1 Бинарные отношения

1.1 Определение бинарного отношения

Определение

Пусть A, B - два множества. Тогда **бинарное отношение** между множествами A и B - любое подмножество $r \subseteq A \times B$.

Замечание

Любое отображение $f : A \to B$ - это подмножество $f \subseteq A \times B$, поэтому отображения - это частные случаи бинарных отношений.

Определение

Пусть A - множество. Бинарное отношение **на множестве** A - любое подмножество $r \subseteq A \times A = A^2$.

1.2 Композиция бинарных отношений

Определение

Пусть A, B, C - множества, $r \subseteq A \times B$ и $s \subseteq B \times C$ - бинарные отношения. Тогда **Композиция** бинарных отношений r и s - это бинарное отношение $r \circ' s \subseteq A \times C$, определённое следующим образом:

$$(a, c) \in r \circ' s \Leftrightarrow \text{существует } b \in B \text{ такой, что } (a, b) \in r \text{ и } (b, c) \in s$$

Предложение

Операция композиции отображений $\circ$, определённая ранее, совпадает с операцией композиции бинарных отношений $\circ'$ если рассматривать отображения как бинарные отношения.

Доказательство

Пусть $f : A \to B, g : B \to C$ - два отображения. Тогда для любой пары $(a, c) \in A \times C$: $(a, c) \in (f \circ g) \overset{def}{\Leftrightarrow} c = g(f(a)) \Leftrightarrow$ существует $b \in B$ такой, что $c = g(b)$ и $b = f(a) \overset{def}{\Leftrightarrow} (a, c) \in (f \circ' g)$

Следствие

Так как операции композиции $\circ$ и $\circ'$ в общем случае совпадают, далее будет использоваться общее обозначение $\circ$ для обоих.

1.3 Ассоциативность композиции

Предложение

Пусть $r \subseteq A \times B$, $s \subseteq B \times C$ и $t \subseteq C \times D$ - бинарные отношения. Тогда $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$ - т.е. операция $\circ$ ассоциативна.

Доказательство

Пусть $(a, d) \in A \times D$ - произвольная пара. Перепишем левую часть уравнения по определению:

$(a, d) \in ((r \circ s) \circ t) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists c \in C((a, c) \in (r \circ s)$ и $(c, d) \in t) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists c \in C\,(\exists b \in B((a, b) \in r$ и $(b, c) \in s)$ и $(c, d) \in t)$

Аналогично перепишем правую часть: $(a, d) \in (r \circ (s \circ t)) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists b \in B((a, b) \in r$ и $(b, d) \in (s \circ t)) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists b \in B((a, b) \in r$ и $\exists c \in C((b, c) \in s$ и $(c, d) \in s))$ Обе части эквивалентны $\exists b \in B \exists c \in C((a, b) \in r$ и $(b, c) \in s$ и $(c, d) \in s)$

1.4 n-я степень отношений

Определение

Дано отношение r на множестве A, определим его n-ю степень как

- $r^0 = id_A$
- $r^{n+1} = r^n \circ r$

Замечание

Это определение верно, так как $\circ$ ассоциативна, поэтому результат $\underbrace{r \circ r \circ \ldots \circ r}_{n}$ не зависит от того, как расставлены скобки внутри этого составного выражения.

1.5 Композиция и тождественное отображение

Предложение

Пусть $r \subseteq A \times B$ - бинарное отношение. Тогда:

1. $r \circ id_B = r$
2. $id_A \circ r = r$

Доказательство

Докажем первое утверждение. Пусть $(a, b) \in A \times B$ - произвольная пара. Тогда

$$(a, b) \in (r \circ id_B) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists c \in B((a, c) \in r \wedge (c, b) \in id_B) \Leftrightarrow$$

$$\Big| (x, y) \in id_Z \overset{def}{\Leftrightarrow} (x = y) \Big|$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in B((a, c) \in r \wedge (c = b)) \Leftrightarrow (a, b) \in r$$

Второе равенство доказывается аналогично.

1.6 Обратные отношения

Определение

Пусть $r \subseteq A \times B$ - бинарное отношение. Тогда **обратное отношение** к r - это отношение $r^{-1} \subseteq B \times A$, определённое как:

$$r^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in r\}$$

Замечание

В отличие от обратных отображений, обратные отношения всегда существуют для любого бинарного отношения.

