Занятие 4.

Тема: Предел функции

Пусть E- некоторое непустое подмножество множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, a – предельная точка множества E, $f(x)$ - функция, определённая на E.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall x \in E \qquad (0 < |x-a| < \delta \ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - A| < \varepsilon). \qquad (1)$$

Предел функции в точке a обозначается символом

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x).$$

Во всех рассматриваемых далее примерах функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, поэтому мы будем использовать символ

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Определение предела в случае $x \to \infty$ аналогично приведённому (его можно найти в учебнике).

Определение. Функция $f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными (f ~ g) при $x \to a$, если в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено соотношение

$$f(x) = \gamma(x) g(x), \text{ где } \lim_{x \to a} \gamma(x) = 1.$$

Определение. Функция $f(x)$ есть бесконечно малая относительно $g(x)$ при $x \to a$, если в некоторой проколотой окрестности точки а выполнено соотношение

$$f(x) = \alpha(x) g(x), \text{ где } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

При этом пишут $f(x) = o(g(x))$. Если при этом g - бесконечно малая, то говорят, что f есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с g.

Справедливы следующие предложения.

1. (f(x) ~ g(x)) при $x \to a \Leftrightarrow \left(f(x) - g(x) = o(f(x)) = o(g(x))\right)$.

2. (f(x) ~ g(x)) при $x \to a \Rightarrow \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)h(x)\right)$.

На суммы и разности функций последнее правило не распространяется, за исключением отдельных случаев. Например,

3. Если f(x) ~ax и g(x) ~bx и $a \neq b$, то (f(x) - g(x)) ~(a-b)x.

При вычислении пределов функций полезно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых величин при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$, $\quad \sin x = x + o(x)$,
2. $\arcsin x \sim x$, $\quad \arcsin x = x + o(x)$,
3. $tg\, x \sim x$, $\quad tg\, x = x + o(x)$,
4. $arctg\, x \sim x$, $\quad arctg\, x = x + o(x)$,
5. $e^x - 1 \sim x$, $\quad e^x = 1 + x + o(x)$,
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$, $\quad a^x = 1 + x \ln a + o(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$,
7. $\ln(1+x) \sim x$, $\quad \ln(1+x) = x + o(x)$,
8. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $\quad \log_a(1+x) = \dfrac{x}{\ln a} + o(x)$, $a > 0, a \neq 1$,
9. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$,
10. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x)$.

Пример 17. Доказать, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = 3 .$$

Решение. Заметив, что квадратный трёхчлен $2x^2 - 5x + 2$ имеет корни $x = \dfrac{1}{2}$ и $x = 2$, упростим исходное выражение:

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \frac{(2x-1)(x-2)}{x-2} = 2x - 1 .$$

Тогда соответствующая часть формулы (1) из определения предела функции принимает вид $|f(x) - A| = |2x - 4| < \varepsilon$. Это неравенство выполняется, если $0 < |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. ■

Пример 18. Найти предел

$$a = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4} .$$

Решение. При $x = -2$ многочлены в числителе и знаменателе исходного выражения обращаются в нуль, следовательно, их пределы в точке $x = -2$ равны нулю и мы имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем исходное выражение.

Разложим многочлены в его числителе и знаменателе на множители, воспользовавшись тем, что $x = 2$ является их корнем, с помощью группировки слагаемых или деления их на x-2:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^3+7x^2+16x+12 & x+2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3+2x^2\qquad\qquad} & x^2+5x+6 \\
 & -\;5x^2+16x & \\
 & \underline{5x^2+10x} & \\
 & -\;6x+12 & \\
 & \underline{6x+12} & \\
 & 0 &
\end{array}
,\qquad
\begin{array}{rr|l}
- & x^3+3x^2-4 & x+2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3+2x^2\qquad} & x^2+x-2 \\
 & -\;x^2-4 & \\
 & \underline{x^2+2x} & \\
 & -\;-2x-4 & \\
 & \underline{-2x-4} & \\
 & 0 &
\end{array}
.
$$

Получаем $a=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\left(x^2+5x+6\right)(x+2)}{\left(x^2+x-2\right)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$. Мы снова имеем неопределённость, так как при x=2 числитель и знаменатель последней дроби обращаются в нуль. Снова разлагаем их на множители, сокращаем и находим искомый предел:

$$a=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x-1}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 19. Найти предел

$$a=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x+2}}{x^2-3x+2}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем исходное выражение, умножив его числитель и знаменатель на множитель

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x+2},$$

сопряжённый к числителю. Получаем

$$a=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x+2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x+2}\right)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x+2}\right)=2\sqrt{6}$, то

$$a=\frac{1}{2\sqrt6}\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2\sqrt6}\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{2\sqrt6}\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x-1}=\frac{3}{2\sqrt6}.\ \blacksquare$$

Пример 20. Найти предел

$$a=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x+10}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}.$$

Решение. Подставив x=1 в выражения в числителе и знаменателе, убеждаемся в том, что имеется неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель исходного выражения на множитель $\sqrt[3]{\left(x^2-3x+10\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-3x+10}+4$, дополняющий числитель до разности кубов (неполный квадрат суммы), и на множитель $\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$, сопряжённый к знаменателю. Получаем

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-3x+10-8\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right)}{(x-2x+1)\left(\sqrt[3]{(x-3x+10)^2}+2\sqrt[3]{x-3x+10}+4\right)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})=2$, $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{\left(x^2-3x+10\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-3x+10}+4)=12$, то

$$a=-\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-3x+2\right)}{12(x-1)}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}==-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}(x-2)=\frac{1}{6}.\ \blacksquare$$

Пример 20. Найти предел

$$a=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right).$$

Решение. Дважды применим приём умножения на сопряжённое выражение.

$$a=\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)-2\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4(x^2+x)\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4(x^2+x)\right)}{4x},$$

поскольку $\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}\sim 4x$ при $x\to+\infty$.

Далее, $a=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4(x^2+x)\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}x\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}=-\frac{1}{4}.\ \blacksquare$$

Пример 21. Найти предел

$$\alpha=\lim_{a\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}.$$

Решение. Применим формулу

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

положив в ней $a=\sqrt[5]{1+5x}$, $b=1+x$. Умножив числитель и знаменатель исходной дроби на выражение $(1+5x)^{4/5}+\ldots+(1+x)^4$ и учитывая, что оно стремится к 5, получаем:

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left((1+5x)^{4/5}+\ldots+(1+x)^4\right)}{1+5x-(1+x)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{1+5x-1-5x-10x^2+o\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{-10x^2+o\left(x^2\right)}=-\frac{1}{2}$$

Пример 22. Найти предел

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[4]{11x+5}}{x^2-1}.$$

Решение. Сделаем замену переменной:

$$a=\begin{vmatrix} t=x-1, \\ x=t+1 \end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{(8+7t)^{1/3}-(16+11t)^{1/4}}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\left(1+\frac{7}{8}t\right)^{1/3}-\left(1+\frac{11}{16}t\right)^{1/4}\right)}{t(t+2)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{7}{8}t\right)^{1/3}-\left(1+\frac{11}{16}t\right)^{1/4}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{7}{8}t\right)^{1/3}-1-\left(\left(1+\frac{11}{16}t\right)^{1/4}-1\right)}{t}.$$

По формуле 9 выражение в числителе эквивалентно $\left(\frac{7}{3\cdot 8}-\frac{11}{4\cdot 16}\right)t$, следовательно,

$$a=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{7}{24}-\frac{11}{64}\right)t}{t}=\frac{7}{24}-\frac{11}{64}=\frac{23}{192}.\ \blacksquare$$

Пример 23. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\pi x}-1\right)\ln\left(1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\frac{\pi(x^2+3)}{2}}$$

Решение. Воспользовавшись формулами приведения и таблицей эквивалентностей, получаем

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\pi x}-1\right)\ln(1-\sin 2x)}{\sin\frac{\pi x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi x\sin 2x}{\frac{\pi x^2}{2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2}=-4.\ \blacksquare$$

Пример 24. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 3}\frac{\arcsin\left(x^3-3x^2\right)\ln\left(x^2-2x-2\right)}{\sin\pi x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right)}.$$

Решение. Все сомножители в числителе и знаменателе исходного выражения есть бесконечно малые при $x\to 3$. Заменим их, кроме $\sqrt{x-1}-\sqrt{2}$, на эквивалентные:

$$\arcsin\left(x^3-3x^2\right)\sim x^3-3x^2,$$
$$\ln\left(x^2-2x-2\right)=\ln\left(\left(x^2-2x-3\right)+1\right)\sim x^2-2x-3,$$
$$\sin\pi x=\sin(\pi(x-3)+3\pi)=-\sin(\pi(x-3))\sim-\pi(x-3)$$

Получаем

$$a=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^3-3x^2\right)\left(x^2-2x-3\right)}{-\pi(x-3)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\right)}=-\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)^2(x+1)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)}{\pi(x-3)(x-1-2)}=$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 3}x(x+1)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)=-\frac{72\sqrt{2}}{\pi}.$$

.

Пример 25. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2^x+\sin x^2}{1+x+\operatorname{arctg}^3 x-\cos x}.$$

Решение. 1-й способ. Преобразуем исходное выражение и разделим числитель и знаменатель на x:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)-(2^x-1)+\sin x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}+x+\operatorname{arctg}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}+\frac{\sin x^2}{x}}{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}+1+\frac{arctg^3 x}{x}}.$$

Тогда по арифметическим свойствам предела

$$a=\frac{\lim\frac{e^{2x}-1}{x}-\lim\frac{2^x-1}{x}+\lim\frac{\sin x^2}{x}}{\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}+1+\lim\frac{arctg^3 x}{x}}.$$

По таблице эквивалентностей заменяем выражения на эквивалентные и переходим к пределу в каждом слагаемом:

$$a=\frac{\lim\frac{2x}{x}-\lim\frac{x\ln 2}{x}+\lim\frac{x^2}{x}}{\lim\frac{x^2}{2x}+1+\lim\frac{x^3}{x}}=\frac{2-\ln 2+\lim x}{\lim\frac{x}{2}+1+\lim x^2}=\frac{2-\ln 2}{1}=2-\ln 2.$$

2-й способ. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$, то $\sin x^2=o(x)$. Точно так же $\operatorname{arctg}^3 x=o(x)$ и $1-\cos x=o(x)$ при $x\to 0$. Воспользовавшись этими соотношениями, получаем

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x+o(x)-1-x\ln 2+o(x)}{x+o(x)+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\ln 2)x+o(x)}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\ln 2+\frac{o(x)}{x}}{1+\frac{o(x)}{x}}=2-\ln 2.$$

Пример 26. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{2^{\left(\frac{2\pi}{x}\right)^2-\frac{2\pi}{x}}-2^{\frac{2\pi}{x}-1}}.$$

Решение. Вынесем в знаменателе исходного выражения множитель $2^{\frac{2\pi}{x}-1}$ и учтём, что $\lim\limits_{x\to 2\pi}2^{\frac{2\pi}{x}-1}=1$:

$$a=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{2^{\frac{2\pi}{x}-1}\left(2^{\left(\frac{2\pi}{x}\right)^2-\frac{2\pi}{x}-\left(\frac{2\pi}{x}-1\right)}-1\right)}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{2^{(\frac{2\pi}{x}-1)^2}-1}.$$

Теперь сделаем замену переменной, воспользуемся формулой приведения и табличными эквивалентностями:

$$a=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{2^{(\frac{2\pi}{x}-1)^2}-1}=\left|\begin{matrix}t=x-2\pi\\ x=t+2\pi\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t+2\pi)}{2^{t^2/(t+2\pi)^2}-1}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{\ln 2\left(t^2\big/(t+2\pi)^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(t+2\pi)^2}{t^2\ln 2}=\frac{4\pi^2}{\ln 2}.$$

.

