# Содержание

# 1 Наследование свойства интегрируемости модулем функции. Интегрируемость отношения, суммы, разности и произведения интегрируемых функций. Признак интегрируемости ограниченной на интервале функции

Интеграл Римана определен в случае конечного промежутка интегрирования на числовой оси. Таким образом, все рассматриваемые в текущей лекции промежутки интегрирования конечны. Сформулируем ряд свойств определенного интеграла Римана.

**Свойство 1**

Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке $\Delta$. Тогда функция $|f|$ также интегрируема на промежутке $\Delta$.

**Доказательство**

Пусть промежуток $\Delta'$ вложен в промежуток $\Delta$, а в остальном произволен, $\Delta' \subset \Delta$. Тогда для любой пары точек $x_1$ и $x_2$ из $\Delta'$ справедливо неравенство

$$||f(x_2)| - |f(x_1)|| \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \omega(f, \Delta'). \qquad ((1))$$

Здесь $\omega(f, \Delta')$ — это колебание функции $f(x)$ на промежутке $\Delta'$. Из оценки (1) получаем формулу

$$\omega(|f|, \Delta') \leq \omega(f, \Delta') \leq \omega(f, \Delta). \qquad ((2))$$

Возьмем последовательность $\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \Delta_2^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$ разбиений промежутка $\Delta$ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. Применяя на каждом из промежутков $\Delta_i^k$ оценку (2) и суммируя полученные неравенства, имеем $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(|f|, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leq \sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k|$.

Устремляя в этих оценках $k \to +\infty$ и учитывая, что при этом мажоранта в правой части стремится к нулю в силу интегрируемости функции

$f(x)$, заключаем, что и промежуточная неотрицательная сумма $\sum\limits_{i=1}^{N_k}\omega(|f|,\Delta_i^k)|\Delta_i^k|$ в пределе также стремится к нулю. Это и означает, что модуль $|f(x)|$ является интегрируемой функцией. □

### Свойство 2

Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке $\Delta$ и при этом $|f(x)| \geq C > 0$ $\forall x \in \Delta$, где $C$ — некоторая положительная постоянная. Тогда отношение $\frac{1}{f}$ — это также интегрируемая на промежутке $\Delta$ функция.

### Доказательство

Справедливы следующие оценки:

$$|\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}| = \frac{1}{|f(x_1)f(x_2)|}|f(x_2)-f(x_1)| \leq \frac{1}{C^2}|f(x_2)-f(x_1)| \leq \frac{1}{C^2}\omega(f,\Delta'). \qquad ((3))$$

Здесь $x_1$, $x_2$ — произвольные точки из $\Delta'$, а $\Delta'$ — произвольный вложенный в $\Delta$ промежуток, $\Delta' \subset \Delta$. Возьмем последовательность $\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \Delta_2^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$ разбиений промежутка $\Delta$ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. Применяя на каждом из промежутков $\Delta_i^k$ оценку (3), получаем неравенства $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{N_k}\omega(\frac{1}{f},\Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leq \frac{1}{C^2}\sum\limits_{i=1}^{N_k}\omega(f,\Delta_i^k)|\Delta_i^k|$.

Переходя в этих оценках к пределу при $k \to +\infty$ и учитывая, что мажоранта в правой части стремится при этом к нулю в силу интегрируемости функции $f(x)$, заключаем, что и промежуточная сумма $\sum\limits_{i=1}^{N_k}\omega(\frac{1}{f},\Delta_i^k)|\Delta_i^k|$ в пределе также стремится к нулю. Это и означает, что отношение $\frac{1}{f}$ — это также интегрируемая функция. □

### Свойство 3

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$. Тогда их сумма $f+g$, разность $f-g$ и произведение $f \cdot g$ также интегрируемы на промежутке $\Delta$.

