Тема : Ряды Фурье

$\mathbf{1^0}$. Периодические функции и гармонический анализ. $\mathbf{2^0}$. Ортогональные и ортонормированные системы функций. $\mathbf{3^0}$. Ряды Фурье по ортогональным системам функций. $\mathbf{4^0}$. Определение тригонометрического ряда Фурье.

3^0. Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд по ортогональной на промежутке Δ системе функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \qquad (\Phi)$$

т.е. имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x), \qquad x \in \Delta. \qquad (\mathrm{E}_\Phi)$$

Тогда возникает важный вопрос: как найти коэффициенты a_k этого разложения ?

Для того чтобы справиться с этой задачей, умножим обе части равенства ($\mathbf{E}_{\mathbf{\Phi}}$) на функцию $\varphi_n(x)$, после чего проинтегрируем получившееся соотношение по промежутку Δ.

В результате получим

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x)\Big)\,dx.$$

Предположим, что операции интегрирования и бесконечного суммирования в правой части можно поменять местами. Тогда получим

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\int\limits_{\Delta} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int\limits_{\Delta} \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\delta_k^n \int\limits_{\Delta} |\varphi_k|^2\,dx.$$

Здесь δ_k^n — это символ Кронекера. Последнее равенство справедливо в силу ортогональности системы функций (Φ).

Таким образом, имеем равенство

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_n(x)\,dx = a_n \int\limits_{\Delta} |\varphi_n|^2\,dx.$$

Предположим еще, что среди функций системы (Φ) нет тождественно нулевых. Тогда

$$\int\limits_{\Delta} |\varphi_n|^2\,dx \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и при этом

$$a_n = \frac{\int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int\limits_{\Delta} |\varphi_n|^2\,dx}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{FC}$$

Это и есть искомые коэффициенты разложения $(\mathbf{E}_\Phi)$.

Числа a_n, определяемые для заданной функции $f(x)$ по формулам (FC), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

При этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\varphi_k(x)$ называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по ортогональной системе (Φ).

Заметим, что для заданной ортогональной системы (Φ), не содержащей тривиальных функций, по формулам $(\mathbf{FC})$ всегда можно найти коэффициенты Фурье данной интегрируемой функции $f(x)$.

Следовательно, можно рассмотреть ряд Фурье по системе (Φ) с этими коэффициентами.

Однако нужно иметь ввиду, что этот ряд Фурье, во-первых, может расходиться в некоторых точках промежутка Δ и, во-вторых, если он сходится, то его сумма в общем случае не обязательно совпадает с $f(x)$.

По этой причине вместо знака равенства функции $f(x)$ сумме ее ряда Фурье иногда используется иной символ — знак эквивалентности:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x), \qquad x \in \Delta. \tag{$\mathbf{E}_{\Phi}{}'$}$$

Это замечание относится, в частности, к разложениям по ортогональным тригонометрическим системам, т.е. *к тригонометрическим рядам Фурье*.

Для того чтобы выяснить, сходится ли тригонометрический ряд Фурье к значениям соответствующей функции $f(x)$, эту функцию изначально подчиняют некоторым дополнительным условиям. Точнее, требуют, чтобы $f(x)$ принадлежала некоторому *функциональному классу*.

Тема : Тригонометрические ряды Фурье

$\mathbf{1^0}$. Определение тригонометрического ряда Фурье. $\mathbf{2^0}$. Комплекснозначная форма тригонометрических рядов Фурье. Частичные суммы. Стандартная тригонометрическая система в комплексной форме. $\mathbf{3^0}$. Интегральные представления частичных сумм. Ядра Дирихле. Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядер Дирихле. $\mathbf{4^0}$. Носитель функции, финитные функции, ступенчатые функции. Теорема об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций финитными ступенчатыми функциями. $\mathbf{5^0}$. Теорема о непрерывности первообразной абсолютно интегрируемой функции. $\mathbf{6^0}$. Теорема Римана об осцилляции. $\mathbf{7^0}$. Теорема о стремлении к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции.

1^0. Пусть вещественнозначная функция $f(x)$ определена на конечном интервале (a, b) и при этом

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < +\infty. \qquad (\mathrm{L}_2)$$

Совокупность всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (L_2), образует линейное пространство, которое обозначается как $L_2(a, b)$. Это пространство бесконечномерно.

Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a,b)$ определено их скалярное произведение

$$(f,g)_2 = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

которому соответствуют нормы этих функций, задаваемые равенствами

$$\|f\|_2 = \Big\{\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx\Big\}^{1/2}, \qquad \|g\|_2 = \Big\{\int\limits_a^b |g(x)|^2\,dx\Big\}^{1/2}.$$

Для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2(a,b)$ определены ее коэффициенты Фурье по ортогональной на (a,b) тригонометрической системе

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l},\ k=1,2,\ldots,$$

где $l=(b-a)/2$. Соответствующий функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье обычно записывается в следующем виде:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}).$$

Коэффициенты Фурье этого разложения вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о коэффициентах Фурье именно функции $f(x)$, пишут $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$.

Пример. *Найти ряд Фурье функции*

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \qquad \text{где} \qquad x \in (-1, +1).$$

Решение. Имеем $a = -1$, $b = 1$ и $l = (b - a)/2 = 1$.

Искомый ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x).$$

Для его коэффициентов в силу нечетности функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ имеем равенства

$$a_0 = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \operatorname{sign} x\, dx = 0,$$

$$a_k = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\cos k\pi x\,dx = \int\limits_{-1}^{+1} \operatorname{sign} x \cos k\pi x\,dx = 0.$$

Произведение $\operatorname{sign} x \sin k\pi x$ — это четная функция и поэтому

$$b_k = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\sin k\pi x\,dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{+1} \sin k\pi x\,dx = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k].$$

Следовательно, $b_{2k} = 0$ и $b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$ и

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\pi x, \qquad x \in (-1, +1).$$

Сходимость полученного ряда Фурье в каждой точке из интервала $(-1, 1)$ требуется исследовать отдельно. $\square$

2^0. Вместо тригонометрической системы

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots, \qquad (\mathrm{T}_l)$$

часто рассматривают систему комплексно-значных функций

$$\varphi_\nu(x) = e^{i\frac{\nu\pi x}{l}}, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Множество $\{\varphi_\nu(x) \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$ также называют тригонометрической системой. Любая из функций $\varphi_\nu(x)$ представима линейной комбинацией функций из (T_l):

$$e^{i\frac{\nu\pi x}{l}} = \cos\frac{\nu\pi x}{l} + i\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

Определение. *Комплекснозначные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *определенные на промежутке* Δ, *называются ортогональными на* Δ, *если произведение* $\varphi(x)\overline{\psi}(x)$ *интегрируемо на* Δ *и при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = 0.$$

Черта над знаком функции в этом определении означает взятие комплексного сопряжения к этой функции.

Пример ортогональных комплекснозначных функций дают функции $\varphi_{\nu_1}(x)$ и $\varphi_{\nu_2}(x)$ при $\nu_1 \neq \nu_2$. Эти функции ортогональны на отрезке $[-l, +l]$:

$$\int\limits_{-l}^{+l} \varphi_{\nu_1}(x)\overline{\varphi_{\nu_2}}(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{\nu_1 \pi x}{l}} e^{-i\frac{\nu_2 \pi x}{l}}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{(\nu_1-\nu_2)\pi x}{l}}\, dx = 0.$$

Кроме того справедливы равенства

$$\int\limits_{-l}^{+l} |\varphi_\nu(x)|^2\, dx = \int\limits_{-l}^{+l} \varphi_\nu(x)\overline{\varphi_\nu}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{\nu\pi x}{l}} e^{-i\frac{\nu\pi x}{l}}\, dx = 2l.$$

Пусть есть функция $f(x)$ периодическая с периодом $2l$ и такая, что

$$\int\limits_{-l}^{l} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{L}_2(-l, l)$. Для любой функции $f(x)$ из $\widetilde{L}_2(-l, l)$ произведение $f(x)e^{-i\xi x}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, является абсолютно интегрируемой на $[-l, l]$ функцией.

Определение. *Комплексные числа*

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\nu\pi x}{l}}\,dx, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

образуют последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$.

Для того чтобы подчеркнуть, что c_ν — это коэффициенты Фурье именно функции $f(x)$, пишут $c_\nu = c_\nu(f)$.

Воспользуемся равенствами

$$c_\nu = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) (\cos \frac{\nu \pi x}{l} - i \sin \frac{\nu \pi x}{l})\, dx,$$

где $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда получим следующие соотношения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - i b_k}{2},\ c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. a_0, a_k, b_k — это коэффициенты Фурье по стандартной тригонометрической системе.

