Тема : Числовые ряды

$\mathbf{1^0}$. Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сумма ряда. $\mathbf{2^0}$. Необходимое условие сходимости ряда. $\mathbf{3^0}$. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда. $\mathbf{4^0}$. Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости, признак сравнения, теорема о совместной сходимости. Примеры. Гармонический ряд. Эйлерова постоянная. $\mathbf{5^0}$. Признак сходимости Коши. Следствие: признак Коши в предельной форме. Примеры. Признак сходимости Даламбера. Следствие: признак Даламбера в предельной форме. Примеры. $\mathbf{6^0}$. Интегральный признак сходимости монотонно убывающей числовой последовательности. Пример. $\mathbf{7^0}$. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

4^0. Исследуем на сходимость некоторые модельные числовые ряды.

Пример. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Решение. Согласно формуле Тейлора имеем

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Следовательно, $a_k = f(k) \sim \frac{1}{2k^2}$ при $k \to \infty$, при этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

В соответствии со следствием из признака сходимости ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. $\square$

Заметим, что для частичной суммы s_n ряда из предыдущего примера справедливо следующее представление

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Как уже установлено, существует предел s_n при $n \to \infty$, т.е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Поэтому имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, для частичной суммы гармонического ряда справедлива эквивалентность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n + C \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Константа C из этого асимптотического равенства называется *эйлеровой постоянной* и для нее справедливо представление

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k} - \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\Big] \approx 0.577.$$

Пример. *Доказать сходимость ряда*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}-\frac{1}{k^{\alpha}}\right] \quad \textit{при} \quad \alpha>0.$$

Решение. Для частичных сумм ряда имеем соотношения

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}-\frac{1}{k^{\alpha}}\right]=1-\frac{1}{n^{\alpha}}\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Это и означает, что ряд сходится. $\square$

Лемма. *Ряд Дирихле* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ *при* $\beta > 1$ *сходится, а при* $\beta \leqslant 1$ *расходится.*

Доказательство. При $\alpha > 0$ по теореме Лагранжа о среднем для любого вещественного $x \geqslant 2$ имеет место равенство

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} = \frac{\alpha}{(x-1+\theta)^{\alpha+1}},$$

где $\theta = \theta(x)$ — число из интервала $(0, 1)$.

Применим это равенство в предыдущем примере для последовательности значений $x = k$, $k = 2, 3, \dots$. Тогда получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha}} - \frac{1}{k^{\alpha}}\right] = \alpha \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1+\theta_k)^{\alpha+1}} = 1.$$

Здесь $\theta_k = \theta(k)$ — число из интервала $(0, 1)$. Таким образом, при любом $\alpha > 0$ ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1+\theta_k)^{\alpha+1}}$$

сходится. Функция $f(x) = 1/x^{\alpha+1}$ монотонно убывает и поэтому при $0 < \theta_k < 1$ справедлива оценка

$$a_k = \frac{1}{(k-1+\theta_k)^{\alpha+1}} \geqslant \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

Суммируя эти неравенства по всем натуральным k, получаем

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Полагая $\beta = 1 + \alpha > 1$, заключаем, что соответствующий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}}$ сходится.

Пусть теперь $\beta \leqslant 1$. Тогда при всех $k \geqslant 1$ имеет место неравенство $\frac{1}{k^{\beta}} \geqslant \frac{1}{k}$. Следовательно, частичные суммы соответствующего ряда ограничены снизу частичными суммами гармонического ряда:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{\beta}} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Но уже установлено, что гармонический ряд расходится и при этом

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{\beta}} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln n + C \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, при $\beta \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}}$ расходится как и ряд гармонический. $\square$

5^0. В результате сравнения ряда с неотрицательными членами с некоторой геометрической прогрессией с меньшим единицы знаменаталем получаются важные *признаки сходимости Коши и Даламбера*.

Теорема (признак Коши). *Пусть последовательность a_k, $k = 1, 2, \ldots$, неотрицательных чисел такова, что для некоторых числа q, $0 < q < 1$, и номера N справедлива оценка*

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1, \quad \text{где} \quad k \geqslant N.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Если же* $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$ *при* $k \geqslant N$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. Из первого условия теоремы получаем

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \quad a_k \leqslant q^k \quad \text{при} \quad k \geqslant N.$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится как сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ и, следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится.

Если же

$$\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant N,$$

то $a_k \geqslant 1$ при всех достаточно больших k и необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не выполняется: нижний предел последовательности a_k всегда не меньше единицы. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие (предельный признак Коши).

