Вопрос №1
Правила Лопиталя. Раскрытие неопределённостей

Когда при переходе к пределу в частном возникает неопределённость?

Пусть есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые на интервале (a, b) числовой оси. Пусть при этом существуют пределы

$$F = \lim_{x \to b-0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to b-0} g(x) = G.$$

Пределы F и G могут быть как конечными, так и бесконечными. Предположив, что $g(x) \neq 0$ на (a, b), зададимся вопросом: как найти предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b - 0$, если таковой существует?

Если пределы F и G - конечные числа, то известно, что при $G \neq 0$ $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$. Это утверждение распространяется на случаи:

1) $F \neq 0,\ G = 0 \ \Rightarrow \ \frac{F}{G} = \frac{F}{0} = \infty$
2) $F = +\infty,\ G \neq \infty \ \Rightarrow \ \frac{\infty}{G} = \infty$
3) $F = 0,\ G \neq 0 \ \Rightarrow \ \frac{0}{G} = 0$
4) $F \neq \infty,\ G = \infty \ \Rightarrow \ \frac{F}{\infty} = 0$

Но, помимо указанных четырёх случаев, есть ещё следующие:

5) $F = 0,\ G = 0$
6) $F = \infty,\ G = \infty$

В этих случаях, зная только F и G, найти предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b - 0$ невозможно. Поэтому в случаях 5 и 6 говорят, что в пределе имеет место неопределённость вида $[\frac{0}{0}]$ или $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и при этом $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to b$, $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{$l1^0$}$$

Если только предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в правой части при $x \to b - 0$ существует (конечный или бесконечный).

Аналогично, если $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a + 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{$l2^0$}$$

Отметим, что в условии теоремы возможно два случая: $b \neq +\infty$ и $b = +\infty$, а также $a \neq -\infty$ и $a = -\infty$. Если b и a конечны, то в $l1^0$ и $l2^0$ имеются введу односторонние пределы (то есть при $x \to b-0$ и $x \to a+0$).

Доказательство. Пусть $b \neq +\infty$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке b, положив $f(b) = g(b) = 0$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся при $n \to \infty$ в точке b:

$$\forall n \; x_n \in (a, b) \; \lim_{n \to \infty} x_n = b.$$

Заметим, что на отрезке $[x_n, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем. Пользуясь этой теоремой получаем

$$\forall n \; \exists \xi_n \in (x_n, b) \colon \; \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Предел отношения производных в правой части существует по условию. Последовательность $\{x_n\}$ в последнем равенстве - произвольная, сходящаяся к b. Поэтому имеем формулу $l1^0$ в случае, когда $b \neq +\infty$.

Пусть $b = +\infty$. Условимся тогда рассматривать $a \geq 1$. Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$, тогда функции

$$\phi(f) = f(\frac{1}{t}) \text{ и } \psi(f) = g(\frac{1}{t})$$

определены на интервале $(0, \frac{1}{a})$.
Пара функций $\phi(f)$ и $\psi(f)$ удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы в случае конечного интервала $(0, \frac{1}{a})$:

- $\lim\limits_{t\to+0} \phi(f) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0;$
- $\lim\limits_{t\to+0} \psi(f) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0;$
- $\phi'(f) = f'(x) \cdot (\frac{-1}{t^2});$
- $\psi'(f) = g'(x) \cdot (\frac{-1}{t^2}).$

При этом

$$\exists \lim_{t\to+0} \frac{\phi'(f)}{\psi'(f)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Применяя к паре функций $\phi(f)$ и $\psi(f)$ формулу $l2^0$, получаем

$$\lim_{t\to+0} \frac{\phi(f)}{\psi(f)} = \lim_{t\to+0} \frac{\phi'(f)}{\psi'(f)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Но $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\phi(f)}{\psi(f)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ по определению функций ϕ и ψ. Таким образом, равенство $l1^0$ верно и для $b = +\infty$.

Случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично.

Определение. Равенства $l1^0$ и $l2^0$ называются правилами Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $[\frac{0}{0}]$.

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 x \ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)$.

