$\lhd$ Так как $\mathbf{z}^{k+1} = (I - \tau_k A)\mathbf{z}^k$, где $\tau_k = \dfrac{(A\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k)}{(A\mathbf{r}^k, A\mathbf{r}^k)}$, то

$$\|\mathbf{r}^{k+1}\|_2^2 = \|\mathbf{z}^{k+1}\|_{A^2}^2 = (A(I - \tau_k A)\mathbf{z}^k,$$

$$A(I - \tau_k A)\mathbf{z}^k) = \|\mathbf{r}^k\|_2^2 - 2\tau_k(A\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k) + \tau_k^2(A\mathbf{r}^k, A\mathbf{r}^k) = \|\mathbf{r}^k\|_2^2 - \frac{(A\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k)^2}{(A\mathbf{r}^k, A\mathbf{r}^k)}\,.$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$(A\mathbf{r}^k, A\mathbf{r}^k) \leqslant \|A\|_2^2\|\mathbf{r}^k\|_2^2 \leqslant \sigma^2\|\mathbf{r}^k\|_2^2,$$

$$(A\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k) = \left(\frac{A + A^T}{2}\,\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\right) + \left(\frac{A - A^T}{2}\,\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\right) = \left(\frac{A + A^T}{2}\,\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\right) \geqslant \mu\|\mathbf{r}^k\|_2^2,$$

имеем требуемую оценку. $\rhd$

5.136. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — базис пространства $\mathbf{R}^n$. Доказать сходимость с произвольного начального приближения следующего итерационного метода (*метода оптимального координатного спуска*) решения невырожденной системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k, A\mathbf{e}_j)}{||A\mathbf{e}_j||_2^2}\,\mathbf{e}_j, \quad j = \arg\max_l \frac{|(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k, A\mathbf{e}_l)|}{||A\mathbf{e}_l||_2}\,.$$

5.6. Неявные методы

Скорость сходимости рассмотренных итерационных процессов зависела от отношения $\frac{m}{M}$ границ спектра матрицы $A = A^T > 0$, т. е. от обусловленности задачи. Для «улучшения» исходной задачи можно перейти к некоторой эквивалентной системе $B^{-1}A\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b}$ при условии невырожденности матрицы B

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + B^{-1}A\mathbf{x}^k = B^{-1}\mathbf{b}. \tag{5.9}$$

Метод спектрально-эквивалентных операторов. Пусть $A = A^T > 0$. Перепишем итерационный алгоритм (5.9) в следующем виде:

$$B\,\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}, \tag{5.10}$$

который также называют *обобщенным методом простой итерации* или *методом с предобусловливателем* B.

Неявный двухслойный итерационный алгоритм (5.10) требует на каждом шаге решения задач вида $B\mathbf{y} = \mathbf{f}$ и совпадает с рассмотренными выше методами при $B = I$. Известно, что алгоритм (5.10) сходится при $B > \frac{\tau}{2}\,A$, $\tau > 0$. Если дополнительно $B = B^T > 0$ и $m_1 B \leqslant A \leqslant M_1 B$, то при $\tau = \dfrac{2}{m_1 + M_1}$ метод сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$. Неявные методы с переменными τ типа минимальных невязок и наискорейшего градиентного спуска строятся аналогично и имеют скорость сходимости не хуже, чем у неявного оптимального линейного одношагового метода.

При удачном выборе оператора B можно принципиально улучшить скорость сходимости соответствующих итерационных процессов, однако необходимо учитывать трудоемкость нахождения $\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{f}$. Например, при $B = A$, $\tau = 1$ метод (5.10) сойдется за одну итерацию, но потребует решения исходной задачи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Методы релаксации. Рассмотрим неявные методы с диагональной или треугольной матрицей B. Представим матрицу системы $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ в виде $A = L + D + R$, где D — диагональная матрица, L и R — соответственно левая нижняя и правая верхняя треугольные матрицы с нулевыми диагоналями (строго нижняя и строго верхняя треугольные матрицы). Будем предполагать, что все диагональные элементы исходной матрицы a_{ii} отличны от нуля, следовательно, любая матрица вида $D + \omega\,L$ с произвольным параметром ω обратима.