Пусть последовательность неотрицательных чисел a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *такова, что существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = C.$$

Если при этом $C < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Если же $C > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $C < 1$, тогда найдется q: $C < q < 1$. По определению предела, начиная с некоторого номера N будет справедливо неравенство $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q$, $k \geqslant N$. Пользуясь признаком Коши заключаем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если же $C > 1$, то по определению предела при всех достаточно больших k имеет место оценка $a_k \geqslant 1$. Таким образом, необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не выполняется: нижний предел последовательности a_k всегда не меньше единицы. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Если в условии признака Коши в предельной форме $C = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. *Доказать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k}\right)^k \quad \textit{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{x^2}{k} = 0 \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

По признаку Коши в предельной форме ряд сходится. $\square$

Пример. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k} \quad \textit{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с признаком Коши в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $|\boldsymbol{x}| < \sqrt{\mathbf{2}}$ и расходится при $|\boldsymbol{x}| > \sqrt{\mathbf{2}}$.

Если $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\mathbf{2}}$, то ряд, как легко видеть, также расходится. $\square$

Теорема (признак Даламбера). *Пусть последовательность* a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *неотрицательных чисел такова, что для некоторых числа* q, $0 < q < 1$, *и номера* N *при* $k \geqslant N$ *числа* a_k *строго положительны и удовлетворяют оценке*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q \qquad \forall\, k \geqslant N.$$

Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Если же*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \textit{при} \quad \forall\, k \geqslant N,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $a_{k+1} \leqslant q a_k$ при $k \geqslant N$. Тогда для любого $k > N$ справедливы неравенства

$$a_k \leqslant q a_{k-1} \leqslant q^2 a_{k-2} \leqslant \ldots \leqslant a_N q^{k-N} = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) q^k.$$

Заметим, что в силу условия $0 < q < 1$ сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_N}{q^N}\right) q^k = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) \frac{q}{1-q}$$

существует и конечна. Следовательно, согласно признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится.

Если же $a_{k+1} \geqslant a_k$ при $k \geqslant N$, то имеем следующую цепочку неравенств:

$$a_k \geqslant a_{k-1} \geqslant a_{k-2} \geqslant \ldots \geqslant a_N > 0 \quad \text{при} \quad \forall\, k \geqslant N.$$

Следовательно, всегда существующий нижний предел последовательности a_k строго больше нуля, т.е. необходимое условие сходимости ряда не выполнено. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть последовательность неотрицательных чисел* a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *такова, что существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D.$$

Если этот предел $D < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Если же* $D > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Если в условии следствия $D = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. *Доказать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \textit{при} \quad \forall\, x > 0.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{x}{k+1}=0.$$

В соответствии с признаком Даламбера в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $x>0$.

Как можно заметить, его сумма совпадает с функцией e^x-1. $\square$

Теорема (обобщение предельного признака Коши). *Пусть неотрицательные числа* a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *таковы, что верхний предел*

$$C = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$$

строго меньше единицы: $C < 1$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Если же $C > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

6^0. Сформулируем и докажем признак сходимости ряда с образующими монотонную последовательность неотрицательными членами.

Теорема (интегральный признак Коши). *Если неотрицательная функция* $f(x)$ *монотонно убывает при* $x \geqslant 1$, *то числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ *сходится тогда и только тогда когда сходится интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Функция $f(x)$ монотонна и поэтому интегрируема по Риману на любом отрезке вида $[1, n]$, где n — натуральное число, $n \geqslant 2$. При этом справедливы соотношения

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx =$$

$$= f(1) + \int\limits_1^n f(x)\,dx.$$

Таким образом, если интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ ограничена и, следовательно, сам ряд также сходится.

Возьмем теперь произвольное число $\eta > 1$ и обозначим как $n = [\eta]$ его целую часть. Тогда справедливы соотношения

$$\int\limits_1^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Последнее неравенство справедливо в силу монотонного убывания функции $f(x)$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится, то из полученного неравенства получается оценка

$$\int\limits_1^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

Таким образом, первообразная от неотрицательной функции $f(x)$ при $\eta \geqslant 1$ ограничена. Этого достаточно для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. $\square$

Следствие. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ *сходится или расходится одновременно с интегралом* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$.

Для обоснования этого следствия достаточно применить предыдущую теорему к неотрицательной монотонно убывающей функции $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

Таким образом, часто возникающий в разного рода оценках модельный числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

7^0. Члены числовых рядов, возникающих в приложениях, далеко не всегда имеют одинаковый знак, т.е. не обязательно все положительны или отрицательны.