1.7 Обратные отношения и обратные отображения

Предложение

Если $f : A \to B$ - отображение и существует обратное к f отображение g, то $g = f^{-1}$

Доказательство

По предложению о единственности обратного отображения, достаточно проверить, что f^{-1} - обратное отображение, т.е. что $f \circ f^{-1} = id_A$ и $f^{-1} \circ f = id_B$. Проверим первое утверждение. Пусть $a \in A$, $b = f(a)$, т.е. $(a, b) \in f$. Тогда по определению, $(b, a) \in f^{-1}$, следовательно, $(a, a) \in f^{-1} \circ f$. Это означает, что $id_A \subseteq f^{-1} \circ f$. С другой стороны, если $(a_1, a_2) \in f^{-1} \circ f$, то существует такой $b \in B$, что $(a_1, b) \in f$ и $(b, a_2) \in f^{-1}$, т.е. $(a_2, b) \in f$. Так как f инъективно, $a_1 = a_2$, поэтому $f^{-1} \circ f \subseteq id_A$. Следовательно, равенство $f \circ f^{-1} = id_A$ доказано. Второе равенство доказывается аналогично.

1.8 Классы бинарных отношений

Определение

Пусть $r \subseteq A^2$ - бинарное отношение на множестве A. Тогда

- r называется **рефлексивным**, тогда и только тогда, когда $id_A \subseteq r$
- r называется **симметричным**, тогда и только тогда, когда $r = r^{-1}$, т.е. оно совпадает со своим обратным отношением
- r называется **транзитивным**, тогда и только тогда, когда $r \circ r \subseteq r$
- r называется **антисимметричным**, тогда и только тогда, когда $r \cap r^{-1} \subseteq id_A$

1.9 Примеры отношений

Пример 1

Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

- отношение $\leq$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично,
- отношение $\sim$, определённое как: $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$, рефлексивно, транзитивно и симметрично

Пример 2

Рассмотрим бинарные отношения $\subseteq_X$ и $\sim_X$ на множестве $\mathcal{P}(X)$.

- отношение $\subseteq_X$ определённое как: $A \subseteq_X B \Leftrightarrow A \subseteq B$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично,
- отношение $\sim_X$, определённое как: $A \sim B \Leftrightarrow$ в A и в B содержится одинаковое количество элементов - рефлексивно, транзитивно и симметрично.

1.10 Характеризация рефлексивных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ рефлексивно $\Leftrightarrow$ для любого $a \in A$ пара (a, a) лежит в r, т.е. $(a, a) \in r$

Доказательство

Следует из определения диагонали: $id_A = \{(a, a) | a \in A\}$

1.11 Характеризация симметричных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ симметрично $\Leftrightarrow$ для любого $a, b \in A$, $(a, b) \in r \Leftrightarrow (b, a) \in r$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r = r^{-1}$ и $(a, b) \in r$. Тогда $(b, a) \in r^{-1}$, так как $r = r^{-1}$, $(b, a) \in r$. Обратное следствие $\Rightarrow$. Известно, что для любого $a, b \in A$ верно, что $(a, b) \in r \Leftrightarrow (b, a) \in r$. Нам нужно показать, что $r = r^{-1}$. Покажем два включения: $r \subseteq r^{-1}$ и $r^{-1} \subseteq r$. Первое: если $(a, b) \in r$, то $(b, a) \in r$, тогда по определению обратного отношения, $(a, b) \in r^{-1}$. Второе включение доказывается аналогично.

1.12 Характеризация транзитивных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ транзитивно $\Leftrightarrow$ для любого $a, b, c \in A$ из $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$ следует, что $(a, c) \in r$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r \circ r \subseteq r$, и $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$. Тогда по определению композиции $(a, c) \in r \circ r$, следовательно, $(a, c) \in r$, Ч.Т.Д. Обратное следствие $\Rightarrow$. Нужно показать, что $r \circ r \subseteq r$. Пусть $(a, c) \in r \circ r$. Значит, существует такой $b \in A$, что $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$. Следовательно, $(a, c) \in r$ - Ч.Т.Д.

1.13 Характеризация антисимметричных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ антисимметрично $\Leftrightarrow$ для любых $a, b \in A$ из $(a, b) \in r$ и $(b, a) \in r$ следует, что $a = b$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r \cap r^{-1} \subseteq id_A$, $(a, b) \in r$ и $(b, a) \in r$. Тогда $(a, b) \in r^{-1}$, поэтому $(a, b) \in r \cap r^{-1} \subseteq id_A$, тогда $(a, b) \subseteq id_A$. Следовательно, $a = b$. Обратное следствие $\Rightarrow$ - аналогично.

