v, a)\}, & \text{если } v \in V_0, \\ \gamma \cup \{(v, a)\} & \text{если } v \notin V_0 \end{cases}$$

1.13 Значение терма

Определение

Дана структура $\mathcal{M}$ сигнатуры σ, для каждого терма $t \in T(\sigma)$, множество переменных V_0, таких, что $V(t) \subseteq V_0$ и означивание $\gamma : V_0 \to M$, определим **значение терма** t в структуре $\mathcal{M}$ при означивании γ. Обозначается как $t^{\mathcal{M}}[\gamma]$.

- если $t = v$ - переменная, то $t^{\mathcal{M}}[\gamma] \rightleftharpoons \gamma(v)$
- если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n \in T(\sigma)$, то $t^{\mathcal{M}}[\gamma] \rightleftharpoons f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma])$

Обозначение

Пусть $\mathcal{M}$ - структура, $t(x_1, \ldots, x_n)$ - терм, $a_1, \ldots, a_n$ - некоторый кортеж элементов из M. Тогда $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ можно определить как значение t в структуре $\mathcal{M}$ при означивании $\gamma : x_i \mapsto a_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. Верхний индекс $\mathcal{M}$ для краткости можно пропустить, и вместо $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ написать просто $t(a_1, \ldots, a_n)$.

утверждение

1) Пусть $\mathcal{M}$ - структура сигнатуры σ, $\emptyset \neq X \subseteq M$. Тогда носитель $\mathcal{M}(X)$ определяется как множество $\{t(\bar{a}) | t \in T(\sigma),\ \bar{a} \in X\}$
2) Пусть $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ - гомоморфизм структур сигнатуры σ. Тогда для любого терма $t \in T(\sigma)$ и для любого кортежа $\bar{a} \in M$ верно, что $\phi(t(\bar{a})) = t(\phi(\bar{a}))$. Здесь $\phi((a_1, \ldots, a_n)) \rightleftharpoons (\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$.

Доказательство

1) Покажем включение $X' = \{t(\bar{a}) | t \in T(\sigma),\ \bar{a} \in X\} \subseteq \mathcal{M}(X)$. Пусть $t \in T(\sigma)$, $\bar{a} \in X$. Индукцией по глубине t нетрудно показать, что $t(\bar{a}) \in \mathcal{N}'$ для любой подструктуры $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{M}$, следовательно, $t(\bar{a}) \in \mathcal{M}(X)$. Обратное включение. Отметим, что множество X' замкнуто относительно операций из σ, следовательно, X' порождает подструктуру, содержащую X. Тогда по минимальности $\mathcal{M}(X)$ верно, что $\mathcal{M}(X) \subseteq X'$. 2) Индукцией по глубине терма t.

1.14 Истинность формул

Определение

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ - структура сигнатуры σ, $\phi(\bar{x})$ - некоторая формула сигнатуры σ, γ - означивание переменных $\bar{x}$ в структуре $\mathcal{M}$. Определим отношение **истинности** $\models$ формулы ϕ в структуре $\mathcal{M}$ при означивании γ:

- $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathcal{M}}[\gamma] = t_2^{\mathcal{M}}[\gamma]$
- $\mathcal{M} \models p(t_1, \ldots, t_n)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathcal{M}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma]) \in p^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} \models \phi[\gamma]) \wedge (\mathcal{M} \models \psi[\gamma])$

- $\mathcal{M} \models (\phi \vee \psi)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} \models \phi[\gamma]) \vee (\mathcal{M} \models \psi[\gamma])$
- $\mathcal{M} \models \neg\phi[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \not\models \phi[\gamma] \Leftrightarrow \neg(\mathcal{M} \models \phi[\gamma])$
- $\mathcal{M} \models (\phi \to \psi)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} \models \phi[\gamma]) \to (\mathcal{M} \models \psi[\gamma])$
- $\mathcal{M} \models \forall x\phi[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a \in M\ (\mathcal{M} \models \phi[\gamma^x_a])$
- $\mathcal{M} \models \exists x\phi[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists a \in M\ (\mathcal{M} \models \phi[\gamma^x_a])$

1.15 Зависимость значения терма t от $V(t)$

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ - структура, t - терм, V_0 - множество переменных, таких, что $V(t) \subseteq V_0$, и $\gamma_1, \gamma_2 : V_0 \to M$ - два означивания. Тогда если для любой переменной $v \in V(t)$ верно, что $\gamma_1(v) = \gamma_2(v)$, то $t^{\mathcal{M}}[\gamma_1] = t^{\mathcal{M}}[\gamma_2]$.

