3.86. Показать, что $\max\limits_{|x|\leqslant 1} |U_n(x)| = U_n(1) = n+1$.

3.87. Вычислить $I_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_n(x)\, U_m(x)\, dx$.

3.3. Численное дифференцирование

Пусть известны значения функции $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и требуется приближенно определить производную $f^{(k)}(x_0)$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$ и положим $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$; при этом для погрешности справедливо представление

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j)!}\, f^{(n+j)}(\xi_j)\omega_n^{(k-j)}(x).$$

Для системы равноотстоящих узлов ($x_{i+1} - x_i = h$) часто используют другой подход, основанный на получении приближений для старших производных через приближения для младших, аналогично последовательному дифференцированию. Базовыми являются следующие выражения:

$$\partial f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad \bar{\partial} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\,, \quad \tilde{\partial} f(x) = \frac{\partial f(x) + \bar{\partial} f(x)}{2}\,,$$

которые являются простейшими аналогами первой производной функции $f(x)$. Их называют *разностями вперед, назад* и *центральной* соответственно. Для вывода оценок погрешностей при данном подходе удобно использовать разложения Тейлора.

Для получения формул численного дифференцирования на практике также используют *метод неопределенных коэффициентов*. Он заключается в следующем: искомую формулу записывают в виде $f^{(k)}(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + R(f)$, и коэффициенты c_i определяют из системы линейных уравнений при $R(f) = 0$, для получения которой последовательно полагают $f(x)$ равной $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Будем далее использовать обозначение $f(x) \in C^{(r)}$, если функция $f(x)$ имеет на интересующем нас отрезке все непрерывные производные до порядка r включительно.

3.88. Показать, что в точке $x = x_i$ (одном из узлов интерполяции) справедлива оценка погрешности

$$|f'(x_i) - L_n'(x_i)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x\in[x_1,x_n]} \left|f^{(n)}(x)\right| \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x_i - x_j|.$$

Указание. Использовать явное представление погрешности для производной многочлена Лагранжа.

3.89. Доказать равенства:

1) если $f \in C^{(2)}$, то $\partial f(x) - f'(x) = \frac{h}{2}\ f''(\xi),\ x < \xi < x + h\,;$

2) если $f \in C^{(3)}$, то $\tilde{\partial} f(x) - f'(x) = \frac{h^2}{6}\ f'''(\xi),\ x - h < \xi < x + h.$

Указание. Использовать разложение в ряд Тейлора.

3.90. Получить явные формулы для разностных аналогов старших производных: $f''(x) \approx \bar{\partial}\partial f(x)$, $f'''(x) \approx \tilde{\partial}\,\bar{\partial}\partial f(x)$, $f^{(4)}(x) \approx \bar{\partial}^2\partial^2 f(x)$.

Ответ:
$$\bar{\partial}\partial f(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2},$$
$$\tilde{\partial}\,\bar{\partial}\partial f(x) = \frac{f(x+2h) - 2\,f(x+h) + 2\,f(x-h) - f(x-2h)}{2\,h^3},$$
$$\bar{\partial}^2\partial^2 f(x) = \frac{f(x+2h) - 4\,f(x+h) + 6\,f(x) - 4\,f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}.$$

3.91. Найти величину $K_i = K_i(h)$ в следующих равенствах:

1) если $f \in C^{(4)}$, то $\bar{\partial}\partial f(x) - f''(x) = K_2 f^{(4)}(\xi)$, $x - h < \xi < x + h$;

2) если $f \in C^{(5)}$, то $\tilde{\partial}\,\bar{\partial}\partial f(x) - f'''(x) = K_3 f^{(5)}(\xi)$, $x - 2h < \xi < x + 2h$;

3) если $f \in C^{(6)}$, то $\bar{\partial}^2\partial^2 f(x) - f^{(4)}(x) = K_4 f^{(6)}(\xi)$, $x - 2h < \xi < x + 2h$.

Ответ: 1) $K_2 = \frac{h^2}{12}$; 2) $K_3 = \frac{h^2}{4}$; 3) $K_4 = \frac{h^2}{6}$.

3.92. Считая, что значения функции в формулах численного дифференцирования для аналогов второй и четвертой производных из 3.91 заданы с абсолютной погрешностью ε, получить оценки полной погрешности этих формул как сумму погрешности метода и вычислительной погрешности. Найти оптимальный шаг h_0, при котором минимизируется величина оценки полной погрешности.

