Тема : Численные методы решения задачи Коши для ОДУ

$\mathbf{1^0}$. Дифференциальная постановка задачи Коши для уравнения первого порядка. $\mathbf{2^0}$. Базовые понятия сеточных методов на отрезке. Лемма об оценке сеточных функций. $\mathbf{3^0}$. Метод Эйлера: расчетные формулы, геометрическая интерпретация. $\mathbf{4^0}$. Оценка устойчивости метода Эйлера, порядок точности относительно шага сетки. $\mathbf{5^0}$. Методы Рунге — Кутта: расчетные формулы, порядок точности (локальный и глобальный). Усовершенствованный метод Эйлера: расчетные формулы, аппроксимационные свойства. $\mathbf{6^0}$. Методы Рунге — Кутта четвертого порядка точности.

5^0. Первый порядок точности метода численного решения как, например, в методе Эйлера, считается малым для практических применений. В этой связи изобретено несколько способов построения численных решений задачи Коши, имеющих порядок точности относительно шага h выше первого.

Один из таких способов основан на использовании разложения решения в ряд по формуле Тейлора. Однако на практике предпочитают методы, требующие фактического вычисления только значений правой части дифференциального уравнения, а не каких-либо производных этой правой части.

К этому классу численных методов относятся, в частности, методы Рунге-Кутта. Рассмотрим некоторые из них.

1. Метод Рунге-Кутта второго порядка точности (метод “предиктор-корректор”).

Соответствующие расчетные формулы для вычисления сеточной функции имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y_0 = u_0, \\ y^*_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \\ y_{j+1} = y_j + h\dfrac{f(x_j,y_j)+f(x_{j+1},y^*_{j+1})}{2}. \end{cases} \qquad (RC_2)$$

Первое из этих равенств предсказывает "грубые" значения y^*_{j+1} по методу Эйлера. Второе же из них уточняет (корректирует) значение приближенного решения в точке x_{j+1}.

Найдем порядок точности метода (RC_2) в предположении, что функция $f(x, u)$ принадлежит классу $C^{(2)}(\overline{G})$.

Подставив первое уравнение метода во второе, получим

$$y_{j+1} = y_j + h\frac{f(x_j, y_j) + f\big(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j)\big)}{2}.$$

Функцию $f(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j))$ при фиксированных (x_j, y_j) условимся рассматривать как функцию переменной h. Тогда можем разложить ее в точке $h = 0$ по формуле Тейлора.

При этом получим

$$f(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j)) = f(x_j, y_j) +$$

$$+h\Big(f'_x(x_j, y_j) + f'_u(x_j, y_j) f(x_j, y_j)\Big) + O(h^2).$$

Подставляя это равенство во второе из соотношений (RC_2), получаем

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'_x(x_j, y_j) + \\ + \frac{h^2}{2} f'_u(x_j, y_j) f(x_j, y_j) + O(h^3). \quad (1)$$

Пусть $v = v(x)$ — это решение задачи Коши

$$v' = f(x, v), \qquad v(x_j) = y_j.$$

Здесь номер j фиксирован. По условию $f(x, u)$ принадлежит $C^{(2)}$. Следовательно, решение $v(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по x на интервале (x_j, x_{j+1}).

Имеем для $v(x)$ равенство $v'(x) = f(x, v(x))$ и далее, по формуле дифференцирования сложной функции:

$$v''(x) = f_x{}'(x_j, v(x)) + f_u{}'(x_j, v(x)) f(x_j, v(x)).$$

С учетом этих равенств по формуле Тейлора получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} v_{j+1} &= v(x_j) + hv'(x_j) + \frac{h^2}{2} v''(x_j) + O(h^3) = \\ &= y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'_x(x_j, y_j) + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} f'_u(x_j, y_j) f(x_j, y_j) + O(h^3). \qquad (2) \end{aligned}$$

Здесь $v_{j+1} = v(x_{j+1})$. Отметим, что величины $O(h^3)$ в формулах (1) и (2) не тождественны.