2 Эквивалентности

2.1 Определение отношения эквивалентности

Определение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности**, тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Другими словами, выполняются следующие свойства:

1. **рефлексивность** $\forall a \in A \ (a, a) \in r$
2. **симметричность** $\forall a, b \in A \ (a, b) \in r \Rightarrow (b, a) \in r$

3. **транзитивность** $\forall a, b, c \in A\ (a,b) \in r,\ (b,c) \in r \Rightarrow (a,c) \in r$

Для обозначения отношений эквивалентности используются символы вида $\sim$, $\equiv$. Если использовать символ $\sim$ (или $\equiv$) для отношения эквивалентности r, то вместо $(a,b) \in\sim$ можно писать $a \sim b$ и называть $\sim$ просто эквивалентностью.

2.2 Примеры отношений эквивалентности

Пример 1

Определим эквивалентность $\sim_{\mathbb{Q}}$ на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$(n_1, n_2) \sim_{\mathbb{Q}} (m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$$

Понятно, что $(n_1, n_2) \sim_{\mathbb{Q}} (m_1, m_2)$ означает, что $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2}$

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ - натуральные числа. Введем следующие обозначения:

- $\lfloor n/k \rfloor$ - целая часть от деления n на k, т.е. $\lfloor n/k \rfloor \cdot k \le n < (\lfloor n/k \rfloor + 1) \cdot k$
- $rest(n,k) \rightleftharpoons n - \lfloor n/k \rfloor \cdot k$ - остаток от деления n на k

Пример 2

Мы можем определить отношение эквивалентности $\equiv_k$ на множестве $\mathbb{Z}$:

$$n_1 \equiv_k n_2 \Leftrightarrow rest(n_1, k) = rest(n_2, k)$$

2.3 Унарное пересечение и объединение

Мы знаем бинарные операции $\cup$ и $\cap$ на множествах. Теперь давайте определим унарные операции $\cup$ и $\cap$.

Определение

Пусть $A\{a_1, \ldots, a_n\}$ - конечное множество. Тогда:

- $\cup\{a_1, \ldots, a_n\} \rightleftharpoons a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$
- $\cap\{a_1, \ldots, a_n\} \rightleftharpoons a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_n$

Определение

Пусть A - произвольное множество. Тогда:

$$\cup A \rightleftharpoons \bigcup_{a\in A} a \quad \text{и} \quad \cap A \rightleftharpoons \bigcap_{a\in A} a$$

2.4 Классы эквивалентности

Определение

Пусть $\sim$ - эквивалентность на множестве A, $a \in A$. Тогда множество

$$[a]_\sim \leftrightharpoons \{b | b \in A, a \sim b\}$$

называется **классом эквивалентности** элемента a относительно эквивалентности r.
Подмножество $X \subseteq A$ называется классом эквивалентности относительно $\sim$, тогда и только тогда, когда $X = [a]_\sim$ для некоторого $a \in A$.

2.5 Свойства классов эквивалентности

Лемма

Пусть $\sim$ - эквивалентность. Тогда:

1. $a \in [a]_\sim$
2. если $[a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim \neq \emptyset$, то $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$
3. $A = \bigcup\{[a]_\sim | a \in A\}$

Доказательство

Первое следует из рефлексивности $\sim$. Докажем второе. Пусть $b \in [a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim$. Тогда $b \in [a_1]_\sim$ и $b \in [a_2]_\sim$. По определению класса эквивалентности это означает, что $a_1 \sim b$ и $a_2 \sim b$. Поскольку $\sim$ симметрично, $b \sim a_2$, и так как $\sim$ транзитивно, $a_1 \sim a_2$.

Теперь покажем, что $[a_1]_\sim \subseteq [a_2]_\sim$. Пусть $b \in [a_1]_\sim$, тогда $b \sim a_1$, $a_1 \sim a_2$, поэтому $b \sim a_2$, следовательно, $b \in [a_2]_\sim$ по определению класса эквивалентности. Обратное включение получается таким же образом, заменим a_1 на a_2, а a_2 на a_1. Третье следует из первого.

2.6 Разбиение множеств

Определение

Пусть A - множество. Тогда множество подмножеств $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ называется **разбиением** множества A, тогда и только тогда, когда

1. $\emptyset \notin X$
2. для любых $a, b \in X$, если $a \cap b \neq \emptyset$, то $a = b$
3. $A = \cup X$

Следствие (из леммы)

Если $\sim$ - эквивалентность на множестве A, то множество всех классов эквивалентности относительно $\sim$ - это разбиение A.

2.7 Разбиения как множества классов эквивалентности

Лемма

Пусть $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ - разбиение множества A. Определим бинарное отношение $\sim_X$ следующим образом:

$$a \sim_X b \Leftrightarrow \exists x \in X \ (a \in x) \text{ и } (b \in x)$$

Тогда $\sim_X$ - отношение эквивалентности и $X = \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$.

