§ 3. Несобственные интегралы

В предыдущих параграфах рассматривались определенные интегралы, соответствующие с геометрической точки зрения площадям *замкнутых ограниченных* областей (криволинейных трапеций). Расширим понятие определенного интеграла на случай неограниченной области. Такую область можно получить либо приняв какой-либо из пределов интегрирования равным бесконечности, либо рассматривая график функции с бесконечными разрывами (т. е. неограниченной). Рассмотрим отдельно каждый из указанных случаев.

3.1. Несобственные интегралы 1-го рода (по неограниченному промежутку)

3.1.1. Определение несобственного интеграла по неограниченному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq a$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет смысл при любом $b > a$ и является непрерывной функцией аргумента b.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

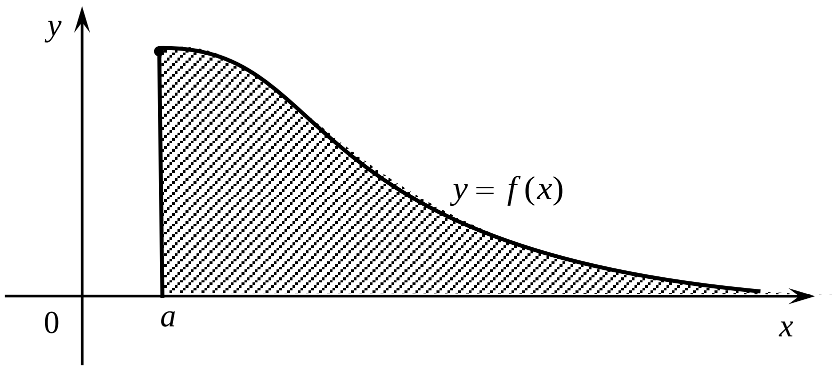
При этом говорят, что несобственный интеграл существует или *сходится*. Если же не существует конечного предела, то несобственный интеграл не существует или *расходится*.

Замечание. Аналогичным образом можно определить и несобственные интегралы 1-го рода для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

В частности, последний интеграл существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Если $f(x) > 0$, то очевидно, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ дает нам площадь бесконечной криволинейной трапеции.



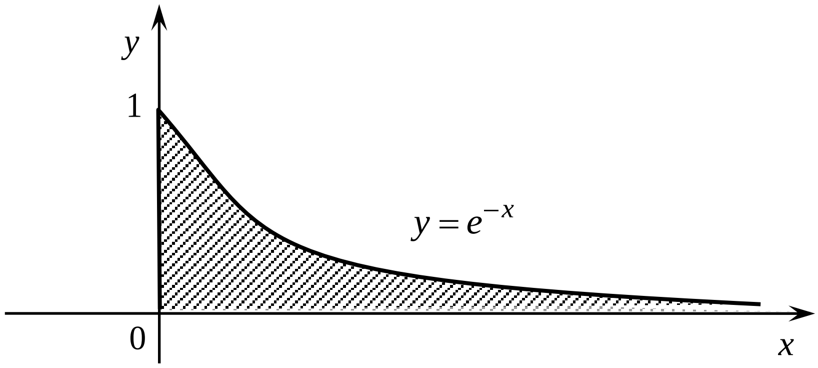
С геометрической точки зрения, сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1.$$

Итак, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится и определяет площадь S бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.



