Тема : Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

$\mathbf{1^0}$. Постановка задачи. Прямые и итерационные методы решения. $\mathbf{2^0}$. Нормы векторов и матриц. Определения. Согласованность. $\mathbf{3^0}$. Число обусловленности. Оценка относительной погрешности решения системы при возмущении матрицы и правой части. $\mathbf{4^0}$. Примеры.

1^0. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), записанную в матричном виде

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}. \tag{1}$$

Здесь $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размером $n \times n$, a_{ij} — вещественные числа, вектор-столбец $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ — это искомое решение, и $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ — это заданная правая часть системы, также вектор-столбец.

Матрица A предполагается невырожденной, $\det A \neq 0$. Как известно, в этом случае решение $\overrightarrow{u}$ системы существует и единственно. По правилу Крамера компоненты u_i этого решения можно найти по формулам

$$u_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (K)$$

Здесь Δ_i обозначает определитель матрицы, получаемой из A заменой i столбца столбцом $\overrightarrow{f}$ правой части системы.

Однако, как установлено, использование формулы (K) для вычисления решения $\overrightarrow{u}$ приводит к неоправданно большим затратам машинного времени.

Например, если одно слагаемое в $\boldsymbol{\Delta}$ (или $\boldsymbol{\Delta_i}$) вычисляется за 10^{-6} сек, то время расчета по формуле ($\boldsymbol{K}$) всего решения при $\boldsymbol{n = 100}$ измеряется годами.

В настоящее время с помощью компьютеров численно решаются СЛАУ порядка $\boldsymbol{n \approx 10^6}$. Но получаются эти решения за разумное время и не по формулам Крамера, а с помощью прямых или итерационных численных методов.

Прямой метод позволяет в предположении отсутствия ошибок округления, то есть при расчетах на идеальном (бесконечноразрядном) компьютере решить систему за конечное число арифметических действий.

Итерационный метод, или метод последовательных приближений, вычисляет последовательность $\{\vec{u}_N\}_{N=1}^{\infty}$ вектор-столбцов, сходящуюся к искомому решению $\vec{u}$ задачи при

$N \to \infty$. Разумеется, на практике выбирается лишь конечное число N итераций.

При вычислении решения $\overrightarrow{u}$ к значительным погрешностям могут привести как неточности в задании правой части $\overrightarrow{f}$, так и неточное задание элементов a_{ij} матрицы A системы. Такое явление наблюдается в случае плохо обусловленной системы.

Вопрос оценки возникающей при численном решении СЛАУ погрешности принципиально важен и для его решения требуются некоторые существенные вспомогательные сведения из теории матриц.

2^0. В координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся следующие стандартные нормы:

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |u_i| \text{ (кубическая)}, \qquad (2)$$

$$\|\vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \quad \text{(октаэдрическая)}, \tag{$2'$}$$

$$\|\vec{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(евклидова)}. \tag{$2''$}$$

С квадратной матрицей A размера $n \times n$ связано линейное преобразование

$$\vec{v} = A\vec{u}, \quad \text{где} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Условимся обозначать пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное одной из норм $\|\cdot\|_j$, через $\mathbb{L}^n$, то есть $\mathbb{L}^n$ — это n-мерное линейное нормированное пространство.

Определим норму матрицы $A\colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$ с помощью равенства

$$\|A\| = \sup_{\vec{u} \neq 0} \frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}. \qquad (N_A)$$

Функционал $\|\boldsymbol{A}\|$ обладает следующими стандартными свойствами:

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|;$$

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{A}\|=|\boldsymbol{\lambda}| \cdot \|\boldsymbol{A}\|;$$

Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — квадратные матрицы одинакового размера, то

$$\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|.$$

Для того чтобы воспользоваться определением (N_A), необходимо сначала задать нормы векторов $\|\vec{u}\|$ и $\|A\vec{u}\|$. По этой причине $\|A\|$ называют подчиненной нормой векторного пространства.

Кроме того, что норма (N_A) подчинена векторной норме, она также согласована с нормой $\|\vec{u}\|$, что означает выполнение следующего неравенства:

$$\|\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|.$$

Согласованные с нормами (**2**), (**2′**) и (**2″**) нормы матриц определяются следующими равенствами:

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{3}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{3'}$$

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1\le i\le n} \lambda_i(A^*A) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3''}$$

В последнем равенстве $\lambda_i(A^*A)$ обозначает собственное число матрицы A^*A.

