3.53. Функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом $P(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$. При этом $f(0,0) = 1, f(1,0) = 2, f(0,1) = 4, f(1,1) = 3$. Найти $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3.54. Пусть $P(x_1, x_2)$ — многочлен от двух переменных степени не выше n по каждой переменной и $P\left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) = 0,\ k, m = 0, 1, ..., n$. Доказать, что $P(x_1, x_2) \equiv 0$.

3.2. Многочлены Чебышёва

Имеется несколько способов определения последовательности многочленов Чебышёва первого рода. Рассмотрим некоторые из них.

а) *Рекуррентное соотношение*:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

б) *Тригонометрическая форма.* При любом η имеем

$$\cos\left((n+1)\eta\right) = 2\cos\eta\cos(n\eta) - \cos\left((n-1)\eta\right).$$

Полагая $\eta = \arccos x$, получаем

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Простое следствие: $|T_n(x)| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$.

в) *Разностное уравнение.* Рекуррентное соотношение является разностным уравнением по переменной n. Ему соответствует характеристическое уравнение $\mu^2 - 2x\mu + 1 = 0$. Следовательно, $\mu_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. При $x \neq \pm 1$ справедливо $T_n(x) = C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n$. Из начальных условий получаем $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, что приводит к формуле

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right).$$

В силу непрерывности многочлена формула верна и при $x = \pm 1$.

Отметим, что все многочлены $T_{2n}(x)$ — четные, а $T_{2n+1}(x)$ — нечетные. При этом коэффициент при старшем члене равен 2^{n-1}.

3.55. Доказать следующие свойства многочленов Чебышёва:

1) $T_{2n}(x) = 2\,T_n^2(x) - 1$;

2) $I_{mn} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } n = m \neq 0, \\ \pi & \text{при } n = m = 0; \end{cases}$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{x} T_n(y)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\,T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}\,T_{n-1}(x)\right) - \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}, \ n \geqslant 2$;

4) $\left(1 - x^2\right) T_n''(x) - x\,T_n'(x) + n^2\,T_n(x) = 0, \quad n \geqslant 0$.

◁ 1) Следствием тригонометрического тождества

$$\cos\left((n+m)\eta\right) + \cos\left((n-m)\eta\right) = 2\cos(n\eta)\cos(m\eta)$$

является полиномиальное тождество

$$2T_n(x)\,T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x), \quad n \geqslant m \geqslant 0\,,$$

из которого при $n = m$ следует искомое выражение.

2) Положим $x = \cos\eta$, тогда $dx = -\sin\eta d\eta$ и

$$I_{mn} = \int\limits_0^{\pi} \cos(n\eta)\cos(m\eta)d\eta = \frac{\pi}{2}\left(\delta^0_{n-m} + \delta^0_{n+m}\right).$$

3) Так как $\dfrac{T_n'(x)}{n} = \dfrac{-\sin(n\arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}}$, то, полагая $x = \cos\eta$, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\,T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}\,T'_{n-1}(x)\right) =$$

$$= \frac{\sin((n+1)\eta) - \sin((n-1)\eta)}{2\sin\eta} = \frac{2\cos(n\eta)\sin\eta}{2\sin\eta} = T_n(x)\,;$$

теперь искомое равенство справедливо с точностью до постоянной, которую легко определить, поскольку $T_n(-1) = (-1)^n$.

4) Непосредственно дифференцированием вычисляется $T_n''(x)$; напомним, что $(\arccos x)' = -(1-x^2)^{-1/2}$. ▷

3.56. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что $T_{2n}(y) = (-1)^n T_{2n}(x)$.

3.57. Найти все нули многочленов Чебышёва $T_n(x)$.

О т в е т: $x_m = \cos\dfrac{\pi\,(2m-1)}{2n}$, где $m = 1, \ldots, n$ (все нули лежат внутри отрезка $[-1, 1]$, их ровно n).

3.58. Найти все экстремумы многочлена Чебышёва $T_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

О т в е т: $x_{(m)} = \cos\frac{\pi m}{n}$, $m = 0, \ldots, n$ (на $[-1, 1]$ имеется $n+1$ экстремум и $T_n(x_{(m)}) = (-1)^m$).