Доказательство

Индукция по глубине терма t. Основание индукции: $d(t) = 0$. Тогда $t = v$ некоторая предметная переменная, следовательно, $V(t) = \{v\}$, тогда $\gamma_1(v) = \gamma_2(v)$ и по определению $t^{\mathcal{M}}[\gamma_1] = t^{\mathcal{M}}[\gamma_2]$. Шаг индукции. Пусть $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, и утверждение верно для термов $t_1, \ldots, t_n$. поскольку $V(t) = \cup\{V(t_i) | 1 \leq i \leq n\}$, по предположению индукции $t_i^{\mathcal{M}}[\gamma_1] = t_i^{\mathcal{M}}[\gamma_2]$. Тогда

$$t^{\mathcal{M}}[\gamma_1] \overset{def}{=} f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_1], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma_1]) \overset{ind}{=}$$

$$f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_2], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma_2]) \overset{def}{=} t^{\mathcal{M}}[\gamma_2]$$

1.16 Зависимость истинности формулы

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ - структура, ϕ - формула, V_0 - множество переменных, таких что $FV(\phi) \subseteq V_0$, и $\gamma_1, \gamma_2 : V_0 \to M$ - два означивания. Тогда если для любой переменной $v \in FV(\phi)$ верно, что $\gamma_1(v) = \gamma_2(v)$, то $\mathcal{M} \models \phi[\gamma_1] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi[\gamma_2]$.

Доказательство

Индукция по глубине ϕ. Основание индукции. Пусть ϕ - атомарная формула. Рассмотрим варианты построения ϕ. Если $\phi = (t_1 = t_2)$, то $FV(\phi) = V(t_1) \cup V(t_2)$, следовательно

$$\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\gamma_1] \overset{def}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_1] = t_2^{\mathcal{M}}[\gamma_1]) \Leftrightarrow$$

$$(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_2] = t_2^{\mathcal{M}}[\gamma_2]) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\gamma_2]$$

Если $\phi = p(t_1, \ldots, t_n)$, то $FV(\phi) = V(t_1) \cup \ldots \cup V(t_n)$, следовательно

$$\mathcal{M} \models p(t_1, \ldots, t_n)[\gamma_1] \overset{def}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_1], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma_1]) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow$$

$$(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma_2], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\gamma_2]) \in p^{\mathcal{M}} \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \models p(t_1, \ldots, t_n)[\gamma_2]$$

Шаг индукции. Рассмотрим все возможные способы построения ϕ. Случай, когда $\phi = (\psi_1 \bullet \psi_2)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Тогда $FV(\phi) = FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2)$, и, по предположению индукции, утверждение верно для ψ_1 и ψ_2.

$$\mathcal{M} \models (\psi_1 \bullet \psi_2)[\gamma_1] \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} \models \psi_1[\gamma_1]) \bullet (\mathcal{M} \models \psi_2[\gamma_1]) \overset{ind}{\Leftrightarrow}$$

$$(\mathcal{M} \models \psi_1[\gamma_2]) \bullet (\mathcal{M} \models \psi_2[\gamma_2]) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \models (\psi_1 \bullet \psi_2)[\gamma_2]$$

Случай, когда $\phi = \neg\psi$ следует из предположения индукции и определения истинности. Остался только один случай с кванторами $\phi = Qx\psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.

$$\mathcal{M} \models Qx\psi[\gamma_1] \overset{def}{\Leftrightarrow} Qa \in M \ (\mathcal{M} \models \psi[(\gamma_1)_a^x]) \overset{ind}{\Leftrightarrow}$$

$$Qa \in M \ (\mathcal{M} \models \psi[(\gamma_2)_a^x]) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \models Qx\psi[\gamma_2]$$

Предположение индукции верно, поскольку для всех $v \in FV(\psi)$ выполнено следующее $(\gamma_1)_a^v(v) = (\gamma_2)_a^v(v)$. $\square$

Следствие

Если ϕ - предложение, т.е. $FV(\phi) = \emptyset$, $\mathcal{M}$ - структура, тогда для любых двух означиваний $\gamma_1, \gamma_2 : V_0 \to M$ верно, что $\mathcal{M} \models \phi[\gamma_1] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi[\gamma_2]$.