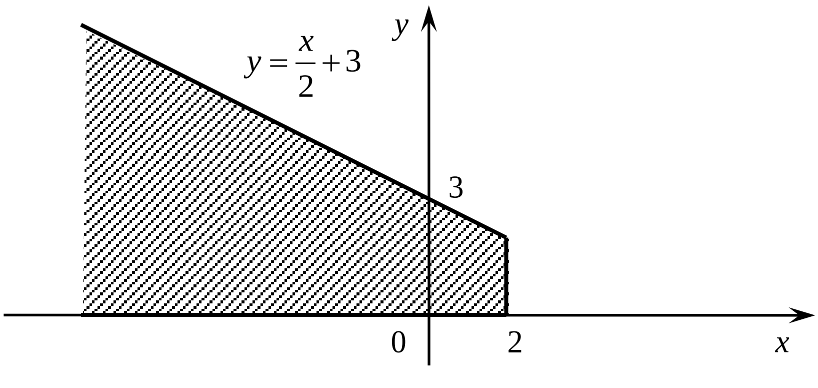
П р и м е р 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{2}(x^2-5)dx$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{2}(\frac{x}{2}+3)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{2}(\frac{x}{2}+3)dx=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{x^2}{4}+3x\right)\Bigg|_{a}^{2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2^2}{4}+6-\frac{a^2}{4}-6a\right)=-\infty.$$

Данный интеграл расходится, а площадь бесконечной криволинейной трапеции S, изображенной на рисунке, не ограничена.



П р и м е р 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha\in R$.

Решение:

При $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty (\alpha<1), \\ \dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha>1). \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\,\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty .$$

Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

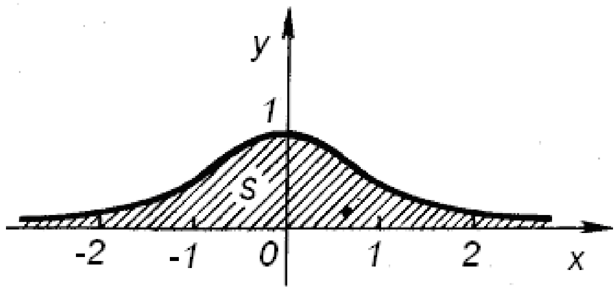
Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Данный интеграл сходится и определяет площадь бесконечной криволинейной трапеции S, изображенной на рисунке.



В случае сходящегося интеграла, принимая во внимание формулу Ньютона – Лейбница и определение несобственного интеграла 1-го рода, вычислим

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на любом промежутке при $x \geq a$.

П р и м е р 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \sin x dx.$$

Но $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_{0}^{+\infty} = -\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x + \cos 0$, и т. к. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ не существует, то интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x dx$ расходится. Аналогично расходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx$. Значит, и данный в условии интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ расходится.

3.1.2. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода

В некоторых задачах нет необходимости вычислять несобственный интеграл, часто достаточно бывает только установить его сходимость или расходимость и оценить значение.

Обратим внимание, что в этом пункте рассматриваются несобственные интегралы от знакопостоянных функций. Случай несобственных интегралов для знакопеременных функций будет рассмотрен в пп. 3.1.3.

Примем без доказательства следующие два утверждения.

Признак сравнения. Если на промежутке $[a, \infty)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$, причем $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq a$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$.

Признак сравнения в предельной форме. Если на промежутке $[a,\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ $(0<A<\infty)$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения в предельной форме является следствием первого признака.

Замечание. При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>1$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла установлена выше в примере 3 пп. 3.1.1.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$ $\quad\forall x\in[1;+\infty)$, то из сходимости $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{3/2}}$ следует сходимость и данного интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty}\ln\dfrac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Решение:

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Данный интеграл сходится, т. к. сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$, а

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12}dx$.

Решение:

Воспользуемся предельным признаком сравнения. При $x \to \infty$ подынтегральная функция эквивалентна $\frac{2}{x^2}$. Таким образом, α = 2 > 1, и данный интеграл сходится.

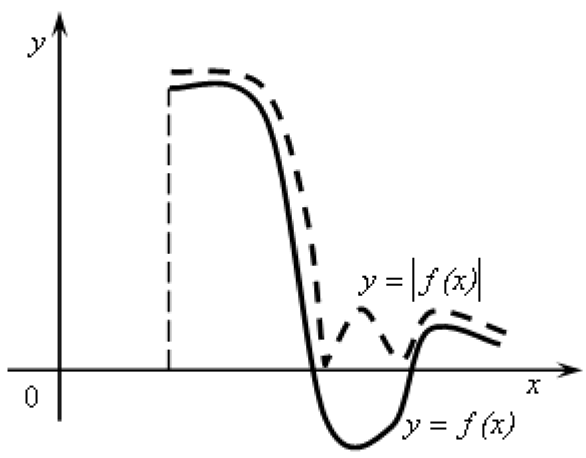
3.1.3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов 1-го рода

В случае если подынтегральная функция меняет знак на бесконечном интервале, вводят новое определение.

