Тема : Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка

$\mathbf{1^0}$. Общие свойства линейных систем первого порядка. $\mathbf{2^0}$. Линейная зависимость и независимость систем вектор-функций. Критерий линейной независимости решений. Определитель Вронского. Формула Остроградского — Лиувилля. $\mathbf{3^0}$. Фундаментальная система решений. Общее решение. $\mathbf{4^0}$. Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами. $\mathbf{5^0}$. Собственные значения и собственные векторы матриц. $\mathbf{6^0}$. Фундаментальная система решений для линейной системы дифференциальных уравнений с матрицей простой структуры. $\mathbf{7^0}$. Фундаментальная система решений в случае кратных корней характеристического уравнения. Присоединенные векторы.

1^0. *Линейной системой дифференциальных уравнений первого порядка* называется система равенств вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \quad (1)$$

Функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, называют *коэффициентами*, а функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ образуют в совокупности *правую часть* системы (1). Запись системы в виде отдельных уравнений называется *покомпонентной*.

В дальнейшем коэффициенты и правые части системы предполагаются *непрерывными функциями на том интервале* (a, b) числовой оси, где рассматриваются исходные дифференциальные уравнения.

Общая теория линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка во многом *аналогична теории линейных дифференциальных уравнений порядка* n. В частности, для любой точки x_0 из интервала (a, b) задача Коши с условиями

$$y_1(x_0) = y_{10}, \; y_2(x_0) = y_{20}, \; \ldots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (2)$$

имеет единственное решение, определенное на всем интервале (a, b).

Если все функции $f_i(x)$ правой части тождественно нулевые, то система (1) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Квадратная матрица

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

из коэффициентов уравнений в (1) называется *матрицей системы*.

Вместе с матрицей $A(x) = (a_{ij}(x))$ системы рассматриваются *вектор-столбцы неизвестных и правой части*:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

С помощью этих обозначений система (1) записывается в *матричном виде*

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y + F(x).$$

Далее будем использовать обозначение

$$L[Y] = \frac{dY}{dx} - A(x)Y.$$

Выражение в правой части задает *дифференциальный оператор*, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b) вектор-функций. Этот оператор линеен. Область его значений — это множество непрерывных вектор-функций высоты n.

2^0. Вектор-функции $Y_1(x)$, ..., $Y_m(x)$, определенные на (a, b), называются *линейно независимыми на интервале* (a, b), если тождество

$$\alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_m Y_m(x) \equiv 0, \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

выполняется лишь при условии, что $\alpha_1 = 0$, ..., $\alpha_m = 0$. Если же среди чисел α_1, ..., α_m имеется хотя бы одно ненулевое и при этом

$$\alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_m Y_m(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

то система вектор-функций $\boldsymbol{Y_1(x)}$, ..., $\boldsymbol{Y_m(x)}$ называется *линейно зависимой на* $\boldsymbol{(a,b)}$.

Пусть на интервале $\boldsymbol{(a,b)}$ заданы $\boldsymbol{n}$ вектор-функций

$$\boldsymbol{Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.}$$

Определение. *Детерминант*

$$\boldsymbol{W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}}$$

называется определителем Вронского для системы вектор-функций

$$\mathbf{Y}_1(x), \dots, \mathbf{Y}_n(x).$$

Теорема. *Если вектор-функции* $\boldsymbol{Y_1(x)}, \ldots, \boldsymbol{Y_n(x)}$ *линейно зависимы в интервале* $\boldsymbol{(a, b)}$, *то их определитель Вронского* $\boldsymbol{W(x)}$ *тождественно равен нулю на этом интервале.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для одного линейного дифференциального уравнения.

Теорема. *Пусть вектор-функции*

$$\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{Y}_n(\boldsymbol{x})$$

линейно независимы на интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *и каждая из них является решением однородной системы*

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}.$$

Тогда их определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке данного интервала.