Обозначение

По следствию, для предложений ϕ вместо $\mathcal{M} \models \phi[\gamma]$ будем писать просто $\mathcal{M} \models \phi$

Обозначение

Если $\phi(\bar{x})$ - формула, $\mathcal{M}$ - структура, $\bar{a}$ - кортеж элементов M длины $l(\bar{x})$, то $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ означает, что $\mathcal{M} \models \phi[\gamma]$, где $\gamma : x_i \mapsto a_i$ для всех $1 \leq i \leq l(\bar{x})$. Это обозначение корректно по лемме. Запись $\bar{a} \in M$ означает, что $\bar{a} \in M^{l(\bar{a})}$.

1.17 Примеры истинности значений формул

Примеры

Возьмём $\mathbb{N} = (\omega, \{+^2, \cdot^2, 0^0, s^1\})$, где $+1^{\mathbb{N}}(n) \rightleftharpoons n + 1$. Тогда

- $\mathbb{N} \models \forall x \forall y \ (x + (y + 1)) = (x + y) + 1$
- $\mathbb{N} \not\models \forall x \exists y \ (x = y + 1)$
- $\mathbb{Z} \models \forall x \exists y \ (x + y = 0)$
- $\mathbb{Z} \not\models \forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$
- $\mathbb{R} \models \forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$
- $\mathbb{R} \not\models \forall x \exists y \ (y \cdot y = x)$
- $S_3 \models \exists x \ (x \cdot x \cdot x = 1)$
- $S_3 \not\models \exists x \ (x \cdot x = 1)$
- $\mathbb{Z} \models \forall x \ (\exists y \ (x = y + y) \vee \exists y \ (x = y + y + 1))$

1.18 Истинность множества формул

Определение

Пусть Φ - множество формул сигнатуры σ, тогда **множество свободных переменных** Φ - это объединение $FV(\Phi) = \cup\{FV(\phi) | \phi \in \Phi\}$.

Определение

Пусть Φ - множество формул сигнатуры σ, $\mathcal{M}$ - структура сигнатуры σ и $\gamma : FV(\Phi) \to M$ - означивание свободных переменных Φ. Тогда Φ является **истиной** на $\mathcal{M}$ при означивании γ, записывается как $\mathcal{M} \models \Phi[\gamma]$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \phi[\gamma]$ для всех $\phi \in \Phi$.

1.19 Истинность и изоморфизм

Теорема

Пусть $f : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{N}$ - изоморфизм структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ сигнатуры σ, $\phi(\bar{x})$ - формула сигнатуры σ. Тогда для любого кортежа $\bar{a} \in M$ верно следующее $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(f(\bar{a}))$

Доказательство

Индукция по глубине ϕ. Основание индукции: ϕ - атомарная формула. случай 1). Пусть $\phi = (t_1 = t_2)$. Тогда $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)(\bar{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$. По утверждению, так как f является гомоморфизмом, $t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{N}}(f(\bar{a})) = t_2^{\mathcal{N}}(f(\bar{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models (t_1 = t_2)(f(\bar{a}))$ Случай 2). Пусть $\phi = p(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда $\mathcal{M} \models p(t_1, \ldots, t_n)(\bar{a}) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in p^{\mathcal{M}}$. Так как f является изоморфизмом, по определению $f(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = (t_1^{\mathcal{N}}(f(\bar{a})), \ldots, t_n^{\mathcal{N}}(f(\bar{a}))) \in p^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \mathcal{N} \models p(t_1, \ldots, t_n)(f(\bar{a}))$ Шаг индукции. Пусть $\phi = (\psi_1 \bullet \psi_2)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}$ Тогда

$$\mathcal{M} \models (\psi_1 \bullet \psi_2)(\bar{a}) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} \models \psi_1(\bar{a})) \bullet (\mathcal{M} \models \psi_2(\bar{a})) \overset{ind}{\Leftrightarrow}$$

$$(\mathcal{N} \models \psi_1(f(\bar{a}))) \bullet (\mathcal{N} \models \psi_2(f(\bar{a}))) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{N} \models (\psi_1 \bullet \psi_2)(f(\bar{a}))$$