Определение. *Выражение*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{l}},$$

где $c_\nu = c_\nu(f)$ *для* $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *называется тригонометрическим рядом Фурье функции* $f(x)$ *в комплексной форме.*

Частичной суммой ряда Фурье в комплексной форме называется следующая функция

$$T_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{l}}. \qquad (\mathrm{T_C})$$

Ряд Фурье называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм. Предел этой функциональной последовательности называется *суммой ряда Фурье*.

Факт соответствия между функцией $f(x)$ и рядом Фурье с коэффициентами $c_\nu = c_\nu(f)$ в записи отражается следующим образом:

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{l}}.$$

Частичная сумма $T_n(f;x)$ ряда Фурье в комплексной форме допускает однозначное выражение через коэффициенты Фурье a_k, b_k

функции f по стандартной тригонометрической системе. Имеем из определения

$$T_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}).$$

Таким образом, $T_n(f;x)$ — это n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе (T_l).

Множество функций $e^{i\nu x}$, где ν принимает всевозможные целые значения, называется *стандартной тригонометрической системой в комплексной форме*.

3^0. Функция $f(x)$, принадлежащая пространству $\widetilde{L}_2(-\pi, \pi)$, по определению периодична с периодом 2π и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Для любой такой функции $f(x)$ частичная сумма ее ряда Фурье задается следующим равенством:

$$T_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu e^{i\nu x}, \quad \text{где}$$

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-i\nu\xi}\, d\xi.$$

Подставляя интегральные представления коэффициентов c_ν в частичную сумму $T_n(f;x)$, преобразуем ее к эквивалентному виду:

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu(x-\xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(\xi - x)\, d\xi. \quad (\mathbf{TD_n})$$

Здесь $D_n(\xi - x)$ — это ядро интегрального оператора в правой части, определяемое равенством

$$D_n(\xi - x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu(x-\xi)}.$$

Определение. *Функция* $D_n(x) = \sum\limits_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu x}$ *называется ядром Дирихле порядка* n.

Из этого определения следует равенство

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, ядро Дирихле $D_n(x)$ — это четная 2π–периодическая функция. При этом

$$D_n(0) = 1 + 2n, \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(x)\,dx = 1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu x}$ — это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{ix}$ и начальным членом e^{-inx}.

Следовательно, по известной для суммы геометрической прогрессии формуле ядро Дирихле представимо как следующая дробь:

$$D_n(x) = \frac{e^{-inx} - e^{inx+ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Запишем равенство $(\mathrm{TD_n})$ в эквивалентном виде

$$T_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\xi + x) D_n(\xi)\, d\xi.$$

Подынтегральная функция здесь периодична по переменной ξ с периодом 2π.

Следовательно, интеграл справа можно заменить на интеграл по любому промежутку длины 2π. В частности, имеет место равенство

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x) D_n(\xi)\, d\xi.$$

Разбивая интеграл справа в сумму двух: от $-\pi$ до нуля и от нуля до $+\pi$, заменим затем в первом из этих слагаемых переменную ξ на $-\xi$. Пользуясь при этом четностью ядра Дирихле, приходим к равенству

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\big(f(x-\xi)+f(\xi+x)\big)D_n(\xi)\,d\xi.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма (равномерная ограниченность интегралов от ядер Дирихле). *Существует такая конечная постоянная* C*, что при всех натуральных* n*,* $n = 1, 2, \ldots$*, имеет место неравенство*

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} D_n(x)\, dx \right| \leqslant 2\pi C \qquad \forall\, \xi, \eta \in (0, \pi).$$

Доказательство леммы проводить не будем.

4^0. Функции, абсолютно интегрируемые на промежутке числовой прямой, часто аппроксимируют более простыми объектами (например, тригонометрическими полиномами).

Прежде чем сформулировать результаты, относящиеся к такого рода аппроксимациям, введем необходимые понятия и дадим соответствующие определения.

Определение. *Для функции* $f = f(x)$, $x \in D_f$, *замыкание множества точек* x *из* D_f, *в которых функция* $f = f(x)$ *не обращается в нуль, называется носителем функции* f.

Для обозначения носителя произвольной функции f используется специальный символ $\operatorname{supp} f$.

Определение. *Определенная на всей числовой прямой функция $f = f(x)$ называется финитной, если ее носитель является ограниченным множеством.*

Таким образом, функция $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, финитна тогда и только тогда, когда она равна нулю вне некоторого отрезка числовой прямой.

