Лекция № 13

Введение в теорию игр. Часть 1

Introduction to game theory. Part 1

Основные понятия теории игр

Теория игр изучает **конфликтные ситуации,** т.е. ситуации, при которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные цели.

Стороны, участвующие в конфликте, называются **игроками.**

Игроками могут быть как *отдельные лица*, так и *группы лиц* (партнеры в бизнесе, фирмы и т.д.). Действия каждого из игроков зависят от действий, предпринятых ранее другими игроками.

Следует отметить, что под **конфликтом** будем понимать не только антагонистическое взаимодействие сторон. Игроки могут и помогать друг другу, при условии совпадения (возможно, частичного) их целей. Главное — это то, что действия каждого игрока влияют на интересы других игроков и, наоборот, интересы каждого игрока зависят от действий остальных.

Основные понятия теории игр

Игра всегда ведется **по** определенным **правилам**, известным каждому из игроков.

Интересы игроков определяются **функциями выигрыша**, или **платежными функциями** (*payoff function*).

Игроки в ходе игры последовательно осуществляют некоторые действия, выбирают один из вариантов — делают **ходы**.

Последовательность ходов составляет **партию.**

Выигрыш игрока определяется не только его ходами, но и ходами других игроков, а также, возможно, и *случайными ходами*, предусмотренными правилами игры (например, расклад после сдачи в карточной игре либо бросание игральной кости).

Случайность в игровой ситуации может быть также следствием действия так называемой **«природы»**, характеризуемой обстоятельствами, не зависящими от субъектов игровой ситуации.

Основные понятия теории игр

При выборе ходов игрок руководствуется **стратегией** — набором правил (инструкций), формулируемых до игры и однозначно определяющих выбор действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации («Если ситуация сложится такая-то, то я поступлю так-то…»).

Иначе говоря, **стратегия** — это полный набор указаний, как нужно поступать во всех ситуациях в данной партии.

При выборе стратегии предполагается, что противник в игре не глупее нас. Чтобы понимать, как будет действовать противник, надо иметь возможность поставить себя на его место и, следовательно, знать возможные варианты выбора его стратегий. Поэтому *теория игр занимается вопросами выбора стратегий игроками в предположении, что множества возможных стратегий каждого игрока известны всем игрокам*.

Основные понятия теории игр

В теории игр имеется следующее ограничение: не предполагается наличие множества целей — *целевая функция только* ***одна***.

Цель каждого игрока — *максимизация своей функции выигрыша*, но не минимизация выигрыша остальных игроков.

Математическая модель игры предполагает, что каждый игрок до игры выбирает свою стратегию (сознательно или случайным образом, но в последнем случае с известным распределением вероятностей) и строго придерживается выбранной стратегии на протяжении всей игры. Это означает, что *после осуществления выбора стратегий всеми игроками игра может осуществляться без участия самих игроков*. При этом результат игры будет либо полностью предопределен (если не используются случайные ходы), либо зависит от разыгрывания «случайностей», распределение вероятностей которых считается известным и поэтому может также осуществляться без участия самих игроков.

Основные понятия теории игр

Теория игр — это теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект **(«игрок») располагает информацией** лишь

о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится,

о множестве решений («стратегий»), которые он может принять,

и *о количественной мере того «выигрыша»,* который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию.

Содержание теории игр: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений и их реализация.

Классификация игр

1. По возможности предварительных (до игры) договоренностей: **кооперативные** и **некооперативные** игры.
2. По количеству стратегий: **конечные** и **бесконечные** игры.
3. По наличию элементов случайности при выборе стратегий: **чистые** и **смешанные** стратегии. (Инструкции в чистых стратегиях не используют случайные числа.)
4. По свойствам функции выигрыша:
   в зависимости от вида функции — **матричные, биматричные,** непрерывные, выпуклые и др.;
   в зависимости от характера выигрышей:
   а) **игры с нулевой суммой** — игры, в которых сумма выигрышей игроков равна нулю; в случае двух игроков (**антагонистические** игры) это означает, что выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого;
   б) **игры с ненулевой суммой** — игры, в которых игроки могут выигрывать (или проигрывать) одновременно.

