605. $a_n=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

606. $a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

607. $a_n=\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

608. $a_n=\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

609. $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$.

610. $a_n=\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}$.

611. $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$.

§ 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Определение предела функции. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при x стремящемся к a, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Аналогично, число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M(\varepsilon)>0$ такое, что при $|x|>M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

612. Доказать, исходя из определения предела, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2|<\delta$, будет выполняться неравенство

$$|x^2-4|<\varepsilon.$$

Если $|x-2|<\delta$, то $|x+2|=|x-2+4|\leqslant|x-2|+4<\delta+4$ и $|x^2-4|=|x-2||x+2|<\delta(\delta+4)$ *.

Для выполнения неравенства $|x^2-4|<\varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+4)=\varepsilon$, т. е. $\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$, откуда $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$ (второй корень $-2-\sqrt{4+\varepsilon}$ отбрасывается, так как δ должно быть положительным).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ, что из неравенства $|x-2|<\delta$ следует неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$, т. е.

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

613. Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1.$$

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $M>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$. Если $|x|>M$, то

* Для любых чисел a и b имеем: $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, $|ab|=|a||b|$.

$x^2>M^2$ и

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{M^2+1}<\frac{1}{M^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$ достаточно найти M из условия $\frac{1}{M^2}=\varepsilon$, т. е. $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Итак, для любого ε найдено такое M, что из неравенства $|x|>M$ следует неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$, т. е. доказано, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

В следующих задачах доказать, исходя из определения предела функции, что:

614. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

615. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{4}{5}$.

616. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$.

617. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}$.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Иными словами, функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если для любого $N>0$ существует число $\delta(N)$ такое, что при $0<|x-a|<\delta(N)$ выполняется неравенство $|f(x)|>N$; это записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с функциями бесконечно малыми. Если при данном предельном переходе функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно малой при том же предельном переходе, и обратно.

В дальнейшем в этом параграфе, формулируя то или иное положение о бесконечно малых функциях, будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все эти функции являются бесконечно малыми при одном и том же предельном переходе.

Свойства бесконечно малых функций

1) *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

2) *Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

3) *Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.*

618. Доказать, пользуясь определением, что при $x\to 1$ функция $1-x^2$ является бесконечно малой.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|1-x^2| < \varepsilon$. Если

$$|x-1| < \delta, \text{ то } |x+1| = |x-1+2| \leq |x-1| + 2 < \delta + 2$$

и

$$|1-x^2| = |1-x|\,|1+x| < \delta(\delta+2)\,^*.$$

Для выполнения неравенства $|1-x^2| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы

$$\delta(\delta+2) = \varepsilon, \text{ т. е. } \delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$$

или

$$\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$$

(второй корень $-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасывается, так как $\delta > 0$).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ, что из неравенства $0 < |x-1| < \delta$ следует неравенство $|1-x^2| < \varepsilon$. Следовательно, функция $1-x^2$ бесконечно мала при $x \to 1$.

619. Доказать, пользуясь определением, что при $x \to 0$ функция $a^{\frac{1}{x^2}}$, где $a > 1$, является бесконечно большой.

Решение. Пусть N — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x-0| < \delta, \text{ или } 0 < |x| < \delta,$$

будет выполняться неравенство

$$a^{\frac{1}{x^2}} > N.$$

Если $|x| < \delta$, то $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$ и $a^{\frac{1}{x^2}} > a^{\frac{1}{\delta^2}}$, поэтому требуемое неравенство выполняется при

$$a^{\frac{1}{\delta^2}} = N, \text{ или } \frac{1}{\delta^2} = \log_a N, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\log_a N}}.$$

Таким образом, для любого N найдено такое δ, что из неравенства $0 < |x| < \delta$ следует неравенство $a^{\frac{1}{x^2}} > N$. Следовательно, функция $a^{\frac{1}{x^2}}$ $(a > 1)$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

В следующих задачах, пользуясь определением, доказать, что:

620. Функция $\frac{1}{x^2-2x+1}$ является бесконечно большой при $x \to 1$.

621. Функция $a^{-\frac{1}{x^2}}$ $(a > 1)$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Указание. Использовать теорему о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

622. Функция $\frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.

Указание. Использовать третье свойство бесконечно малых функций.

---

* См. сноску к **612**.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

1. Применение основных теорем. При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы:

$$\lim_{x \to a} C = C, \text{ где } C \text{ — постоянная;} \tag{1}$$

$$\lim_{x \to a} Cf(x) = C \lim_{x \to a} f(x), \text{ где } C \text{ — постоянная;} \tag{2}$$

если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ существуют, то

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x), \tag{3}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x), \tag{4}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0, \tag{5}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}. \tag{6}$$

Кроме того, надо пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения справедливо равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right). \tag{7}$$

Далее следует отметить, что:

$$1) \lim_{x \to a} \frac{C}{f(x)} = \infty, \text{ если } \lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{8}$$

Действительно, $f(x)$ — бесконечно малая функция, следовательно, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая; отсюда

$$\lim_{x \to a} \frac{C}{f(x)} = C \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty;$$

$$2) \lim_{x \to a} \frac{C}{f(x)} = 0, \text{ если } \lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{9}$$

Действительно, $f(x)$ — бесконечно большая функция, следовательно, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая; отсюда

$$\lim_{x \to a} \frac{C}{f(x)} = C \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = C \cdot 0 = 0;$$

$$3) \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0, \tag{10}$$

если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$. Действительно, $f(x)$ — бесконечно малая функция, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая, но тогда $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно малая; отсюда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

623. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2-6x+7)$.

Решение. Из формул (2), (4), (1) и (3) следует, что

$$\lim_{x\to 1} 5x^2=5\lim_{x\to 1} x^2=5\lim_{x\to 1} x\cdot x=5\lim_{x\to 1} x\cdot\lim_{x\to 1} x=5\cdot 1\cdot 1=5;$$

$$\lim_{x\to 1} 6x=6\lim_{x\to 1} x=6\cdot 1=6;\quad \lim_{x\to 1} 7=7;\quad \lim_{x\to 1}(5x^2-6x+7)=5-6+7=6.$$

624. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Решение. Используем формулы (4), (3) и (5):

$$\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1;\quad \lim_{x\to 0}(2x^2-x-1)=-1\neq 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)}=\frac{-1}{-1}=1.$$

625. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(3x)^{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2} 3x=6$ и $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$, то, используя формулу (6), получим

$$\lim_{x\to 2}(3x)^{x^2}=6^4=1296.$$

626. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$.