Вычитая теперь из (2) равенство (1), заключаем, что разность $v_{j+1} - y_{j+1}$ — это величина $O(h^3)$.

Таким образом, локальная погрешность метода (RC_2) имеет третий порядок малости при стремлении шага h сетки к нулю.

Проведя рассуждения, аналогичные примененным при исследовании на устойчивость метода Эйлера, получаем, что глобальная погрешность метода (RC_2) — это величина $O(h^2)$:

$$\|u - y\|_h = O(h^2).$$

2. Усовершенствованный метод Эйлера задается расчетными формулами

$$\begin{cases} y_0 = u_0, \\ y_{j+\frac{1}{2}} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j), \\ y_{j+1} = y_j + h f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}\right). \end{cases} \qquad (MEu)$$

Его локальная погрешность исследуется по той же схеме, что и локальная погрешность в методе (RC_2).

Глобальная погрешность ($\boldsymbol{MEu}$) — это величина $\boldsymbol{O(h^2)}$, то есть ($\boldsymbol{MEu}$) — это метод второго порядка точности.

$\mathbf{6^0}$. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности реализуется посредством следующих расчетных формул для приближения решения в узлах сетки:

$$\begin{cases} y_0 = u_0, \\ y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases} \qquad (RC_4)$$

Значения величин k_l, $l = 1, 2, 3, 4$, в правой части задаются равенствами

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_j, y_j), \\ k_2 = hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 = hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(x_j + h, y_j + k_3). \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Если функция $f(x, u)$ принадлежит классу $C^{(4)}$, то локальная погрешность метода (RC_4) равна $O(h^5)$, а глобальная погрешность — $O(h^4)$.

Тема : Метод Адамса. Правило Рунге

$\mathbf{1^0}$. Расчетные формулы метода Адамса. Локальная и глобальная погрешность. Сравнение с методом Рунге — Кутта. $\mathbf{2^0}$. Условия применимости правила Рунге. Формула Рунге. $\mathbf{3^0}$. Признак практической применимости правила Рунге. $\mathbf{4^0}$. Уточнение (экстраполяция) по Ричардсону. $\mathbf{5^0}$. Правило Рунге и Ричардсона для вычисления определенного интеграла.

1^0. На отрезке $[x_0, x_0 + L]$ числовой оси зададим равномерную сетку узлов

$$\omega_h = \{x_j \mid j = 0, 1, 2, \ldots, N\};$$

где N — натуральное число. Шаг сетки определим соотношением $h = \frac{L}{N}$. Тогда имеем

$$x_j = x_0 + jh, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Выделим среди всех узлов сетки $(m + 1)$ начальный узел, то есть точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$, где $0 < m < N$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = u_0 \qquad (CaP)$$

и предположим, что ее решение существует на всем отрезке $[x_0, x_0 + L]$ и при этом единственно на этом отрезке.

Обозначим соответствующее единственное решение задачи (CaP) через $u = u(x)$ и предположим, что значения функции $u(x)$ приближенно известны в выделенных узлах:

$$u(x_0) \approx y_0, \quad u(x_1) \approx y_1, \quad \ldots, u(x_m) \approx y_m.$$

Вектору $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ сопоставим следующий вектор значений правой части уравнения:

$$f_0 = f(x_0, y_0), \quad f_1 = f(x_1, y_1), \ldots, f_m = f(x_m, y_m).$$

Будем рассматривать векторы $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ и $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ как входные данные для выполнения расчетов по формуле

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} L_m(x)\, dx. \qquad (AF)$$

Здесь $L_m(x)$ — интерполяционный полином Лагранжа степени m с узлами $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющий в этих узлах условиям

$$L_m(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Иными словами, $L_m(x)$ — это интерполяционный полином степени m для функции вида $f(x, \widetilde{u}(x))$, где

$$\widetilde{u}(x_j) = y_j \approx u(x_j), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Полином $L_m(x)$ от компонент $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ зависит линейно и допускает представление в следующем виде:

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{mk}(x) f_{m-k}. \qquad (LP)$$

Здесь $p_{mk}(x)$ — это базисные полиномы, удовлетворяющие в узлах $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ следующим условиям:

$$p_{mk}(x_{m-i}) = \delta_k^i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь δ_k^i — это символ Кронекера.

