Глава 3
Приближение функций и производных

Задачи приближения функции можно условно разделить на два множества. Задачи первого множества сводятся к приближенному восстановлению достаточно гладкой функции по ее заданным значениям в некоторых фиксированных точках. В задачах второго множества речь идет о наилучшем (в некоторой метрике) приближении — замене сложной с точки зрения вычислений функции ее более простым аналогом. Типичным при таком подходе является поиск приближения в виде линейной комбинации «удобных» функций, например ортогональных алгебраических или тригонометрических многочленов. Многообразие математических постановок приводит к большому количеству применяемых методов, каждый из которых может оказаться оптимальным в своем классе. В этой главе рассмотрены наиболее известные в теории приближений подходы для функций одного переменного.

3.1. Полиномиальная интерполяция

Пусть $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — набор различных точек (узлов) на отрезке $[a, b]$, в которых заданы значения функции $f(x)$ так, что $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Требуется построить многочлен наименьшей степени, принимающий в точках x_i значения f_i, и оценить погрешность приближения достаточно гладкой функции $f(x)$ этим многочленом на всем отрезке $[a, b]$.

Приведем в явном виде вспомогательные многочлены $\Phi_i(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющие условиям $\Phi_i(x_i) = 1, \Phi_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$. Имеем $\Phi_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Запишем с их помощью формулу для искомого *многочлена Лагранжа* $L_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \Phi_i(x)$. Так как существует единственный многочлен степени $n-1$, принимающий в n различных точках заданные значения, то многочлен $L_n(x)$ есть решение поставленной задачи.

Теорема. *Пусть n-я производная функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $x \in [a, b]$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что справедливо равенство*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\ \omega_n(x), \quad \textit{где} \ \ \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Следствием этого представления является оценка погрешности в равномерной норме

$$\|f(x) - L_n(x)\| \leqslant \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{n!}\ \|\omega_n(x)\|, \quad \text{где} \quad \|f(x)\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Величина $\lambda_n = \max\limits_{x\in[a,b]} \sum\limits_{i=1}^{n} |\Phi_i(x)|$ называется *константой Лебега интерполяционного процесса*. Скорость ее роста в зависимости от величины n существенно влияет как на сходимость $L_n(x)$ к $f(x)$, так и на оценку вычислительной погрешности интерполяции. Для равномерных сеток λ_n растет экспоненциально. Это приводит к тому, что построенный на равномерной сетке интерполяционный полином $L_n(x)$ при большом числе узлов может сильно отличаться от приближаемой функции. Так, например, для функции Рунге $f(x) = \dfrac{1}{25x^2+1}$ на отрезке $[-1,1]$ известно, что $\max\limits_{x\in[-1,1]} |L_n(x) - f(x)| \to \infty$ при $n \to \infty$. Для *чебышёвских узлов* соответствующий интерполяционный полином сходится к указанной функции; это верно и для произвольной непрерывно дифференцируемой функции: если $f(x)$ удовлетворяет неравенству $\max\limits_{[-1,1]} |f^{(m)}(x)| < \infty$, то для интерполяционного многочлена, построенного по чебышёвским узлам, справедливо соотношение $\max\limits_{[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| = O(n^{-m}\ln n)$ при $n \to \infty$.

Если приближаемая функция не обладает достаточной гладкостью, то никакая *таблица узлов интерполяции* не может гарантировать сходимость интерполяционного процесса. Под таблицей узлов интерполяции на отрезке $[a,b]$ понимают любой треугольный массив

$$\begin{array}{llll} x_1^1 & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

с тем свойством, что все $x_i^j \in [a,b]$ и элементы каждой строки различны.

Теорема Фабера. *Для любой заданной таблицы узлов интерполяции на отрезке $[a,b]$, существует непрерывная на этом отрезке функция $f(x)$ такая, что погрешность $||L_n(x) - f(x)||$ в равномерной норме не стремится к нулю при $n \to \infty$.*

3.1. Построить многочлен Лагранжа при $n = 3$ для следующих случаев:

1) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1,$ $f_1 = 3, f_2 = 2, f_3 = 5;$ 2) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4,$ $f_1 = 3, f_2 = 4, f_3 = 6.$

Ответ: 1) $L_3(x) = 2x^2 + x + 2$; 2) $L_3(x) = x + 2$.