Определение. *Заданная на промежутке* $\boldsymbol{\Delta}$ *функция* $\boldsymbol{f = f(x)}$ *называется ступенчатой, если существует разбиение промежутка* $\boldsymbol{\Delta}$ *на конечное число меньших промежутков, на каждом из которых функция* $\boldsymbol{f = f(x)}$ *постоянна.*

Теорема (аппроксимация абсолютно интегрируемой функции). *Пусть функция $f = f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что ее носитель вложен в замыкание $\overline{\Delta}$ и при этом*

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ всегда найдется ограниченное измеримое множество g_ε, $g_\varepsilon \subset \Delta$, на котором функция $f = f(x)$ интегрируема по Риману и при этом

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|\,dx - \int\limits_{g_\varepsilon} |f(x)|\,dx = \int\limits_{\Delta \setminus g_\varepsilon} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество g_ε называется измеримым, если

$$\int\limits_{g_\varepsilon} dx = \int \chi_\varepsilon(x)\,dx < +\infty,$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ — это характеристическая функция (индикатор) множества g_ε, равная единице во всех точках этого множества и нулю во всех остальных точках.

Обозначим произведение $f(x)\chi_\varepsilon(x)$ через $f_\varepsilon(x)$. Тогда $f_\varepsilon(x)$ совпадает с $f(x)$ при $x \in g_\varepsilon$ и $f_\varepsilon(x)$ равна нулю при $x \notin g_\varepsilon$.

Следовательно, справедлива оценка

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx = \int\limits_{\Delta \setminus g_\varepsilon} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $f_\varepsilon(x)$ финитна и поэтому ее носитель содержится в некотором отрезке

$$[a, b] \subset \overline{\Delta}.$$

На отрезке $[a, b]$ функция $f_\varepsilon(x)$ интегрируема по Риману: она интегрируема по Риману как на g_ε так и на $[a, b] \setminus g_\varepsilon$.

Следовательно, существует такое разбиение τ отрезка $[a, b]$ на меньшие промежутки

$$\Delta_1, \dots, \Delta_N,$$

что выполняются соотношения

$$0 \leqslant \int_a^b f_\varepsilon(x)\, dx - s(f_\varepsilon; \tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь $s(f_\varepsilon; \tau)$ — это нижняя сумма Дарбу для функции $f_\varepsilon(x)$, т.е.

$$s(f_\varepsilon;\tau) = \sum_{j=1}^{N} m_j|\Delta_j|,$$

где $m_j = \inf\{f_\varepsilon(x) \mid x \in \Delta_j\}$.

Искомую ступенчатую функцию $\varphi(x)$ построим, положив ее равной m_j на каждом промежутке Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, и равной нулю вне отрезка $[a, b]$.

Построенная функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(x) \leqslant f_\varepsilon(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

2) $\int\limits_\Delta \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = s(f_\varepsilon; \tau)$.

Следовательно, справедливы соотношения

$$0 \leqslant \int\limits_\Delta |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx = \int\limits_\Delta \big(f_\varepsilon(x) - \varphi(x)\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta} f_{\varepsilon}(x)\,dx - \int\limits_{\Delta} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f_{\varepsilon}(x)\,dx - s(f_{\varepsilon};\tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее имеем, применяя неравенство треугольника

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{\Delta} |f(x) - f_{\varepsilon}(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Delta} |f_{\varepsilon}(x) - \varphi(x)|\,dx.$$

Каждое из слагаемых в правой части полученного неравенства не превосходит $\varepsilon/2$. Следовательно, интеграл в левой части меньше ε:

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем требованиям заключения теоремы, т.е. функция $\varphi(x)$ — искомая. $\square$

Отметим, что в доказанной теореме об аппроксимации промежуток интегрирования Δ может быть как конечным, так и бесконечным.

В частности, можно взять Δ равным полупрямой или вообще всей числовой прямой.

5^0. Как мы уже знаем, интегрирование (взятие первообразной) непрерывной функции приводит в результате к дифференцируемой функции, т.е. сглаживает подынтегральную функцию.

Оказывается, что это свойство интегрирования увеличивать гладкость подынтегральной функции расширяется на более широкие классы функций нежели просто непрерывные.

Теорема (о первообразной абсолютно интегрируемой функции). *Пусть функция* $f = f(x)$ *абсолютно интегрируема на промежутке* Δ *числовой прямой. Тогда ее первообразная*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad a \in \Delta,$$

непрерывна на замыкании промежутка Δ.

Доказательство. По теореме об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такая финитная ступенчатая функция $\varphi_\varepsilon(x)$, что

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ имеет непрерывную на $\overline{\Delta}$ первообразную

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int\limits_a^x \varphi_\varepsilon(t)\, dt, \quad \text{где} \quad a \in \Delta.$$

При этом справедлива оценка

$$|F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| = |\int\limits_a^x (f(t) - \varphi_\varepsilon(t))\,dt| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех x из $\overline{\Delta}$.

