Аналоговая электроника и техника измерений.

Переходные процессы в электрических цепях. Классический метод анализа .

Интеграл наложения.

Интеграл Дюамеля.

Переходные процессы в электрических цепях.

Переходный процесс - это переход между режимами работы цепи, отличающимися друг от друга амплитудами, фазами или частотами действующими в цепи ЭДС, или *конфигурацией элементов цепи*.

Введем дополнительный элемент цепи – ключ. Его характеристики: сопротивление в замкнутом состоянии равно нулю, в разомкнутом бесконечно, время перехода из одного состояния в другое равно нулю.

Момент перехода ключа из одного состояния в другое – момент коммутации, момент начала переходного процесса.

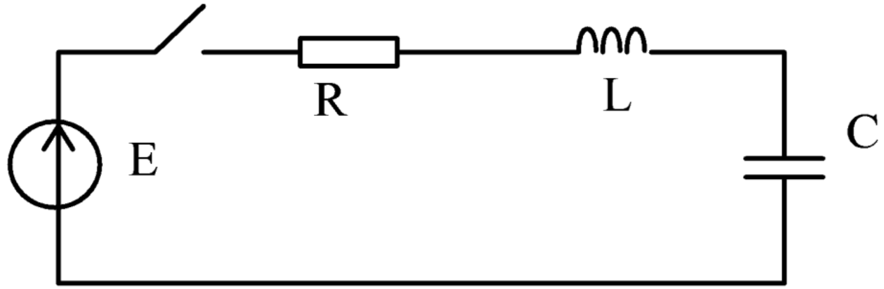
$t = 0$ - момент коммутации

$t = 0_-$ - момент непосредственно перед коммутацией

$t = 0_+$ - момент непосредственно после коммутации

Уравнение описывающее работу цепи.

По второму правилу Кирхгофа:



$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e(t)$$

Классический метод

Решение это сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения.

Решение представляется в виде:

$$u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}$$

$u_{\text{пр}}$ - в электротехнике называется принужденной составляющей

$u_{\text{св}}$ - в электротехнике называется свободной составляющей решения

$u_{\text{св}}$ - сумма экспонент. Показатели для экспонент находятся из решений *характеристического уравнения*:

$$p^2 LC + pRC + 1 = 0$$

Характеристическое уравнение

Характеристическое уравнение может быть получено из дифференциального, однако дифференциальное уравнение составлять необязательно, часто это очень трудоемкий процесс. Для составления характеристического уравнения запишем импеданс цепи (относительно источника ЭДС) ***для момента после коммутации***:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Проведем замену $j\omega = p$ и приравняем нулю:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = 0$$

После преобразования получим уравнение совпадающее с полученным ранее.

Свободная составляющая решения:

Вид корня характеристического уравнения	Вид свободной составляющей	Тип переходного процесса
Вещественные корни $p_1, p_2, \dots p_n$	$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$	Апериодический
Пары комплексно сопряженных корней $\alpha_k \pm j\omega_k$	$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$	Периодический

A_k - постоянные интегрирования

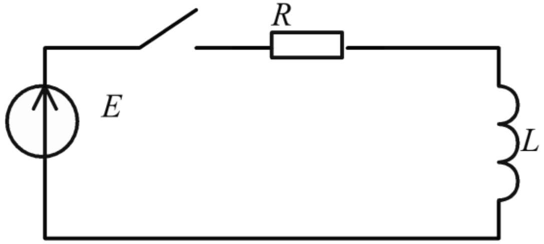
$\alpha_k < 0,$ постоянная времени $\tau = \frac{1}{p_k}$

Правила коммутации

Законы (правила) коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)\,, \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

Доказать правила коммутации достаточно просто – предположим, что $i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$, по второму правилу Кирхгофа:



$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

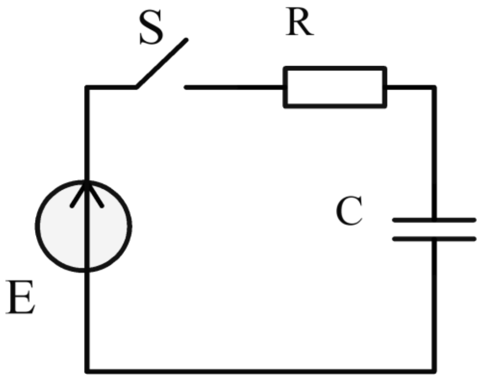
Неравенство токов приводит к обращению второго слагаемого справа в бесконечность – равенство выполнить невозможно, *следовательно предположение о неравенстве токов неверно.*

Правила коммутации

Аналогично для второго соотношения. Если $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$, то с учетом что

$$i_C = C\frac{du_c}{dt}$$

Запишем по второму правилу Кирхгофа:



$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

Конечное приращение напряжения за нулевой интервал времени приведет к обращению производной в бесконечность и невозможности выполнения уравнения составленного по второму правилу Кирхгофа – *следовательно предположение о неравенстве напряжений неверно.*

Определение постоянных интегрирования

Независимые начальные условия – ток (потокосцепление) катушки индуктивности и напряжение (заряд) конденсатора.

