Вопрос №1
Дифференцирование функций

Разностное отношение в точке

Пусть имеется функция $f(x)$, $x \in D_f$, и точка $x_0 \in D_f$.

Определение. Для всех $x \in D_f$, $x \neq x_0$, частное $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, где $h = x - x_0$, называется разностным отношением функции f в точке x_0 с шагом h.

Определение производной

Определение. Если существует предел разностного отношения: $\frac{1}{h}\Delta f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $h \to 0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0, обозначается $f'(x_0)$, $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}$.

Может оказаться, что такого предела не существует, но при этом имеются односторонние пределы при $h \to +0$ или $h \to -0$. Эти односторонние пределы называются правой и левой производными функции. Обозначения:

$$f'^{+}(x_0) = \lim_{h\to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \qquad \text{(правая)}$$

$$f'^{-}(x_0) = \lim_{h\to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \qquad \text{(левая)}$$

О производной в точке x_0 можно говорить тогда и только тогда, когда x_0 является предельной точкой D_f. Обычно предполагается, что точка x_0 является внутренней точкой множества D_f. То есть f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция определена в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в этой точке тогда и только тогда, когда f имеет односторонние равные друг другу производные.

Когда говорят о производной, чаще имеют в виду конечную. Случай бесконечных производных обговаривается отдельно.

Определение. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если f определена в окрестности этой точки и имеет при этом конечную производную в x_0.

Вместо x_0 пишут x, шаг h обозначают Δx и называют приращением независимой переменной. Разность $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называют приращением функции.

При этом производная переписывается в виде: $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение. Таким образом, Производной называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении приращения аргумента к нулю.

Нахождение производной – дифференцирование.

Определение. Оператор, сопоставляющий данной функции $y = f(x)$ ее производную y', называется оператором дифференцирования и обозначается $\frac{d}{dx}$ или $\frac{d}{dx}$: $y \to y'$.

Основные правила дифференцирования

1. Производная константы равна нулю: $(C)' = 0$.

2. Константу можно вынести за знак производной: $(Cf(x))' = C(f(x))'$.

3. Производная суммы/разности функций равна сумме/разности производных: $(f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'$.

4. Дифференцирование произведения функций выполняется по формуле: $(f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) = f(x) \cdot (g(x))'$, $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

5. Дифференцирование частного двух функций выполняется по формуле: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{(f(x))' \cdot g(x) - f(x) \cdot (g(x))'}{(g(x))^2}$.

Примеры:

1. $y = c$, где c - константа. Тогда $\Delta y = 0$ в любой точке x и поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

2. $y(x) = \sin(x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = 1 \cdot \cos(x)$.

3. $y(x) = \cos(x) \Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos(x) = -2\sin(\frac{\Delta x}{2})\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) = -\sin(x)$.

4. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$.

5. $y(x) = \mathrm{abs}\{x\}$, При $x > 0$: $y(x) = x$, $y(x+h) = x+h$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+h-x}{h} = 1$. В точке $x_0 = 0$ имеем $y(x_0) = 0$, $y(x_0+h) \Rightarrow y'^{+}(0) = 1$ и $y'^{-}(0) = -1$. В точке x_0 функция не является дифференцируемой, а при $x \neq 0$, $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$.

Метод логарифмического дифференцирования

Пусть дана функция $y = f(x)$. Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей: $\ln y = \ln f(x)$. Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея ввиду, что y - это функция от x. $(\ln y)' = (\ln f(x))' \Rightarrow \frac{1}{y}y'(x) = (\ln f(x))'$. Отсюда видно, что искомая производная равна $y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'$.

Такая производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

Данный метод позволяет также эффективно вычислять производные показательно-степенных функций, то есть функций вида $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции от x.

Пример: $y = x^{\cos x}$, $x > 0$.

Решение. Логарифмируем заданную функцию: $\ln y = \ln\left(x^{\cos x}\right) \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x$. Дифференцируя последнее равенство по x, получаем: $(\ln y)' = (\cos x \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (-\sin x) \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \Rightarrow y' = y(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x)$. Подставляем в правые части вместо y исходную функцию: $y' = x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x)$, где $x > 0$.

Уравнение касательной и нормали к заданной кривой

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x0_)$.

Уравнение нормали к кривойу в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

Нормаль к кривой - это перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания.

Пример: составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке $M(1, -1)$: $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$.

Решение. Найдем производную, дифференцируя функцию $y(x)$ по переменной x: $(x^2)_{x'} + (2xy^2)_{x'} + (3y^4)_{x'} = (6)_{x'}$. Учитывая, что y^2 и y^4

сложные функции продолжаем: $2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0$. Выражаем y' из полученного уравнения: $4xyy' + 12y^3y' = -2x - 2y^2$. Выносим y' за скобки: $y'(4xy + 12y^3) = -2x - 2y^2$. Делим обе части уравнения на выражение $4xy + 12y^3$: $y' = -\frac{2x+2y^2}{4xy+12y^3} = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$. Теперь вычисляем значение y': $y' = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$.

