Содержание

1 Матрица перехода от одного базиса к другому, ее свойства. Выражение координат вектора в новом базисе через координаты в старом

Пусть X — векторное пространство над полем k и имеются 2 его базиса:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \qquad ((B))$$

$$e'_1, e'_2, \ldots, {}'e_n. \qquad ((B'))$$

Выразим каждый из векторов базиса (B') через базис (B):

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ \vdots\vdots\vdots \ddots \vdots, \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{cases} \tag{$(B'B)$}$$

Коэффициенты a_{ij} этих разложений определяют матрицу:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица A, определяемая из соотношений $(B'B)$, называется матрицей перехода от базиса (B) к базису (B').

Обратите внимание, что координатами вектора e'_j в базисе B служат элементы столбца с номером j в матрице A.

Пусть вектор $v \in X$ имеет в (B) координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, а в (B') координаты $(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n)$, то есть $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = v = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \ldots + \lambda'_n e'_n$. Подставляя сюда выражение e'_j через e_j, получаем

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \lambda'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \ldots + \lambda'_1(a_{1n}e_1 +$$

Или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n. \end{pmatrix}$$

Введём обозначения $\overrightarrow{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{\lambda'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$, то соотношение $(\lambda\lambda')$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{\lambda} = A\overrightarrow{\lambda'}. \qquad ((\lambda\lambda'))$$

Формулы $(\lambda\lambda')$ выражают старые координаты вектора $v \in X$ через его новые координаты при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A.

Если выразить базис (B) через базис (B'), что возможно по определению базиса линейного пространства, то получим формулу вида

$$\begin{cases} \lambda'_i = a'_{i1}\lambda_1 + a'_{i2}\lambda_2 + \ldots + a'_{in}\lambda_n, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad ((\lambda'\lambda))$$

Заметим, что преобразования $(\lambda\lambda')$ и $(\lambda'\lambda)$ взаимно обратны. Это означает, что матрица A имеет обратную $A' = (a'_{ij})$, то есть матрица A обратима, $\det A \neq 0$, $A' = A^{-1}$, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Система равенств $(\lambda'\lambda)$ принимает вид: $\overrightarrow{\lambda'} = A'\overrightarrow{\lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{\lambda'} = A^{-1}\overrightarrow{\lambda}$.

Теорема

При переходе от базиса (B) к базису (B) линейного пространства X, определяемом матрицей A, координаты вектора в новом базисе выражаются через старые координаты при помощи линейного преобразования с матрицей A^{-1}.

При явном выражении нового (штрихованного) базиса через исходный по формуле $(B'B)$ старые координаты выражаются через новые по формуле $(\lambda\lambda')$. Обратите внимание на порядок суммирования в $(B'B)$ и $(\lambda\lambda')$.

Использование координат позволяет свести операции над векторами к действиям со скалярами. Выбор разумной системы координат (то есть базиса) часто существенно упрощает вычисления.

2 Изоморфизм линейных пространств. Инвариантность размерности линейного пространства при изоморфизме. Теорема об изоморфизме векторных пространств одинаковой размерности. Следствие

Понятие базиса (или координатной системы) используется в частности для того, чтобы алгебраически отождествить векторные пространства одинаковой размерности.

Определение

Линейные пространства X и Y над полем k называются изоморфными, если существует биективное отображение $f : X \to Y$, для которых справедливо:

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v),\ \forall a, b \in k;\ \forall u, v \in X \qquad ((L_f))$$

Отображение f при этом называется изоморфизмом векторных пространств X и Y.

Равенство (L_f) формулируют следующим образом: f — это изоморфизм аддитивных групп (значит выполняется $f(a) + f(b) = f(a + b)$) векторных пространств X и Y, обладающий дополнительным свойством $f(av) = af(v)$, $\forall a \in k$, $\forall v \in X$. Говорят также, что f — линейное отображение над полем k.

По определению, изоморфизм — это взаимно однозначное отображение одного множества на другое. Поэтому существует обратное ему отображение $f^{-1} : y \to x$. Обратное отображение f^{-1} — это также изоморфизм, но уже изоморфизм y и x.