Случай отрицания $\phi = \neg\psi$ рассматривается аналогично:

$$\mathcal{M} \models \neg\psi(\bar{a}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a}) \overset{ind}{\Leftrightarrow}$$

$$\mathcal{N} \not\models \psi(f(\bar{a})) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{N} \models \neg\psi(f(\bar{a}))$$

Случай с кванторами $\phi = Qx\psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathcal{M} \models Qx\psi(\bar{a}, x) \overset{def}{\Leftrightarrow} Qb \in M\ \mathcal{M}\psi(\bar{a}, b) \overset{ind}{\Leftrightarrow}$$

$$Qc \in N\ \mathcal{N} \models \psi(f(\bar{a}), c) \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{N} \models Qx\psi(f(\bar{a}), x)$$

□

1.20 Корректные, выполнимые и невыполнимые формулы

Определение

Формула $\phi(\bar{x})$ сигнатуры σ называется

- **корректной**, тогда и только тогда, когда для любой структуры $\mathcal{M}$ сигнатуры σ и любого кортежа элементов $\bar{a} \in M$, верно, что $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$
- **выполнимой**, тогда и только тогда, когда существует некоторая структура $\mathcal{M}$ сигнатуры σ и некоторый кортеж $\bar{a} \in M$, такие, что $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{a})$
- **невыполнимой**, тогда и только тогда, когда для любой структуры $\mathcal{M}$ сигнатуры σ и любого кортеж $\bar{a} \in M$ верно, что $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{a})$

Факт того, что ϕ является тождественно истинной обозначается как $\models \phi$.

Определение

Множество формул Φ называется **выполнимым**, тогда и только тогда, когда существует такая структура $\mathcal{M}$ и означивание $\gamma : FV(\Phi) \to M$, что $\mathcal{M} \models \Phi[\gamma]$.

1.21 Семантическая импликация формул

Определение

Пусть Φ - множество формул, ψ - некоторая формула сигнатуры σ. Тогда ψ **семантически следует** из Φ, тогда и только тогда, когда для любой структуры сигнатуры σ и любого означивания $\gamma : FV(\Phi) \cup FV(\psi)$ из истинности $\mathcal{M} \models \Phi[\gamma]$ следует истинность $\mathcal{M} \models \psi[\gamma]$. Это отношение записывается как $\Phi \models \psi$.

Замечание

Из определения ясно, что $\models \phi \Leftrightarrow \emptyset \models \phi$

1.22 Семантическая эквивалентность формул

Определение

Пусть $\phi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ - формулы сигнатуры σ. Тогда ϕ и ψ называются **семантически эквивалентными**, обозначается как $\phi \sim \psi$, тогда и только тогда, когда для любой структуры $\mathcal{M}$ сигнатуры σ и для любого кортежа $\bar{a} \in M$, верно, что

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$$

Обозначение

Введем следующие обозначения:

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \risingdotseq ((\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi))$$

утверждение

Для любых формул $\phi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ верно, что

$$\phi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\phi \leftrightarrow \psi)$$

Замечание

Отношение $\sim$ на множестве формул $F(\sigma)$ сигнатуры σ является отношением эквивалентности.

Доказательство

Следует из определения.

2 Исчисление предикатов

2.1 Определение секвенции

Определение

Расширим алфавит логики предикатов сигнатуры σ, добавив в него символ $\vdash$: $\mathcal{A}_{PredC}(\sigma) = \mathcal{A}_{FOL}(\sigma) \cup \{\vdash\}$. Полученный алфавит $\mathcal{A}_{PredC}(\sigma)$ называется алфавитом PredC_σ - исчисления предикатов сигнатуры σ (первого порядка).

