Тема : Методы решения проблемы собственных значений

$\mathbf{1^0}$. Постановка задачи для квадратной матрицы с вещественными коэффициентами. Полная и частичная проблемы собственных значений. Прямые и итерационные методы решения проблемы. $\mathbf{2^0}$. Преобразование подобия. Жорданова форма матрицы. Формулировка теоремы о приведении матрицы к жордановой форме с помощью преобразования подобия. $\mathbf{3^0}$. Матрицы простой структуры. $\mathbf{4^0}$. Локализация собственных значений. Теорема Гершгорина. $\mathbf{5^0}$. Отношение Рэлея и его связь с собственными числами симметричной матрицы. $\mathbf{6^0}$. Обусловленность задачи вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы. Пример Уилкинсона. $\mathbf{7^0}$. Мера близости собственных векторов двух матриц. Теорема об оценке этой меры по модулю через норму разности матриц.

1^0. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц — это одна из сложных задач, с которой приходится иметь дело при конструировании или анализе больших технических систем.

В электрических и механических системах собственные числа отвечают собственным частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют соответствующие формы (или моды) этих колебаний.

Собственные числа и собственные векторы матриц — это важнейшие характеристики, отражающие существенные стороны функционирования разнообразных линейных моделей.

Ограничимся здесь рассмотрением проблемы собственных значений для квадратных матриц A размера $m \times m$ с вещественными элементами a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$. Под нормой вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$ условимся понимать евклидову длину этого вектора

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}.$$

Скалярное произведение векторов x и y, где $y = (y_1, \ldots, y_m)$, задается как обычное произведение в координатном пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j.$$

Определение. *Комплексное число $\boldsymbol{\lambda}$ называется собственным значением, или собственным числом, матрицы $\boldsymbol{A}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий следующей системе линейных уравнений:*

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x.} \qquad (\boldsymbol{EP})$$

Ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условию $(\boldsymbol{EP})$, называют *собственным вектором* матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующим собственному числу $\boldsymbol{\lambda}$.

Если $\boldsymbol{\lambda}$ — комплексное собственное число, $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, то и соответствующий ему собственный вектор также имеет комплексные координаты. Если $\boldsymbol{\lambda}$ вещественно, то и собственный вектор $\boldsymbol{x}$ также вещественен.

Систему линейных уравнений часто записывают в следующем эквивалентном виде:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{EP'}$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ — это единичная матрица размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$.

Система линейных алгебраических уравнений $(\boldsymbol{EP'})$ однородна. Ненулевое решение у этой системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = \mathbf{0}. \qquad (\boldsymbol{CE})$$

Это уравнение для отыскания всех возможных собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$. Иногда уравнение $(\boldsymbol{CE})$ называют *вековым* для матрицы $\boldsymbol{A}$. Используется также термин *секулярное уравнение*.

По переменной $\boldsymbol{\lambda}$ определитель в левой части равенства $(\boldsymbol{CE})$ представляет собой полином степени $\boldsymbol{m}$, то есть

$$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E}) = (-1)^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{m}-1}+\cdots+\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}-1}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}.$$

Таким образом, уравнение $(\boldsymbol{CE})$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{m}-1}+\cdots+\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{m}-1}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{m}}=0. \qquad (\boldsymbol{CE'})$$

Это уравнение относительно неизвестной λ называется *характеристическим* для матрицы A. Полином в левой части равенства (CE') также называют характеристическим. Таким образом, любое собственное число матрицы является корнем ее характеристического полинома. Верно и обратное: любой корень характеристического полинома матрицы задает ее собственное число.

Как известно, любой полином степени m имеет в комплексной плоскости ровно m корней с учетом их кратности. Следовательно, любая матрица $\boldsymbol{A}$ обладает набором из m собственных чисел $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ..., $\boldsymbol{\lambda_m}$, причем каждое из этих чисел повторяется при перечислении столько раз, какова его кратность.

Если матрица $\boldsymbol{A}$ симметричная, то есть совпадает со своей транспонированной, то все ее собственные числа вещественны.

Если же матрица $\boldsymbol{A}$ несимметричная, то у нее могут быть комплексные собственные числа вида $\boldsymbol{\lambda = \alpha + i\beta}$, где $\boldsymbol{\beta \neq 0}$. В этом случае собственным значением вещественной матрицы $\boldsymbol{A}$ обязательно является и комплексно-сопряженное число $\boldsymbol{\overline{\lambda} = \alpha - i\beta}$.

