1 Mappings, functions: everywhere defined, injective, surjective, bijective, inverse mapping. Theorem about cardinality of a finite Cartesian product

Определение

Пусть A и B - два множества. Тогда **отображение** f из A в B - это такое подмножество $f \subseteq A \times B$, что для любого $a \in A$ и для любого $b_1, b_2 \in B$:

$$\text{из } (a, b_1) \in f \text{ и } (a, b_2) \in f \text{ следует, что } b_1 = b_2$$

т.е. для любого $a \in A$ существует только один $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$. Факт того, что f - отображение из A в B, обозначается как:

$$f : A \to B \text{ или } A \xrightarrow{f} B$$

Множество всех отображений из A в B обозначается как

$$B^A = \{f | f : A \to B\}$$

Другое определение

отображение - это *множество пар элементов*, которые удовлетворяют определенным условиям, имеющим однозначный смысл: каждому аргументу должно соответствовать только одно значение. Где $(a, b) \in f$ можно записать как $f(a) = b$, элемент a называется **аргументом**, а b - **значением** отображения f от аргумента a или **образом** элемента a из отображения f. Факт того, что $f(a) = b$ можно записать следующим образом:

$$f : a \mapsto b \text{ или } a \overset{f}{\mapsto} b$$

Если $f(a) = b$, то элемент a называется **прообразом** элемента b из отображения f.

Определение

Для любого отображения $f : A \to B$ можно определить два множества:

- **область определения** $dom(f) = \{a | (a, b) \in f\}$
- **область значений** $cod(f) = \{b | (a, b) \in f\}$

Определение

Пусть A - множество, n - натуральное число. Тогда отображение $f : A^n \to A$ называется n-**местной функция** или **операцией** на множестве A.

Определение

Для любого множества A можно определить **тождественное отображение** - функцию $id_A : A \to A$. Эта функция определяется как:

$$id_A \rightleftharpoons \{(a,a)|a \in A\}$$

Тождественное отображение id_A также иногда называют **диагональ** множества A.

$$id_A(a) = a$$

Определение

Пусть $f : A \to B$ - некоторое отображение. Тогда это отображение называется

- **инъективным** (**"однозначным"отображением**), тогда и только тогда, когда для любых двух разных аргументов $a_1, a_2 \in A$ образы $f(a_1)$ $f(a_2)$ также различны. Обозначается как $f : A \overset{1:1}{\to} B$
- **сюръективный** (**отображением "на"**), тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in B$ существует такой $a \in A$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \twoheadrightarrow B$
- **всюду определённым**, тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ существует такой $b \in B$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \rightarrowtail B$
- **биективным** (**"взаимно-однозначным"соответствием**), тогда и только тогда, когда оно инъективно, сюръективно и всюду определено. Обозначается как $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$

Предложение

Для любого отображения $f : A \to B$:

1. $f : A \twoheadrightarrow B$ (т.е. f сюръективно) $\Leftrightarrow cod(f) = B$
2. $f : A \rightarrowtail B$ (т.е. f всюду определено) $\Leftrightarrow dom(f) = A$

Доказательство

Очевидно по определению.

Определение

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ - два отображения. Тогда g называется **обратным** к f, тогда и только тогда, когда $f \circ g = id_A$ и $g \circ f = id_B$.

Предложение

Если для некоторого отображения $f : A \to B$ существует обратное отображение, то f сюръективно и всюду определено.

Доказательство

Докажем сюръективность. Если f не сюръективно, то существует такой $b \in B$, что $b \notin cod(f)$. Но по определению $id_B = (g \circ f)(b) = f(g(b)) = b$, т.е. если $a = g(b)$, то $(a, b) \in f$, т.е. $b \in cod(f)$ - противоречие. Всюду определенность доказывается аналогично.

Предложение

Если для отображения $f : A \to B$ существует обратное, то f инъективно.

Доказательство

В противном случае существуют такие $a_1, a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$. По условию $f \circ g = id_A$, т.е. $(f \circ g)(a) = a$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a_1 = (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b) = g(f(a_2)) = (f \circ g)(a_2) = a_2$ - противоречие.

Определение

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечная последовательность множеств. Тогда их **Декартово произведение** определяется как:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightleftharpoons \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Лемма 1

Для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Доказательство

По определению декартова произведения:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\} = \{((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) | a_i \in A_i\} =$$

$$= \{(\bar{a}, a_n) | a_n \in A_n, \bar{a} \in A_1 \times \ldots \times A_{n-1}\} = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Лемма 2

Пусть A, B - множества, A состоит из n элементов, а B состоит из m элементов. Тогда декартово произведение $A \times B$ содержит $n \cdot m$ элементов.

