Тема : Числовые множества

$\mathbf{1^0}$. Натуральные, целые и рациональные числа. Алфавит математики. $\mathbf{2^0}$. Конечные и бесконечные десятичные дроби. $\mathbf{3^0}$. Отношение равенства на множестве десятичных дробей и его свойства. $\mathbf{4^0}$. Равенство и неравенство десятичных дробей. Следствия этих отношений. $\mathbf{5^0}$. Линейный порядок на множестве десятичных дробей. $\mathbf{6^0}$. Числовая прямая. Интервалы, отрезки и промежутки. Плотность конечных десятичных дробей на любом интервале. $\mathbf{7^0}$. Десятичные приближения и их свойства.

6^0. Некоторые возникшие на практике вещественные числа имеют свои, исторически установившиеся обозначения, например: $\sqrt{2}$, π, e, ... Эти особые обозначения сохраняются за соответствующими числами при проведении самых разных операций, например, арифметических. По этой причине удобно предполагать, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ *не совпадает* с множеством всех десятичных дробей, а лишь находится с ним во взаимно однозначном соответствии.

Точнее, удобно предполагать, что каждое вещественное число лишь *изображается* некоторой десятичной дробью, а каждая десятичная дробь *представляет* собой некоторое вещественное число.

Линейная упорядоченность множества десятичных дробей, а значит и множества представляемых ими вещественных чисел, позволяет отождествить эти объекты с точками горизонтальной прямой, на которой выбрано начало отсчета (нуль) и задано положительное направление (вправо от нуля).

Предполагается, что все точки прямой, лежащие правее начала, изображают положительные десятичные дроби, в то время как все точки, лежащие левее начала, соответствуют отрицательным десятичным дробям.

Оснащенную таким образом прямую называют при этом *числовой прямой*, или *числовой осью*. За ней сохраняется то же самое обозначение $\mathbb{R}$, что и за множеством вещественных чисел.

С помощью порядковых соотношений на числовой прямой определяются интервалы, отрезки и промежутки (конечные и бесконечные), например:

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},\\
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < +\infty\},\\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant b\},\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},
\end{aligned}
$$

и так далее. В частности, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Важным наглядным свойством любого интервала числовой оси является его геометрическое представление в виде *непрерывного* прямолинейного отрезка. В этой связи выделим следующее важное свойство десятичных дробей.

Лемма 4. *Для любых двух десятичных дробей* α *и* β, $\alpha < \beta$, *существует такая конечная десятичная дробь* γ, *что*

$$\alpha < \gamma < \beta.$$

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$, α и β — десятичные дроби, причем α не является периодической дробью с периодом 9.

По определению отношения $\alpha < \beta$ существует такой номер p, что $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. По лемме 2 для всех $n \geqslant p$ имеем

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}.$$

Рассмотрим следующую конечную десятичную дробь

$$\gamma = (\alpha)_{p+1} + 2 \cdot 10^{-p-1}.$$

Считая, что $\alpha_{p+1} \neq 9$, получаем $(\gamma)_{p+1} = \gamma$. Далее имеем

$$(\gamma)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} = 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}.$$

Это по определению означает, что $\alpha < \gamma$. Далее

$$(\beta)_{p+1} - (\gamma)_{p+1} = (\beta)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} - 2 \cdot 10^{-p-1} >$$

$$> 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}.$$

Таким образом, $\gamma < \beta$. $\square$

Доказанная лемма переформулируется двумя другими эквивалентными способами.

($\boldsymbol{a}$) *Между любыми двумя вещественными числами лежит конечная десятичная дробь*,

($\boldsymbol{b}$) *Множество конечных десятичных дробей плотно в множестве* $\mathbb{R}$ *вещественных чисел*.

Для заданной десятичной дроби вводится понятие ее *десятичных приближений*, каждое из которых является конечной десятичной дробью.

7^0. Введем для заданной десятичной дроби понятие ее *десятичных приближений* и исследуем свойства этих приближений.