Решение. По формуле (7) имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

627. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{(x-1)^3}$.

Решение. Используя формулу (8), получаем, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^3}=\infty,$$

так как

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^3=\lim_{x\to 1}[(x-1)]^3=0.$$

628. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{5}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Используя формулу (9), получаем, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\operatorname{tg} x}=0,$$

так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty.$$

629. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}$.

Решение. Используя формулу (10), получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln x}=0,$$

так как

$$\lim_{x\to 0} x=0 \quad\text{и}\quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty.$$

Найти следующие пределы:

630. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

631. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$.

632. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$.

633. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+5}{x^2+3x+7}$.

634. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)^{\lg x}$.

635. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{8}{x^2}}$.

636. $\lim\limits_{x\to 1}\lg x$.

637. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x$.

638. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin x$.

639. $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{arctg} x$.

640. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sin^3(x-1)}$.

641. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$.

642. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^3(2x+4)}$.

643. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{2^{x-1}}$.

644. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

645. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\operatorname{ctg}\left[\dfrac{2(x+1)}{3}\right]}$.

2. Раскрытие неопределенностей. Как показывают решения задач, приведенных в п. 1, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

В последующих задачах показывается, какими приемами обычно пользуются при таких преобразованиях (см. также гл. VI, § 2).

646. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение. Прежде всего отметим, что для решения этой задачи пользоваться формулой (5) данного параграфа нельзя, так как предел знаменателя равен нулю.

Непосредственная же подстановка в данное выражение предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Числитель и знаменатель данной дроби при $x=2$ обращаются в нуль, поэтому многочлены x^2-5x+6 и x^2-2x делятся без остатка на бином $x-2$ (теорема Безу); отсюда

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}.$$

Теперь (в результате непосредственной подстановки в полученное выражение предельного значения аргумента) получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

647. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$; чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. После этого можно будет сократить на x^2 и воспользоваться теоремой о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

648. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Снова неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы, т. е. на $(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left[(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

649. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n — степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=2,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}=0$.

650. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x]$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\sqrt{(x+m)(x+n)}+x$:

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x+m)(x+n)}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+m)(x+n)-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)x+mn}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)+\frac{mn}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{x}\right)\left(1+\frac{n}{x}\right)}+1}=\frac{m+n}{2}.$$

651. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

Решение. В данном примере получается неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=a\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Найти следующие пределы:

652. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

653. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$.

654. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

655. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

656. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$.

657. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

658. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

659. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

660. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

661. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

662. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

663. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

664. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

665. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

666. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

667. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+2)}-x)$.

668. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

669. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

670. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

671. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

672. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

673. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-$
$-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

674. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}]$.

675. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

676. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x}{2x+3}$.

677. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$.

678. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x+5}{0{,}01x^2-6x}$.

679. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

680. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

681. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

682. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

683. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

684. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

3. Первый замечательный предел. При вычислении пределов трансцендентных функций часто используется формула

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (11)$$

Рассмотрим примеры.

685. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

Решение. При $x\to 0$ $\alpha=2x$ также стремится к нулю, поэтому, умножая числитель и знаменатель на 2 и применяя формулу (11), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

686. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

согласно формуле (11), так как $\alpha=\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Найти следующие пределы:

687. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

688. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\sin\dfrac{2}{3x}$.

689. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

690. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$.

691. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

692. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

693. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

694. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

695. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}$.

696. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$.

697. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$.

698. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

699. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

4. Пределы типа e. Известно, что

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \qquad (12)$$

Эта формула используется для вычисления пределов, которые называются «пределами типа e». При вычислении этих пределов встречаем неопределенность вида 1^∞.

Рассмотрим примеры (см. также § 6, п. 2, задачи 737, 738).

700. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=e$$

согласно формуле (12), так как $\alpha=\operatorname{tg}x\to 0$ при $x\to 0$.

701. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. В этой задаче предел основания равен 1 (разделите числитель и знаменатель на x), а показатель степени стремится к бесконечности; имеем неопределенность вида 1^∞ (иногда говорят — «неопределенность типа e»). Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представляем основание степени в виде $1+\alpha$, а в показателе выделяем множитель $\dfrac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^2.$$

Переходя к пределу в квадратной скобке, получили число e, согласно формуле (12), так как

$$\alpha=\frac{2}{x-1}\to 0 \text{ при } x\to\infty.$$

702. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}=\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}^2x}}\right]^3=e^3.$$

Найти следующие пределы:

703. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

704. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

705. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$.

706. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^3}}$.

707. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

708. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

§ 6. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

1. Сравнение порядков бесконечно малых. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*, если предел их отношения $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен некоторому числу C, отличному от нуля. Если же $C=0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с $\beta(x)$.

Иногда возникает необходимость в более точном сравнении бесконечно малых функций — в выражении их порядков числами. В этом случае одну из сравниваемых бесконечно малых функций принимают за основную и относительно нее определяют порядок других бесконечно малых. Делают это, основываясь на следующем определении: если из двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ вторая принята за основную, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$, если $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^p}=C$, где C — число, отличное от нуля.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность обозначается символом $\sim$, т. е. пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях

Теорема I. *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными.*

Теорема II. *Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.*

Основные эквивалентности:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \quad (1)$$
$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x), \quad (2)$$
$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \quad (3)$$
$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x), \quad (4)$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x), \quad (5)$$
$$\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x), \quad (6)$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a. \quad (7)$$

Например, покажем, что если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то

$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$

т. е. покажем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Действительно, пусть $\alpha(x)=y$. Тогда если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то и $y\to 0$ при $x\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y\cdot\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\cdot 1=1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$. Еще пример. Покажем, что, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$

т. е. покажем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1.$$

Пусть $\alpha(x)=y$. Тогда, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$, то и $y\to 0$ при $x\to a$; поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}.$$

Обозначим $e^y-1=z$. При $y\to 0$ $z\to 0$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=\frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Следовательно, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, если при $x\to a$ $\alpha(x)\to 0$.

