Содержание

1 Определение первообразной, общий вид первообразной, обозначение неопределенных интегралов, примеры 1

2 Основные свойства операции интегрирования 3

3 Таблица неопределенных интегралов 4

4 Формула интегрирования по частям, примеры 5

5 Замена переменной интегрирования, примеры 6

6 Интегрирование рациональных функций, примеры 7

1 Определение первообразной, общий вид первообразной, обозначение неопределенных интегралов, примеры

Рассмотрим задачу отыскания функции по известной ее производной.

Определение

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ числовой оси, если $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и при этом $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \Delta$.

Если $F(x)$ — это первообразная для $f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$: $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)\ \forall x \in \Delta$.

Лемма

Пусть функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке Δ числовой оси. Тогда любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ имеет на этом промежутке вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Доказательство

Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in \Delta$. Тогда справедливы равенства $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0\ \forall x \in \Delta$.

Таким образом, функция $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ дифференцируема на Δ и ее производная тождественно равна нулю на этом промежутке. Как доказано ранее, это означает, что функция $\varphi(x)$ тождественно постоянна на промежутке Δ. $\square$

Таким образом, первообразная данной функции на промежутке определена с точностью до аддитивной постоянной.

Понятие первообразной естественным образом расширяется на случай кусочно-дифференцируемых функций.

Определение

Пусть функция $F(x)$ непрерывна на промежутке Δ числовой оси и имеет в Δ производную всюду кроме, возможно, конечного числа точек, причем в точках существования производной $F'(x)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда $F(x)$ также называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ.

Доказанная выше лемма об общем виде дифференцируемой первообразной функции допускает следующее обобщение и на случай кусочно-дифференцируемой первообразной.

Лемма

Пусть функция $f(x)$ на промежутке Δ числовой оси имеет кусочно-дифференцируемую первообразную $F(x)$. Тогда любая другая кусочно-дифференцируемая первообразная для $f(x)$ имеет на этом промежутке вид $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Любая первообразная функции $f(x)$ называется также неопределенным интегралом от этой функции. Для обозначения первообразной используется символ $\int f(x)dx$. В этом обозначении символ $\int$ называется знаком интеграла, символы $f(x)dx$ называются подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией. Операция отыскания (взятия) неопределенного интеграла от заданной функции называется интегрированием этой функции.

Таким образом, если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедливо следующее равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Проинтегрировать функцию $f(x) = x^2$.

Решение. Рассмотрим дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Для любой точки x имеем равенство $F'(x) = x^2 2$. Следовательно, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ — это первообразная, или неопределенный интеграл для $f(x) = x^2$: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$. $\square$

Пример. Проинтегрировать функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Решение. Рассмотрим кусочно-дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $F(x) = |x|$. В любой точке $x \neq 0$ существует производная $F'(x)$ и при этом имеет место равенство $F'(x) = +1$ при $x > 0$, $F'(x) = -1$ при $x < 0$. Следовательно, $F'(x) = \operatorname{sgn} x$ для любой точки $x \neq 0$, или $\int \operatorname{sgn} x dx = |x| + C$. $\square$

2 Основные свойства операции интегрирования

Сформулируем основные свойства неопределенных интегралов.

I_1 Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке Δ первообразную. Тогда всюду на Δ, кроме, возможно, конечного числа точек, имеет место равенство $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x) \Leftrightarrow d(\int f(x)dx) = f(x)$;

I_2 Пусть функция $F(x)$ непрерывная и кусочно-дифференцируемая на промежутке Δ числовой оси. Тогда $F(x)$ является первообразной для функции $F'(x)$ на Δ, т.е. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$. Заметим, что здесь $F'(x)$ может быть не определена в конечном числе точек. В этих точках функцию $F'(x)$ можно задать (доопределить) произвольным образом, на справедливость интегральной формулы это никак не повлияет;

I_3 Аддитивность неопределенного интеграла. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на промежутке Δ первообразные. Тогда их сумма $f + g$ также имеет на промежутке Δ первообразную и при этом $\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

I_4 Однородность неопределенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке Δ первообразную. Тогда для любого вещественного $\alpha \neq 0$ произведение $\alpha f(x)$ также имеет на промежутке Δ первообразную и при этом $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$. При $\alpha = 0$ имеем равенство $\int 0 f(x)dx = \int 0 dx = C$.