Определение 1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Функция $f(x)$ называется при этом *абсолютно интегрируемой* на $[a,\infty)$.

Теорема. **Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.**

Не приводя доказательства этой теоремы, заметим, что в первом интеграле суммируются площади, лежащие над и под осью абсцисс, а во втором интеграле площади под осью абсцисс учитываются со знаком минус.



Поэтому первый интеграл сходится «труднее»: он может расходиться в тех случаях, когда второй интеграл сходится.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся.*

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится на $[a,\infty)$.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$.

Решение:

Подынтегральная функция – знакопеременная, при этом $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|$, но $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\infty}\operatorname{arctg} xe^{-x}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\operatorname{arctg} xe^{-x}\right|dx \le \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\infty}\left|e^{-x}\right|dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx = \frac{\pi}{2}\lim_{A\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^A =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{A\to\infty}(-e^{-A}+1) = \frac{\pi}{2},$$

так что данный интеграл сходится абсолютно.

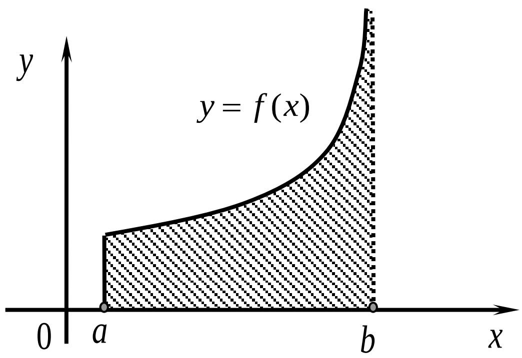
3.2. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченных функций)

3.2.1. Определение несобственного интеграла от неограниченных функций

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \in [a;b)$ и имеет разрыв при $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

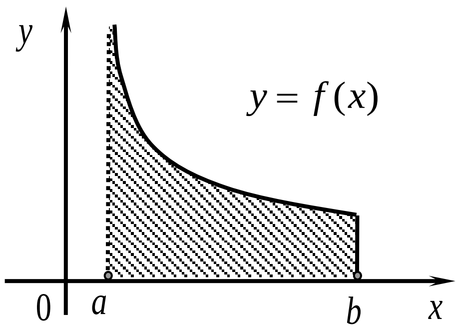
и называется *несобственным интегралом 2-го рода*. Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется *сходящимся,* в противном случае – *расходящимся.*



Если $f(x) > 0$, то очевидно, что $\int_a^b f(x)dx$ дает нам площадь криволинейной трапеции с бесконечным основанием.

Аналогичным образом определяются другие несобственные интегралы 2-го рода:

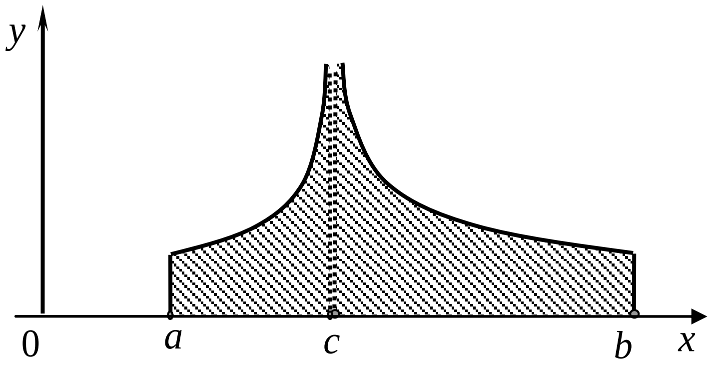
1) от функции, имеющей разрыв при $x = a$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$;