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с вещественными членами* a_n*, которые поочередно то положительны, то отрицательны, называется знакопеременным (или знакочередующимся) рядом.*

Теорема (признак Лейбница). *Пусть последовательность* $\{a_k\}$ *монотонна и* $a_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *сходится. Если* S *— это его сумма, а* s_n *— его* *частичная сумма, то справедлива оценка*

$$|S - s_n| \leqslant |a_{n+1}| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем предполагать, что $\{a_k\}$ монотонно убывает и, следовательно, a_k — это неотрицательное число при любом k. Для любого натурального p имеет место равенство

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-n-1}a_k\Big| =$$

$$= a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}a_{n+p}. \qquad (1)$$

Если p — четное, то сумма в правой части равенства (1) — это сумма неотрицательных разностей вида $a_k - a_{k+1}$. Если же p — нечетное, то к сумме такого вида разностей добавляется еще одно неотрицательное слагаемое a_{n+p}.

Заметим еще, что для любого натурального p справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-n-1}a_k\Big| \leqslant a_{n+1}. \qquad (2)$$

При p нечетном оценка (2) следует из представления (1), правая часть которого записывается как сумма неотрицательного числа a_{n+1} и неположительных разностей вида $a_{k+1} - a_k$ при k от $n+2$ до $n+p-1$.

Если же p четное, то из предыдущей суммы следует еще вычесть неотрицательное число a_{n+p}. Следовательно, оценка (2) будет и в этом случае выполнена.

Оценку (2) перепишем в эквивалентном виде

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-n-1}a_k\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}a_k\Big| \leqslant a_{n+1}. \qquad (2')$$

Эта оценка вместе с условием $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ приводит к заключению, что последовательность частичных сумм исходного ряда фундаментальна, т.е. удовлетворяет условию Коши. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится по критерию Коши.

Переходя к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (2'), получаем требуемую оценку погрешности. $\square$

Пример. *Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

Решение. При $\alpha > 0$ выполнены условия признака Лейбница: последовательность $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно убывает к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится при $\alpha > 0$. Если же $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится: не выполняется необходимое условие сходимости. $\square$

Тема : Ряды Фурье

$\mathbf{1^0}$. Периодические функции и гармонический анализ. $\mathbf{2^0}$. Ортогональные и ортонормированные системы функций. $\mathbf{3^0}$. Ряды Фурье по ортогональным системам функций. $\mathbf{4^0}$. Определение тригонометрического ряда Фурье.

1^0. В математике имеется отдельный раздел, в рамках которого изучаются свойства периодических функций. Этот раздел называется “гармоническим анализом”.

Простейшей периодической функцией является синусоида, т.е. функция вида

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Здесь t — это вещественная независимая переменная, постоянная A — это амплитуда функции, ω — ее частота и α — это фаза синусоиды. Синусоида $y = y(t)$ удовлетворяет следующему условию периодичности:

$$y(t+T) = y(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

где $T = 2\pi/\omega$ — это период функции $y = y(t)$.

Отметим, что область определения любой периодической функции — это вся числовая прямая.

Линейная комбинация любых двух периодических функций с одинаковым периодом T — это также периодическая функция с тем же периодом.

Таким образом, если сложить несколько синусоид вида $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, \ldots, N$, т.е. рассмотреть линейную комбинацию

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k),$$

то получится периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega$, график которой по форме существенно отличается от графика одной синусоиды.

Оказывается, что последовательность всех синусоид вида

$$y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

является в пространстве всевозможных периодических функций с одним и тем же периодом $T = 2\pi/\omega$ весьма представительным множеством. Точнее, любую достаточно гладкую функцию $\varphi(t)$ с условием периодичности

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

можно разложить в ряд вида

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \tag{SS}$$

где $\omega = 2\pi/T$. По другому этот фундаментальный факт формулируют следующим образом:

каждое сложное колебание $\varphi(t)$ разлагается на отдельные гармонические колебания вида $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$.

Синусоиды, входящие в разложение $(\mathbf{SS})$ функции $\varphi(t)$, называются ее гармониками. В зависимости от номера k в разложении $(\mathbf{SS})$ гармоника может быть первой, второй и т.д.

Процесс разложения колебания, т.е. периодической функции, в ряд по ее гармоникам, называется *гармоническим анализом* этой функции.

Преобразуем ряд (SS) к эквивалентному виду, воспользовавшись хорошо известной тригонометрической формулой

$$\sin(k\omega t + \alpha_k) = \sin\alpha_k \cos(k\omega t) + \cos\alpha_k \sin(k\omega t).$$

В результате получим разложение вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big), \qquad \text{(TS)}$$

коэффициенты в котором задаются формулами

$$a_0 = A_0,\ a_k = A_k \sin \alpha_k,\ b_k = A_k \cos \alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Сделав в разложении (**TS**) замену переменной $x = \omega t$, придем к *тригонометрическому ряду*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \big). \qquad (\mathbf{TS}')$$

Таким образом, задача разложения сложного колебания в ряд $(\mathbf{SS})$ по простым гармоникам сводится к задаче разложения периодической функции с периодом $\boldsymbol{T = 2\pi}$ в тригонометрический ряд $(\mathbf{TS'})$.