К зависимым начальным условиям относят значения остальных токов и напряжений в цепи.

Для уравнения первого порядка (переходный процесс в цепи с одним реактивным элементом):

$$A = u_{\text{св}}(0_+)$$

Для уравнения второго порядка **с действительными корнями**

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Продифференцируем это уравнение:

$$u'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Определение постоянных интегрирования

Для момента коммутации можно записать:

$$u_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2$$
$$u'_{\text{св}}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

$$A_1 = \frac{u'_{\text{св}}(0_+) - p_2 u_{\text{св}}(0_+)}{p_1 - p_2} \quad , \qquad A_2 = u_{\text{св}}(0_+) - A_1$$

Уравнение второго порядка, ***комплексные корни***

$$u_{\text{св}} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \psi)$$

$$u_{\text{св}}(0_+) = A \sin\psi$$

$$u'_{\text{св}}(0_+) = -A\alpha \sin\psi + A\omega \cos\psi$$

Порядок расчета переходного процесса классическим методом

1. Записать решение в виде суммы свободного и принужденного значений.
2. Определить принужденное и начальное значения.
3. Составить характеристическое уравнение, решить его определив вид корней.
4. Соответственно виду корней записать общий вид решения.
5. Определить постоянные интегрирования используя начальные условия и записать окончательный вид решения.

Временные методы анализа переходных процессов

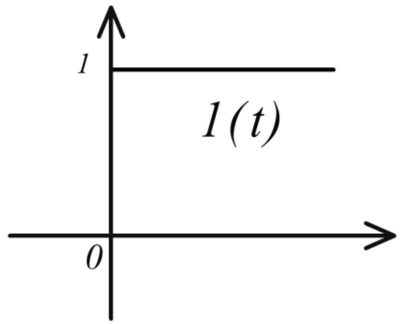
Импульсные воздействия.

Интеграл наложения.

Интеграл Дюамеля.

Импульсные функции. Функция Хэвисайта. Функция Дирака.

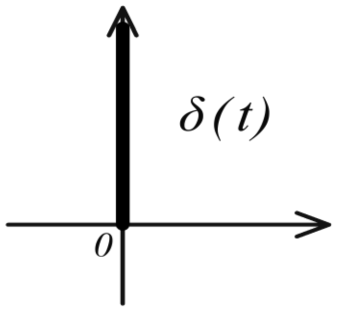
Функция Хэвисайта (единичная ступенчатая функция):



$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

Применение функции Хэвисайта: описание коммутации в цепи без применения ключа, представление сигналов как суммы элементарных воздействий (ступенек)

Функция Дирака (функция единичного импульса)



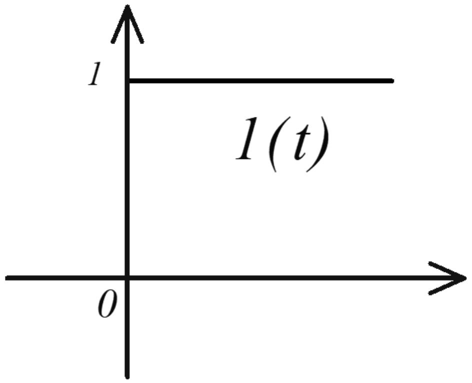
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \begin{cases} +\infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0; \end{cases}$$

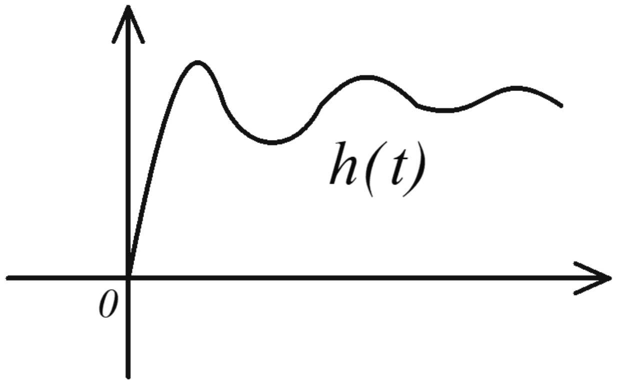
Применение функции Дирака: представление коротких импульсов

$$f(t) \approx \tau \cdot U_m \, \delta\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

Переходная характеристика

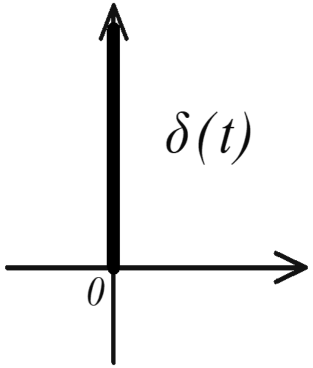
Переходной характеристикой или переходной функцией называют реакцию цепи на ступеньку напряжения амплитудой 1 В, обозначая ее как $h(t)$. По сути это переходный процесс с нулевыми начальными условиями, вызванный подачей на вход цепи ступеньки напряжения величиной 1 В.