2) от функции, разрывной во внутренней точке $c \in [a;b]$ $(a < c < b)$:

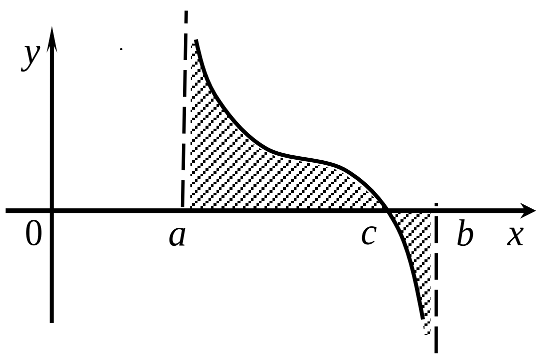
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если существуют оба интеграла, стоящие в правой части равенства;



3) от функции, обращающейся в бесконечность на концах промежутка интегрирования $[a;b]$ $(a < c < b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



При этом в последних двух пунктах интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ считается сходящимся, если сходятся оба интеграла, стоящие справа, и расходящимся, если расходится хотя бы один из этих интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Замечание. Если бы мы вычисляли данный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, не обращая внимания на точку разрыва, то получили бы сходящийся интеграл: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2$. Этот результат неверен и явно противоречит следствию 2 из свойства 4 определенного интеграла, т. к. подынтегральная функция положительна.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$.

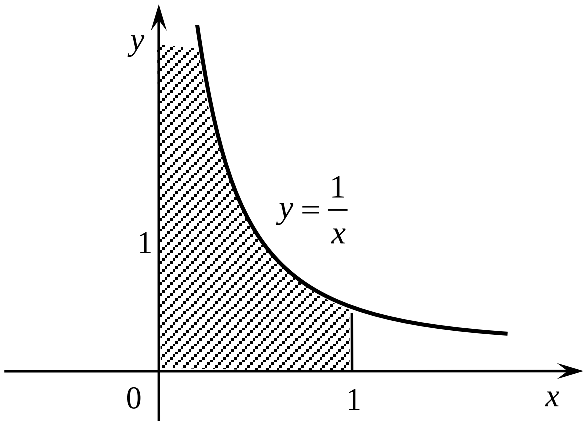
Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, и тогда

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\infty.$$

Это означает, что несобственный интеграл расходится.

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена.



П р и м е р 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

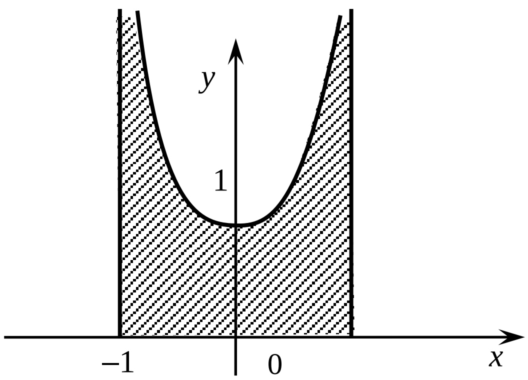
Решение:

При $x=-1$ и при $x=1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^{0} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \arcsin x \Big|_{0}^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon_1)\right) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon_1) - \arcsin 0\right) = 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$



Несобственный интеграл сходится и определяет площадь S бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.

П р и м е р 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ $\alpha \in R$.

Решение:

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x|\Big|_a^b = -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|\right) = \infty,$$

т. е. при $\alpha = 1$ интеграл расходится.

2. Пусть $\alpha > 1$. Обозначим $\alpha = 1 + s$, где $s > 0$, тогда

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = -\int\limits_a^b (b-x)^{-1-s}\, d(b-x) = \frac{1}{s(b-x)^s}\Bigg|_a^b = \infty,$$

т. е. при $\alpha > 1$ интеграл расходится.