Полная проблема собственных значений для заданной матрицы $\boldsymbol{A}$ состоит в том, что требуется найти все ее собственные числа, а иногда и все собственные векторы.

Иногда требуется найти только некоторые собственные числа матрицы и соответствующие им собственные векторы. Например, во многих приложениях требуется найти минимальное и максимальное по модулю собственное число. В этом случае говорят о частичной проблеме собственных значений. Для решения частичной проблемы собственных значений разработан целый ряд специальных методов.

В качестве примера найдем собственные числа следующей матрицы:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1.20000} & \mathbf{-5.39990} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-7.50000} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\boldsymbol{P_3(\lambda) = \lambda^3 + 10.89990\lambda^2 + 26.49945\lambda + 21.00200 = 0.}$$

Приближенное значение одного из корней этого уравнения найдем методом Ньютона, получив при этом $\lambda_1 \approx -7.87279$. Разделив характеристический полином на моном $(\lambda - \lambda_1)$, получаем частное

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} \approx P_2(\lambda) = \lambda^2 + 3.02711 \cdot \lambda + 2.66765\,.$$

Решая квадратное уравнение, находим приближенно и его корни

$$\lambda_2 \approx -1.51356 + 0.61384i, \qquad \lambda_3 \approx -1.51356 - 0.61384i.$$

Численные методы решения проблемы собственных значений до конца сороковых годов прошлого века сводились в конечном счете к решению характеристического уравнения (CE'). Основные усилия при реализации такого подхода направляются на быстрое и эффективное вычисление коэффициентов характеристического полинома. Методы такого типа получили название *прямых методов* решения проблемы собственных значений.

Прямые методы неудовлетворительны, когда решается проблема собственных значений для матриц, имеющих порядок m, превосходящий несколько десятков, а тем более сотен единиц. Одна из причин этого состоит в том, что хотя задачи (EP) и (CE') математически эквивалентны, но по разному обусловлены при их численном решении.

Корни полинома $P_m(\lambda)$ степени m при больших значениях этого параметра очень чувствительны к возможным погрешностям в коэффициентах полинома. Это означает, что на этапе вычисления коэффициентов характеристического уравнения можно утратить существенную часть информации о реальных собственных значениях матрицы.

К началу шестидесятых годов прошлого века широкое распространение получили итерационные методы решения проблемы собственных значений.

2^0. Все множество квадратных матриц размера $m \times m$ разбивается на классы подобных друг другу.

Определение. *Матрицы A и B подобны друг другу, если существует такая невырожденная матрица P, что имеет место матричное равенство*

$$AP = PB \quad \Leftrightarrow \quad B = P^{-1}AP.$$

Перевод матрицы $\boldsymbol{A}$ в матрицу $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ называется *преобразованием подобия*.

Подобные друг другу матрицы имеют один и тот же набор собственных чисел, или как еще говорят, имеют одинаковый спектр. Это замечание обосновывается следующей цепочкой равенств

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}.$$

Приравнивая определители матриц в этом равенстве, получаем

$$\det(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E})=\det[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}]=$$

$$=(\det\ \boldsymbol{P}^{-1})\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E})(\det\ \boldsymbol{P})=\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E}).$$

Таким образом, характеристические полиномы подобных матриц совпадают. Следовательно, совпадают и соответствующие подобным матрицам наборы собственных чисел.

Собственные векторы подобных матриц, вообще говоря, не совпадают. Однако любой собственный вектор $\boldsymbol{X_A}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ можно получить из некоторого собственного вектора $\boldsymbol{X_B}$ подобной ей матрицы $\boldsymbol{B}$ по формуле

$$\boldsymbol{X_A = P \cdot X_B}.$$

Если матрица $\boldsymbol{A}$ одним или несколькими преобразованиями подобия приведена к верхнему треугольному виду, то проблему вычисления ее собственных значений можно считать полностью решенной. У верхней треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

собственные числа — это ее диагональные элементы. Характеристический полином матрицы B записывается в виде следующего произведения мономов:

$$\det(B - \lambda E) = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda)\ldots(b_{mm} - \lambda).$$

Оказывается, что преобразованием подобия матрица A приводится к еще более простому виду, чем верхний треугольный.

Теорема. *Любая квадратная матрица A подобна матрице следующего вида:*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \sigma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{m-1} & \sigma_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}. \qquad (J)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ на диагонали у матрицы B — это собственные значения матрицы A.