Взяв любые две точки x и x_0 из $\overline{\Delta}$ и пользуясь неравенством треугольника, получим далее

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant |F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| +$$

$$+|\Phi_\varepsilon(x_0) - F(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Функция $\Phi_\varepsilon(x)$ непрерывна в точке x_0 и поэтому существует такое $\delta > 0$, что

$$\forall\, x \in O_\delta(x_0) \cap \overline{\Delta} \quad \Rightarrow \quad |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, для всех точек x из пересечения $O_\delta(x_0) \cap \overline{\Delta}$ справедлива оценка

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

По определению, это и означает, что в точке x_0 первообразная $F(x)$ исходной функции непрерывна. $\square$

6^0. Коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемых функций обладают важным асимптотическим свойством, стремясь на бесконечности к нулю.

Теорема (Римана об осцилляции). *Пусть функция $f = f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int\limits_{\Delta} f(x) e^{i\lambda x} \, dx = 0. \qquad (\mathrm{F}_{\lambda})$$

Доказательство. Пусть $\Delta = [\xi, \eta]$ и $\lambda \neq 0$. Тогда справедливы равенства

$$\Big|\int\limits_{\Delta} e^{i\lambda x}\,dx\Big| = \Big|\int\limits_{\xi}^{\eta} e^{i\lambda x}\,dx\Big| = \Big|\frac{e^{i\lambda\eta} - e^{i\lambda\xi}}{i\lambda}\Big| \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Таким образом, для характеристической функции $\chi_{\Delta}(x)$ промежутка Δ равенство (F_{λ}) верно.

Далее, любая финитная ступенчатая функция представляют собой линейную комбинацию характеристических функций конечного числа ограниченных промежутков.

Следовательно, равенство $(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}})$ верно для любой финитной ступенчатой функции $\boldsymbol{f(x)}$.

Возьмем положительное число $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$. Тогда по теореме об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций существует такая финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$, что

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Пользуясь неравенством треугольника, оценкой $|e^{i\lambda x}| \leqslant 1$ и свойствами интеграла, имеем далее

$$|\int\limits_{\Delta} f(x) e^{i\lambda x}\, dx| \leqslant \int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx +$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta}\varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|. \qquad (2)$$

Функция $\varphi(x)$ в соответствии с выбором финитная и ступенчатая. Как уже установлено, для любой такой функции выполнено равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\Delta}\varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0.$$

Следовательно, найдется такое положительное число $\lambda_\varepsilon > 0$, что для любого λ, $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$, справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\Delta} \varphi(x) e^{i\lambda x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подставляя это неравенство и оценку (1) в соотношение (2), получим при $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$ следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x) e^{i\lambda x}\, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int\limits_{\Delta} \varphi(x) e^{i\lambda x}\, dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

По определению предела и в силу произвольности ε это означает справедливость искомого соотношения $(\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}})$. $\square$

$\mathbf{7^0}$. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Рассмотрим последовательность ее коэффициентов Фурье

$$c_\nu(f) = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} f(x) e^{-i\frac{2\nu\pi x}{|\Delta|}}\,dx, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Если промежуток Δ совпадает с интервалом $(a, a+2l)$, то длина $|\Delta| = 2l$ и коэффициенты Фурье представимы в виде

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2l} \int\limits_a^{a+2l} f(x) e^{-i\frac{\nu\pi x}{l}}\, dx, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Теорема (о стремлении к нулю коэффициентов Фурье). *Пусть функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на промежутке* Δ *числовой* *прямой. Тогда справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\nu \to +\infty} c_\nu(f) = 0, \qquad \lim_{\nu \to -\infty} c_\nu(f) = 0. \tag{$\mathbf{L_0}$}$$

Равенства ($\mathbf{L_0}$) сразу получаются из теоремы Римана об осцилляции, если в формуле ($\mathbf{F_\lambda}$) взять промежуток Δ совпадающим с интервалом $(a, a+2l)$ и $\lambda = \pi\nu/l$.

Следствие. *Пусть $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — это коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе, т.е.*

$$a_k(f) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k(f) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда справедливы предельные соотношения

$$\lim_{k\to+\infty} a_k(f) = \lim_{k\to+\infty} b_k(f) = 0. \qquad (\mathbf{L}'_0)$$