3. Пусть $\alpha < 1$, тогда $s = 1 - \alpha > 0$. Имеем

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = -\int\limits_a^b (b-x)^{-\alpha}\, d(b-x) = \frac{(b-x)^s}{s}\Bigg|_a^b = \frac{(b-a)^s}{s},$$

т. е. при $\alpha < 1$ интеграл сходится.

Таким образом, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

3.2.2. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов 1-го рода.

Так, для знакопостоянных подынтегральных функций справедливы следующие достаточные признаки.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a \le x < b$ и имеют разрыв при $x = b$. Пусть, кроме того, $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ при $x \in [a,b)$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$; если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Пусть $f(x) \ge 0$, $\varphi(x) \ge 0$ на $[a,\infty)$, $\varphi(x) \ne 0$ $\forall x \in [a,b)$ и имеют разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла установлена выше в примере 4 пп. 3.2.2.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x} + x^3}$.

Решение:

При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Сравним подынтегральную функцию с $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Очевидно, что $\dfrac{1}{\sqrt{x} + x^3} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\forall x \in (0;1)$.

При этом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1 = 2$. Поэтому несобственный интеграл от «большей» функции сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

П р и м е р 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение:

При $x=1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}},$$

но $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится, следовательно, исходный интеграл также сходится.

Для знакопеременных подынтегральных функций справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. **Если $f(x)$ – знакопеременная функция, непрерывная на $[a, b)$ и имеющая разрыв при $x = b$, и если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.**

§ 4. Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

от непрерывной функции $f(x)$. Если может быть найдена первообразная $F(x)$ подынтегральной функции $f(x)$, то интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Если же первообразная не выражается через элементарные функции или если $f(x)$ задана графически или таблично, то для вычисления интеграла прибегают к приближенным формулам, точность которых может быть сделана сколько угодно большой.

Определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ – это число, и сам метод его приближенного интегрирования основан на вычислении приближенного значения этого числа.

Определение. Пусть I – искомое число, $\hat{I}$ – его приближенное значение, тогда разность

$$I - \hat{I} = \Delta$$

называется *абсолютной погрешностью* вычисления числа I.

Можно сформулировать две задачи приближенного вычисления интегралов:

- найти приближенное значение числа $\hat{I}$ и оценить погрешность вычисления,
- найти приближенное значение числа I с заданной погрешностью Δ.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла в большинстве случаев основаны на том, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, отрезком $[a,b]$ оси $0x$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$. Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции. При этом кривая

$f(x)$ заменяется новой кривой, которая достаточно «близка» к данной. Тогда искомая площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой.

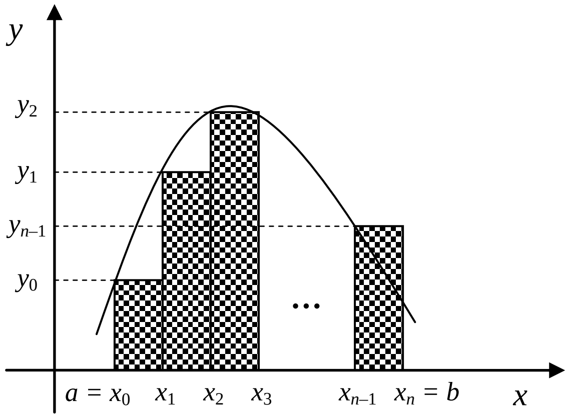
В качестве этой кривой выбирают такую, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто. В зависимости от выбора новой кривой (метода аппроксимации) мы получаем ту или иную приближенную формулу, часто называемую *квадратурной*.