Методы релаксации описывают формулой (5.10) с матрицей $B = D + \omega L$. Здесь итерационный параметр ω называется *параметром релаксации*. Методы *Якоби* ($\omega = 0, \tau = 1$), *Гаусса—Зейделя* ($\omega = \tau = 1$) и *верхней релаксации* (в англоязычной литературе — SOR) ($\omega = \tau$) удобно представить соответственно в виде

$$
\begin{gathered}
D(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b},\\
(D + L)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b},\\
(D + \omega L)\,\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\omega} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}.
\end{gathered}
$$

В случае $A = A^T > 0 (R = L^T)$ используют также *симметричный метод релаксации* (в англоязычной литературе — SSOR):

$$
\begin{gathered}
(D + \omega L)\,\frac{\mathbf{x}^{k+1/2} - \mathbf{x}^k}{\omega} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b},\\
(D + \omega R)\,\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+1/2}}{\omega} + A\mathbf{x}^{k+1/2} = \mathbf{b}.
\end{gathered}
$$

5.137. Для решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей

$$
A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}
$$

применяются методы Якоби и Гаусса—Зейделя. Для каждого алгоритма найти все значения параметров α, β, обеспечивающие сходимость с произвольного начального приближения.

◁ Оператор перехода B (см. (5.5)) в методе Якоби имеет вид $B = -D^{-1}\,(L+R)$. Рассмотрим задачу на собственные значения $B\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$, т. е. $-D^{-1}\,(L+R)\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Перепишем последнее уравнение в эквивалентной форме $(L + \lambda\,D + R)\,\mathbf{x} = 0$, откуда имеем $\det(L + \lambda\,D + R) = 0\,$. Непосредственно вычисляя, находим

$$\det\begin{pmatrix}\alpha\lambda & \beta & 0\\ \beta & \alpha\lambda & \beta\\ 0 & \beta & \alpha\lambda\end{pmatrix} = \alpha\lambda\,(\alpha^2\lambda^2 - 2\beta^2) = 0\,.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 0$, $\lambda^2_{2,3} = \dfrac{2\beta^2}{\alpha^2}$. Отсюда получаем ответ $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,$.

Оператор перехода B в методе Гаусса—Зейделя имеет вид $B = -(D+L)^{-1}\,R$. Рассмотрим задачу на собственные значения $B\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Имеем

$$-(D+L)^{-1}\,R\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x},\ (\lambda\,L + \lambda\,D + R)\,\mathbf{x} = 0,\ \det(\lambda\,L + \lambda\,D + R) = 0\,.$$

В результате непосредственных вычислений имеем

$$\det\begin{pmatrix}\alpha\lambda & \beta & 0\\ \beta\lambda & \alpha\lambda & \beta\\ 0 & \beta\lambda & \alpha\lambda\end{pmatrix} = \alpha\lambda^2\,(\alpha^2\lambda - 2\beta^2) = 0\,.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$. Отсюда получаем ответ $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,$.

В данном случае области сходимости методов совпадают. ▷

5.138. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка ($n = 2$) методы Якоби и Гаусса—Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

◁ Запишем матричные представления операторов перехода

$$B_{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0\end{pmatrix}, \quad B_{\mathrm{GZ}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем следующие формулы для собственных значений:

$$\lambda^{\mathrm{J}}_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}\,, \qquad \lambda^{\mathrm{GZ}}_1 = 0, \quad \lambda^{\mathrm{GZ}}_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\,,$$

приводящие к искомому утверждению. ▷

5.139. Пусть невырожденная матрица A обладает свойством диагонального преобладания, т. е. для всех i справедливо неравенство

$$\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leqslant q|a_{ii}|, \quad 0 \leqslant q < 1\,.$$

Доказать, что для вектора ошибки в методе Гаусса—Зейделя имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_\infty \leqslant q^k\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty\,.$$

