Содержание

1 Определение Аффинного пространства и эталонного Аффинного пространства $\mathbb{R}^n_{Aff}$

Пусть A — Аффинное пространство, связанное с векторным пространством X, $\dim X = n$. Любым двум точкам $\dot{A}$, $\dot{B}$ из A сопоставляется вектор из X с началом в $\dot{A}$ и концом в $\dot{B}$, то есть вектор $\overrightarrow{\dot{A}\dot{B}}$, при этом выполняются две аксиомы:

I) $\forall \dot{A} \in A$ и $\forall a \in X$ $\exists! \overrightarrow{\dot{B}} \in A$: $\overrightarrow{\dot{A}\overrightarrow{\dot{B}}} = a$;

II) $\forall \dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \in A$ справедливо равенство треугольника: $\overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} + \overrightarrow{\dot{B}\dot{C}} = \overrightarrow{\dot{A}\dot{C}}$ $(\overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} + \overrightarrow{\dot{B}\dot{C}} + \overrightarrow{\dot{C}\dot{A}} = 0)$.

В частности, при $\dot{A} = \dot{B} = \dot{C}$ в (II) имеем $\overrightarrow{\dot{A}\dot{A}} = 0$; $\dot{C} = \dot{A} \Rightarrow \overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} = -\overrightarrow{\dot{B}\dot{A}}$. По определению, $\dim A = \dim X = n$. Пространство X называют также ассоциированным с Аффинным пространством A.

Пример (Аффинное пространство $\mathbb{R}^n$). Обозначение то же самое, что и для векторного координатного пространства $\mathbb{R}^n$. В случае, если их требуется различать, применяем обозначения $\mathbb{R}^n_{Aff}$ и $\mathbb{R}^n_{vec}$ соответственно. Чтобы определить $A = \mathbb{R}^n_{Aff}$, требуется указать:

1. Что называется его точками;

2. Что называется ассоциированными векторами;

3. Как именно паре точек сопоставляется вектор.

Точками $\mathbb{R}^n_{Aff}$ называются столбцы $\dot{A} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$, где $x^j \in \mathbb{R}$. Вектора из $X = \mathbb{R}^n_{vec}$ — тоже столбцы $a = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$. Если $\dot{A} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ и $\dot{B} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$, то $a = \overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} = \begin{bmatrix} y^1 - x^1 \\ y^2 - x^2 \\ \vdots \\ y^n - x^n \end{bmatrix}$.

Проверим, что выполняется аксиома (I). Пусть $\dot{A} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{Aff}$, $a = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{vec}$. Тогда $\exists! \overrightarrow{\dot{B}} \in \mathbb{R}^n_{Aff}$, $\dot{B} = \begin{bmatrix} x^1 + a^1 \\ x^2 + a^2 \\ \vdots \\ x^n + a^n \end{bmatrix} : \overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} = a$.

Проверим, что выполняется аксиома (II). Пусть $\dot{A} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$, $\dot{B} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$, $\dot{C} = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{bmatrix}$. Тогда $\overrightarrow{\dot{A}\dot{B}} + \overrightarrow{\dot{B}\dot{C}} = \begin{bmatrix} y^1 - x^1 \\ y^2 - x^2 \\ \vdots \\ y^n - x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^1 - y^1 \\ z^2 - y^2 \\ \vdots \\ z^n - y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^1 - x^1 \\ z^2 - x^2 \\ \vdots \\ z^n - x^n \end{bmatrix} = \overrightarrow{\dot{A}\dot{C}}$.

Таким образом $\mathbb{R}^n_{Aff}$ — это действительно Аффинное пространство, $\dim \mathbb{R}^n_{Aff} = n$.

2 Аффинная система координат, координатный изоморфизм в эталонное пространство. Изоморфизм Аффинных пространств одинаковой размерности

Пусть X — векторное пространство, ассоциированное с Аффинным A, $\dim X = n$. Возьмем какой-нибудь базис

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \tag{(B)}$$

пространства X.

Определение

Аффинной системой координат в A называется совокупность, состоящая из точки $\dot{O}$, принадлежащей A, и векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ выбранного базиса. Указанная система обозначается как $\dot{O}e_1, e_2, \ldots, e_n$.

