Тема : Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

$\mathbf{1^0}$. Определение устойчивого, асимптотически устойчивого и неустойчивого решений систем дифференциальных уравнений. Примеры. $\mathbf{2^0}$. Сведение задачи к исследованию устойчивости тождественно нулевого решения. $\mathbf{3^0}$. Геометрическая и механическая интерпретации решений систем. Фазовое пространство. $\mathbf{4^0}$. Устойчивость решений линейных систем первого порядка с постоянными коэффициентами. $\mathbf{5^0}$. Точки покоя и их классификация для систем из двух уравнений. $\mathbf{6^0}$. Две теоремы Ляпунова.

1^0. Регулярное изучение устойчивости решений дифференциальных уравнений началось с *задачи о движении механических систем*. По этой причине независимой переменной в теории устойчивости служит время, обозначаемое через t.

Теория устойчивости исследует вопросы поведения решений дифференциальных уравнений и систем при больших значениях времени t.

Пусть имеется вектор-функция $f(t, y)$, задаваемая равенствами

$$f(t, y) =\uparrow (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n)).$$

Задача (Коши). *Найти решение системы*

$$y' = f(t, y), \tag{1}$$

удовлетворяющие в начальный момент времени t_0 *условию*

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Предположим, что функции

$$f_1(t, y), \dots, f_n(t, y)$$

в правой части системы таковы, что задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение $y = \varphi(t)$, определенное при всех $t \geqslant t_0$.

Определение. *Решение $\boldsymbol{y = \varphi(t)}$ задачи Коши (1)-(2) устойчиво, если для любого положительного $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ найдется такое число $\boldsymbol{\delta > 0}$, что для всякого решения $\boldsymbol{y(t)}$ системы, удовлетворяющего в точке $\boldsymbol{t_0}$ условию*

$$|\boldsymbol{y(t_0) - \varphi(t_0)}| \leqslant \boldsymbol{\delta}, \tag{3}$$

одновременно для всех $\boldsymbol{t \geqslant t_0}$ выполняется неравенство $|\boldsymbol{y(t) - \varphi(t)}| \leqslant \boldsymbol{\varepsilon}$.

Определение. *Пусть решение $\varphi(t)$ задачи Коши устойчиво и при этом для любого решения $y(t)$ с условием (3) выполняется предельное равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Тогда решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Пример. Исследовать на устойчивость тождественно нулевое решение следующей задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = 4x - t^2 x, \qquad x(0) = 0.$$

Решение. Уравнение допускает разделение переменных:

$$\frac{dx}{x} = (4 - t^2)dt \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = Ce^{4t - \frac{1}{3}t^3}.$$

При $t \geqslant \sqrt{12}$ показатель у экспоненты справа отрицателен и стремится к $-\infty$ при $t \to +\infty$.

Следовательно, $|x(t)|$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, то есть тождественно нулевое решение асимптотически устойчиво. $\square$

Определение. *Пусть для решения $y = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений существует такое положительное $\varepsilon_0 > 0$, что для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ и любого решения $y(t) \neq \varphi(t)$ системы с условием $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ найдется такой момент времени $t_1 = t_1(\delta) \geqslant t_0$, в который выполняется оценка $|y(t_1) - \varphi(t_1)| > \varepsilon_0$. Тогда решение $y = \varphi(t)$ задачи Коши (1)–(2) неустойчиво.*

Пример. Устойчиво ли тождественно нулевое решение следующей задачи

$$3(t-1)\frac{dx}{dt} = x, \qquad x(2) = 0.$$

Решение. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3(t-1)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C(t-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Пусть $C \neq 0$ и $|C| \leqslant \delta$. Тогда $|x(2)| = |C| \leqslant \delta$ и при этом $|x(t)| \to +\infty$ когда $t \to +\infty$. Следовательно, нулевое решение уравнения неустойчиво. $\square$

2^0. В теории дифференциальных уравнений рассматривается обширный класс задач на устойчивость.

Задача (об устойчивости). *Пусть* $y = \varphi(t)$ *— это решение задачи Коши*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Требуется выяснить, является ли это решение устойчивым, асимптотически устойчивым или же неустойчивым.