Пример 27. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{\mathrm{x}^2}.$$

Решение. **1-й способ.** Преобразуем числитель исходного выражения:

$$1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}=1-\cos x+\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)+\cos x\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right).$$

Используя последнее равенство, приём умножения на сопряжённое выражение, предел $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и табличные эквивалентности, получаем:

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{x}^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\left(1+\sqrt{\cos 2\mathrm{x}}\right)\mathrm{x}^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}\left(1-\cos 3x\right)}{\left(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}\right)\mathrm{x}^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\mathrm{x}^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\mathrm{x}^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{3\mathrm{x}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\mathrm{x}^2}+1+\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{2\cdot 3\mathrm{x}^2}=3.$$

2-й способ. Используя таблицу эквивалентностей, имеем

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t),\quad (1+t)^\alpha=1+\alpha t \text{ при } t\to 0.$$

Получаем далее

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-2x^2+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{9x^2}{2}+o(x)^2\right)^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{x}^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{3x^2}{2}+o(x)^2\right)}{\mathrm{x}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}\right)x^2+o\left(x^2\right)}{\mathrm{x}^2}=3.$$

Пример 28. Вычислить предел функции

$$\alpha=\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{\mathrm{x}-\mathrm{a}}\qquad (a>0).$$

Решение. Сделаем подстановку $t=x-a$ и воспользуемся табличными эквивалентностями:

$$\alpha=\lim_{t\to 0}\frac{a^{a+t}-(a+t)^a}{\text{t}}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{a^t-\left(1+\frac{t}{a}\right)^a}{\text{t}}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{1+t\ln a-1-t+o(t)}{\text{t}}=$$

$$=a^a\lim_{t\to 0}\frac{t\ln\frac{a}{e}+o(t)}{\text{t}}=a^a\ln\frac{a}{e}.\ \blacksquare$$

Пример 29. Вычислить предел функции

$$\alpha=\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{\text{x - a}}\qquad (a>0).$$

Решение. Сделаем подстановку $t=x-a$:

$$\alpha=\lim_{t\to 0}\frac{(t+a)^{t+a}-a^a}{\text{t}}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{a}\right)^a(a+t)^t-1}{\text{t}}.\qquad (2)$$

Преобразуем выражение $(a+t)^t$:

$$(a+t)^t=e^{t\ln(a+t)}=e^{t\left(\ln a+\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)\right)}=e^{t\left(\ln a+\frac{t}{a}+o(t)\right)}=e^{t\ln a+o(t)}=1+t\ln a+o(t).$$

Подставляем полученное выражение в (2):

$$\alpha=a^a\lim_{t\to 0}\frac{(1+t+o(t))(1+t\ln a+o(t))-1}{\text{t}}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{(1+\ln a)t+o(t)}{\text{t}}=a^a\ln(ae)..\ \blacksquare$$

Пример 30. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(\text{x}^{10}+x+1\right)}.$$

Решение. Справедливы равенства

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(\text{x}^{10}\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\text{lnx}+\ln\left(1+\frac{1}{\text{x}^3}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{10\text{lnx}}=\frac{1}{5}.$$

Мы воспользовались свойствами логарифма и тем, что $\ln x$ есть бесконечно большая, а $\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ и $\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)$-бесконечно малые при $x\to+\infty$. $\blacksquare$

Пример 31. Найти предел

$$a=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$

Решение. Понизим степень в исходном выражении и вынесем n из-под корня: $a=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(2\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\cos\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right).$

Теперь используем табличное представление

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}+\alpha\cdot\frac{1}{n},$$

где $\alpha \to 0$ при $n\to\infty$, формулу приведения и то, что $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$ (непрерывность косинуса):

$$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\cos\left(2\pi n\left(1+\frac{1}{2n}+\alpha\cdot\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\cos(\pi+2\pi\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi=1. \blacksquare$$

Пример 32. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to+0}\sqrt{x\cdot\sin\frac{\pi}{x(x+1)}+arctg\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e+x^2\right)}.$$

Решение. Величина $\sin\dfrac{\pi}{x(x+1)}$ является ограниченной, а x - бесконечно малой при $x\to+0$. Поэтому их произведение есть бесконечно малая. Далее,

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{y\to+\infty}arctg\,y=\frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\lim_{x\to+0}arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to+0}\ln\left(e+x^2\right)=\ln e=1.$$

Отсюда $a=\sqrt{0+\dfrac{\pi}{2}\cdot 1}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$ ■

Пример 33. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{arctg5x}{\arcsin 3x}\right)^{\frac{x^2+2}{\cos x}}.$$

Решение. Воспользуемся тем, что если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a,\quad a>0,\quad \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$ В нашем случае

$$\lim_{x\to0}u(x)=\lim_{x\to0}\frac{arctg5x}{arctg3x},\quad \lim_{x\to0}v(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\ +2}{\cos x}=2.$$

Тогда $\quad\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{arctg5x}{\arcsin 3x}\right)^{\frac{x^2+2}{\cos x}}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}.$ ■

Тема: Задачи, связанные с применением второго замечательного предела

Второй замечательный предел

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \qquad (3)$$

применяется (как и в случае последовательностей) при вычислении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)},\quad \text{где}\quad \lim_{x\to x_0}u(x)=1,\ \lim_{x\to x_0}v(x)=\infty,$$

т.е. в случае неопределённости вида 1^{∞}. Следующие три примера решим различными способами.

Пример 34. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x\sin 3x}}.$$

Решение. Находим пределы основания и показателя степени исходного выражения и убеждаемся в том, что перед нами неопределённость вида 1^{∞}. Выделяем в исходном выражении формулу $(1+t)^{\frac{1}{t}}$, $t\to 0$, и вычисляем предел.

$$a=\lim_{x\to 0}\left(1+2-\frac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{2(\cos x-1)}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{2(\cos x-1)}}\right)^{\frac{2(\cos x-1)}{x\sin 3x\cos x}}=\left|t=\frac{2(\cos x-1)}{\cos x}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{2(\cos x-1)}{x\sin 3x\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{2(\cos x-1)}{x\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot 3x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.\ ■$$

Предел выражения можно находить, предварительно вычислив предел его логарифма.

Пример 35. Вычислить предел функции

$$a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{\frac{\sin x}{16x^2-\pi^2}}.$$

Решение. Преобразуем логарифм исходного выражения, применив формулу

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}.\ \frac{\sin x}{16x^2-\pi^2}\cdot\ln tgx=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=t,\ t\to 0,\\ x=\frac{\pi}{4}+t\end{array}\right|=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{16\left(t+\frac{\pi}{2}\right)t}\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{16\left(t+\frac{\pi}{2}\right)t}\ln\frac{1+tgt}{1-tgt}==\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{16\left(t+\frac{\pi}{2}\right)t}\ln(1+\frac{2tgt}{1-tgt}).$$

Отсюда

$$\ln a=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{16\left(t+\frac{\pi}{2}\right)t}\ln(1+\frac{2tgt}{1-tgt})=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot 2\cdot 2t}{2\cdot 16\pi t(1-tgt)}=\frac{\sqrt{2}}{8\pi}.$$

Теперь находим искомый предел: $a=e^{\ln a}=e^{\frac{\sqrt{2}}{8\pi}}$.

Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$, где

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=1,\ \lim_{x\to x_0}v(x)=\infty,$$

т.е. в случае неопределённости вида 1^{∞}, можно использовать правило:

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0} e^{(u-1)v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}. \qquad (4)$$

Пример 36. Вычислить предел функции

$$a = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2-3x+2}}.$$

Решение. Находим

$$(u-1)v = \left(\frac{x^2-3}{x-1}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

Далее,

$$\lim_{x\to 2}(u-1)v = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-1)^2} = 3$$

и в силу (4) получаем $a = e^3$. ■

Пример 37. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \qquad (0 \le x \le 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Решение. Легко заметить и доказать по индукции, что $0 \le y_n \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$.

Оценим разность между y_n и числом $y = -1+\sqrt{1+x}$, являющимся корнем уравнения $y = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2}$:

$$|y_n - y| = \frac{1}{2}\left|y_{n-1}^2 - y^2\right| = \frac{1}{2}|y_{n-1}+y|\cdot|y_{n-1}-y| \le \frac{|y_{n-1}-y|}{2}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $0 \le y_n \le \frac{1}{2}$ и $0 \le y < \frac{1}{2}$. Применяя полученное неравенство $|y_n - y| \le \frac{|y_{n-1}-y|}{2}$ к разности $y_{n-1} - y$ и т.д., получим

$$|y_n - y| \le \frac{|y_{n-1}-y|}{2} \le \frac{|y_{n-2}-y|}{2^2} \le \ldots \le \frac{|y_1-y|}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^n},$$

то есть $|y_n - y| < \frac{1}{2^n}$. Отсюда видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y = -1+\sqrt{1+x}$. ■

Задачи для самостоятельного решения

Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

Вычислить пределы:

85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{x^2+x+1}$. **86.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{x^2+3x+8}$. **87.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-1}$.

88. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x^2-9}$. **89.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7}{x^2-x+11}$. **90.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2+3x-1}$.

91. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$. **92.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x}$. **93.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{3x-2}$.

94. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{\sqrt[3]{x^4-7x+3}}$. **95.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$. **96.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

97. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$. **98.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)$. **99.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x+4^x+2}{3^x-4^x+5}$.

100. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x+1}{3^x-2}$. **101.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. **102.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

103. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2-x+1}$. **104.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$. **105.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$.

106. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$. **107.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$. **108.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{\sqrt{x^2-5x+25}-5}$.

109. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. **110.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{4x}-2}$. **111.** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$. **113.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha x}{x}$. **114.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\sin 2x}$.

115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x}$. **116.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}\,4x}$. **117.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

118. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$. **119.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. **120.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$.

121. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$. **122.** $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(\sin\dfrac{x-\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2\alpha}\right)$.

Вычислить пределы, используя второй замечательный предел:

123. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$. **124.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. **125.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

126. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. **127.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$. **128.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$. **130.** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$.

131. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln(x+2))$. **132.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

133. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$. **134.** $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{2x}{x^2-4}}$. **135.** $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

Ответы. **85.** 5. **86.** $\frac{1}{12}$. **87.** 0. **88.** ∞. **89.** 2. **90.** $\frac{2}{5}$. **91.** ∞. **92.** 0. **93.** $\frac{2}{3}$. **94.** ∞. **95** 0. **96.** -3. **97.** 0. **98.** ∞. **99.** -1. **100.** 1. **101.** 0. **102.** $-\frac{2}{5}$. **103.** ∞. **104.** $\frac{1}{3}$. **105.** $\frac{1}{6}$. **106.** $\frac{1}{2}$. **107.** $\frac{5}{2}$. **108.** $\frac{1}{4}$. **109.** $\frac{4}{3}$. **110.** 3. **111.** $\frac{12}{5}$. **112.** α. **113.** α. **114.** $\frac{5}{2}$. **115.** $\frac{1}{3}$. **116.** $\frac{1}{4}$. **117.** $\frac{1}{2}$. **118.** 0. **119.** $-\frac{3}{2}$. **120.** 1. **121.** $\frac{2}{\pi}$. **122.** $\frac{\alpha}{\pi}$. **123.** e^{km}. **124.** $\frac{1}{e}$. **125.** 1. **126.** e^6. **127.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **128.** e^2. **129.** 1. **130.** 6. **131.** -5. **132.** e^2. **133.** e^{-2}. **134.** e^2. **135.** e^6.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

Определить порядок малости бесконечно малой величины $\alpha(x)$ относительно x при $x\to 0$:

136. $\alpha(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **137.** $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$. **138.** $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$.

139. $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$. **140.** $\alpha(x)=\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$. **141.** $\alpha(x)=\sin(\sqrt{1+x}-1)$.

Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

142. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$. **143.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. **144.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin x}-1}{[\ln(1+\sqrt{x})]^2}$.

145. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$. **146.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$. **147.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

148. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\lg x}$. **149.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$. **150.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

Определить порядок роста бесконечно большой величины относительно переменной x при $x\to+\infty$:

152. $A(x)=x^3+150x+10$. **153.** $A(x)=\dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$.