3.2. Построение многочлена Лагранжа $L_n(x)$ эквивалентно задаче нахождения коэффициентов c_i из системы уравнений $\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i x_j^i = f_j$ при $j = 1, \dots, n$. Показать, что эта система при больших n может быть близка к вырожденной.

Указание. Определителем данной системы уравнений является определитель Вандермонда, следовательно, задача вычисления коэффициентов искомого многочлена имеет единственное решение. Пусть узлы интерполяции принадлежат отрезку $[0,1]$. Функции x^{n-2}, x^{n-1} при больших n на этом отрезке почти неразличимы, поэтому столбцы $(x_1^{n-2},\ldots,x_n^{n-2})^T$ и $(x_1^{n-1},\ldots,x_n^{n-1})^T$ матрицы получатся близкими.

3.3. Найти $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \Phi_i(x)$ при $p = 0, \ldots, n$.

Ответ: x^p при $p = 0, \ldots, n-1$, и $x^n - \omega_n(x)$ при $p = n$.

3.4. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы *равноотстоящие* узлы: $x_i = a + \dfrac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1,\ldots,n$. Вычислить $\|\omega_n(x)\|$ при $n = 2,3,4$.

$\lhd$ Пусть $n = 3$. Выполним в формуле

$$\omega_3(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

стандартную замену переменных

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,y, \text{ где } y \in [-1,1]\,.$$

В результате получим

$$\omega_3(y) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 (y^3 - y).$$

Точки экстремума кубического многочлена $y^3 - y$ на $[-1,1]$ равны соответственно $y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$\|\omega_3(x)\| = |\omega_3(y_{1,2})| = \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{3}}\,.$$

Рассуждая аналогично для $n = 2$ и $n = 4$, получаем

$$\|\omega_2(x)\| = \frac{(b-a)^2}{4}\,, \quad \|\omega_4(x)\| = \frac{(b-a)^4}{81}\,. \qquad \rhd$$

3.5. Для многочлена $\omega_n(x)$ с равноотстоящими корнями на отрезке $[a,b]$ получить оценку $\|\omega_n(x)\| \leqslant \dfrac{(b-a)^n(n-1)!}{4(n-1)^n}$ при $n \geqslant 2$.

$\lhd$ Выполним в формуле

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j),$$

где $x_j = a + \dfrac{b-a}{n-1}(j-1)$, $j = 1,\ldots,n$, $n \geqslant 2$, замену переменных

$$x = \frac{na-b}{n-1} + \frac{b-a}{n-1}\,y, \text{ где } y \in [1,n]\,.$$

В результате получим

$$\omega_n(x(y)) \equiv \omega_n(y) = \left(\frac{b-a}{n-1}\right)^n \prod_{j=1}^{n} (y-j).$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$\max_{y\in[1,n]} \prod_{j=1}^{n} |y-j| \leqslant \frac{(n-1)!}{4}$$

с помощью специальной параметризации аргумента y. Пусть $y = k+t$, где k — целое. При $2 \leqslant k \leqslant n-1$ будем предполагать, что $|t| \leqslant \frac{1}{2}$; при $k = 1$ параметр t принимает значение из отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, а при $k = n$ — из отрезка $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Отметим равенство

$$\prod_{j=1}^{n} |y-j| = |t|\,(t+1)\ldots(t+k-1)(1-t)\ldots(n-k-t).$$

При $t > 0$ справедливы неравенства

$$(t+1)\ldots(t+k-1) < k! \quad \text{и} \quad |t|(1-t)\ldots(n-k-t) < \tfrac{1}{4}\,(n-k)!,$$

а при $t < 0$ — неравенства

$$|t|(t+1)\ldots(t+k-1) < \tfrac{1}{4}\,(k-1)! \quad \text{и} \quad (1-t)\ldots(n-k-t) < (n-k+1)!.$$

В обоих случаях использование соотношения

$$k!(n-k)! \leqslant (n-1)!\,, \quad 1 \leqslant k < n$$

приводит к искомому неравенству.