Исследование на устойчивость заданного решения системы дифференциальных уравнений всегда *можно свести к исследованию на устойчивость тождественно нулевого решения некоторой другой системы*. Покажем, как осуществляется такое сведение.

Пусть $y = \varphi(t)$ — это решение задачи Коши

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Тогда функция $z(t) = y(t) - \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$z' = f(t, z + \varphi) - f(t, \varphi), \tag{1'}$$

$$z(t_0) = 0. \tag{2'}$$

Решением этой новой задачи Коши является тождественно нулевая функция $z(t) \equiv 0$. При этом всякому решению $z(t)$ системы (1') по формуле $y(t) = z(t) + \varphi(t)$ соответствует некоторое решение $y(t)$ системы (1).

Тождественно нулевое решение задачи Коши (1')–(2') устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво тогда и только тогда когда устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво решение $\varphi(t)$ исходной задачи Коши.

Таким образом, *вопрос об устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости* любого решения $\varphi(t)$ всегда сводится *к вопросу об устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения*.

3^0. Геометрически решение $y = \varphi(t)$ задачи Коши интерпретируют как кривую в пространстве переменных $(t, y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящую через заданную точку (t_0, y_0).

Любая кривая в $\mathbb{R}^{n+1}$, соответствующая какому-нибудь решению $y = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений, называется *интегральной кривой* для этой системы.

Механически же решение $y = \varphi(t)$ интерпретируют как траекторию, по которой в пространстве переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ под действием заданной системы внешних сил движется материальная точка.

Иначе говоря, решение $y(t)$ задачи Коши при каждом значении t определяет в $\mathbb{R}^n$ координаты материальной точки, которая вместе со временем t непрерывным образом изменяет свое местоположение все в том же пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пространство $\mathbb{R}^n$, в котором располагаются соответствующие решениям системы дифференциальных уравнений траектории, называется *фазовым пространством* для этой системы, а сами кривые, по которым происходит движение, называют *фазовыми траекториями*. Фазовые траектории представляют собой проекции на фазовое пространство интегральных кривых.

В механической интерпретации решений системы $y' = f(t, y)$ ее правая часть представляет собой вектор скорости движения материальной точки по траектории. Поэтому вектор-функцию $f(t, y)$ называют также *фазовой скоростью*.

Нулевое решение задачи Коши

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = 0$$

проецируется на фазовое пространство как отдельная точка, совпадающая с началом координат $(0, \ldots, 0)$.

Геометрически *нулевая интегральная кривая является устойчивой*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая траектория $y = y(t)$, начинающаяся в момент времени t_0 в шаре $|y(t_0)| < \delta$, при всех последующих t не выходит за пределы этого шара, то есть удовлетворяет неравенству

$$|y(t)| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0.$$

Нулевая интегральная кривая асимптотически устойчива, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая траектория $y = y(t)$, начинающаяся в момент времени t_0 в шаре $|y(t_0)| < \delta$, при всех последующих t не только не выходит за пределы этого шара, удовлетворяя неравенству $|y(t)| < \varepsilon$, но и стремится к началу координат при неограниченном росте t.

4^0. Исследуем характер поведения траекторий линейной однородной системы из двух дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2. \end{cases} \qquad (\mathbf{LS_2})$$

Тем самым выясним, при каких условиях устойчиво тождественно нулевое решение этой системы.

Теорема. *Если все собственные числа матрицы A системы*

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное число матрицы A имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.

Данная теорема справедлива и для линейных систем из n уравнений и доказывается с помощью анализа формулы общего решения. Рассмотрим подробно случай двух уравнений.

Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения рассматриваемой системы

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим три имеющиеся возможности.

1) Корни $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$ вещественны и различны.

2) Корни $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$ комплексные (комплексно-сопряженные).

3) Корни $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$ совпадают (и в этом случае они вещественны).