Классификация игр

5. По правилам осуществления ходов.
   Статические игры — игроки могут делать ходы одновременно. Примеры – игра в «орлянку» при одновременном выбрасывании монеты и игра в «чет-нечет» при одновременном выбрасывании пальцев.
   Динамические игры — игроки выполняют ходы последовательно. Пример – шахматы.
6. По информации, которой располагают игроки:
   а) в играх **с полной информацией** каждый из игроков имеет полную информацию о платежных функциях каждого игрока.
   б) в играх **с неполной информацией** некоторые из игроков не располагают полной информацией о платежных функциях всех других игроков.
   в) в играх **с совершенной информацией** каждый игрок знает всю предысторию развития игры, т.е. всю последовательность осуществляемых игроками ходов от начала игры до текущего момента.
   г) в играх **с несовершенной информацией** хотя бы один из игроков не располагает полным знанием всей предыстории развития игры.

Классификация игр

Самое широкое деление игр выполняется на основе понятия координации игроков, участвующих в игре.

Это *бескоалиционнные* и *коалиционные* (*кооперативные*) игры.

Бескоалиционные игры — это класс игр, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков, не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками.
К бескоалиционным играм относятся статистические игры (игры с «природой»), антагонистические игры (игры с противоположными интересами сторон), игры с непротивоположными интересами (в том числе биматричные игры) и др.

В **коалиционных** (кооперативных) играх, напротив, игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом (им разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях), они вправе вступать в коалиции.
Образовав коалицию, игроки принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. При этом они должны решить вопрос о дележе общего выигрыша между членами коалиции.

Примеры классических игр двух персон

Пример 1.1. «Дилемма заключенного».

В совершении преступления подозреваются двое: **А** и **Б**.
Есть основания полагать, что они действовали по сговору, и полиция, изолировав их друг от друга, **предлагает им** одну и ту же **сделку**: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается за помощь следствию, а второй получает максимальный срок лишения свободы (**10 лет**).

Однако иных доказательств их вины у следствия нет.

Если оба молчат, их деяние квалифицируется как неоказание помощи следствию, и они приговариваются к 6 месяцам (**0,5 года**).

Если оба свидетельствуют друг против друга, они получают минимальный срок (по **3 года**).

Каждый подозреваемый выбирает, молчать ему или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них не знает точно, что сделает другой.

Дилемма заключенного

Представление игры в виде таблицы

Альтернативы	Б хранит молчание	Б дает показания
А хранит молчание	Оба получают по полгода тюрьмы	**А** получает 10 лет, **Б** освобождается
А дает показания	**А** освобождается, **Б** получает 10 лет	Оба получают по 3 года тюрьмы

Таблица выигрышей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Стратегии игроков</td><td colspan="2">Игрок Б</td></tr>
<tr><td>Хранить молчание</td><td>Давать показания</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Игрок А</td><td>Хранить молчание</td><td>–0,5; –0,5</td><td>–10; 0</td></tr>
<tr><td>Давать показания</td><td>0; –10</td><td>–3; –3</td></tr>
</table>

Анализ стратегий игроков

Определим наилучшие стратегии игроков с позиций оценки результатов игры.

1. Ситуация **равновесия** игры (равновесие **по Нэшу**) — пара стратегий игроков, отклонение от которых в одиночку невыгодно ни одному из игроков. (Поиск стратегий, образующих ситуацию равновесия, выполняется на основе индивидуального рационального выбора.)
2. Ситуация (пара стратегий игроков) является **оптимальной по Парето**, если не существует другой ситуации, которая была бы предпочтительнее этой ситуации для всех игроков (т. е. увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого).

Анализ стратегий игроков

Отметим *содержательное различие* понятий ситуации равновесия и ситуации, оптимальной по Парето.

- В ситуации *равновесия* ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша.
- В *оптимальной по Парето* ситуации все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.

Стратегии игроков		**Игрок Б**	
		Хранить молчание	Давать показания
Игрок А	Хранить молчание	–0,5; –0,5	–10; 0
	Давать показания	0; –10	–3; –3

Анализ стратегий игроков

Стратегия «давать показания» строго доминирует над стратегией «хранить молчание», каждый игрок (подозреваемый) приходит к этому выводу. Таким образом, в условиях, когда каждый игрок оптимизирует свой собственный выигрыш, не заботясь о выгоде другого игрока, *единственное возможное равновесие* в игре — взаимное свидетельство обоих участников друг против друга — пара стратегий *(«давать показания», «давать показания»)*.