Пусть y — изоморфизм Z и X, а f — изоморфизм X и Y, $Z \xrightarrow{y} X \xrightarrow{f} Y$. Тогда композиция $f \circ y$ — это изоморфизм Z и Y.

Размерность векторного пространства является инвариантом изоморфизма: если $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — базис линейного пространства X, то $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ — это базис линейного пространства Y и обратно. Если X и Y изоморфны, то их размерности совпадают.

Теорема

Все векторные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.

Доказательство

Пусть X — линейное пространство, $\dim X = n$. Возьмём базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ пространства X. В этом базисе однозначно определены координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ произвольного вектора $x \in X$, то есть $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Рассмотрим отображение $f\colon x \in X \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$, это отображение биективно (из единственности разложения по базису). При этом, если $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$, то $\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2, \ldots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Иначе говоря, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Таким образом f — это изоморфизм пространства X и координатного пространства k^n. $\square$

Следствие

Любое n-мерное линейное пространство X изоморфно пространству k^n.

Заметим, что ограничиваться изучением линейных задач исключительно в k^n не совсем правильно (не совсем удобно). Конечной целью любого такого исследования является получение результатов, совсем независящих от специальных свойств базиса. Кроме того, при переходе к k^n может утратиться наглядный характер многих векторных пространств.

Изоморфизм между двумя векторными пространствами X и Y, если он существует, определён не единственным образом, за исключением двух частных случаев:

a) $X = Y = \{0\}$

b) $\dim X = \dim Y = 1$, k — поле из двух элементов.

3 Определение Аффинного пространства, связанного с линейным. Сдвиги на Аффинном пространстве

Пусть A — некоторое непустое множество, элементы которого условимся называть точками и обозначать как $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dots$. Пусть также имеется линейное пространство X над полем k.

Определение

Множество A называется аффинным пространством, связанным с X, если задано отображение $(\dot{p}, v) \in A \times X \mapsto \dot{p} + v \in A$, обладающее свойствами:

1. $\dot{p} + 0 = \dot{p}$;
2. $(\dot{p} + u) + v = \dot{p} + (u + v)$ $\forall \dot{p} \in A$ и $\forall u, v \in X$;
3. $\forall \dot{p}, \dot{q} \in A \exists! \overrightarrow{v} \in X \ : \ \dot{p} + \overrightarrow{v} = \dot{q}$ Этот вектор $\overrightarrow{v}$ обозначается как $\overrightarrow{pq}$ или $\dot{q} - \dot{p}$.

Иногда аффинным пространством называют пару (A, X) снабженную отображением с указанными свойствами.

Размерностью аффинного пространства A называют размерность $\dim X$, связанного с A линейного пространства: $\dim A = \dim X = n$.

Иногда, чтобы подчеркнуть роль размерности, пишут A^n. Если $k = \mathbb{R}$, то говорят о вещественном аффинном пространстве.

Аксиома из определения аффинного пространства утверждает, что $\forall \dot{p} \in A$ отвечает биекция $v \mapsto \dot{p} + v$ множеств X и A.

Определение

Биективное отображение T_v: $\dot{p} \mapsto \dot{p} + v = T_v(\dot{p})$, $\dot{p} \in A$ на множестве A называется сдвигом в A (или параллельным переносом в A) на вектор v из X.

Из определения следует, что $T_u \circ T_v = T_{u+v}$, $T_v \circ T_{-v} = I$. Здесь $I = T_0$ — тождественное отображение.

Таким образом, множество сдвигов $\{T_n | n \in X\}$ образует группу, изоморфную аддитивной группе пространства X.

Если определить линейную комбинацию сдвигов $\alpha T_u + \beta T_v = T_{\alpha u+\beta v}$, то множество всех сдвигов становится векторным пространством (изоморфным пространству X).