Окончательно имеем

$$\|\omega_n(x)\| = \max_{x\in[a,b]} \left|\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)\right| = \left(\frac{b-a}{n-1}\right)^n \max_{y\in[1,n]} \left|\prod_{j=1}^{n}(y-j)\right| \leqslant \frac{(b-a)^n (n-1)!}{4(n-1)^n}\,. \ \triangleright$$

3.6. Функция $f(x)$ приближается на $[a,b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \dfrac{b-a}{n-1}\,(i-1), i = 1,\ldots,n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности $\|f(x) - L_n(x)\| \leqslant 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев: 1) $[0, 0{,}1], f(x) = \sin 2x, n = 2$; 2) $[-1, 0], f(x) = \mathrm{e}^x, n = 3$.

Ответ: 1) $p = 3$; 2) $p = 2$.

3.7. Приближение к числу $\ln 15{,}2$ вычислено следующим образом. Найдены точные значения $\ln 15$ и $\ln 16$ и построена линейная интерполяция между этими числами. Показать, что если x и y — соответственно точное и интерполированное значения $\ln 15{,}2$, то справедлива оценка $0 < x - y < 4 \cdot 10^{-4}$.

Указание. Использовать выпуклость функции $\ln x$ и представление погрешности (но не оценку погрешности!).

3.8. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $-4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

◁ Поскольку $f^{(4)}(x) = \dfrac{4!}{(A^2 - x)^5}$ и $\|\omega_4(x)\| = 1$, для оценки погрешности имеем

$$\|f(x) - L_4(x)\| \leqslant \left\| \frac{1}{(A^2 - x)^5} \right\| = \frac{1}{(A^2 + 1)^5} \leqslant 10^{-5}.$$

Следовательно, $|A| \geqslant 3$. ▷

3.9. Доказать, что если узлы интерполяции расположены симметрично относительно некоторой точки c, а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равны, то интерполяционный многочлен Лагранжа — функция, четная относительно точки c.

◁ Покажем сначала справедливость следующего представления: $\Phi_i(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}$. Действительно, так как $\omega_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)$, и при $x = x_i, k \neq i$ каждое из произведений под знаком суммирования обращается в нуль, то $\omega_n'(x_i) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$.

Без ограничения общности можно считать $c = 0$, т. е. $x_i = -x_{n+1-i}$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим теперь два слагаемых из общей формулы многочлена Лагранжа, соответствующих равным значениям функции f_k и f_{n+1-k} для некоторого k. Вынося одинаковый числовой множитель за скобку, получим

$$f_k \left[\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} + \frac{\omega_n(x)}{(x - x_{n+1-k})\omega_n'(x_{n+1-k})} \right] = \\ = f_k \left[\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} + \frac{\omega_n(x)}{(x + x_k)\omega_n'(-x_k)} \right].$$

Для четного n функция $\omega_n(x)$ — четная, а ее производная $\omega_n'(x)$ — нечетная. Поэтому выражение в квадратных скобках принимает вид $\dfrac{\omega_n(x)}{x^2 - x_k^2} \cdot \dfrac{2x_k}{\omega_n'(x_k)}$, являясь, очевидно, четной функцией.

Аналогично для нечетного n функция $\omega_n(x)$ — нечетная, а ее производная $\omega_n'(x)$ — четная, и выражение в квадратных скобках также является четной функцией. В данном случае $x = 0$ является узлом интерполяции с номером $k = \dfrac{n+1}{2}$, и у этого слагаемого нет пары. Но само слагаемое — четное, что и завершает доказательство.

