1 Theorem about cardinality of a Cartesian square of a countable set

Теорема

Дано счётное множество A, его квадрат A^2 также является счётным.

Доказательство

Поскольку A счётно, существует биекция $f : A \to \omega$. Тогда отображение $A^2 \ni (a, b) \mapsto (f(a), f(b)) \in \omega^2$ - биекция A^2 на ω^2. Ясно, что $\omega \preceq \omega^2$, потому что отображение $n \mapsto (0, n)$ очевидно инъективно. С другой стороны, отображение $(n, m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$ также инъективно, поэтому $\omega^2 \preceq \omega$. По теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $\omega^2 \approx \omega$, следовательно, A^2 счётно.

2 Syntactical equivalence $\equiv$, syntactic form of replacement theorem

Определение

Две формулы ϕ и ψ называются **синтаксически эквивалентными** тогда и только тогда, когда $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \phi$. Это отношение обозначается следующим образом:

$$\phi \equiv \psi$$

Лемма

Отношение $\equiv$ на множестве всех формул L_{prop} - это отношение эквивалентности.

Доказательство

Рефлексивность: очевидно следует из $\phi \vdash \phi \in A_{PC}$. Симметричность - следует из определения. Транзитивность. Пусть $\phi \equiv \psi \equiv \chi$. Тогда по определению $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \chi$. Следовательно, по правилу сечения $\rhd\phi \vdash \chi$. Доказательство $\rhd\chi \vdash \phi$ выполняется аналогично. Следовательно, $\phi \equiv \chi$.

Лемма

1. Если $\phi \equiv \psi$, то $\rhd\phi \Leftrightarrow \rhd\psi$.
2. Если $\phi_1 \equiv \phi_2$ и $\psi_1 \equiv \psi_2$, то

   1. $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$
   2. $(\phi_1 \wedge \psi_1) \equiv (\phi_2 \wedge \psi_2)$
   3. $(\phi_1 \vee \psi_1) \equiv (\phi_2 \vee \psi_2)$
   4. $(\phi_1 \rightarrow \psi_1) \equiv (\phi_2 \rightarrow \psi_2)$

Доказательство

Докажем 1. Пусть $\rhd\phi$, т.е. секвенция $\vdash \phi$ является выводимой. Тогда по правилу сечения:

$$\rhd \quad \frac{\vdash \phi \quad \phi \vdash \psi}{\vdash \psi}$$

таким образом $\rhd\psi$. Обратное включение - аналогично. Доказательство $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$:

$$\cfrac{\cfrac{\phi_2 \vdash \phi_1 \quad \neg\phi_1 \vdash \neg\phi_1}{\neg\phi_1, \phi_2 \vdash \bot}}{\neg\phi_1 \vdash \neg\phi_2}$$

Доказательство $(\phi_1 \wedge \psi_1) \equiv (\phi_2 \wedge \psi_2)$:

$$\cfrac{\cfrac{(\phi_1 \wedge \psi_1) \vdash \phi_1 \quad \phi_1 \vdash \phi_2}{(\phi_1 \wedge \psi_1) \vdash \phi_2} \qquad \cfrac{(\phi_1 \wedge \psi_1) \vdash \psi_1 \quad \psi_1 \vdash \psi_2}{(\phi_1 \wedge \psi_1) \vdash \psi_2}}{(\phi_1 \wedge \psi_1) \vdash (\phi_2 \wedge \psi_2)}$$

Теорема (о замене)

Пусть ϕ - формула и $\psi \sqsubseteq \phi$ - некоторая подформула. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, и ϕ' - результат замены некоторого вхождения формулы ψ на формулу ψ', то $\phi \equiv \phi'$.