**Доказательство**

Пусть $\Delta'$ — произвольный вложенный в $\Delta$ промежуток, $\Delta' \subset \Delta$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$0 \le \omega(f+g, \Delta') \le \omega(f, \Delta') + \omega(g, \Delta'). \tag{(4)}$$

Рассуждая таким же образом, как при доказательстве предыдущих свойств 1 и 1, получаем из (4) интегрируемость суммы $f+g$ на промежутке $\Delta$. Для разности $f-g$ целесообразно использовать оценку

$$0 \le \omega(f-g, \Delta') \le \omega(f, \Delta') + \omega(g, \Delta').$$

Оценим теперь колебание произведения $f \cdot g$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$ и, следовательно, обязаны быть ограничены на этом промежутке, т.е. существует такая конечная константа $M$, что $|f(x)| \le M$, $|g(x)| \le M$ $\forall x \in \Delta$. Учитывая эти неравенства, имеем далее

$$|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)| \le |g(x_1)(f(x_1)-f(x_2))+(g(x_1)-g(x_2))f(x_2)| \le M|f(x_1)-f(x_2)|+M|g(x_1 \tag{(5)}$$

Из оценки (5) получаем теперь

$$\omega(f \cdot g, \Delta') \le M\omega(f, \Delta') + M\omega(g, \Delta') \le M(\omega(f, \Delta) + M\omega(g, \Delta)). \tag{(6)}$$

Рассуждая далее таким же образом, как при доказательстве свойств 1 и 1, получаем из (6) интегрируемость произведения $f \cdot g$ на промежутке $\Delta$. $\square$

**Свойство 4**

Пусть функция $f(x)$ ограничена на конечном интервале $(a, b) \subset D_f$ и при этом интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, вложенном в интервал $(a, b)$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на $(a, b)$.

**Доказательство**

По условию существует такая конечная константа $M$, что $|f(x)| \le M$ $\forall x \in (a, b)$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выберем затем отрезок $[\alpha, \beta]$ вложенным в интервал $(a, b)$ таким образом, чтобы сумма расстояний $L_1 = \alpha - a > 0$ и $L_2 = b - \beta > 0$ не превышала отношения $\frac{\varepsilon}{4M}$, т.е. чтобы $L_1 + L_2 \le \frac{\varepsilon}{4M}$.

По условию функция $f(x)$ интегрируема на выбранном отрезке $[\alpha, \beta]$. Следовательно, существует разбиение $\tau([\alpha, \beta]) = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ такое, что $0 \le \sum\limits_{i=1}^{N} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим еще два интервала $\Delta_0 = (a, \alpha)$ и $\Delta_{N+1} = (\beta, b)$. Тогда множество $\{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N, \Delta_{N+1}\}$ задает некоторое разбиение интервала $(a, b)$. При этом справедливы соотношения

$$0 \le \sum_{i=0}^{N+1} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| = \omega(f, \Delta_0)|\Delta_0| + \omega(f, \Delta_{N+1})|\Delta_{N+1}| + \sum_{i=1}^{N} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| \le 2M(\alpha - a) + 2M(b - \beta) +$$

Величина $\varepsilon$ здесь произвольна и, следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на интервале $(a, b)$. $\square$

*Пример.* Функция $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\frac{1}{x}))$ интегрируема на любом интервале вида $(0, a)$. Интегрируемость $f(x)$ из примера следует из доказанного свойства 1, если заметить, во-первых, что $f(x)$ ограничена на интервале $(0, a)$, и, во-вторых, что $f(x)$ является ступенчатой функцией на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, a)$. Как вам уже известно, любая ступенчатая функция интегрируема по Риману.

# 2 Достаточные признаки интегрируемости функций

Функции, интегрируемые по Риману на заданном промежутке $\Delta$ числовой прямой, образуют в совокупности векторное (линейное) пространство. Размерность этого пространства равна бесконечности. Укажем ряд признаков, достаточных для принадлежности функции этому бесконечномерному классу интегрируемых по Риману функций.

### Лемма

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

### Следствие

Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на конечном интервале $(a, b)$, то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно непрерывна на конечном промежутке $\Delta$, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.

**Лемма**

Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

**Доказательство**

Для колебания монотонной функции $f(x)$ справедлива формула $\omega(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$. Возьмем последовательность $\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \Delta_2^k, \dots, \Delta_{N_k}^k\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. Из условий, что $\Delta_i^k \cap \Delta_j^k = \emptyset$ при $i \neq j$ получаем оценку $\sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k) \leq |f(b) - f(a)| = \omega(f, [a, b])$.

