1 Частичные порядки

1.1 Отношение частичного порядка

Определение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ называется отношением **частичного порядка**, или просто **частичным порядком**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Другими словами, оно должно удовлетворять следующим свойствам:

1. **рефлексивность**: $\forall a \in A \ (a, a) \in r$
2. **антисимметричность**: $\forall a, b \in A \ (a, b) \in r, (b, a) \in r \Rightarrow a = b$
3. **транзитивность**: $\forall a, b, c \in A \ (a, b) \in r, \ (b, c) \in r \Rightarrow (a, c) \in r$

Для обозначения отношения частичного порядка обычно используются следующие символы: $\leq, \subseteq, \preceq, \sqsubseteq, \ldots$. Если такой символ используется в качестве r, то вместо $(a, b) \in \leq$ можно использовать более общие обозначения $a \leq b$ и называть $\leq$ просто частичным порядком.

1.2 Линейный порядок

Важный частный случай частичного порядка, также называемый линейным порядком..

Определение

Частичный порядок $\leq$ на множестве A называется **линейным порядком**, если выполняется следующее свойство:

$$\forall a, b \in A \ (a, b) \in r \text{ или } (b, a) \in r$$

1.3 Примеры частичных порядков

Пример 1

Обычное отношение $\leq$ на действительных числах $\mathbb{R}$ является линейным порядком.

Пример 2

Пусть A - множество. Тогда бинарное отношение $\subseteq_A$ на множестве $\mathcal{P}(A)$ будет частичным порядком, но не линейным в общем случае.

Пример 3

Определим отношение делимости $|$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ как:

$$n|m \Leftrightarrow n \text{ делит } m$$

Тогда $|$ является частичным порядком на $\mathbb{N}$.

1.4 Наибольшие и наименьшие элементы

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in X$ называется

- **наибольшим** в X, тогда и только тогда, когда для любого $b \in X$ верно, что $a \leq b$
- **наименьшим** в X, тогда и только тогда, когда для любого $b \in X$ верно, что $b \leq a$

Замечание

Наибольший элемент может не существовать. пример: рассмотрим натуральные числа $\mathbb{N}$. Не существует наибольшего элемента из $\mathbb{N}$. Кроме того, не существует наименьшего элемента из множества всех целых чисел.

1.5 Единственность наибольшего/наименьшего элемента

Предложение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Тогда, если наименьший элемент из X существует, то он единственен. То же верно и для наибольшего элемента.

Доказательство

Пусть $a_1, a_2 \in X$ - два наименьших элемента из X. Тогда по определению $a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_1$. Отношение частичного порядка антисимметрично, поэтому $a_1 = a_2$.

- Если существует наименьший элемент из X, то он обозначается как $\min(X)$
- Если существует наибольший элемент из X, то он обозначается как $\max(X)$

1.6 Минимальные и максимальные элементы

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in X$ называется

- **минимальным** из X, тогда и только тогда, когда $\forall b \in X(b \leq a \Rightarrow b = a)$
- **максимальным** из X, тогда и только тогда, когда $\forall b \in X(a \leq b \Rightarrow b = a)$

Замечание

Минимальный/максимальный элемент может не существовать, и даже если он существует, он может не быть единственным.

1.7 Верхняя и нижняя границы

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in A$ называется

- **верхней границей** X из A, тогда и только тогда, когда для любых $b \in X$, $b \leq a$
- **нижней границей** X из A, тогда и только тогда, когда для любых $b \in X$, $a \leq b$

Введем следующие обозначения:

- $X \uparrow A \rightleftharpoons \{b|b \in A, b$ - верхняя граница X из $A\}$ - множество всех верхних границ X из A
- $X \downarrow A \rightleftharpoons \{b|b \in A, b$ - нижняя граница X из $A\}$ - множество всех нижних границ X из A,

Отметим, что множества $X \uparrow A$ и $X \downarrow A$ всегда существуют, но могут быть пустыми.

1.8 Верхняя и нижняя грани множества

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент a называется

- точной верхней границей или **супремум** X из A, тогда и только тогда, когда $a = \min(X \uparrow A)$
- точной нижней границей или **инфимум** X из A, тогда и только тогда, когда $a = \max(X \downarrow A)$

Отметим, что супремум и инфимум не всегда существуют. Если супремум существует, он единственен. То же верно и для инфимума. Теперь введём следующие обозначения

- $\sup_A(X)$ - супремум множества X из A, если он существует
- $\inf_A(X)$ - инфимум множества X из A, если он существует

Если из контекста понятно, какой A имеется в виду, можно просто писать $\sup(X)$ и $\inf(X)$ вместо $\sup_A(X)$ и $\inf_A(X)$.

1.9 Примеры верхних и нижних граней

Пример 1

Пусть $\leq$ - обычный линейный порядок на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Рассмотрим множество $X = \{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $X \downarrow \mathbb{R} = \{a|a \in \mathbb{R}, a \leq 0\}$, и $\inf_{\mathbb{R}}(X) = \max(X \downarrow \mathbb{R}) = 0$.