   Решение. Полагаем, $h(x) = \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)$.
   При переходе к пределу при $x \to 0$ получается неопределённость вида $\infty \cdot 0$. Заметим, что $h(x) = \cos^2 x \cdot \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)}{\sin^2 x}$.
   Введём функции $f(x) = \ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)$ и $g(x) = \sin^2 x$. Тогда $h(x) = \cos^2 x \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$?
   Для раскрытия получившейся неопределённости $[\frac{0}{0}]$ используем правило Лопиталя $l1^0$. Имеем

   $$f'(x) = \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}} - \cos x}{\sqrt{1+2x} - \sin x};$$
   $$g'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}-\cos x}{\sin 2x}=[\frac{0}{0}]$$

? Ещё раз воспользуемся $l1^0$:

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+2x)^{-\frac{3}{2}}+\sin x}{2\cos 2x}=-\frac{1}{2}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+2x}-\sin x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

   Решение. $H(x)=(\sqrt{1+2x}-\sin x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. При переходе к пределу при $x\to 0$ возникает неопределённость вида 1^∞. Заметим, что $H(x)=\exp h(x)$, где $h(x)=\cos^2 x\frac{\ln(\sqrt{1+2x}-\sin x)}{\sin^2 x}$. Функция $h(x)$ рассмотрена в предыдущем примере, где доказано, что $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-\frac{1}{2}$. Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to 0}H(x)=\exp(\lim_{x\to 0}h(x))=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}x^\alpha\ln(1+\frac{1}{x^\beta})$, где $\alpha>0$, $\beta>0$.

   Решение. Записывая функцию под знаком предела в эквивалентном виде получаем

$$\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x^{-\beta})}{x^{-\alpha}}=[\frac{0}{0}]?$$

Применяя правила Лопиталя получаем

$$\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$f(x)=\ln(1+x^{-\beta})\Rightarrow f'(x)=\tfrac{-\beta x^{-\beta-1}}{1+x^{-\beta}};$$
$$g(x)=x^{-\alpha}\Rightarrow g'(x)=-\alpha x^{-\alpha-1}.$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\beta x^{-\beta-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\frac{\beta}{\alpha}\lim_{x\to +\infty}x^{\alpha-\beta}.$$

Последний предел равен 0 при $\alpha<\beta$, 1 при $\alpha=\beta$ и $+\infty$ при $\alpha>\beta$.

Раскрытие неопределённостей вида $[\frac{\infty}{\infty}]$

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b), причем $f(x) \to \infty$ И $g(x) \to \infty$ при $x \to b$, $g' \neq 0$ на (a,b). Тогда

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (l1^{\infty})$$

Если только предел отношения в правой части при $x \to b$ существует (конечный или бесконечный).

Аналогично, если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (l2^{\infty})$$

Доказательство. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,\ |k| \in +\infty.$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$ с условиями

$$\forall n\ x_n \in (a,b),\ \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

По определению предела для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists y_\varepsilon \in (a,b) \colon |\frac{f'(x)}{g'(x)} - k| < \varepsilon\ \forall x \in (y_\varepsilon, b) \qquad (*)$$

По данному $\varepsilon > 0$ найдём номер N_ε:

$$y_\varepsilon < x_n < b\ \forall n \leq N_\varepsilon.$$

При $n \leq N_\varepsilon$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем на отрезке $[y_\varepsilon, x_n]$.
Пользуясь этой теоремой находим точку ξ_n:
$y_\varepsilon < \xi_n < x_n$ и при этом

$$\frac{f(x_n) - f(y_\varepsilon)}{g(x_n) - g(y_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Пользуясь этим соотношением и оценкой $*$ получаем

$$k-\varepsilon<\frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}<k+\varepsilon,\ \forall n\le N_\varepsilon.$$

Фиксируя $\varepsilon>0$ и вычисляя нижний и верхний пределы от всех частей полученных неравенств, приходим к соотношениям

$$k-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}\le k+\varepsilon \qquad (**)$$

Отметим, что точка y_ε от n никак не зависит, $a<y_\varepsilon<b$. Учитывая это и пользуясь условиями $f(x_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, $g(x_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, заключаем, что

$$\frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}\sim\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\text{ при }n\to\infty.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty}\tfrac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}=\varliminf_{n\to\infty}\tfrac{f(x_n)}{g(x_n)};$$
$$\varlimsup_{n\to\infty}\tfrac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)}=\varlimsup_{n\to\infty}\tfrac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Подставляя эти равенства в оценку $**$, получаем

$$k-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\le k+\varepsilon.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=k.$$

Это и означает, что

$$\exists\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=k.$$

Последовательность $\{x_n\}$ в этом предельном равенстве произвольная, сходящаяся к b. Поэтому

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=k=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это и есть требуемое равенство $l1^\infty$ (в случае конечного правого предела k).