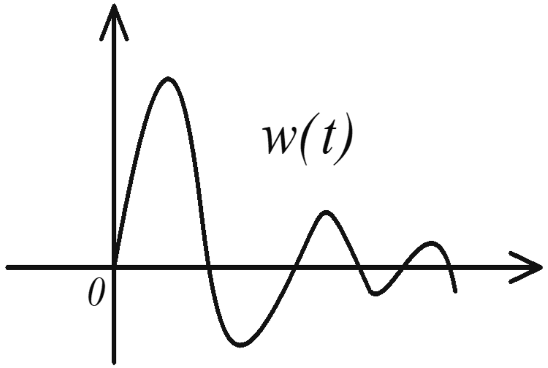




Временная характеристика

Временной или импульсной характеристикой цепи называют реакцию на сигнал в виде функции единичного импульса $\delta(t)$, обозначая ее как $w(t)$.





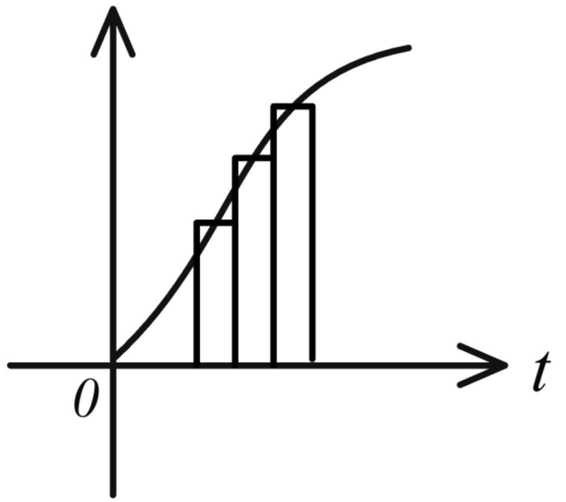
Связь переходной и импульсной характеристик:

$$h(t) = \int_0^t w(t)dt\,, \qquad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Временной метод. Интеграл наложения.

При воздействии сигнала произвольной формы на вход звена, его можно разложить на воздействия от суммы коротких импульсов. Если каждый из импульсов представить как:

$$U_{\text{вх}}(t)\Delta\tau\delta(t-\tau)$$



То по принципу наложения:

$$U_{\text{вых}}(t) \cong \sum U_{\text{вх}}(t)\Delta\tau w(t-\tau)$$

Устремив $\Delta\tau$ к нулю, получим интеграл наложения:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t U_{\text{вх}}(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

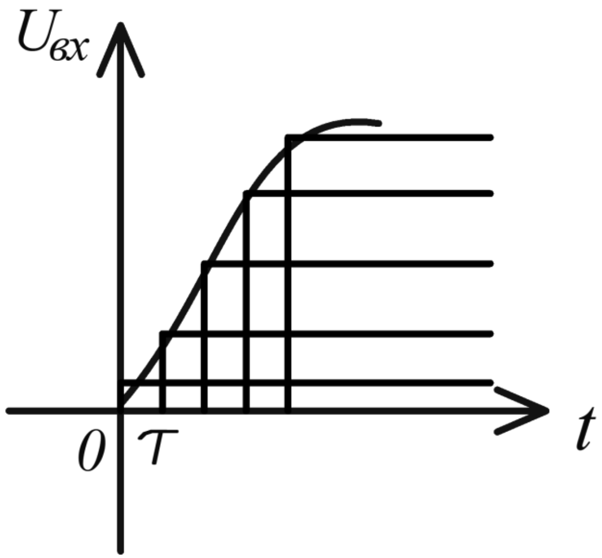
Связь между входной и выходной величинами с использованием импульсной характеристики цепи устанавливается с помощью свертки.

Временной метод. Интеграл Дюамеля.

Если представить воздействие не суммой коротких импульсов, а суммой ступенчатых функций, то для определения реакции цепи на воздействие, также используя принцип наложения, запишем:

$$U_{\text{вых}}(t) \cong \sum U_{\text{вх}}(t)h(t-\tau) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \sum \frac{U_{\text{вх}}(t)}{\Delta\tau}\Delta\tau h(t-\tau)$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t U_{\text{вх}}{}'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Полученное соотношение называется интегралом Дюамеля.

Формы записи интеграла Дюамеля.

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t {U_{\text{вх}}}'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t {U_{\text{вх}}}'(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t)h(0) + \int_0^t h'(\tau)U_{\text{вх}}(t-\tau)d\tau$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t)h(0) + \int_0^t h'(t-\tau)U_{\text{вх}}(\tau)d\tau$$

Форма интеграла Дюамеля выбирается исходя из удобства интегрирования.

Особенности записи интегралов Дюамеля и наложения.

Необходимо заметить что ***если функция описывающая входной импульс имеет разрывы***, то интегралы Дюамеля и наложения *заново записываются* относительно каждой точки разрыва (отдельно для каждого интервала).

Начальное значение на каждом интервале определяется как разница значений функции справа и слева от точки разрыва.

Вид (значение) функции, описывающей входной сигнал, и ее производной также определяется (или уточняется) для каждого интервала.