Пользуясь ею, имеем далее $\sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leq |\tau_k| \sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k) \leq |\tau_k||f(b)- f(a)|$. Полагая здесь $k \to +\infty$, получим в пределе равенство $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| = 0$. Это означает по определению, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.
□

**Следствие**

Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна на конечном интервале $(a, b)$, то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на конечном промежутке $\Delta$, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.

*Пример.* Функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ интегрируема на любом промежутке вида $(0, a]$. Это утверждение следует из ограниченности функции $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ на промежутке $(0, a]$ и непрерывности этой функции на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, a]$.

*Пример.* Пусть $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, где $[\frac{1}{x}]$ это целая часть $\frac{1}{x}$. Тогда $f(x)$ интегрируема на любом промежутке вида $(0, a]$. Интегрируемость следует из ограниченности функции $f(x)$, $0 \le f(x) \le 1$, и ее кусочной монотонности на любом отрезке вида $[\alpha, \beta] \subset (0, a]$.

*Пример.* Функция Римана $f(x)$ определяется следующим образом. Если $x = 0$ или $x$ иррациональное, то $f(x) = 0$. Если $x \ne 0$ и $x = \frac{p}{q}$, где $p$ целое, $q$ натуральное, и дробь $\frac{p}{q}$ несократимая, то $f(x) = \frac{1}{q}$. Оказывается, что определенная таким образом функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$.

# 3 Линейность, аддитивность и монотонность интеграла

Продолжим формулировать важнейшие свойства определенного интеграла.

### Свойство 5

Если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь в конечном числе точек из промежутка $\Delta$, то $f(x)$ интегрируема на $\Delta$ и при этом $\int\limits_{\Delta} f(x)dx = 0$.

### Свойство 6

Пусть $f(x)$ — ступенчатая функция на промежутке $\Delta$, т.е. существует разбиение $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$ промежутка $\Delta$ такое, что $f(x) = C_i$ $\forall x \in \Delta_i$ $i = 1, 2, \dots, N$, где $C_i$ — постоянные. Тогда $f(x)$ интегрируема на $\Delta$ и при этом

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} C_i |\Delta_i|. \qquad ((7))$$

### Теорема (линейность интеграла)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$. Тогда для любых постоянных $\lambda$ и $\mu$ линейная комбинация $\lambda f(x) + \mu g(x)$ также интегрируема на $\Delta$ и при этом справедливо равенство

$$\int\limits_{\Delta}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int\limits_{\Delta}f(x)dx+\mu\int\limits_{\Delta}g(x)dx. \qquad ((8))$$

**Доказательство**

Возьмем последовательность $\tau_k(\Delta)=\{\Delta_1^k,\Delta_2^k,\dots,\Delta_{N_k}^k\}$ разбиений промежутка $\Delta$ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k|\to 0$ при $k\to+\infty$. Для интегральных сумм Римана, соответствующих разбиению $\tau_k(\Delta)$, справедливо соотношение $\sigma(\lambda f+\mu g,\tau_k)=\lambda\sigma(f,\tau_k)+\mu\sigma(g,\tau_k)$. Переходя здесь к пределу при $k\to+\infty$, получаем в результате искомую формулу (8) для интеграла от линейной комбинации. $\Box$

**Следствие**

Если изменить значения интегрируемой функции $f(x)$ в конечном числе точек промежутка интегрирования, то интеграл от измененной функции по рассматриваемому промежутку равен интегралу от исходной $f(x)$.

**Доказательство**

Пусть значения $f(x)$ изменены в точках $\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ промежутка $\Delta$. Определим функцию $g(x)$ в точке $x_j$ равной изменению $f(x)$ в этой самой точке. Во всех остальных точках промежутка $\Delta$ полагаем $g(x)$ равной нулю. Имеем тогда по формуле (8): $\int\limits_{\Delta}(f(x)+g(x))dx=\int\limits_{\Delta}f(x)dx+\int\limits_{\Delta}g(x)dx$.