В случае 1) формула общего решения системы $(\mathbf{LS_2})$ имеет вид

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y_2(t) = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{$\mathbf{GS_1}$}$$

Здесь постоянные α_1 и α_2 определяют нетривиальное решение системы

$$\begin{cases} (a - \lambda_1)\alpha_1 + b\alpha_2 = 0, \\ c\alpha_1 + (d - \lambda_1)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

а β_1 и β_2 — это нетривиальное решение системы

$$\begin{cases} (a-\lambda_2)\beta_1 + b\beta_2 = 0, \\ c\beta_1 + (d-\lambda_2)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Иными словами, вектор (α_1, α_2) собственный для матрицы A системы, отвечающий собственному числу λ_1, вектор же (β_1, β_2) — собственный для матрицы A системы, отвечающий собственному числу λ_2.

1.1) Если корни λ_1 и λ_2 отрицательны, то точка на любой траектории с увеличением t перемещается по направлению к началу координат. Нулевое решение при этом асимптотически устойчиво.

1.2) Если корни λ_1 и λ_2 положительны, то точка на любой траектории с увеличением t перемещается по направлению от начала координат в бесконечность. Нулевое решение при этом неустойчиво.

1.3) Пусть корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки: например, $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$. Тогда среди траекторий имеются как траектории, по которым точка приходит в начало координат при стремлении t к бесконечности, так и траектории, уходящие из начала. Примеры приходящих траекторий дают следующие:

$$y_1(t) = C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2(t) = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_2 < 0.$$

Примеры уходящих траекторий таковы

$$y_1(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t}, \quad \lambda_1 > 0.$$

Нулевое решение в случае, если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, неустойчиво.

1.4) Пусть одно из собственных чисел равно нулю, например, $\lambda_1 = 0$, другое же отрицательно: $\lambda_2 < 0$. Тогда траектории

$$y_1(t) = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \; y_2(t) = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}$$

при $t \to +\infty$ приходят в точку $(C_1\alpha_1, C_1\alpha_2)$. Фазовые траектории в этом случае представляют собой семейство прямых на фазовой плоскости. Нулевое решение при этом устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

1.5) В случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ траекториями будут те же параллельные прямые, но при этом с ростом t они уходят из точек $(C_1\alpha_1, C_1\alpha_2)$. Нулевое решение будет неустойчивым.

2) Пусть теперь λ_1 и λ_2 — комплексные числа

$$\lambda_1 = p + qi, \qquad \lambda_2 = p - qi, \qquad q \neq 0.$$

Общее решение системы $(\mathbf{LS_2})$ в этом случае можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y_2(t) = e^{pt}(C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt). \end{cases} \qquad (\mathbf{GS_2})$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а C_1^* и C_2^* — некоторые их линейные комбинации.

Если число p отрицательно, то траектории по спирали приходят в начало координат. Нулевое решение при этом асимптотически устойчиво.

Если же число p положительно, то траектории уходят от начала координат (также по спирали). Нулевое решение при этом неустойчиво.

Наконец, если p равно нулю, то траектории представляют собой замкнутые кривые, содержащие внутри себя начало координат. Нулевое решение при этом будет устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

3) В случае кратных собственных чисел траектории системы ведут себя по разному в зависимости от того, каким является общее

значение чисел $\boldsymbol{\lambda_1}$ и $\boldsymbol{\lambda_2}$: положительным, отрицательным или нулем.

Если $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$, то общее решение системы $(\mathbf{LS_2})$ имеет вид

$$\begin{cases} y_1(t) = (C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 t)e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) = (C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 t)e^{\lambda_1 t}. \end{cases} \qquad (\mathbf{GS_3})$$

В случае $\boldsymbol{\lambda_1 > 0}$ все такого вида траектории уходят от начала координат и нулевое решение неустойчиво.

Если же $\boldsymbol{\lambda_1 < 0}$, то траектории приходят в начало координат, а нулевое решение устойчиво и даже асимптотически устойчиво.

При $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$ имеются две возможности:

$$\boldsymbol{\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\beta_1 = \beta_2 = 0}.$$

В первом из этих случаев траектории представляют собой прямые, и нулевое решение неустойчиво. Во втором же случае все траектории вырождаются в точки, а нулевое решение при этом устойчиво.

Таким образом, теорема об устойчивости нулевого решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае двух уравнений полностью доказана.