Определение

Секвенция сигнатуры σ в исчислении предикатов - это слово алфавита $\mathcal{A}_{PredC}(\sigma)$, имеющее вид $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \phi_0$ где ϕ_i - формулы сигнатуры σ для всех $0 \leq i \leq n$, и $n \geq 0$.

2.2 Обозначение подстановок

Определение

Пусть ϕ - формула, v - предметная переменная. Тогда вхождение v в ϕ называется **связанным**, тогда и только тогда, когда существует такая подформула $Qv\psi \sqsubseteq \phi$, что вхождение v попадает в $Qv\psi$. Если вхождение v не является связанным, оно называется **свободным**.

Обозначение

Пусть ϕ - формула, v - предметная переменная и t - терм. Тогда запись $(\phi)^v_t$ обозначает формулу, полученную из ϕ подстановкой терма t на место всех свободных вхождений переменной v. При этом ни одна свободная переменная x из $V(t)$ не становится связанной каким-либо квантором из ϕ.
Запись $[\phi]^x_y$ означает, что $(\phi)^x_y$ и дополнительно выполнено $y \notin FV(\phi)$.

2.3 Аксиомы и правила вывода для $\mathbf{PredC}_\sigma$

Аксиомы

1) $\phi \vdash \phi$ 3) $\vdash (x = x)$ 4) $(x = y), (\phi)^z_x \vdash (\phi)^z_y$
для любых переменных x, y, z и формулы ϕ

Правила вывода

1) $\frac{\Gamma\vdash\phi \;\; \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}$ (введение $\wedge$)
2) $\frac{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\wedge$)
3) $\frac{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}{\Gamma\vdash\psi}$ (исключение $\wedge$)
4) $\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}$ (введение $\vee$)
5) $\frac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}$ (введение $\vee$)
6) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\chi \;\; \Gamma,\psi\vdash\chi \;\; \Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}{\Gamma\vdash\chi}$ (исключение $\vee$)
7) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\bot}{\Gamma\vdash\neg\phi}$ (введение $\neg$)
8) $\frac{\Gamma,\neg\phi\vdash\bot}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\neg$)
9) $\frac{\Gamma\vdash\phi \;\; \Gamma\vdash(\phi\to\psi)}{\Gamma\vdash\psi}$ (исключение $\to$)
10) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\to\psi)}$ (введение $\to$)
11) $\frac{\Gamma\vdash\phi,\; \Gamma\vdash\neg\phi}{\Gamma\vdash\bot}$ (введение $\bot$)
12) $\frac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\bot$)
13) $\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma,\psi\vdash\phi}$ (расширение)
14) $\frac{\Gamma_1,\phi,\psi,\Gamma_2\vdash\chi}{\Gamma_1,\psi,\phi,\Gamma_2\vdash\chi}$ (перестановка)

---

8) $\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\forall x\phi}$, $x \notin FV(\Gamma)$
9) $\frac{\Gamma\vdash(\phi)^x_t}{\Gamma\vdash\exists x\phi}$
16) $\frac{\Gamma,(\phi)^x_t,\vdash\psi}{\Gamma,\forall x\phi\vdash\psi}$
18) $\frac{\Gamma,\phi,\vdash\psi}{\Gamma,\exists x\phi\vdash\psi}$, $x \notin FV(\Gamma,\psi)$

2.4 Линейное доказательство

Введем следующие обозначения: $A_{PredC}(\sigma)$ - множество всех аксиом и $R_{PredC}(\sigma)$ - множество всех правил вывода исчисления предикатов сигнатуры σ.

Определение

Линейное доказательство (или **линейный вывод**) из множества секвенций H в PredC_σ - это последовательность секвенций $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ такая, что каждая секвенция s_i:

- аксиома, т.е. $s_i \in A_{PredC}(\sigma)$
- предпосылка, т.е. $s_i \in H$
- получена из секвенций $s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$, по одному из правил вывода PredC_σ, т.е.

$$\frac{s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}}{s_i} \in R_{PredC}(\sigma)$$

Множество H называется множеством **предпосылок** или **предположений**, и если не указано, то будем считать, что $H = \emptyset$.