Последний интеграл равен нулю в силу формулы (7). Таким образом, интеграл от измененной функции $f(x)+g(x)$ обязан совпадать с интегралом от исходной функции $f(x)$. $\Box$

**Теорема (аддитивность интеграла)**

Пусть промежутки $\Delta$, $\Delta'$ и $\Delta''$ связаны соотношениями $\Delta=\Delta'\cup\Delta''$, $\Delta'\cap\Delta''=\emptyset$. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$, то

$$\int\limits_{\Delta}f(x)dx=\int\limits_{\Delta'}f(x)dx+\int\limits_{\Delta''}f(x)dx. \qquad ((9))$$

**Следствие**

Если интегрируемую на интервале $(a,b)$ функцию $f(x)$ доопределить произвольным образом в крайних точках $a$ и $b$, то интегралы по промежуткам $(a,b)$, $[a,b]$, $[a,b)$ и $(a,b]$ совпадают друг с другом.

В силу последнего утверждения интегралы по всем четырем промежуткам $(a,b)$, $[a,b]$, $[a,b)$ и $(a,b]$ обозначаются одним и тем же символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Теорема (монотонность интеграла)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$ и при этом $f(x) \neq g(x)$ $\forall x \in \Delta$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx \leq \int\limits_{\Delta} g(x)dx.$$

**Доказательство**

Утверждение теоремы получается предельным переходом по $k \to +\infty$ в неравенстве для интегральных сумм Римана: $\sigma(f,\tau_k) \leq \sigma(g,\tau_k)$. Здесь $\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \Delta_2^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$ — это последовательность разбиений промежутка $\Delta$ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. $\square$

**Следствие**

Если функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на промежутке $\Delta$, то $\int\limits_{\Delta} f(x)dx \leq 0$.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$, то

$$|\int\limits_{\Delta} f(x)dx| \leq \int\limits_{\Delta} |f(x)|dx. \qquad ((10))$$

**Доказательство**

Из условия, что $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$ следует интегрируемость здесь же модуля $|f|$. При этом $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\ \forall x \in \Delta$.

Из этих оценок в силу монотонности интеграла следуют соотношения $-\int\limits_{\Delta} |f(x)|dx \le \int\limits_{\Delta} f(x)dx \le \int\limits_{\Delta} |f(x)|dx$. Это и означает справедливость неравенства (10). $\square$

**Следствие**

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$ и при этом $m \le f(x) \le M\ \forall x \in \Delta$. Тогда для интеграла от $f(x)$ справедливы неравенства $m|\Delta| \le \int\limits_{\Delta} f(x)dx \le M|\Delta|$.

# 4 Интегральная теорема о среднем

Востребованное свойство определенных интегралов часто формулируется как теорема о среднем для этих интегралов.

**Теорема (интегральная теорема о среднем)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $\Delta$, функция $f(x)$ непрерывна на $\Delta$, а функция $g(x)$ неотрицательна на $\Delta$. Тогда существует такая точка $\xi$ из $\Delta$, что

$$\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_{\Delta} g(x)dx. \qquad ((11))$$

**Доказательство**

Введем обозначения $m = \inf\limits_{x\in\Delta} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)$. Обе эти величины конечны в силу непрерывности $f(x)$ на отрезке $\Delta$. Из неотрицательности на $\Delta$ функции $g(x)$ следует, что $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)\ \forall x \in \Delta$. Интегрируя эти неравенства, получим $m\int\limits_{\Delta} g(x)dx \le \int\limits_{\Delta} f(x)g(x)dx \le M\int\limits_{\Delta} g(x)dx$.

Если $\int\limits_{\Delta} g(x)dx = 0$, то из последних двух неравенств следует, что $\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)dx = 0$, и поэтому равенство (11) справедливо.