5^0. В исследовании на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений важную роль играет понятие *положения равновесия*.

Определение. *Если решение системы дифференциальных уравнений* $y' = f(t, y)$ *проецируется в точку фазового пространства* $\mathbb{R}^n$, *то это решение называется* *точкой покоя* *системы, или же ее положением равновесия.*

Вектор $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ тогда и только тогда является точкой покоя системы $y' = f(t, y)$, когда y_0 представляют собой стационарное решение алгебраической системы уравнений

$$f_1(t, y_1^0, \ldots, y_n^0) = 0, \; \ldots, \; f_n(t, y_1^0, \ldots, y_n^0) = 0.$$

Проведенный анализ поведения траекторий однородной линейной системы из двух уравнений позволяет провести классификацию точек покоя для систем из двух уравнений более общего вида, не обязательно линейных. Условимся далее, что поведение траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases} \tag{NS}$$

понимается как их поведение при $t \to +\infty$.

Если все траектории системы дифференциальных уравнений (NS), начинающиеся в некоторой фиксированной окрестности точки покоя $y_0 = (y_1^0, y_2^0)$, неограниченно к ней приближаются вместе с касательными при неограниченном увеличении времени t, то такая точка покоя называется *устойчивым узлом*.

Если все траектории системы ($\mathbf{NS}$), начинающиеся в сколь угодно малой окрестности ее точки покоя $y_0 = (y_1^0, y_2^0)$, устремляются в бесконечность вместе с касательными, то такая точка покоя называется *неустойчивым узлом*.

Если же в первом случае касательные не "входят" в точку покоя и соответственно во втором случае не "уходят"в бесконечно удаленную точку, то такая точка покоя называется *устойчивым, или соответственно, неустойчивым фокусом*.

Если среди всех траекторий, начинающихся в сколь угодно малой окрестности точки покоя y_0 есть как стремящиеся к y_0, так и уходящие в бесконечность, то y_0 называется *седлом*.

Если все фазовые траектории, начинающиеся в δ-окрестности точки покоя y_0, представляют собой замкнутые кривые, не покидающие заданную ε-окрестность точки покоя $\big(\varepsilon > 0,\ \delta = \delta(\varepsilon)\big)$, то y_0 называется *центром*.

6^0. Фундаментальные результаты по устойчивости решений систем дифференциальных уравнений принадлежат выдающемуся русскому математику и механику А.М.Ляпунову. Основы этой теории А.М.Ляпунов заложил в конце девятнадцатого — начале двадцатого веков.

Приведем некоторые из его результатов по устойчивости.

Пусть функции $f_1(t,y)$, ..., $f_n(t,y)$ определены и непрерывны в полуцилиндре

$$\{(t,y) \mid t_0 \le t < +\infty,\ \|y\| \le \varepsilon_0\},$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $\|y\| = \sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$.

Пусть еще при $\|y\| \le \varepsilon_0$ определена некоторая непрерывно дифференцируемая функция $V(y) = V(y_1,\dots,y_n)$.

Определение. *Производной функции $V(y)$ в силу системы дифференциальных уравнений*

$$y' = f(t, y) \tag{I}$$

называется следующее дифференциальное выражение

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(\mathrm{I})} = \sum_{j=1}^{n} f_j(t, y) \frac{\partial V(y)}{\partial y_j}. \tag{dVI}$$

Производная (dVI) полностью определяется заданием правой части этой системы.

Определение. *Пусть функция* $V(y)$ *определена и непрерывно дифференцируема при* $\|y\| \leq \varepsilon_0$, $V(y) > 0$ *при* $\|y\| > 0$, $V(0) = 0$, *и всюду в области определения производная* $V(y)$ *в силу системы* (I) *неположительна. Тогда* $V(y)$ *называется функцией Ляпунова.*