Доказательство также может быть получено методом от противного из единственности многочлена Лагранжа для заданного набора узлов и значений, так как отражение относительно середины отрезка не меняет входных данных задачи. ▷

3.10. Показать, что многочлен Лагранжа может быть построен рекуррентным способом:

$$L_1(x) = f(x_1),\ L_n(x) = L_{n-1}(x) + [f(x_n) - L_{n-1}(x_n)]\,\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}\,,\ n \geqslant 2,$$

где

$$\omega_1(x) = x - x_1,\ \omega_n(x) = \omega_{n-1}(x)\,(x - x_n).$$

3.11. Построить многочлен Лагранжа $L_n(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям $L_n(x_k) = y_k$:

1) $n = 4;\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4;\ y_1 = 2,\ y_2 = 3,\ y_3 = 4,\ y_4 = 6;$

2) $n = 3;\ x_k = 2k - 1,\ y_k = 8\sin\frac{\pi}{6}\,(2k-1),\ k = 1, 2, 3.$

3.12. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = |x|$ по узлам $-1, 0, 1$.

3.13. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^2$ по узлам $0, 1, 2, 3$.

3.14. Построить многочлен Лагранжа $L_4(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям $L_4(x_k) = y_k$: $x_k = k-5$, $y_k = 3k^3+2k^2+k+1$, $k = 1, 2, 3, 4$.

3.15. Функция $f(x)$ приближается на $[a, b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \dfrac{b-a}{n-1}\,(i-1)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности $\|f(x)-L_n(x)\| \leqslant 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев: 1) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi \cos(x\sin t)dt$, $[0, 1]$, $n = 3$; 2) $f(x) = \ln x$, $[1, 2]$, $n = 4$.

3.16. Оценить погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0,0,\ x_1 = 0,1,$ $x_2 = 0,2$, в точке: 1) $x = 0{,}05$; 2) $x = 0{,}15$.

3.17. Функция $\sin x$ приближается на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ интерполяционным многочленом по значениям в точках $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$. Оценить погрешность интерполяции на этом отрезке.

3.18. Функция $\ln x$ приближается на отрезке $[1, 2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырем узлам $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\dfrac{1}{300}$.

3.19. Функция $f(x) = \exp(2x)$ приближается на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трем узлам: $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

3.20. Оценить погрешность интерполяции функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0,1]$ многочленом Лагранжа пятой степени, построенным по равноотстоящим узлам.

3.21. Оценить число равноотстоящих узлов интерполяции на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее точность $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$ приближения функции $f(x) = \sin x$.

3.22. Определить степень многочлена Лагранжа на равномерной сетке, обеспечивающую точность приближения функции e^x на отрезке $[0,1]$ не хуже 10^{-3}.

3.23. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[0,b]$. При каком b многочлен Лагранжа $L_3(x)$, построенный на равномерной сетке, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \leqslant 10^{-3}$?

3.24. Привести пример непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции, для которой интерполяционный процесс Лагранжа на равномерной сетке расходится.

О т в е т: например, функция Рунге или $|x|$.

3.25. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a,b]$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant 1$. Оценить погрешность приближения $f(x)$ кусочно-линейным интерполянтом, построенным на равномерной сетке с шагом h.

3.26. С каким шагом следует составлять таблицу функции $\sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, чтобы погрешность линейной интерполяции не превосходила $0,5 \cdot 10^{-6}$?

3.27. Пусть $f \in C^{(1)}[a,b]$ и $p(x)$ — полином, аппроксимирующий $f'(x)$ с точностью ε в норме $C[a,b]$. Доказать, что полином $q(x) = f(a) + \int\limits_a^x p(t)dt$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью $\varepsilon(b-a)$ в норме $C[a,b]$.

3.28. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_3 = 1$.

3.29. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(-1) = P_3(1) = 0$, $a_2 = 1$.

3.30. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_1 = 1$.

3.31. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = P_3(-2) = P_3(1) = 0$, $a_0 = 1$.

3.32. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, удовлетворяющий условиям: $\sum\limits_{i=0}^{4} a_i = 0, P(0) = 0, P(-1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3.$

3.33. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, удовлетворяющий условиям: $P_4(1) = P_4(-1) = P_4'(0) = P_4''(0) = 0, P_4(0) = 1$.