В соответствии с аксиомой (I) Аффинного пространства векторы e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ удобно отложить от выбранной точки $\dot{O} \in A$. При этом радиус–вектор $\overrightarrow{\dot{O}\dot{A}}$ разложим по базису (B), то есть $\overrightarrow{\dot{O}\dot{A}} = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \ldots + a^n e_n$.

Вектор $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ задает координаты точки $\dot{A}$ из A в системе координат $\dot{O}e_1, e_2, \ldots, e_n$. Таким образом получаем отображение $\dot{A} \in A \mapsto$

$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{Aff}$. Это отображение задает изоморфизм произвольного Аффинного пространства A в эталонное $\mathbb{R}^n_{Aff}$ и называется координатным изоморфизмом.

Следствие

Любые два Аффинных пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.

3 Связь Аффинных координат точки в двух разных координатных системах

Пусть в Аффинном пространстве A взяты две системы координат: $\dot{O}e_1, e_2, \ldots, e_n$ — "старая"и $\dot{\tilde{O}}\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \ldots, \tilde{e_n}$ — "новая". Найдем связь координат точки $\dot{M}$ в этих двух системах. Пусть "старые"координаты точки $\dot{M}$ — это скаляры $x^1, x^2, \ldots, x^n$ из $\mathbb{R}$, то есть $\overrightarrow{\dot{O}\dot{M}} = \sum\limits_{j=1}^{n} x^j e_j = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$.

Аналогично, "новые"координаты точки $\dot{M}$ — это скаляры $\tilde{x^1}, \tilde{x^2}, \ldots, \tilde{x^n}$ из $\mathbb{R}$, то есть $\overrightarrow{\dot{\tilde{O}}\dot{M}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{x^j}\tilde{e_j} = \begin{bmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \ldots & \tilde{e_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n} \end{bmatrix}$.

Напомним, что "новый"базис связан со "старым"соотношениями $\begin{bmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \ldots & \tilde{e_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \cdot C$, где C — квадратная матрица размера 4 на 4. Столбцы матрицы $C = (c_{ij})$ состоят из координат "новых"базисных векторов в "старом"базисе. C называется матрицей перехода. Матрица C тогда и только тогда является матрицей перехода от одного базиса к другому, когда C обратима.

Теорема

Следующие утверждения эквивалентны:

- Квадратная матрица C обратима;
- Столбцы матрицы C линейно независимы;
- Строки матрицы C линейно независимы;
- $\det C \neq 0$.

Если C — матрица перехода от базиса (B) к базису $(\tilde{B})$, то координаты вектора $e = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x^j} \tilde{e_j}$, то координаты вектора в "старом"и "новом"базисах связаны соотношением $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n} \end{bmatrix}$, где C — матрица перехода от базиса (B) к базису $(\tilde{B})$.

Получим аналогичное соотношение для Аффинных координат точки.

Пусть $\overrightarrow{\dot{O}\dot{M}} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\dot{\tilde{O}}\dot{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \dots & \tilde{e_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\dot{O}\dot{\tilde{O}}} = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j = \begin{bmatrix} e^1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$, где $v^1, b^2, \dots, b^n$ — координаты точки σ в "старой системе координат.

Используем равенство $\overrightarrow{\dot{O}\dot{M}} = \overrightarrow{\dot{\tilde{O}}\dot{M}} + \overrightarrow{\dot{O}\dot{\tilde{O}}}$ (равенство треугольника).

Имеют место разложения $\overrightarrow{\dot{\tilde{O}}\dot{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \dots & \tilde{e_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n} \end{bmatrix}$, где C — матрица перехода.

Подставляя разложение векторов $\overrightarrow{\dot{O}\dot{M}}$, $\overrightarrow{\tilde{\dot{O}}\dot{M}}$ и $\overrightarrow{\dot{O}\tilde{\dot{O}}}$ по векторам $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в равенство треугольника $\overrightarrow{\dot{O}\dot{M}} = \overrightarrow{\tilde{\dot{O}}\dot{M}} + \overrightarrow{\dot{O}\tilde{\dot{O}}}$, получаем $\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \left\{ C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \right\}.$$

В силу однозначности разложения вектора по базису получаем $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} =$

$C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$ $(\overrightarrow{\dot{O}B} \to \overrightarrow{\dot{O}\tilde{\dot{B}}})$.