Доказательство

Это доказательство повторяет аналогичную теорему о замене для семантической эквивалентности. Индукция по разности глубин n формул $d(\phi) - d(\psi)$. Если $n = 0$, то $\phi = \psi$, доказывать нечего. Пусть $0 < n$ и утверждение верно для всех $k < n$. Рассмотрим варианты построения ϕ. Случай 1. Если $\phi = \neg\phi_1$, $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$, по предположению индукции, тогда если ϕ_1' является результатом замены формулы ψ на формулу ψ', то $\phi_1' \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = \neg\psi_1' \equiv \neg\phi_1 = \phi$$

Случай 2. Если $\phi = (\phi_1 \bullet \phi_2)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}$, и $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$ или $\psi \sqsubseteq \phi_2$. Пусть, например, $\psi \sqsubseteq \phi_1$. Тогда по предположению индукции если ϕ_1' является результатом замены формулы ψ на формулу ψ', то $\phi_1' \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = (\psi_1' \wedge \phi_2) \equiv (\phi_1 \wedge \phi_2) = \phi$$

$\square$

3 Horn clauses, resolution rule. Soundness theorem for the resolution rule

Определение (литерал)

Литерал - это атомарная формула или её отрицание.

Определение (Хорновский дизъюнкт)

Хорновский дизъюнкт - это дизъюнкция литералов, т.е. это элементарная дизъюнкция. Существует специальный Хорновский дизъюнкт - пустой дизъюнкт, обозначаемый как $\square$ и означающий ложную формулу $\perp$.

Примеры:

- $p(x, f(y)) \vee \neg q(x, x) \vee p(h(x, y), h(y, f(x)))$
- $p(x, f(y), z) \vee q(x) \vee p(h(x, y, z), h(y, f(x)), x) \vee \neg q(f(y))$

- $\neg p(f(f(f(x)))) \vee p(x)$

Соглашение. Поскольку Хорновские дизъюнкты - это просто дизъюнкция, далее будем считать, что Хорновский дизъюнкт - это *множество* всех литералов, входящих в его состав:

$$h = l_1 \vee \ldots \vee l_k = \{l_1, \ldots, l_k\}$$

Определение (резолюция)

Даны два Хорновских дизъюнкта h_1 и h_2, если существует два литерала $p(\bar{t}) \in h_1$ и $\neg p(\bar{s}) \in h_2$ таких, что кортежи термов $\bar{t}$ и $\bar{s}$ унифицируемы, применимо правило **резолюции** вывода, и если θ - наиболее общий унификатор $\bar{t}$ и $\bar{s}$, то:

$$\frac{h_1 \qquad h_2}{\theta((h_1 \cup h_2) \setminus \{p(\bar{t}), \neg p(\bar{s})\})}(Res)$$

Теорема (корректность резолюции)

Если для некоторых Хорновских дизъюнктов h_1, h_2 и h_0 верно, что

$$\frac{h_1 \qquad h_2}{h_0}(Res)$$

и в некоторой структуре $\mathcal{M} \models h_1 \wedge h_2$ (означающей, что $\mathcal{M} \models \forall \bar{x} h_i(\bar{x})$ для $i \in \{1, 2\}$), то $\mathcal{M} \models h_0$.

Доказательство

Предположим, что существуют такие литералы, что $h_1 = \{p(\bar{t})\} \cup h_1'$, $h_2 = \{\neg p(\bar{s})\} \cup h_2'$ и кортежи термов $\bar{t}$ и $\bar{s}$ унифицируемы при помощи наиболее общего унификатора θ, таким образом,

$$\frac{h_1 \qquad h_2}{\theta(h_1' \cup h_2')}(Res)$$

Также предположим, что $\mathcal{M} \models h_1 \wedge h_2$ но $\mathcal{M} \not\models (h_1 \cup h_2) \setminus \{p(\bar{t}), \neg p(\bar{s})\}$. Тогда существует такой кортеж $\bar{a} \in M$, что $\mathcal{M} \models \neg\theta(h_1' \cup h_2')(\bar{a})$. Поскольку h_i' - дизъюнкции, все литералы из $\theta(h_i')(\bar{a})$ ложны в $\mathcal{M}$. Но так как h_1 и

h_2 тождественно истинны на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \theta(p(\bar{t}))(\bar{a})$ и $\mathcal{M} \models \theta(\neg p(\bar{s}))(\bar{a})$. Но $\theta(p(\bar{t}) = p(\bar{q}) = \theta(p(\bar{s}))$, следовательно, получаем

$$\mathcal{M} \models p(\bar{q})(\bar{a}) \wedge \neg p(\bar{q})(\bar{a})$$

это противоречие завершает доказательство. $\square$