154. $A(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+|x|$. **155.** $A(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно большие:

156. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$. **157.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$. **158.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

159. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$. **160.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{x^2}+4)}{3x^2-1}$. **161.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x+2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{3+4\sqrt[5]{x^2}}}$.

Ответы. **136.** Более высокого порядка малости. **137.** Более низкого порядка малости. **138.** Одного порядка малости. **139.** Более высокого порядка малости. **140.** Одного порядка малости. **141.** Одного порядка малости. **142.** 3. **143.** $\frac{9}{4}$. **144.** 1. **145.** $-\frac{1}{2}$. **146.** $\frac{2}{3}$. **147.** 3. **148.** $-\ln 10$. **149.** 1. **150.** -2. **151.** 1. **152.** Более высокого порядка роста. **153.** Более высокого порядка роста. **154.** Одного порядка роста. **155.** Более низкого порядка роста. **156.** $-\frac{1}{2}$. **157.** -3. **158.** 0. **159.** ∞. **160.** $\frac{1}{3}$. **161.** $\frac{1}{2}$.

ГЛАВА IV

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1. Определения. Переменная величина y называется *функцией* независимой переменной величины (аргумента) x на множестве M, если каждому значению x из множества M поставлено в соответствие одно определенное значение y. Если y есть функция от x, то пишут $y=f(x)$, или $y=F(x)$, или $y=Y(x)$ и т. д. Символом $f(a)$ обозначается частное значение функции $y=f(x)$, т. е. то значение, которое принимает функция $y=f(x)$ при $x=a$. Множество M называется *областью определения функции*. Очень часто при задании функции аналитическим выражением $y=f(x)$ область определения этой функции не указывается. В таком случае под областью определения функции понимают область существования аналитического выражения $y=f(x)$, т. е. множество значений аргумента x, для которых аналитическое выражение $y=f(x)$ имеет определенное конечное значение.

Почти все функции, с которыми мы будем иметь дело, имеют в качестве области определения либо один интервал (a, b), т. е. совокупность всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, либо несколько или даже бесконечное множество таких интервалов.

Интервал может быть и бесконечным, когда область определения функции является полуосью $(-\infty, a)$ или $(b, +\infty)$, или всей числовой осью $(-\infty, +\infty)$. В ряде случаев области определения принадлежат и концы интервала, один или оба вместе. В последнем случае интервал называют замкнутым и обозначают $[a, b]$. Замкнутый интервал иногда называют отрезком.

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$. Например, функции $y=x^4$, $y=\sin^2 x$, $y=\sqrt{x^2+1}$, $y=\cos x$ являются четными.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$. Например, функции $y=x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\sqrt{x^3}$ являются нечетными.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T (период функции), что при любом значении x выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Например, функция $y=\cos x$ является периодической с периодом 2π, функция $y=\sin 2x$ имеет период π.

Функция $y=F(x)$ называется *сложной*, если ее можно представить в виде $y=f(\varphi(x))$, где $f(u)$ — функция промежуточного аргумента u, а $f(\varphi(x))$ означает что на место u ставится функция $\varphi(x)$. Например, $y=\sqrt{\sin x}$ — сложная функция, состоящая из двух звеньев: $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x$. Подобным же образом определяется сложная функция, состоящая из большего числа звеньев. Например, $y=\lg^2(x+1)$ — сложная функция, составленная из трех звеньев: $y=u^2$, $u=\lg v$, $v=x+1$.

2. Элементарные функции. Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y=x^a$. Ее область определения включает в себя при любом a всю положительную полуось $(0, +\infty)$. Точка $x=0$ включается в область определения при $a\geqslant 0$ и исключается при $a<0$. Отрицательная полуось $(-\infty, 0)$ в одних случаях $\left(\text{например, при } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n=\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5} \text{ и т. д.}\right)$ входит в область определения, а в других не входит (например, для функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ и т. д.).

2) Показательная функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Область определения — вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$.

3) Логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Область определения — $(0, +\infty)$. Заметим, что десятичный логарифм $(a=10)$ обозначается $y=\lg x$.

4) Тригонометрические функции. Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ имеют область определения $(-\infty, +\infty)$, $y=\operatorname{tg} x$ — область определения содержит все x, кроме $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число, $y=\operatorname{ctg} x$ — область определения содержит все x, кроме $x=k\pi$, где k — любое целое число.

5) Обратные тригонометрические функции. Для функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ область определения $[-1, +1]$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ — $(-\infty, +\infty)$.

Функция $y=f(x)$ называется *элементарной*, если правая часть аналитического выражения $y=f(x)$ составлена из основных элементарных функций с помощью применения конечного числа четырех арифметических действий и взятия функции от функции.

528. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Имеем:

$$f(0)=\sqrt{1+0^2}=\sqrt{1}=1;\quad f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|};\quad \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

529. Показать, что $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, если $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Найдем $f(y)$ и $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$:

$$f(y)=\lg\frac{1+y}{1-y};\quad f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\lg\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}=\lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}.$$

Далее, найдем $f(x)+f(y)$:

$$f(x)+f(y)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\right)=\lg\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}.$$

Сравнивая выражения, полученные для $f(x)+f(y)$ и $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, видим, что, действительно, $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

530. Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2+2}$.

Решение. Выражение x^2+2 при любом значении x положительно, поэтому извлечение корня квадратного возможно при любом значении x. Следовательно, областью определения данной функции будет вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$.

531. Найти область определения функции $y=\sqrt[4]{6x-x^2-5}$.

Решение. Очевидно, должно выполняться неравенство $6x-x^2-5\geqslant 0$, преобразуя которое, получаем $(x-1)(x-5)\leqslant 0$. Последнее неравенство выполняется,

$$\text{если}\ \begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-5\leqslant 0 \end{cases}\quad\text{или}\quad \begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ x-5\geqslant 0. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств получаем

$$x\geqslant 1,\ x\leqslant 5,\quad\text{откуда}\quad 1\leqslant x\leqslant 5.$$

Из второй системы неравенств получаем

$$x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad x \geqslant 5,$$

т. е. несовместимую систему.

Следовательно, областью определения данной функции будет отрезок [1; 5].

532. Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

Решение. Необходимо неравенство

$$x^2 - 3x - 4 \neq 0, \quad \text{или} \quad (x+1)(x-4) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $x \neq -1$ и $x \neq 4$.

Следовательно, областью определения данной функции будет совокупность интервалов $(-\infty, -1)$ $(-1, 4)$ $(4, \infty)$.

533. Найти область определения функции $y = \lg \sin (x - 3)$.

Решение. Чтобы логарифм имел смысл, должно выполняться неравенство $\sin (x - 3) > 0$. Синус положителен в I и II четвертях и имеет период 2π, поэтому последнее неравенство может быть записано в виде

$$2n\pi < x - 3 < (2n+1)\pi, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или

$$2n\pi + 3 < x < (2n+1)\pi + 3, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно, областью определения данной функции будет совокупность интервалов

$$(2n\pi + 3, \ (2n+1)\pi + 3), \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

534. Найти область определения функции $y = \arccos \dfrac{x-2}{2x}$.

Решение. Данная функция определена, если

$$-1 \leqslant \frac{x-2}{2x} \leqslant 1.$$

Умножим все части неравенства на $2x$. При этом в случае $x > 0$ получаем

$$-2x \leqslant x - 2 \leqslant 2x,$$

а когда $x < 0$, то

$$-2x \geqslant x - 2 \geqslant 2x.$$

Первые из этих неравенств можно представить в виде систем

$$\begin{cases} -2x \leqslant x - 2, \\ x - 2 \leqslant 2x, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} -3x \leqslant -2, \\ -x \leqslant 2, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}, \\ x \geqslant -2, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant \dfrac{2}{3}$.

Вторые неравенства можно представить в виде систем

$$\begin{cases} -2x \geqslant x - 2, \\ x - 2 \geqslant 2x, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} -3x \geqslant -2, \\ -x \geqslant 2, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ x \leqslant -2, \end{cases}$$

откуда $x \leqslant -2$.

Следовательно, областью определения данной функции будет совокупность двух бесконечных интервалов $(-\infty, -2]$ $\left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right]$.

535. Найти область определения функции $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}} - \lg (2x - 3)$.

Решение. Найдем область определения каждого слагаемого в отдельности. Общая часть этих областей определения будет областью определения данной функции. Первое слагаемое определено на бесконечном интервале $[0, +\infty)$. Для второго слагаемого необходимо выполнение неравенства $x - 2 \neq 0$ или $x \neq 2$. Следовательно, оно определено на совокупности двух бесконечных интервалов $(-\infty, 2)$ $(2, +\infty)$. Для третьего слагаемого необходимо выполнение неравенства $2x - 3 > 0$, или $x > \dfrac{3}{2}$; его область определения — бесконечный интервал $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Сравнивая результаты, видим, что общей частью трех областей определения будет совокупность интервалов $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ $(2, +\infty)$.

536. Доказать, что произведение двух четных функций есть функция четная.

Решение. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — четные функции. Тогда $f(-x) = f(x)$ и $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Отсюда, если $f(x)\varphi(x) = F(x)$, то $F(-x) = f(-x)\varphi(-x) = f(x)\varphi(x) = F(x)$.

Следовательно, $F(x) = f(x)\varphi(x)$ — функция четная.

537. Найти $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, если $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$.

538. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, если $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7$.

539. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x) + 1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$, если $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

540. Найти $f\left(\dfrac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$, если $f(x) = \arccos (\lg x)$.

541. Найти $f(x)$, если $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

542. Показать, что $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$, если $f(x) = ax^2 + bx + c$.

543. Показать, что $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, если $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$.

Найти область определения следующих функций:

544. $y = \sqrt[3]{x^4 + 5}$.

545. $y = \sqrt[4]{2 + x - x^2}$.

546. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$.

547. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

548. $y = \sqrt{\lg \dfrac{5x - x^2}{4}}$.

549. $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$.

550. $y = \sqrt{\sin x}$.

551. $y = \arcsin \dfrac{x}{4}$.

552. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

553. $y = \arcsin \dfrac{x-3}{2} - \lg (4 - x)$.

554. Доказать, что произведение нечетных функций есть функция четная.

555. Доказать, что произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

556. Выяснить, какие из следующих функций являются четными и какие нечетными:

а) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, в) $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$,

б) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, г) $f(x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}$.

557. Определить, какие из перечисленных функций являются периодическими, и найти их период:

а) $f(x)=2\sin 4x$, в) $f(x)=3\cos^2 x$,

б) $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$, г) $f(x)=\sin\sqrt{x}$.

§ 2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

1. Непосредственное построение графиков. *Графиком функции* $y=f(x)$ называется геометрическое место точек $M(x, f(x))$. Отметим, что график четной функции ($f(x)=f(-x)$) симметричен относительно оси ординат (рис. 76); график

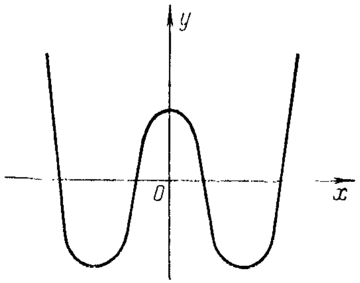

Рис. 76

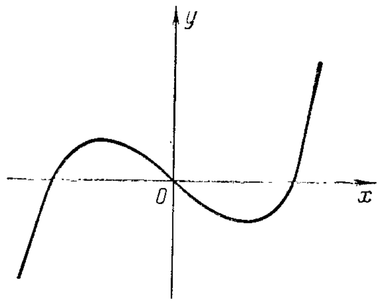

Рис. 77

нечетной функции ($f(x)=-f(-x)$) симметричен относительно начала координат (рис. 77); при построении графика периодической функции с периодом T строят ее график на любом отрезке длины T, а затем, пользуясь периодичностью, продолжают на всю числовую ось (рис. 78).

