17 лекция

Ортогональные базисы в Евклидовых пр-вах

] X – Евклидово векторное пр-во $\Rightarrow$

1) $\dim X = n$ над полем $\mathbb{R}$
2) На X задано скалярное произведение $(x,y) \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$
   - a) $(x,x) > 0$ $\forall x \in X, x \neq 0$, $x = 0 \Rightarrow (x,x) = 0$
   - б) $(x,y) = (y,x)$
   - c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x,y,z \in X$

] $X = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim X = n$ и для стандартного базиса $e_1 = (1, \dots, 0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$ ... , $e_n = (0,0,\dots,1)$ справедливы соотношения:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \Rightarrow (x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Тогда **длиной вектора** $v \in X$ называют $\|v\| \equiv \sqrt{(v,v)}$. $v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$

$\forall x,y \in X$ справедливо неравенство Коши – Буняковского:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{(C-B)}$$

Причем $= \Leftrightarrow x = \lambda y$

Из (C-B) $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ $\forall x,y \neq 0$ имеет на $0 \leq \varphi \leq \pi$ ровно один корень.

Этот корень называется **углом** между ненулевыми векторами $x,y \in X$

$x,y \in X$ **ортогональны** $(x \perp y)$, если угол между ними $= \frac{\pi}{2}$

] $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – система попарно ортогональных векторов $(x_i \perp x_j)$ $\forall i \neq j$, $i,j = 1..n$.

Тогда справедлива теорема **Пифагора** $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$:

Proof: $\underset{\|x_1 + \dots + x_n\|^2}{\underset{\|}{(x_1 + \dots + x_n; x_1 + \dots + x_n)}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i; x_j) =$ (в силу ортогональности) $= \underset{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}{\underset{\|}{\sum_{i=1}^n (x_i; x_i)}}$

Ортогональный базис – базис, где все вектора попарно ортогональны: $\forall i,j \in n$ $i \neq j \Rightarrow (e_i; e_j) = 0$

Ортонормированный базис – ортогональный базис: $\forall i \in n$ $(\|e_i\| = 1)$

$$e_j' = \frac{1}{\|e_j\|} e_j \quad j = 1 \dots n$$

При этой замене имеем $(e_i'; e_j') = \frac{1}{\|e_i\|} \cdot \frac{1}{\|e_j\|}(e_i; e_j) = \delta_i^j$

Теорема (линейная независимость ортогональных векторов):

] $e_1, \dots, e_n$ – попарно ортогональная система векторов $\Rightarrow$ они линейно независимы

Proof: $\|e_j\| \neq 0$, $j = 1..n$] $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \overset{(1)}{=} 0$] $\exists \alpha_k \neq 0$. Тогда, домножив обе части равенства (1) скалярно на e_k получим:

$0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i; e_k\right) = (0; e_k) = \alpha_k \|e_k\|^2$. $e_k \neq 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$, что противоречит условию $\Rightarrow$

$\alpha_i = 0$ $\forall i \in n \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ – линейно независима #

Следствие. Если $\dim X = n$, а число векторов в ортогональной системе $(e_1, \dots, e_m)$ равно n. Т.е. $n = m$, то это ортогональный базис исходного Евклидового пр-ва

Теорема] $(e_1, \dots, e_n)$ ортонормированный базис X. Тогда координаты любого вектора $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$ (2) находятся особенно просто

Скалярно домножаем обе части равенства (2) на e_k:

$$(v, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i; e_k\right) = c_k(e_k; e_k) = c_k \quad \forall k = 1..n$$

В Евклидовом пр-ве X линейная оболочка $\langle e \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \operatorname{span}\{e\}$ $\forall e \neq \vec{0}$ называется **прямой**.

Если $\|e\| = 1$, то (x,e) называется **проекцией x на прямую $\langle e \rangle_{\mathbb{R}}$**

] $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис X. Тогда прямые $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \dots, \langle e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ называются **осями координат** в X

Таким образом, координаты любого вектора $v \neq 0$? в ортонормированном базисе совпадает с проекциями v на оси координат, соответств. этому базису.