Пусть $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{s}$ — такие точки из A, что $\dot{p}+v = \dot{q}$, $\dot{r}+v = \dot{s}$. Тогда $\overrightarrow{pq}$ и $\overrightarrow{rs}$ — это разные представители класса эквивалентности, соответствующие вектору v. Из определения получаем, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$; $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$; $\overrightarrow{pp} = 0$ или $(\dot{q}-\dot{p}) + (\dot{r}-\dot{q}) = (\dot{r}-\dot{p})$; $(\dot{q}-\dot{p}) = -(\dot{p}-\dot{q})$; $(\dot{p}-\dot{p}) = 0$.

4 Определение Евклидова векторного пространства. Скалярное произведение и его свойства

В аналитической геометрии пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ важную роль играет операция скалярного произведения двух векторов. По определению, $\langle x, y\rangle$ — это произведение длин векторов на косинус угла между ними: $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\varphi)$. Если $x = (x_1, x_2, x_3)$, то есть разложим по базису пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3), $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, то его длина определяется соотношением $|x| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$. Если ещё $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, то $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Реализация метрической структуры, связанной со скалярным произведением, в случае пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, подсказывает разумный путь ее обобщения на случай линейного пространства произвольной размерности.

Определение

Евклидовым векторным пространством называется вещественное линейное пространство X с заданным на нем скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, для которого выполнены следующие утверждения:

1. $\langle x, x\rangle > 0 \ \forall x \neq 0$, иначе $\langle x, x\rangle = 0$;
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (симметричность);
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, x\rangle$.

$\forall x, y \in X$ скалярное произведение — вещественное число.

Пример. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис $X = \mathbb{R}^n$, то есть $\dim X = n$, то для любых векторов

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n.$$

Их скалярное произведение представлено в виде $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

5 Длина вектора в Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского

Пусть X — евклидово векторное пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$.

Определение

Длиной или нормой любого вектора $v \in X$ называется неотрицательное вещественное число $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \equiv \langle v, v\langle^{\frac{1}{2}}$.

По определению скалярного произведения $\langle v, v\rangle \leq 0 \; \forall v \in X$. Поэтому длина любого вектора однозначно определена. При этом если $v \neq 0$, то $|v| > 0$. Кроме того, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ имеем $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$.

Пример. поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ представляет собой одномерное евклидово векторное пространство, длина вектора в котором совпадает с абсолютным значением (модулем) соответствующего вещественного числа.

Теорема (неравенство Коши–Буняковского)

$\forall x, y$ из евклидова векторного пространства X имеет место неравенство

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

Доказательство

Рассмотрим следующее выражение: $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle$. При фиксированных x, y это выражение представляет собой квадратичную функцию от переменной

λ, то есть квадратичный трехчлен. Коэффициент при λ^2 в нем неотрицателен (при $y \neq 0$ положителен). Значения этой квадратичной функции также неотрицательны.

Это возможно лишь в том случае, если соответствующий дискриминант неположителен: $D = (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$, или, что то же самое $|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Заметим, что если $|\langle x, y\rangle| = |x|\cdot|y|$, то $D = 0$, то есть квадратный трехчлен имеет ровно один вещественный корень λ_0. При этом $\langle x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y\rangle = 0 \Rightarrow x + \lambda_0 y = 0$. То есть $x = -\lambda_0 y$. Это означает, что равенство в неравенстве Коши–Буняковского достигается тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы (коллинеарны). $\square$

6 Угол между векторами. Теорема Пифагора. Неравенство треугольника

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что $-1 \leq \frac{|\langle x,y\rangle|}{|x|\cdot|y|} \leq 1$.

Следовательно, уравнение при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ $\cos(\varphi) = \frac{|\langle x,y\rangle|}{|x|\cdot|y|}$ имеет на интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ ровно одно решение φ. Именно этот корень φ называется углом между векторами x и y.

Определение

Векторы x и y из X называются ортогональными ($x \perp y$), если соответствующий угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Нулевой вектор ортогонален любому другому вектору из X.

Теорема (Пифагора)

Если $x \perp y$, то
$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Следствие (Неравенство треугольника)

$\forall x, y$ из X справедливо неравенство
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство

$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x+y\rangle \leq |x|^2+|y|^2+2|\langle x,y\rangle| \leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x|+|y|)^2$. $\square$