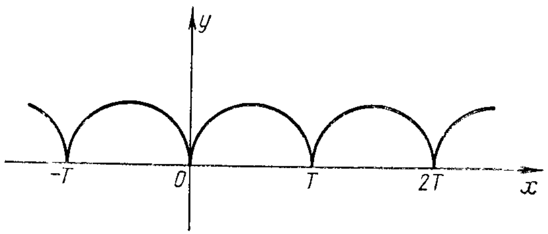

Рис. 78

Две функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ называются *взаимно обратными*, если для каждой пары значений a и b, удовлетворяющих условию $b=f(a)$, выполнено также условие $a=\varphi(b)$ и, наоборот, для пары значений a и b, удовлетворяющих условию $a=\varphi(b)$, выполнено условие $b=f(a)$. Одна из двух взаимно обратных функций (любая) может быть названа *прямой*, тогда другая функция называется *обратной* по отношению к первой. Например, функции

$$y=a^x \text{ и } y=\log_a x,\quad y=\sin x \text{ и } y=\operatorname{Arcsin} x,\quad y=x^3 \text{ и } y=\sqrt[3]{x}$$

являются взаимно обратными. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 79, 80, 91).

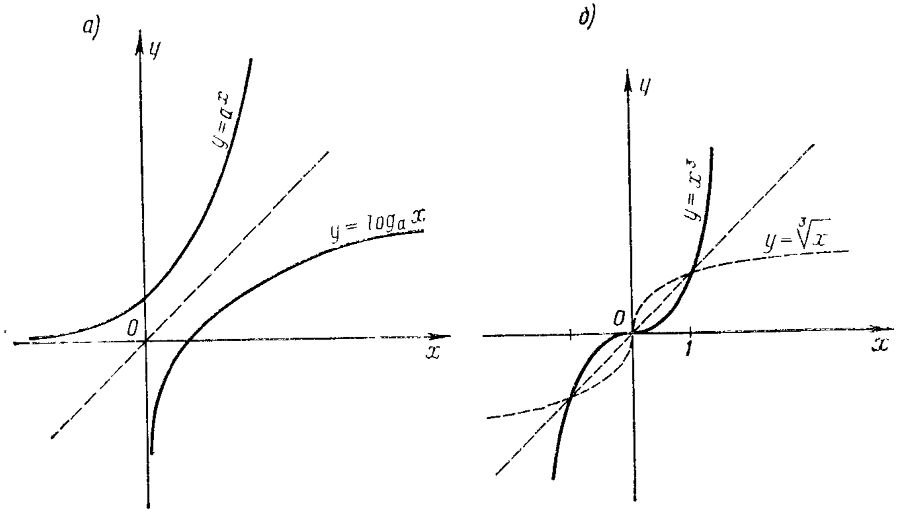

Рис. 79

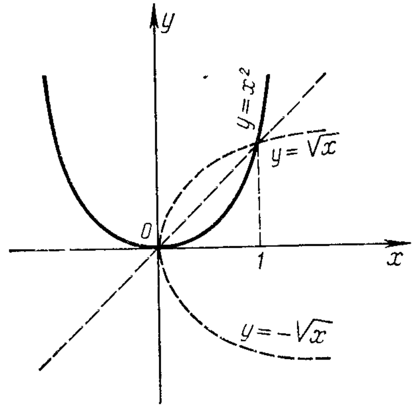

Рис. 80

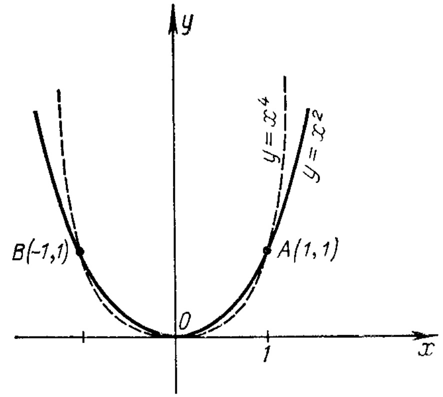

Рис. 81

В том случае, когда прямая функция не является монотонной, обратная функция неоднозначна. Сравните рис. 79 и 80, 91. Для многозначных функций вводится понятие однозначной ветви многозначной функции. Так, например: 1) функция $y=\arcsin x$ является однозначной ветвью функции $y=\operatorname{Arcsin} x$ (на рис. 91 функция $y=\arcsin x$ выделена жирной линией); 2) функция, обратная к функции $y=x^2$, имеет две однозначные ветви: $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$ (рис. 80).

Для построения графиков функций важно знать общий вид и расположение графиков основных элементарных функций, известных из школьного курса математики. Примеры графиков степенной функции при некоторых значениях показателя a даны на рис. 81, 82, 83, 84, 85. На рис. 86, 87, 88, 89 показан вид графиков показательной и логарифмической функций. Графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций изображены на рис. 90, 91, 92, 93.

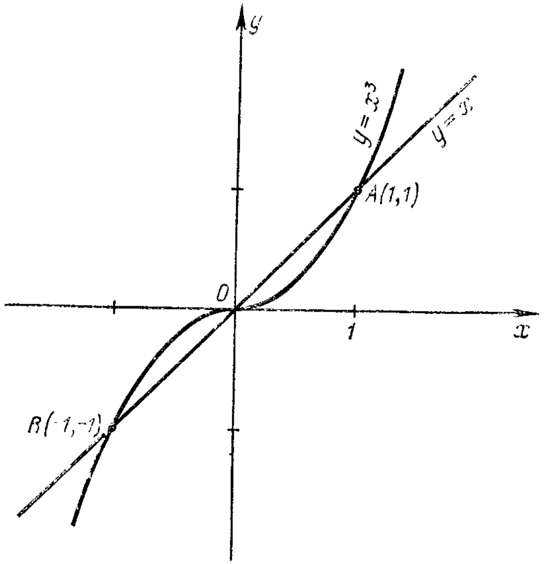

Рис. 82

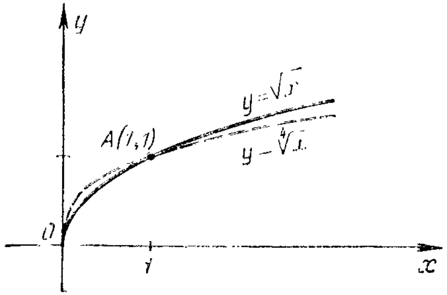

Рис. 83

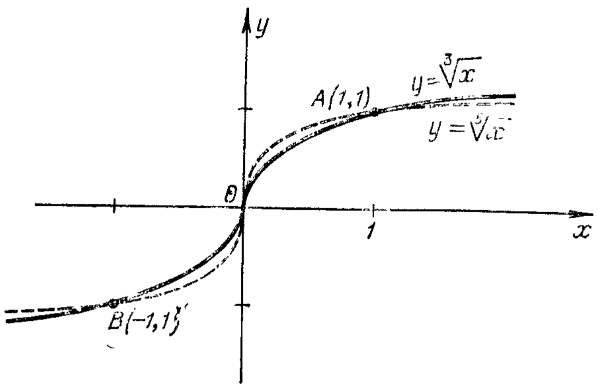

Рис. 84

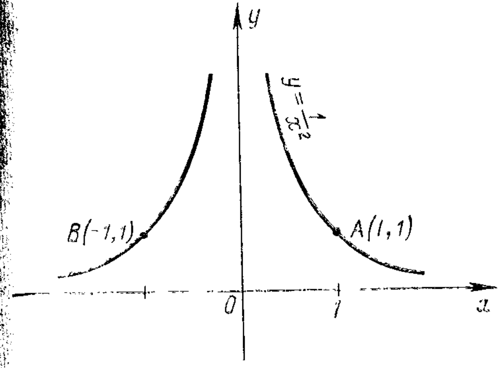

Рис. 85

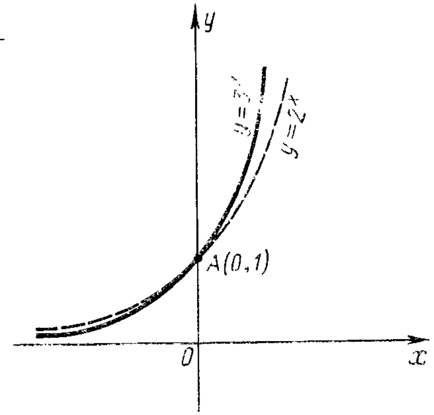

Рис. 86

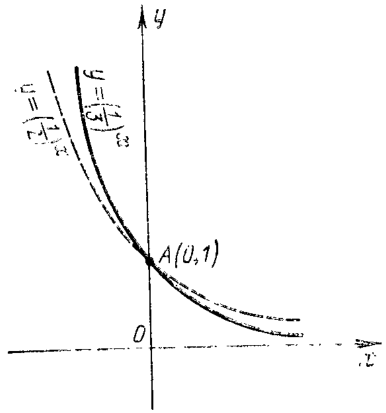

Рис. 87

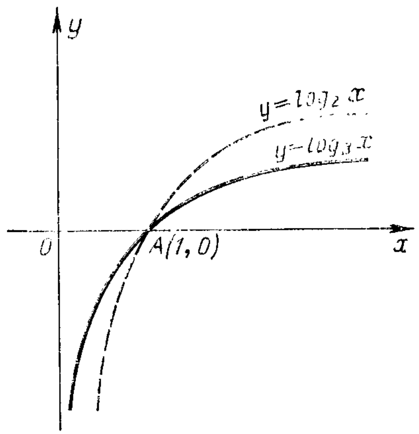

Рис. 88

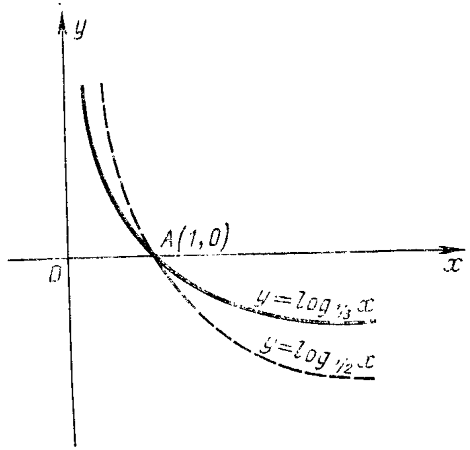

Рис. 89

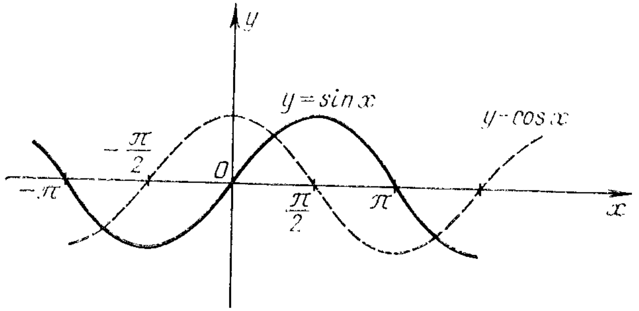

Рис. 90

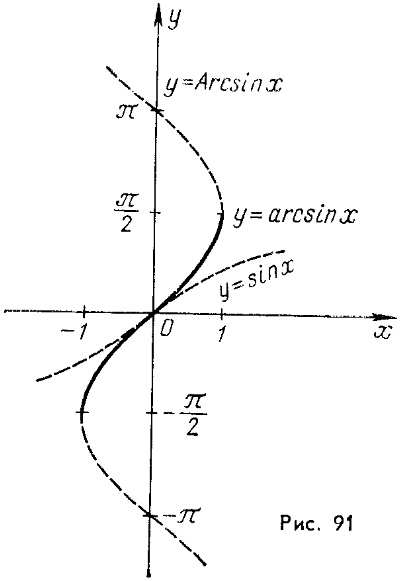

Рис. 91

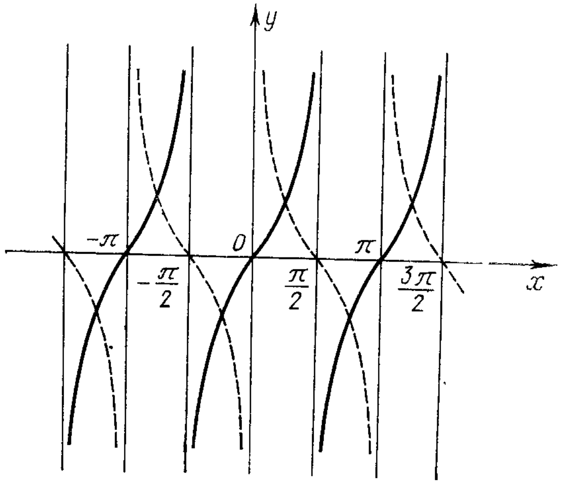

Рис. 92

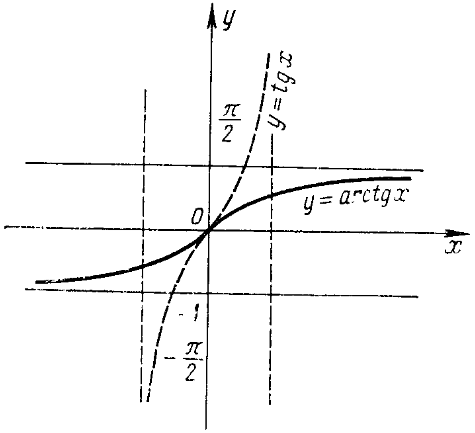

Рис. 93

Общая схема построения графиков функций с использованием дифференциального исчисления будет дана ниже, в гл. VI. Сейчас же будут рассмотрены те графики, построение которых основано на непосредственном исследовании функции и на применении методов аналитической геометрии (параллельный перенос, растяжение или сжатие).

