Тема : Простейшие классы интегрируемых уравнений и методы их решения

$\mathbf{1^0}$. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. $\mathbf{2^0}$. Однородные уравнения и приводящиеся к ним. $\mathbf{3^0}$. Линейные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним. $\mathbf{4^0}$. Уравнение Бернулли. $\mathbf{5^0}$. Уравнение Риккати.

2^0. Важный класс интегрируемых дифференциальных уравнений первого порядка образуют *однородные уравнения*.

Определение. *Говорят, что функция* $F(x, y)$ *однородна степени* k, *если для всех положительных чисел* λ *и для всех чисел* x, y *из ее области определения выполняется равенство*

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y).$$

Примеры однородных степени 0, 1, 2 функций приведены ниже:

$$\frac{x-y}{x+y}, \quad \frac{x^2+xy}{x-y}, \quad x^2+y^2-xy.$$

Определение. *Дифференциальное уравнение* $y' = f(x,y)$ *называется* однородным, *если* $f(x,y)$ *является однородной функцией степени нуль.*

Аналогично, дифференциальные уравнения

$$f_1(x,y)y' = f_2(x,y), \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называются *однородными, если входящие в них функции* $f_1(x,y)$ *и* $f_2(x,y)$, $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ *являются однородными функциями одной и той же степени*.

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение, т.е. найти его общее решение, следует заменить в нем неизвестную функцию $y(x)$

на новую неизвестную функцию $z(x)$, определяемую равенством

$$y = xz.$$

При этом однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Построив решение $z(x)$ полученного уравнения с разделяющимися переменными и вернувшись к функции $y(x)$, получим общее решение исходного дифференциального уравнения.

Проведем сопутствующие замене $y = xz$ выкладки для уравнения в симметричной форме. При замене $y = xz$ имеет место равенство

$$dy = xdz + zdx.$$

Поэтому дифференциальное уравнение в симметричной форме преобразуется к виду

$$M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdx) = 0.$$

Далее, приводя подобные члены и используя свойство однородности, получим уравнение

$$x^k[M(1,z)+N(1,z)z]dx+x^{k+1}N(1,z)dz=0.$$

Сокращая на x^k и разделяя переменные, приходим к равенству

$$\frac{dx}{x}=-\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz.$$

Интегрируя, получаем соотношение вида

$$x=Ce^{\psi(z)},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\psi(z)$ задается равенством

$$\psi(z) = -\int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz.$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем для однородного дифференциального уравнения, записанного в симметричной форме:

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Это равенство задает общее решение исходного уравнения в неявном виде.

При разделении переменных могли потеряться решения вида $z = a$, где a — корень уравнения $M(1, z) + zN(1, z) = 0$.

Если у последнего уравнения существует вещественный корень a, то функция $z = a$ будет решением дифференциального уравнения. Возвращаясь в этом случае к функции

$y(x)$, добавляем к определённому выше общему решению функцию $y = ax$.

По ходу выкладок производилось также сокращение на x^k. Если число $x = 0$ входит в область определения функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$, то функция $x = 0$ также будет решением исходного уравнения. Но ее нет необходимости добавлять в ответ, поскольку прямая $x = 0$

уже содержится в формуле общего решения (при $C = 0$).

Если же число $x = 0$ не входит в область определения функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$, то деление на x^k, возможно, и не приведет к потере решений.

Однородные уравнения, записанные в нормальной форме, решаются путем приведения их к симметричной форме.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Уравнение однородное. Делаем подстановку: $y = ux$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Уравнение принимает вид

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2},$$

или

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = 0.$$

Интегрируем, разлагая сомножитель во втором слагаемом на простые дроби:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1}\right) du.$$

В результате получим

$$\ln|x| + \ln(u^2+1) - \ln|u| = \ln C,$$

или

$$\frac{x(u^2+1)}{u} = C.$$

Подставляя в это равенство значение $u = \frac{y}{x}$, находим $x^2+y^2 = Cy$. Эта формула задает семейство окружностей, касающихся оси OX в начале координат. Кроме того, решением исходного дифференциального уравнения является прямая $y = 0$. $\square$

К однородным дифференциальным уравнениям приводятся дифференциальные уравнения следующего вида:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

В случае, когда прямые

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

пересекаются в точке (x_0, y_0), делают замену

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + z.$$

Здесь t — новая независимая переменная, а $z = z(t)$ — новая неизвестная функция. Дифференциальное уравнение при этом преобразуется к виду

$$z' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right).$$

Это — однородное дифференциальное уравнение, так как функция в его правой части однородная степени нуль.