При этом справедливы равенства

$$\boldsymbol{L_m(x_{m-i}) = \sum_{k=0}^{m} p_{mk}(x_{m-i}) f_{m-k} =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{m} \delta_k^i f_{m-k} = f_{m-i}.}$$

Подставляя разложение ($\boldsymbol{LP}$) в равенство ($\boldsymbol{AF}$), получаем формулу вида

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_{mi} f_{m-i}, \\ \alpha_{mi} = \dfrac{1}{h} \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} p_{mi}(x)\, dx. \end{cases} \qquad (DAF_0)$$

Сделав в представляющем коэффициент α_{mi} интеграле замену переменной $x = x_m + th$, получим равенство

$$\alpha_{mi} = \int\limits_0^1 p_{mi}(x_m + th)\,dt.$$

Далее заметим, что функция переменной t, определяемая равенством

$$Q_i(t) = p_{mi}(x_m + th),$$

представляет собой полином степени m по переменной t, и при этом

$$Q_i(0) = 0, \quad Q_i(-1) = 0, \quad Q_i(-2) = 0, \dots,$$

$$Q_i(-i+1) = 0, \quad Q_i(-i) = 1, \quad Q_i(-i-1) = 0, \dots,$$

$$Q_i(-m+1) = 0, \quad Q_i(-m) = 0.$$

Следовательно, полином $Q_i(t)$ допускает следующее разложение на множители:

$$Q_i(t) = A_i t(t+1)(t+2)\dots(t+i-1)(t+i+1)\dots(t+m).$$

Учитывая, что $Q_i(-i) = 1$, получаем

$$1 = A_i(-i)(-i+1)(-i+2)\ldots(-1)1\ldots(m-i) =$$

$$= A_i(-1)^i i!(m-i)!.$$

Следовательно, $A_i = \frac{(-1)^i}{i!(m-i)!}$ и далее

$$\alpha_{mi} = \int\limits_0^1 Q_i(t)dt =$$

$$= A_i \int\limits_0^1 t(t+1)\dots(t+i-1)(t+i+1)\dots(t+m)dt.$$

$$(AF\alpha)$$

В частности, набор коэффициентов α_{mi} в расчетных формулах (DAF_0) не зависит от шага h и каждый из них допускает интегральное представление (AF_α).

В соответствии с представлением (AF_α) имеем следующие равенства:

$$m = 0 \Rightarrow \quad \alpha_{00} = 1 \quad \text{(метод Эйлера)};$$

$$m = 1 \Rightarrow \quad \alpha_{10} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{11} = -\frac{1}{2};$$

$$m = 2 \Rightarrow \quad \alpha_{20} = \frac{23}{12}, \quad \alpha_{21} = -\frac{4}{3}, \quad \alpha_{22} = \frac{5}{12};$$

$$m = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{30} = \frac{55}{24}, \quad \alpha_{31} = -\frac{59}{24},$$

$$\alpha_{32} = \frac{37}{24}, \quad \alpha_{33} = -\frac{3}{8}.$$

Отыскав значение y_{m+1} по формуле (DAF_0), найдем затем параметр

$$f_{m+1} = f(x_{m+1}, y_{m+1}).$$

Затем в качестве новых входных данных в формуле метода возьмем $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$, $(f_1, f_2, \ldots, f_{m+1})$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1})$.