1. Если $\dot{O} = \tilde{\dot{O}}$, то $b^1 = b^2 = \ldots = b^n = 0$ и формулы принимают вид $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix}$, где C — матрица перехода от $\overrightarrow{\dot{O}B}$ к $\overrightarrow{\dot{O}\tilde{\dot{B}}}$.

2. Если $(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \ldots, \tilde{e_n})$, то $C = E$.

4 Определение Аффинного преобразования и его общий вид в произвольном базисе Аффинного пространства. Примеры

Пусть $\dot{M}$ и $\dot{N}$ — точки Аффинного пространства, имеющие следующие разложение по базису $\dot{O}e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\dot{M}:\ \overrightarrow{\dot{O}\dot{M}} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j;$$
$$\dot{N}:\ \overrightarrow{\dot{O}\dot{N}} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Зададим преобразование A в себя соотношением $\dot{M} \mapsto \dot{N}$, причем

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}, \text{ где } \det C \neq 0. \tag{(Aff)}$$

Если ввести обозначения $y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$, то соотношение (Aff) запишется в укороченном виде

$$y = Cx + b. \tag{(Aff')}$$

Определение

Преобразование Аффинного пространства в себя, задаваемое формулой

$$y = Cx + b, \tag{($\dot{M} \mapsto \dot{N}$)}$$

где $\det C \neq 0$, называется Аффинным.

Теорема

Преобразование $y = Cx + b$, где $\det C \neq 0$, Аффинного пространства в себя, в любом базисе $\tilde{\dot{O}}\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \ldots, \tilde{e_n}$ имеет вид

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b},$$

где $\det \tilde{C} = \det C \neq 0$.

Доказательство

Связь "старой"системы координат $\dot{O}e_1, e_2, \dots, e_n$ с "новой"задается соотношениями $\begin{bmatrix}\tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \dots & \tilde{e_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \dots & e_n\end{bmatrix} T$, $\overrightarrow{\dot{O}\dot{\tilde{O}}} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j$. Здесь T — невырожденная матрица, $\det T \neq 0$. При этом "старые"координаты точки $\dot{M}$ — это $x = \begin{bmatrix}x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n\end{bmatrix}$, связаны с "новыми"$\tilde{x} = \begin{bmatrix}\tilde{x^1} \\ \tilde{x^2} \\ \vdots \\ \tilde{x^n}\end{bmatrix}$ соотношениями

$$x = T\tilde{x} + a, \text{ где } a = \begin{bmatrix}a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n\end{bmatrix}. \qquad ((M))$$

Аналогичные равенства имеют место для координат точки $\dot{N}$:

$$y = T\tilde{y} + a, \text{ где } a = \begin{bmatrix}a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n\end{bmatrix}. \qquad ((N))$$

Подставляя равенства (M) и (N) в равенство (Aff), находим $T\tilde{y} + a = C(T\tilde{x}+a)+b \Leftrightarrow T\tilde{y} = CT\tilde{x}+Ca-a+b \Leftrightarrow \tilde{y} = T^{-1}CT\tilde{x}+T^{-1}(Ca-a+b) \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b}$, где $\tilde{C} = T^{-1}CT$, $\tilde{b} = T^{-1}(Ca + b - a)$. Кроме того, имеем $\det \tilde{C} = (\det T)^{-1} \cdot \det C \cdot (\det T) = (\det T)^{-1}(\det T) \det C = \det C$. $\square$

Таким образом матрица, задающая Аффинные преобразования, от системы координат в A зависит. Однако ее определитель от координатной системы не зависит, то есть является инвариантом Аффинного пространства.

5 Свойства Аффинных преобразований. Группа $A(n)$. Подгруппа собственных преобразований

Отметим некоторые свойства Аффинного преобразования.

1. Преобразование $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, задаваемое формулой
$$y = Cx + b, \tag{(Aff)}$$
где $\det C \neq 0$, представляет собой взаимно однозначное преобразование. $x = C^{-1}(y - b) = C^{-1}y - C^{-1}b$;

2. Последовательное выполнение двух аффинных преобразований — это снова Аффинное преобразование;

3. Тождественное преобразование $M \mapsto M$ является Аффинным. $C = E$, $B = 0$;

4. Преобразование, обратное данному Аффинному, также Аффинное;

5. Композиция Аффинных преобразований ассоциативна.