Пусть теперь $\int\limits_{\Delta} g(x)dx > 0$. Тогда имеем

$$m \leq \frac{\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)dx}{\int\limits_{\Delta} g(x)dx} \leq M. \tag{(12)}$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Delta$. Следовательно, она принимает на $\Delta$ все значения из отрезка $[m, M]$. В частности, из (12) следует существование точки $\xi$ из $\Delta$, удовлетворяющей равенству (11). $\square$

# 5 Интеграл по ориентированному промежутку. Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, оценка приращения

Пусть функция $f(x)$ интегрируема по промежутку $\Delta$ числовой прямой, т.е. определен интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)dx$. Если $\Delta = [a, b]$, где $a < b$, то этот же интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)dx$ и называется интегралом от $f(x)$ по $dx$ от $a$ до $b$.

Понятие интеграла распространяется также на случай, когда интегрирование ведется от большей точки к меньшей, т.е. от $b$ до $a$, где $a < b$. В этом случае по определению полагается, что $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_{\Delta} f(x)dx$, а соответствующий интеграл, как говорят, является интегралом от $b$ до $a$ по $dx$. В частности, при $b = a$ имеем $\int\limits_a^a f(x)dx = -\int\limits_a^a f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

**Определение**

Интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_b^a f(x)dx$ называются интегралами по ориентированным промежуткам.

На интегралы по ориентированным промежуткам распространяются основные свойства определенного интеграла.

**Свойство 1**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$. Тогда для любых постоянных $\lambda$ и $\mu$ справедливы равенства $\int\limits_a^b(\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx$, где $a$ и $b$ — любые числа из промежутка $\Delta$.

**Свойство 2**

Если функция $f(x)$ интегрируема на $\Delta$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a$, $b$, $c$ — любые числа из промежутка $\Delta$.

**Свойство 3**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\Delta$, функция $f(x)$ непрерывна на $\Delta$, а функция $g(x)$ не меняет знак на $\Delta$. Тогда для любых точек $a$ и $b$ из $\Delta$ существует точка $\xi$, лежащая между $a$ и $b$ и такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{$(MT')$}$$

В частности, при $g(x) = 1$ имеем равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Подчеркнем, что в свойствах 5, 5 и 5 числа $a$ и $b$ выбираются из промежутка $\Delta$ произвольным образом, т.е. возможны три случая: $a < b$, $a = b$ и $a > b$. В равенстве 5 точки $a$, $b$, $c$ выбираются в промежутке $\Delta$ также произвольным образом. При этом возможны все шесть случаев: $a \le b \le c$, $a \le c \le b$, $b \le a \le c$ и т.д.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке $\Delta$. Тогда для любой точки $x$ из $\Delta$ имеет смысл следующая функция: $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$, $x \in \Delta$. Здесь $c$ — точка из $\Delta$. Эта функция $F(x)$ называется интегралом с переменным верхним пределом. Аналогично, функция $\Phi(x) = \int\limits_x^c f(t)dt$, $x \in \Delta$ называется интегралом с переменным нижним пределом.

Отметим, что для всех $x$ и $c$ из $\Delta$ интегралы $F(x)$ и $\Phi(x)$ заведомо определены: по условию функция $f(t)$ интегрируема на $\Delta$, следовательно, $f(t)$ интегрируема и на любом промежутке $\Delta'$, вложенном в $\Delta$.

Интегралы $F(x)$ и $\Phi(x)$ связаны равенством $\Phi(x) = \int\limits_x^c f(t)dt = -F(x) = -\int\limits_c^x f(t)dt$. Это позволяет нам ограничиться далее рассмотрением только интегралов с переменным верхним пределом.

**Теорема (о приращении интеграла)**

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке $\Delta$ и $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$, где точки $c$ и $x$ принадлежат $\Delta$. Тогда справедлива оценка

$$|F(x_2) - F(x_1)| \le |f| \cdot |x_2 - x_1|, \ \forall x_1, x_2 \in \Delta.$$

Здесь $|f| = \sup\limits_{x \in \Delta} |f(x)|$.