4.1. Формула прямоугольников

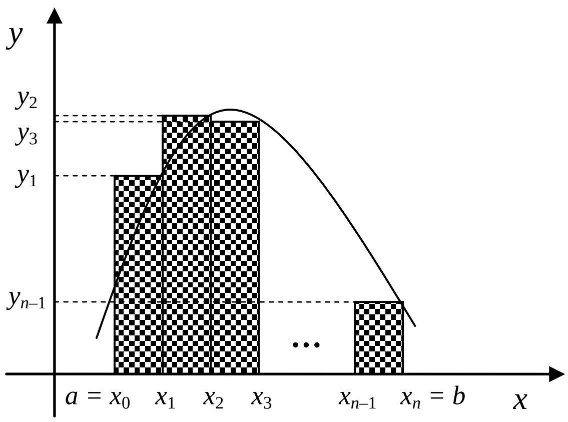
Формула прямоугольников основана на замене подынтегральной функции $f(x)$ на кусочно-постоянную функцию.

Отрезок $[a,b]$ разбивается на n-частей равной длины $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. На каждой из частей Δx функция $f(x)$ заменяется постоянной величиной $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно приравнивается к площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

а



б



Тогда:

– для левосторонней формулы прямоугольников (рис. *а*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right);$$

– для правосторонней формулы прямоугольников (рис. *б*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right).$$

Можно показать, что если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a,b]$ вторую производную $f''(x)$, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством

$$\Delta_n \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

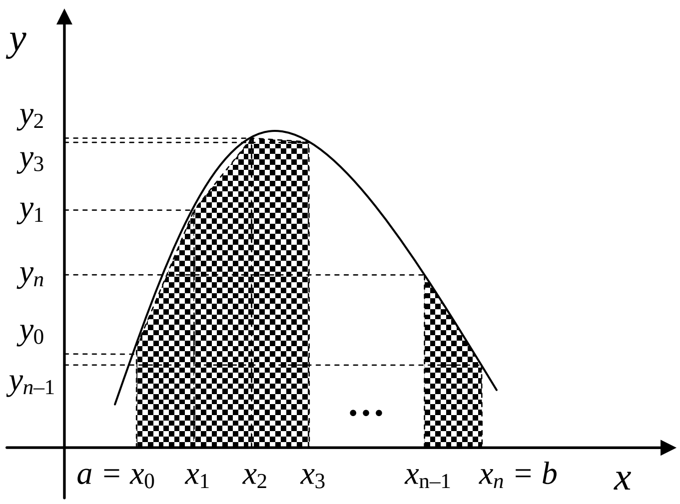
где $M_2 = \sup\limits_{[a;b]} \left| f''(x) \right|$.

Для повышения точности (уменьшения ошибки вычисления) требуется увеличивать n-число элементов разбиения отрезка $[a,b]$ на части. При этом резко возрастает количество вычислений.

4.2. Формула трапеций

Формула трапеций аналогична формулам прямоугольников, но $f(x)$ заменяется на каждом отрезке длиной Δx линейной функцией, а площадь – суммой площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$



Таким образом, площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на рисунке.

Можно показать, что если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a,b]$ вторую производную $f''(x)$, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством

$$\Delta_n \le M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \sup\limits_{[a;b]} \left| f''(x) \right|$.

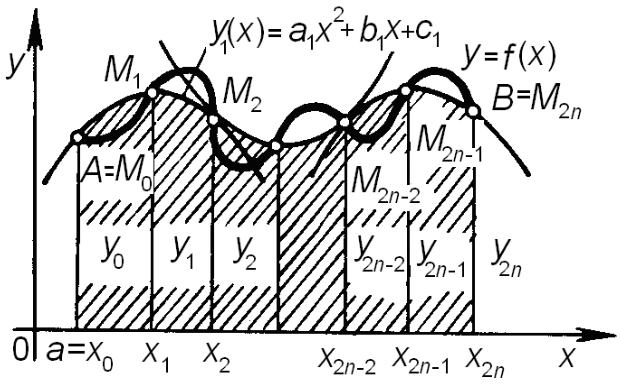
4.3. Формула Симпсона

Данный метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси OY.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на четное число *2n* равных отрезков

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n}.$$

Через каждые три точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ проводится дуга параболы $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Таким образом, на участке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ кривая $f(x)$ заменяется параболой.