$\lhd$ Обозначим вектор ошибки через $\mathbf{z}^k$. Для этого вектора имеет место соотношение $(D+L)\,\mathbf{z}^{k+1}+R\,\mathbf{z}^k=0$. Пусть $\|\mathbf{z}^{k+1}\|_\infty=|z_l^{k+1}|$. Запишем l-е уравнение

$$\sum_{j=1}^{l-1} a_{lj}\,z_j^{k+1}+a_{ll}\,z_l^{k+1}+\sum_{j=l+1}^{n} a_{lj}\,z_j^{k}=0$$

и решим его относительно z_l^{k+1}. Имеем

$$z_l^{k+1}=-\sum_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\,z_j^{k+1}-\sum_{j=l+1}^{n}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\,z_j^{k}\,.$$

Отсюда получаем

$$\|\mathbf{z}^{k+1}\|_\infty=|z_l^{k+1}|\leqslant\alpha\,\|\mathbf{z}^{k+1}\|_\infty+\beta\,\|\mathbf{z}^{k}\|_\infty,$$

где

$$\alpha=\sum_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|,\quad \beta=\sum_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|.$$

Найденное соотношение можно переписать в виде

$$\|\mathbf{z}^{k+1}\|_\infty\leqslant\frac{\beta}{1-\alpha}\,\|\mathbf{z}^{k}\|_\infty.$$

По условию $\alpha+\beta\leqslant q<1$, следовательно,

$$\frac{\beta}{1-\alpha}\leqslant\frac{q-\alpha}{1-\alpha}\leqslant\frac{q-q\alpha}{1-\alpha}\leqslant q\,,$$

откуда имеем искомую оценку. $\rhd$

5.140. Исследовать сходимость метода Гаусса—Зейделя для матриц размерности $n\times n$ с элементами:

$$1)\qquad a_{kj}=3^{-|k-j|},\quad 2)\qquad a_{kj}=\begin{cases}2 & \text{при}\quad k=j,\\ -1 & \text{при}\quad |k-j|=1,\\ 0 & \text{при}\quad |k-j|>1.\end{cases}$$

Ответ: метод сходится в обоих случаях.

5.141. Показать, что выполнение неравенства $0<\tau<2$ является необходимым для сходимости метода верхней релаксации.

$\lhd$ Если формулу метода релаксации

$$(D+\tau\,L)\,\mathbf{x}^{k+1}+[\tau\,R+(\tau-1)\,D]\,\mathbf{x}^k=\tau\mathbf{b}$$

умножить слева на матрицу D^{-1}, то оператор перехода можно записать в следующем виде:

$$B=(I+\tau\,M)^{-1}\,((1-\tau)\,I+\tau\,N)\,.$$

Здесь I — единичная, $M=D^{-1}L$ и $N=D^{-1}R$ — строго нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно. Рассмотрим характеристический многочлен $d(\lambda) = \det(B - \lambda I)$. По теореме Виета имеет место равенство $(-1)^n d(0) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(B)$. Так как у треугольных матриц M и N на главной диагонали расположены нули, то $d(0) = \det(B) = (1-\tau)^n$. Отсюда для спектрального радиуса оператора перехода получаем оценку

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)| \geqslant \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B)\right|^{1/n} = |\det(B)|^{1/n} = |1-\tau|,$$

которая в силу необходимого неравенства $\rho(B) < 1$ приводит к искомому ответу. $\triangleright$

5.142. Пусть матрица A простой структуры имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. Доказать, что при любом положительном значении итерационного параметра τ сходится метод следующего вида:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\frac{\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{x}^k}{2}\right) = \mathbf{b}.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

$\triangleleft$ Используя эквивалентную форму записи метода

$$\left(I + \frac{\tau}{2} A\right)\mathbf{x}^{k+1} = \left(I - \frac{\tau}{2} A\right)\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{b}$$

и общность системы собственных векторов матриц слева и справа, выразим собственные значения оператора перехода B через собственные значения исходной матрицы

$$\lambda(B) = \frac{1 - \tau\,\dfrac{\lambda(A)}{2}}{1 + \tau\,\dfrac{\lambda(A)}{2}}.$$