Числа σ_1, σ_2, ..., σ_{m-1} над главной диагональю — это либо единица, либо нуль, причем если $\sigma_j = 1$, то обязательно $\lambda_j = \lambda_{j+1}$.

Если матрица B имеет вид (J), то говорят, что B — это матрица Жордана, или жорданова форма.

Определение. *Матрица B, задаваемая равенством (J) и подобная матрице A, называется жордановой формой A.*

3^0. Особое место в теории и практике занимают матрицы простой структуры, то есть такие матрицы, жорданова форма которых диагональна:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Запишем это равенство в эквивалентном виде $AP = PD$ и заметим, что любой столбец матрицы P — это ненулевой вектор, являющийся собственным для матрицы A.

Точнее, если $p^{[j]}$ — это столбец с номером j матрицы A, то справедливо равенство

$$Ap^{[j]} = \lambda_j p^{[j]}; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Теорема (критерий простой структуры). *Квадратная матрица* A *размера* $m \times m$ *имеет простую структуру тогда и только тогда, когда у матрицы* A *существует ровно* m *линейно независимых собственных векторов.*

Собственные векторы e_1, e_2, ..., e_m матрицы A простой структуры образуют в координатном пространстве $\mathbb{R}^m$ базис. Каждый вектор x из $\mathbb{R}^m$ возможно представить линейной комбинацией векторов этого базиса

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_m e_m.$$

Теорема (признак простой структуры). *Если все собственные числа матрицы A различны, то A — матрица простой структуры.*

Любая вещественная симметричная матрица $A = A^*$ подобна диагональной матрице, то есть имеет диагональную жорданову форму. При этом матрицу подобия P, приводящую матрицу A к диагональному виду,

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\},$$

можно выбрать ортогональной $P^{-1} = P^*$.

4^0. Грубые оценки расположения собственных чисел матрицы на комплексной плоскости удается получить с помощью теорем локализации. Самая известная из этой серии теорем — это теорема Гершгорина.

Пусть квадратная матрица A имеет элементы a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим сумму модулей внедиагональных элементов в строке с номером i матрицы A, как r_i:

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{m} |a_{ij}|.$$

Круг на комплексной плоскости с центром в точке a_{ii} и радиусом r_i условимся обозначать как S_i:

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}.$$

Круги S_1, S_2, $\ldots$, S_m называются *кругами Гершгорина* для матрицы A.

Теорема (Гершгорина). *Все собственные числа матрицы A лежат в объединении соответствующих ей кругов Гершгорина.*

Доказательство. Пусть λ — собственное число матрицы A, которому соответствует собственный вектор x, то есть

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Рассмотрим максимальную по модулю координату x_i вектора x:

$$|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_m|\} \neq 0.$$

Уравнение системы $Ax = \lambda x$ с номером i запишем в виде строки

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^{m} a_{ij} x_j.$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства и разделив результат на $|x_i|$, получим

$$|a_{ii} - \lambda| = \Big| \sum_{j=1, j \neq i}^{m} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \Big| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{m} |a_{ij}| = r_i.$$

Это и означает, что собственное число λ лежит в круге S_i. $\square$

В качестве примера построим круги Гершгорина для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -3.5 & 1.5 \\ 0.8 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Радиусы кругов Гершгорина этой матрицы: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1.3$. Круг S_1 с центром в точке $a_{11} = -2$ и круг S_2 с центром в точке $a_{22} = -3.5$ пересекаются друг с другом и не пересекаются с третьим кругом S_3, центр которого в точке $a_{33} = 0.5$.

Теорема. *Если k кругов Гершгорина образуют замкнутую область $\overline{G}$, изолированную от других кругов для данной матрицы A, то в $\overline{G}$ находятся ровно k собственных чисел матрицы A (с учетом их кратности).*

Для рассмотренной выше матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{-0.5} & \mathbf{-3.5} & \mathbf{1.5} \\ \mathbf{0.8} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{0.5} \end{pmatrix}$$

в объединении $\boldsymbol{S}_\mathbf{1} \cup \boldsymbol{S}_\mathbf{2}$ ее кругов Гершгорина лежат два ее собственных числа, а в третьем круге $\boldsymbol{S}_\mathbf{3}$ лежит одно собственное число.