Пример. Проинтегрировать функцию $f(x) = \alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x$, где α, β — вещественные числа.

Решение. Пользуясь свойствами первообразных, получаем $\int(\alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x)dx = \alpha \int x^2 dx + \beta \int \operatorname{sgn} x dx = \frac{\alpha}{3}x^3 + \beta|x| + C$. $\square$

3 Таблица неопределенных интегралов

Знание производных элементарных функций дает таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int 0 dx = C$;
2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C$;
4. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(|X|) + C$;
5. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$;
6. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C$, где $a > 0$, $a \neq 1$. При $a = e$ имеем из последнего равенства $\int e^x dx = e^x + C$;
7. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$;
8. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + C$;
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx = \ln(|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|) + C$.

Формулы 1–11 для неопределенных интегралов справедливы на тех промежутках числовой оси, на которых определены подынтегральные функции. Для доказательства формул 1–11 достаточно продифференцировать функции в правой части и убедиться, что полученные производные совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

Производная элементарной функции — это также элементарная функция. Однако первообразная элементарной функции не всегда является элементарной функцией. Если все же некоторый неопределенный интеграл является элементарной функцией, то говорят, что этот интеграл вычисляется.

4 Формула интегрирования по частям, примеры

Будем рассматривать сейчас первообразные, имеющие производные во всех точках промежутка без исключения.

Теорема (формула интегрирования по частям)

Пусть функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы на промежутке Δ. Тогда если произведение $g(x)f'(x)$ имеет на Δ первообразную, то и функция $f(x)g'(x)$ также имеет здесь же первообразную и при этом

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \qquad ((IbP))$$

Доказательство

Для доказательства формулы интегрирования по частям достаточно вычислить производную от функции в правой части равенства (IbP). $\square$

Иной вариант записи формулы (IbP):

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad ((IbP'))$$

Здесь $u = f(x)$, $dv = g'(x)dx$, т.е. $v = g(x)$.

Пример. Проинтегрировать функцию $\ln(x)$.

Решение. Возьмем в формуле интегрирования по частям $u = \ln(x)$ и $dv = dx$. Тогда $v = x$ и $du = \frac{dx}{x}$. После подстановки (IbP') получим $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{x}{2}dx = x\ln(x) - x + C$. $\square$

Пример. Вычислить интеграл $\int xe^x dx$.

Решение. Возьмем в формуле интегрирования по частям $u = x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $v = e^x$ и $du = dx$. После подстановки (IbP') получим $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$. $\square$

5 Замена переменной интегрирования, примеры

Для вычисления интегралов помимо интегрирования по частям часто применяется формула, связанная с заменой переменной интегрирования. По-прежнему предполагаем, что рассматриваемые здесь первообразные имеют производные во всех без исключения точках операционного промежутка.

Теорема (формула замены переменной интегрирования)

Пусть функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ определены на некоторых промежутках числовой оси, $\varphi(x)$ дифференцируема и при этом имеет смысл композиция $f(\varphi(x))$. Тогда произведение $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет в качестве первообразной функцию $F(\varphi(x))$, где $F(y)$ — это первообразная для $f(y)$:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy. \qquad ((ChV))$$

Доказательство

Сформулированная теорема сразу следует из формулы дифференцирования сложной функции. $\square$

Отметим, что равенство (ChV) называют еще формулой подстановки новой переменной интегрирования (подстановка $y = \varphi(x)$).

Пример. Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg}(x)dx$.

