Свойства определенных интегралов и интегрируемых функций

1. Свойства определенных интегралов
2. Достаточные признаки интегрируемости функций
3. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла
4. Интегральная теорема о среднем
5. Интеграл по ориентированному промежутку
6. Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, оценка приращения.
7. Производная по верхнему пределу интегрирования. Следствия.
8. Формула Ньютона - Луйбница. Примеры и следствия
9. Формула интегрирования по частям для определенных интегралов
10. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

1.

$(\mathbf{DI})_1$. Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке Δ. Тогда функция $|f|$ также интегрируема на промежутке Δ.

$(\mathbf{DI})_2$. Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке Δ и при этом

$$|f(x)| \geqslant C > 0 \quad \text{при} \quad \forall x \in \Delta,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Тогда отношение $\frac{1}{f}$ — это также интегрируемая на промежутке Δ функция.

$(\mathbf{DI})_3$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда их сумма $f+g$, разность $f-g$ и произведение $f \cdot g$ также интегрируемы на промежутке Δ.

$(\mathbf{DI})_4$. Пусть функция $f(x)$ ограничена на конечном интервале $(a,b) \subset D_f$ и при этом интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]$, вложенном в интервал (a,b), $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на (a,b).

$(\mathbf{DI})_5$. Если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь в конечном числе точек из промежутка Δ, то $f(x)$ интегрируема на Δ и при этом

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = 0.$$

$(\mathbf{DI})_6$. Пусть $f(x)$ — ступенчатая функция на промежутке Δ, т.е. существует разбиение

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$$

промежутка Δ такое, что

$$f(x) = C_i \qquad \forall\, x \in \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где C_i — постоянные. Тогда $f(x)$ — интегрируема на Δ и при этом

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} C_i |\Delta_i|. \tag{5}$$

2.

$(\mathbf{RS})$. Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на конечном интервале (a, b), то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно непрерывна на конечном промежутке Δ, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна на конечном интервале (a, b), то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на конечном промежутке Δ, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

3.

Теорема (линейность интеграла). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда для любых постоянных λ и μ линейная комбинация $\lambda f(x) + \mu g(x)$ также интегрируема на Δ и при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Delta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_{\Delta} f(x)\, dx + \mu \int\limits_{\Delta} g(x)\, dx. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмем последовательность

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$$

разбиений промежутка Δ с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau_k|$, т.е. $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. Для интегральных сумм Римана, соответствующих разбиению $\tau_k(\Delta)$, справедливо соотношение

$$\sigma(\lambda f + \mu g, \tau_k) = \lambda \sigma(f, \tau_k) + \mu \sigma(g, \tau_k).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получаем в результате искомую формулу (6) для интеграла от линейной комбинации. $\square$

Теорема (аддитивность интеграла). *Пусть промежутки* Δ, Δ' *и* Δ'' *связаны соотношениями* $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на промежутке* Δ, *то*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta'} f(x)\,dx + \int\limits_{\Delta''} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Теорема (монотонность интеграла). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на промежутке* Δ *и при этом*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Delta} g(x)\,dx.$$

4.

Теорема (интегральная теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке Δ, функция $f(x)$ непрерывна на Δ, а функция $g(x)$ неотрицательна на Δ. Тогда существует такая точка ξ из Δ, что*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx. \tag{9}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$m = \inf_{x\in\Delta} f(x), \qquad M = \sup_{x\in\Delta} f(x).$$

Обе эти величины конечны в силу непрерывности $f(x)$ на отрезке Δ. Из неотрицательности на Δ функции $g(x)$ следует, что

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Интегрируя эти неравенства, получаем

$$m\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx.$$

Если $\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx = 0$, то из последних двух неравенств следует, что $\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx = 0$, и поэтому равенство (9) справедливо.

Пусть теперь $\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx > 0$. Тогда имеем

$$m \leqslant \frac{\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{10}$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна на отрезке Δ. Следовательно, она принимает на Δ все значения из отрезка $[m, M]$. В частности, из (10) следует существование точки ξ из Δ, удовлетворяющей равенству (9). $\square$

5.