3.34. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, удовлетворяющий условиям: $P_4(0) = 0, P_4(1) = 1, P_4(2) = 2, P_4(3) = 3, \sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 0$.

3.35. Доказать при целых t формулу:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \Delta^k f_0, \ \ \Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i, \ \Delta^0 f_i = f_i, \ x_{i+1} = x_i + h.$$

3.36. Доказать при целых t формулу:

$$L_n(x_0 - th) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_t^k \nabla^k f_0, \ \ \nabla^1 f_i = f_i - f_{i-1}, \ \nabla^0 f_i = f_i, \ x_{i+1} = x_i + h.$$

3.37. Доказать при целых t формулу:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \delta^k f_{k/2}, \ \ \delta^1 f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}, \ \delta^0 f_i = f_i, \ x_{i+1} = x_i + h.$$

3.38. Доказать, что если многочлен $P_s(x)$ степени $s-1$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{ccc} P_s(x_1) = f(x_1), & \ldots, & P_s^{(M_1-1)}(x_1) = f^{(M_1-1)}(x_1), \\ P_s(x_2) = f(x_2), & \ldots, & P_s^{(M_2-1)}(x_2) = f^{(M_2-1)}(x_2), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_s(x_n) = f(x_n), & \ldots, & P_s^{(M_n-1)}(x_n) = f^{(M_n-1)}(x_n), \end{array}$$

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = s,$$

то справедливо равенство

$$f(x) - P_s(x) = \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!}\,\omega(x), \ \omega(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{M_i}.$$

3.39. Пусть $a \leqslant x \leqslant b$ и $-1 \leqslant y \leqslant 1$ и узлы интерполяции x_i и y_i, $i = 1, \ldots, n$ связаны линейным соотношением $x_i = x(y_i) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\, y_i$. Доказать, что константы Лебега $\lambda_n^{[a,b]}$ и $\lambda_n^{[-1,1]}$, соответствующие этим отрезкам, совпадают.

$\lhd$ По определению, вспомогательные многочлены $(n-1)$-й степени $\Phi_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$ обладают свойством $\Phi_i(y_k) = \delta_i^k$. Положим в формуле для $\Phi_i(x)$, обладающей теми же свойствами, $x = x(y)$. Линейное преобразование не меняет степени многочлена. Кроме того, $\Phi_i(x_k) = \Phi_i(x(y_k)) = \Phi_i(y_k) = \delta_i^k$, т. е. два многочлена $(n-1)$-й степени, совпадают в n точках. Отсюда следует их тождественное совпадение, следовательно, равенство констант Лебега $\lambda_n^{[a,b]}$ и $\lambda_n^{[-1,1]}$.

Таким образом, величина λ_n не зависит от длины и расположения отрезка интерполяции $[a, b]$, а определяется только взаимным расположением узлов. $\rhd$

3.40. Показать, что для системы равноотстоящих узлов $\{x_i = i,$ $i = 1, \ldots, n\}$ при $n \geqslant 2$ справедлива оценка снизу для константы Лебега $\lambda_n \geqslant K\, \dfrac{2^n}{n^{3/2}}$ с постоянной K, не зависящей от n.

◁ По определению λ_n на отрезке $[1, n]$ имеем

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \left| \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-j}{i-j} \right| .$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |i-j| = (i-1)!\,(n-i)!\,, \qquad \prod_{j=1}^{n} \left(j - \tfrac{1}{2}\right) \geqslant \frac{n!}{2\sqrt{n}}\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

первое из которых очевидно, а второе доказывается по индукции. Проведем с их помощью оценку снизу для λ_n:

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\tfrac{3}{2} - j\right|$$

(использовано неравенство $\max\limits_{x\in[1,n]} |f(x)| \geqslant |f(3/2)|$). Для оценки произведения в правой части выполним преобразования:

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\tfrac{3}{2} - j\right| = \frac{1}{|i-\frac{3}{2}\,|} \prod_{j=1}^{n} \left|\tfrac{3}{2} - j\right| = \frac{1}{2|i-\frac{3}{2}\,|} \prod_{j=1}^{n-1} \left|\tfrac{1}{2} - j\right| \geqslant \frac{(n-1)!}{4(n-\frac{3}{2})\sqrt{n-1}}\ .$$

Наконец, получим искомое неравенство ($K = 1/8$):

$$\lambda_n \geqslant \frac{1}{4(n-\frac{3}{2})\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} \geqslant \frac{1}{4n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = \frac{1}{8}\ \frac{2^n}{n^{3/2}}\ . \qquad ▷$$

3.41. Показать, что для системы равноотстоящих узлов $\{x_i = i,$ $i = 1, \ldots, n\}$ при $n \geqslant 2$ справедлива оценка сверху для константы Лебега $\lambda_n \leqslant K\, 2^n$ с постоянной K, не зависящей от n.

◁ Покажем (ср. 3.5), что справедливо неравенство

$$\max_{x\in[1,n]} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \leqslant (n-1)!$$

с помощью специальной параметризации аргумента x. Пусть $x = k + t$, где k — целое. При $2 \leqslant k \leqslant n-1$ будем предполагать, что $|t| \leqslant \dfrac{1}{2}$; при $k = 1$ параметр t принимает значение из отрезка $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, а при $k = n$ — из отрезка $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$. Отметим равенство

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| = \left|\frac{t}{k-i+t}\right| (t+1)\ldots(t+k-1)(1-t)\ldots(n-k-t).$$

При $t > 0$ справедливы неравенства

$$(t+1)\dots(t+k-1) < k! \quad \text{и} \quad (1-t)\dots(n-k-t) < (n-k)!,$$

а при $t < 0$ — неравенства

$$(t+1)\dots(t+k-1) < (k-1)! \quad \text{и} \quad (1-t)\dots(n-k-t) < (n-k+1)!.$$

В обоих случаях использование соотношений

$$\left|\frac{t}{k-i+t}\right| \leqslant 1, \quad k!(n-k)! \leqslant (n-1)!\,, \;\; 1 \leqslant k < n$$

приводит к искомому неравенству.

Тогда из решения 3.40 имеем

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = K\,2^n,\; K = \frac{1}{2}\,.$$

Оценка доказана. ▷

3.42. Определить узлы интерполяции, при которых константа Лебега λ_3 минимальна.

Ответ: константа Лебега не зависит от отрезка, поэтому будем считать, что $x \in [-1,1]$, тогда $x_1 = -\xi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \xi$, где ξ — произвольное число из отрезка $\left[\frac{\sqrt{8}}{3}, 1\right]$; $\lambda_3 = \frac{5}{4}$.

3.43. Показать, что если $x_1, \dots, x_{2n}$ — вещественные, то функция $T(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2}$ является тригонометрическим полиномом вида $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ с вещественными коэффициентами a_k, b_k.

3.44. Доказать, что интерполяционный тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий условиям $T(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, где $0 \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$, может быть записан в виде

$$T(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x)\,, \quad \text{где} \quad t_k(x) = \prod_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{2n} \sin\frac{x-x_s}{2} \Big/ \sin\frac{x_k-x_s}{2}\,.$$

3.45. Доказать, что для любых $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$, и для любых $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$ существует единственный тригонометрический полином $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, удовлетворяющий условиям $T(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Если при этом $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$ — вещественные, то и коэффициенты a_k, b_k являются вещественными.

3.46. Доказать, что для любых $x_0, x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n < \pi$, и для любых $y_0, y_1, \dots, y_n$ существует единственный тригонометрический полином $C(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$, удовлетворяющий условиям $C(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

3.47. Построить тригонометрический полином на отрезке $[0,1]$ по заданным значениям $f(0),\ f(h),\ f(2h),\ f(3h),\ h=\frac{1}{3}$.