Свойства 1–5 означают, что все Аффинные преобразования образуют группу. Обозначение этой группы — $A(n)$.

Определение

Аффинные преобразования $y = Cx + b$, где $\det C > 0$, называются собственными.

Собственные преобразования образуют подгруппу в $A(n)$.

6 Плоскости и прямые в Аффинном пространстве. Параллельные плоскости. Критерий Аффинного преобразования. Лемма о геометрических свойствах Аффинного преобразования

Пусть $\dot{M}$ — фиксированная точка Аффинного пространства A с сопутствующим векторным пространством X. Выберем в X какое-нибудь подпространство Y, YCX, $\dim X = n < +\infty$.

Определение

Множество вида $\Pi \equiv \dot{M} + Y = \{\dot{N} \in A \colon \dot{N} = \dot{M} + y, y \in Y\}$ называется плоскостью в A или Аффинным подпространством. При этом размерностью этого Аффинного подпространства называется число $m = \dim Y \leq n$.

В условиях определения говорят, что плоскость Π проходит через точку $\dot{M}$ в направлении векторного пространства Y.

При $m = 0$ плоскость Π — это точка $\dot{M}$. Если $m = 1$, то Π — это прямая. Пусть $\dot{N} \in \Pi$ и при этом $\dot{N} \neq \dot{M}$. Тогда Π состоит из всех точек вида $\dot{M} + \lambda\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}}$, где λ — скаляр, а $\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}} \in Y$. При $\lambda = 1$ точки $\dot{M} + \lambda\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}} = \dot{N}$ и по этой причине говорят, что прямая Π проходит через точки $\dot{M}$ и $\dot{N}$. Если $m = n - 1$, то множество Π называют гиперплоскостью. Подпространство Y называют направляющим для плоскости Π.

Теорема

Всякая плоскость в Аффинном пространстве сама является Аффинным пространством с ассоциированным векторным пространством YCX.

Определение

Любые две плоскости Аффинного пространства в направлении одного и того же векторного подпространства Y называются параллельными. Параллельные плоскости $\dot{M} + Y$ и $\dot{N} + Y$ совпадают $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}} \in Y$.

Теорема

Взаимно однозначное преобразование Аффинного пространства в себя, при котором прямые переходят в прямые, является Аффинным преобразованием.

Лемма

При Аффинном преобразовании параллельные плоскости (прямые) переходят в параллельные, пересекающиеся плоскости (прямые) переходят в пересекающиеся. Прямая, пересекающая плоскость, переходит в прямую, пересекающую плоскость.

7 Метрика Аффинного пространства в случае, когда ассоциированное с ним векторное пространство Евклидово. Теорема об основном свойстве Аффинного преобразования

Отдельный интерес представляет случай, когда ассоциированное с Аффинным пространством A векторное пространство X представляет собой Евклидово пространство. В этом случае определено расстояние между любыми двумя точками $\dot{M}$ и $\dot{N}$ из A. В качестве такого метрического параметра выбирается величина $\rho(\dot{M}, \dot{N}) = |\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}}|$, где $|\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}}| = (\dot{M}\dot{N}, \dot{m}\dot{N})^{\frac{1}{2}}$ — норма вектора $\overrightarrow{\dot{M}\dot{N}}$ из X. Функция $\rho(\bullet, \bullet)$ обладает следующими свойствами

1. $\rho(\dot{M}, \dot{N}) \leq 0$ и $= 0 \Leftrightarrow \dot{M} = \dot{N}$;
2. $\rho(\dot{M}, \dot{N}) = \rho(\dot{N}, \dot{M})$ (симметричность);
3. $\rho(\dot{M}, \dot{N}) \leq \rho(\dot{M}, \dot{L}) + \rho(\dot{L}, \dot{N})$ $\forall \dot{M}, \dot{N}, \dot{L}$ из A (Неравенство треугольника).

Свойства 1–3 означают, что бинарная функция $\rho(\bullet, \bullet)$ задает на $A \times A$ метрику.

Аффинное преобразование $y = Cx + b$, $\det C \neq 0$, в случае, если X — Евклидово пространство, называют Аффинным преобразованием Евклидова пространства.