Определение. *Пусть десятичная дробь* α *неотрицательна,* $\alpha \geqslant 0$*. Тогда конечные десятичные дроби*

$$\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n \quad \text{и} \quad \overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n + 10^{-n}$$

называются соответственно нижним и верхним десятичным приближением для α*. Если* *же десятичная дробь* α *отрицительна,* $\alpha < 0$, *то ее нижнее и верхнее десятичные приближения задаются равенствами*

$$\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n - 10^{-n} \quad \text{и} \quad \overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n.$$

Из данного определения следует, что для любой десятичной дроби α справедливы оценки

$$(\alpha)_n - 10^{-n} \leqslant \underline{(\alpha)_n} \leqslant \overline{(\alpha)_n} \leqslant (\alpha)_n + 10^{-n}. \qquad (2)$$

Лемма (о десятичных приближениях). *Для любой десятичной дроби α справедливы следующие порядковые соотношения:*

$$\underline{(\alpha)_n} \leqslant \underline{(\alpha)_{n+1}}, \quad \overline{(\alpha)_n} \geqslant \overline{(\alpha)_{n+1}}, \quad \underline{(\alpha)_n} \leqslant \alpha \leqslant \overline{(\alpha)_n}.$$

Здесь n — любое натуральное число.

Доказательство. Рассуждения проведем для нижних десятичных приближений, верхние десятичные приближения рассматриваются аналогично.

Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда

$$\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_{n+1} - (\alpha)_n =$$

$$= 0,\underbrace{00\ldots0}\alpha_{n+1} = 0,\alpha_{n+1} \cdot 10^{-n} \geqslant 0.$$

Цифра 0, охваченная в записи выше нижней фигурной скобкой, повторяется n раз. Таким образом, полученное итоговое неравенство эквивалентно требуемому:

$$\underline{(\alpha)_n} \leqslant \underline{(\alpha)_{n+1}}.$$

Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда

$$\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_{n+1} - 10^{-n-1} - (\alpha)_n + 10^{-n} =$$

$$= -0,\underbrace{00\ldots0}\alpha_{n+1} + 0,9 \cdot 10^{-n} = 0,(9 - \alpha_{n+1}) \cdot 10^{-n}.$$

Учтем, что α_{n+1} — это цифра, т.е. $\alpha_{n+1} \leqslant 9$. Поэтому имеем искомое неравенство и для отрицательных десятичных дробей:

$$\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} \geqslant 0.$$

Неравенство $\underline{(\alpha)_n} \leqslant \alpha$ докажем методом от противного. Пусть для некоторого номера n имеет место противоположная оценка $\alpha < \underline{(\alpha)_n}$. Тогда применяя определение отношения $<$

на множестве десятичных дробей, а затем лемму 2, найдем такой номер p, что

$$\big(\underline{(\alpha)n}\big)_m - (\alpha)m > 10^{-p} \quad \text{для} \quad \forall\, m \geqslant p. \qquad (3)$$

Если $\alpha \geqslant 0$, то для любого номера $m > n$ имеем далее

$$\big(\underline{(\alpha)n}\big)_m - (\alpha)m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m =$$

$$= -0,00\ldots0\alpha_{n+1}\ldots\alpha_m \leqslant 0.$$

Взяв здесь $m > \max(n, p)$, получим противоречие с оценкой (3).

Если же $\alpha < 0$, то для любого номера $m > n$ имеем

$$\left(\underline{(\alpha)_n}\right)_m - (\alpha)_m =$$

$$= -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - 10^{-n} + \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m =$$

$$= 10^{-n} \cdot 0, \alpha_{n+1} \ldots \alpha_m - 10^{-n} \leqslant 0.$$

Взяв здесь $m > \max(n, p)$, снова получим противоречие с оценкой (3).

Следовательно, для всех номеров n нижнее десятичное приближение $\underline{(\alpha)_n}$ всегда не больше чем соответствующая ему десятичная дробь: $\underline{(\alpha)_n} \leqslant \alpha$. $\square$

Лемма 5. *Десятичная дробь* α *меньше* β *тогда и только тогда когда для* *некоторого* *номера* n *верхнее десятичное приближение* $\overline{(\alpha)_n}$ *меньше нижнего десятичного приближения* $\underline{(\beta)_n}$, *т.е. когда* $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$.

Доказательство. Пусть десятичная дробь α меньше β. Тогда в соответствии с определением отношения $\alpha < \beta$ существует такой неотрицательный номер p, что

$$(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}.$$

При этом $(\alpha)_p < (\beta)_p$, а по лемме 2 при всех $n > p$ справедлива оценка

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}.$$

Взяв $n = p + 1$, воспользуемся неравенствами (2) и оценим разность снизу:

$$\underline{(\beta)_n} - \overline{(\alpha)_n} \geqslant (\beta)_n - (\alpha)_n - 2 \cdot 10^{-n} >$$

$$> 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} = 10^{-p}\left(1 - \frac{2}{10}\right) > 0.$$

Следовательно, $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$.