Отсюда следует сходимость метода при $\tau > 0$. Для определения τ_{opt} рассмотрим следующую минимаксную задачу:

$$\min_{\tau>0} \max_{\lambda \in \left[\frac{m}{2}, \frac{M}{2}\right]} \frac{|1-\tau\lambda|}{1+\tau\lambda}.$$

Функция $f(\lambda) = \dfrac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}$ при $\lambda > 0$ и фиксированном $\tau > 0$ является убывающей, поэтому максимального значения функция $|f(\lambda)|$ достигает на границе отрезка: при $\lambda = \dfrac{m}{2}$ и (или) при $\lambda = \dfrac{M}{2}$. Можно убедиться, что минимум по τ имеет место в случае равенства $\left|f\left(\dfrac{m}{2}\right)\right| = \left|f\left(\dfrac{M}{2}\right)\right|$, которое приводит к уравнению для оптимального параметра

$$\frac{1 - \tau_{\text{opt}}\dfrac{m}{2}}{1 + \tau_{\text{opt}}\dfrac{m}{2}} = -\frac{1 - \tau_{\text{opt}}\dfrac{M}{2}}{1 + \tau_{\text{opt}}\dfrac{M}{2}}.$$

Решая это уравнение, имеем $\tau_{\text{opt}} = \dfrac{2}{\sqrt{mM}}$. $\triangleright$

5.143. При каких $\alpha \in [0,1]$ для матрицы A из 5.142 метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\alpha\mathbf{x}^{k+1} + (1-\alpha)\mathbf{x}^k\right) = \mathbf{b}$$

сходится при любом $\tau > 0$?

$\lhd$ Используя идею решения 5.142, запишем условие сходимости метода

$$\max_{\lambda\in\left[\frac{m}{2},\frac{M}{2}\right]} \left|\frac{1-\tau(1-\alpha)\lambda}{1+\tau\alpha\lambda}\right| < 1 \quad \forall\tau > 0\,.$$

Сделав замену $t = \tau\,\lambda > 0$, получим неравенство

$$|1 - t(1-\alpha)| < 1 + t\alpha\,.$$

Если выражение под знаком модуля неотрицательно, то получаем верное, в силу условия, неравенство $-t < 0$. Поэтому содержательным является другой случай: $t(1-\alpha) - 1 < 1 + t\alpha$. Из этого неравенства имеем $-\frac{2}{t} < 2\alpha - 1$, что, так как $t > 0$, приводит к ответу $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. $\rhd$

5.144. Невырожденная система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ решается методом Гаусса—Зейделя. Доказать, что:

1) если $|a| > 1$, то для некоторого начального приближения итерационный процесс не сходится;

2) если $|a| < 1$, то итерации сходятся при любом начальном приближении.

$\lhd$ Спектральный радиус матрицы перехода в методе Гаусса—Зейделя равен $|a|$. Если начальное приближение таково, что начальная погрешность $\mathbf{z}^0$ имеет ненулевую вторую координату z_2^0, то $z_1^k = -a^{2k-1}z_2^0$, $z_2^k = a^{2k}z_2^0$ и метод не сходится при $|a| > 1$. $\rhd$

5.145. Построить пример системы уравнений третьего порядка, для которой метод Якоби сходится, а метод Гаусса—Зейделя расходится.

5.146. Построить пример системы уравнений третьего порядка, для которой метод Гаусса—Зейделя сходится, а метод Якоби расходится.

5.147. Доказать, что обобщенный метод простой итерации

$$B\,\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k}{\tau} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}\,, \quad A = A^T > 0\,,\ \det(B) \neq 0\,,\ \tau > 0\,,$$

сходится при условии $B - \frac{\tau}{2}\,A > 0$ (т. е. $(B\mathbf{x},\mathbf{x}) > \frac{\tau}{2}\,(A\mathbf{x},\mathbf{x})\ \forall\mathbf{x} \neq 0$).