Матрица A^*A самосопряженная и положительно определенная, то есть справедливы соотношения

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}^{**} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A},$$

$$\forall \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u}}) > \mathbf{0}.$$

Важен частный случай, когда матрица симметричная: $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$. При этом справедливы равенства

$$\boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{A}^2) = |\boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{A})|^2. \tag{4}$$

Следовательно, в случае симметричной матрицы A ее евклидова норма следующим образом связана с набором ее же собственных чисел:

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(A)|. \tag{4'}$$

3^0. Согласованность нормы матрицы с нормой векторов позволяет оценить погрешности, возникающие при численном решении СЛАУ.

По условию матрица $\boldsymbol{A}$ невырождена, и поэтому существует обратная к ней матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$, обладающая свойством

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица (на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы нули).

Определение. *Положительное число*

$$\mu = \mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

называется числом обусловленности матрицы A.

Для числа обусловленности используется также обозначение $\mu(A) \equiv \mathbf{cond}(A)$.

Пусть и матрица A, и правая часть $\overrightarrow{f}$ системы (1) заданы с некоторой погрешностью, то есть вместо $\boldsymbol{A}$ известна матрица $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Delta A}$, а вместо вектор–столбца $\overrightarrow{f}$ известен вектор–столбец $\overrightarrow{f}+\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{f}$.

Тогда вместо исходной СЛАУ рассматривается возмущенная система:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Delta A})(\overrightarrow{u}+\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{u})=\overrightarrow{f}+\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{f}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть возмущение* ΔA *невырожденной матрицы* A *удовлетворяет условию*

$$\mu(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1.$$

Тогда возмущение $\Delta \overrightarrow{u}$ *решения системы* (5) *удовлетворяет оценке*

$$\frac{\|\Delta \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta \overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right). \quad (E\mu)$$

Доказательство. Раскрывая скобки в равенстве (5), пользуясь условием, что $\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{f}}$, и перенося часть слагаемых вправо, получаем

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}.$$

Домножая обе части этого равенства слева на матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, получаем

$$\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right).$$

Вычисляя норму от обеих частей этого равенства и пользуясь неравенством треугольника для норм, получаем

$$\|\Delta\overrightarrow{u}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\overrightarrow{f}\| +$$

$$+\|A^{-1}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\Delta A\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|\Delta\overrightarrow{u}\|.$$

Перепишем эту оценку в эквивалентном виде

$$\|\Delta\overrightarrow{u}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|} \cdot \|\overrightarrow{f}\| +$$

$$+\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\cdot\|A\|\cdot\|\overrightarrow{u}\|+\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\cdot\|\Delta\overrightarrow{u}\|.$$

Пользуясь обозначением $\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ и перенося последнее третье слагаемое из правой части влево, получаем далее

$$\|\Delta\overrightarrow{u}\|\left(1-\mu(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\leq$$

$$\leq\mu(A)\frac{\|\Delta\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|}\cdot\frac{\|\overrightarrow{f}\|}{\|A\|}+\mu(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\cdot\|\overrightarrow{u}\|.$$

Продолжим эту оценку, используя представление $\overrightarrow{f} = A\overrightarrow{u}$ и следующее из него неравенство

$$\|\overrightarrow{f}\| = \|A\overrightarrow{u}\| \leq \|A\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\overrightarrow{f}\|}{\|A\|} \leq \|\overrightarrow{u}\|.$$

Имеем в результате

$$\|\Delta\overrightarrow{u}\| \left(1 - \mu(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right) \leq$$

$$\leq \mu(A)\frac{\|\Delta\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|} \cdot \|\overrightarrow{u}\| + \mu(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|\overrightarrow{u}\|.$$

Вынося в правой части общий сомножитель $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|$ за скобки и производя деление обеих частей неравенства на положительное (по условию теоремы) число $\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}\right)$ приходим к искомой оценке ($\boldsymbol{E_\mu}$). $\square$

Следствие. *При* $\boldsymbol{\Delta A} \approx \mathbf{0}$ *получаем оценку возмущения искомого решения системы при наличии погрешности только в правой части:*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|} \leq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{f}}\|}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{f}}\|}.$$

Следствие. *Если* $\boldsymbol{\Delta A \cdot \Delta \overrightarrow{u} \approx 0}$, *то имеет место следующая оценка:*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta \overrightarrow{u}}\|}{\|\boldsymbol{\overrightarrow{u}}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{\Delta \overrightarrow{f}}\|}{\|\boldsymbol{\overrightarrow{f}}\|} + \frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}.$$

Таким образом, получено важное соотношение, показывающее, насколько сильно могут возрастать относительные ошибки в решении СЛАУ при наличии относительных ошибок в задании правых частей и элементов матрицы.

Отметим одно важное свойство числа обусловленности $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})$.