Если же прямые

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

не пересекаются, то есть параллельны, то путем простых алгебраических преобразований рассматриваемое уравнение приводится к следующему виду:

$$y' = \widetilde{f}(a_1 x + b_1 y).$$

Это уравнение, при $b_1 \neq 0$, приводится с помощью замены $z = a_1 x + b_1 y$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

находим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. С помощью замены $x = X + 1$, $y = Y + 2$ переходим к новым переменным (X, Y). Уравнение при этом принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Это однородное уравнение. Замена переменных $z = \frac{Y}{X}$, или $Y = zX$ приводит к уравнению

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Разделив в нем переменные, получим

$$\frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X}.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C.$$

После несложных преобразований приходим к эквивалентному равенству

$$(1-2z-z^2)X^2 = C.$$

Подставляя сюда выражение $z = \frac{Y}{X}$, приходим к равенству

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C.$$

Возвращаясь к переменным x, y, запишем общее решение исходного уравнения в виде

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

Это неявное задание решения исходного уравнения. $\square$

Некоторые уравнения удается привести к однородному заменой $y = z^m$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Число m изначально неизвестно и находится из требоава-ния, чтобы полученное для $z = z(x)$ уравне-ние было однородным. Если же число m най-ти не удается, то с помощью указанной за-мены уравнение к однородному не приводит-ся.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$2x^2y' = y^3 + xy.$$

Решение. Делаем замену $y = z^{\alpha}$ и требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем α. Имеем после подстановки

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1} z' = z^{3\alpha} + x z^{\alpha},$$

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1} dz - (z^{3\alpha} + x z^{\alpha}) dx = 0.$$

Функции $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ и $z^{3\alpha} + x z^{\alpha}$ однородны с одинаковой степенью лишь при условии, что

$$\alpha + 1 = 3\alpha = \alpha + 1.$$

Эти уравнения разрешимы, их общий корень $\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, в случае $y \geq 0$ искомая замена имеет следующий вид

$$y = \sqrt{z}.$$

При этом исходное уравнение преобразуется к однородному:

$$x^2 dz - (z^2 + xz)dx = 0.$$

Сделав в этом однородном уравнении замену

$$z = xu,$$

приведем его к уравнению с разделяющими-ся переменными

$$x^2(x\,du - u^2dx) = 0.$$

Если $u \neq 0$, $x \neq 0$, $(z \neq 0)$, то интегрируя его, получим

$$\frac{1}{u} + \ln|x| = C,$$

или

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C.$$

Если $z = 0$, то $y = 0$ удовлетворяет исходному уравнению и также является решением.

Решение $y = 0$ получается из итоговой формулы при $C \to \infty$.

Прямая $x = 0$ также является решением. $\square$

3^0. Следующий класс интегрируемых уравнений образуют линейные дифференциальные уравнения.

Определение. *Дифференциальное уравнение первого порядка*

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ *и* $q(x)$ *— заданные функции, называется* *линейным.*

Функция $p(x)$ называется коэффициентом линейного уравнения, а $q(x)$ — его правой частью.

Общее решение линейного дифференциального уравнения находят с помощью алгоритма, называемого *методом вариации постоянной*, или *методом Лагранжа*.

Решаем сначала уравнение с тождественно нулевой правой частью

$$y' + p(x)y = 0.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, находим общее решение

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Здесь C — произвольная постоянная.

Частное решение линейного уравнения с ненулевой правой частью $q(x)$, т.е. *неоднородного*, будем искать в виде

$$y_*(x) = C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Здесь $C = C(x)$ — уже не постоянная, а неизвестная функция переменной x.

