1 Transitive closure of a binary relation, it's existence

Предложение (Транзитивное замыкание)

Дано отношение r на множестве A, оно является транзитивным замыканием, т.е.

$$r^* = \bigcup \{r^n | n \geq 1\}$$

Доказательство

Во-первых, отметим, что r^* транзитивно. Действительно, пусть $(a, b), (b, c) \in r^*$. Тогда для некоторых $n, m \geq 1$, $(a, b) \in r^n$ и $(b, c) \in r^m$. Но тогда $(a, c) \in r^n \circ r^m = r^{n+m} \subseteq r^*$. Так как $r^1 = r$, то $r \subseteq r^*$. Доказательство минимальности r^* проведём по индукции: покажем, что $r^n \subseteq r'$ для любого транзитивного r' содержащего r. Основание индукции - $n = 1$ очевидно. Теперь предположим, что $r^{n-1} \subseteq r'$ и $(a, c) \in r^n \stackrel{def}{=} r^{n-1} \circ r$. По определению композиции существует некоторое b такое, что $(a, b) \in r^{n-1}$ и $(b, c) \in r$. Тогда $(a, b), (b, c) \in r'$, и так как r' транзитивно, то $(a, c) \in r'$.

2 Church numbers: addition and multiplication

Сложение, умножение

Если определить сложение и умножение как

- $PLUS = \lambda mnfx.m\ f\ (n\ f\ x)$
- $MULT = \lambda mnfx.m\ (n\ f)\ x$

то

- $PLUS\ \underline{n}\ \underline{m} = \underline{n + m}$
- $MULT\ \underline{n}\ \underline{m} = \underline{n \cdot m}$

3 Predicate calculus of a given signature. Notions of linear proof and deduction tree. Provability characterization theorem

Определение

Линейное доказательство (или **линейный вывод**) из множества секвенций H в PredC_σ - это последовательность секвенций $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ такая, что каждая секвенция s_i:

- аксиома, т.е. $s_i \in A_{PredC}(\sigma)$
- предпосылка, т.е. $s_i \in H$
- получена из секвенций $s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$, по одному из правил вывода PredC_σ, т.е.

$$\frac{s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}}{s_i} \in R_{PredC}(\sigma)$$

Множество H называется множеством **предпосылок** или **предположений**, и если не указано, то будем считать, что $H = \emptyset$.

Определение

Секвенция s называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в PredC_σ из множества предпосылок H, тогда и только тогда, когда существует линейное доказательство $(s_1, \ldots, s_n)$ из множества H, такое, что $s = s_n$. Обозначается следующим образом:

$$H \rhd s$$

Если $H = \emptyset$, то можно писать просто $\rhd s$.

Определение

Формула ϕ называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в PredC_σ, тогда и только тогда, когда секвенция $\vdash \phi$ может быть выведена из пустого множества предпосылок, т.е. $\rhd \vdash \phi$. Обозначается как $\rhd\phi$.

Определение

Теперь по индукции определим **дерево секвенций** T, его высоту $h(T)$, корень $r(T)$ и множество листьев $l(T)$.

- секвенция s является деревом, $h(s) = 0$, $r(T) = s$, $l(T) = \{s\}$
- если $T_1, \ldots, T_n$ - деревья, а s - секвенция, то

$$T = \frac{T_1 \ \ldots \ T_n}{s}$$

  - является деревом:
    - высоты $h(T) = \max(\{h(T_i) | i \leq n\}) + 1$
    - с корнем $r(T) = s$
    - с листьями $l(T) = \cup\{l(T_i) | i \leq n\}$

переход в дереве секвенций T - 'это поддерево высоты 1, т.е. поддерево в T вида: $\frac{s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_n}{s_0}$

Определение

Дерево секвенций T называется **деревом вывода** секвенции s из множества предпосылок H в PredC_σ, тогда и только тогда, когда:

1. $r(T) = s$
2. все секвенции из множества листьев $l(T)$ являются аксиомами PredC_σ или элементами H, т.е. $l(T) \subseteq H \cup A_{PredC}(\sigma)$
3. все переходы $\frac{s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_n}{s_0}$ из T являются правилами вывода, т.е.

$$\frac{s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_n}{s_0} \in R_{PredC}(\sigma)$$

Теорема (эквивалентность выводимости)

Для любого множества секвенций H и секвенции s,
$H \rhd s \Leftrightarrow$ для s существует дерево вывода из предпосылок H.

Доказательство

$\Rightarrow$.

Пусть для s существует линейное доказательство $(s_1, \ldots, s_n)$ из предпосылок H. Индукцией по n докажем, что для s существует дерево вывода. Основание индукции: если $n = 1$, то $s = s_1 \in H \cup A_{PC}$ - аксиома или предпосылка, тогда $T = s$ - дерево вывода для s. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $i < n$, т.е. для секвенций $s_1, \ldots, s_{n-1}$ существуют деревья вывода $T_1, \ldots, T_{n-1}$ с предпосылками H. По индукции линейного доказательства существуют такие $s_{j_1}, \ldots s_{j_k}$, что $j_1, \ldots, j_k < n$ и $\frac{s_{j_1} \ \ldots \ s_{j_k}}{s_n}$ - правило вывода. Тогда

$$\frac{T_{j_1} \ \ldots \ T_{j_k}}{s_n}$$

будет деревом вывода для s_n. Обратное включение. $\Leftarrow$.

Пусть существует дерево вывода T для s с предпосылками H. Индукцией по высоте T докажем, что для любого дерева вывода T с предпосылками H его корень линейно доказуем из H. Основание индукции: если $h(T) = 0$, то $T = s$, следовательно, $s \in H \cup A_{PC}$ - аксиома или предпосылка, тогда s очевидно доказуем из H. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех деревьев высоты $< n$, $T = \frac{T_1 \ \ldots \ T_n}{S}$ - дерево вывода высоты n. Тогда $h(T_i) < n$ для всех $1 \leq i \leq n$, следовательно, все корни $r(T_i) = s_i$ линейно доказуемы из H. Пусть P_i - линейное доказательство s_i. Последний переход в дереве T выглядит следующим образом: $\frac{s_1 \ \ldots \ s_n}{s}$ и происходит по какому-либо правилу вывода. Тогда секвенция $P = P_1 \hat{} \, P_2 \hat{} \, \ldots \hat{} \, P_n \hat{} \, s$ будет линейным доказательством s с предпосылками H. $\square$