Доказательство. Пусть существует точка x_0 из интервала (a, b), для которой выполняется равенство $W(x_0) = 0$. Тогда столбцы этого определителя, то есть векторы $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$, линейно зависимы: найдутся числа α_1, ..., α_n, не все равные нулю, $\alpha_j \neq 0$, и такие что выполняется равенство

$$\alpha_1 Y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n Y_n(x_0) = 0.$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\boldsymbol{Y(x) = \alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x)}.$$

Вектор-функция $\boldsymbol{Y(x)}$ является решением рассматриваемой однородной системы:

$$\boldsymbol{L[Y] = \alpha_1 L[Y_1(x)] + \ldots + \alpha_n L[Y_n(x)] = 0}.$$

При этом $\boldsymbol{Y(x_0) = 0}$, то есть $\boldsymbol{Y(x)}$ является решением задачи Коши с нулевыми начальными данными в точке $\boldsymbol{x_0}$.

В силу единственности решения задачи Коши функция $Y(x)$ тождественно нулевая на интервале (a, b). Это означает, что вектор–функции $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ линейно зависимы на этом интервале, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие опровергает предположение о том, что существует точка x_0, в которой определитель Вронского обращается в нуль. $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского $\boldsymbol{W}(x)$ решений $\boldsymbol{Y}_1(x)$, ..., $\boldsymbol{Y}_n(x)$ однородной системы равен нулю хотя бы в одной точке интервала (a, b), то $\boldsymbol{W}(x)$ равен нулю во всех точках этого интервала.*

Следствие. *Если определитель Вронского $\boldsymbol{W}(x)$ решений $\boldsymbol{Y}_1(x)$, ..., $\boldsymbol{Y}_n(x)$ однородной системы отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b), то он отличен от нуля и во всех остальных точках этого интервала.*

Следствие. *Для линейной независимости решений*

$$\boldsymbol{Y_1(x), \ldots, Y_n(x)}$$

однородной системы на интервале $\boldsymbol{(a, b)}$ необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского $\boldsymbol{W(x)}$ не равнялся нулю хотя бы в одной точке этого интервала.

Теорема (формула Остроградского — Лиувилля для систем). *Пусть вектор-функции* $\mathbf{Y}_1(x)$, ..., $\mathbf{Y}_n(x)$ *являются решениями однородной системы*

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\boldsymbol{W}(x) = \boldsymbol{W}(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x}[a_{11}(\xi)+\ldots+a_{nn}(\xi)]d\xi}.$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой для производной определителя и получим равенство

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & & \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Рассмотрим первое слагаемое–детерминант

в правой части. Преобразуем первую строку этого детерминанта, то есть строку из производных, используя дифференциальные уравнения системы ($k = 1, \ldots, n$):

$$y'_{1k} = a_{11}(x)y_{1k} + a_{12}(x)y_{2k} + \ldots + a_{1n}(x)y_{nk}.$$

Умножим вторую строку детерминанта на функцию $-a_{12}(x)$ и сложим с первой строкой, затем умножим третью строку на функцию $-a_{13}(x)$ и вновь сложим с первой, и т.д.

вплоть до последней строки. Согласно свойствам определителей указанные преобразования не изменят величину первого из детерминантов в правой части (3). В результате он примет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x)y_{11} & a_{11}(x)y_{12} & \cdots & a_{11}(x)y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(x)W(x).$$

Аналогичным образом преобразуем второе

и последующие слагаемые в правой части равенства (3). В результате придем к равенству

$$\boldsymbol{W'(x)} = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \right] W(x).$$

Интегрируя это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, получаем формулу Остроградского — Лиувилля. $\square$

3^0. Среди всевозможных решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений выделяются важные подмножества решений, обладающие специальным свойством.

Определение. *Совокупность из* n *решений* $Y_1(x)$, …, $Y_n(x)$ *однородной системы дифференциальных уравнений, линейно независимых на интервале* (a, b), *называется фундаментальной системой решений на этом интервале.*

Теорема (существование фундаментальной системы). *Для любой однородной системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

с непрерывными на интервале (a, b) коэффициентами существует фундаментальная на этом интервале система решений.