Стратегии игроков		**Игрок Б**	
		Хранить молчание	Давать показания
Игрок А	Хранить молчание	–0,5; –0,5	–10; 0
	Давать показания	0; –10	–3; –3

Анализ стратегий игроков

В то же время *оптимальной по Парето* ситуацией в данной игре является пара стратегий *(«хранить молчание», «хранить молчание»)*, для которой выигрыши игроков равны –0,5 (полгода заключения каждому). С точки зрения группы (этих двух подозреваемых) это наилучшее решение, при котором дальнейшее увеличение выигрыша одного из игроков (т. е. уменьшение его срока заключения) возможно только за счет уменьшения выигрыша другого (увеличение его срока заключения). Любое другое решение будет менее выгодным (для группы).

Стратегии игроков		**Игрок Б**	
		Хранить молчание	Давать показания
Игрок А	Хранить молчание	–0,5; –0,5	–10; 0
	Давать показания	0; –10	–3; –3

Анализ стратегий игроков

Суть дилеммы проявляется именно в том, что подозреваемые (как игроки), ведя себя по отдельности рационально (с позиции индивидуальной рациональности), вместе (как группа) приходят к нерациональному решению — к выбору стратегий, образующих ситуацию с худшим результатом.

Данный пример представляет собой **бескоалиционную** игру, причем игра **парная** — два игрока, **биматричная** (каждый из двух игроков имеет конечное множество стратегий**), с ненулевой суммой** (сумма выигрышей игроков в каждой ситуации отлична от нуля).

Матрица выигрышей игрока А Матрица выигрышей игрока Б

$$H_А = \begin{pmatrix} -0,5 & -10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad H_Б = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$$

Примеры классических игр двух персон

Пример 1.2. «Семейный спор».

Рассматривается игра, в которой муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч или театр. Если они имеют разные желания, то остаются дома. Муж предпочитает футбольный матч, а жена — театр.

Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, чем участвовать в развлечении (хотя и предпочтительном) одному.

Выигрыш каждого игрока определяется полезностью проведенного вечера и оценивается по шкале от 0 до 4.

Стратегии игроков		**Жена**	
		Футбол	Театр
Муж	Футбол	4; 1	0; 0
	Театр	0; 0	1; 4

Семейный спор

У каждого из игроков по две стратегии.
Цель каждого из игроков — максимизация собственного выигрыша.
Однако их интересы не противоположны.
В данной биматричной игре есть две ситуации равновесия по Нэшу: (Ф, Ф) и (Т, Т). При этом обе эти ситуации не только равновесны, но и оптимальны по Парето.
Однако выигрыши игроков в этих ситуациях различны, при этом первая ситуация выгодна игроку 1, а вторая — игроку 2.
Таким образом, остается нерешенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять как устраивающий всех игроков принцип оптимальности?

Стратегии игроков		**Жена**	
		Футбол	Театр
Муж	Футбол	4; 1	0; 0
	Театр	0; 0	1; 4

Семейный спор

Если игроки не общаются до начала игры, а делают выбор одновременно и независимо друг от друга, они могут оба проиграть, если выберут стратегии (Ф, Т) или (Т, Ф).

Поэтому игрокам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий. Таким образом, приходим к условиям **кооперативной** игры, когда игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом.

Основная задача в кооперативной игре состоит в дележе общего выигрыша. Общий выигрыш в данной игре в ситуациях, когда осуществляется одно из двух вечерних развлечений (футбол или театр), равен 5. Естественным было бы разделить этот выигрыш поровну между игроками, т. е. каждому по 2,5. При этом игроки договариваются половину вечеров проводить вместе на футболе, а вторую половину — в театре, т. е. с вероятностью 1/2 совместно выбирать каждое развлечение.

Следует заметить, что в случае бескоалиционной игры набор выигрышей (2,5; 2,5) недостижим.

Примеры классических игр двух персон

Пример 1.3. Игра «Орлянка».

В игре «Орлянка» участвуют два игрока. Игрок 1 выбирает сторону монеты («орел» или «решка»), а игрок 2 пытается угадать, какая сторона выбрана. Если он не угадывает, то платит игроку 1 одну денежную единицу, если угадывает — игрок 1 платит ему одну денежную единицу.