3.59. Доказать, что *приведенный многочлен Чебышёва* $\overline{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ наименее уклоняется от нуля среди всех многочленов $P_n(x)$ со старшим коэффициентом 1 на отрезке $[-1, 1]$, т. е.

$$\|P_n(x)\| = \max_{[-1,1]} |P_n(x)| \geqslant \max_{[-1,1]} |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}\,.$$

◁ Пусть $\|P_n(x)\| < 2^{1-n}$. Тогда в точках экстремума многочлена Чебышёва знак разности $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ определяется знаком $\overline{T}_n(x)$:

$$\operatorname{sign}\left(\overline{T}_n(x_{(m)}) - P_n(x_{(m)})\right) = \operatorname{sign}\left((-1)^m 2^{1-n} - P_n(x_{(m)})\right) = (-1)^m\,.$$

При этом указанная разность является отличным от нуля многочленом степени $n-1$, но имеет n нулей, поскольку $n+1$ раз меняет знак в точках экстремума, т. е. $P_n(x) \equiv T_n(x)$, что невозможно в силу $\|P_n\| < \|T_n\|$. Полученное противоречие завершает доказательство. ▷

3.60. Доказать единственность многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[-1, 1]$ среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1.

3.61. Найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1.

$\triangleleft$ Выполним линейную замену переменных $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}x'$ для отображения отрезка $[-1, 1]$ в заданный отрезок $[a, b]$. Многочлен $\overline{T}_n(x')$ при этом преобразуется в многочлен $\overline{T}_n\left(\dfrac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом $\left(\dfrac{2}{b-a}\right)^n$. В результате перенормировки и использования схемы доказательства из 3.59 имеем

$$\overline{T}_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right). \qquad \triangleright$$

3.62. Пусть $\omega_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Показать, что при любом выборе узлов $x_i \in [a, b]$ имеет место неравенство $\|\omega_n(x)\| \geqslant (b-a)^n\, 2^{1-2n}$. Сравнить полученный результат с аналогичным для равномерного распределения узлов.

У к а з а н и е. Использовать решения 3.61 и 3.5.

3.63. Пусть $0 \leqslant a < b$. В классе многочленов $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющих условию $P_n(0) = c \neq 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ и вычислить его равномерную норму.

О т в е т: $P_n^*(x) = c\,\dfrac{T_n\left(\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}\right)}{T_n\left(-\dfrac{a+b}{b-a}\right)}$, $\|P_n^*(x)\| = \dfrac{2\,c}{q_1^n + q_1^{-n}}$, $q_1 = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

3.64. Пусть $k \leqslant n$, $0 \leqslant a < b$. В классе многочленов $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющих условию $P_n^{(k)}(0) = c \neq 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$.

О т в е т: $P_n^*(x) = c\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^k \dfrac{T_n\left(\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}\right)}{T_n^{(k)}\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)}$.

3.65. Среди всех многочленов $P_n(x) = x^n + \ldots$ степени $n \geqslant 2$, удовлетворяющих условиям $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$.

О т в е т: $P_n^*(x) = 2^{1-n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n}\right)^{-n} T_n\left(x\cos\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

3.66. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени n и $\max\limits_{x\in[-1,1]}|P_n(x)| = M$. Доказать, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| \geqslant 1$, выполняется неравенство $|P_n(x)| \leqslant M\,|T_n(x)|$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва степени n.

Указание. Предположив противное, т. е. допустив существование такого ξ, $|\xi| \geqslant 1$, что $|P_n(\xi)| > M\,|T_n(\xi)|$, получить противоречие, доказав, что у полинома $Q_n(x) = \dfrac{P_n(\xi)}{T_n(\xi)}\,T_n(x) - P_n(x)$, как минимум, $n+1$ нуль.

3.67. Для производных многочлена Чебышёва получить представления следующего вида:

$$\frac{T'_{2n}}{2n} = 2(T_{2n-1} + T_{2n-3} + \cdots + T_1), \quad \frac{T'_{2n+1}}{2n+1} = 2(T_{2n} + T_{2n-2} + \cdots + T_2) + 1\,.$$

Указание. Воспользоваться третьим свойством из 3.55 в виде

$$\frac{T'_n}{n} = 2T_{n-1} + \frac{T'_{n-2}}{n-2}\,, \quad n > 2\,.$$

3.68. Пусть функция $f(x)$ представима при $|x| \leqslant 1$ в виде $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$, где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, $T_k(x)$ — многочлены Чебышёва. Доказать, что для всех $x \in [-1,1]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\,(a_{k-1} - a_{k+1})T_k(x) + a_0 - \frac{a_1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k^2 - 1}\,.$$

3.69. Вычислить значение многочлена Чебышёва n-й степени в точке: 1) $x = \frac{1}{2}$; 2) $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: 1) $T_{3k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k, \quad T_{3k\,\pm\,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2}$;

2) $T_{3k}\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad T_{3k\,\pm\,1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,.$

3.70. Вычислить значение первой производной многочлена Чебышёва n-й степени в точке: 1)$x = 1$; 2)$x = -1$.