Доказательство. Возьмем произвольную точку x_0 из интервала (a, b) и построим решение задачи Коши $Y_k(x)$ для рассматриваемой однородной системы, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y_{ik}(x_0) = \delta_i^k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Здесь δ_i^k — символ Кронекера). Согласно теореме существования, функция $Y_k(x)$ определена на всем интервале (a, b).

Определитель Вронского $W(x)$ вектор-функций $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ в точке x_0 равен единице: $W(x_0) = 1$. По формуле Остроградского — Лиувилля этот определитель отличен от нуля всюду на (a, b).

Поэтому рассматриваемые решения $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ линейно независимы на интервале (a, b) и образуют фундаментальную систему. $\square$

Теорема (формула общего решения однородной системы). *Пусть* $\mathbf{Y}_1(x)$, ..., $\mathbf{Y}_n(x)$ — *фундаментальная система решений для линейных уравнений*

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = A(x)\mathbf{Y}.$$

Тогда всякая вектор-функция вида

$$\mathbf{Y}(x) = C_1\mathbf{Y}_1(x) + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n(x),$$

где C_1, $\ldots$, C_n — произвольные постоянные, решает ту же самую однородную систему. Обратно, для любого решения $Y(x)$ однородной системы найдутся такие постоянные C_1, $\ldots$, C_n, что для всех x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x).$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы справедливо вследствие линейности дифференциального оператора L:

$$L[Y] = \alpha_1 L[Y_1(x)] + \ldots + \alpha_n L[Y_n(x)] = 0.$$

Докажем второе утверждение. Пусть вектор-функции

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_k(x) = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ \vdots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix},$$

где $k = 1, \ldots, n$, задают, соответственно, произвольное решение однородной системы и фундаментальную систему ее же решений. Рассмотрим следующую совокупность линейных алгебраических уравнений:

$$C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0),$$

$$C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = y_2(x_0),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0),$$

где x_0 — произвольная точка из интервала (a, b). Определитель $W(x)$ этой алгебраической системы линейных уравнений — это определитель Вронского фундаментальной системы $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$, и, следовательно, он не равен нулю.

Таким образом, рассматриваемая алгебраическая система линейных уравнений имеет единственное решение: обозначим его как

C_1^0, ..., C_n^0 и рассмотрим вектор-функцию

$$Y_*(x) = C_1^0 Y_1(x) + \ldots + C_n^0 Y_n(x).$$

Эта функция решает однородную систему $L[Y_*(x)] = 0$ и при этом удовлетворяет начальным условиям

$$Y_*(x_0) = Y(x_0).$$

В силу единственности решения задачи Коши функции $Y(x)$ и $Y_*(x)$ обязаны совпадать на всем интервале (a, b), то есть

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{Y}_*(x) = C_1^0\mathbf{Y}_1(x) + \ldots + C_n^0\mathbf{Y}_n(x).$$

$\square$

Следствие. *Линейная однородная система из n дифференциальных уравнений имеет в точности n линейно независимых решений.*

4^0. Неоднородная система *линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* имеет следующий вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t).$$

Здесь в качестве независимой выбрана переменная t, в качестве искомых выступают функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$, $y_n(t)$, а вещественные коэффициенты a_{11}, a_{12}, $\ldots$, a_{nn} системы постоянны. Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$, $f_n(t)$, задающие правую часть системы, непрерывны на всем промежутке (a, b).

Если $f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv \ldots \equiv f_n(t) \equiv 0$, то линейная система называется *однородной.*

Запишем линейную систему дифференциальных уравнений в матричной форме. Пусть

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система принимает вид $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{b}(t)$. В случае тождественно нулевой правой части $\overrightarrow{b} \equiv \mathbf{0}$ имеем

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}. \tag{4}$$

Обозначим линейное пространство решений системы (4) на интервале (a, b) как X. Любой базис в пространстве X называется *фундаментальной системой решений* для однородной системы (4) .