$\lhd$ Из уравнения для ошибки

$$B\,\frac{\mathbf{z}^{k+1}-\mathbf{z}^k}{\tau} + A\mathbf{z}^k = 0$$

следует, что

$$\mathbf{z}^{k+1} = (I - \tau B^{-1}A)\mathbf{z}^k\,, \quad A\mathbf{z}^{k+1} = (A - \tau AB^{-1}A)\mathbf{z}^k\,. \tag{5.11}$$

Вычислим скалярное произведение, используя симметрию A,

$$(A\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) = (A\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^k) - 2\tau\left(\left[B - \frac{\tau}{2}\,A\right] B^{-1}A\mathbf{z}^k, B^{-1}A\mathbf{z}^k\right). \qquad (5.12)$$

Из первого соотношения (5.11) имеем $B^{-1}A\mathbf{z}^k = -\dfrac{\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k}{\tau}$, что позволяет переписать (5.12) в виде

$$||\mathbf{z}^{k+1}||_A^2 - ||\mathbf{z}^k||_A^2 + \frac{2}{\tau}\left(\left[B - \frac{\tau}{2}\,A\right](\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k), \mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k\right) = 0\,,$$

где $||\mathbf{u}||_A = (A\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

В силу конечномерности векторного пространства условие $B - \frac{\tau}{2}\,A > 0$ равносильно условию $B - \frac{\tau}{2}\,A \geqslant \varepsilon I$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (здесь через I обозначена единичная матрица). Имеем

$$||\mathbf{z}^{k+1}||_A^2 - ||\mathbf{z}^k||_A^2 + 2\varepsilon\tau^{-1}||\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k||_2^2 \leqslant 0 \quad \forall k \geqslant 0\,.$$

Из этого неравенства следует монотонное убывание и ограниченность последовательности $\{||\mathbf{z}^k||_A^2\}$, следовательно, сходимость $\|\mathbf{z}^k\|_A$ к некоторой величине $d \geqslant 0$. Переходя к пределу в данном неравенстве, получаем $\|\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|_2 \to 0$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} ||\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k||_2^2 = \lim\limits_{k\to\infty} ||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k||_2^2 = 0$. Таким образом, метод сходится к некоторому $\mathbf{x}^\infty$. Из вида итерационного процесса следует неравенство

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k\|_2 \leqslant \frac{1}{\tau}\,\|B\|_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_2,$$

переходя в котором к пределу, убеждаемся, что $\mathbf{x}^\infty$ — решение уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, т. е. последовательность приближений $\{\mathbf{x}^k\}$ сходится к $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. $\triangleright$

5.148. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что метод релаксации сходится с произвольного начального приближения при $\tau \in (0, 2)$.

У к а з а н и е. Использовать утверждение 5.147 при $B = D + \tau L$.

5.149. Пусть $B = L + R$, где L — нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали, R — верхняя треугольная матрица. Пусть далее $||B||_\infty < 1$, так что итерационный процесс $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ сходится. Доказать, что метод $\mathbf{x}^{k+1} = L\mathbf{x}^{k+1} + R\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ также сходится.

У к а з а н и е. Пусть $||B||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |b_{ij}| = q < 1$, $q_{1i} = \sum\limits_{j<i} |b_{ij}|$, $q_{2i} = \sum\limits_{j\geqslant i} |b_{ij}|$. Доказать, что для погрешности итерационного метода $\mathbf{x}^{k+1} = L\mathbf{x}^{k+1} + R\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ справедлива оценка

$$||\mathbf{z}^{k+1}||_\infty \leqslant \max_i \frac{q_{2i}}{1 - q_{1i}}\,||\mathbf{z}^k||_\infty \leqslant \max_i \frac{q - q_{1i}}{1 - q_{1i}}\,||\mathbf{z}^k||_\infty \leqslant q||\mathbf{z}^k||_\infty.$$

5.150. Для системы уравнений

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij},\ i,j = 1,2,...,n-1;\ nh = 1;$$
$$u_{0,i} = u_{i,0} = u_{n,i} = u_{i,n} = 0,\ \ i = 0,1,...,n\,,$$

записать расчетные формулы и найти асимптотическую скорость сходимости следующих итерационных методов: 1) метода Якоби; 2) метода Гаусса—Зейделя; 3) метода релаксации с оптимальным параметром релаксации; 4) симметричного метода релаксации с оптимальным параметром релаксации.