Зная, что $y' = \frac{1}{4}$ и $y(x_0) = y(1) = -1$, составляем уравнения касательной и нормали к кривой в точке $M(1, -1)$.

- Уравнение касательной: $y - (-1) = \frac{1}{4}(x - 1)$, или $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.
- Уравнение нормали: $y - (-1) = -\frac{1}{\frac{1}{4}}(x - 1)$, или $y = -4x + 3$.

Приближенные вычисления с использованием дифференциала

Формула для приближенного вычисления с помощью дифференциала: $f(x_0 + x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$, где дифференциал в точке находится по формуле $d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Конечная формула выглядит так: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Вопрос №2

Общее уравнение плоскости

Пусть задана произвольная декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Общим уравнением плоскости называется линейное уравнение вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

где A, B, C, D - некоторые постоянные, причем хотя бы один из элементов A, B или C отличен от нуля.

Теорема. В произвольной декартовой прямоугольной системе координат в пространстве каждая плоскость α может быть задана линейным уравнением 1. Обратно, каждое линейное уравнение 1 в произвольной декартовой прямоугольной системе координат в пространстве определяет плоскость.

Доказательство. Так как числа A, B и C одновременно не равны нулю, то существует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $Ax+By+Cz+d = 0$, то есть, справедливо равенство $Ax_0+By_0 + Cz_0 = 0$. Отнимем левую и правую части полученного равенства соответственно от левой и правой частей уравнения $Ax+By+Cz+D = 0$, при этом получим уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ эквивалентное исходному уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$.

Равенство $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ представляет собой необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Иными словами, координаты плавающей точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению $A(x-x_0)+B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ тогда и только тогда, когда перпендикулярны векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Тогда мы можем утверждать, что если справедливо равенство $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, то множество точек $M(x, y, z)$ определяет плоскость, нормальным вектором которой является $\vec{n} = (A, B, C)$, причем эта плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Другими словами, уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$ определяет в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве указанную выше плоскость. Следовательно, эквивалентное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет эту же плоскость.

Пусть нам дана плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, нормальным вектором которой является $\vec{n} = (A, B, C)$. Докажем, что в прямоугольной системе координат $Oxyz$ ее задает уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$.

Для этого, возьмем произвольную точку этой плоскости. Пусть этой точкой будет $M(x, y, z)$. Тогда векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ будут перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение будет равно нулю: $(\vec{n}, \vec{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z-z_0) = Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0) = 0$. Принимая во внимание $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, уравнение примет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

Разные уравнения одной плоскости

Если уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют одну и ту же плоскость, то найдётся такое число λ, что выполнены равенства: $A_2 = A_1\lambda$, $B_2 = B_1\lambda$, $C_2 = C_1\lambda$, $D_2 = D_1\lambda$.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

способ нахождения уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Очевидно, что множество точек $M(x, y, z)$ определяет в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве плоскость, проходящую через три различные и не лежащие на одной прямой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, тогда и только тогда, когда три вектора $\vec{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\vec{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарны.

Следовательно, должно выполняться условие компланарности трех векторов $\vec{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\vec{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, то есть, смешанное произведение векторов $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$, $\vec{M_1M_3}$ должно быть равно нулю: $\vec{M_1M} \cdot \vec{M_1M_2} \cdot \vec{M_1M_3} = 0$. Это равенство в координатной форме имеет вид $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. Оно, после вычисления определителя, представляет собой общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Примеры:

1. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через три заданные точки $M_1(-3, 2, -1)$, $M_2(-1, 2, 4)$, $M_3(3, 3, -1)$.

   Решение

   (a) **Первый способ решения.** По координатам заданных точек вычисляем координаты векторов $\vec{M_1M_2}$ и $\vec{M_1M_3}$:

   $$\vec{M_1M_2} = (-1 - (-3), 2 - 2, 4 - (-1)) \Leftrightarrow \vec{M_1M_2} = (2, 0, 5)$$
   $$\vec{M_1M_3} = (3 - (-3), 3 - 2, -1 - (-1)) \Leftrightarrow \vec{M_1M_3} = (6, 1, 0)$$

   Найдем векторное произведение векторов $\vec{M_1M_2} = (2, 0, 5)$ и $\vec{M_1M_3} = (6, 1, 0)$:

   $$\vec{n} = [\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}.$$

Следовательно, нормальным вектором плоскости, проходящей через три заданные точки, является вектор $\vec{n} = (-5, 30, 2)$.