Стратегии игроков		**Игрок 2**	
		Орел	Решка
Игрок 1	Орел	-1; 1	1; -1
	Решка	1; -1	-1; 1

Игра «Орлянка»

Рассматриваемая игра является *антагонистической* (выигрыш одного игрока равен проигрышу другого) и может быть сведена к *матричной* игре, которая полностью задается матрицей выигрышей одного из игроков, например, игрока 1.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

У каждого из игроков по две стратегии: «орел» и «решка». Цель каждого из игроков — максимизация собственного выигрыша. Легко проверить, что в игре «Орлянка» ситуаций равновесия в (исходных) стратегиях нет.

Если игра повторяется многократно, то игроки могут выбирать свои исходные стратегии с некоторыми вероятностями, такими, чтобы средние ожидаемые выигрыши игроков (т. е. их выигрыши в среднем на одну партию игры) были максимально возможными.

Примеры классических игр двух игроков

Пример 1.4. Ситуация на рынке олигополии.

В отрасли действуют (всего) две фирмы-олигополиста — фирма **А** и фирма **Б**. Если бы они могли договориться друг с другом и повысить цены на свою продукцию, то они получили бы и высокую прибыль — по **50** млн. руб.

Однако эти фирмы прежде всего являются конкурентами и у каждой есть предпосылки нарушить свой договор, путем понижения цены и тем самым захвата части рынка и получения еще большей прибыли в **70** млн. руб. Естественно, после таких действий соперника, прибыль другой фирмы сократиться и составит, например, **10** млн. руб.

Но в реальной ситуации, пытаясь снизить риски и обойти соперника, каждая фирма выберет низкие цены и получит прибыль по **30** млн. руб. каждая, достигнув равновесия Нэша, как показано на платежной матрице.

Примеры классических игр двух игроков

Таблица выигрышей на рынке олигополии

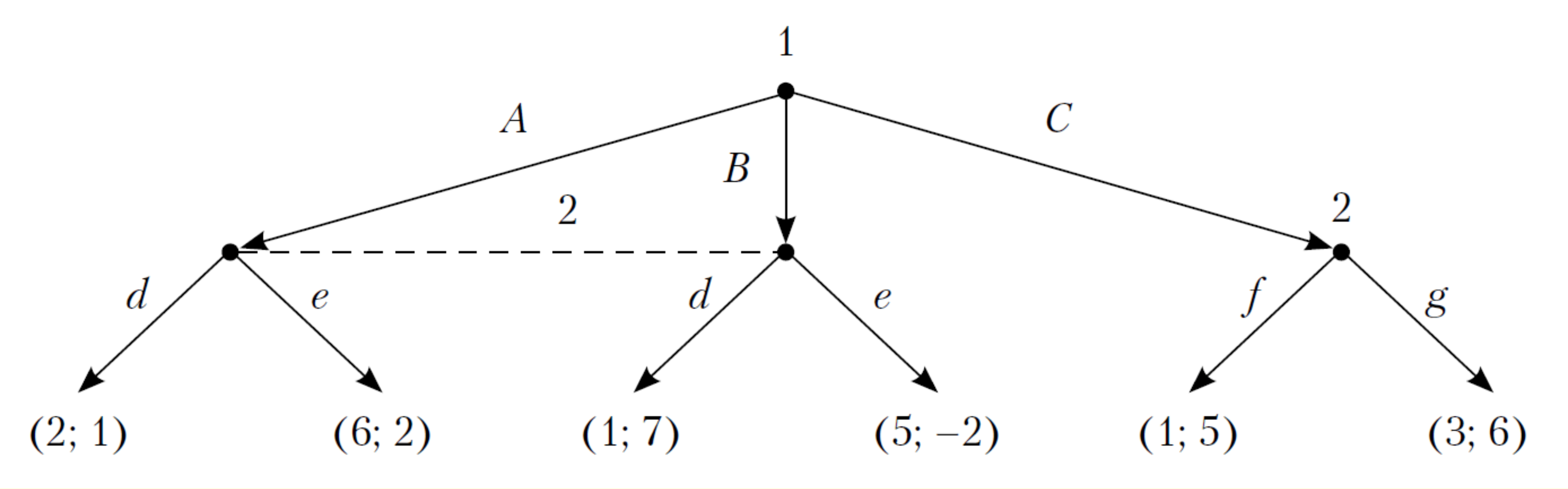
Стратегии игроков		**Фирма Б**	
		Низкие цены	Высокие цены
Фирма А	Низкие цены	30; 30	70; 10
	Высокие цены	10; 70	50; 50

Формы описания игры

В теории игр различают две формы описания игры:
— развернутую (или экстенсивную);
— нормальную.