Пусть теперь для некоторого номера n верхнее десятичное приближение $\overline{(\alpha)_n}$ строго меньше нижнего десятичного приближения $\underline{(\beta)_n}$:

$$\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}.$$

По лемме о десятичных приближениях имеем $\alpha \leqslant \overline{(\alpha)_n}$ и $\underline{(\beta)_n} \leqslant \beta$. Подставляя оба этих неравенства в предыдущее, получаем

$$\boldsymbol{\alpha} \leqslant \overline{(\boldsymbol{\alpha})_n} < \underline{(\boldsymbol{\beta})_n} \leqslant \boldsymbol{\beta}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$. $\square$

Тема : Последовательности и их пределы

$\mathbf{1^0}$. Определение числовой последовательности и ее подпоследовательности. Стационарные и ограниченные последовательности. Монотонные последовательности. Примеры. $\mathbf{2^0}$. Определение предела числовой последовательности. Определение окрестности числа. Единственность предела. $\mathbf{3^0}$. Пределы верхних и нижних десятичных приближений числа. Ограниченность сходящихся к конечному пределу последовательностей. $\mathbf{4^0}$. Подпоследовательности сходящихся последовательностей. $\mathbf{5^0}$. Теорема о предельном переходе в неравенстве. Теорема о трех последовательностях (о двух полицейских). $\mathbf{6^0}$. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Общий вид положительного вещественного числа в виде суммы ряда по степеням десяти.

1^0. Если любому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$.

При этом каждое вещественное число a_n называется *элементом последовательности* $\{a_n\}$, а натуральное n — *номером элемента* a_n.

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел бесконечно и поэтому любая числовая последовательность всегда имеет бесконечное число элементов.

Числовые элементы a_n последовательности могут как совпадать друг с другом, так и раличаться.

Если существует такое натуральное N_0, что для всех $n \geqslant N_0$ элементы a_n совпадают друг с другом, т.е. $a_n = a_{N_0}$, то последовательность называется *стационарной*.

Пример. *Для любой десятичной дроби α ее верхние десятичные приближения $\overline{(\alpha)_n}$ образуют числовую последовательность, элементы которой — это рациональные числа. Аналогично, ее нижние десятичные приближения $\underline{(\alpha)_n}$ — это тоже числовая последовательность.*

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *вещественных чисел называется* *ограниченной сверху*, *если существует такое натуральное число* M, *что для всех* $n \geqslant M$ *имеет место неравенство* $x_n \leqslant M$.

Если же существует такое натуральное число m, что для всех $n \geqslant m$ имеет место неравенство $x_n \geqslant m$, то последовательность $\{x_n\}$

вещественных чисел называется *ограничен-ной снизу*.

Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чи-сел, ограниченная как сверху так и снизу, называется *ограниченной*.

Если существует такое вещественное число M, что для всех $n \geqslant 1$ имеет место неравен-ство $|x_n| \leqslant M$, то последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.

Например, последовательность $\{x_n\}$ с элементами $x_n = (-1)^n$ — это ограниченная последовательность.

Для любого вещественного числа x последовательность его нижних десятичных приближений $\underline{(x)_n}$ ограничена сверху, в то время как последовательность его же верхних десятичных приближений $\overline{(x)_n}$ ограничена снизу. Это утверждение сразу следует из леммы о десятичных приближениях.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *вещественных чисел называется монотонно возрастающей, если для любого номера* n *справедливо неравенство* $x_n \leqslant x_{n+1}$*. Если же для для любого номера* n *справедливо* $x_n \geqslant x_{n+1}$*, то* $\{x_n\}$ *— монотонно убывающая.*

Пример 1. Пусть $x_n = n$. Тогда $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Пример 2. Если $x_n = -n$, то $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Пример 3. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не монотонная.

Пример 4. Для любого вещественного числа x последовательность его нижних десятичных приближений монотонно возрастает, оставаясь ограниченной сверху.

Пример 5. Последовательность верхних десятичных приближений вещественного числа монотонно убывает, оставаясь ограниченной снизу.

Теорема (о стационарности). *Если монотонная последовательность целых чисел ограничена, то она стационарна.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ целых чисел монотонно возрастает и ограничена сверху, $x_n \in \mathbb{Z}$. Докажем, что $\{x_n\}$ стационарна. Предположим противное.