Подберем эту функцию так, чтобы $y_*(x)$ являлось решением исходного неоднородного уравнения. После подстановки $y_*(x)$ в неоднородное уравнение получаем следующее соотношение:

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} - C(x)p(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} +$$

$$+ C(x)p(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x).$$

Таким образом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x).$$

Это равенство представляет собой простейшее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $C(x)$. Решая его, находим

$$C(x) = \int q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Суммируя общее решение однородного уравнения с найденным частным решением неоднородного, получаем функцию вида

$$y(x) = \left(\int q(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi} dx + C_1 \right) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi}.$$

Это равенство задает *общее решение исходного линейного уравнения*.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Интегрируем соответствующее линейное однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C \qquad \Longrightarrow \quad y = Cx.$$

Частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)x,$$

где $C(x)$ — неизвестная функция. При этом

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dC}{dx} + C(x).$$

Подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$x\frac{dC}{dx} = x^2,$$

или

$$dC = xdx \quad \Longrightarrow \; C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 x + \frac{x^3}{2}$$

здесь $C_1 x$ — общее решение линейного однородного уравнения, а $\frac{x^3}{2}$ — частное решение неоднородного уравнения. $\square$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(4 - x^2)y' + xy = 4.$$

Решение. Применим метод Лагранжа. Проинтегрируем сначала однородное уравнение

$$(4 - x^2)y' + xy = 0,$$

или в симметричной форме

$$\frac{dy}{y} + \frac{xdx}{4 - x^2} = 0.$$

В результате получим

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(4 - x^2) + \ln u,$$

где $\ln u$ — произвольная постоянная, или

$$y = u\sqrt{4 - x^2}.$$

Теперь будем рассматривать u как неизвестную функцию от x и выберем ее так, чтобы произведение

$$y = u\sqrt{4 - x^2}$$

стало общим интегралом исходного неоднородного уравнения.

Взяв дифференциал от обеих частей равенства $y = u\sqrt{4 - x^2}$, получим

$$dy = \sqrt{4 - x^2}du - \frac{uxdx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Исходное уравнение в симметричной форме имеет вид

$$(4 - x^2)dy + (xy - 4)dx = 0.$$

Подставим сюда вместо y и dy соответствующие им выражения через функцию u. Тогда получим

$$(4-x^2)^{\frac{3}{2}}du - ux\sqrt{4-x^2}dx + ux\sqrt{4-x^2}dx = 4dx,$$

или

$$du = \frac{4dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычисляя первообразную, приходим к искомой функции u, имеющей следующий вид:

$$u = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения задается равенством

$$y = u\sqrt{4 - x^2} = x + C\sqrt{4 - x^2}.$$

Здесь C — произвольная постоянная. $\square$

Линейное уравнение, записанное в симметричной форме, имеет вид

$$p_0(x)dy + [p_1(x)y - q(x)]dx = 0.$$

Для того чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно перейти к его нормальной форме, записав уравнение через производную (путем деления на $p_0(x)dx$).

Затем следует выписать общее решение полученного линейного уравнения и присоединить к ответу решения вида $x = a$, где a — корень уравнения $p_0(x) = 0$.

Некоторые уравнения становятся линейными, если в качестве неизвестной функции рассматривать $x = x(y)$, а независимой переменной при этом считать y. Таковыми, например, являются уравнения следующего вида:

$$A(y) + [B(y)x - C(y)]y' = 0.$$

Если перейти к функции $x(y)$, то это уравнение преобразуется к линейному

$$x' + p(y)x = q(y),$$

где штрих означает дифференцирование по y, а коэффициенты находятся из соотношений

$$p(y) = \frac{B(y)}{A(y)}, \qquad q(y) = \frac{C(y)}{A(y)}.$$

Решение полученного уравнения записывается с помощью формулы общего решения линейного уравнения, в которой переменные x и y следует поменять местами.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(2e^{y} - x)y' = 1.$$

Решение. Уравнение линейно относительно переменной x. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

то уравнение можно записать в виде

$$2e^{y} - x = x', \quad x' + x = 2e^{y}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$x' + x = 0$$

задается равенством $x = Ce^{-y}$.