Учитывая матричное равенство $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$, получаем соотношения

$$\mathbf{1} = \|\boldsymbol{E}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A}).$$

Таким образом, число обусловленности матрицы всегда не меньше единицы, $\mu(A) \geq 1$.

При $1 \leq \mu \leq 10$ ошибки входных данных слабо влияют на решение системы. При $\mu \gg 10^2$ система плохо обусловлена.

Проиллюстрируем предыдущую теорему конкретным примером. Рассмотрим систему из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{100}\boldsymbol{u} + \mathbf{99}\boldsymbol{v} = \mathbf{199}, \\ \mathbf{99}\boldsymbol{u} + \mathbf{98}\boldsymbol{v} = \mathbf{197}. \end{cases}$$

Ее решение — это вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Внесем возмущения в правую часть системы:

$$\begin{cases} \mathbf{100}\boldsymbol{u} + \mathbf{99}\boldsymbol{v} = \mathbf{198.99}, \\ \mathbf{99}\boldsymbol{u} + \mathbf{98}\boldsymbol{v} = \mathbf{197.01}. \end{cases}$$

Решение возмущенной системы — это уже

другой вектор $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.97} \\ \mathbf{-0.99} \end{pmatrix}$.

Таким образом, несмотря на малость возмущения правой части $\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.01} \\ \mathbf{-0.01} \end{pmatrix}$, различие в решениях исходной и возмущенной системы существенно:

$$\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2.97} \\ \mathbf{-0.99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1.97} \\ \mathbf{1.99} \end{pmatrix}.$$

Проверим, согласуется ли этот результат с оценкой относительной погрешности из доказанной выше теоремы. Имеем

$$\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\infty} = \mathbf{1.99} \approx \mathbf{2}; \qquad \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\infty} = \mathbf{1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\infty}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\infty}} \approx \mathbf{2}.$$

Далее, справедливы соотношения

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{99} \\ \mathbf{99} & \mathbf{98} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \mathbf{199},$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_\infty = 199,}$$

$$\boldsymbol{\mu(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 199^2 \approx 4 \cdot 10^4.}$$

При этом

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta \overrightarrow{f}\|_\infty}{\|\overrightarrow{f}\|_\infty} = \frac{0.01}{199} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\Delta A = 0}$, имеем по теореме оценку

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{\infty}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{\infty}}} \leq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{f}}\|_{\boldsymbol{\infty}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{f}}\|_{\boldsymbol{\infty}}}.$$

Подставляя сюда найденные числовые значения, получаем

$$\mathbf{2} \leq \mathbf{4} \cdot \mathbf{10^4} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{10^{-4}} = \mathbf{2},$$

то есть теоретическая оценка полностью согласована с реальной.

Замечание. *Определитель матрицы системы может быть мал, в то время как сама матрица может быть хорошо обусловлена.*

В качестве подтверждающего примера рассмотрим диагональную матрицу D с малым числом $\varepsilon > 0$ на главной диагонали.

Определитель этой матрицы равен ε^n, где n — число строк (столбцов) в матрице. При этом $\|D\|_\infty = \varepsilon$. В то же время справедливы соотношения

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|D^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\mu(D) = \|D\|_\infty \cdot \|D^{-1}\|_\infty = 1.$$

С другой стороны, определитель матрицы может быть равен единице, а ее число обусловленности при этом может быть сколь угодно велико.

В качестве подтверждающего примера рассмотрим следующую верхнюю треугольную матрицу:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ имеет размеры $\boldsymbol{n \times n}$ и ее определитель — единица. Найдем число обусловленности $\boldsymbol{\mu(A)}$. Из определения получаем

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \boldsymbol{n}.$$

Найдем $\boldsymbol{A^{-1}}$, для чего решим систему $\boldsymbol{Ax = b}$.

Получаем с помощью обратной подстановки следующие выражения компонент неизвестного вектора через компоненты правой части системы:

$$\begin{cases} x_n = b_n, \\ x_{n-1} = b_{n-1} + b_n, \\ x_{n-2} = b_{n-2} + b_{n-1} + 2b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_2 = b_2 + b_3 + 2b_4 + \ldots + 2^{n-4}b_{n-1} + 2^{n-3}b_n, \\ x_1 = b_1 + b_2 + 2b_3 + \ldots + 2^{n-3}b_{n-1} + 2^{n-2}b_n. \end{cases}$$

Следовательно, обратная матрица задается равенством

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{2^{n-3}} & \boldsymbol{2^{n-2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{2^{n-4}} & \boldsymbol{2^{n-3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{2^{n-5}} & \boldsymbol{2^{n-4}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\|\boldsymbol{A^{-1}}\|_{\boldsymbol{\infty}} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{2} + \ldots + \boldsymbol{2^{n-3}} + \boldsymbol{2^{n-2}}.$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии со знаменателем 2, тогда получим

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^{n-1}.$$

Далее по определению находим число обусловленности

$$\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = n \cdot 2^{n-1}.$$

Увеличивая n, можем сделать $\mu_\infty(A)$ сколь угодно большим.