2.5 Выводимые секвенции

Определение

Секвенция s называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в PredC_σ из множества предпосылок H, тогда и только тогда, когда существует линейное доказательство $(s_1, \ldots, s_n)$ из множества H, такое, что $s = s_n$. Обозначается следующим образом:

$$H \rhd s$$

Если $H = \emptyset$, то можно писать просто $\rhd s$.

Определение

Формула ϕ называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в PredC_σ, тогда и только тогда, когда секвенция $\vdash \phi$ может быть выведена из пустого множества предпосылок, т.е. $\rhd \vdash \phi$. Обозначается как $\rhd\phi$.

2.6 Дерево вывода

Определение

Дерево секвенций T называется **деревом вывода** секвенции s из множества предпосылок H в PredC_σ, тогда и только тогда, когда:

1. $r(T) = s$
2. все секвенции из множества листьев $l(T)$ являются аксиомами PredC_σ или элементами H, т.е. $l(T) \subseteq H \cup A_{PredC}(\sigma)$
3. все переходы $\frac{s_1 \; s_2 \; \ldots \; s_n}{s_0}$ из T являются правилами вывода, т.е.

$$\frac{s_1 \; s_2 \; \ldots \; s_n}{s_0} \in R_{PredC}(\sigma)$$

2.7 Характеризация вывода

Теорема (эквивалентность выводимости)

Для любого множества секвенций H и секвенции s,
$H \rhd s \Leftrightarrow$ для s существует дерево вывода из предпосылок H.

Доказательство

Аналогично тому, что приведено в логике высказываний.

2.8 Тождественно истинные секвенции

Определение

Секвенция s называется **тождественно истинной**, тогда и только тогда, когда она получена из выводимой секвенции s' логики высказываний, заменой всех пропозициональных переменных $\{p_1, \ldots, p_n\} = V(s')$ некоторыми формулами $\psi_1, \ldots, \psi_n$ логики предикатов.

Предложение

Каждая тождественно истинная секвенция является выводимой в PredC_σ.

Доказательство

Возьмем дерево вывода T секвенции логики высказываний s'. Заменив в этом дереве все вхождения переменных p_i формулами ϕ, получим дерево вывода для s в PredC_σ.

Лемма

Пусть ϕ - формула, $x_1, \ldots, x_n$ - переменные и $t_1, \ldots, t_n$ - термы. Тогда:

1. $\rhd \forall x_1 \ldots \forall x_n \phi \vdash (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{t_1, \ldots, t_n}$
2. $\rhd (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{t_1, \ldots, t_n} \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \phi$

Доказательство

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - это n некоторых новых переменных, которых нет в $\phi, t_1, \ldots, t_n$ и которые отличаются от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда отметим, что для любого $1 < i < n$ верно следующее

$$(\forall x_{i+1} \ldots \forall x_n (\phi)^{x_1, \ldots, x_{i-1}}_{y_1, \ldots, y_{i-1}})^{x_i}_{y_i} = \forall x_{i+1} \ldots \forall x_n (\phi)^{x_1, \ldots, x_i}_{y_1, \ldots, y_i}$$

Рассмотрим следующий вывод:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n} \vdash (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}}{\forall x_n (\phi)^{x_1,\dots,x_{n-1}}_{y_1,\dots,y_{n-1}} \vdash (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}}}{\dots}}{\forall x_1 \dots \forall x_n \phi \vdash (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}}$$

Теперь, n раз использовав правило введения квантора $\forall$, получим $\forall x_1 \dots \forall x_n \phi \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}$. Пусть $\psi = (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}$. Тогда для любого $1 < i < n$ верно следующее

$$(\forall y_{i+1} \dots \forall y_n (\psi)^{y_1,\dots,y_{i-1}}_{t_1,\dots,t_{i-1}})^{y_i}_{t_i} = \forall y_{i+1} \dots \forall y_n (\psi)^{y_1,\dots,y_i}_{t_1,\dots,t_i}$$