Определение. *Интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ *называются интегралами по ориентированным промежуткам.*

$(\mathrm{DI})_1'$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда для любых постоянных λ и μ справедливы равенства

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

где a и b — любые числа из промежутка Δ.

$(\mathrm{DI})_2'$. Если функция $f(x)$ интегрируема на Δ, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где a, b, c — любые числа из промежутка Δ.

$(\mathrm{DI})_3'$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ, функция $f(x)$ непрерывна на Δ, а функция $g(x)$ не меняет знак на Δ. Тогда для любых точек a и b из Δ существует точка ξ, лежащая между a и b и такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (\mathrm{MT}')$$

В частности, при $g(x) = 1$ имеем равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Подчеркнем, что в свойствах $(\mathrm{DI})'_1$, $(\mathrm{DI})'_2$ и $(\mathrm{DI})'_3$ числа a и b выбираются из промежутка Δ произвольным образом, т.е. возможны три случая: $a < b$, $a = b$ и $a > b$.

В равенстве $(\mathrm{DI})'_2$ точки a, b, c выбираются в промежутке Δ также произвольным образом. При этом возможны все шесть случаев: $a \leqslant b \leqslant c$, $a \leqslant c \leqslant b$, $b \leqslant a \leqslant c$ и т.д.

6.

6^0. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке Δ. Тогда для любой точки x из Δ имеет смысл следующая функция:

$$F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt, \qquad x \in \Delta.$$

Здесь c — точка из Δ. Эта функция $F(x)$ называется *интегралом с переменным верхним* пределом

Теорема (о приращении интеграла). *Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке Δ и $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt$, где точки c и x принадлежат Δ.*

Тогда справедлива оценка

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant \|f\| \cdot |x_2 - x_1|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \Delta,$$

где $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Delta} |f(x)|$.

Доказательство. Заметим, что из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману следует ограниченность этой функции на промежутке Δ, т.е. оценка

$$\|f\| = \sup_{x\in\Delta} |f(x)| < +\infty.$$

Для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих Δ, имеют место соотношения

$$|F(x_2)-F(x_1)| = \Big|\int_c^{x_2} f(t)\,dt - \int_c^{x_1} f(t)\,dt\Big| = \Big|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{x_1}^{x_2} \sup_{y\in\Delta} |f(y)|\,dt = \|f\| \int_{x_1}^{x_2} dt = \|f\|\cdot|x_2-x_1|.$$

Это и есть искомая оценка приращения интеграла $F(x)$ с переменным верхним пределом. □

Следствие. *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке Δ, то интеграл $F(x)$ с переменным верхним пределом является непрерывной на промежутке Δ функцией.*

Переформулировка теоремы о приращении

Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке Δ, то для любого промежутка Δ' такого, что $\Delta' \subset \Delta$, имеет место неравенство

$$\Big|\int_{\Delta'} f(x)\,dx\Big| \leqslant \|f\| \cdot |\Delta'|.$$

7.

Теорема (о дифференцируемости интеграла). *Если интегрируемая на промежутке Δ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 из Δ, то интеграл*

$$F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad c \in \Delta,$$

имеет в точке x_0 производную и при этом $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Для точки x из Δ, $x \neq x_0$, рассмотрим приращения

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{и} \quad \Delta F = F(x) - F(x_0).$$

Имеют место равенства

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt; \qquad f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right|.$$

Из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует, что

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек x из пересечения промежутка

Δ с окрестностью $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнена оценка $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Для всех таких x, $x \neq x_0$, имеем

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\int_{x_0}^{x}\Big|f(t) - f(x_0)\Big|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\int_{x_0}^{x}dt = \varepsilon.$$

Это означает, что существует предел

$$\lim_{x \to x_0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0).$$

Следовательно, интеграл $F(x)$ имеет в точке x_0 производную, причем $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Следствие. *Для любой непрерывной на промежутке Δ функции $f(x)$ интеграл с переменным верхним пределом*

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in \Delta,$$

является для $f(x)$ первообразной на Δ.

Из теоремы о дифференцируемости интеграла заключаем также, что

1. Любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

2. Для любой непрерывной на промежутке Δ функции $f(x)$ операция ее интегрирования с

переменным верхним пределом является обратной к операции дифференцирования, т.е.