Тогда существует номер $n_1 > 1$ такой что $x_{n_1} > x_1$, затем существует номер $n_2 > n_1$ такой что $x_{n_2} > x_{n_1}$, и так далее.

Таким образом, имеется последовательность x_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, обладающая свойствами

$$k = 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x_{n_k} > x_{n_{k-1}},$$

причем $x_{n_0} = x_1$. По условию x_{n_k} — целое, поэтому

$$x_{n_k} > x_{n_{k-1}} \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \geqslant x_{n_{k-1}} + 1.$$

Последовательно применяя это неравенство для номеров n_k, n_{k-1}, ..., n_1, получаем оценку снизу

$$x_{n_k} \geqslant x_1 + k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

По условию существует такое целое число M что $x_{n_k} \leqslant M$. Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, получаем

$$x_1 + k \leqslant M, \quad \text{или} \quad k \leqslant M - x_1,$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что натуральное число $M - x_1$ должно больше любого другого натурального числа k, что противоречит бесконечности множества натуральных чисел. $\square$

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *вещественных чисел называется* строго *монотонно возрастающей, если для любого номера* n *справедливо строгое неравенство*

$$x_n < x_{n+1}.$$

Если же $x_n > x_{n+1}$ *для для любого номера* n*, то* $\{x_n\}$ *— строго монотонно убывающая.*

Как следует из теоремы о стационарности, любая строго монотонная последовательность целых чисел неограничена.

Пусть есть две числовых последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Если для любого k существует такой номер $n = n_k$, что $y_k = x_{n_k}$, и при этом последовательность номеров $\{n_k\}$ строго возрастающая, то $\{y_k\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$. Для обозначения подпоследовательности применяется двухуровневый индекс: $\{x_{n_k}\}$.

Следствие (теоремы о стационарности). *Если монотонно возрастающая последовательность целых чисел не является стационарной, то у нее найдется строго возрастающая подпоследовательность.*

2^0. Дадим определение предела последовательности вещественных чисел, не используя при этом понятия суммы и разности вещественных чисел, которые мы еще не определили.

Определение. *Вещественное число* x *называется* *пределом* *числовой последовательности* $\{x_n\}$, *если выполняется следующее условие: для любого интервала* (a, b) *такого что* x

принадлежит (a, b) *существует номер* N*, обладающий тем свойством, что*

$$\forall\, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in (a, b).$$

Отметим, что номер N, начиная с которого все члены x_n последовательности попадают в интервал (a, b), существенно от этого интервала зависит. Тот факт, что x является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{или} \quad (x_n \to x \quad \text{при} \quad n \to \infty).$$

В этом случае говорят также, что x_n сходится к x.

Определение. *Любой интервал (a, b), содержащий x, называется окрестностью числа x и обозначается через $O(x)$.*

Используя понятие окрестности точки, определение предела можно дать следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow$$

$$\forall\, O(x)\; \exists\, N : \forall\, n \geqslant N \implies x_n \in O(x).$$

Помимо конечных пределов числовых последовательностей рассматриваются также бесконечные пределы, определяемые одним из следующих соотношений:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall\, M\ \exists\, N : \forall\, n \geqslant N \implies x_n > M, \qquad (+\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall\, m\ \exists\, N : \forall\, n \geqslant N \implies x_n < m. \qquad (-\infty)$$

Здесь $-\infty$ и $+\infty$ — это соответственно левая и правая бесконечно удаленные точки числовой прямой

$$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

Расширенной числовой прямой называется множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

При этом окрестностью точки $\{-\infty\}$ называется любой интервал вида $(-\infty, a)$, а окрестностью точки $\{+\infty\}$ — любой интервал вида $(b, +\infty)$.

Данное определение предела является корректным: если предел последовательности существует, то он единствен.

Доказательство единственности основано на следующем свойстве.