К непосредственному построению графиков относятся известный из школы способ построения графика «по точкам», применение графиков основных элементарных функций, использование той или иной симметрии графика или его периодичности (если, разумеется, таковые имеются), графическое сложение графиков данных функций и другие приемы, непосредственно вытекающие из определения функции. Конечно, нужно использовать также известные из аналитической геометрии сведения о линиях первого и второго порядка.

558. Построить график функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Заметим, прежде всего, что эта функция нечетная, так что ее график симметричен относительно начала координат. Ограничиваясь неотрицательными значениями аргумента x, строим таблицу значений функции, придавая x ряд значений через интервал $h = \frac{1}{2}$:

Таблица 2

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	0	$-1\frac{3}{8}$	-2	$-1\frac{1}{8}$	2	$8\frac{1}{8}$	18

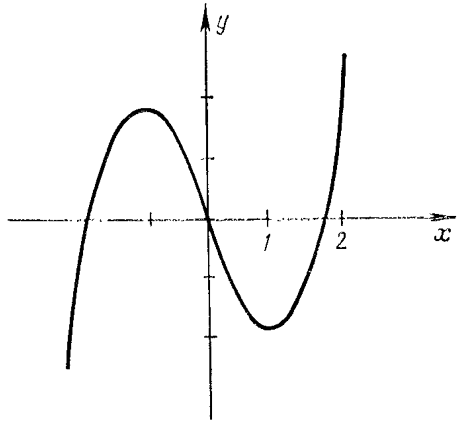

Рис. 94

По этим данным строим несколько точек графика (до $x = 2$); соединяя их плавной линией, получим вид графика на отрезке от 0 до 2. Из табл. 2 видно, что после $x = 2$ функция очень быстро растет. Следовательно, ее график круто уходит вверх. Используя симметрию относительно начала 0, строим график для отрицательных значений x (рис. 94).

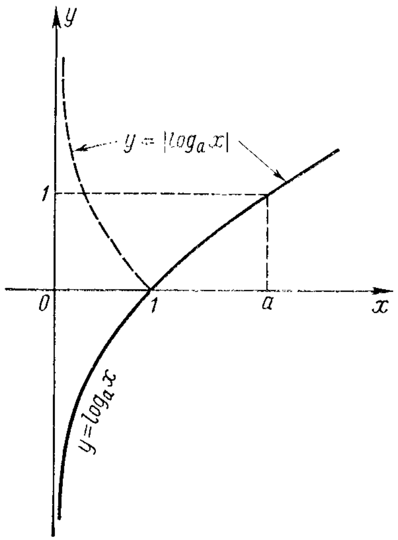

Рис. 95

559. Построить график функции $y = |f(x)|$ по известному графику функции $y = f(x)$.

Решение. По определению модуля,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0; \end{cases}$$

поэтому там, где $f(x) \geq 0$, т. е. где график функции $y = f(x)$ лежит выше оси Ox, график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком $y = f(x)$. Так как точки $(x, -y)$ и (x, y) симметрично расположены относительно оси Ox, то для получения графика $|f(x)|$ в случае $f(x) < 0$ надо график $y = f(x)$ симметрично отразить относительно оси Ox, или, что то же, повернуть его на 180° вокруг этой оси. В качестве примера на рис. 95 показано построение графика функции $y = |\log_a x|$ по графику $y = \log_a x$.

560. Построить график функции $y=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Нетрудно убедиться, что эта функция четная, так что достаточно построить ее график для неотрицательных x, остальная часть графика получится симметрированием относительно оси Oy.

В данном случае прибегать к построению по случайно выбранным точкам нецелесообразно. Надо использовать колебательный характер синусоиды. Поскольку $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$, то $-\frac{1}{x}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{1}{x}$. Следовательно, график данной функции все время заключен между графиками $y=-\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{x}$ (см. 124), а так как синусоида колеблется от -1 до $+1$, то с увеличением x график функции $y=\frac{\sin x}{x}$ колеблется между графиками $-\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$. Это и позволяет нарисовать общий вид искомого графика при $x>0$ (рис. 96). Получилась картина затухающих

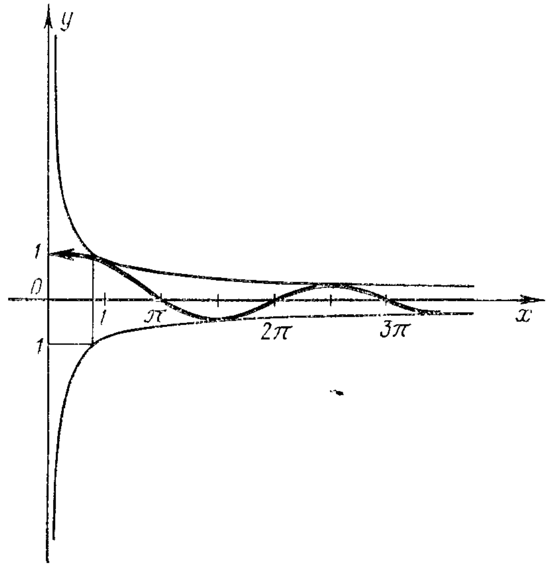

Рис. 96

колебаний. В теории пределов несколько позже будет показано, что при малых значениях аргумента x значения $\frac{\sin x}{x}$ близки к единице. Это отражено стрелочкой на рис. 96. Для уточнения рисунка полезно заметить, что при $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ искомый график касается графика функции $y=\frac{1}{x}$, а при $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ — графика функции $y=-\frac{1}{x}$, в точках же $x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$ он пересекает ось Ox.

561. Символом $[x]$ обозначается целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Построим график функции $y=[x]$.

Решение. По определению целой части имеем:

$$y=\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 4, \text{ если } x \text{ изменяется в пределах } & 4\leqslant x<5\\ 3\quad » \quad\quad » \quad\quad » & 3\leqslant x<4\\ 2\quad » \quad\quad » \quad\quad » & 2\leqslant x<3\\ 1\quad » \quad\quad » \quad\quad » & 1\leqslant x<2\\ 0\quad » \quad\quad » \quad\quad » & 0\leqslant x<1\\ -1\quad » \quad\quad » \quad\quad » & -1\leqslant x<0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Так что на каждом целочисленном промежутке график функции $y=[x]$ изображается отрезком прямой, параллельной оси Ox, причем левый конец отрезка принадлежит графику, а правый нет. На рис. 97 это последнее обстоятельство

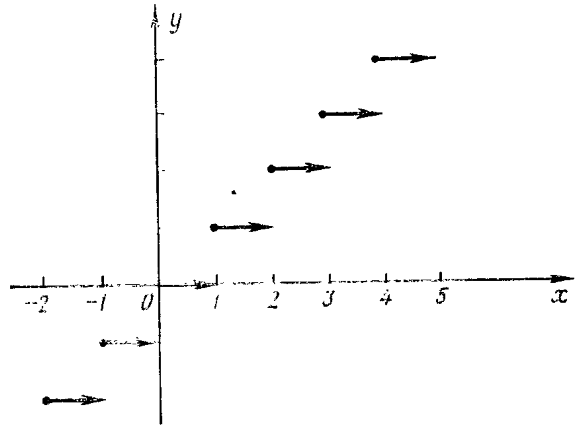

Рис. 97

отмечено стрелочкой. График рассматриваемой функции не представляет сплошной линии, в каждой целочисленной точке он имеет разрыв (см. § 7).

Построить графики данных функций:

562. а) $y=2x-x^3$, б) $y=x^4-3x^2+1$, в) $y=\frac{x}{x^2+1}$.

563. а) $y=|x^2-1|$, б) $y=\lg|x|$.

564. $y=a^{-x}\cos x$ и $y=a^{-x}\sin x$ при $x\geqslant 0$ $(a>1)$.

Указание. Применить прием, рассмотренный в 560.

565. $y=\frac{|x-1|}{x-1}(x+3)$ при $x\neq 1$ и $y=1$ при $x=1$.

Указание. Исследовать отдельно ветви графика при $x>1$ и при $x<1$.

566. $y=x-[x]$ (дробная доля числа x).

567. $y=1+x+\sin x$.

Указание. Построить графики функций $y=1+x$ и $y=\sin x$, затем сложить их графически.

2. Параллельный перенос. Дадим способ построения графиков функций вида

$$y=f(x-a)-b \quad (a,\ b — \text{любые числа}), \tag{1}$$

если известен график функции $y=f(x)$.

Запишем уравнение (1) в виде $y-b=f(x-a)$ и сделаем преобразование параллельного переноса осей координат:

$$X=x-a,\quad Y=y-b.$$

Начало новой системы будет находиться в точке $O_1(a,\ b)$. Относительно системы XO_1Y уравнение (1) примет вид

$$Y=f(X).$$

По условию, график этой функции известен.

Таким образом, способ построения графика функции вида (1) сводится к следующему: в точку $O(a,\ b)$ помещаем начало вспомогательной системы координат XO_1Y, относительно этой системы строим график функции $Y=f(X)$. Построенная кривая в системе xOy описывается уравнением (1) (см. также гл. I, § 4, п. 1).

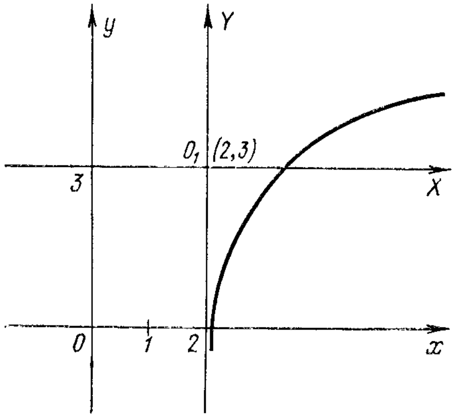

Рис. 98

568. Построить график функции $y=\lg(x-2)+3$.

Решение. Формулы параллельного переноса осей координат запишутся в виде $X=x-2$, $Y=y-3$. Координаты нового начала $O_1(2,\ 3)$.

В новой системе координат строится график функции $Y=\lg X$. Относительно системы xOy этот график представляет функцию $y=\lg(x-2)+3$ (рис. 98).

Построить графики функций:

569. $y=(x-2)^3+5$. **571.** $y=2+\operatorname{tg} x$.

570. $y=2+e^{x-3}$. **572.** $y=1+\arcsin(x-3)$.