Определение. Формулы $l1^\infty$ и $l2^\infty$ называются правилами Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Примеры

1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln x = 0$, $\forall\alpha > 0$.

   В окрестности нуля $\lim x$ растёт медленнее, чем убывает любая положительная степень x.

   Доказательство. Здесь неопределённость вида $0\cdot\infty$. Сведём её к виду $[\frac{\infty}{\infty}]$. Имеем

   $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} =$ (по правилу $l1^\infty$) $= \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$.

2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, $\forall\alpha > 0$.

   Доказательство. Имеем $[\frac{\infty}{\infty}]$, по $l1^\infty$ получаем

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^\alpha} = 0.$$

   На бесконечности $\ln x$ растёт медленнее любой положительной степени x.

Вопрос №2

Определители второго и третьего порядка

Определитель второго порядка

Рассмотрим таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, a_2, b_2 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей второго порядка, Числа a_1, b_1, a_2, b_2 - элементами матрицы.

Число, равное $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем данной матрицы или определителем второго порядка и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей третьего порядка.

Определитель третьего порядка выражается через определители второго порядка следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Раскрывая определители второго порядка по 1, находим, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2. \tag{2}$$

Некоторые свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если строки (или столбцы) этого определителя поменять местами, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

2. Перестановка двух строк (или столбцов определителя) равносильна умножению его на число (-1), то есть такая перестановка меняет знак определителя на противоположный

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю

4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число k равносильно умножению определителя на это число k

5. если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю

6. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (правило Крамера)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты левых частей уравнений системы образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Теорема. Система уравнений 4 имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

В этом случае решение находят по правилу Крамера:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A},\ y = \frac{\det A_2}{\det A},\ z = \frac{\det A_3}{\det A}, \tag{6}$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 равны $A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$, т.е. эти матрицы получаются из матрицы системы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбца свободных членов.

Векторное произведение двух векторов

Определение. Векторным произведением вектора a на вектор b называется такой третий вектор $[ab]$, длина и направление которого определяется условиями:

1. $|[ab]| = |a||b| \sin \phi$, где ϕ - угол между a и b
2. $[ab]$ перпендикулярен каждому из векторов a и b

3. $[ab]$ направлен так, что кратчайший поворот от a до b виден с его конца совершающимся против часовой стрелки

Свойства:

1. $[ab] = -[ba]$
2. $[(a+b)c] = [ac] + [bc]$
3. $[(\lambda a)b] = \lambda[ab]$
4. векторное произведение равно 0 (нуль-вектор) тогда и только тогда, когда векторы a и b коллинеарны. В частности, $[aa]$ - 0 для любого вектора a.
5. если векторы a и b неколлинеарны, то модуль векторного произведения равен площади S построенного на них параллелограмма.

Из первых трёх свойств следует, что векторное умножение суммы векторов на сумму векторов подчиняется обычным правилам перемножения многочленов.

Выражение через координаты сомножителей

Если $a = a_x i + a_y j + a_z k$ и $b = b_x i + b_y j + b_z k$, то

$$[ab] = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k, \tag{7}$$

или в свёрнутой форме

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Формула 7 получается разложением определителя 8 по первой строке.

Смешанное произведение трёх векторов в пространстве

Определение. Смешанным произведением abc трёх векторов называется их векторно-скалярное произведение

$$abc = [ab]c \tag{9}$$

Геометрический смысл

Тройка некомпланарных векторов a, b, c называется правой, если кратчайшее вращение от a к b видно с конца вектора c совершающимся против часовой стрелки, и левой, если по часовой стрелке.

1. необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов a, b, c является равенство $abc = 0$

2. если некомпланарные векторы a, b, c приведены к общему началу, то модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c. Если $abc > 0$, то тройка векторов a, b, c - правая, если $abc < 0$, то левая. Если векторы a, b, c заданы своими координатами $a\{a_x, a_y, a_z\}$, $b\{b_x, b_y, b_z\}$, $c\{c_x, c_y, c_z\}$, то
$$abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{10}$$
то есть смешанное произведение равно определителю из координат сомножителей.