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{c}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

3. Справедлива также следующая формула для производной по нижнему пределу:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x}^{c} f(t)\,dt\right) = -f(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

8.

Теорема (формула Ньютона — Лейбница). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет здесь же первообразную $F(x)$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad \text{(NL)}$$

Доказательство. Пусть сначала $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $F'(x) = f(x)$ для всех x из (a,b).

Пусть $\tau([a,b]) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ задает разбиение отрезка $[a,b]$ с узлами

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

В этом случае приращение первообразной на отрезке $[a,b]$ представимо в виде

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о среднем. Пользуясь этой теоремой, получаем

$$\exists\, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i): \qquad F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Подставляя эти равенства в предыдущую формулу, получаем

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i \equiv \sigma(f, \tau, \xi). \qquad (11)$$

Здесь $\sigma(f, \tau, \xi)$ обозначает интегральную сумму Римана для функции $f(x)$, соответствующую разбиению τ отрезка $[a, b]$ и вектору $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$.

По условию функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и, следовательно, сущестует предел интегральных сумм Римана:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f, \tau, \xi) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Пользуясь этим равенством и переходя к пределу при $|\tau| \to 0$ в формуле (11), получим в итоге искомую формулу (NL).

Пусть теперь $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет первую производную $F'(x) = f(x)$ в точках интервала (a, b) за исключением, возможно, конечного числа точек c_1, ..., c_{N-1}. Предполагаем, что

$$c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{N-1} < c_N = b.$$

В точках c_j производная $F'(x)$ может либо не существовать, либо не совпадать с $f(c_j)$.

К каждому из отрезков $[c_{i-1}, c_i]$ применим формуле (**NL**):

$$\int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx = F(c_i) - F(c_{i-1}).$$

Суммируя эти равенства по всем i, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (F(c_i) - F(c_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Таким образом, формула (**NL**) справедлива и во втором рассматриваемом случае. □

Определение. *Равенство* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ *называется формулой Ньтона — Лейбница.*

Вместо разности $F(b) - F(a)$ часто пишут $F(x)\Big|_a^b$.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и имеет здесь же первообразную* $F(x)$*, то*

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x f(x)\,dx. \tag{12}$$

Равенство (12) получается из формулы (**NL**), если взять в последней $b = x$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет здесь же первообразную $F(x)$, то найдется такая точка ξ из интервала (a,b), что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{13}$$

Равенство (13) следует из формулы Ньютона — Лейбница и теоремы Лагранжа о среднем значении, примененненной к приращению $F(b) - F(a)$.

Пример. *Применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем следующие равенства*

$$\int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2x =$$

$$= \frac{x}{2}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

9.

Теорема (интегрирование по частям). *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и кусочно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Если при этом производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на том же отрезке, то имеет место равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \quad \text{(IbP)}$$

Доказательство. В условиях теоремы произведение $F(x) = u(x)v(x)$ является первообразной для функции

$$f(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x),$$

причем $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Применяя к паре $f(x)$ и $F(x)$ формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

т.е. искомую формулу интегрирования по частям. □

10.

Теорема (формула Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до порядка n включительно, причем производная $f^{(n)}(x)$ кусочно дифференцируема, а производная $f^{(n+1)}(x)$ при этом интегрируема на $[a,b]$. Тогда для любой точки x_0 из отрезка $[a,b]$ выполняется следующее равенство*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по параметру n — числу слагаемых в правой части доказываемой формулы.

При $n=0$ доказываемая формула принимает вид

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt,$$

т.е. совпадает с уже доказанной формулой Ньютона — Лейбница.

Далее заметим, что при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, согласно формуле интегрирования по частям имеют место равенства

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt = -\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)\,d((x-t)^k) =$$

$$= -\frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(x-t)^k\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt =$$

$$= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt.$$

В частности, при $k = n$ имеем

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (14)$$

Предположим теперь, что при некотором натуральном $n-1$ выполнено искомое равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Выразив интеграл в правой части по формуле (14), получим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\,dt,$$

т.е. искомую формулу, соответствующую натуральному n. В соответствии с принципом математической индукции заключаем, что формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме верна. $\square$