3. Сжатие и растяжение. Дадим способ построения графиков функций вида

$$y=\beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{2}$$

если известен график функции $y=f(x)$.

Запишем функцию (2) в виде $y/\beta=f(x/\alpha)$ и произведем замену переменных; положим $Y=\frac{y}{\beta}$, $X=\frac{x}{\alpha}$, или

$$x=\alpha X,\quad y=\beta Y. \tag{3}$$

В новых переменных уравнение примет вид

$$Y=f(X).$$

График этой функции по условию известен. Построим его и проследим, как будет он деформироваться при переходе к старым переменным x, y. Используя равенства (3), любой точке с координатами $(X_0,\ Y_0)$ можно поставить в соответствие точку $x_0=\alpha X_0$, $y_0=\beta Y_0$, т. е. такую точку, у которой координата по оси абсцисс увеличилась в α раз, а координата по оси ординат — в β раз. Что же

касается всей кривой $Y=f(X)$, то она при этом должна растянуться в α раз по оси абсцисс и в β раз по оси ординат *.

573. Построить график $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$.

Решение. Имеем: $\alpha=3$ и $\beta=\frac{1}{2}$; для построения графика данной функции надо растянуть график функции $y=\sin x$ в три раза по оси абсцисс и сжать его в два раза по оси ординат. На рис. 99 построен график функции $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$.

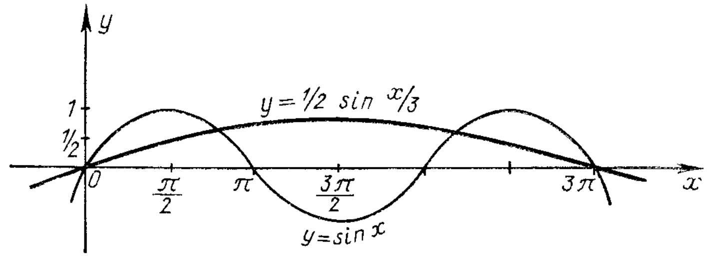

Рис. 99

Заметим, что расстояние между соседними нулями функции $y=\sin x$ равно π а расстояние между соседними нулями функции $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$ равно 3π; максимальное значение функции $y=\sin x$ равно 1, а максимальное значение функции $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}$ равно $\frac{1}{2}$.

Построить графики функций:

574. $y=\frac{1}{3}x^3$. **576.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

575. $y=3\cos\frac{x}{2}$. **577.** $y=2\lg 3x$.

4. Более общий случай. Покажем, что, комбинируя приемы построения графиков функций вида (1) и (2), можно строить графики функций вида

$$y=\beta f\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)+b, \tag{4}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, a и b — любые числа, график функции $y=f(x)$ считается известным. Сначала по графику функции $y=f(x)$ строится график функции $y_1=f_1(x)=\beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ (п. 3). Далее, по графику функции $y_1=f_1(x)$ строится график функции $y_2=f_1(x-a)+b$ (п. 2).

Убедимся, что построенный в результате график отвечает функции вида (4). Подставив в формулу $y_2=f_1(x-a)+b$ выражение функции $f_1(x)=\beta f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, получим

$$y_2=f_1(x-a)+b=\beta f\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)+b.$$

* Если $\alpha<1$ или $\beta<1$, то надо говорить не о растяжении, а о сжатии вдоль соответствующей оси.

578. Построить график функции $y=2\left[\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]-1$.

Решение. Преобразуем функцию к виду (4):

$$y=2\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{3}\right)-1;$$

получаем, что в этом случае $\alpha=3$, $\beta=2$, $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=-1$, $f(x)=\cos x$.

На рис. 100 изображены последовательные этапы построения графика. Растягивая график функции $y=\cos x$ по оси Ox в три

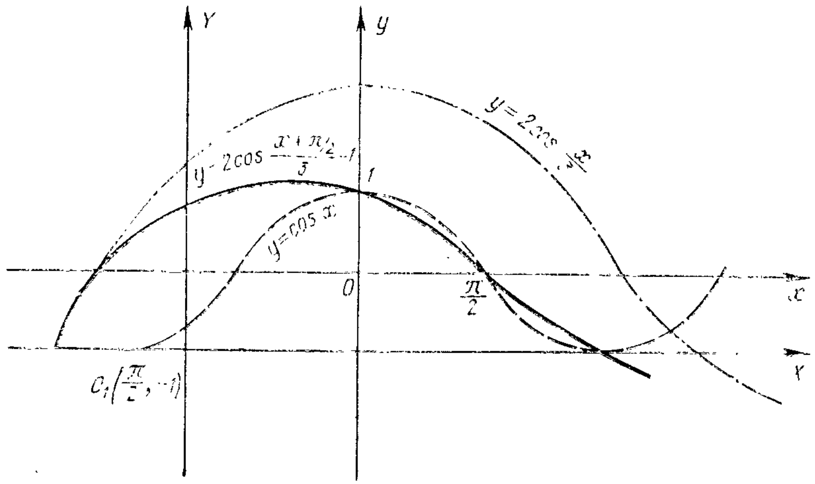

Рис. 100

раза и по оси Oy в два раза, получаем график функции $y_1=f_1(x)=2\cos\frac{x}{3}$. Затем в системе координат XO_1Y с началом в точке $O_1\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ строим график функции $Y=2\cos\frac{X}{3}$, который и будет графиком функции $y=2\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{3}\right)-1$ в системе xOy.

Построить графики функций:

579. $y=\frac{1}{2}e^{x+1}+3$.

580. $y=(\lg\sqrt{x-3}-1)$.

581. $y=2+3\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

582. $y=-\frac{2}{(x+2)^3}+5$.

$\left(\text{считать известным график функции } y=-\frac{1}{x^3}\right)$

583. $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

584. $y=1+2\,\mathrm{arctg}\left(1-\frac{x}{2}\right)$

(считать известным график функции $y=\mathrm{arctg}(-x)$).

§ 3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

1. Определения. *Числовой последовательностью* называется совокупность чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

занумерованных в определенном порядке. Последовательность можно представить как *функцию целочисленного аргумента*: каждому целому положительному значению $x=n$ отвечает определенное значение функции $f(x)=f(n)=a_n$;

a_n называется *общим членом* числовой последовательности.

Числовая последовательность называется *монотонно возрастающей*, если каждый последующий член последовательности больше предыдущего. Например,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$$

Числовая последовательность называется *монотонно убывающей*, если каждый последующий член последовательности меньше предыдущего. Например,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

Числовая последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для любого n

$$a_n \leqslant M.$$

Так, последовательность с общим членом

$$a_n=\frac{n}{n+1}$$

ограничена сверху, так как все ее члены меньше, например, 1.

Числовая последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число N, что для любого n

$$a_n \geqslant N.$$

Например,

$$a_n=\frac{1}{n}>0.$$

Числовая последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу. Тогда существует такое число $M>0$, что для любого n

$$-M \leqslant a_n \leqslant M, \text{ т. е. } |a_n| \leqslant M.$$

Например, последовательность

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

ограниченная, так как $|a_n| \leqslant 1$.

2. Пределы. *Число A называется пределом последовательности, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$ такое, что при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.*

Если число A есть предел последовательности, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Для сходящихся после-

605. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

606. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

607. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

608. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

609. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$.

610. $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$.

611. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

§ 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Определение предела функции. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при x стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Аналогично, число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x| > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

612. Доказать, исходя из определения предела, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|x^2-4| < \varepsilon.$$

Если $|x-2| < \delta$, то $|x+2| = |x-2+4| \leqslant |x-2| + 4 < \delta + 4$ и $|x^2-4| = |x-2| |x+2| < \delta(\delta+4)$ *.

Для выполнения неравенства $|x^2-4| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+4) = \varepsilon$, т. е. $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, откуда $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$ (второй корень $-2-\sqrt{4+\varepsilon}$ отбрасывается, так как δ должно быть положительным).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ, что из неравенства $|x-2| < \delta$ следует неравенство $|x^2-4| < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

613. Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$. Если $|x| > M$, то

* Для любых чисел a и b имеем: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $|ab| = |a| |b|$.

$x^2 > M^2$ и

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{M^2+1} < \frac{1}{M^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ достаточно найти M из условия $\frac{1}{M^2} = \varepsilon$, т. е. $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Итак, для любого ε найдено такое M, что из неравенства $|x| > M$ следует неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$, т. е. доказано, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

В следующих задачах доказать, исходя из определения предела функции, что:

614. $\lim\limits_{x \to 2} (2x-1) = 3$.

615. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{4}{5}$.

616. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$.

617. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Иными словами, функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если для любого $N > 0$ существует число $\delta(N)$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta(N)$ выполняется неравенство $|f(x)| > N$; это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to \infty$. Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с функциями бесконечно малыми. Если при данном предельном переходе функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно малой при том же предельном переходе, и обратно.

В дальнейшем в этом параграфе, формулируя то или иное положение о бесконечно малых функциях, будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все эти функции являются бесконечно малыми при одном и том же предельном переходе.

Свойства бесконечно малых функций

1) *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

2) *Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

3) *Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.*

618. Доказать, пользуясь определением, что при $x \to 1$ функция $1-x^2$ является бесконечно малой.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|<\delta$, будет выполняться неравенство $|1-x^2|<\varepsilon$. Если

$$|x-1|<\delta, \text{ то } |x+1|=|x-1+2|\leqslant|x-1|+2<\delta+2$$

и

$$|1-x^2|=|1-x|\,|1+x|<\delta(\delta+2)\ *.$$

Для выполнения неравенства $|1-x^2|<\varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы

$$\delta(\delta+2)=\varepsilon, \text{ т. е. } \delta^2+2\delta-\varepsilon=0$$

или

$$\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$$

(второй корень $-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасывается, так как $\delta>0$).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ, что из неравенства $0<|x-1|<\delta$ следует неравенство $|1-x^2|<\varepsilon$. Следовательно, функция $1-x^2$ бесконечно мала при $x\to 1$.

619. Доказать, пользуясь определением, что при $x\to 0$ функция $a^{\frac{1}{x^2}}$, где $a>1$, является бесконечно большой.

Решение. Пусть N — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0<|x-0|<\delta, \text{ или } 0<|x|<\delta,$$

будет выполняться неравенство

$$a^{\frac{1}{x^2}}>N.$$

Если $|x|<\delta$, то $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}$ и $a^{\frac{1}{x^2}}>a^{\frac{1}{\delta^2}}$, поэтому требуемое неравенство выполняется при

$$a^{\frac{1}{\delta^2}}=N, \text{ или } \frac{1}{\delta^2}=\log_a N,\ \delta=\frac{1}{\sqrt{\log_a N}}.$$

Таким образом, для любого N найдено такое δ, что из неравенства $0<|x|<\delta$ следует неравенство $a^{\frac{1}{x^2}}>N$. Следовательно, функция $a^{\frac{1}{x^2}}$ $(a>1)$ является бесконечно большой при $x\to 0$.

В следующих задачах, пользуясь определением, доказать, что:

620. Функция $\frac{1}{x^2-2x+1}$ является бесконечно большой при $x\to 1$.

621. Функция $a^{-\frac{1}{x^2}}$ $(a>1)$ является бесконечно малой при $x\to 0$.

Указание. Использовать теорему о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

622. Функция $\frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$.

Указание. Использовать третье свойство бесконечно малых функций.

---

* См. сноску к **612**.

1. Применение основных теорем. При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы:

$$\lim_{x\to a} C=C, \text{ где } C \text{ — постоянная;} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x)=C\lim_{x\to a} f(x), \text{ где } C \text{ — постоянная;} \tag{2}$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ существуют, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}. \tag{6}$$

Кроме того, надо пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right). \tag{7}$$

Далее следует отметить, что:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. (8)

Действительно, $f(x)$ — бесконечно малая функция, следовательно, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая; отсюда

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=C\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty;$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. (9)

Действительно, $f(x)$ — бесконечно большая функция, следовательно, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая; отсюда

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=C\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=C\cdot 0=0;$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, (10)

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Действительно, $f(x)$ — бесконечно малая функция, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая, но тогда $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно малая; отсюда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}=0.$$

623. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2-6x+7)$.