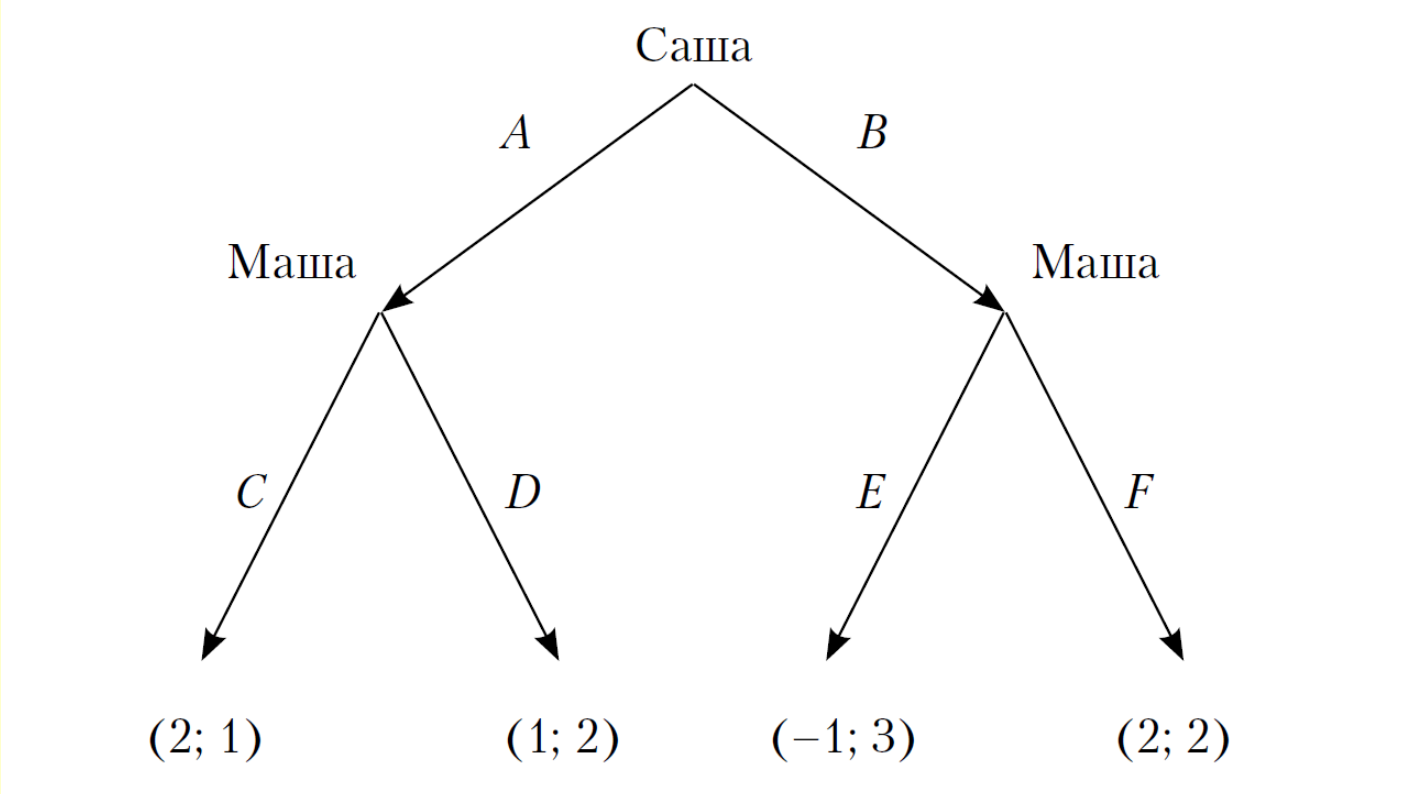
1. Развернутая (экстенсивная) форма описания игры

Развернутая форма описания игры указывает, какие ходы могут делать игроки, какой информацией они располагают, каковы размеры платежей в конце игры. Игра обычно описывается *деревом игры*; ветви дерева — ходы, которые могут делать игроки в сложившейся обстановке.