$\mathbf{5^0}$. При вычислении собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы

A важную роль играет функция от m переменных, задаваемая равенством

$$\rho(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \quad \text{где} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \neq 0.$$

Функция $\rho(x)$ называется *отношением Рэлея* для матрицы A. В этом определении

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Теорема. *Для симметричной вещественной матрицы A ее минимальное $\lambda_{\min}$ и максимальное $\lambda_{\max}$ собственные значения вычисляются по формулам*

$$\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \rho(x), \qquad \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \rho(x).$$

Вектор $x \neq 0$ является собственным вектором для матрицы A тогда и только тогда, когда этот вектор x является стационарной точкой функции Рэлея $\rho(x)$.

По определению вектор $\vec{x}_0$ является стационарной точкой функции Рэлея $\rho(x)$, если выполняется следующее векторное равенство

$$\nabla\, \rho(x)\Big|_{x=\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial x_m}\right)\Big|_{x=\vec{x}_0} = 0.$$

При решении проблемы собственных значений симметричной матрицы существенно используется следующее наблюдение: если вектор $x \neq 0$ хорошо приближает некоторый собственный вектор матрицы A, $\|x\| = 1$, то значение функции Рэлея на этом векторе хорошо приближает соответствующее собственное значение матрицы A.

6^0. Рассмотрим вопрос о том, как погрешность задания матрицы влияет на погрешность найденных собственных значений?

Пусть вместе с матрицей $A = (a_{ij})$ имеется возмущенная матрица $A_* = (a_{ij}^*)$, причем

$a_{ij} \approx a^*_{ij}$. Собственные числа матрицы $A_* = (a^*_{ij})$ условимся обозначать как

$$\lambda^*_j = \lambda^*_j(A), \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема. *Пусть $A = (a_{ij})$ и $A_* = (a^*_{ij})$ — две симметричные матрицы, а λ_j и λ^*_j — это их собственные числа, упорядоченные по возрастанию:*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m \quad \text{и} \quad \lambda^*_1 \leqslant \lambda^*_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^*_m.$$

Тогда справедлива оценка

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\boldsymbol{\lambda}_j - \boldsymbol{\lambda}_j^*| \leqslant \|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_*\|_2.$$

Как следствие этой теоремы отметим, что задача вычисления собственных значений симметричной матрицы хорошо обусловлена. В этом случае собственные числа надежно определяются заданием матричных элементов.

Для несимметричных матриц дела обстоят совсем по-другому: для многих из них собственные значения очень чувствительны к погрешности задания элементов матрицы. Рассмотрим подтверждающий это пример Уилкинсона.

Зададим верхнюю треугольную матрицу размера $\mathbf{20 \times 20}$ следующим соотношением:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{20} & \mathbf{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{19} & \mathbf{20} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{18} & \mathbf{20} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{20} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \qquad (\boldsymbol{W})$$

Собственные числа этой матрицы — это ее диагональные элементы:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} = \mathbf{2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{19}} = \mathbf{19}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{20}} = \mathbf{20}.$$

Таким образом, характеристический полином $P_{20}(\lambda)$ матрицы Уилкинсона (W) имеет вид

$$P_{20}(\lambda) = (20 - \lambda)(19 - \lambda) \ldots (2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Внесем в матрицу $A = (a_{ij})$ возмущение, разместив в качестве левого нижнего углового элемента $a_{20,1}$) малое положительное число ε. Характеристическое уравнение для возмущенной матрицы $A_* = (a^*_{ij})$ имеет следующий вид

$$(20-\lambda)(19-\lambda)\ldots(2-\lambda)(1-\lambda)=20^{19}\varepsilon.$$

Если $\varepsilon = 10^{-10}$, то корни возмущенного характеристического уравнения, то есть собственные числа матрицы A_*, задаются следующими равенствами:

$$\lambda_1^* = 0.996,\ \lambda_2^* = 2.11,\ \lambda_3^* = 2.57,\ \lambda_{4,5}^* = 3.97 \pm 1.09i,$$

$$\lambda_{6,7}^* = 5.89 \pm 1.95i, \qquad \lambda_{8,9}^* = 8.12 \pm 2.53i,$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{10,11}} = \mathbf{10.50 \pm 2.73}\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{12,13}} = \mathbf{12.90 \pm 2.53}\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{14,15}} = \mathbf{15.10 \pm 1.95}\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{16,17}} = \mathbf{17.00 \pm 1.09}\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{18}} = \mathbf{18.40}, \qquad \boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{19}} = \mathbf{18.90}, \qquad \boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{20}} = \mathbf{20.00}.$$

Как легко видеть, большинство собственных значений матрицы Уилкинсона ($\boldsymbol{W}$) полностью искажено внесенным малым возмущением всего в один угловой ее элемент.