Ответ: 1) $T'_n(1) = n^2$; 2)$T'_n(-1) = (-1)^{n+1} n^2\,.$

3.71. Функция $f(x) = \sin 2x$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке $[0,2]$ по n чебышёвским узлам: $x_i = 1 + \cos\dfrac{2i-1}{2n}\,\pi$, $i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{3}\,10^{-p}$, если $n = 6\,.$

Ответ: $p = 2\,.$

3.72. Функция $f(x) = \cos x$ приближается многочленом Лагранжа на $[-1,1]$ по n чебышёвским узлам: $x_i = \cos\dfrac{2i-1}{2n}\,\pi$, $i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon \leqslant 10^{-p}$, если $n = 5\,.$

Ответ: $p = 3\,.$

3.73. Функция $f(x) = \mathrm{e}^x$ приближается на $[0, 1]$ интерполяционным многочленом степени 3 с чебышёвским набором узлов интерполяции: $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{8}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит величины $\mathrm{e}\cdot 10^{-3}$.

3.74. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + 2\,x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[3, 5]$.

Ответ: $P(x) = 4\;\dfrac{T_3(x-4)}{T_3^{(2)}(-4)} = -\dfrac{x^3}{6} + 2x^2 - \dfrac{63x}{8} + \dfrac{61}{6}$.

3.75. Среди всех многочленов вида $a_2x^2 + x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Ответ: $a_2 = -a_0$ при любом $|a_0| \leqslant \frac{1}{2}$.

3.76. Среди всех многочленов вида $5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 2]$.

Ответ: $P(x) = \frac{5}{32}\;T_3(2x-3) = \frac{5}{32}\,(32x^3 - 144x^2 + 210x - 99)$.

3.77. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 3]$.

Ответ: $P(x) = 4\;\dfrac{T_3(x-2)}{T_3(-2)} = -\left(\dfrac{8x^3}{13} - \dfrac{48x^2}{13} + \dfrac{90x}{13} - 4\right)$.

3.78. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + a_2x^2 + 3\,x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[2, 4]$.

Ответ: $P(x) = 3\;\dfrac{T_3(x-3)}{T_3'(-3)} = \dfrac{4x^3}{35} - \dfrac{36x^2}{35} + 3x - \dfrac{99}{35}$.

3.79. Доказать следующие представления многочленов Чебышёва:

1) $T_n(x) = \dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^{n-1/2}\right)$, $n \geqslant 0$;

2) $T_n(x) = \dfrac{1}{n!}\,\dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}\right)\Bigg|_{t=0}$, $n \geqslant 0$;

3) $T_n(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{1-t^2}{1-2tx+t^2}\right)\Bigg|_{t=0}$, $n \geqslant 1$;

4) $T_n(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(n-1)!}\,\dfrac{d^n}{dt^n}\left(\ln(1-2tx+t^2)\right)\Big|_{t=0}$, $n \geqslant 1$;

5) $T_n(x) = \dfrac{n}{2}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\,\dfrac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}$, $n \geqslant 1$.

3.80. Показать, что для системы узлов интерполяции $x_i = \cos\dfrac{2i-1}{2n}\,\pi$, $i = 1, \ldots, n$ (нули многочлена Чебышёва $T_n(x)$), справедлива асимптотическая оценка сверху для константы Лебега $\lambda_n \leqslant K\,\ln n$ с постоянной K, не зависящей от n.

$\triangleleft$ Рассмотрим функцию $\Lambda_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)} \right|$. По определению λ_n имеем $\lambda_n = \max\limits_{x\in[-1,1]} \Lambda_n(x)$. Учитывая выбор узлов интерполяции, получим

$$\Lambda_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\cos(n\arccos x)|\sin\dfrac{2i-1}{2n}\pi}{n|x-\cos\dfrac{2i-1}{2n}\pi|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\cos(\pi n\varphi)|\sin\dfrac{2i-1}{2n}\pi}{n|\cos(\pi\varphi)-\cos\dfrac{2i-1}{2n}\pi|},$$

где сделана замена $x=\cos(\pi\varphi)$, а φ меняется на отрезке $[0,1]$. Обозначим эту сумму через $\theta(\varphi)$ и заметим, что, в силу симметрии узлов, $\Lambda_n(x)$ — четная функция, поэтому при оценке сверху для $\theta(\varphi)$ достаточно рассматривать только отрезок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Так как имеют место неравенства

$$\sin|\alpha| \leqslant |\alpha|,\ \sin|\beta| \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,|\beta| \quad \text{при } |\beta| \leqslant \frac{3}{4}\,\pi,$$

$$\sin|\beta| \geqslant \frac{2}{\pi}\,|\beta| \ \text{ при } \ |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то при $0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\ 0<\alpha\leqslant\pi$, имеем

$$\frac{|\sin\alpha|}{|\cos\beta-\cos\alpha|} = \frac{|\sin\alpha|}{2\sin\left|\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right|\sin\left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|} \leqslant \frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\,\frac{\alpha}{|\alpha+\beta|\,|\alpha-\beta|},$$