Пусть найдены частные решения однородной системы:

$$\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{x_1}(t), \quad \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{x_2}(t), \quad \cdots, \quad \overrightarrow{y_n} = \overrightarrow{x_n}(t).$$

Если эти функции линейно независимы, то они образуют *фундаментальную систему решений*, а общее решение системы при этом имеет следующий вид:

$$y(t, \overrightarrow{C}) = C_1\overrightarrow{x_1}(t) + C_2\overrightarrow{x_2}(t) + \ldots + C_n\overrightarrow{x_n}(t). \quad (5)$$

Определение. *Матрица, столбцами которой являются вектор-функции фундаментальной системы решений, называется фундаментальной матрицей решений.*

Если для линейной однородной системы

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

найдена какая-нибудь фундаментальная матрица решений $\Phi(t) = \left(\overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t), \ldots, \overrightarrow{x_n}(t)\right)$, то формула общего решения этой системы записывается в виде

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \Phi(t)\overrightarrow{C}, \tag{6}$$

где $\overrightarrow{C}$ — это вектор-столбец из произвольных постоянных:

$$\overrightarrow{C} = \uparrow (C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Таким образом, для получения формулы общего решения линейной системы дифференциальных уравнений $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ необходимо и достаточно найти n ее линейно независимых решений.

5^0. Прежде чем указать алгоритм поиска фундаментальной матрицы решений в случае систем с постоянными коэффициентами, введем понятие собственных значений и собственных векторов матрицы A.

С этой целью составим матрицу $A - \lambda E$, где E — единичная матрица, а λ — комплексная переменная. Далее рассмотрим определитель матрицы $A - \lambda E$:

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Этот определитель является полиномом степени n и разлагается по степеням λ следующим образом:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Полином $P_n(\lambda)$ называется *характеристическим* для матрицы A.

Определение. *Корни характеристического полинома $P_n(\lambda)$ называются собственными значениями матрицы A.*

Определение. *Любое нетривиальное решение $\overrightarrow{x}_k$ векторного уравнения*

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0 \tag{7}$$

называется собственным вектором матрицы A*, отвечающим собственному значению* λ_k.

Определитель матрицы системы (7) равен нулю и поэтому у нее заведомо существуют нетривиальные решения.

Для того чтобы выписать какое-нибудь нетривиальное решение системы (7) можно действовать по следующему правилу:

в качестве компонент искомого ненулевого вектора $\vec{x}_k$ *следует взять алгебраические дополнения к какой-либо наперед выбранной строке матрицы* $A - \lambda_k E$.

При этом полезно придерживаться следующих двух рекомендаций:

1) строку надо выбирать так, чтобы подсчет алгебраических дополнений был максимально простым;

2) алгебраические дополнения не должны все обращаться в нуль (иначе получим тривиальное решение).

Пусть известны n линейно независимых *собственных векторов* постоянной матрицы A:

$$\overrightarrow{x_1}, \quad \overrightarrow{x_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{x_n}.$$

Эти собственные векторы соответствуют *собственным значениям матрицы* A, среди которых могут быть и совпадающие:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n.$$

Определение. *Если у матрицы A размеров $n \times n$ имеется ровно n линейно независимых собственных векторов, то говорят, что матрица A имеет простую структуру.*

Простую структуру имеет любая симметричная матрица $A = A^*$, а также любая нормальная матрица, то есть матрица, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}$. Любая матрица простой структуры подобна диагональной.