Указание. Решение провести по аналогии со следующим примером для разности вперед (см. также 1.6). Полная погрешность для разности вперед $\partial f(x)$ имеет вид
$$R_1(h,\varepsilon) = \left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - f'(x) \right|,$$
где $f^*(x+h)$ и $f^*(x)$ — приближенные значения функции $f(x)$ в соответствующих точках. Добавляя в числитель дроби $\pm f(x+h)$ и $\pm f(x)$, после перегруппировки слагаемых получим
$$\left| \frac{f^*(x+h) - f(x+h)}{h} - \frac{f^*(x) - f(x)}{h} + \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \right|.$$
Оценка вычислительной погрешности для каждого из двух первых слагаемых имеет вид $\frac{\varepsilon}{h}$, а погрешность метода в предположении ограниченности второй производной $|f''(\xi)| \leqslant M_2$ равна $\frac{hM_2}{2}$. Окончательно имеем $R_1(h,\varepsilon) \leqslant \frac{2\,\varepsilon}{h} + \frac{h\,M_2}{2}$. Для определения значения h_0, при котором минимизируется полная погрешность, необходимо правую часть полученного

выражения продифференцировать по h и приравнять к нулю. Решая уравнение $-2\varepsilon h^{-2} + \frac{M_2}{2} = 0$, находим $h_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}}$ и $R_1(h_0, \varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon\, M_2}$.

Ответ: 1) $h_0 = 2\left(\frac{3\varepsilon}{M_4}\right)^{1/4}$ для $R_2(h,\varepsilon) \leqslant \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2 M_4}{12}$; 2) $h_0 = 2\left(\frac{3\varepsilon}{M_6}\right)^{1/6}$ для $R_4(h,\varepsilon) \leqslant \frac{16\varepsilon}{h^4} + \frac{h^2 M_6}{6}$.

3.93. Методом неопределенных коэффициентов построить формулы численного дифференцирования наиболее высокого порядка точности по h:

1) $f'(0) \approx \dfrac{a\, f(-2h) + b\, f(0) + c\, f(h)}{h}$;

2) $f''(0) \approx \dfrac{a\, f(-h) + b\, f(h) + c\, f(2h) + d\, f(3h)}{h^2}$.

Ответ: 1) $a = -\frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{2}{3}$, 2) $a = \frac{1}{2},\ b = -2, c = 2,\ d = -\frac{1}{2}$.

3.94. Доказать, что $\tilde{\partial} f(0) - f'(0) = \frac{1}{4h} \int\limits_{-h}^{h} (h - |x|)^2 f'''(x)dx$.

Указание. Разбить интеграл на два, раскрывая модуль, и интегрировать по частям.

3.95. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\, d\xi,$$

получить оценки погрешности формул численного дифференцирования (постоянные C_1, C_2 не зависят от f и h)

$$|\bar{\partial} f(x) - f'(x)| \leqslant C_1 \int\limits_{x-h}^{x} |f''(\xi)|\, d\xi,$$

$$|\bar{\partial}\partial f(x) - f''(x)| \leqslant C_2\, h \int\limits_{x-h}^{x+h} |f^{(4)}(\xi)|\, d\xi.$$

3.96. Доказать справедливость следующих равенств:

$$\partial(f\, g) = f\,\partial g + g\,\partial f + h\,\partial f\,\partial g, \quad \bar{\partial}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\bar{\partial} f - f\,\bar{\partial} g}{g\,(g - h\,\bar{\partial} g)}\,.$$

3.97. Пусть вычислены точное и приближенное значения $f''(x_0)$ при заданных узлах интерполяции $x_{-l}, \ldots, x_0, \ldots, x_l,\ x_i - x_{i-1} = h$. Показать, что справедливо представление

$$f''(x_0) - L''_n(x_0) = \frac{2(-1)^l (l!)^2}{(2l+2)!}\, f^{(2l+2)}(\xi) h^{2l}.$$

3.98. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получить оценки погрешности следующих формул численного дифференцирования (постоянные C_i не зависят от f и h):

1) $|\partial f(x) - f'(x)| \leqslant C_1 \int\limits_{x}^{x+h} |f''(\xi)|\, d\xi;$

2) $|\tilde{\partial} f(x) - f'(x)| \leqslant C_2 h \int\limits_{x-h}^{x+h} |f'''(\xi)|\, d\xi;$

3) $|2\partial f(x) - \tilde{\partial} f(x+h) - f'(x)| \leqslant C_3 h \int\limits_{x}^{x+2h} |f'''(\xi)|\, d\xi;$

4) $|2\bar{\partial} f(x) - \tilde{\partial} f(x-h) - f'(x)| \leqslant C_4 h \int\limits_{x-2h}^{x} |f'''(\xi)|\, d\xi;$