откуда, если положить

$$\alpha = \frac{2i-1}{2n}\,\pi, \quad \beta=\pi\varphi=\frac{\pi}{2}\,\frac{2m-1-2t}{n},\ 1\leqslant m\leqslant\frac{n+2}{2},\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},$$

следует, что

$$\frac{\sin\dfrac{2i-1}{2n}\,\pi}{|\cos\pi\varphi-\cos\dfrac{2i-1}{2n}\,\pi|} \leqslant \frac{3\pi n}{4\sqrt{2}}\,\frac{2i-1}{|m+i-1-t||m-i-t|}.$$

Параметризация $\varphi = \dfrac{2m-1-2t}{2n}$, $\ 1\leqslant m\leqslant 1+\frac{n}{2}$, корректна, так как, полагая m в указанных пределах и изменяя t на $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, можно получить любое значение φ (либо $1-\varphi$) из отрезка $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Далее имеем

$$|\cos\pi n\varphi| = \left|\cos\frac{\pi}{2}\,(2m-1-2t)\right| = \sin\pi t \leqslant \pi t.$$

Используя два последних неравенства, оценим $\theta(\varphi)$:

$$\theta(\varphi) \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\frac{(2i-1)t}{|m+i-1-t||m-i-t|}, \quad C=\frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что при $m=1$

$$\theta(\varphi) \leqslant C\left[\frac{1}{1-t} + t\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1+t}+\frac{1}{i-t}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C\left(2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right) \leqslant C\left(3+\int\limits_1^n\frac{dt}{t}\right) = C\,(3+\ln n).$$

При $2 \leqslant m \leqslant 1 + \frac{n}{2}$ получаем

$$\theta(\varphi) \leqslant C\left[\frac{2m-1}{2m-1-t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{m-i-t} - \frac{1}{m+i-1-t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{1}{m+i-1-t} + \frac{1}{i-m+t}\right)\right] \leqslant C\left(4 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right) \leqslant C\,(4 + \ln n)\,.$$

Окончательно имеем

$$\lambda_n = \max_{\varphi\in[0,1]}\theta(\varphi) \leqslant C\,(4 + \ln n) \leqslant K\,\ln n\,. \qquad \triangleright$$

3.81. Доказать, что если узлы интерполяции на отрезке совпадают с нулями многочлена Чебышёва соответствующей степени, то справедливо неравенство $\lambda_n = \max\limits_x \sum\limits_{i=1}^{n} |\Phi_i(x)| \geqslant K\,\ln n$ с постоянной K, не зависящей от n.

3.82. Определить константу Лебега λ_3 для узлов интерполяции — нулей многочлена Чебышёва $T_3(x)$.

Ответ: $\lambda_3 = \frac{5}{3}$.

В приложениях встречаются также многочлены Чебышёва второго рода $U_n(x)$. Они удовлетворяют рекуррентному соотношению и начальным условиям: $U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)\,,\ U_0(x) = 1\,,\ U_1(x) = 2\,x\,.$

3.83. Показать, что для $U_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$, справедливо представление

$$U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} & \text{при } |x| \leqslant 1\,, \\[2ex] \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} & \text{при } |x| \geqslant 1\,. \end{cases}$$

3.84. Показать, что общее решение разностного уравнения $y_{n+1}(x) - 2x\,y_n(x) + y_{n-1}(x) = 0$ представимо в виде: $y_n = C_1(x)T_n(x) + C_2(x)U_{n-1}(x)$.

Указание. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} T_0(x) & T_1(x) \\ U_{-1}(x) & U_0(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,;$$

откуда следует, что $T_n(x)$ и $U_{n-1}(x)$ — линейно независимы.

3.85. Проверить соотношения для $T_n(x)$ и $U_n(x)$:

1) $T_{n-1}(x) - xT_n(x) = (1-x^2)U_{n-1}(x)\,;$
2) $U_{n-1}(x) - xU_n(x) = -T_{n+1}(x)\,;$
3) $U_{n+i}(x) + U_{n-i}(x) = 2T_i(x)U_n(x)\,;$
4) $U_{in-1}(x) = 2U_{i-1}\left(T_n(x)\right).$