709. Доказать, что функции $\frac{2x^2}{1+x}$ и x^2 при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Решение. Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(x+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=2\neq 0.$$

Данные бесконечно малые функции есть бесконечно малые одного порядка.

710. Доказать, что порядок функции $\frac{x^3}{3-x}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x\to 0$.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(3-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3-x}=0,$$

т. е. функция $\frac{x^3}{3-x}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем функция x^2.

711. Доказать, что функция $1-\cos x$ будет бесконечно малой второго порядка относительно x при $x\to 0$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Следовательно, функция $1-\cos x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно x.

712. Доказать, что бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\frac{x}{1-x}$ и $\frac{x}{1+x^2}$ эквивалентны.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}=1.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{1-x}\sim\frac{x}{1+x^2}\text{ при } x\to 0.$$

В двух следующих задачах определить, при каком значении постоянных C и k функция $\alpha(x)$ эквивалентна функции $\beta(x)=x^k$ при $x\to 0$.

713. $\alpha(x)=C\ln\cos 4x$.

Решение. Для эквивалентности функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нужно, чтобы

$$\lim_{x\to 0}\frac{C\ln\cos 4x}{x^k}=1;$$

$$C\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^k}=1,$$

так как при $x\to 0$ $\ln\cos 4x\sim\cos 4x-1$;

$$C\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{x^k}=1,\quad\text{или}\quad -2C\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^k}=1,$$

так как при $x\to 0$ $\sin 2x\sim 2x$; отсюда

$$-8C\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}=1.$$

Следовательно, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будут эквивалентны, если

$$C=-\frac{1}{8}\quad\text{и}\quad k=2.$$

714. $\alpha(x)=C(\cos 4x-\cos 2x)$.

Решение. Нужно, чтобы

$$\lim_{x\to 0}\frac{C(\cos 4x-\cos 2x)}{x^k}=1.$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$C\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{x^k}=1,\quad -2C\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{x^k}=1,\quad\text{или}\quad -6C\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}=1.$$

Следовательно, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будут эквивалентны, если

$$C=-\frac{1}{6}\quad\text{и}\quad k=2.$$

715. Доказать, что функции $\frac{1-x}{1+x}$ и $1-\sqrt{x}$ являются бесконечно малыми функциями одного порядка при $x\to 1$.

716. Доказать, что порядок функции $\frac{3x^4-x^5}{x+1}$ выше, чем порядок функции x^3 при $x\to 0$.

717. Доказать, что функция $\operatorname{tg}x-\sin x$ будет бесконечно малой третьего порядка относительно x при $x\to 0$.

В следующих задачах доказать эквивалентность бесконечно малых функций:

718. $\frac{x}{2}$ и $\sqrt{1+x}-1$ при $x\to 0$.

719. $e^{2x}-e^x$ и $2x-\sin x$ при $x\to 0$.

720. $e^{\sin x}-1$ и x при $x\to 0$.

721. $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ и x при $x\to 0$.

722. $e^x-\cos x$ и x при $x\to 0$.

В следующих задачах определить, при каком значении постоянных C и k функция $\alpha(x)$ эквивалентна функции $\beta(x)=x^k$ при $x\to 0$:

723. $\alpha(x)=C(\sqrt{1+2x^2}-1)$.

724. $\alpha(x)=C(2^{\sin 2x}-1)$.

725. $\alpha(x)=C(\sin 3x-3\sin x)$.

726. $\alpha(x)=C\ln(3-2\cos x)$.

2. Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов. При вычислении предела отношения бесконечно малых применяют следующую теорему о замене эквивалентными: предел отношения не изменится, если числитель и знаменатель заменить на любую эквивалентную бесконечно малую функцию.

727. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Решение. При $x\to 3$ функция $x-3$ бесконечно малая и, следовательно,

$$\sin(x-3)\sim x-3.$$

Так как при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

728. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$.

Решение. Применяем сначала формулу тригонометрии

$1-\cos mx=2\sin^2\frac{mx}{2}$.

При $x\to 0$

$$\sin\frac{mx}{2}\sim\frac{mx}{2},\quad \text{а}\quad \sin^2\frac{mx}{2}\sim\left(\frac{mx}{2}\right)^2.$$

Заменяя в числителе бесконечно малую $1-\cos mx$ эквивалентной функцией $2\left(\frac{mx}{2}\right)^2$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{mx}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{m^2}{2}.$$

729. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.

Решение. По формуле тригонометрии,

$$\cos 4x-\cos 2x=-2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}=-2\sin 3x\sin x.$$

При $x\to 0$

$$\sin 3x\sim 3x,\quad \sin x\sim x,\quad \arcsin 3x\sim 3x,$$

т. е.

$$(\arcsin 3x)^2\sim(3x)^2,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin x}{\arcsin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(3x)\cdot x}{(3x)^2}=-\frac{2}{3}.$$

730. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$.

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x\sim\frac{7}{4}x$ при $x\to 0$, а $e^{-2x}-1\sim(-2x)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x}=-\frac{7}{8}.$$

731. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

Решение. Числитель и знаменатель сначала преобразуем, а потом заменим эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}\left[e^{(\alpha-\beta)x}-1\right]}{2\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}(\alpha-\beta)x}{2\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}\,\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}=1.$$

732. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулой (6), под знаком логарифма прибавим и вычтем единицу:

$$\ln\cos x=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1$$

$$(\alpha=\cos x-1\to 0\quad\text{при}\quad x\to 0).$$

По теореме о замене эквивалентной получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

(см. 728).

733. Найти $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Так как $1=\ln e$, то

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}.$$

Но при $x\to e$ функция $\frac{x}{e}-1$ — бесконечно малая, тогда

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

734. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$

Решение. При $x\to\infty$ функция $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая. Используя формулу (7), имеем

$$\lim_{x\to\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln a}{x}\cdot x=\ln a.$$

Если $x\to a$ $(a\neq 0)$, то в ряде случаев, применяя теорему о замене эквивалентными, удобно сначала ввести бесконечно малую функцию $\alpha=a-x$ (или $x-a$).

735. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель — бесконечно малые функции. Однако x не является бесконечно малой функцией (стремится не к нулю, а к π), поэтому соотношение $\sin 2x\sim 2x$ не имеет смысла.

Введем бесконечно малую $\alpha=\pi-x$, тогда $x=\pi-\alpha$ и

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 3(\pi-\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2\pi-2\alpha)}{\sin(3\pi-3\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-2\alpha}{3\alpha}=-\frac{2}{3}.$$

736. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. Сделаем предварительно замену переменного. Если ввести обозначение $x-1=\alpha$, то $\alpha\to 0$ при $x\to 1$; тогда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi(\alpha+1)}{2}=-\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

При вычислении пределов выражений вида $u(x)^{v(x)}$, где при данном предельном переходе $u(x)\to 1$ и $v(x)\to\infty$, удобно пользоваться формулой

$$\lim u^v = e^{\lim v \ln u}.$$

737. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{-t}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = e^{\lim\limits_{t\to\infty}(-t)\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)} = e^{-\lim\limits_{t\to\infty} t\left(-\frac{1}{t}\right)} = e.$$

738. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{m}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{m}{x}-1\right)} =$$

$$= e^{-2\lim\limits_{x\to\infty} x\sin^2\frac{m}{2x}} = e^{-2\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{m^2}{4x^2}} = e^{-\frac{m^2}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

739. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$.

Решение. При $x\to 0$ в числителе и знаменателе данной дроби стоят бесконечно малые функции. Предел отношения этих функций не изменится, если их заменить эквивалентными. При $x\to 0$

$$\ln(1+2x)\sim 2x,\quad \text{а}\quad x^3+2x^4\sim x^3,$$

ибо разность $(x^3+2x^4)-x^3=2x^4$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x^3+2x^4 и с x^3; имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^2+2x^4} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}+2} = 0 \quad\text{и}\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3} = 2\lim_{x\to 0} x = 0$$

(см. теорему II, § 6), поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

740. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^3 - x^5}{3x - x^4}$.

Решение. По теореме II, § 6, при $x\to 0$

$$\sin x + x^3 - x^5 \sim \sin x,$$

так как разность $(\sin x + x^3 - x^5) - \sin x = x^3 - x^5$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\sin x + x^3 - x^5$ и с $\sin x$. Аналогично, $3x - x^4\sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^3 - x^5}{3x - x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Найти следующие пределы:

741. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{4x+8}$.

742. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

743. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

Указание. Заменить 1 на $\sin\dfrac{\pi}{2}$.

744. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Указание. В знаменателе вынести 2 за скобку и $\dfrac{1}{2}$ заменить через $\cos\dfrac{\pi}{3}$.

745. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

Указание. Заменить $\operatorname{tg} x$ на $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ и привести дроби к общему знаменателю.

746. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

Указание. Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ и $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x$.

747. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

748. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

Указание. Вынести в числителе и знаменателе x за скобку.

749. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{nx}$.

750. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

Указание. Вынести в числителе e за скобку.

751. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

752. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

753. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Указание. $\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = $

$$= \frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

754. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$.

755. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Указание. При $x\to-\infty$ 3^x и 2^x бесконечно малы и $\ln(1+3^x)\sim 3^x$.

756. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

757. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos\alpha x)}{\ln(\cos\beta x)}$.

Указание. При $x\to 0$ $\ln(\cos\alpha x)\sim\cos\alpha x-1$.

758. $\lim\limits_{x\to\infty}\{x[\ln(a+x)-\ln x]\}$.

759. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right]}{\sin bx}$.

760. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

761. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{-x}}{\sin\beta x}$.

762. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$.

Указание. $x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right) =$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2x}}-a^{-\frac{1}{2x}}\right)^2}{\frac{1}{x^2}} = \frac{a^{-\frac{1}{x}}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= a^{-\frac{1}{x}}\,\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

763. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

Указание. Обозначить $x-\pi$ через α.

764. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

765. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

766. $\lim\limits_{x\to 2}[1-(x-2)]^{-\frac{1}{x-2}}$.

767. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

768. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

769. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

770. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

771. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

772. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

773. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{ctg} 2x}$.

774. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}$.

775. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x-x^4+x^2}{\operatorname{arctg} 3x}$.

776. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\sin^2 x}{\arcsin x}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^4 x}{3x^2+5x^4}$.

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

1. Определения. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если: 1) она определена в этой точке; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Если хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то функция называется *разрывной* в точке x_0, а сама точка x_0 называется *точкой разрыва* функции.

Различают следующие виды разрывов: а) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но так, что $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является *устранимым*. В этом случае для устранения разрыва надо доопределить функцию в точке x_0 или изменить ее значение в этой точке так, чтобы $f(x_0)$ было равно пределу $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

б) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существуют оба односторонних предела в точке x_0* (они не равны друг другу), то разрыв в точке x_0 является *разрывом первого рода*, или скачком;

в) если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности, равен бесконечности), а следовательно, не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является *разрывом второго рода*.

Разрывы первого и второго рода неустранимы.

Функция называется *непрерывной на отрезке*, если она непрерывна во всех точках этого отрезка.

2. Свойства непрерывных функций. Важное значение имеют следующие теоремы:

1) *Основные элементарные функции* a^x, x^α, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *непрерывны во всех точках, где они определены.*

---

* Односторонние пределы бывают правосторонними, когда x стремится к своему предельному значению, оставаясь больше него, и левосторонними, когда x стремится к своему предельному значению, оставаясь меньше него. Правосторонний предел обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, а левосторонний $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

2) *Если в точке x_0 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, то в этой же точке непрерывными являются и функции $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, а также $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, если только $\varphi(x_0)\neq 0$.*

3) *Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Из этих теорем вытекает такое следствие: всякая функция $f(x)$, образованная конечным числом алгебраических действий и взятий функции от функции из основных элементарных функций, является непрерывной во всех точках, в которых определены все составляющие ее основные элементарные функции, за исключением точек, в которых какой-либо из знаменателей обращается в нуль.

В частности, всякий многочлен есть функция, непрерывная на всей числовой оси; всякая дробно-рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль.

778. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва, указать характер разрыва, в случае устранимого разрыва доопределить до непрерывной функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

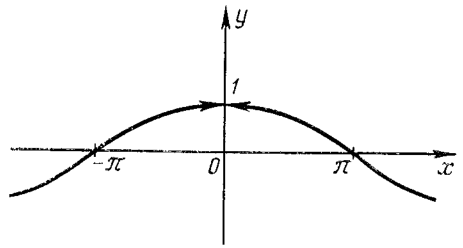

Рис. 101

Решение. Поскольку $\sin x$ и x непрерывны в любой точке (теорема 1), то, согласно теореме 2, непрерывным будет и их отношение $\frac{\sin x}{x}$ во всех точках x_0, отличных от нуля. В точке $x_0=0$ данная функция не определена, и поэтому разрывна. Но существует $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, так что разрыв в этой точке устранимый.

Положим $f(0)=1$, тогда функция

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x=0$ (рис. 101).

779. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}\,x-1, & \text{если } x\neq -1,\\ 1, & \text{если } x=-1.\end{cases}$$

Решение. Данная функция определена для всех значений x. Если $x>-1$, то

$$x+1>0,\quad |x+1|=x+1 \quad\text{и}\quad \frac{|x+1|}{x+1}=1.$$

В этом случае

$$f(x)=1\cdot x-1=x-1,$$

поэтому для всех значений $x>-1$ функция непрерывна как многочлен первой степени. Аналогично, при $x<-1$, $\frac{|x+1|}{x+1}=-1$ и

$$f(x)=-x-1$$

непрерывна как многочлен первой степени.

Исследуем точку $x_0=-1$. Выясним, существует ли предел функции в этой точке. Вычислим односторонние пределы при $x\to-1$ слева и справа. При $x<-1$ $f(x)=-x-1$, а при $x>-1$ $f(x)=x-1$, поэтому

$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x-1)=+1-1=0,$$

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(x-1)=-1-1=-2.$$

Следовательно, односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0=-1$ существуют, но не равны между собой; в этой точке данная функция имеет разрыв первого рода. Ее график изображен на рис. 102. Он состоит из двух полупрямых и точки:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при } x>-1, \\ 1 & \text{при } x=-1, \\ -x-1 & \text{при } x<-1. \end{cases}$$

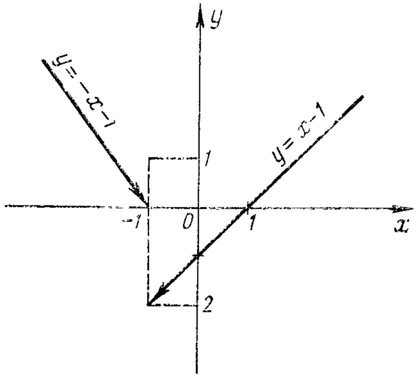

Рис. 102

780. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. Эту функцию можно представить как сложную:

$$y=\frac{1}{1+2^u},\quad \text{где}\quad u=\frac{1}{x-1}.$$

Знаменатель первой дроби нигде в нуль не обращается. По теореме 1, $y=\dfrac{1}{1+2^u}$ — непрерывная функция при любом значении u. Функция $u=\dfrac{1}{x-1}$ непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$. По теореме 3, данная сложная функция непрерывна для всех $x\neq 1$ (можно было бы сразу сослаться на приведенное выше следствие из теорем).

При $x\to1$ слева $x-1<0$ и, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$, а $2^{\frac{1}{x-1}}\to0$, поэтому

$$\lim_{x\to1-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

При $x\to1$ справа $x-1>0$ и, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to1+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

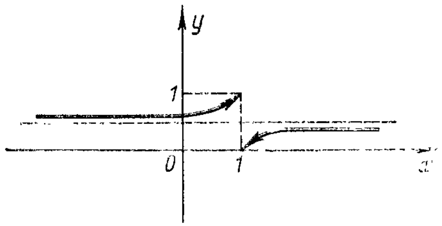

Рис. 103

Таким образом, пределы справа и слева существуют, но не одинаковы, так что точка $x_0=1$ является точкой разрыва первого рода. График данной функции представлен на рис. 103.

781. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение. Согласно следствию из указанных выше теорем, данная функция непрерывна везде, за исключением точки $x_0=-1$. Для выяснения характера разрыва в этой точке найдем пределы справа и слева:

$$\lim_{x\to-1-} e^{\frac{1}{x+1}}=0,$$

так как $\dfrac{1}{x+1}\to-\infty$,

$$\lim_{x\to-1+} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty,$$

так как $\dfrac{1}{x+1}\to+\infty$.

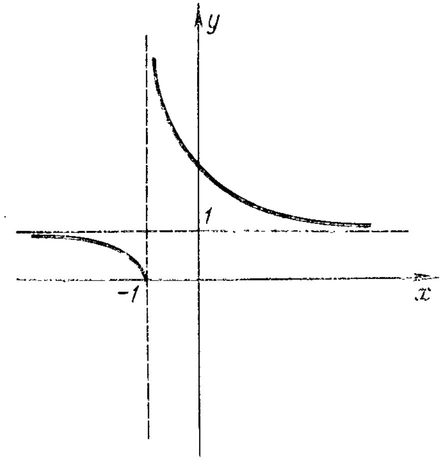

Рис. 104

Следовательно, $x_0=-1$ является точкой разрыва второго рода, так как предел справа бесконечный (рис. 104).

782. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Решение. Эта функция является дробно-рациональной, и поэтому она непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля. В точках

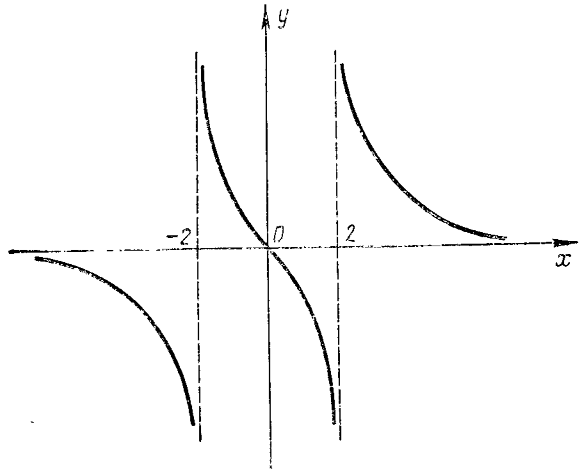

Рис. 105

$x=\pm2$ функция не определена, и поэтому разрывна. Нетрудно проверить, что в обеих этих точках односторонние пределы бесконечные:

$$\lim_{x\to2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty.$$

Следовательно, $x=\pm2$ — точки разрыва второго рода. График этой функции дан на рис. 105.