Замечание. *Пусть A — произвольная невырожденная матрица.*

Тогда в любой матричной норме, используемой при определении числа обусловленности $\mu(A)$, справедлива следующая оценка снизу

$$\mu(A) \geq \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}(\boldsymbol{A})$ *и* $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{min}}(\boldsymbol{A})$ *— это соответственно максимальное по модулю и минимальное по модулю собственные числа матрицы* $\boldsymbol{A}$.

Тема : Прямые методы решения СЛАУ

$\mathbf{1^0}$. Решение систем с диагональной и верхней треугольной матрицами. Прямой и обратный ход метода в случае матриц общего вида. $\mathbf{2^0}$. Метод исключения Гаусса: формулировка в покомпонентном и матричном вариантах. $\mathbf{3^0}$. Обратный ход метода исключения. $\mathbf{4^0}$. $(\boldsymbol{LU})$-разложения матриц. Модификация метода Гаусса с выбором главного элемента. $\mathbf{5^0}$. Пример. Условие диагонального преобладания. $\mathbf{6^0}$. Итерационное уточнение решения. $\mathbf{7^0}$. Формулы решения системы при известном $(\boldsymbol{LU})$ разложении ее матрицы. $\mathbf{8^0}$. Формулы для сомножителей $(\boldsymbol{L})$ и $(\boldsymbol{U})$ при известной матрице $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$. $\mathbf{9^0}$. Метод Холецкого (метод квадратного корня).

1^0. Сложность и трудоемкость решения СЛАУ в значительной степени зависит от структуры матрицы $\boldsymbol{A}$ системы.

В простейшим случае матрица $\boldsymbol{A}$ диагональна:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

или, в эквивалентной записи:

$$A = \operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}.$$

Диагональная структура матрицы позволяет решать каждое из уравнений системы отдельно от других. Иными словами система распадается на n простейших независимых друг от друга уравнений:

$$a_{ii}u_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Если $\det A \neq 0$, то $a_{ii} \neq 0$ для любого индекса i, и решение системы в этом случае задается следующим образом:

$$u_i = \frac{f_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Для численной реализации данной формулы требуется совершить n делений.

Немногим более сложно решаются системы с треугольными матрицами. Пусть A — верхняя треугольная матрица, то есть $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 0$ при $i > j$, или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$u_n = \frac{f_n}{a_{nn}}, \qquad a_{nn} \neq 0.$$

Далее последовательно по убыванию индекса k компоненты u_k, то есть при $k = n-1$, $n-2$, $n-3$, $\ldots$, 1, имеем равенства

$$u_k = \frac{1}{a_{k,k}}\Big(f_k - a_{k,n}u_n - a_{k,n-1}u_{n-1} -$$
$$- a_{k,n-2}u_{n-2} - \ldots - a_{k,k+1}u_{k+1}\Big).$$

Количество арифметических действий для реализации всей совокупности этих формул — это величина $O(n^2)$.

Если матрица A системы имеет общий вид, то есть никак не структурирована, то стандартная схема решения системы точным (прямым) методом, разбивается на два этапа:

сначала — прямой ход, состоящий в приведении матрицы к треугольному виду, затем — обратный ход — вычисление решения полученной СЛАУ с найденной на первом этапе треугольной матрицей и соответствующим образом подсчитанной правой частью.

$\mathbf{2^0}$. Классический точный метод решения СЛАУ — это метод исключения Гаусса.

Пусть квадратная матрица системы задана равенством $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, а ее правая часть представляет собой вектор-столбец вида

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} =\uparrow (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Тогда прямой ход метода Гаусса реализуется по следующей схеме.

Пусть $a_{11} \neq 0$, тогда возможно исключить неизвестную переменную u_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению системы добавляется первое, умноженное на величину

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}} \equiv -\eta_{21},$$

к третьему добавляется первое, умноженное на величину:

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}} \equiv -\eta_{31}$$

и так далее до последнего n-го уравнения включительно. В результате исходная система преобразуется к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1, \\ \\ a_{22}^{(1)}u_2 + a_{23}^{(1)}u_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}u_n = f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}u_2 + a_{33}^{(1)}u_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}u_n = f_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}u_2 + a_{n3}^{(1)}u_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}u_n = f_n^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь для всех $i = 2, 3, 4, \dots, n$ имеют место равенства

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \eta_{i1} a_{1j}, \\ f_i^{(1)} = f_i - \eta_{i1} f_1, \end{cases} \qquad j = 2, 3, 4, \dots, n.$$

Теперь, предполагая, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$, повторяем действия предыдущего шага в применении к системе с меньшей $(n-1)\times(n-1)$ матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ a_{42}^{1} & a_{43}^{1} & a_{44}^{1} & \cdots & a_{4n}^{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & a_{n4}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

и с вектор-столбцом $\uparrow \{f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, f_4^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}\}$ в правой части.