Ответ: спектральный радиус оператора перехода, асимптотическая скорость сходимости и оптимальный параметр таковы:

1) $\rho(B) = \cos\pi h$, $R_\infty(B) = \pi^2\dfrac{h^2}{2}$;

2) $\rho(B) = \cos^2\pi h$, $R_\infty(B) = \pi^2 h^2$;

3) $\rho(B) = \dfrac{1-\sin\pi h}{1+\sin\pi h}$, $R_\infty(B) = 2\pi h$, $\omega_{\rm opt} = \dfrac{2}{1+\sin\pi h}$;

4) $\rho(B) = \dfrac{1-\sin\dfrac{\pi h}{2}}{1+\sin\dfrac{\pi h}{2}}$, $R_\infty(B) = \pi h$, $\omega_{\rm opt} = \dfrac{2}{1+\sin\left(\dfrac{\pi h}{2}\right)}$.

5.151. Исследовать сходимость метода Якоби для решения системы уравнений с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & -3 & 1 & -1,4 \\ 0,4 & 0,8 & 4 & 2,4 \\ -0,5 & 1,2 & -2,5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Указание. Матрица имеет диагональное преобладание.

5.152. Найти все α, β, при которых метод Гаусса—Зейделя является сходящимся для системы уравнений с матрицей:

$$1)\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указание. См. решение 5.137.

Ответ: для случаев 1) и 2) имеем условие $|\beta| < |\alpha|$; 3) таких α и β не существует, так как имеется собственное значение оператора перехода $\lambda = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$, модуль которого больше единицы.

5.153. Пусть матрицы A_i, $i = 1,2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i) \in [m, M]$, $m > 0$ и $A_1A_2 = A_2A_1$, $A = A_1 + A_2$. Доказать, что при любом положительном значении параметра τ сходится итерационный метод решения системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ следующего вида:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1/2}-\mathbf{x}^k}{\tau}+A_1\mathbf{x}^{k+1/2}+A_2\mathbf{x}^k=\mathbf{b},$$

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k+1/2}}{\tau}+A_1\mathbf{x}^{k+1/2}+A_2\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{b}.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

$\lhd$ Обозначим $\mathbf{z}^k=\mathbf{x}-\mathbf{x}^k$, $\mathbf{z}^{k+1/2}=\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k+1/2}$, где $\mathbf{x}$ — решение системы $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Тогда

$$\mathbf{z}^{k+1}=(I+\tau A_2)^{-1}(I-\tau A_1)(I+\tau A_1)^{-1}(I-\tau A_2)\mathbf{z}^k\equiv P\mathbf{z}^k.$$

Матрица перехода P подобна матрице

$$B=(I-\tau A_1)(I+\tau A_1)^{-1}(I-\tau A_2)(I+\tau A_2)^{-1}.$$

Коммутирующие матрицы простой структуры A_1 и A_2 имеют общую полную систему собственных векторов. Это дает представления $A_i=QD_iQ^{-1}$, $i=1,2$, с диагональными матрицами D_i и совпадение собственных значений матриц A_i и D_i. Отсюда получаем оценку для спектрального радиуса матрицы B:

$$\rho(B)=\rho((I-\tau D_1)(I+\tau D_1)^{-1}(I-\tau D_2)(I+\tau D_2)^{-1})=$$
$$=\max_i\left|\frac{1-\tau\lambda_i(A_1)}{1+\tau\lambda_i(A_1)}\,\frac{1-\tau\lambda_i(A_2)}{1+\tau\lambda_i(A_2)}\right|\leqslant\max_{m\leqslant t\leqslant M}\left(\frac{1-\tau t}{1+\tau t}\right)^2.$$