Доказательство

Симметричность $\sim_X$ очевидно из определения. Рефлексивность: так как $A = \cup X$, любой элемент a попадает в какой-то элемент разбиения $a \in x \in X$. Тогда по определению $a \sim_X a$. Транзитивность: пусть $a \sim_X b$ и $b \sim_X c$. Это означает, что для некоторых элементов разбиения $x, y \in X$, $a, b \in x$ и $b, c \in y$. Тогда $b \in x \cap y$, поэтому $x \cap y \neq \emptyset$, следовательно, $x = y$. Отсюда следует, что $a, c \in x$, это значит, что $a \sim_X c$. Нам нужно показать, что $X = \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$. Докажем включение $X \subseteq \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$. Пусть $x \in X$. тогда $x \neq \emptyset$, следовательно, существует некоторый $a \in x$. Но тогда любой элемент $b \sim_X a$ будет лежать в x, так как, если $a \sim_X b$, то для некоторого $y \in X$ выполняется $a, b \in y$. Поскольку $a \in x$, $x \cap y \neq \emptyset$, поэтому $x = y$, тогда $b \in y$. Это означает, что $[a]_{\sim_X} \subseteq x$. Обратное, если некоторое $b \in x$, то по определению $\sim_X$, $b \sim_X a$, т.е. $b \in [a]_{\sim_X}$. Следовательно, $x = [a]_{\sim_X}$.

Обратное включение: если $[a]_{\sim_X}$ - некоторый класс эквивалентности, то так как $A = \cup X$, $a \in x$ для некоторого $x \in X$. Дальше, рассуждая как в предыдущем случае, мы получим $[a]_{\sim_X} = x$.

2.8 Фактор-множества

Определение

Пусть A - множество, $\sim$ - эквивалентность на A. Тогда разбиение A относительно классов эквивалентности $\sim$ называется **фактор-множеством** A относительно $\sim$ и обозначается $A/\sim$

Пример 1

Рассмотрим эквивалентность $\sim_{\mathbb{Q}}$. Тогда

$$\mathbb{Q} \rightleftharpoons \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim_{\mathbb{Q}}$$

Пример 2

Рассмотрим эквивалентность $\equiv_k$. Тогда

$$\mathbb{Z}_k \rightleftharpoons \mathbb{Z}/\equiv_k$$

множество целых чисел по модулю k.

2.9 Пересечение эквивалентностей

Теорема

Пусть I - множество эквивалентности на множестве A. Тогда $r = \cap I$ - эквивалентность.

Доказательство

Проверим, что r рефлексивно: для любой эквивалентности $\sim$, $id_A \subseteq\sim$, тогда id_A будет подмножеством пересечения множества эквивалентностей I.

Симметричность. Пусть $(a, b) \in r$. Тогда для любой эквивалентности $\sim\in I$, оно будет содержать (a, b). Но оно также будет содержать (b, a) по симметричности, поэтому $(b, a) \in r$.

Транзитивность. Пусть $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$. Тогда для любой эквивалентности $\sim\in I$, мы получим $a \sim b \sim c$. Тогда, По транзитивности $a \sim c$, поэтому $(a, c) \in r$.

2.10 Сумма эквивалентностей

Определение

Пусть $\sim_1, \dots, \sim_n$ - множество эквивалентностей на множестве A. Определим бинарное отношение

$$\sum_{i=1}^{n} \sim_i \rightleftharpoons \bigcap\{\sim \mid \sim\subseteq A^2 \text{ - эквивалентность и } (\sim_1 \cup \ldots \cup \sim_n) \subseteq\sim\}$$

- **сумма** эквивалентностей $\sim_1, \dots, \sim_2$.

Теорема

Для любых эквивалентностей $\sim_1, \dots, \sim_n$ на множестве A, их сумма $\sim_1 + \ldots + \sim_n$ будет эквивалентностью, наименьший по включению эквивалентности, содержащей все $\sim_1, \dots, \sim_n$.

Доказательство

$\sim_1 + \ldots + \sim_n$ будет эквивалентностью по предыдущей теореме, и если некоторая эквивалентность $\sim$ содержит все $\sim_1, \dots, \sim_n$, т.е. $\sim_1 \cup \ldots \cup \sim_n\subseteq\sim$, то $\sim$ попадает в множество пересечения этих эквивалентностей, поэтому $\sim_1 + \ldots + \sim_n\subseteq\sim$.