] X_1 – **линейное подпространство** X, т.е. $X_1 \subseteq X$ и:

$$\forall x,y \in X_1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in X_1 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\dim X_1 \leq \dim X$. Если $\dim X_1 < \dim X$, то X_1 – **собственное подпространство** X

Пример:] $v \in X$, $v \neq 0$. Тогда $X_1 \equiv \{u \mid u \perp v\}$ является линейным подпространством:

$$] x,y \in X_1. \ (\alpha x + \beta y; v) = \alpha(x,v) + \beta(y,v) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in X_1$$

Пространство $\{u \mid u \perp v\}$ называют **ортогональным дополнением** к v.

Вектор $v \in X$ ортогонален подпространству $X_1 \subseteq X$, если $v \perp u$ $\forall u \in X_1$

$X_1^\perp$ = мн-во всех векторов, ортогональных X_1 (тоже подпр-во)
ортогональное дополнение к X_1 в пр-ве X

□ **Теорема (процесс ортогонализации):**

] $(e_1, \dots, e_m)$ – система из m линейно-независимых векторов $\in X$. Тогда $\exists$ ортонормированная система векторов $(e_1', \dots, e_m')$, обладающая тем св-вом, что линейные оболочки $L_i = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ и $L_i' = \operatorname{span}\{e_1', \dots, e_i'\}$ совпадают $\forall i \in m \leq n$

Proof: Построение ортонормированной системы по индукции

Basis: 1-ый вектор $e_1' = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \Rightarrow \|e_1'\| = 1$. Более того $L_1' = \langle e_1' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} = L_1$

Step:] we have $(e_1', \dots, e_k')$, который удовл. условиям индукции: $L_i' = L_i$ $\forall i \in k$. Построим вектор e_{k+1}':

1) $e_{k+1} \notin L_k = L_k'$, иначе бы e_{k+1} можно было бы выразить через $(e_1, \dots, e_k)$, а это противоречит условию о линейной независимости

2) Рассмотрим мн-во векторов вида $v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i'$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (3)

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$ $(L_{k+1} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k, v\})$. Оказывается, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ можно взять таким образом, что v будет ортогонален $(e_1', \dots, e_k')$, $v \perp L_k'$.

Искомые значения λ_i можно найти из условия:

$$(v, e_j') = 0 \quad \forall j \in k:$$

$$(v, e_j') = \left(e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i', e_j'\right) = (e_{k+1}, e_j') - \sum_{i=1}^k \lambda_i (e_i'; e_j') = (e_{k+1}, e_j') - \lambda_j \underbrace{\|e_j'\|^2}_{=1} =$$

$= (e_{k+1}, e_j') - \lambda_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = (e_{k+1}, e_j')$. Тогда, вектор $v_* = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i'$, где $\lambda_i = (e_{k+1}, e_i')$ обладает следующими св-вами:

1) $v_* \neq 0$
2) $v_* \perp L_k'$
3) $L_{k+1} = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k, v_*)$.

] $e_{k+1}' = \dfrac{v_*}{\|v_*\|} \Rightarrow e_1', \dots, e_{k+1}'$ – ортонормирована и $L_{k+1} = L_{k+1}'$ ■

This процесс ортогонализации называется Грама-Шмидта

Следствие: Всякую ортонормированную систему векторов евклидового пр-ва X можно дополнить до ортонормированного базиса X:

1) дополняем до базиса (была такая теорема)
2) делаем его ортонормированным

Proofs:

C-B **Proof:**

$\exists x,y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$0 \leq (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda(x, \lambda x + y) + (y; \lambda x + y) = \lambda[\lambda(x,x) + (x;y)] + \lambda(x;y) + (y;y) =$

$= \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x;y) + (y;y) \Rightarrow D = 4(x;y)^2 - 4(x;x)(y;y) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x;y)^2 \leq (x;x)(y;y) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x;y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$