4.2. Метод неопределенных коэффициентов

Если интегралы вида $\int\limits_a^b p(x)x^k\,dx$ вычисляются просто, то при заданном наборе различных узлов можно найти коэффициенты c_i из условия точности квадратурной формулы $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i)$ для произвольного многочлена наиболее высокой степени, т. е. из равенств $I(x^k) = S_n(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Полученная система линейных уравнений относительно c_i имеет единственное решение.

Если квадратура точна для многочлена степени m (говорят, что она имеет алгебраический порядок точности, равный m), то справедливо равенство $R_n(f) = R_n(f - P_m)$. Взяв в качестве $P_m(x)$ интерполяционный многочлен для $f(x)$, построенный по нулям многочлена Чебышёва, можно получить оценку

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{\|f^{(m+1)}\|}{(m+1)!}\,\frac{(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}}\left(\int\limits_a^b |p(x)|dx + \sum_{i=1}^{n}|c_i|\right).$$

Из условия точности квадратурной формулы для функций заданного вида можно выписать уравнения (в общем случае нелинейные) не только для определения коэффициентов, но и для узлов квадратуры.

Квадратурными формулами Чебышёва называют квадратуры с одинаковыми коэффициентами, т. е.

$$S_n(f) = c\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \quad c = \frac{1}{n}\int\limits_a^b p(x)\,dx.$$

Их построение заключается в нахождении узлов x_i из условия точности для многочлена максимально высокой степени. Квадратуры Чебышёва (их удается построить при $n = 1, 2, 3, 4, 7, 10$) обычно применяют, если значения $f(x_i)$ известны с независимыми случайными погрешностями. В этом случае выбор равных коэффициентов обеспечивает минимальную дисперсию $S_n(f)$.

4.22. Получить формулу Симпсона методом неопределенных коэффициентов.

Указание. Сначала построить формулу на отрезке $[-1, 1]$, а затем отобразить ее на $[a, b]$.

Ответ: $S_3(f) = \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

4.23. Для формул трапеций и Симпсона найти оценки погрешности, следующие из метода неопределенных коэффициентов.

Ответ: для формулы трапеций $|R_2(f)| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{8}\,\|f''\|$, так как $m = 1$; для формулы Симпсона $|R_3(f)| \leqslant \dfrac{(b-a)^5}{1536}\,\|f^{(4)}\|$, так как $m = 3$.

4.24. Для вычисления интегралов $I(f)$:

$$1)\ \int\limits_0^2 (x+1)f(x)dx; \quad 2)\ \int\limits_{-1}^0 x^2 f(x)dx; \quad 3)\ \int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)dx$$

построить формулы вида $S(f) = c_1 f(\tilde{x}) + c_2 f(x_2)$ с одним фиксированным узлом $\tilde{x} = 0$, точные для многочленов максимально высокой степени.

Ответ: 1) $S(f) = \frac{11}{15} f(0) + \frac{49}{15} f\left(\frac{10}{7}\right)$; 2) $S(f) = \frac{1}{48} f(0) + \frac{5}{16} f\left(-\frac{4}{5}\right)$; 3) $S(f) = \frac{2}{3} f(0)$.

4.25. Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = (x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ \ldots + a_n.$$

Доказать, что величины $B_j = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^j$, $j = 1, \ldots n$, удовлетворяют равенствам

$$B_1 = -a_1,$$
$$a_1 B_1 + B_2 = -2a_2,$$
$$a_2 B_1 + a_1 B_2 + B_3 = -3a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} B_1 + a_{n-2} B_2 + \ldots + a_1 B_{n-1} + B_n = -n a_n.$$

◁ Представим производную $P_n(x)$ в виде

$$P_n'(x) = P_n(x)\ \frac{d}{dx} \ln P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - x_k}\,,$$

где

$$\frac{P_n(x)}{x - x_k} = x^{n-1} + (a_1 + x_k)x^{n-2} + (a_2 + a_1 x_k + x_k^2)x^{n-3} + \ \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1} + a_{n-2} x_k + \cdots + a_1 x_k^{n-2} + x_k^{n-1}).$$

Положим $a_0 = 1$. Тогда соотношение для производной можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k x^{n-k-1} = n x^{n-1} + (n a_1 + B_1)\, x^{n-2} +$$
$$+ (n a_2 + a_1 B_1 + B_2)\, x^{n-3} + \ldots + (n a_{n-1} + a_{n-2} B_1 + \ldots + a_1 B_{n-2} + B_{n-1}).$$

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях x и следуют соотношения для $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Последнее соотношение (для a_n) получается в результате сложения равенств

$$P_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^{n-j}, \quad k = 1, 2, \ \ldots\ , n,$$

$$a_{n-1} B_1 + a_{n-2} B_2 + \ \ldots + a_1 B_{n-1} + B_n = -a_n n.$$ ▷

4.26. Построить квадратурные формулы Чебышёва на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$ для $n = 2, 3, 4$.