**Доказательство**

Заметим, что из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману следует ограниченность этой функции на промежутке $\Delta$, т.е. оценка $|f| = \sup\limits_{x \in \Delta} |f(x)| < +\infty$. Для любых двух точек $x_1$ и $x_2$, принадлежащих $\Delta$, имеют место соотношения $|F(x_2) - F(x_1)| = |\int\limits_c^{x_2} f(t)dt - \int\limits_c^{x_1} f(t)dt| = |\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt \le \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \le \int\limits_{x_1}^{x_2} (\sup\limits_{y \in \Delta} |f(y)|)dt = |f| \cdot |x_2 - x_1|$. Это и есть искомая оценка приращения интеграла $F(x)$ с переменным верхним пределом. $\square$

**Следствие**

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$, то интеграл $F(x)$ с переменным верхним пределом является непрерывной на промежутке $\Delta$ функцией.

Заметим еще, что теорема о приращении интеграла с переменным пределом допускает следующую эквивалентную переформулировку:

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\Delta$, то для любого промежутка $\Delta'$ такого, что $\Delta' \subset \Delta$, имеет место неравенство $|\int\limits_{\Delta'} f(x)dx| \leq |f| \cdot |\Delta'|$.

# 6 Производная по верхнему пределу интегрирования. Следствия

Интеграл с переменным пределом задает на промежутке не просто непрерывную функцию, но функцию, имеющую здесь же первую производную.

**Теорема (о дифференцируемости интеграла)**

Если интегрируемая на промежутке $\Delta$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ из $\Delta$, то интеграл $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$, где $c \in \Delta$, имеет в точке $x_0$ производную и при этом $F'(x_0) = f(x_0)$.

**Доказательство**

Для точки $x$ из $\Delta$, $x \neq x_0$, рассмотрим приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta F = F(x) - F(x_0)$. Имеют место равенства $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^x f(t)dt$; $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^x f(x_0)dt$. Вычитая второе равенство из первого, получаем $|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)| = \frac{1}{|\Delta x|}|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt|$.

Из непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $x$ из пересечения промежутка $\Delta$ с окрестностью $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнена оценка $|f(x) -$

$f(x_0)| < \varepsilon$. Для всех таких $x$, $x \neq x_0$, имеем $|\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x_0)| \leq \frac{1}{|\Delta_x|} \int\limits_{x_0}^{x} |f(t) - F(x_0)|dt \leq \frac{\varepsilon}{|\Delta x|} \int\limits_{x_0}^{x} dt = \varepsilon$.

Это означает, что существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$. Следовательно, интеграл $F(x)$ имеет в точке $x_0$ производную, причем $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

**Следствие**

Для любой непрерывной на промежутке $\Delta$ функции $f(x)$ интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(t)dt$, $x \in \Delta$ является для $f(x)$ первообразной на $\Delta$.

Из теоремы о дифференцируемости интеграла заключаем также, что

1. Любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную;
2. Для любой непрерывной на промежутке $\Delta$ функции $f(x)$ операция ее интегрирования с переменным верхним пределом является обратной к операции дифференцирования, т.е. $\frac{d}{dx}(\int\limits_{c}^{x} f(t)dt) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$;
3. Справедлива также следующая формула для производной по нижнему пределу: $\frac{d}{dx}(\int\limits_{x}^{c} f(t)dt) = -f(x)$, $\forall x \in \Delta$.

# 7 Формула Ньютона Лейбница. Примеры и следствия

Операцию интегрирования с переменным пределом весьма удобно использовать при вычислении определенных интегралов по ориентированным промежуткам.

**Теорема (формула Ньютона Лейбница)**

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет здесь же первообразную $F(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad ((NL))$$

**Доказательство**

Пусть сначала $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,b)$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x$ из $(a,b)$. Пусть $\tau([a,b]) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N\}$ задает разбиение отрезка $[a,b]$ с узлами $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$.

Вэтом случае приращение первообразной на отрезке $[a,b]$ представимо в виде $F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^{N}(F(x_i) - F(x_{i-1}))$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем. Пользуясь этой теоремой, получаем $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$: $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$. Подставляя эти равенства в предыдущую формулу, получаем

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i \equiv \sigma(f;\tau,\xi). \qquad ((13))$$

Здесь $\sigma(f;\tau,\xi)$ обозначает интегральную сумму Римана для функции $f(x)$, соответствующую разбиению $\tau$ отрезка $[a,b]$ и вектору $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$.