Исследовать следующие функции на непрерывность, найти точки разрыва, в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной:

783. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x_0=0$.

784. $y=\begin{cases} x^3+1 & (x\neq 0), \\ -2 & (x=0). \end{cases}$

785. $y=\frac{x-1}{|x-1|}$.

786. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$.

787. $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

788. $y=\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$.

789. $y=\frac{1}{x-x^3}$.

790. $y=\frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}$.

ГЛАВА V

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

1. Определение производной. *Производной функции* $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при условии, что это последнее стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ обозначается через y', или $f'(x)$. Таким образом, по определению

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция отыскания производной $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

2. Табличные производные:

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \tag{1}$$

(α — любое действительное число),

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{2}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad (x>0), \tag{3}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a, \tag{4}$$

$$(e^x)'=e^x, \tag{5}$$

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{6}$$

$$(\cos x)'=-\sin x, \tag{7}$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{8}$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{9}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1) \tag{10}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1), \tag{11}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}, \tag{12}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{13}$$

Следует отметить, что формула (2) является частным случаем формулы (1) при $\alpha=\frac{1}{2}$. Точно так же формула (5) получается как частный случай формулы (4) при $a=e$.

3. Основные правила дифференцирования:

$$(C)'=0, \tag{14}$$

$$(u+v)'=u'+v', \tag{15}$$

$$(Cu)'=Cu', \tag{16}$$

$$(uv)'=uv'+u'v, \tag{17}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2} \tag{18}$$

(здесь C — постоянная, а u и v — функции от x, имеющие производные).

791. Найти производную от функции $y=5x^3-2x^2+3x-4$.

Решение. Основываясь на формуле (15), имеем

$$y'=(5x^3)'-(2x^2)'+(3x)'-(4)'.$$

извольное число. **342.** $x=y-2z$, где y и z — произвольные числа. **343.** При $a=0$; $x=t$, $y=0$, $z=0$; при $a=2$: $x=5t$, $y=-8t$, $z=2t$. **344.** $x=\alpha$, $y=2\alpha$, $z=-\alpha$, $t=\alpha$, α — произвольное число. **348.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **349.** а) $x_1=\frac{1+x_5}{3}$, $x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$; б) $x_1=\frac{-x_5}{2}$, $x_2=-1-\frac{x_5}{2}$ $x_3=0$, $x_4=-1-\frac{x_5}{2}$. **356.** $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **357.** $\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$. **358.** $y_1=x_3$, $y_2=x_2+2x_3$, $y_3=x_1+2x_2+3x_3$. **359.** $u_1=7w_1-6w_2-10w_3$, $u_2=6w_1-5w_2-6w_3$, $u_3=4w_1-3w_2+w_3$. **360.** $V=A^{-1}U$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **365.** $\lambda_1=9$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=3$. **368.** для A: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, для A^2: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=9$, $\lambda(A^2)=\lambda(A)^2$. **369.** $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ — характеристические числа матрицы A; $\mu_1=P(1)=-4$, $\mu_2=P(4)=5$ — характеристические числа матрицы $P(A)$. **380.** а) $3y+z=0$, б) $x+2z=0$. **381.** а) $y+4=0$, б) $z-2=0$. **382.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1$. **383.** $x+y+z=\pm 2$. **384.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **385.** $3x+2y-z=5$. **386.** а) Да, б) нет. **387.** $-\frac{6}{11}x+\frac{5}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0$, $p=3$. **391.** $\varphi=\arccos\frac{4}{21}$. **392.** Плоскости параллельны. **393.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **394.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **395.** $y\pm z=0$. **396.** $(-10, 0, 2)$. **400.** 1. **401.** $M_1\left(0, 0, -\frac{5}{3}\right)$, $M_2(0, 0, 3)$. **402.** $x-2y+2z-1=0$, $x-2y+2z-3=0$. **403.** $(0, -2, 0)$. **404.** $x+z=0$, $x-y-1=0$, **405.** $\frac{3}{8}\sqrt{3}$. **410.** $x-4y+5z+15=0$. **411.** $x+y-z+2=0$. **412.** $x+2y-z-8=0$. **413.** $x+11y+38z-154=0$. **414.** $9x-y+7z-40=0$. **415.** $3x-4y-3z+4=0$. **416.** $3x+3y+z-8=0$. **417.** $h=3$. **424.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{4}$; $x=-1+t$, $y=1-3t$, $z=-3+4t$. **425.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$; $x=2+t$, $y=-1+4t$, $z=-1$. **426.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{0}$, $x=-1+t$, $y=-2$, $z=2$. **427.** $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{1}$. **428.** $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{4}$. **429.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{8}$. **430.** $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. **431.** $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$. **432.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. **433.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$. **434.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$. **438.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **439.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **443.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{0}$. **444.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. **446.** $(1, -2, 3)$. **451.** $\psi=\arcsin\frac{18}{91}$. **452.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. **455.** $(5, -1, 0)$. **456.** $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{7}{13}, \frac{27}{13}\right)$. **459.** $\begin{cases} x-2y-3=0, \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2z-3=0, \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} y+z=0, \\ x=0. \end{cases}$ **460.** $11x-4y+6=0$, $9x-z+7=0$, $36x-11z+23=0$. **462.** $9x+8y-6z=0$. **463.** $3x-2y-3=0$. **464.** $x+6y+3z-9=0$. **465.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{5}$. **466.** $A'(8, -2, 0)$. **467.** $A'(1, 2, 12)$. **468.** $A'(-1, 3, 2)$. **469.** $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}$. **470.** $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$. **471.**