Теперь записываем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-3, 2, -1)$ (можно взять точку M_2 или M_3) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (-5, 30, 2)$. Оно имеет вид $-5 \cdot (x-(-3)) + 30 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-(-1)) = 0 \Leftrightarrow -5x + 30y + 2z - 73 = 0$. Так мы получили общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

(b) **Второй способ решения.** Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, записывается как $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. Из условия задачи имеем $x_1 = -3$, $y_1 = 2$, $z_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = 2$, $z_2 = 4$, $x_3 = 3$, $y_3 = 3$, $z_3 = -1$. Тогда

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - (-1) \\ -1 - (-3) & 2 - 2 & 4 - (-1) \\ 3 - (-3) & 3 - 2 & -1 - (-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z + 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Следовательно, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, имеет вид $-5x + 30y + 2z - 73 = 0$.

2. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве заданы три точки $M_1(5, -8, -2)$, $M_2(1, -2, 0)$, $M_3(-1, 1, 1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Решение

(a) **Первый способ решения.** Вычисляем координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4, 6, 2)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-6, 9, 3)$. Находим векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$: $[\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = 0$.

Так как $[\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}] = \vec{0}$, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ коллинеарны, следовательно, заданные точки $M_1(5, -8, -2)$, $M_2(1, -2, 0)$,

$M_3(-1,1,1)$ лежат на одной прямой. Таким образом, поставленная задача имеет бесконечное множество решений, так как любая плоскость, содержащая прямую, на которой лежат точки M_1, M_2, M_3, является решением задачи.

(b) **Второй способ решения.** Имеем $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y-(-8) & z-(-2) \\ 1-5 & -2-(-8) & 0-(-2) \\ -1-5 & 1-(-8) & 1-(-2) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y+8 & z+2 \\ -4 & 6 & 2 \\ -6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 0.$

Мы приходим к тождеству, из которого можно заключить, что заданные точки $M_1(5,-8,-2)$, $M_2(1,-2,0)$, $M_3(-1,1,1)$ лежат на одной прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть $P(x,y,z)$ – произвольная точка пространства. Точка P принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор $MP = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ ортогонален вектору $n = \{A,B,C\}$.

Написав условие ортогональности этих векторов $(n, MP) = 0$ в координатной форме, получим:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \tag{2}$$

Это и есть искомое уравнение. Вектор $n = \{A,B,C\}$ называется нормальным вектором плоскости.

Таким образом, чтобы написать уравнение плоскости, нужно знать нормальный вектор плоскости и какую-нибудь точку, принадлежащую плоскости.

Если теперь в уравнении 2 раскрыть скобки и привести подобные члены, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки

Необходимо составить уравнение прямой a, проходящей через две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, находящиеся в декартовой системе координат.

В каноническом уравнении прямой на плоскости, имеющим вид $\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y}$, задается прямоугольная система координат Oxy с прямой, которая пересекается с ней в точке с координатами $M_1(x_1, y_1)$ с направляющим вектором $a = (a_x, a_y)$

Прямая a имеет направляющий вектор M_1M_2 с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, так как пересекает точки M_1 и M_2. Преобразуя каноническое уравнение с координатами направляющего вектора $M_1M_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и координатами лежащих на них точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, получим уравнение вида $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ или $\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_2}{y_2-y_1}$.

Запишем параметрические уравнения прямой на плоскости, которая проходит через две точки с координатами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Получим уравнение вида $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \lambda \end{cases}$ или $\begin{cases} x = x_2 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda \\ y = y_2 + (y_2 - y_1) \cdot \lambda \end{cases}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{l; m; n\}$.

точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и $M_0\vec{M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны. Векторы $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и $M_0\vec{M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{4}$$

Полученная система уравнений задает искомую прямую и называется каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

1. Для параллельности прямой a, не лежащей в плоскости α, и плоскости α необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор прямой a был перпендикулярен нормальному вектору плоскости α.

   Следовательно, необходимое и достаточное условие параллельности прямой a и плоскости α (a не лежит в плоскости α) примет вид $(\vec{a}, \vec{n}) = a_x \cdot A + a_y \cdot B + a_z \cdot C = 0$, где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ - направляющий вектор прямой a, $\vec{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости α.

2. Для перпендикулярности прямой a и плоскости γ необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор прямой a и нормальный вектор плоскости γ были коллинеарны.

   Для перпендикулярности прямой a и плоскости γ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие коллинеарности векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$: $\vec{a} = t \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = t \cdot n_x \\ a_y = t \cdot n_y \\ a_z = t \cdot n_z \end{cases}$, где t - некоторое действительное число.

Вычисление расстояния от данной точки до данной плоскости

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Расстояние от точки A_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется следующим образом.

Пусть A с координатами (x, y, z) - точка плоскости α, $\vec{n} = (A, B, C)$ - вектор нормали. Тогда $\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{AA_0}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{AA_0}} = \frac{a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\vec{AA_0}|}$.

Учитывая, что $-ax - by - cz = d$ и то, что искомое расстояние $h = |\vec{AA_0}| \cdot \cos\phi$, получаем $h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.