Пример. Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -g(y_1).$$

Здесь функция $g(y_1)$ определена и непрерывно дифференцируема при $|y_1| \leqslant R$ и дополнительно удовлетворяет на этом отрезке следующим условиям:

$$g(0) = 0, \quad y_1 g(y_1) > 0 \text{ при } y_1 \neq 0.$$

Доказать, что в качестве функции Ляпунова системы можно взять следующую:

$$V(y_1, y_2) = \int\limits_0^{y_1} g(\xi) d\xi + \frac{y_2^2}{2}.$$

Решение. Проверим, что все условия из определения функции Ляпунова для $V(y_1, y_2)$ выполнены. Из определения имеем

$$V(0,0) = 0,\ \ V(y_1, y_2) \geqslant \int\limits_0^{y_1} g(\xi) d\xi > 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу условия, что функция $g(\xi)$ имеет тот же знак, что и переменная ξ. Сосчитаем производную функции $g(\xi)$ в силу системы. Имеем

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(\mathrm{I})} = y_2\frac{\partial V}{\partial y_1} - g(y_1)\frac{\partial V}{\partial y_2} = y_2 g(y_1) - g(y_1)y_2 = 0.$$

Таким образом, производная от $V(y_1, y_2)$ в силу системы неположительна (равна нулю).

$\square$

Теорема (Ляпунова). *Пусть система дифференциальных уравнений*

$$\boldsymbol{y' = f(t, y)}$$

имеет тождественно нулевое решение, т.е. $\boldsymbol{f(t, 0) = 0}$, *и при этом для нее существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова* $\boldsymbol{V(y)}$. *Тогда тождественно нулевое решение системы устойчиво.*

Доказательство. Пусть число ε положительно и не превосходит числа ε_0. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y \in R^n : |y| = \varepsilon\}, \qquad V_\varepsilon = \min_{S_\varepsilon} V(y).$$

По определению функции Ляпунова она непрерывна на компакте S_ε и поэтому достигает на нем своего минимального значения. Следовательно, справедливо строгое неравенство $V_\varepsilon > 0$.

Как следует из непрерывности $V(y)$ и равенства $V(0) = 0$, существует такое число δ, $0 < \delta < \varepsilon$, что как на сфере S_δ так и всюду внутри нее, то есть при $\|y\| \leqslant \delta$ выполняется оценка $V(y) < V_\varepsilon$.

Зафиксировав $\delta > 0$ с указанным свойством, рассмотрим любое не тождественно нулевое решение $y(t)$ системы с условием $\|y(t_0)\| < \delta$.

Это нетривиальное решение $y(t)$ при $t = t_0$ начинается внутри сферы S_δ. Покажем, что при всех $t \geqslant t_0$ справедлива оценка $\|y(t)\| < \varepsilon$.

Предположим противное, тогда существует такой момент времени $t_1 > t_0$, в который выполняется равенство $\|y(t_1)\| = \varepsilon$.

Значение функции Ляпунова на выбранном решении $y(t)$ исходной системы представляет собой следующую сложную функцию временной переменной:

$$\Phi(t) = V(y(t)) = V(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)).$$

Производная функции $\Phi(t)$ в силу определения функции Ляпунова неположительна:

$$\Phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y) \leqslant 0.$$

Интегрируя неравенство $\Phi'(t) \le 0$ в пределах от t_0 до t_1, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi'(\tau) d\tau = V(y(t_1)) - V(y(t_0)) \le 0. \qquad (4)$$

Но в соответствии с предположением в момент времени t_1 имеет место оценка

$$V(y(t_0)) < V_\varepsilon \le V(y(t_1)).$$

Эти соотношения и оценка (4) противоречат друг другу: при их одновременном выполнении должно быть верным неравенство

$$V(y(t_1)) < V(y(t_1)).$$

Но это невозможно и, следовательно, предположение о существовании момента времени t_1, для которого $\|y(t_1)\| = \varepsilon$, неверно.

Таким образом, при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\|y(t)\| < \varepsilon$. По определению это и означает, что нулевое решение системы устойчиво. $\square$

Теорема (Ляпунова, вторая). *Пусть в условиях предыдущей теоремы дополнительно при* $t \geqslant t_0$ *и* $\|y\| \le \varepsilon_0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(t, y) \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \le -W(y),$$

где $W(y)$ *— непрерывная функция,* $W(0) = 0$ *и* $W(y) > 0$ *при* $\|y\| > 0$. *Тогда нулевое решение системы* (I) *асимптотически устойчиво.*