6^0. Используя введенные обозначения для собственных векторов и собственных чисел, фундаментальную систему решений для дифференциальных уравнений с матрицей $\boldsymbol{A}$ простой структуры можно записать в виде

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \overrightarrow{x_1} e^{\lambda_1 t}; \quad \overrightarrow{x_2}(t) = \overrightarrow{x_2} e^{\lambda_2 t}; \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \overrightarrow{x}_{n-1}(t) = \overrightarrow{x}_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t}, \quad \overrightarrow{x_n}(t) = \overrightarrow{x_n} e^{\lambda_n t}.$$

Легко проверить, что каждая из вышеопределенных вектор-функций $\overrightarrow{x_j}(t)$, $j = 1, \ldots, n$, является решением однородной системы

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}.$$

Таким образом, чтобы в случае матрицы A простой структуры построить фундаментальную систему решений достаточно найти собственные векторы и собственные значения этой матрицы.

Если найденные собственные векторы

$$\overrightarrow{x_1}, \quad \overrightarrow{x_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{x_n}$$

матрицы $\boldsymbol{A}$ *линейно независимы*, то фундаментальная матрица решений для линейной системы $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda_1 t}}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_2}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda_2 t}}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{x_n}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda_n t}}\right). \tag{8}$$

Если все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ *различны, то соответствующие им собственные векторы образуют линейно независимую систему*, то есть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет простую структуру.

Пример. Найти фундаментальную матрицу решений и общее решение системы

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \qquad y_2' = 3y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы, то есть ее характеристический полином, имеет вид

$$P_2(\lambda) = |A - \lambda E| = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Корни этого полинома различны: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 1$. Эти корни задают собственные значения матрицы A. Соответствующие собственные векторы – это решения двух систем уравнений:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 \quad \text{и} \quad (A - \lambda_2 E)x = 0.$$

При $\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$ имеем

$$\boldsymbol{A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\overrightarrow{x}_1}$ находим как алгебраические дополнения к элементам первой строки. Получаем в результате $\boldsymbol{\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$.

Первое частное решение системы дифференциальных уравнений находим по формуле

$$\vec{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 1$ имеем

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора $\vec{x_2}$ находим как алгеб-раические дополнения к элементам второй строки. Получаем в результате $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и далее

$$\overrightarrow{x_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, фундаментальная матрица решений задается равенством

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^t \\ 3e^{5t} & -e^t \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\overrightarrow{y}(t,\overrightarrow{C}) = \Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{5t} + C_2e^{t} \\ 3C_1e^{5t} - C_2e^{t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4^0. Если собственное значение λ_k матрицы A комплексное, то и соответствующий ему собственный вектор $\overrightarrow{x_k}$, как и вектор-функция $\overrightarrow{x_k}e^{\lambda_k t}$, также комплексные.

При этом система линейных однородных уравнений

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_k E})\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$$

имеет в качестве решения вектор, комплексно сопряженный собственному вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}$.

Вместо двух комплексно сопряженных вектор-функций

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda_k t}} \quad \text{и} \quad \overline{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}}\boldsymbol{e}^{\overline{\boldsymbol{\lambda_k}}\boldsymbol{t}},$$

решающих рассматриваемую систему дифференциальных уравнений, естественно взять два вещественных решения этой системы, а именно: вещественную и мнимую части вектор-функции $\overrightarrow{x_k} e^{\lambda_k t}$.

<u>**Пример**.</u> Найти общее решение системы

$$\frac{dy_1}{dt} = -7y_1 + y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_1 - 5y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37$$

имеет два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_1 = -6 + i \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -6 - i.$$

Эти корни — собственные значения матрицы A. Соответствующие собственные векторы – это решения двух систем уравнений:

$$(A - \lambda_k E)x = 0, \qquad k = 1, 2.$$

При $k = 1$ и $\lambda_1 = -6 + i$ имеем

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Компоненты первого собственного вектора $\overrightarrow{x_1}$ находим как противоположные величины к алгебраическим дополнениям элементов второй строки:

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{x}_1^*(t) = \begin{pmatrix} e^{it} \\ (1+i)e^{it} \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

Учитывая, что $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получаем

$$\overrightarrow{x}_1^*(t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

Решение, соответствующее числу $\lambda_2 = -6 - i$, комплексно сопряжено с уже найденным, т.е. имеет вид

$$\overrightarrow{x}^*_{\mathbf{2}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i\sin t \\ \cos t - \sin t - i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