Указание. Для $f(x) = x^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеем следующие соотношения:

$$I(x^j) = S_n(x^j), \quad \text{или} \quad \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^j = \frac{2}{n}\, B_j,$$

где B_j определены в 4.25. Решая эти системы, получаем

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}\,x, \quad P_4(x) = x^4 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{45}.$$

4.27. Показать, что квадратурная формула

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\cos \frac{2j-1}{2n}\,\pi\right)$$

для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ точна для всех алгебраических многочленов степени $2n - 1$.

$\lhd$ Представим произвольный многочлен $P_{2n-1}(x)$ степени $2n-1$ в виде суммы многочленов Чебышёва: $P_{2n-1}(x) = \sum\limits_{m=0}^{2n-1} a_m T_m(x)$, для которых $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, и проверим утверждение.

При $m = 0$ имеем

$$I(T_0) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi, \quad S_n(T_0) = \pi.$$

При $m > 0$ справедливо свойство ортогональности $I(T_m\, T_0) = 0$. Для квадратурной формулы выполним преобразования

$$S_n(T_m) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos(m \arccos x_j) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos m\, \frac{(2j-1)\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1-n}^{n} \exp\left(\frac{m(2j-1)\pi \mathrm{i}}{2n}\right).$$

Далее используем формулу суммы членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{j=1}^{n} aq^{j-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$, $q = \exp\left(\frac{m\pi \mathrm{i}}{n}\right)$, и окончательно для $m = 1, \ldots, 2n-1$ получаем

$$S_n(T_m) = \frac{\pi}{2n}\, \frac{\exp\left(\frac{m(2n+1)\pi \mathrm{i}}{2n}\right) - \exp\left(\frac{m(1-2n)\pi \mathrm{i}}{2n}\right)}{\exp\left(\frac{m\pi \mathrm{i}}{n}\right) - 1} = 0. \qquad \rhd$$

4.28. Показать, что квадратурная формула

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sin^2\left(\frac{\pi j}{n+1}\right) f\left(\cos\frac{\pi j}{n+1}\right)$$

для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ точна для всех алгебраических многочленов степени $2n-1$.

4.29. Показать, что квадратурная формула

$$S_n(f) = \frac{\omega}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j\omega}{n}\right)$$

для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{0}^{\omega} f(x)\,dx$ точна для всех тригонометрических многочленов с периодом ω степени не выше $n-1$.

◁ Рассмотрим величины $I(f)$ и $S_n(f)$ для функций вида $f(x) = \exp\left(2\pi m\mathrm{i}\,\frac{x}{\omega}\right)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. При этом для интегралов имеем

$$I(f) = \begin{cases} \omega & \text{при} \quad m = 0, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Используя квадратурную формулу, получаем

$$S_n(f) = \frac{\omega}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(2\pi m\mathrm{i}\,\frac{j}{n}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} 1 = \omega & \text{при} \quad \dfrac{m}{n} \text{ — целом}, \\ \dfrac{\exp(2\pi m\mathrm{i}) - 1}{\exp\left(\dfrac{2\pi m\mathrm{i}}{n}\right) - 1} = 0 & \text{при} \quad \dfrac{m}{n} \text{ — не целоем}. \end{cases}$$

Приведенное выражение означает, что квадратурная формула точна для всех $\sin\left(\frac{2\pi mx}{\omega}\right)$ и $\cos\left(\frac{2\pi mx}{\omega}\right)$, если $m = 0$ или $\frac{m}{n}$ не целое, т. е. точна для всех тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$. Из явного выражения для $S_n(f)$ следует, что эта формула также точна для функции $\sin\left(\frac{2\pi nx}{\omega}\right)$. ▷

4.30. Пусть T — треугольник на плоскости, $S(T)$ — его площадь, A, B, C — середины сторон. Показать, что квадратурная формула

$$I(f) = \iint\limits_T f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\,S(T)(f(A) + f(B) + f(C)),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $dx = dx_1 dx_2$, точна для всех многочленов второй степени вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Указание. Линейным невырожденным преобразованием, якобиан которого постоянен и не равен нулю, произвольный треугольник перевести в равнобедренный прямоугольный, далее проверка утверждения становится простой.

4.31. Пусть P — прямоугольник на плоскости, $S(P)$ — его площадь, A, B, C, D — середины сторон, E — точка пересечения диагоналей. Показать, что квадратурная формула

$$I(f) = \iint\limits_P f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\, S(P)\,(f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 2f(E))$$

точна для всех алгебраических многочленов от двух переменных третьей степени.

Указание. Линейным невырожденным преобразованием, якобиан которого постоянен и не равен нулю, произвольный прямоугольник перевести в квадрат, симметричный относительно нуля.

4.32. Для вычисления интегралов $I(f)$:

$$1)\ \int\limits_0^2 f(x)\,dx;\ \ 2)\ \int\limits_0^1 f(x)\,dx;\ \ 3)\ \int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx;\ \ 4)\ \int\limits_{-2}^0 f(x)\,dx$$

построить квадратурную формулу Чебышёва с тремя узлами.

Ответ: 1) $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}\,x - \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{2}{3}$; 2) $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{8}\,x - \frac{1}{16}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c = \frac{1}{3}$; 3) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c = \frac{1}{3}$; 4) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{2}{3}$.