Применив уже к этому набору формулу ($\boldsymbol{DAF_0}$), получим

$$y_{m+2} = y_{m+1} + h \sum_{i=0}^{m} \alpha_{mi} f_{m+1-i}. \qquad (\boldsymbol{DAF_1})$$

Действуя аналогичным образом, сможем рассчитать вектор значений

$$\{y_{m+1}, y_{m+2}, y_{m+3}, \cdots, y_N\}.$$

Именно этот вектор и полагается приближением искомого решения $u = u(x)$ в узлах

$$\{x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots, x_N\}$$

исходной сетки. Указанный алгоритм получил название **метода Адамса**:

$$y_{m+k+1} = y_{m+k} + h \sum_{i=0}^{m} \alpha_{mi} f_{m+k-i}, \qquad (AM_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N - m - 1.$$

Метод Адамса требует знание приближенного решения в **нескольких начальных точках** (в m точках). На практике эти значения предварительно вычисляют методом Рунге-Кутта, а затем переходят к методу Адамса.

В процессе реализации формул (AM_k) шаг h сетки менять нельзя.

Теорема (глобальная погрешность метода Адамса). *Пусть* $f(x,u) \in C^{(m+1)}(\overline{G})$ *и погрешность приближения значений* $u(x_j) = u_j$ *в точках* x_0, x_1, x_2, ..., x_m *подчинена оценке*

$$|u_j - y_j| \le Ch^{m+1}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

где C *не зависит от* h. *Тогда глобальная погрешность метода Адамса на всей сетке является величиной* $O(h^{m+1})$.

Сравним методы Рунге-Кутта и Адамса, обладающие четвертым порядком точности.

По методу (RC_4) на каждом его шаге требуется **четыре раза** вычислить значение функции $f(x, y)$. Если $f(x, y)$ достаточно сложная, то эти вычисления потребуют выполнения значительного количества действий на компьютере.

В методе же Адамса (при $m = 3$) на каждом шаге вычисляется только одно новое значение $f(x, y)$.

Однако метод (RC_4) независим: его реализацию можно провести, имея только начальное значение y_0. Кроме того, в любой момент возможно изменить шаг h (уменьшить или увеличить), что в методе Адамса сделать невозможно.

2^0. В вычислительной математике нередко используется **процедура уточнения** того или иного приближенного решения. Сформулируем одно из такого рода правил, используемых на практике.

Пусть z — неизвестное точное значение некоторой (числовой) величины, а z_h — известное (найденное) приближенное значение z, зависящее от положительного параметра h, который может принимать сколь угодно малые значения.

Предположим, что z и z_h связаны между собой соотношением вида

$$z = z_h + ch^k + O(h^{k+m}), \qquad (R_h)$$

где c — это постоянная, от h не зависит, числа $k > 0$, $m > 0$ заданы. Отметим, что величина c заранее может быть неизвестна.

Равенство (R_h) должно выполняться для всех достаточно малых положительных h. В частности, при $\frac{h}{2}$ имеем

$$z = z_{h/2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+m}). \qquad (R_{h/2})$$

Вычитая из равенства (R_h) равенство ($R_{h/2}$), находим

$$0 = z_h - z_{h/2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+m}).$$

Выражаем отсюда величину $c(\frac{h}{2})^k$ через все остальное:

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}). \qquad (\star)$$

Подставляя это соотношение в равенство ($R_{h/2}$), получаем асимптотическое соотношение

$$z - z_{h/2} = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}).$$

Таким образом, при достаточно малых h имеем приближенное равенство

$$z - z_{h/2} \approx \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}.$$

В правой части здесь — известные (сосчитанные) величины. Вычисление искомой величины по приближенной формуле

$$z \approx z_{h/2} + \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} \tag{RL}$$

называется **правилом Рунге**.

Если $c \neq 0$, то второе слагаемое в правой части равенства (RL) в силу ($\star$) имеет при $h \to 0$ в точности порядок k относительно переменной h.

