1 Closure of a binary relation relative to some property, uniqueness of a closure

Определение

Примерами свойств отношений являются: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Дано бинарное отношение $r \subseteq A^2$ и свойство $\mathcal{P}$, назовём бинарное отношение r^* **замыканием** r относительно $\mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $r \subseteq r^*$
- r^* обладает свойством $\mathcal{P}$
- для любого другого r' такого, что r' обладает $\mathcal{P}$ и $r \subseteq r'$, $r^* \subseteq r'$

Предложение

Для любого бинарного отношения $r \subseteq A^2$ и свойства $\mathcal{P}$ верно следующее: если замыкание r относительно $\mathcal{P}$ существует, оно единственно и совпадает с множеством

$$cl_{\mathcal{P}}(r) = \bigcap\{r' | r \subseteq r' \text{ и } r' \text{ обладает } \mathcal{P}\}$$

Доказательство

Единственность. Предположим, что существует другое замыкание r^{**} r относительно $\mathcal{P}$. Тогда, поскольку $r \subseteq r^*$ и r^* обладает $\mathcal{P}$, по определению замыкания, $r^{**} \subseteq r^*$. С другой стороны, используя определение r^*, можно получить обратное включение: $r^* \subseteq r^{**}$. Тогда $r^{**} = r^*$. Теперь предположим, что r' существует. Чтобы доказать вторую часть, проверим два включения: $cl_{\mathcal{P}}(r) \subseteq r^*$ и $r^* \subseteq cl_{\mathcal{P}}(r)$. Первое верно, потому что r^* принадлежит пересечению, второе верно, потому что r^* минимальный элемент этого пересечения.

2 Y-combinator, it's properties

Y комбинатор

Рассмотрим комбинатор $Y = \lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))$: для любого x верно следующее:

$$Yx \equiv x(Yx)$$

Этот комбинатор называется комбинатором **неподвижной точки**.

Проверим, что $a(Ya)$ действительно сводится к Ya:

$$(1)\ a(Ya) = a((\lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx)))a) \Rightarrow$$

$$a((\lambda x.a(xx))\lambda x.a(xx))$$

$$(2)\ Ya = (\lambda x.a(xx))\lambda x.a(xx) \Rightarrow$$

$$a((\lambda x.a(xx))\lambda x.a(xx))$$

Итак, оба Ya и $a(Ya)$ сводятся к одному и тому же λ-терму, следовательно, они эквивалентны.

3 Substructures and superstructures

Определение

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma), \mathcal{N} = (N, \sigma)$ - две структуры. Тогда $\mathcal{M}$ является **подструктурой** $\mathcal{N}$, а $\mathcal{N}$ - **суперструктурой** $\mathcal{M}$, тогда и только тогда, когда

- $M \subseteq N$
- для любого $f^n \in \sigma : \quad f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}}|_M = f^{\mathcal{N}} \cap M^{n+1}$
- для любого $p^n \in \sigma : \quad p^{\mathcal{M}} = p^{\mathcal{N}}|_M = p^{\mathcal{N}} \cap M^n$

Обозначается как: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Примеры подструктур

пример 1

Пусть $0 < n \in \omega$. В группе целых чисел $\mathbb{Z}$ существует подгруппа $\{k \cdot n | k \in Z\}$ - множество целых чисел, кратных n. Действительно, множество $\{k \cdot n | k \in Z\}$ замкнуто относительно операций в группе $\mathbb{Z}$.

пример 2

Множество $\{k|k \geq 0\}$ неотрицательных целых чисел не порождает подгруппу в $\mathbb{Z}$, потому что оно не замкнуто относительно операции $-$.

пример 3

Пусть $\mathcal{G}$ - абелева группа. Тогда множество $\{a|a \in G,\ a + a = 0\}$ порождает подгруппу в $\mathcal{G}$.

пример 4

Пусть $\mathcal{G}$ - группа, а a - некоторый элемент в $\mathcal{G}$. Тогда обозначим любой $k \in Z$ следующим образом:

$$a^k = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k}, & \text{если } k > 0, \\ \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{k} & \text{если } k < 0 \\ 1, & \text{если } k = 0 \end{cases}$$

Следовательно, множество $< a >= \{a^n|n \in Z\}$ порождает подгруппу $< a >\subseteq \mathcal{G}$, порождённую a.

Теорема (подструктуры)

Пусть $\mathcal{M} = (M, \nu_M)$ - структура сигнатуры σ. Тогда непустое подмножество $N \subseteq M$ определяет подструктуру $\mathcal{N} = (N, \nu_N) \subseteq \mathcal{M} \iff$ для любых $f^n \in \sigma$ - функциональные символы, если $\bar{a} \in N^n$, то $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in N$.

Доказательство

Отметим, что для любого предикатного символа $p^n \in \sigma$, множество $p^{\mathcal{M}}|_N = p^{\mathcal{M}} \cap N^n$ может использоваться в качестве интерпретации $\nu_N(p)$. Если $f^n \in \sigma$ - функциональный символ, то множество $f_0 = f^{\mathcal{M}}|_N = f^{\mathcal{M}} \cap N^{n+1}$ также определяет некоторое отображение на N. Необходимо проверить, что для любого кортежа $\bar{a} \in N^n$ существует единственный b, такой, что $(\bar{a}, b) \in f_0$. $f^{\mathcal{M}}$ всюду определенная n-местная функция на M, следовательно существует единственный b, такой, что $(\bar{a}, b) \in f^{\mathcal{M}}$. По условию $b \in N$, следовательно, $(\bar{a}, b) \in f_0$. Таким образом $\nu_N(f)$ можно рассматривать в качестве интерпретации f_0. $\square$