Площадь, ограниченную одной из парабол, нетрудно подсчитать:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{6}\left[P_2(x_{i-1}) + 4P_2\left(\frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{2}\right) + P_2(x_{i+1})\right].$$

Суммируя эти площади, в результате найдем приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})\right].$$

Эта формула и называется *формулой Симпсона*.

Можно показать, что если подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a,b]$ производную четвертого порядка, то погрешность Δ_n приближенной оценки интеграла оценивается неравенством

$$\Delta_n \le M_4 \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4},$$

где $M_4 = \sup\limits_{[a;b]}\left|f^{(IV)}(x)\right|$.

Пример. Вычислить приближенно $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение:

Разобьем отрезок $[1;2]$ на 10 равных частей, полагая $\Delta x = 0{,}1$.

Составим таблицу подынтегральной функции.

x	$y=\frac{1}{x}$	x	$y=\frac{1}{x}$
1,0	1,00000	1,6	0,62500
1,1	0,90909	1,7	0,58824
1,2	0,83333	1,8	0,55556
1,3	0,76923	1,9	0,52632
1,4	0,71429	2,0	0,50000
1,5	0,66667	–	–

По формуле прямоугольников имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k = 0{,}1\cdot 7{,}18773 = 0{,}718773.$$

По формуле трапеций

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) = 0{,}1(0{,}75 + 6{,}18773) = 0{,}69377.$$

По формуле Симпсона

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 2\left[y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}\right] + 4\left[y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right]\right) =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(1{,}5 + 2\cdot 2{,}72818 + 4\cdot 3{,}45955\right) = 0{,}69315.$$

В действительности $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472$ (с точностью до седьмого знака).

Таким образом, при разбиении отрезка интегрирования на 10 частей мы получили пять верных знаков по формуле Симпсона, три – по формуле трапеций и один – по формуле прямоугольников.

Контрольные вопросы

1. Как распространяется понятие определенного интеграла в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций?
2. Как формулируется теорема сравнения (в предельной форме) для несобственного интеграла первого и второго рода?
3. Как вычисляются интегралы от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке отрезка интегрирования? Как они называются?
4. В чем заключается метод приближенного вычисления определенных интегралов?
5. Сформулируйте методы приближенного вычисления определенных интегралов: правило треугольников и трапеций; метод Симпсона. Насколько точно можно вычислять определенные интегралы с помощью этих методов?

Типовые примеры

П р и м е р 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3}$ или доказать его расходимость.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = -\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^{-2}\Bigg|_{-\infty}^{1} =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}\Bigg|_{a}^{1}\right) = -\frac{1}{2\cdot 4} - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4\left(a^2+1\right)^2} = -\frac{1}{8} - 0 = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

П р и м е р 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$ или доказать его расходимость.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{2xdx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{2xdx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\ln 1 - \ln\left(a^2+1\right)\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln 1\right) = -\infty + \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

П р и м е р 3. Определить, сходится ли интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}dx.$

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{x^{3/2}}$ $\quad\forall x\in[1;+\infty)$, то из сходимости $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ следует сходимость и данного интеграла.

Следовательно, данный интеграл сходится, причем абсолютно.

П р и м е р 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}.$

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения:

$$\frac{x}{\sqrt{x^6+2}} < \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x^2}.$$

Из сходимости $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ следует сходимость и данного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}$.

П р и м е р 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+x^3}}dx.$

Решение:

Преобразуем подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{3x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+x^3}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{3+\sqrt{\frac{9}{x^2}+1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Несобственный интеграл от функции $g(x) = \frac{1}{x^2}$ сходится $\left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad [p=2>1] \right)$.

Найдем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{3+\sqrt{\frac{9}{x^2}+1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+1}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\sqrt{\frac{9}{x^2}+1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+1}} = 3.$$

По предельному признаку сравнения получаем, что данный несобственный интеграл сходится.