Отметим, что в общем случае расстояние между точками Аффинного пространства A при Аффинном преобразовании не сохраняется. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема (основное свойство Аффинных преобразований)

Аффинное преобразование $y = Cx + b$, $|C| \neq 0$, Евклидова пространства сохраняет отношение длин направленных отрезков, лежащих на одной прямой Аффинного пространства.

Доказательство

Пусть есть четыре различных точки $\dot{M}_1$, $\dot{M}_2$, $\dot{M}_3$, $\dot{M}_4$, лежащих на одной прямой (M) Аффинного пространства A. При этом точка $\dot{M}_j$ предшествует на прямой (M) точке $\dot{M}_{j+1}$ с большим номером. Образы точек $\dot{M}_j$ при Аффинном преобразовании $y = Cx + b$, $\det C \neq 0$ — это точки $\dot{N}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, лежащие также на одно прямой (N) пространства A.

Введем в A Аффинные координаты и пусть точка $\dot{M}_j$ имеет в качестве этих координат вектор $\overrightarrow{x_j}$ из $\mathbb{R}^n_{Aff}$. Тогда Аффинные координаты $\overrightarrow{y_j}$ точки $\dot{N}_j$ определяются равенством $\overrightarrow{y_j} = C\overrightarrow{x_j} + \overrightarrow{b}$. Далее Вектор $\overrightarrow{\dot{M}_1\dot{M}_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$, а вектор $\overrightarrow{\dot{M}_3\dot{M}_4}$ — координаты $\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}$ из $\mathbb{R}^n_{vec}$.

Обозначим отношение длин $\frac{|\overrightarrow{\dot{M}_3\dot{M}_4}|}{|\overrightarrow{\dot{M}_1\dot{M}_2}|}$ через λ, тогда $|\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}| = \lambda|\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}|$, где $\lambda > 0$. Векторы $\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}$ и $\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$ по условию коллинеарны (лежат на одной прямой) и поэтому $(\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}) = \lambda(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})$, $\lambda > 0$.

Далее, $\overrightarrow{\dot{N}_1\dot{N}_2} \mapsto \overrightarrow{y_2} - \overrightarrow{y_1} = C(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})$, $\overrightarrow{\dot{N}_3\dot{N}_4} \mapsto \overrightarrow{y_4} - \overrightarrow{y_3} = C(\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}) = \lambda C(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})$. Следовательно, $\frac{|\overrightarrow{\dot{N}_1\dot{N}_2}|}{|\overrightarrow{\dot{M}_1\dot{M}_2}|} = \frac{|C(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})|}{|\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}|}$; $\frac{|\overrightarrow{\dot{N}_3\dot{N}_4}|}{|\overrightarrow{\dot{M}_3\dot{M}_4}|} = \frac{|C(\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3})|}{|\overrightarrow{x_4} - \overrightarrow{x_3}|} = \frac{\lambda|C(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})|}{\lambda|\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}|} = \frac{|\overrightarrow{\dot{N}_1\dot{N}_2}|}{|\overrightarrow{\dot{M}_1\dot{M}_2}|} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{\dot{M}_1\dot{M}_2}|}{|\overrightarrow{\dot{M}_3\dot{M}_4}|} = \frac{|\overrightarrow{\dot{N}_1\dot{N}_2}|}{|\overrightarrow{\dot{N}_3\dot{N}_4}|}$. $\square$

Определение

Аффинные пространства вида $y = x + b$, то есть при $C = E$, называют сдвигом (трансляцией) на вектор b. Всевозможные сдвиги Аффинного пространства образуют группу, которая обозначается как $\mathbb{R}^n$ (Здесь $n = \dim A$).

Определение

Аффинное преобразование вида $y = Cx$, то есть при $b = 0$, называется линейным. Линейные преобразования образуют группу, она обозначается как $GL(n)$.

Пример 1 (преобразование подобия).

$$\begin{cases} \overset{n}{x} = kx \\ \overset{n}{y} = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overset{n}{x} \\ \overset{n}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где $k \neq 0$, k — задано — это Аффинное преобразование плоскости.

Пример 2. Сжатие вдоль оси OY задается равенством

$$\begin{cases} \overset{n}{x} = kx \\ \overset{n}{y} = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overset{n}{x} \\ \overset{n}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где $k \neq 0$, k — задано — это Аффинное преобразование.