Следовательно, можно вывести секвенцию $\forall y_1 \dots \forall y_n \psi \vdash (\psi)^{y_1,\dots,y_n}_{t_1,\dots,t_n}$ аналогично выводу $\forall x_1 \dots \forall x_n \phi \vdash (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{y_1,\dots,y_n}$. поскольку $(\psi)^{y_1,\dots,y_n}_{t_1,\dots,t_n} = (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n}$

$$\cfrac{\forall x_1 \dots \forall x_n \phi \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n \psi \qquad \cfrac{\forall y_1 \dots \forall y_n \psi \vdash (\phi)^{y_1,\dots,y_n}_{t_1,\dots,t_n}}{\vdash \forall y_1 \dots \forall y_n \psi \to (\phi)^{y_1,\dots,y_n}_{t_1,\dots,t_n}}}{\forall x_1 \dots \forall x_n \phi \vdash (\phi)^{x_1,\dots,x_n}_{t_1,\dots,t_n}}$$

Вторая секвенция доказывается аналогично.. $\square$

2.9 Допустимые правила вывода

Лемма

Следующие правила вывода допустимы в PredC_σ:

1) если $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$, то $\rhd \frac{\phi_1,\dots,\phi_n \vdash \chi}{\psi_1,\dots,\psi_n \vdash \chi}$

2) $\rhd \frac{\Gamma \vdash \phi \;\; \Gamma,\phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ 3) $\rhd \frac{\Gamma_1,\phi,\psi,\Gamma_2 \vdash \chi}{\Gamma_1,(\phi\wedge\psi),\Gamma_2 \vdash \chi}$ 4) $\rhd \frac{\Gamma_1,(\phi\wedge\psi)}{\Gamma_1,\phi,\psi,}$

5) $\rhd \frac{\Gamma \vdash (\phi\wedge\neg\phi)}{\Gamma \vdash \bot}$ 6) $\rhd \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma,\neg\phi \vdash \bot}$ 7) $\rhd \frac{\Gamma,\phi \vdash \psi}{\Gamma,\neg\psi \vdash \neg}$

8) $\rhd \frac{\Gamma,\neg\phi \vdash \neg\psi}{\Gamma,\psi \vdash \phi}$

9) $\rhd \frac{\phi_1,\dots,\phi_n \vdash \phi_0}{(\phi_1)^{x_1,\dots,x_k}_{t_1,\dots,t_k},\dots,(\phi_n)^{x_1,\dots,x_k}_{t_1,\dots,t_k} \vdash (\phi_0)^{x_1,\dots,x_k}_{t_1,\dots,t_k}}$

Доказательство

Доказательства выводимости правил 1-8 аналогичны приведённым в логике высказываний. Докажем 9. Начиная с секвенции $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi_0$, $n-1$ раз применим правило введения импликации и получим секвенцию

$\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots)$. Затем, k раз использовав правило введения квантора $\forall$, получим секвенцию $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots))$

$$\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots))$$

По лемме выводимой является также секвенция

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k (\phi_1 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots) \vdash (\phi_1 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k}$$

Тогда по правилу сечения

$$\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi_0) \ldots))^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k}$$

n раз использовав аксиомы $(\phi_i)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k} \vdash (\phi_i)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k}$ и правило исключения импликации, получим искомую секвенцию

$$(\phi_1)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k}, \ldots, (\phi_n)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k} \vdash (\phi_0)^{x_1, \ldots, x_k}_{t_1, \ldots, t_k}$$

□

2.10 Свойства равенство

Лемма (свойства равенства)

В PredC_σ следующие секвенции являются выводимыми

1. $\vdash (t = t)$
2. $(t = s) \vdash (s = t)$
3. $(t = s), (s = r) \vdash (t = r)$
4. $(r_1 = s_1), \ldots, (r_n = s_n) \vdash (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{r_1, \ldots, r_n} = (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{s_1, \ldots, s_n}$
5. $(r_1 = s_1), \ldots, (r_n = s_n), (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{r_1, \ldots, r_n} \vdash (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{s_1, \ldots, s_n}$

где t, s, r, t_i, s_i - термы, а ϕ - формула.