При этом в силу ($\star$) величина

$$\frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}$$

отличается от главной части погрешности, то есть от $c(\frac{h}{2})^k$, на величину порядка, большего k (в качестве таковой выступает слагаемое $O(h^{k+m})$, где $m > 0$).

При малых h это означает, что приближение $z \approx z_{h/2}$ правилом Рунге действительно уточняется.

3^0. Подтверждением условия $c \neq 0$ на практике является выполнение при малых h следующего неравенства:

$$\left|2^k \frac{z_h - z_{h/2}}{z_{2h} - z_h} - 1\right| < 0.1. \qquad (CoRuL)$$

Правило Рунге рекомендуется применять лишь в случае, если справедлива эта оценка.

В левой ее части присутствуют три приближенных значения: $z_{h/2}$, z_h, z_{2h}.

Поясним, как возникает величина под знаком модуля в оценке ($CoRuL$).

Пусть $c \neq 0$, то есть главный член погрешности ch^k в формуле (R_h) и $c\left(\frac{h}{2}\right)^k$ в $(R_{h/2})$ не исчезает при $h > 0$.

Пользуясь асимптотическим равенством $(\star)$, получаем

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}).$$

Учитывая, что $c \neq 0$, имеем далее

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}(1 + O(h^m)). \qquad (I)$$

Подставляя сюда вместо h значение шага $2h$, получаем

$$ch^k = \frac{z_h - z_{2h}}{2^k - 1}(1 + O(h^m)). \qquad (II)$$

Перепишем равенство (I) в эквивалентном виде

$$ch^k = 2^k \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}(1 + O(h^m)). \qquad (I')$$

Из равенств (I') и (II) находим

$$\frac{z_h - z_{2h}}{2^k - 1} = 2^k \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}(1 + O(h^m)),$$

или

$$2^k \frac{z_{h/2} - z_h}{z_h - z_{2h}} \approx 1.$$

Таким образом, если $c \neq 0$, то при достаточно малых h должно выполняться неравенство ($CoRuL$).

Оценка ($CoRuL$) может не выполняться по следующим причинам:

1. Шаг h велик и существенное влияние оказывает слагаемое $O(h^{k+m})$;

2. Шаг h слишком мал, тогда возможно влияние округлений при вычислениях на реальном компьютере;

3. $c = 0$ или же c близко к нулю.

4^0. Умножив на 2^k равенство ($R_{h/2}$) и вычтя затем из получившегося соотношения равенство (R_h), получим

$$z(2^k - 1) = 2^k z_{h/2} - z_h + O(h^{k+m}).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$z = \frac{2^k z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}). \qquad (RF)$$

Определение. *Число* $z_h^* = \frac{2^k z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}$ *называется уточненным (или экстраполированным) по Ричардсону приближенным значением величины* z.

Согласно ($\boldsymbol{RF}$) имеем $z - z_h^* = O(h^{k+m})$. В то же время, если $c \neq 0$, то $z - z_{h/2}$ при $h \to 0$ имеет в точности порядок k относительно шага h.

Таким образом, при выполнении исходного условия

$$z = z_h + ch^k + O(h^{k+m}), \qquad c \neq 0,$$

можно, **во-первых**, приближенно оценить погрешность $z - z_{h/2}$ по правилу Рунге, и, **во-вторых**, вычислить по формуле

$$z_h^* = \frac{2^k z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}$$

приближенное по Ричардсону значение, имеющее погрешность по h более высокого порядка, чем погрешность $z - z_{h/2}$ по правилу Рунге.

5^0. Пусть $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{(k+2)}[a,b]$. Обозначим через I_h квадратурную сумму для приближения I, вычисленную по одной из формул: прямоугольников, трапеций или парабол.