В качестве вещественных решений $\overrightarrow{x_1}(t)$ и $\overrightarrow{x_2}(t)$ исходной системы берем действительную и мнимую части векторов $\overrightarrow{x}^*_{\mathbf{1}}(t)$ и $\overrightarrow{x}^*_{\mathbf{2}}(t)$, т.е. следующие функции:

$$\overrightarrow{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-6t},$$

$$\overrightarrow{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

Фундаментальная матрица решений системы имеет при этом следующий вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t}\cos t & e^{-6t}\sin t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) & e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение $\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C})$ системы запишется при этом как следующая вектор-функция

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t \\ \\ C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}. \qquad \square$$

5^0. В случае когда матрица A системы имеет кратные собственные значения построение фундаментальной системы решений усложняется.

В этом случае может оказаться, что матрица A не имеет полной системы собственных векторов, составляющих базис в $\mathbb{R}^n$.

Пусть λ_k — это корень характеристического полинома $P_n(\lambda)$ кратности r, $1 \leqslant r \leqslant n$, а ранг матрицы $A - \lambda_k E$ при этом равен m, где $0 \leqslant m \leqslant n - 1$.

Число линейно независимых собственных векторов матрицы A в этом случае равно числу линейно независимых решений однородной системы $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda_k}\boldsymbol{E})\overrightarrow{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}$, то есть равно $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$.

Пусть $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}$. Тогда корню $\boldsymbol{\lambda_k}$ соответствуют $\boldsymbol{r}$ линейно независимых собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$. Эти векторы принимаются в качестве основных при построении базиса в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, а затем и фундаментальной системы решений исходной системы.

Точнее, сначала находим $\boldsymbol{r}$ линейно независимых решений

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{k})}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}^{(\boldsymbol{k})}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{k})}$$

системы линейных однородных уравнений

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E})\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}.$$

Затем записываем часть фундаментальной системы решений для $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}' = \boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$, включающую в себя следующие вектор-функции:

$$\vec{x}_1^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad \vec{x}_2^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad \ldots, \quad \vec{x}_r^{(k)} e^{\lambda_k t}.$$

Общее их число равно кратности корня λ_k.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad P_2(\lambda) = (1-\lambda)^2.$$

Характеристический полином имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то есть один корень кратности два.

Ранг матрицы $A - \lambda E$ равен нулю, следовательно, для $\lambda_1 = 1$ существует два линейно независимых собственных вектора, они находятся как решения системы

$$\begin{pmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & 1-\boldsymbol{\lambda}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти два линейно независимых вектора задаются равенствами

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая им фундаментальная система решений имеет вид

$$\overrightarrow{y_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \overrightarrow{y_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Фундаментальная матрица решений системы задается равенством

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы при этом имеет вид

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \Phi(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$\square$

Пусть $n - m < r$, то есть число $n - m$ линейно независимых решений системы

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0$$

меньше кратности r корня λ_k. Тогда возникает необходимость дополнить множество собственных векторов матрицы A до специального базиса пространства $\mathbb{R}^n$.

Опишем подробно, как производится нужное дополнение множества собственных векторов в случае $n - m = 1 < r$.

Собственному вектору $\vec{h}_1^k \neq 0$, соответствующему корню λ_k, сопоставляется серия присоединенных векторов

$$\vec{h}_2^k, \quad ..., \quad \vec{h}_r^k.$$

Здесь векторы $\vec{h}_j^k \neq 0$, $j = 2, \ldots, r$, последовательно определяются формулами

$$A\vec{h}_2^k = \lambda_k \vec{h}_2^k + \vec{h}_1^k, \quad A\vec{h}_3^k = \lambda_k \vec{h}_3^k + \vec{h}_2^k, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad A\vec{h}_r^k = \lambda_k \vec{h}_r^k + \vec{h}_{r-1}^k,$$

или, что то же самое, векторными равенствами

$$\left(A - \lambda_k E\right)\overrightarrow{h}_j^{(k)} = \overrightarrow{h}_{j-1}^{(k)}; \quad j = 2, 3, \ldots, r.$$

Если λ_k — простой корень характеристического полинома, то система уравнений для $\overrightarrow{h}_2^{(k)}$ не совместна, то есть не имеет решений. При этом серия обрывается на первом же векторе.