По условию функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и, следовательно, существует предел интегральных сумм Римана: $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f;\tau,\xi) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Пользуясь этим равенством и переходя к пределу при $|\tau| \to 0$ в формуле (13), получим в итоге искомую формулу $(NL)$.

Пусть теперь $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет первую производную $F'(x) = f(x)$ в точках интервала $(a,b)$ за исключением, возможно, конечного числа точек $c_1, c_2, \cdots, c_{N-1}, c_N$. Предполагаем, что $c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{N-1} < c_N = b$. В точках $c_j$ производная $F'(x)$ может либо не существовать, либо не совпадать с $f(c_j)$.

К каждому из отрезков $[c_{i-1}, c_i]$ применим формулу $(NL)$: $\int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx =$

$F(c_i) - F(c_{i-1})$. Суммируя эти равенства по всем $i$, получаем $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{N} (F(c_i) - F(c_{i-1})) = F(b) - F(a)$. Таким образом, формула $(NL)$ справедлива и во втором рассматриваемом случае. $\square$

**Определение**

Равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется формулой Ньютона Лейбница.

Вместо разности $F(b) - F(a)$ часто пишут $F(x)\,|_a^b$.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и имеет здесь же первообразную $F(x)$, то

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x f(x)dx. \tag{(14)}$$

**Доказательство**

Равенство (14) получается из формулы $(NL)$, если взять в последней $b = x$. $\square$

**Следствие**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет здесь же первообразную $F(x)$, то найдется такая точка $\xi$ из интервала $(a, b)$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \tag{(15)}$$

**Доказательство**

Равенство (15) следует из формулы Ньютона Лейбница и теоремы Лагранжа о среднем значении, примененной к приращению $F(b) - F(a)$. $\square$

*Пример.* По формуле Ньютона Лейбница получаем следующие равенства: $\int\limits_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\mid_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\int\limits_0^\pi \sin^2(x)dx = \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos(2x)dx = \frac{x}{2}\mid_0^\pi - \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2}\mid_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

# 8 Формула интегрирования по частям для определенных интегралов

Эффективное средство для подсчета интегралов по ориентированному промежутку дает формула интегрирования по частям.

**Теорема (интегрирование по частям)**

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и кусочно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Если при этом производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на том же отрезке, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad ((IbP))$$

**Доказательство**

В условиях теоремы произведение $F(x) = u(x)v(x)$ является первообразной для функции $F(x) = u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$, причем $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Применяя к паре $f(x)$ и $F(x)$ формулу Ньютона Лейбница, получаем $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\mid_a^b$, т.е. искомую формулу интегрирования по частям. $\square$

# 9 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

В качестве примера применения формулы интегрирования по частям для определенных интегралов получим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

**Теорема (формула Тейлора)**

Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до порядка $n$ включительно, причем производная $f^{(n)}(x)$ кусочно дифференцируема, а производная $f^{(n+1)}(x)$ при этом интегрируема на $[a,b]$. Тогда для любой точки $x_0$ из отрезка $[a,b]$ выполняется следующее равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

**Доказательство**

Воспользуемся индукцией по параметру $n$ числу слагаемых в правой части доказываемой формулы.

При $n=0$ доказываемая формула принимает вид $f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)dt$, т.е. совпадает с уже доказанной формулой Ньютона Лейбница.

Далее заметим, что при всех $k$, $1\le k\le n$, согласно формуле интегрирования по частям имеют место равенства $\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}dt=-\frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(k)}(t)d((x-t)^k)=-\frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(x-t)^k\,\Big|_{t=x_0}^{t=x}+\frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt$. В частности, при $k=n$ имеем

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \qquad ((16))$$

Предположим теперь, что при некотором натуральном $n-1$ выполнено искомое равенство $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$. Выразив интеграл в правой части по формуле (16), получим $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$, т.е. искомую формулу, соответствующую натуральному $n$.

В соответствии с принципом математической индукции заключаем, что формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме верна.
□