Частное решение $x_* = x_*(y)$ неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянной. Полагая

$$x_* = C(y)e^{-y}$$

и подставляя x_* в решаемое уравнение, получаем

$$2e^y - Ce^{-y} = C'e^{-y} - Ce^{-y},$$

$$C' = 2e^{2y}, \qquad C(y) = e^{2y} + C_0.$$

Окончательно находим

$$x = C_0 e^{-y} + e^{y}.$$

Это ответ — формула общего решения. $\square$

К линейным уравнениям приводятся также уравнения вида

$$f'(y)y' + a(x)f(y) = b(x).$$

Здесь штрих у функции y означает производную по переменной x, штрих у функции f — производную этой функции по переменной y. Если от неизвестной функции $y(x)$ в уравнении перейти к новой неизвестной функции $z = f(y)$, то придем к линейному уравнению

$$z' + a(x)z = b(x).$$

При найденной функции $z(x)$ решение $y(x)$ задается неявно равенством $f(y) = z$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2+1.$$

Решение. Произведя замену $z(x) = \sqrt{y^2+1}$, получим

$$z' = \frac{yy'}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad z' + z = x^2 + 1.$$

Это уравнение линейно относительно z. Решая его методом вариации постоянной, находим частное решение в виде $z = C(x)e^{-x}$, где

$$C(x) = e^{x}(x^{2} - 2x + 3) + C_{0}.$$

Общее решение исходного уравнения в неявном виде задается равенством

$$\sqrt{y^{2} + 1} = x^{2} - 2x + 3 + C_{0}e^{-x}.$$

Здесь C_0 — произвольная постоянная. $\square$

К линейному уравнению приводится также

уравнение следующего вида:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)e^{ny}, \qquad (n \neq 0).$$

Сведение производится с помощью замены

$$e^{-ny} = z(x).$$

При этом получаем

$$-ne^{-ny}y' = z', \qquad -\frac{z'}{n} + P(x)z = Q(x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$3dy + (1 + e^{x+3y})dx = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^{x}e^{3y}, \qquad (n = 3).$$

Сделаем замену переменных $z(x) = e^{-3y}$, тогда получим

$$z'(x) = -3e^{-3y}y', \qquad -\frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^{x}}{z}.$$

Следовательно, $z' - z = e^x$. Находим общее решение полученного линейного уравнения

$$z(x) = Ce^x + xe^x.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{1}{3}\ln(C + x) - \frac{x}{3}.$$

$\square$

4^{0}. К линейному уравнению сводится *уравнение Бернулли*, имеющее следующий вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Здесь $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ (при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение Бернулли превращается в линейное).

Для того чтобы решить уравнение Бернулли, от неизвестной функции $y(x)$ переходят к новой неизвестной функции $z(x)$ с помощью замены

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x).$$

Здесь $\alpha \neq 1$. Для функции $z(x)$ получается линейное уравнение

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Найдя его решение и затем возвращаясь к функции $y(x)$, получаем общее решение уравнения Бернулли.

Кроме того, при $\alpha > 0$ уравнение Бернулли имеет дополнительное решение $y = 0$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Решение. Это дифференцмальное уравнение Бернулли, $\alpha = \frac{1}{2}$. Делим обе его части на произведение $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводя новую переменную $z = \sqrt{y}$, имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}.$$

Получили линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Решим его. Сначала решаем однородное линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \quad \ln z = 2\ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Затем применяем метод вариации постоянной, то есть ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $z = C(x)x^2$. Имеем

$$\frac{dz}{dx} = 2Cx + x^2\frac{dC}{dx}.$$

Подставляя это равенство в неоднородное уравнение, получаем

$$2xC + x^2\frac{dC}{dx} - \frac{2Cx^2}{x} = \frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_1.$$

Следовательно,

$$z = x^2(C_1 + \frac{1}{2}\ln x)$$

и, наконец,

$$y = z^2 = x^4(C_1 + \frac{1}{2}\ln x)^2.$$

Это и есть формула общего решения исходного уравнения Бернулли. $\square$

5^0. Уравнение вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ называется *уравнением Риккати.*

В общем случае это уравнение не решается в элементарных функциях.

Однако, если известно какое-либо его частное решение $y = y_1(x)$, то уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли с помощью замены $y = y_1 + z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Имеют место равенства

$$y_1' + z' + a(x)y_1 + a(x)z+$$

$$b(x)y_1^2 + 2b(x)y_1 z + b(x)z^2 = c(x),$$

$$y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 = c(x).$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем, что функция $z(x)$ должна быть решением следующего уравнения Бернулли

$$z' + [a(x) + 2b(x)y_1]z = -b(x)z^2.$$

Заменой $u(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ последнее уравнение сводится к линейному уравнению для $u(x)$.

Решив это уравнение, находим сначала функцию $z(x)$, а затем и функцию $y(x)$, то есть решение исходного уравнения Риккати.