Пример 2

Пусть $\leq$ - линейный порядок на $\mathbb{R}$. Рассмотрим множества $X = \{1-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ и $Y = \{a | a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1\}$. Тогда

- $X \uparrow \mathbb{R} = \{a | a \in \mathbb{R}, a \geq 1\}$
- $X \uparrow Y = \emptyset$

следовательно,

- $\sup_{\mathbb{R}}(X) = 1$
- $\sup_Y(X)$ не существует и $X \subseteq Y$

1.10 Лемма о $\sup$ и $\inf$

Лемма (о $\sup$ и $\inf$)

Пусть $\leq$ - частичный порядок на A, $X \subseteq A$. Тогда

- если существует $a = \max(X)$, то $\sup_A(X) = a$
- если существует $b = \min(X)$, то $\inf_A(X) = b$

Доказательство

Докажем первое утверждение. Пусть $a = \max(X)$. Это означает, что $\forall c \in X$ верно, что $c \leq a$, т.е. $a \in (X \uparrow A)$. Предположим, что $a \neq b = \sup_A(X) = \min(X \uparrow A)$. Тогда $b < a$. Так как b - верхняя граница X, $a \leq b$ - противоречие. Второе утверждение доказывается аналогично.

1.11 Частично упорядоченные множества

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A. Тогда пара $(A, \leq)$ называется **частично упорядоченным множеством**, сокращённо **чум**.

Определение

Пусть $\mathcal{A}(A, \leq)$ - чум. Если $\leq$ - линейный порядок на A, то $\mathcal{A}$ называется **линейно упорядоченным множеством**, сокращённо **лум**.

1.12 Решётки

Определение

Пусть $\mathcal{A} = (A, \leq)$ - чум. Тогда $\mathcal{A}$ называется **решёткой**, тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $a, b \in A$ существуют $\sup_A(\{a, b\})$ и $\inf_A(\{a, b\})$.

Определение

Если $\mathcal{A} = (A, \leq)$ - решётка, тогда для любых двух $a, b \in A$

- $a \cup^{\mathcal{A}} b \rightleftharpoons \sup_A(\{a, b\})$
- $a \cap^{\mathcal{A}} b \rightleftharpoons \inf_A(\{a, b\})$

Если из контекста понятно, какая решётка имеется в виду, верхний индекс $\mathcal{A}$ можно опустить: вместо $\cup^{\mathcal{A}}$ можно писать $\cup$, а вместо $\cap^{\mathcal{A}}$ - $\cap$.

1.13 Линейно упорядоченные множества - это решётки

Предложение

Любой лум является решёткой.

Доказательство

Пусть $(A, \leq)$ - лум, возьмём два элемента $a, b \in A$. Так как $\leq$ - линейный порядок, $a \leq b$ или $b \leq a$. В первом случае $\min(\{a, b\}) = a$ и $\max(\{a, b\}) = b$, во втором случае $\min(\{a, b\}) = b$ и $\max(\{a, b\}) = a$. В обоих случаях для $X = \{a, b\}$ существуют min и max, следовательно, по лемме о sup и inf, sup и inf существуют.

1.14 Дистрибутивные решётки и булевы алгебры

Определение

Пусть $\mathcal{A} = (A, \leq)$ - решётка. Тогда $\mathcal{A}$ называется **дистрибутивной** решёткой, тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in A$ верно, что

$$a \cup^{\mathcal{A}} (b \cap^{\mathcal{A}} c) = (a \cup^{\mathcal{A}} b) \cap^{\mathcal{A}} (a \cup^{\mathcal{A}} c)$$

$$a \cap^{\mathcal{A}} (b \cup^{\mathcal{A}} c) = (a \cap^{\mathcal{A}} b) \cup^{\mathcal{A}} (a \cap^{\mathcal{A}} c)$$

Определение

Дистрибутивная решётка $\mathcal{A} = (A, \leq)$ называется **булевой алгеброй**, тогда и только тогда, когда

- существует наибольший элемент $1^{\mathcal{A}}$ из A
- существует наименьший элемент $0^{\mathcal{A}}$ из A
- для любого элемента $a \in A$ существует такой $\bar{a} \in A$, что $a \cup^{\mathcal{A}} \bar{a} = 1^{\mathcal{A}}$ и $a \cap^{\mathcal{A}} \bar{a} = 0^{\mathcal{A}}$

1.15 Пример булевой алгебры

пример

Рассмотрим частичный порядок $\subseteq_A$ на множестве A: $\subseteq_A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Тогда чум $(\mathcal{P}(A), \subseteq_A)$ является булевой алгеброй.

Доказательство

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что для любых $X, Y \subseteq A$

- $\sup(X, Y) = X \cup Y$ - всегда существует
- $\inf(X, Y) = X \cap Y$ - всегда существует
- $1 = A$, $0 = \emptyset$
- $\bar{X} = A \setminus X$

Дистрибутивность следует из дистрибутивности операций $\cap$ и $\cup$ на множествах.