$\frac{x-4}{13}=\frac{y}{37}=\frac{z+1}{58}$. **472.** $-11x+17y+19z-10=0$. **473.** $\frac{x-0,8}{7}=\frac{y-4,6}{4}=\frac{z+1,4}{-1}$. **474.** $-7x+8y+2z+23=0$. **480.** Круговой цилиндр, $R=3$, с осью Oy. **481.** Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox. **482.** Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, направленной в отрицательную сторону оси Oz. **483.** Пара плоскостей $x=\pm z$, пересекающихся по оси Oy. **484.** Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy. **485.** Параболический цилиндр $(z+2)^2=2(x-1)$. **486.** Эллиптический цилиндр $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$. **487.** Круговой цилиндр, ось которого совпадает с прямой $x=0$, $y=2$. **488.** Гипербола $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1, \\ z=0. \end{cases}$ **489.** $(x-1)^2+(z+1)^2=9$. **490.** Эллипс. **494.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=27$. **495.** $x^2+(y-4)^2+z^2=9$. **496.** $(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=38$. **497.** $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$. **498.** $C(1, -2, 2)$, $R=4$. **503.** При $x=0$ и $y=0$ — гиперболы с действительной осью Oy, при $z=h$ — эллипсы. **504.** Гиперболы с действительной осью Oz при $x=0$ и $y=0$, эллипсы при $z=h$ ($|h|\geq 2$). **505.** При $x=0$ и $y=0$ — пара прямых, проходящих через начало координат, при $z=0$ — точка, при $z=h\neq 0$ — эллипсы. **506.** Параболы, направленные в положительную сторону оси Oz при $x=0$ и $y=0$, эллипсы — при $z=h>0$, точка — при $z=0$. **507.** При $y=0$ — парабола, направленная в положительную сторону оси Oz, при $x=0$ — парабола, направленная в отрицательную сторону оси Oz, при $z=0$ — пара прямых, при $z=h\neq 0$ — гиперболы с действительной осью, параллельной оси Ox, при $h>0$ и оси Oy при $h<0$. **508.** Конус вращения вокруг оси Oz с вершиной в точке $(0, 0, 1)$. **509.** Эллиптический параболоид, направленный в отрицательную сторону оси Ox с вершиной в точке $(1, 0, 0)$. **510.** Двуполостный гиперболоид вращения вокруг оси Ox. **511.** Однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Oy. **515.** $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона образующих к плоскости xOy. **516.** а) Поверхность образована вращением линии $\begin{cases} z=\frac{1}{y^2} \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oz. б) Поверхность образована вокруг оси Oz синусоиды, идущей вдоль этой оси. **519.** Эллипсоид с центром в точке $(-2, 1, 0)$. **521.** Параболоид вращения с вершиной в точке $(-1, 1, -2)$. **522.** $M_1(2, -3, 0)$. $M_2(0, 0, 2)$. **523.** $M_1(4, -3, 2)$, $M_2(12, 3, 6)$. **525.** Эллипс $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{z}=1. \\ z=0 \end{cases}$ **526.** $(1, -1, 1)$, $(4, 4, -3)$. **527.** $a=-2$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. **537.** $2x^4-5x^2-10$. **538.** -35, -16, -7, 20. **539.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **540.** π, $\frac{\pi}{2}$, 0. **541.** x^2-5x+6. **544.** $(-\infty, +\infty)$. **545.** $[-1, 2]$. **546.** $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$. **547.** $(-\infty, -1)$ $(-1, 1)$ $(1, +\infty)$. **548.** $[1, 4]$. **549.** $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. **550.** $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **551.** $[-4, 4]$. **552.** $(-\infty, +\infty)$. **553.** $[1, 4]$. **556.** а) четная, б) четная, в) нечетная, г) ни четная, ни нечетная. **557.** а) Период $\frac{\pi}{2}$, б) период π, в) период 2π, г) непериодическая. **592.** $a_n=\frac{n}{n+2}$. **593.** $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. **594.** $a_n=\frac{1}{2n-1}$. **601.** $\frac{3}{5}$. **602.** 0,01. **603.** ∞. **604.** 0. **605.** 1. **606.** $\frac{1}{2}$. **607.** 0. **608.** 1. **609.** $\frac{1}{2}$. **610.** $-\frac{3}{2}$. **611.** 1. **630.** 0. **631.** ∞. **632.** 0. **633.** $\frac{3}{5}$. **634.** 1. **635.** $\frac{1}{64}$. **636.** 0. **637.** 1. **638.** $\frac{\pi}{6}$. **639.** $\frac{\pi}{6}$. **640.** ∞. **641.** ∞. **642.** 0. **643.** 0 при $x\to+\infty$, ∞ при $x\to-\infty$. **644.** 0.