В результате исключения неизвестной u_2 из всех уравнений уменьшенной эквивалентной системы, начиная со второго, придем к новой эквивалентной системе с матрицей размера $(n-2) \times (n-2)$. Далее действуем аналогично и в результате на последнем $(n-1)$ шаге прямого хода придем к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Приведем формулировку прямого хода метода Гаусса в матричном варианте.

Пусть A_1 — матрица эквивалентной системы, получающейся после исключения первой компоненты неизвестного вектора. Тогда $\boldsymbol{A_1}$ задается равенством

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Преобразованная на первом шаге метода правая часть $\overrightarrow{f_1}$ эквивалентной системы имеет при этом следующий вид:

$$\overrightarrow{f_1} =\uparrow \{f_1, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}\}.$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

элементы в первом столбце которой задаются равенствами

$$\eta_{j1} = \frac{a_{j1}}{a_{11}}, \qquad j = 2, 3, 4, \ldots, n.$$

Имеют место следующие матричное и векторное равенства:

$$A_1 = N_1 \cdot A \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{f_1} = N_1 \cdot \overrightarrow{f}.$$

Аналогично на втором шаге используется

следующая матрица:

$$
N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\eta_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\eta_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},
$$

где элементы второго столбца определяются соотношениями

$$
\eta_{j2} = \frac{a_{j2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad j = 3, 4, 5, \ldots, n.
$$

При этом матрица и правая часть системы преобразуются по формулам:

$$A_2 = N_2 A_1, \quad \overrightarrow{f}_2 = N_2 \overrightarrow{f}_1 \quad \Rightarrow \quad A_2 \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}_2.$$

На последнем $(n-1)$ шаге прямого хода метода Гаусса получаем систему

$$A_{n-1} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}_{n-1},$$

в которой матрица и правая часть задаются равенствами

$$\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{N}_{n-1} \cdot \boldsymbol{A}_{n-2} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{f}}_{n-1} = \boldsymbol{N}_{n-1} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{f}}_{n-2}.$$

Матрица $\boldsymbol{N}_{n-1}$ в этих соотношениях имеет следующий "почти диагональный" вид:

$$\boldsymbol{N}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\eta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ненулевой коэффициент в последней строке определяется как следующее отношение:

$$\eta_{n,n-1} = \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}.$$

Итоговая матрица A_{n-1}, получаемая на последнем $(n-1)$ шаге прямого хода, является верхней треугольной:

$$\boldsymbol{A_{n-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{23}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^{(1)}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{33}^{(2)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}^{(2)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}} \end{pmatrix}.$$

Правая часть итоговой системы имеет вид

$$\overrightarrow{f}_{n-1} = \uparrow \{f_1, f_2^{(1)}, f_3^{(2)}, \ldots, f_n^{(n-1)}\}.$$

Таким образом, матрица A_{n-1} и вектор $\overrightarrow{f}_{n-1}$ связаны с исходными матрицей A и вектором $\overrightarrow{f}$ следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} A_{n-1} &= N_{n-1}N_{n-2}N_{n-3}\dots N_2N_1A, \\ \overrightarrow{f}_{n-1} &= N_{n-1}N_{n-2}N_{n-3}\dots N_2N_1\overrightarrow{f}. \end{aligned}\right\} \qquad (Fin)$$

При каждом $j = 1, 2, \dots, n-1$ обратная к матрице N_j представляет собой нижнюю треугольную матрицу, которая получается из единичной матрицы заменой j-го столбца на некоторый другой:

$$
N_j^{-1} = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{j+1,j} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{j+2,j} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{j+3,j} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{n,j} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right),
$$

В левом верхнем углу матрицы N_j^{-1} расположена единичная матрица размера $j \times j$. Элементы же в j-том столбце под главной диагональю в обратной матрице N_j^{-1} определяются из следующих расчетных формул:

$$\eta_{k,j} = \frac{a_{kj}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \qquad k = j+1, j+2, \ldots, n.$$

При этом предполагается, что $\left(a_{kj}^{(0)}\right) = A$.