Последовательность функций

$$\mathbf{1,\ \cos x, \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots},$$

по которой ведется разложение $(\mathbf{TS'})$, называется *тригонометрической системой* и является простейшим примером так называемых ортогональных систем функций.

$\mathbf{2^0}$. Пусть задана последовательность функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots. \tag{Φ}$$

Предположим, что области определения функций этой последовательности имеют непустое пересечение, которое также является областью.

Определение. *Любой функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{SΦ}$$

где a_k — числа, называется рядом по системе функций (Φ).

Числа a_k при этом называются коэффициентами ряда.

Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, например, является рядом по системе функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^k,\ \ldots.$$

Пусть коэффициенты a_k таковы, что ряд (SФ) сходится в любой точке области определения некоторой функции $f(x)$ и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in D_f.$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ разложена в ряд по системе функций (Φ).

Определение. *Функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *определенные на промежутке* Δ, *называются ортогональными на* Δ, *если их произведение интегрируемо на* Δ *и при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\psi(x)\, dx = 0.$$

В частности, тождественно нулевая функция ортогональна любой другой функции.

Определение. *Последовательность функций*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \qquad (\Phi)$$

называется ортогональной на промежутке Δ, *если все эти функции определены на* Δ, *все произведения вида* $\varphi_n(x)\varphi_m(x)$ *интегрируемы на* Δ *и при этом справедливы равенства*

$$\int\limits_{\Delta} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m. \qquad (\Phi')$$

Если выполнены условия ортогональности (Φ'), то говорят также, что функции последовательности (Φ) попарно ортогональны на промежутке Δ.

Лемма. *Тригонометрическая система функций*

$$1,\ \cos x, \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots,$$

ортогональна на интервале $(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Используя формулу Ньютона — Лейбница, получаем равенства

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\, dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. нулевая гармоника тригонометрической системы ортогональна всем другим гармоникам этой системы.

Далее, проинтегрируем по интервалу $(-\pi, \pi)$

обе части тригонометрического равенства

$$2\sin nx\cos mx = \sin(n+m)x + \sin(n-m)x.$$

Тогда для любых натуральных m и n получим

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\cos mx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin(n-m)x\,dx = 0.$$

Таким образом, функции $\sin nx$ и $\cos mx$ ортогональны на интервале $(-\pi, \pi)$.

Поочередно проинтегрировав по интервалу $(-\pi, \pi)$ тригонометрические равенства

$$2\cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$

$$2\sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x,$$

заключаем, что для любых натуральных m и n, $n \neq m$, гармоники $\cos nx$ и $\cos mx$ ортогональны друг другу, равно как и гармоники $\sin nx$ и $\sin mx$. $\square$

Следствие. *Тригонометрическая система*

$$1,\ \cos x, \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots$$

ортогональна на любом промежутке длины 2π.

Это утверждение следует из периодичности всех функций рассматриваемой последовательности с одним и тем же периодом 2π, вследствие чего интеграл по промежутку длины 2π от произведения любых двух функций тригонометрической системы будет совпадать с интегралом по интервалу $(-\pi, \pi)$ от этого произведения.

Важным обобщением тригонометрической

системы является следующая последовательность

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots. \qquad (\mathrm{T}_l)$$

Здесь l — положительное число. Отметим, что каждая из функций системы (T_l) периодична с периодом $2l$. Систему (T_l) также называют тригонометрической.

Задача. *Доказать, что система* (T_l) ортогональна на любом промежутке длины $2l$.

Определение. *Последовательность функций*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots \qquad (\Phi)$$

определенных на промежутке Δ, *называется ортонормированной на* Δ, *если эта система ортогональна на* Δ *и при этом справедливы равенства*

$$\int_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2\, dx = 1, \qquad n = 1, 2, \dots . \qquad (\mathrm{O}_N)$$

Условие (o_N) часто называют *нормировкой* (или *калибровкой*) функций последовательности.

Пример. *Система функций*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ldots \tag{NT}$$

ортонормирована на любом промежутке длины 2π.

Аналогично, система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots \qquad (\mathrm{NT}_l)$$

ортонормирована на любом промежутке длины $2l$.

Последовательности функций (NT) и (NT_l) называют *нормированными тригонометрическими системами*.