Формы описания игры

Пример описания игры в развернутой форме



Формы описания игры

2. Нормальная форма игры

Нормальная форма игры на примере биматричной игры:

	s_1^2	s_2^2	$\ldots$	s_j^2	$\ldots$	s_n^2
s_1^1	$(u_{11}^1; u_{11}^2)$	$(u_{12}^1; u_{12}^2)$	$\ldots$	$(u_{1j}^1; u_{1j}^2)$	$\ldots$	$(u_{1n}^1; u_{1n}^2)$
s_2^1	$(u_{21}^1; u_{21}^2)$	$(u_{22}^1; u_{22}^2)$	$\ldots$	$(u_{2j}^1; u_{2j}^2)$	$\ldots$	$(u_{2n}^1; u_{2n}^2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
s_i^1	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$(u_{ij}^1; u_{ij}^2)$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
s_m^1	$(u_{m1}^1; u_{m1}^2)$	$(u_{m2}^1; u_{m2}^2)$	$\ldots$	$(u_{mj}^1; u_{mj}^2)$	$\ldots$	$(u_{mn}^1; u_{mn}^2)$

Здесь u_{ij}^1 и u_{ij}^2 — элементы платежных матриц первого и второго игроков; s_{ij}^1 и s_{ij}^2 — их стратегии.

Формы описания игры

Играют два игрока. У первого m различных стратегий (он выбирает строки), у второго — n (он выбирает столбцы). Игроки осуществляют свой выбор одновременно (игра статическая). Рассматриваются все возможные профили стратегий игроков и определяются платежи, соответствующие любой возможной комбинации стратегий игроков.

Такую игру проще всего представить в виде двух платежных матриц, показывающих, какую сумму получит каждый из игроков при всех возможных стратегиях.

Можно представить эти две матрицы в виде одной матрицы с элементами в виде пары чисел — выигрышей первого и второго игроков.

Формализация бесколиционных игр

Нормальная форма бескоалиционной игры

В бескоалиционной игре целью каждого игрока является оптимизация индивидуального выигрыша (причем игроки не могут координировать совместно свои стратегии).

Определение. Бескоалиционной игрой в *нормальной* (или *стратегической*) форме называется тройка $\Gamma = \{I, S, H\}$, где

$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество всех игроков, различаемых по номерам;

S_i — множество стратегий, доступных игроку $i \in I$;

$s_i \in S_i$ — отдельная стратегия игрока i;

$S_i = \{s_i^{(1)}, s_i^{(2)}, \ldots, s_i^{(k)}\}$, где $s_i^{(k)}$ — k-я стратегия i-го игрока.

H — множество функций выигрыша.

Формализация бескоалиционных игр

Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков одной своей стратегии $s_i \in S_i$.
Таким образом, в результате каждой партии игры складывается набор стратегий $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, называемый *ситуацией (*или *исходом)*.

Множество всех ситуаций $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ является декартовым произведением множеств стратегий всех игроков.

Обозначим $H_i(s)$ — выигрыш игрока i в ситуации s.
Функция $H_i : S \to R$, определенная на множестве всех ситуаций S, называется *функцией выигрыша* игрока i.

Функция выигрышей игроков $H(s)$ определена на множестве ситуаций S:

$$H(s) = (H_1(s), H_2(s), \ldots, H_n(s)) : S \to R^n.$$

Формализация бескоалиционных игр

Целью каждого игрока является получение наибольшего возможного выигрыша. Но выбор лучшей стратегии одним из игроков (т. е. увеличивающей его возможный выигрыш) может вести к уменьшению выигрышей других игроков.

Поэтому каждый из этих игроков также будет применять стратегию, увеличивающую уже его выигрыш, но при этом выигрыши остальных игроков могут уменьшиться и т. д.

При этом может не быть такой ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0)$, где стратегия s_i^0 доставляет максимум игроку i, т. е. $H_i(s^0) = \max\limits_{s \in S} H_i(s)$.