Решение. Полагаем $y = \sin(x)$, тогда в соответствии с равенством (ChV) имеем $\int \operatorname{ctg}(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln(|y|) + C = \ln(|\sin(x)|) + C$. $\square$

Равенство (ChV), записанное в обратном порядке, т.е. в виде

$$\int f(y)dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \qquad ((ChV'))$$

называют иногда методом замены переменной интегрирования. В качестве новой переменной при этом выступает $x = \varphi^{-1}(y)$, т.е. для применимости формулы (ChV') функция $y = \varphi(x)$ должна иметь обратную на рассматриваемом множестве изменения переменной y.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, где $a > 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = a\,\mathrm{sh}\,(t)$, где гиперболический синус $\mathrm{sh}\,(t)$ определяется равенством $\mathrm{sh}\,(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Вместе с синусом рассмотрим гиперболический косинус $\mathrm{ch}\,(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Несложно проверить, что $\mathrm{ch}^2\,(t) - \mathrm{sh}^2\,(t) = 1$. С учетом этого имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,(t)}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,(t)} dt = t + C$, где t находим как корень уравнения $a\,\mathrm{sh}\,(t) = x$. Подставляя сюда определение гиперболического синуса, получаем для e^t следующее квадратное уравнение: $(e^t)^2 - \frac{2x}{a} e^t - 1 = 0$. Решая это уравнение, находим $e^t = \frac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{a} \Leftrightarrow t = \ln\,(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \ln\,(a)$. Таким образом, получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = t + C = \ln\,(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$, где C — произвольная постоянная. $\square$

6 Интегрирование рациональных функций, примеры

Рациональной функцией (или дробью) называется отношение двух полиномов, т.е. функция вида $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где числитель задается равенством $Q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$, а знаменатель равенством $P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$. Если $m < n$, то дробь называется правильной.

Для интегрирования рациональных функций используется следующее известное свойство полиномов с вещественными коэффициентами.

Лемма (разложение полинома на множители)

Любой полином $P_n(x)$ степени n с вещественными коэффициентами однозначно представим в виде произведения полиномиальных сомножителей вида $(x-a)^k$ и $((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k$, где числа a, α, β вещественны, $\beta > 0$. При этом сумма степеней всех сомножителей в представлении полинома $P_n(x)$ равна его степени n.

Для того чтобы вычислить интеграл от рациональной функции следует сначала выделить ее целую часть. Если дробь правильная, то ее целая часть равна нулю. Если же степень m ее числителя не меньше степени n ее знаменателя, $m \geq n$, то целая часть дроби — это полином степени $m-n$. Интеграл от этого полинома легко вычисляется с помощью таблиц. Вычитая из рациональной функции ее целую часть, получаем правильную дробь. Эту правильную дробь методом неопределенных коэффициентов представляют в виде суммы простых дробей, т.е. дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ и $\frac{Ax+B}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$, $k \geq 1$.

Лемма (интегрирование правильных дробей)

При интегрировании дроби вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ получается либо дробь того же вида (при $k > 1$), либо функция вида $A \ln(|x-a|)$ (при $k = 1$). Первообразная простой дроби $\frac{Ax+B}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$, где $k \geq 1$, представляет собой линейную комбинацию простых дробей того же вида и, возможно, функции $\ln((x-\alpha)^2+\beta^2)$ или же функции $\operatorname{arctg}(\frac{x-\alpha}{\beta})$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = \frac{1}{x^2+1}$ и $dv = dx$. Тогда получим $\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \int x \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Выразив последнее слагаемое в итоговой правой части через все остальное и разделив результат на два, получаем $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C$. $\square$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2} dx$.

Решение. Под интегралом здесь находится правильная дробь $f(x)$, допускающая следующее разложение в сумму простых дробей: $f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Следовательно, справедливо равенство $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Подставляя сюда уже найденное в предыдущем примере значение последнего интеграла, получаем искомый результат $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$. $\square$