Построенной серии присоединенных векторов $\vec{h}_1^k$, $\vec{h}_2^k$, $\dots$, $\vec{h}_r^k$ матрицы $\boldsymbol{A}$ соответствует следующий набор решений исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\vec{h}_1^k e^{\lambda_k t};\ (\vec{h}_2^k + t\vec{h}_1^k)e^{\lambda_k t};$$

$$\left(\vec{h}_3^k + t\vec{h}_2^k + \frac{t^2}{2!}\vec{h}_1^k\right)e^{\lambda_k t}, \dots,$$

$$\dots, \quad \left(\vec{h}_r^k + t\vec{h}_{r-1}^k + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\vec{h}_1^k\right)e^{\lambda_k t}.$$

Все эти линейно независимые вектор-функции включаются в фундаментальную систему решений системы.

Дополняя каждый собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$ серией присоединенных к нему векторов и объединяя затем все эти множества векторов в одно, получим в итоге базис всего пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

С помощью векторов этого базиса строятся затем вектор-функции, образующие искомую фундаментальную систему решений.

Пример. Найти общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1.$$

Решение. Здесь $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P_2(\lambda) = \lambda^2}.$$

Характеристический полином имеет ноль корнем кратности два: $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$.

Ранг матрицы $\boldsymbol{A - \lambda_1 E}$ равен $\mathbf{1}$, поэтому существует только один линейно независимый собственный вектор $\overrightarrow{h_1}$. Этот вектор получается как решение системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Имеем $h_{11} = 0, \quad h_{12} = 1$, и далее:

$$\overrightarrow{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Присоединенный вектор $\overrightarrow{h}_2$ находим теперь как решение системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $h_{21} = 1$, вторую же координату h_{22} следует выбрать так, чтобы векторы $\overrightarrow{h_1}$ и $\overrightarrow{h_2}$ были линейно независимы.

Пусть $h_{22} = 0$. Тогда $\overrightarrow{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Фундаментальная система решений имеет вид

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x_2}(t) = (\vec{h}_2 + t\vec{h}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Общее решение задается формулой

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 + C_2 t \end{pmatrix},$$

в которой C_1 и C_2 — это произвольные постоянные. $\square$

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 10y_1 - 9y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$ кратности два. Ранг матрицы

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

равен 1. Поэтому корню $\lambda_1 = 7$ соответствует лишь один собственный вектор $\overrightarrow{h_1}$, и надо еще найти присоединенный вектор $\overrightarrow{h_2}$.

Собственный вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{h_1}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ находим как нетривиальное решение системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{(A-\lambda_1 E)\overrightarrow{h_1} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = 0.}$$

Имеем

$$\boldsymbol{\overrightarrow{h_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Для присоединенного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{h_2}}$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h_{21}} \\ \boldsymbol{h_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Второе уравнение имеет вид $\boldsymbol{h_{21} - 3h_{22} = 1}$. Взяв $\boldsymbol{h_{22} = 0}$, получим $\boldsymbol{h_{21} = 1}$. Искомая серия векторов имеет вид

$$\overrightarrow{\boldsymbol{h_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{\boldsymbol{h_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений задается равенствами

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t};$$

$$\overrightarrow{x_2}(t) = (\overrightarrow{h_2} + t\overrightarrow{h_1})e^{7t} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{7t}.$$

Общее решение задается формулой

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 3C_1 + (3t+1)C_2 \\ C_1 + tC_2 \end{pmatrix} e^{7t}. \qquad \square$$