3.48. Построить тригонометрический интерполяционный полином второй степени $T_2(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x$, удовлетворяющий следующим условиям: $T_2(0)=0,\ T_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ T_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ T_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1,$ $T_2(\pi)=1$.

3.49. Построить интерполяционный тригонометрический полином минимальной степени по заданным значениям $f(-\pi)=0,\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

3.50. Доказать, что тригонометрический полином $T_n(z)$ степени n имеет в любой полосе $\mathrm{Re}(z)\in[a,a+2\pi]$ ровно $2n$ корней.

3.51. Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический интерполяционный многочлен степени n, построенный по равноотстоящим узлам на $[0,2\pi]$ для функции $f(x)\in C^{(\alpha)},\ \alpha>0$. Доказать, что в равномерной норме

$$\lim_{n\to\infty}||T_n-f||=0\,.$$

3.52. Вычислить для 2π-периодической функции

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x\in[0,\pi],\\ 0 & \text{при} \quad x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$$

частичную сумму ряда Фурье $H_{2n}(x)$ и проанализировать их близость.

◁ При вычислении суммы первых $2n$ членов коэффициенты при косинусах равны нулю, поэтому

$$H_{2n}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,.$$

Преобразуем полученное выражение

$$H_{2n}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\cos(2k-1)t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)t\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt,$$

из которого следует, что максимум и минимум для $0\leqslant x\leqslant\pi$ достигаются в точках

$$\frac{d}{dx}\,H_{2n}(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}=0,$$

т. е. при $x_m=\frac{m\pi}{2n},\ m=1,2,\ldots,2n-1$. При этом экстремумы чередуются. Непосредственные вычисления показывают, что $H_{2n}(0)=0{,}5$, $H_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\to 1{,}08949\ldots$ с дальнейшим убыванием амплитуды колебаний по мере удаления от точки разрыва.

Отклонение разрывной функции от ее ряда Фурье часто называют *эффектом Гиббса.* ▷

3.53. Функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом $P(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$. При этом $f(0,0) = 1, f(1,0) = 2, f(0,1) = 4, f(1,1) = 3$. Найти $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3.54. Пусть $P(x_1, x_2)$ — многочлен от двух переменных степени не выше n по каждой переменной и $P\left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) = 0,\ k, m = 0, 1, ..., n$. Доказать, что $P(x_1, x_2) \equiv 0$.

3.2. Многочлены Чебышёва

Имеется несколько способов определения последовательности многочленов Чебышёва первого рода. Рассмотрим некоторые из них.

а) *Рекуррентное соотношение*:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

б) *Тригонометрическая форма.* При любом η имеем

$$\cos\left((n+1)\eta\right) = 2\cos\eta\cos(n\eta) - \cos\left((n-1)\eta\right).$$

Полагая $\eta = \arccos x$, получаем

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Простое следствие: $|T_n(x)| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$.

в) *Разностное уравнение.* Рекуррентное соотношение является разностным уравнением по переменной n. Ему соответствует характеристическое уравнение $\mu^2 - 2x\mu + 1 = 0$. Следовательно, $\mu_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. При $x \neq \pm 1$ справедливо $T_n(x) = C_1 \mu_1^n + C_2 \mu_2^n$. Из начальных условий получаем $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, что приводит к формуле

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

В силу непрерывности многочлена формула верна и при $x = \pm 1$.

Отметим, что все многочлены $T_{2n}(x)$ — четные, а $T_{2n+1}(x)$ — нечетные. При этом коэффициент при старшем члене равен 2^{n-1}.

3.55. Доказать следующие свойства многочленов Чебышёва:

1) $T_{2n}(x) = 2\, T_n^2(x) - 1\,;$

2) $I_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } n = m \neq 0, \\ \pi & \text{при } n = m = 0; \end{cases}$

3) $\int\limits_{-1}^{x} T_n(y) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\, T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}\, T_{n-1}(x)\right) - \frac{(-1)^n}{n^2-1}\,,\ n \geqslant 2\,;$

4) $\left(1 - x^2\right) T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0, \quad n \geqslant 0\,.$