Оптимальное значение $\tau_{\text{opt}}=\dfrac{1}{\sqrt{mM}}$, при этом $\rho(B)\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2$. $\rhd$

5.154. Доказать сходимость итерационного метода из 5.153, если матрицы A_1, A_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$(A_i\mathbf{x},\mathbf{x})>0 \text{ для } i=1,2, \text{ и } \forall x\neq 0, \text{ но не обязательно } A_1A_2=A_2A_1.$$

5.155. Пусть матрицы A_i, $i=1,2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i)\in[m,M]$, $m>0$ и $A_1A_2=A_2A_1$, $A=A_1+A_2$. Доказать, что при любом положительном значении параметра τ сходится итерационный метод решения системы уравнений $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ следующего вида:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1/2}-\mathbf{x}^k}{\tau}+A_1\mathbf{x}^{k+1/2}+A_2\mathbf{x}^k=\mathbf{b},$$

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k+1/2}}{\tau}+A_2(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k)=0.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

$\lhd$ Обозначим $\mathbf{z}^k=\mathbf{x}-\mathbf{x}^k$, $\mathbf{z}^{k+1/2}=\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k+1/2}$, где $\mathbf{x}$ — решение системы $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Тогда

$$\mathbf{z}^{k+1}=(I+\tau A_2)^{-1}(I+\tau A_1)^{-1}(I+\tau^2A_1A_2)\mathbf{z}^k\equiv B\mathbf{z}^k.$$

Коммутирующие матрицы простой структуры A_1 и A_2 имеют общую полную систему собственных векторов и представимы в виде $A_i = QD_iQ^{-1}$ с диагональными матрицами D_i, у которых те же спектры, что и A_i: $\lambda(D_i) = \lambda(A_i)$. В таком случае для спектрального радиуса матрицы B получаем следующую оценку:

$$\rho(B) = \rho\left((I+\tau D_2)^{-1}(I+\tau D_1)^{-1}(I+\tau^2 D_1 D_2)\right) =$$
$$= \max_i \frac{1+\tau^2\lambda_i(A_1)\lambda_i(A_2)}{(1+\tau\lambda_i(A_1))(1+\tau\lambda_i(A_2))} \leqslant \max_{t\in[m,M]} \frac{1+\tau^2 t^2}{(1+\tau t)^2} < 1 \ \forall \tau > 0.$$

Так как матрица A невырождена (система имеет единственное решение) и все собственные значения оператора перехода лежат в единичном круге, то итерационный процесс сходится к решению задачи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Рассмотрим оптимизационную задачу (см. 5.153). Имеем

$$\rho(B) \leqslant \min_{\tau>0} \max_{t\in[m,M]} \frac{1+\tau^2 t^2}{(1+\tau t)^2} = \min_{\tau>0} \max\left\{\frac{1+\tau^2 m^2}{(1+\tau m)^2}, \frac{1+\tau^2 M^2}{(1+\tau M)^2}\right\}$$

Максимальное значение на отрезке функция достигает в одной из концевых точек, так как ее производная по t равна $\left(\dfrac{1+\tau^2 t^2}{(1+\tau t)^2}\right)' = \dfrac{2\tau(t\tau-1)}{(1+\tau t)^4}$, и $t = \dfrac{1}{\tau}$ — точка локального минимума. Из явного вида минимизируемых функций следует, что τ_{opt} — решение следующего уравнения: $\dfrac{1+\tau^2 m^2}{(1+\tau m)^2} = \dfrac{1+\tau^2 M^2}{(1+\tau M)^2}$. Отсюда имеем $\tau_{\mathrm{opt}} = \dfrac{1}{\sqrt{mM}}$, при этом $\rho(B) \leqslant \dfrac{M+m}{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}$. $\triangleright$

5.156. Доказать сходимость итерационного процесса из 5.155, если матрицы A_1, A_2 удовлетворяют следующим условиям: $(A_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для $i = 1, 2$, и $\forall x \neq 0$, но не обязательно $A_1A_2 = A_2A_1$.