Решение. Из формул (2), (4), (1) и (3) следует, что

$$\lim_{x\to 1}5x^2=5\lim_{x\to 1}x^2=5\lim_{x\to 1}x\cdot x=5\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x=5\cdot 1\cdot 1=5;$$

$$\lim_{x\to 1}6x=6\lim_{x\to 1}x=6\cdot 1=6;\quad \lim_{x\to 1}7=7;\quad \lim_{x\to 1}(5x^2-6x+7)=5-6+7=6.$$

624. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Решение. Используем формулы (4), (3) и (5):

$$\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1;\quad \lim_{x\to 0}(2x^2-x-1)=-1\neq 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)}=\frac{-1}{-1}=1.$$

625. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(3x)^{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2}3x=6$ и $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$, то, используя формулу (6), получим

$$\lim_{x\to 2}(3x)^{x^2}=6^4=1296.$$

626. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$.

Решение. По формуле (7) имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

627. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{(x-1)^3}$.

Решение. Используя формулу (8), получаем, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^3}=\infty,$$

так как

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^3=\lim_{x\to 1}[(x-1)]^3=0.$$

628. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{5}{\operatorname{tg}x}$.

Решение. Используя формулу (9), получаем, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\operatorname{tg}x}=0,$$

так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty.$$

629. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}$.

Решение. Используя формулу (10), получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln x}=0,$$

так как

$$\lim_{x\to 0}x=0\quad\text{и}\quad\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty.$$

Найти следующие пределы:

630. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

631. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$.

632. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$.

633. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+5}{x^2+3x+7}$.

634. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)^{\lg x}$.

635. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{8}{x^2}}$.

636. $\lim\limits_{x\to 1}\lg x$.

637. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x$.

638. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin x$.

639. $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{arctg}x$.

640. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sin^3(x-1)}$.

641. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg}3x}}$.

642. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^3(2x+4)}$.

643. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{2^{x-1}}$.

644. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

645. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\operatorname{ctg}\left[\dfrac{2(x+1)}{3}\right]}$.

2. Раскрытие неопределенностей. Как показывают решения задач, приведенных в п. 1, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

В последующих задачах показывается, какими приемами обычно пользуются при таких преобразованиях (см. также гл. VI, § 2).

646. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение. Прежде всего отметим, что для решения этой задачи пользоваться формулой (5) данного параграфа нельзя, так как предел знаменателя равен нулю.

Непосредственная же подстановка в данное выражение предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Числитель и знаменатель данной дроби при $x=2$ обращаются в нуль, поэтому многочлены x^2-5x+6 и x^2-2x делятся без остатка на бином $x-2$ (теорема Безу); отсюда

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}.$$

Теперь (в результате непосредственной подстановки в полученное выражение предельного значения аргумента) получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

647. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$; чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. После этого можно будет сократить на x^2 и воспользоваться теоремой о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

648. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Снова неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы, т. е. на $(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left[(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

649. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+10}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n — степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=2,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}=0$.

650. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x]$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\sqrt{(x+m)(x+n)}+x$:

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+m)(x+n)-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)x+mn}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)+\frac{mn}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{x}\right)\left(1+\frac{n}{x}\right)}+1}=\frac{m+n}{2}.$$

651. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

Решение. В данном примере получается неопределенность вида $\infty-\infty$ Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=a\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Найти следующие пределы:

652. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

653. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

654. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

655. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

656. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

657. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

658. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

659. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

660. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

661. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

662. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

663. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

664. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

665. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

666. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

667. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+2)}-x)$.

668. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

669. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

670. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

671. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

672. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

673. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-$
$-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

674. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}]$.

675. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

676. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x}{2x+3}$.

677. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$.

678. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{0{,}01x^2-6x}$.

679. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

680. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

681. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

682. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

683. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

684. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

3. Первый замечательный предел. При вычислении пределов трансцендентных функций часто используется формула

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \tag{11}$$

Рассмотрим примеры.

685. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Решение. При $x\to 0$ $\alpha=2x$ также стремится к нулю, поэтому, умножая числитель и знаменатель на 2 и применяя формулу (11), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

686. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

согласно формуле (11), так как $\alpha=\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Найти следующие пределы:

687. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

688. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\sin\frac{2}{3x}$.

689. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

690. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$.

691. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

692. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

693. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

694. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

695. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}$.

696. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$.

697. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$.

698. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

699. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

4. Пределы типа e. Известно, что

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{12}$$

Эта формула используется для вычисления пределов, которые называются «пределами типа e». При вычислении этих пределов встречаем неопределенность вида 1^∞.

Рассмотрим примеры (см. также § 6, п. 2, задачи 737, 738).

700. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=e$$

согласно формуле (12), так как $\alpha=\operatorname{tg}x\to 0$ при $x\to 0$.

701. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. В этой задаче предел основания равен 1 (разделите числитель и знаменатель на x), а показатель степени стремится к бесконечности; имеем неопределенность вида 1^∞ (иногда говорят — «неопределенность типа e»). Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представляем основание степени в виде $1+\alpha$, а в показателе выделяем множитель $\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^2.$$

Переходя к пределу в квадратной скобке, получили число e, согласно формуле (12), так как

$$\alpha=\frac{2}{x-1}\to 0 \text{ при } x\to\infty.$$

702. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}=\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}^2x}}\right]^3=e^3.$$

Найти следующие пределы:

703. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$. **706.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$.

704. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$. **707.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

705. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$. **708.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

§ 6. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

1. Сравнение порядков бесконечно малых. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*, если предел их отношения $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен некоторому числу C, отличному от нуля. Если же $C=0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с $\beta(x)$.

Иногда возникает необходимость в более точном сравнении бесконечно малых функций — в выражении их порядков числами. В этом случае одну из сравниваемых бесконечно малых функций принимают за основную и относительно нее определяют порядок других бесконечно малых. Делают это, основываясь на следующем определении: если из двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ вторая принята за основную, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$, если $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^p}=C$, где C — число, отличное от нуля.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность обозначается символом $\sim$, т. е. пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях

Теорема I. *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными.*

Теорема II. *Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.*

Основные эквивалентности:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{1}$$
$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{2}$$
$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{3}$$
$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x), \tag{4}$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x), \tag{5}$$
$$\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x), \tag{6}$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a. \tag{7}$$

Например, покажем, что если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то

$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

т. е. покажем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Действительно, пусть $\alpha(x)=y$. Тогда если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то и $y\to 0$ при $x\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y\cdot\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\cdot 1=1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$. Еще пример. Покажем, что, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$

т. е. покажем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1.$$

Пусть $\alpha(x)=y$. Тогда, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то и $y\to 0$ при $x\to a$; поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}.$$

Обозначим $e^y-1=z$. При $y\to 0$ $z\to 0$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=\frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Следовательно, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$.

709. Доказать, что функции $\dfrac{2x^2}{1+x}$ и x^2 при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Решение. Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(x+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=2\neq 0.$$

Данные бесконечно малые функции есть бесконечно малые одного порядка.

710. Доказать, что порядок функции $\dfrac{x^3}{3-x}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x\to 0$.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(3-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3-x}=0,$$

т. е. функция $\dfrac{x^3}{3-x}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем функция x^2.

711. Доказать, что функция $1-\cos x$ будет бесконечно малой второго порядка относительно x при $x\to 0$.

извольное число. **342.** $x=y-2z$, где y и z — произвольные числа. **343.** При $a=0$; $x=t$, $y=0$, $z=0$; при $a=2$: $x=5t$, $y=-8t$, $z=2t$. **344.** $x=\alpha$, $y=2\alpha$, $z=-\alpha$, $t=\alpha$, α — произвольное число. **348.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **349.** а) $x_1=\frac{1+x_5}{3}$, $x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$; б) $x_1=\frac{-x_5}{2}$, $x_2=-1-\frac{x_5}{2}$ $x_3=0$, $x_4=-1-\frac{x_5}{2}$. **356.** $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **357.** $\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$. **358.** $y_1=x_3$, $y_2=x_2+2x_3$, $y_3=x_1+2x_2+3x_3$. **359.** $u_1=7w_1-6w_2-10w_3$, $u_2=6w_1-5w_2-6w_3$, $u_3=4w_1-3w_2+w_3$. **360.** $V=A^{-1}U$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **365.** $\lambda_1=9$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=3$. **368.** для A: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, для A^2: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=9$, $\lambda(A^2)=\lambda(A)^2$. **369.** $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ — характеристические числа матрицы A; $\mu_1=P(1)=-4$, $\mu_2=P(4)=5$ — характеристические числа матрицы $P(A)$. **380.** а) $3y+z=0$, б) $x+2z=0$. **381.** а) $y+4=0$, б) $z-2=0$. **382.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1$. **383.** $x+y+z=\pm 2$. **384.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **385.** $3x+2y-z=5$. **386.** а) Да, б) нет. **387.** $-\frac{6}{11}x+\frac{5}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0$, $p=3$. **391.** $\varphi=\arccos\frac{4}{21}$. **392.** Плоскости параллельны. **393.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **394.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **395.** $y\pm z=0$. **396.** $(-10, 0, 2)$. **400.** 1. **401.** $M_1\left(0, 0, -\frac{5}{3}\right)$, $M_2(0, 0, 3)$. **402.** $x-2y+2z-1=0$, $x-2y+2z-3=0$. **403.** $(0, -2, 0)$. **404.** $x+z=0$, $x-y-1=0$, **405.** $\frac{3}{8}\sqrt{3}$. **410.** $x-4y+5z+15=0$. **411.** $x+y-z+2=0$. **412.** $x+2y-z-8=0$. **413.** $x+11y+38z-154=0$. **414.** $9x-y+7z-40=0$. **415.** $3x-4y-3z+4=0$. **416.** $3x+3y+z-8=0$. **417.** $h=3$. **424.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{4}$; $x=-1+t$, $y=1-3t$, $z=-3+4t$. **425.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$; $x=2+t$, $y=-1+4t$, $z=-1$. **426.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{0}$, $x=-1+t$, $y=-2$, $z=2$. **427.** $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{1}$. **428.** $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{4}$. **429.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{8}$. **430.** $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. **431.** $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$. **432.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. **433.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$. **434.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$. **438.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **439.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **443.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{0}$. **444.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. **446.** $(1, -2, 3)$. **451.** $\psi=\arcsin\frac{18}{91}$. **452.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. **455.** $(5, -1, 0)$. **456.** $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{7}{13}, \frac{27}{13}\right)$. **459.** $\begin{cases} x-2y-3=0, \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2z-3=0, \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} y+z=0, \\ x=0. \end{cases}$ **460.** $11x-4y+6=0$, $9x-z+7=0$, $36x-11z+23=0$. **462.** $9x+8y-6z=0$. **463.** $3x-2y-3=0$. **464.** $x+6y+3z-9=0$. **465.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{5}$. **466.** $A'(8, -2, 0)$. **467.** $A'(1, 2, 12)$. **468.** $A'(-1, 3, 2)$. **469.** $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}$. **470.** $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$. **471.**