4.33. Построить квадратурную формулу вида $S(f) = c_1 f(0) + c_2 f(x_2)$, точную для многочленов максимально высокой степени для вычисления интегралов $I(f)$:

$$1)\ \int\limits_{-2}^0 x^2 f(x)dx;\ \ 2)\ \int\limits_0^1 x f(x)dx;\ \ 3)\ \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x) f(x)dx;\ \ 4)\ \int\limits_0^2 (x+2) f(x)dx.$$

Ответ: 1) $S_2(f) = \frac{1}{6}\,f(0) + \frac{5}{2}\,f\left(-\frac{8}{5}\right)$; 2) $S_2(f) = \frac{1}{18}\,f(0) + \frac{4}{9}\,f\left(\frac{3}{4}\right)$; 3) $S_2(f) = \frac{4(\pi-3)}{\pi^2-8}\,f(0) + \frac{(\pi-2)^2}{\pi^2-8}\,f\left(\frac{\pi^2-8}{2(\pi-2)}\right)$; 4) $S_2(f) = \frac{26}{21}\,f(0) + \frac{100}{21}\,f\left(\frac{7}{5}\right)$.

4.34. Определить параметры c_1, c_2, x_2 так, чтобы квадратурная формула $S(f) = c_1 f(a) + c_2 f(x_2)$ для вычисления интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$ была точной на многочленах максимально высокой степени.

4.35. Определить параметры c_1, c_2, c_3, x_2 так, чтобы квадратурная формула $S(f) = c_1 f(-1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(1)$ для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$ была точной на многочленах максимально высокой степени.

4.36. Для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ построить квадратурную формулу $S_2(f) = c_1 f(0) + c_2 f\left(\frac{2}{3}\right)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

4.37. Для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ построить квадратурную формулу $S_2(f) = c_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{2}{3}\right)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

4.38. Для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{0}^{2} f(x)dx$ построить квадратурную формулу $S_3(f) = c_1 f(0) + c_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 f(2)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

4.39. Для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{a}^{b} \mathrm{e}^{\alpha x} f(x)dx$ построить квадратурную формулу $S_2(f) = c_1 f(a) + c_2 f(b)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

Указание. Получить систему уравнений для коэффициентов квадратурной формулы

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha b} - \mathrm{e}^{\alpha a}\right), \quad c_1 a + c_2 b = \frac{1}{\alpha}\left[\mathrm{e}^{\alpha b}\left(b - \frac{1}{\alpha}\right) - \mathrm{e}^{\alpha a}\left(a - \frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

4.40. Для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ построить квадратурную формулу

$$S_4(f) = c_1 f(a) + c_2 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + c_3 f\left(a + 2\,\frac{b-a}{3}\right) + c_4 f(b),$$

точную для многочленов максимально высокой степени.

4.41. Пусть $f \in C^{(1)}[-1,1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический многочлен пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1, 2, 3$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$S_5(f) = \frac{1}{15}\left(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - f'(1)\right).$$

Проверить, что $S_5(f)$ точна на многочленах пятой степени $\int\limits_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5)$, но найдется многочлен степени 6, на котором она не точна.

4.3. Квадратурные формулы Гаусса

Рассмотрим следующую задачу: при заданном числе узлов n построить для вычисления интегралов вида $I(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx$ квадратурную формулу

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \tag{4.1}$$

точную для многочленов максимально высокой степени. Весовая функция $p(x)$ предполагается почти всюду положительной.

В этой постановке имеется $2n$ свободных параметров (узлы x_i и коэффициенты c_i неизвестны), поэтому можно попытаться построить квадратуру, точную для многочленов степени $2n-1$. Несложно убедиться в том, что не существует квадратуры с n узлами, точной для всех многочленов степени $2n$. Действительно, возьмем $P_{2n}(x) = (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$. Тогда $0 = S_n(P_{2n}) \neq I(P_{2n}) > 0$.

Важную роль при построении *квадратурных формул Гаусса* (4.1) играют ортогональные многочлены на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x) > 0$ почти всюду. Они могут быть получены, например, в результате стандартной процедуры ортогонализации, примененной к системе $\{1, x, \ldots, x^k, \ldots\}$, при скалярном произведении

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\,.$$

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется система ортогональных многочленов с весом $p(x)$

$$1, \psi_1(x), \psi_2(x), \ \ldots\ , \psi_k(x), \ldots\,.$$

Тогда многочлен k-й степени $\psi_k(x)$ ортогонален произвольному многочлену $P_l(x)$ при $l = 0, \ldots, k-1$. Действительно, многочлен $P_l(x)$ представим в виде $P_l(x) = \sum\limits_{j=0}^{l} c_j \psi_j(x)$, и при $k \neq l$ имеют место равенства

$$\int\limits_a^b p(x)\psi_k(x)\psi_l(x)\,dx = 0\,.$$

На практике наиболее употребительны следующие ортогональные многочлены:

Лежандра ($[-1,1],\ p(x) \equiv 1$),