Доказательство

Сколько существует пар вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$? Существует n вариантов выбора a, и для каждого фиксированного a существует m вариантов выбора b. Отсюда следует, что существует $n \cdot m$ возможных пар $(a, b) \in A \times B$, следовательно, $A \times B$ содержит $n \cdot m$ пар.

Теорема

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - последовательность конечных множеств, A_i содержит k_i элементов (здесь $1 \leq i \leq n$). Тогда декартово произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ будет содержать $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ элементов.

Доказательство

Индукция по n. Основание индукции: при $n = 1$ это очевидно, при $n = 2$ это выполняется по лемме 2. Шаг индукции. По предположению индукции, $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ содержит $k_1 \cdot \ldots \cdot k_{n-1}$ элементов. По лемме 1, $X = A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$, а по лемме 2 X содержит $(k_1 \cdot \ldots k_{n-1}) \cdot k_n$ элементов.

2 Carrying of a function

Определение

Некоторые функции могут принимать другие функции в качестве аргументов и возвращать функции в качестве результата. Эти функции называются **функциями высшего порядка**.

Определение

Использование функций высшего порядка позволяет упростить общую теорию, рассматривая только одноместные (функции от одного аргумента) или функции без аргументов. А именно любая двухместная функция $f(x, y)$ может быть представлена как одноместная функция высшего порядка f', принимающая аргумент x и возвращающая функцию которая, в свою очередь, принимает аргумент y:

$$f'(x)(y) = f(x, y)$$

Эта техника называется **каррирование** и может применяться к функциям с произвольным количеством аргументов.

3 Canonical normal forms for propositional formulas: CCNF, CDNF. Theorem about conversion to CCNF

Определение

Формула ϕ, находящаяся в нормальной форме (КНФ или ДНФ), находится в **совершенной** нормальной форме (СКНФ или СДНФ), тогда и только тогда, когда каждая переменная $v \in V(\phi)$ входит в любую элементарную конъюнкцию/дизъюнкции формулы ϕ (в зависимости от того, КНФ это или ДНФ) ровно один раз.

Примеры

- $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ - находится в СДНФ
- $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$- находится в СКНФ
- $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ - находится в КНФ, но не в СКНФ.

Теорема (приведение к СКНФ/СДНФ)

Пусть ϕ - некоторая формула. Тогда верно следующее:

3 Если ϕ не является выводимой, то существует такая формула ϕ', находящаяся в СКНФ, что $\phi \equiv \phi'$.

4 Если ϕ является выполнимой, то существует такая формула ϕ', находящаяся в СДНФ, что $\phi \equiv \phi'$.

Доказательство

Пусть $\phi'' \equiv \phi$ - формула, находящаяся в КНФ, $\phi'' = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, где ψ_i - элементарные дизъюнкции. Тогда конъюнктивная часть $K(\phi'') = \{\psi_i | 1 \leq i \leq n\}$ делится на две части: $K(\phi'') = X \cup Y$. Y состоит из таких элементарных дизъюнкций ψ_i, что некоторая переменная v входит в ψ_i вместе с её отрицанием: $v, \neg v \in D(\psi_i)$, и $X = K(\phi'') \setminus Y$. Тогда для любой элементарной дизъюнкции $\psi_i \in Y$ верно, что $\rhd \psi_i$, и по леммам о конъюнктивной и дизъюнктивной частях формул, $X \neq \emptyset$, потому что иначе ϕ'' будет выводимой, и, следовательно, ϕ также будет выводимой. Поскольку все элементарные дизъюнкции из Y выводимы по предыдущей лемме

$$\phi'' \equiv \bigwedge_{\psi_i \in X} \psi_i$$

Поэтому, так как $\phi \vee \phi \equiv \phi$, любая переменная $v \in V(\phi)$ входит в любую элементарную дизъюнкцию ψ не более одного раза. Рассмотрим некоторую переменную $v \notin V(\psi_i)$, где $\psi_i \in X$. Если $\psi_i^1 = (\psi_i \vee v)$ и $\psi_i^2 = (\psi_i \vee \neg v)$, то

$$\psi_i \equiv \psi_i \wedge (v \vee \neg v) \equiv (\psi_i \vee v) \wedge (\psi_i \vee \neg v) = \psi_i^1 \wedge \psi_i^2$$

Заменяя элементарную дизъюнкцию ψ_i в множестве X на ψ_i^1 и ψ_i^2, мы получим множество $X' = (X \setminus \{\psi_i\}) \cup \{\psi_i^1, \psi_i^2\}$, и

$$\phi'' \equiv \bigwedge_{\psi' \in X'} \psi'$$

Применяя это для всех переменных v, в итоге мы получим СКНФ. Теорема для СДНФ доказывается аналогично.