П р и м е р 6. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или доказать его расходимость.

Решение:

Интеграл от разрывной функции.

Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$. В силу определения имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и равен 2.

П р и м е р 7. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ или доказать его расходимость.

Решение:

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$, которая принадлежит интервалу $[-1;8]$.

В этом случае данный интеграл разбиваем на два интеграла точкой разрыва:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{0} - \sqrt[3]{(-1)^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{0}\right) = \frac{-3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{9}{2} -$$

интеграл сходится.

П р и м е р 8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$ или доказать его расходимость.

Решение:

Подынтегральная функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечный разрыв на $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, т. к. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\ \frac{\pi}{2} = \infty$:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/2} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{2}\right| + \ln|\cos 0| =$$
$$= -\ln 0 + \ln 1 = -(\infty) + 0 = \infty \; -$$

интеграл расходится.

П р и м е р 9. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ или доказать его расходимость.

Решение:

Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x \to 1$. Представим ее в виде

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Найдем

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/3}}} = \lim_{x \to 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то по предельному признаку сравнения интегралы $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ ведут себя одинаково. Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ сходится, т. к. $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. Следовательно, и исходный интеграл тоже сходится.

Пример 10. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ по формуле трапеций, приняв $n = 10$.

Решение:

Составим таблицу значений функции, необходимых для приближенного вычисления данного определенного интеграла.

i	x_i	$\sin x_i$	$\dfrac{\sin x_i}{x_i}$
0	0	0	1
1	0,1	0,09985	0,99850
2	0,2	0,19867	0,99335
3	0,3	0,29552	0,98507
4	0,4	0,38942	0,97355
5	0,5	0,47943	0,95886
6	0,6	0,56464	0,94107
7	0,7	0,64422	0,92031
8	0,8	0,71736	0,89670
9	0,9	0,78333	0,87037
10	1	0,84147	0,84147
		Σ	10,37925

Поскольку $h = 0{,}1$,

$$y_0 + y_{10} = 1{,}84147;$$
$$y_1 + \ldots + y_9 = 10{,}37925 - 1{,}84147 = 8{,}53778;$$
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) = 0{,}1(0{,}92074 + 8{,}53778) =$$
$$= 0{,}94585.$$

Точное значение этого интеграла – 0,94608.

Пример 11. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение:

По формуле Симпсона получим

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] +$$
$$+ 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7)]].$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,828	3,873	4	4,123	4,899	6,557	8,944	11,874	15,232	18,947	22,978

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2{,}828+22{,}978+2[4+4{,}899+8{,}944+15{,}232]+$$
$$+4[3{,}873+4{,}123+6{,}557+11{,}874+18{,}947]]=91{,}151.$$

Точное значение этого интеграла – 91,173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов 1-го рода:

а) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$; б) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

г) $\int_{0}^{+\infty}\frac{arctg\, x}{1+x^2}dx$; д) $\int_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$; е) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов 2-го рода:

а) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; в) $\int_{0}^{1}x\ln x dx$;

г) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-6x+8}$; д) $\int_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; е) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$; б) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$; в) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$;

г) $\int_{1}^{\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$; е) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\operatorname{tg}x-x}$.

***Ответы*:**

1. *а*) интеграл сходится и его величина составляет 1,

   б) интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{4}$,

   в) интеграл расходится.

   г) интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi^2}{8}$,

   д) интеграл сходится и его величина составляет $\frac{1}{2}$,

   е) интеграл сходится и его величина составляет $\frac{1}{2}$.

2. *а*) интеграл сходится и его величина составляет 2,
   б) интеграл сходится и его величина составляет π,
   в) интеграл сходится и равен $-\frac{1}{4}$,
   г) интеграл расходится,
   д) интеграл сходится и его величина составляет 1,
   е) интеграл расходится.

3. *а*, *б*, *в*, *г* – сходятся; *д*, *е* – расходятся.

Задания

Выполните задания 6, 7 из прил. 4.