5.157. Показать, что если матрица $A = M - N$ вырожденная, то нельзя получить оценку $\rho(M^{-1}N) < 1$ ни для какой невырожденной матрицы M.

$\triangleleft$ Имеем $A = M - N = M(I - M^{-1}N)$. Если $\rho(M^{-1}N) < 1$, то существует $(I - M^{-1}N)^{-1}$, как следствие существует $A^{-1} = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}$. $\triangleright$

5.158. Пусть $A = M - N$ и итерации $M\mathbf{x}^{k+1} = N\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$ сходятся при произвольном начальном приближении. Доказать, что $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Указание. Предположив, что $\rho(M^{-1}N) \geqslant 1$, выбрать такое начальное приближение $\mathbf{x}^0$, что погрешность $\mathbf{z}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ пропорциональна собственному вектору матрицы $M^{-1}N$, соответствующему собственному значению λ такому, что $|\lambda| \geqslant 1$.

5.159. Пусть решаются задачи $A_i\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & 1 \end{pmatrix}$$

и B_1 и B_2 — соответствующие этим матрицам операторы перехода в итерационном методе Якоби. Показать, что $\rho(B_1) > \rho(B_2)$, т. е. опровергнуть мнение о том, что относительное усиление диагонального преобладания влечет за собой более быструю сходимость метода Якоби.

Ответ: $\rho(B_1) = \frac{1}{2}$, $\rho(B_2) = \frac{1}{4}$.

5.7. Проекционные методы

Эффективными методами решения системы линейных алгебраических уравнений большой размерности $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ являются итерационные методы проекционного типа. На каждом шаге такого метода реализуется *проекционный алгоритм*: в зависимости от текущего приближения $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и номера итерации выбирают два m-мерных ($m \leqslant n$) подпространства $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$; следующее приближение $\hat{\mathbf{x}}$ к точному решению $\mathbf{x}^*$ ищут в виде $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{x} \in \mathcal{K}$, из условия $\mathbf{r} \perp \mathcal{L}$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$.

Таким образом, основная идея данного подхода заключается в построении вектора поправки $\delta\mathbf{x}$ из подпространства $\mathcal{K}$, обеспечивающего ортогональность вектора невязки $\mathbf{r}$ подпространству $\mathcal{L}$. Различные правила выбора подпространств $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ приводят к различным расчетным формулам.

5.160. Показать, что метод Гаусса—Зейделя решения систем линейных уравнений является проекционным методом.

$\triangleleft$ Определим $\mathcal{K} = \mathcal{L} = \{\mathbf{e}_i\}$ для $i = 1, ..., n$, где $\mathbf{e}_i$ — естественный i-й базисный вектор пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда последовательно находим $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + c_i\mathbf{e}_i$ и $(\mathbf{b} - A(\mathbf{x} + c_i\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i) = 0$. Отсюда имеем $c_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ при известных компонентах x_j, $j = i, i+1, \ldots, n$ и найденных x_j, $j = 1, 2, \ldots, i-1$. Таким образом, за n шагов проекционного алгоритма имеем $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i$, что соответствует шагу метода Гаусса—Зейделя:

$$a_{ii}(x_i^{k+1} - x_i^k) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \triangleright$$

Пусть текущие подпространства $\mathcal{K} = \operatorname{span}\{\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m\}$ и $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m\}$ являются линейными оболочками наборов базисных векторов $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{l}_i$. Определим соответствующие им матрицы $K = (\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_m)$ и $L = (\mathbf{l}_1 \ldots \mathbf{l}_m)$ размерности $n \times m$. Положим $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + K\mathbf{c}$. Тогда условие ортогональности приводит к следующей системе относительно искомого вектора коэффициентов $\mathbf{c}$:

$$L^T AK\mathbf{c} = L^T\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}.$$

Если матрица $L^T AK$ невырождена, то формула для очередного приближения имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + K(L^T AK)^{-1}L^T\mathbf{r}.$$