5) $|\bar{\partial}^2 \partial^2 f(x) - f^{(4)}(x)| \leqslant C_5 h \int\limits_{x-2h}^{x+2h} |f^{(6)}(\xi)|\, d\xi.$

3.99. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $\bar{\partial}(f\,g) = f\,\bar{\partial} g + g\,\bar{\partial} f - h\,\bar{\partial} f\,\bar{\partial} g;$

2) $\tilde{\partial}(f\,g) = f\,\tilde{\partial} g + g\,\tilde{\partial} f + \dfrac{h^2}{2}\,(\bar{\partial}\partial f\,\tilde{\partial} g + \bar{\partial}\partial g\,\tilde{\partial} f);$

3) $\partial\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,\partial f - f\,\partial g}{g\,(g + h\,\partial g)}.$

3.100. Получить формулу численного дифференцирования наиболее высокого порядка точности по h следующего вида:

1) $f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(h) + c\,f(2h)];$

2) $f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(-h) + c\,f(2h)];$

3) $f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(-h) + c\,f(-2h)];$

4) $f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(2h) + c\,f(3h)]$

и найти h, при котором достигается минимум оценки полной погрешности, если $\max\limits_x |f^{(k)}(x)| \leqslant A_k$, и абсолютная вычислительная погрешность функции не превосходит ε, т. е. $\max\limits_x |f(x) - f^*(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ответ: 1) $a = -\frac{3}{2},\ b = 2,\ c = -\frac{1}{2};\ h_0 = \left(\frac{6\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3};$ 2) $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{1}{6};$ $h_0 = \left(\frac{2\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3};$ 3) $a = \frac{3}{2},\ b = -2,\ c = \frac{1}{2};\ h_0 = \left(\frac{6\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3};$ 4) $a = -\frac{5}{6},\ b = \frac{3}{2},\ c = -\frac{2}{3};$ $h_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{2A_3}\right)^{1/3}.$

3.101. Пусть $f \in C^{3,\lambda}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, т. е. $f \in C^{(3)}$, $|f'''(x) - f'''(y)| \leqslant k|x-y|^{\lambda}\ \forall x, y$. Доказать, что $\bar{\partial}\partial f(x) - f''(x) = O(h^{1+\lambda})$.

3.102. Пусть числа α_j, не зависящие от h, порождают формулу численного дифференцирования максимального порядка точности среди формул вида $f^{(k)}(x) \approx h^{-k} \sum\limits_{j=-n}^{n} \alpha_j f(x+jh)$. Доказать, что:

1) $\alpha_j = \alpha_{-j}$, если k четное, $\alpha_j = -\alpha_{-j}$, если k нечетное;
2) формула с дополнительным слагаемым

$$f^{(k)}(x) \approx h^{-k} \sum_{j=-n}^{n+1} \beta_j f(x+jh)$$

не может иметь больший порядок точности; причем она имеет тот же порядок точности тогда и только тогда, когда $\beta_{n+1} = 0$, $\beta_j = \alpha_j$, $j = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$.

3.103. Доказать, что если все точки x_i различны и удалены от точки x_0 на расстояние $O(h)$, где h — малая величина, то при гладкой $f(x)$ приближенная формула численного дифференцирования $f^{(k)}(x_0) \approx \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ имеет порядок погрешности $O(h^m)$. Здесь $m \geqslant j+1-k$, j — максимальная степень многочленов, для которых эта формула точна.

3.104. Найти аппроксимацию $f''(x)$ по равноотстоящим $(x_{i+1} - x_i = h)$ узлам x_i, $x_{i\pm1}$, $x_{i\pm2}$ с максимально возможным порядком точности по h.

3.105. Найти коэффициенты формул численного дифференцирования максимальной степени точности:

1) $f'(x) \approx \dfrac{af(x) + bf(x+h) + cf(x-h)}{h}$;
2) $f'(x) \approx \dfrac{af(x) + bf(x+h) + cf(x-2h)}{h}$;
3) $f''(x) \approx \dfrac{af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h)}{h^2}$;
4) $f''(x) \approx \dfrac{af(x) + bf(x+h) + cf(x-h)}{h^2}$;
5) $f''(x) \approx \dfrac{af(x) + bf(x-h) + cf(x-2h)}{h^2}$.

3.4. Многочлен наилучшего равномерного приближения

Пусть R — пространство ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ вещественной оси, с нормой $\|f(x)\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Для элемента $f \in R$ отыскивается наилучшее приближение вида $Q_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\, x^j$. Многочлен $Q_n^0(x)$ называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* для функции $f(x)$, если для любого многочлена $Q_n(x)$ степени n справедливо неравенство $\|f - Q_n^0\| \leqslant \|f - Q_n\|$.