$\frac{x-4}{13}=\frac{y}{37}=\frac{z+1}{58}$. **472.** $-11x+17y+19z-10=0$. **473.** $\frac{x-0{,}8}{7}=\frac{y-4{,}6}{4}=\frac{z+1{,}4}{-1}$. **474.** $-7x+8y+2z+23=0$. **480.** Круговой цилиндр, $R=3$, с осью Oy. **481.** Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox. **482.** Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, направленной в отрицательную сторону оси Oz. **483.** Пара плоскостей $x=\pm z$, пересекающихся по оси Oy. **484.** Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy. **485.** Параболический цилиндр $(z+2)^2=2(x-1)$. **486.** Эллиптический цилиндр $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$. **487.** Круговой цилиндр, ось которого совпадает с прямой $x=0$, $y=2$. **488.** Гипербола $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1, \\ z=0. \end{cases}$ **489.** $(x-1)^2+(z+1)^2=9$. **490.** Эллипс. **494.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=27$. **495.** $x^2+(y-4)^2+z^2=9$. **496.** $(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=38$. **497.** $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$. **498.** $C(1, -2, 2)$, $R=4$. **503.** При $x=0$ и $y=0$ — гиперболы с действительной осью Oy, при $z=h$ — эллипсы. **504.** Гиперболы с действительной осью Oz при $x=0$ и $y=0$, эллипсы при $z=h$ ($|h|\geq 2$). **505.** При $x=0$ и $y=0$ — пара прямых, проходящих через начало координат, при $z=0$ — точка, при $z=h\neq 0$ — эллипсы. **506.** Параболы, направленные в положительную сторону оси Oz при $x=0$ и $y=0$, эллипсы — при $z=h>0$, точка — при $z=0$. **507.** При $y=0$ — парабола, направленная в положительную сторону оси Oz, при $x=0$ — парабола, направленная в отрицательную сторону оси Oz, при $z=0$ — пара прямых, при $z=h\neq 0$ — гиперболы с действительной осью, параллельной оси Ox, при $h>0$ и оси Oy при $h<0$. **508.** Конус вращения вокруг оси Oz с вершиной в точке $(0, 0, 1)$. **509.** Эллиптический параболоид, направленный в отрицательную сторону оси Ox с вершиной в точке $(1, 0, 0)$. **510.** Двуполостный гиперболоид вращения вокруг оси Ox. **511.** Однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Oy. **515.** $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона образующих к плоскости xOy. **516.** а) Поверхность образована вращением линии $\begin{cases} z=\frac{1}{y^2} \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oz. б) Поверхность образована вокруг оси Oz синусоиды, идущей вдоль этой оси. **519.** Эллипсоид с центром в точке $(-2, 1, 0)$. **521.** Параболоид вращения с вершиной в точке $(-1, 1, -2)$. **522.** $M_1(2, -3, 0)$. $M_2(0, 0, 2)$. **523.** $M_1(4, -3, 2)$, $M_2(12, 3, 6)$. **525.** Эллипс $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{z}=1. \\ z=0 \end{cases}$ **526.** $(1, -1, 1)$, $(4, 4, -3)$. **527.** $a=-2$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. **537.** $2x^4-5x^2-10$. **538.** -35, -16, -7, 20. **539.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **540.** π, $\frac{\pi}{2}$, 0. **541.** x^2-5x+6. **544.** $(-\infty, +\infty)$. **545.** $[-1, 2]$. **546.** $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$. **547.** $(-\infty, -1)$ $(-1, 1)$ $(1, +\infty)$. **548.** $[1, 4]$. **549.** $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. **550.** $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **551.** $[-4, 4]$. **552.** $(-\infty, +\infty)$. **553.** $[1, 4]$. **556.** а) четная, б) четная, в) нечетная, г) ни четная, ни нечетная. **557.** а) Период $\frac{\pi}{2}$, б) период π, в) период 2π, г) непериодическая. **592.** $a_n=\frac{n}{n+2}$. **593.** $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. **594.** $a_n=\frac{1}{2n-1}$. **601.** $\frac{3}{5}$. **602.** 0,01. **603.** ∞. **604.** 0. **605.** 1. **606.** $\frac{1}{2}$. **607.** 0. **608.** 1. **609.** $\frac{1}{2}$. **610.** $-\frac{3}{2}$. **611.** 1. **630.** 0. **631.** ∞. **632.** 0. **633.** $\frac{3}{5}$. **634.** 1. **635.** $\frac{1}{64}$. **636.** 0. **637.** 1. **638.** $\frac{\pi}{6}$. **639.** $\frac{\pi}{6}$. **640.** ∞. **641.** ∞. **642.** 0. **643.** 0 при $x\to+\infty$, ∞ при $x\to-\infty$. **644.** 0.

645. 0. 652. -2. 653. 10. 654. $\frac{1}{8}$. 655. $\frac{3}{4}$, 656. $\frac{5}{2}$. 657. 4. 658. $-\frac{1}{2}$. 659. $\frac{a-1}{3a^2}$. 660. $-\frac{1}{2}$. 661. 1. 662. 4. 663. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 664. 0. 665. 0 при $x\to+\infty$, $+\infty$ при $x\to-\infty$. 666. $\frac{1}{2}$. 667. 1. 668. $\frac{2}{3}$. 669. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 670. 12. 671. -2. 672. $\frac{3}{2}$. 673. $\frac{2}{3}$. 674. 0. 675. 0. 676. $-\frac{3}{2}$. 677. $\frac{1}{2}$. 678. 0. 679. ∞. 680. ∞. 681. 1. 682. 2. 683. 0. 684. 1. 687. $\frac{5}{3}$. 688. $\frac{2}{3}$. 689. $\frac{\alpha}{\beta}$. 690. 0, если $n>m$; 1, если $n=m$; ∞, если $n<m$. 691. $\frac{1}{2}$. 692. $\sqrt{2}$. 693. $2\cos\alpha$. 694. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. 695. α. 696. $\frac{\alpha}{\beta}$. 697. 1. 698. $\frac{1}{2}$. 699. ∞. 703. e. 704. $e^{\frac{3}{2}}$. 705. 1. 706. e. 707. e. 708. e. 723. $C=1$, $k=2$. 724. $C=\frac{1}{2\ln 2}$, $k=1$. 725. $C=-\frac{1}{4}$, $k=3$. 726. $C=1$, $k=2$. 741. $\frac{1}{4}$. 742. $\cos^3\alpha$. 743. 0. 744. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 745. 0. 746. $\frac{1}{2}$. 747. $\frac{2}{3}$. 748. $\frac{1}{3}$. 749. $\frac{m}{n}$. 750. e. 751. 1. 752. 2. 753. $\frac{3}{2}$. 754. $\frac{m}{n}$. 755. 0. 756. $\frac{1}{a}$. 757. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 758. a. 759. $\frac{2a}{b}$. 760. $\ln\frac{a}{b}$. 761. $\frac{2\ln a}{\beta}$. 762. $\ln^2 a$. 763. $-\frac{5}{6}$. 764. π. 765. 1. 766. e. 767. 0. 768. 1. 769. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 770. $e\sqrt{e}$. 771. $e^{\operatorname{ctg} a}$. 772. $\frac{1}{e}$. 773. e. 774. $\frac{2}{5}$. 775. $\frac{2}{3}$. 776. 1. 777. $\frac{1}{3}$. 783. В точке $x=0$ — устранимый разрыв; функция $y=\begin{cases}\frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$. 784. В точке $x=0$ — устранимый разрыв; функция $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$. 785. В точке $x=1$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 1+} y=1$, $\lim\limits_{x\to 1-} y=-1$. 786. В точке $x=1$ устранимый разрыв: $\lim\limits_{x\to 1} y=\frac{\pi}{2}$. 787. В точке $x=0$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$, $\lim\limits_{x\to 0-} y=1$. 788. В точке $x=0$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y=1$, $\lim\limits_{x\to 0-} y=-1$. 789. В точках $x=0$, $x=1$, $x=-1$ разрыв второго рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-} y=+\infty$. 790. В точке $x=6$ разрыв второго рода: $\lim\limits_{x\to 6+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 6-} y=-\infty$, в точке $x=-6$ устранимый разрыв; функция $y=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36} & \text{при } x\neq -6\\ -\frac{1}{72} & \text{при } x=-6\end{cases}$ непрерывна в точке $x=-6$. 796. $10x^4-9x^2+4$. 797. $7x^2-5x+6$. 798. $2ax+b$. 799. $nx^{n-1}+3nx^2$. 800. $-\frac{16}{7x^2\sqrt[7]{x^2}}+\frac{2}{x^3}$. 801. $1-7\sqrt[6]{x}+16\sqrt[3]{x}-12\sqrt{x}$. 802. $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x\sqrt{x}}-\frac{12}{x^2\sqrt{x}}$. 803. $\ln x$. 804. x^2e^x. 805. $2e^x\sin x$. 806.

$-\frac{x^3}{\sin^2 x}+3x^2\operatorname{ctg} x$. 807. $\frac{3^x}{\sqrt{1-x^2}}+3^x\ln 3\arcsin x$. 808. $1+2x\operatorname{arctg} x$. 809. $\frac{2x-\sin x\cos x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x}$. 810. $\frac{1+2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$. 811. $\frac{2x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$. 819. $10(x^2+1)^9\,2x$. 820. $\frac{2ax+b}{3\sqrt[3]{(ax^2+bx+c)^2}}$. 821. $-e^{-x}$. 822. $3\cos 3x$. 823. $\frac{5}{\cos^2 5x}$. 824. $\frac{1}{\sin x\cos x}$. 825. $-4^{\cos x}\ln 4\sin x$. 826. $(2x+5)\cos(x^2+5x+1)$. 827. $-4\cos^3 x\sin x$. 828. $\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$. 829. $\frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$. 830. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 831. $-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. 822. $\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$. 833. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 834. $-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$. 835. $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$. 836. $\frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}$. 837. $-x^3e^{-x}$. 838. $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 839. $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$. 840. $\frac{(x^2+1)-x^2\ln x}{x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. 841. $\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\cos x\sin x$. 842. $\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}$. 843. $\operatorname{tg}^5 x$. 844. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 845. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. 846. $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 847. $4\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$. 848. $x^2\operatorname{sh} x+2x\operatorname{ch} x$. 849. $\frac{\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$. 850. $\frac{1}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$. 851. $2^{\operatorname{sh} x}\ln 2\operatorname{ch} x$. 859. $\frac{1}{\sin x}$. 860. $4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ln 4\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 861. $5\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^4\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 862. $\frac{8x\operatorname{tg}^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$. 863. $-\frac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$. 864. $2\operatorname{tg}^2 2x\,(3-2\sin^2 2x)$. 865. $\frac{\sin^2 x\left[3(1+2^{x^2})\cos x-2x\cdot 2^{x^2}\sin x\ln 2\right]}{(1+2^{x^2})^2}$. 866. $\frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. 867. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 868. $\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$. 869. $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. 870. $\frac{3\cos 3x\,(2\sin^2 3x+3\cos^2 3x)}{\sin^4 3x}$. 871. $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}$. 872. $-\frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}$. 873. $\frac{e^{\sin^2 x}\left[4(1+\operatorname{tg} x)\sin x\cos^3 x-1\right]}{2(1+\operatorname{tg} x)^{3/2}\cos^2 x}$. 874. $\frac{2}{\sin 2x\ln\operatorname{tg} x}$. 875. $\frac{\sqrt{5}(x^8+x^6+x^2+1)}{x^{10}+1}$. 876. $\frac{1}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$. 877. $4\operatorname{sh}^3(x^2+2x+1)\times\operatorname{ch}(x^2+2x+1)(2x+2)$. 878. $4^{\operatorname{ch}^3 x}\ln 4\cdot 3\operatorname{ch}^2 x\cdot\operatorname{sh} x$. 879. $\frac{1}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$. 885. $\frac{23}{24\sqrt[24]{x}}$. 886. $\frac{2}{\cos^2 2x}$. 887. $-\operatorname{ctg} x$. 888. $\frac{2x+3}{4(x^2+3x+1)}-\frac{2x}{3(x^2+4)}$. 889. $\frac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$. 890. $\frac{2\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}$. 891. $x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)^5\left(\frac{6}{x}+\frac{20x}{x^2+1}+\frac{15x^2}{x^3+1}\right)$. 892. $\sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}}\left[\frac{2x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{3x}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x\right]$. 893. $e^{x^2}\operatorname{tg}^3 x\arcsin x\left(2x+\frac{3}{\sin x\cos x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$. 894. $\frac{\sqrt{2}}{\cos x+\sin x}$. 895. $\frac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$. 896. $\frac{1}{x^3+1}$. 897.