645. 0. 652. -2. 653. 10. 654. $\frac{1}{8}$. 655. $\frac{3}{4}$. 656. $\frac{5}{2}$. 657. 4. 658. $-\frac{1}{2}$. 659. $\frac{a-1}{3a^2}$. 660. $-\frac{1}{2}$. 661. 1. 662. 4. 663. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 664. 0. 665. 0 при $x \to +\infty$, $+\infty$ при $x \to -\infty$. 666. $\frac{1}{2}$. 667. 1. 668. $\frac{2}{3}$. 669. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 670. 12. 671. -2. 672. $\frac{3}{2}$. 673. $\frac{2}{3}$. 674. 0. 675. 0. 676. $-\frac{3}{2}$. 677. $\frac{1}{2}$. 678. 0. 679. ∞. 680. ∞. 681. 1. 682. 2. 683. 0. 684. 1. 687. $\frac{5}{3}$. 688. $\frac{2}{3}$. 689. $\frac{\alpha}{\beta}$. 690. 0, если $n > m$; 1, если $n = m$; ∞, если $n < m$. 691. $\frac{1}{2}$. 692. $\sqrt{2}$. 693. $2\cos\alpha$. 694. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. 695. α. 696. $\frac{\alpha}{\beta}$. 697. 1. 698. $\frac{1}{2}$. 699. ∞. 703. e. 704. $e^{\frac{3}{2}}$. 705. 1. 706. e. 707. e. 708. e. 723. $C=1$, $k=2$. 724. $C=\frac{1}{2\ln 2}$, $k=1$. 725. $C=-\frac{1}{4}$, $k=3$. 726. $C=1$, $k=2$. 741. $\frac{1}{4}$. 742. $\cos^3\alpha$. 743. 0. 744. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 745. 0. 746. $\frac{1}{2}$. 747. $\frac{2}{3}$. 748. $\frac{1}{3}$. 749. $\frac{m}{n}$. 750. e. 751. 1. 752. 2. 753. $\frac{3}{2}$. 754. $\frac{m}{n}$. 755. 0. 756. $\frac{1}{a}$. 757. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 758. a. 759. $\frac{2a}{b}$. 760. $\ln\frac{a}{b}$. 761. $\frac{2\ln a}{\beta}$. 762. $\ln^2 a$. 763. $-\frac{5}{6}$. 764. π. 765. 1. 766. e. 767. 0. 768. 1. 769. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 770. $e\sqrt{e}$. 771. $e^{\operatorname{ctg} a}$. 772. $\frac{1}{e}$. 773. e. 774. $\frac{2}{5}$. 775. $\frac{2}{3}$. 776. 1. 777. $\frac{1}{3}$. 783. В точке $x=0$ — устранимый разрыв; функция $y = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$. 784. В точке $x=0$ — устранимый разрыв; функция $y = \begin{cases} x^3+1 & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$. 785. В точке $x=1$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 1+} y = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} y = -1$. 786. В точке $x=1$ устранимый разрыв: $\lim\limits_{x\to 1} y = \frac{\pi}{2}$. 787. В точке $x=0$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} y = 1$. 788. В точке $x=0$ разрыв первого рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} y = -1$. 789. В точках $x=0$, $x=1$, $x=-1$ разрыв второго рода: $\lim\limits_{x\to 0+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-} y = +\infty$. 790. В точке $x=6$ разрыв второго рода: $\lim\limits_{x\to 6+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 6-} y = -\infty$, в точке $x=-6$ устранимый разрыв; функция $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36} & \text{при } x \neq -6 \\ -\frac{1}{72} & \text{при } x = -6 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=-6$. 796. $10x^4 - 9x^2 + 4$. 797. $7x^2 - 5x + 6$. 798. $2ax + b$. 799. $nx^{n-1} + 3nx^2$. 800. $-\frac{16}{7x^2\sqrt[7]{x^2}} + \frac{2}{x^3}$. 801. $1 - 7\sqrt[6]{x} + 16\sqrt[3]{x} - 12\sqrt{x}$. 802. $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x\sqrt{x}} - \frac{12}{x^2\sqrt{x}}$. 803. $\ln x$. 804. x^2e^x. 805. $2e^x \sin x$. 806. $-\frac{x^3}{\sin^2 x} + 3x^2 \operatorname{ctg} x$. 807. $\frac{3^x}{\sqrt{1-x^2}} + 3^x \ln 3 \arcsin x$. 808. $1 + 2x \operatorname{arctg} x$. 809. $\frac{2x - \sin x \cos x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x}$. 810. $\frac{1+2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$. 811. $\frac{2x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$. 819. $10(x^2+1)^9\, 2x$. 820. $\frac{2ax+b}{3\sqrt[3]{(ax^2+bx+c)^2}}$. 821. $-e^{-x}$. 822. $3\cos 3x$. 823. $\frac{5}{\cos^2 5x}$. 824. $\frac{1}{\sin x \cos x}$. 825. $-4^{\cos x}\ln 4 \sin x$. 826. $(2x+5)\cos(x^2+5x+1)$. 827. $-4\cos^3 x \sin x$. 828. $\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$. 829. $\frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$. 830. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 831. $-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. 822. $\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$. 833. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 834. $-\frac{1}{x}\sin(\ln x)$. 835. $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$. 836. $\frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}\,\sqrt{1-x^2}}$. 837. $-x^3e^{-x}$. 838. $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 839. $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$. 840. $\frac{(x^2+1) - x^2\ln x}{x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. 841. $\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\cos x \sin x$. 842. $\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}$. 843. $\operatorname{tg}^5 x$. 844. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. 845. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 846. $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 847. $4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$. 848. $x^2 \operatorname{sh} x + 2x \operatorname{ch} x$. 849. $\frac{\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$. 850. $\frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. 851. $2^{\operatorname{sh} x}\ln 2 \operatorname{ch} x$. 859. $\frac{1}{\sin x}$. 860. $4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ln 4 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 861. $5\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^4 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 862. $\frac{8x\operatorname{tg}^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$. 863. $-\frac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$. 864. $2\operatorname{tg}^2 2x\,(3-2\sin^2 2x)$. 865. $\frac{\sin^2 x\,[3(1+2^{x^2})\cos x - 2x\cdot 2^{x^2}\sin x \ln 2]}{(1+2^{x^2})^2}$. 866. $\frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. 867. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 868. $\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$. 869. $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. 870. $\frac{3\cos 3x\,(2\sin^2 3x + 3\cos^2 3x)}{\sin^4 3x}$. 871. $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}$. 872. $-\frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}$. 873. $\frac{e^{\sin^2 x}\,[4(1+\operatorname{tg} x)\sin x\cos^3 x - 1]}{2(1+\operatorname{tg} x)^{3/2}\cos^2 x}$. 874. $\frac{2}{\sin 2x \ln \operatorname{tg} x}$. 875. $\frac{\sqrt{5}\,(x^8+x^6+x^2+1)}{x^{10}+1}$. 876. $\frac{1}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$. 877. $4\operatorname{sh}^3(x^2+2x+1) \times \operatorname{ch}(x^2+2x+1)(2x+2)$. 878. $4^{\operatorname{ch}^3 x}\ln 4 \cdot 3\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x$. 879. $\frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. 885. $\frac{23}{24\sqrt[24]{x}}$. 886. $\frac{2}{\cos^2 2x}$. 887. $-\operatorname{ctg} x$. 888. $\frac{2x+3}{4(x^2+3x+1)} - \frac{2x}{3(x^2+4)}$. 889. $\frac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$. 890. $\frac{2\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}$. 891. $x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)^5\left(\frac{6}{x} + \frac{20x}{x^2+1} + \frac{15x^2}{x^3+1}\right)$. 892. $\sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}}\left[\frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x\right]$. 893. $e^{x^2}\operatorname{tg}^3 x \arcsin x\left(2x + \frac{3}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$. 894. $\frac{\sqrt{2}}{\cos x + \sin x}$. 895. $\frac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$. 896. $\frac{1}{x^3+1}$. 897.