Поэтому требуется определение такой ситуации s, которая бы удовлетворяла всех игроков.

Ситуации равновесия по Нэшу

Пусть $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, — произвольная ситуация в игре, где $s_i \in S_i$ — некоторая стратегия игрока i.

Рассмотрим новую ситуацию, получившуюся из ситуации s заменой стратегии s_i игрока i на стратегию $s'_i \in S_i$, используя следующее обозначение: $s|_{s'i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.
Очевидно, что $s|_{s'i} = s$, если $s_i = s'_i$.

Определение. Ситуация s в игре называется *приемлемой* для игрока i, если $H_i(s|_{s'i}) \leq H_i(s)$ для любых $s'_i \in S_i$.

Таким образом, если в некоторой ситуации s для игрока i найдется такая стратегия $s'_i \in S_i$, что $H_i(s|_{s'i}) > H_i(s)$, то игрок i в случае складывающейся ситуации $s|_{s'i}$ может получить больший выигрыш.

В этом смысле ситуация s для игрока i будет *неприемлемая*.

Ситуации равновесия по Нэшу

Определение. Ситуация s называется *ситуацией равновесия по Нэшу* (или *равновесной по Нэшу ситуацией*), если она приемлема для всех игроков, т. е. для каждого $i \in I$ выполняется

$$H_i(s|_{s'_i}) \leq H_i(s) \text{ для любых } s'_i \in S_i.$$

Очевидно, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от своей стратегии, приводящей к ситуации равновесия, в одиночку.

Определение. *Равновесной стратегией* игрока в бескоалиционной игре называется такая его стратегия, которая входит хотя бы в одну из равновесных ситуаций игры.

Нахождение ситуаций равновесия в бескоалиционной игре определяет *решение игры* и соответствующие *выигрыши* игроков.

Ситуации равновесия по Нэшу

Напомним, что важным в теории игр является следующее предположение о *рациональности* игроков: все игроки действуют *рационально*, т. е. каждый игрок рассматривает доступные ему альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров (возможных действий других игроков, их ресурсов), имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции).

Более того, существенным является факт *общеизвестности* (общего знания) рациональности игроков, т. е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, что все игроки знают о том, что все они рациональны.

Ситуации равновесия по Нэшу

Пример 2.1. Найти в следующей игре ситуации равновесия (здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2)):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad s_2^{(1)} & \qquad s_2^{(2)} & \qquad s_2^{(3)} \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}. \end{array}$$

Ситуации равновесия по Нэшу

$$
\begin{array}{cccc}
s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\
\end{array}
$$

$$
H = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc}
(4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\
(2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\
(3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8)
\end{array}\right)\end{array}
\begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}.
$$

Решение. Обозначим через s_{ij} =($s_1^{(i)}$, $s_2^{(j)}$) ситуацию при стратегиях игроков $s_1^{(i)}$ и $s_2^{(j)}$ соответственно.

Функция выигрышей игроков $H(s_{ij}) = H(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}) = (H(s_1^{(i)}), H(s_2^{(j)}))$.

Ситуация s_{11} =($s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$) *приемлема для игрока 1,*

так как имеем $H(s_{11}) = (H\ (s_1^{(1)}), H(s_2^{(1)}))$ = (4, 3) и

$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{21}) = 2, \quad H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{31}) = 3.$

Ситуация s_{11} также *приемлема для игрока 2*, поскольку

$H_2(s_{11}) =3 > H_2(s_{12}) = 1, \quad H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{13}) = 2.$

Таким образом, ситуация s_{11} =($s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$) *приемлема для обоих игроков*, т. е. это *ситуация равновесия по Нэшу*.

Ситуации равновесия по Нэшу

$$
\begin{array}{cccc}
s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\
\end{array}
$$

$$
H = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
(4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\
(2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\
(3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8)
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)}
\end{array} .
$$

Ситуации s_{21} , s_{31} неприемлемы для обоих игроков.

Также можно проверить, что ситуации s_{12} , s_{22} неприемлемы для обоих игроков, а ситуация s_{32} приемлема только для игрока 1.

Далее, ситуация s_{13} приемлема только для игрока 1, а ситуации s_{23}, s_{33} приемлемы только для игрока 2.

Таким образом, других равновесных ситуаций (в чистых стратегиях) в данной игре нет.