Лемма (об отделимости). *Если* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$, *то существуют окрестности* $O(x)$ *и* $O(y)$ *такие что* $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $x < y$. Если $x = -\infty$ и $y = +\infty$, то возьмем

$$O(x) = (-\infty, a_1) \quad \text{и} \quad O(y) = (a_2, +\infty),$$

где $a_1 < a_2$. Из определения интервала следует, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Пусть числа x и y конечны. Тогда по лемме 4 существует конечная десятичная дробь a, лежащая между x и y: $x < a < y$. В этом случае возьмем $O(x) = (-\infty, a)$ и $O(y) = (a, +\infty)$, тогда $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Пусть $x = -\infty$, а число y конечно. Тогда возьмем $a = \underline{(y)_0} - 1$, $b = \overline{(y)_0} + 1$ и заметим, что (a, b) представляет собой некоторую окрестность $O(y)$ числа y. Взяв $O(x) = (-\infty, a)$, получаем $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Аналогично рассматривается случай x — конечно и $y = +\infty$. $\square$

Теорема (единственности предела). *Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два разных предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = y, \qquad x \neq y.$$

По лемме об отделимости существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Из условия, что x и y — пределы, получаем

$$\exists\, N_1 : \forall\, n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in O(x),$$

$$\exists\, N_2 : \forall\, n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in O(y).$$

Возьмем $n = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $x_n \in O(x)$ и одновременно $x_n \in O(y)$. Следовательно, пересечение $O(x) \cap O(y)$ не пусто, $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Это противоречит выбору окрестностей. $\square$

<u>Пример 6</u>. Любая стационарная последовательность имеет предел:

$$\forall\, n \quad x_n = C \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = C.$$

<u>Пример 7</u>. Для любого вещественного числа x справедливы предельные равенства

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{(x)_n} = x. \qquad (\mathbf{L})$$

Доказательство. Пусть (a, b) — произвольная конечная окрестность вещественного числа

x, то есть $a < x < b$. Тогда

$$\exists\, N : \qquad \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N}.$$

Следовательно, в соответствии со свойствами десятичных приближений справедливы неравенства

$$a \leqslant \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N} \leqslant x < b,$$

$$\forall\, n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{(x)_N} \leqslant \underline{(x)_n} \leqslant x.$$

Таким образом, для любого $n \geqslant N$ имеем неравенства $a < \underline{(x)_n} < b$. Это и означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x$.

Второе из равенств $(\mathbf{L})$ доказывается аналогично. В частности, для $x = 0$ имеем равенство $\overline{(x)_n} = 10^{-n}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n}$, равный нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$. $\square$

Пример 8. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Пример 9. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to-\infty} n = -\infty$.

Пример 10. Последовательность $x_n = (-1)^n n$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть существует вещественное число x такое что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Полагаем

$$a = \underline{(x)_0} - 1, \quad b = \overline{(x)_0} + 1, \quad N = \max\{|a|, |b|\}.$$

Здесь N — натуральное. Интервал (a, b) представляет собой окрестность $O(x)$, причем вне этой окрестности лежит любое число x_n с номером $n > N$: если n — нечетное, то $x_n \leqslant a$, если же n — четное, $n > N$, то $x_n \geqslant b$. Это противоречит определению предела. Аналогично рассматривается предположение, что $x = +\infty$ и $x = -\infty$. $\square$

Числовая последовательность называется сходящейся, если у нее имеется конечный предел. В противном случае последовательность называется расходящейся.

Иногда говорят, что последовательность, имеющая пределом $\pm\infty$, сходится (расходится) к $\pm\infty$.

Теорема (об ограниченности). *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ при $n \to \infty$, где x — вещественное число. Возьмем его произвольную конечную окрестность — интервал $O(x) = (a, b)$. Тогда существует номер N такой что при всех $n \geqslant N$ справедливы неравенства $a < x_n < b$. Следовательно, вне интервала (a, b) может находиться лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности, а именно x_1, x_2, ..., x_{N-1}. Полагаем

$$m = \min\{a, b, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\},$$

а также

$$M = \max\{a, b, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}.$$

Тогда для всех $n \geqslant 1$ имеем $m \leqslant x_n \leqslant M$. Это и означает, что рассматриваемая последовательность $\{x_n\}$ ограничена. $\square$

Обратное теореме утверждение неверно: последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, но предела не имеет.

Докажите в качестве упражнения, что если последовательность сходится к $+\infty$, то она ограничена снизу и неограничена сверху.

4^{0}. Переход от сходящейся последовательности к ее к подпоследовательности не приводит к нарушению сходимости.

Теорема (о подпоследовательностях). *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности также сходится и имеет тот же самый предел.*

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда

$$\forall\, O(x) \quad \exists\, N : \forall\, n \geqslant N \quad x_n \in O(x).$$

Но $n_k \geqslant k$ и поэтому для всех $k \geqslant N$ число x_{n_k} принадлежит $O(x)$. Это означает, по определению предела, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

$\square$