Доказательство

1) Секвенция $\vdash (t = t)$ выводится из аксиомы $\vdash (x = x)$ по предыдущей лемме. 2) Пусть x, y, z - попарно разные переменные. Тогда возможно построить дерево вывода:

$$\cfrac{\cfrac{\vdash (x = x) \qquad (x = y), (z = x)^z_x \vdash (z = x)^z_y}{(x = y) \vdash (y = x)}(cut)}{(t = s) \vdash (s = t)}$$

3) Пусть x, x_1, y, z - попарно разные переменные. Рассмотрим дерево вывода секвенции $(t = s), (s = r) \vdash (t = r)$:

$$\cfrac{\cfrac{(y = z), (x = x_1)^{x_1}_y \vdash (x = x_1)^{x_1}_z}{(x = y), (y = z) \vdash (x = z)}}{(t = s), (s = r) \vdash (t = r)}$$

Пусть $y_1, \ldots, y_n,\ z_1, \ldots, z_n$ - попарно разные переменные, также отличные от $x_1, \ldots, x_n$ и не входящие в термы $t, t_1, \ldots, t_n$ и формулу ϕ.
4) Отметим, что $(t)^{x_i}_{y_i} = ((t)^{x_i}_{z_i})^{z_i}_{y_i}$. В дальнейшем внешние скобки, для краткости, будем опускать. Тогда

$$\frac{\vdash (t)^{x_1}_{y_1} = (t)^{x_1}_{y_1} \quad y_1 = z_1, (t)^{x_1}_{y_1} = ((t)^{x_1}_{z_1})^{z_1}_{y_1} \vdash (t)^{x_1}_{y_1} = (t)^{x_1}_{z_1}}{y_1 = z_1 \vdash (t)^{x_1}_{y_1} = (t)^{x_1}_{z_1}}$$

По лемме при $n > 1$ следующая секвенция является выводимой:

$$y_1 = z_1 \vdash (t)^{x_1, x_2}_{y_1, y_2} = (t)^{x_1, x_2}_{z_1, y_2}$$

Выводимость секвенции $y_1 = z_1 \vdash (t)^{x_1, x_2}_{y_1, y_2} = (t)^{x_1, x_2}_{z_1, y_2}$ Существует аксиома $y_2 = z_2, (t)^{x_1, x_2}_{x_1, y_2} = ((t)^{x_1, x_2}_{z_1, z_2})^{z_2}_{y_2} \vdash (t)^{x_1, x_2}_{y_1, y_2} = (t)^{x_1, x_2}_{z_1, z_2}$ затем по правилу сечения может быть выведена секвенция $y_1 = z_1, y_2 = z_2 \vdash (t)^{x_1, x_2}_{y_1, y_2} = (t)^{x_1, x_2}_{z_1, z_2}$. n раз произведя эту операцию, получим вывод секвенции $y_1 = z_1, \ldots, y_n = z_n \vdash (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{y_1, \ldots, y_n} = (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{z_1, \ldots, z_n}$. Применяя лемму к этой секвенции, получим вывод искомой секвенции $(r_1 = s_1), \ldots, (r_n = s_n) \vdash (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{r_1, \ldots, r_n} = (t)^{x_1, \ldots, x_n}_{s_1, \ldots, s_n}$.
5) Поскольку $(\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{y_1, \ldots, y_n} = ((\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{z_1, \ldots, z_n})^{z_1, \ldots, z_n}_{y_1, \ldots, y_n}$, существует аксиома $y_1 = z_1, (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{y_1, \ldots, y_n} \vdash (\phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{z_1, y_2, \ldots, y_n}$. При $n > 1$ из этой секвенции и аксиомы $y_2 = z_2, (\phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{z_1, y_2, \ldots, y_n} \vdash (\phi)^{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}_{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n}$ по правилу сечения получим секвенцию $y_1 = z_1, y_2 = z_2, (\phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{y_1, y_2, \ldots, y_n} \vdash (\phi)^{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}_{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n}$. n раз произведя эту операцию, получим $y_1 = z_1, \ldots, y_n = z_n, (\phi)^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{y_1, y_2, \ldots, y_n} \vdash (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{z_1, \ldots, z_n}$, затем по лемме получим искомую секвенцию $(r_1 = s_1), \ldots, (r_n = s_n), (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{r_1, \ldots, r_n} \vdash (\phi)^{x_1, \ldots, x_n}_{s_1, \ldots, s_n}$.$\square$