Тогда, как уже было установлено, имеет место асимптотическое равенство

$$I = I_h + ch^k + O(h^{k+2}), \qquad (RI_h)$$

где c не зависит от h, $c \neq 0$, а параметр $k = 2$ для квадратурных формул прямоугольников и трапеций. В случае же формулы Симпсона $k = 4$.

Соотношение (RI_h) является равенством рассмотренного типа (R_h).

Применяя правило Рунге, получаем приближенную формулу

$$I \approx I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Уточненное по Ричардсону приближение имеет следующий вид:

$$I_h^* = \frac{2^k I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}, \qquad I - I_h^* = O(h^{k+2}).$$

Вместо условия $\boldsymbol{c \neq 0}$ следует проверить, что величина $\boldsymbol{2^k \frac{I_h - I_{h/2}}{I_{2h} - I_h}}$ близка к единице.

Тема : Разностный метод. Основные понятия теории разностных схем

$\mathbf{1^0}$. Модельная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке. Разбиение отрезка, узлы, сетка, шаг сетки. Пространства сеточных функций, нормы в этих пространствах. $\mathbf{2^0}$. Разностные операторы, примеры. Модельная разностная схема. Аппроксимация разностным оператором дифференциального, порядок аппроксимации. $\mathbf{3^0}$. Модельная разностная задача в виде, удобном для реализации решения методом прогонки. Достаточное условие применимости метода прогонки. $\mathbf{4^0}$. Аппроксимация разностной схемой дифференциальной задачи. $\mathbf{5^0}$. Понятие устойчивости разностной схемы. Теорема об устойчивости модельной разностной схемы. $\mathbf{6^0}$. Сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи. Порядок точности разностной схемы. Основная теорема сходимости.

1^0. На отрезке $[0,1]$ числовой оси рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x), \;\; 0 \le x \le 1, \\ u(0) = q_0, \quad\; u(1) = q_1. \end{cases} \qquad (BVP)$$

Здесь функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы, причем $q(x) \ge 0$, а q_0 и q_1 — известные постоянные.

Если функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат пространству $C^{(2)}[0,1]$, то задача (BVP) имеет единственное решение класса $C^{(4)}[0,1]$.

Для численного решения задачи (BVP) используем **разностный метод**.

Начнем с задания на $[0,1]$ конечного множества равноотстоящих точек $\omega_h = \{x_j\}_{j=0}^{N}$, где

$$x_0 = 0 < x_1 = h < \ldots < x_j = jh < \ldots < x_N = 1.$$

Здесь N — натуральное число, $Nh = 1$, $N \geq 2$.

Множество ω_h называется **сеткой**, а параметр h — **шагом** сетки.

Пусть $\omega'_h = \omega_h \setminus \{x_0, x_N\}$ — множество внутренних узлов сетки ω_h; а $\omega^*_h = \{x_0, x_N\}$ — множество ее граничных узлов. Ясно, что

$$\omega_h = \omega'_h \cup \omega^*_h, \quad \omega'_h \cap \omega^*_h = \emptyset.$$

Функция с областью определения ω_h называется **сеточной**. Значение непрерывной функции $y = y(x)$ в узле x_j принято обозначать как y_j, то есть $y_j = y(x_j)$.

Если есть функция $q(x)$ непрерывной переменной x из $[0, 1]$, то $q(x)$ естественным образом порождает сеточную функцию:

$$q_j = q(x_j) \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Множества сеточных функций, определенных на сетках ω_h, ω'_h и ω^*_h условимся обозначать как $\mathbb{Y}_h$, $\mathbb{Y}'_h$ и $\mathbb{Y}^*_h$ соответственно.

Все эти три множества являются линейными пространствами. Зададим в этих линейных пространствах следующие нормы

$$\|y\|_h = \max_{0 \le j \le N} |y_j|, \quad \|y\|'_h = \max_{1 \le j \le N-1} |y_j|,$$

$$\|y\|^*_h = \max\{|y_0|, |y_1|\}.$$