1 Mappings, functions: everywhere defined, injective, surjective, bijective, inverse mapping. Properties of composition of mappings, uniqueness of inverse mapping

Определение

Пусть A и B - два множества. Тогда **отображение** f из A в B - это такое подмножество $f \subseteq A \times B$, что для любого $a \in A$ и для любого $b_1, b_2 \in B$:

$$\text{из } (a, b_1) \in f \text{ и } (a, b_2) \in f \text{ следует, что } b_1 = b_2$$

т.е. для любого $a \in A$ существует только один $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$. Факт того, что f - отображение из A в B, обозначается как:

$$f : A \to B \text{ или } A \xrightarrow{f} B$$

Множество всех отображений из A в B обозначается как

$$B^A = \{f | f : A \to B\}$$

Другое определение

отображение - это *множество пар элементов*, которые удовлетворяют определенным условиям, имеющим однозначный смысл: каждому аргументу должно соответствовать только одно значение. Где $(a, b) \in f$ можно записать как $f(a) = b$, элемент a называется **аргументом**, а b - **значением** отображения f от аргумента a или **образом** элемента a из отображения f. Факт того, что $f(a) = b$ можно записать следующим образом:

$$f : a \mapsto b \text{ или } a \overset{f}{\mapsto} b$$

Если $f(a) = b$, то элемент a называется **прообразом** элемента b из отображения f.

Определение

Для любого отображения $f : A \to B$ можно определить два множества:

- **область определения** $dom(f) = \{a | (a, b) \in f\}$
- **область значений** $cod(f) = \{b | (a, b) \in f\}$

Определение

Пусть A - множество, n - натуральное число. Тогда отображение $f : A^n \to A$ называется n-**местной функция** или **операцией** на множестве A.

Определение

Для любого множества A можно определить **тождественное отображение** - функцию $id_A : A \to A$. Эта функция определяется как:

$$id_A \rightleftharpoons \{(a, a) | a \in A\}$$

Тождественное отображение id_A также иногда называют **диагональ** множества A.

$$id_A(a) = a$$

Определение

Пусть $f : A \to B$ - некоторое отображение. Тогда это отображение называется

- **инъективным** (**"однозначным"отображением**), тогда и только тогда, когда для любых двух разных аргументов $a_1, a_2 \in A$ образы $f(a_1)$ $f(a_2)$ также различны. Обозначается как $f : A \xrightarrow{1:1} B$

- **сюръективный** (**отображением "на"**), тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in B$ существует такой $a \in A$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \twoheadrightarrow B$

- **всюду определённым**, тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ существует такой $b \in B$, что $f(a) = b$. Обозначается как $f : A \rightarrowtail B$

- **биективным** (**"взаимно-однозначным"соответствием**), тогда и только тогда, когда оно инъективно, сюръективно и всюду определено. Обозначается как $f : A \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} B$

Предложение

Для любого отображения $f : A \to B$:

1. $f : A \twoheadrightarrow B$ (т.е. f сюръективно) $\Leftrightarrow cod(f) = B$
2. $f : A \rightarrowtail B$ (т.е. f всюду определено) $\Leftrightarrow dom(f) = A$

Доказательство

Очевидно по определению.

Определение

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ - два отображения. Тогда g называется **обратным** к f, тогда и только тогда, когда $f \circ g = id_A$ и $g \circ f = id_B$.

Предложение

Если для некоторого отображения $f : A \to B$ существует обратное отображение, то f сюръективно и всюду определено.

Доказательство

Докажем сюръективность. Если f не сюръективно, то существует такой $b \in B$, что $b \notin cod(f)$. Но по определению $id_B = (g \circ f)(b) = f(g(b)) = b$, т.е. если $a = g(b)$, то $(a, b) \in f$, т.е. $b \in cod(f)$ - противоречие. Всюду определенность доказывается аналогично.

Предложение

Если для отображения $f : A \to B$ существует обратное, то f инъективно.

Доказательство

В противном случае существуют такие $a_1, a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$. По условию $f \circ g = id_A$, т.е. $(f \circ g)(a) = a$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a_1 = (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b) = g(f(a_2)) = (f \circ g)(a_2) = a_2$ - противоречие.

Определение

Пусть A, B, C - три множества и даны два отображения: $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тогда можно определить **композицию** отображений f и g. Это отображение $f \circ g : A \to C$, определённое следующим образом: для любого элемента $a \in A$

$$(f \circ g)(a) \rightleftharpoons g(f(a))$$

Предложение

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ - отображения. Тогда:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ - ассоциативность операции $\circ$
2. $f \circ id_B = f$
3. $id_A \circ f = f$

Доказательство

2 и 3 - очевидно, что касается 1, достаточно отметить, что для любого $a \in A$,

$$((f \circ g) \circ h)(a) = h(f \circ g(a))) = h(g(f(a)))$$

$$(f \circ (g \circ h))(a) = (g \circ h)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Правые части уравнений равны, значит и левые тоже.

Предложение

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ - отображения. Тогда:

1. если $f : A \xrightarrow{1:1} B$ и $g : B \xrightarrow{1:1} C$, то $f \circ g : A \xrightarrow{1:1} C$
2. если $f : A \twoheadrightarrow B$ и $g : B \twoheadrightarrow C$, то $f \circ g : A \twoheadrightarrow C$
3. если $f : A \rightarrowtail B$ и $g : B \rightarrowtail C$, то $f \circ g : A \rightarrowtail C$
4. если $f : A \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} B$ и $g : B \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} C$, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} C$

Доказательство

Докажем 1 от противного. Предположим, что $f \circ g$ - не инъективно. Это значит, что существуют такие $a_1, a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $(f \circ g)(a_1) = (f \circ g)(a_2)$. Пусть $b_1 = f(a_1)$ и $b_2 = f(a_2)$. Тогда $(f \circ g)(a_1) = g(b_1) = (f \circ g)(a_2) = g(b_2)$, т.е. $g(b_1) = g(b_2)$. Так как g инъективно, $b_1 = b_2$, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$. Но f также инъективно, поэтому $a_1 = a_2$ - противоречие. Остальные случаи доказываются аналогично.

2 Notion of λ-term: operators of application and abstraction

Определение

Дана *функция*, её главное свойство заключается в том, что, будучи применённой к аргументу, она возвращает определённое значение. Следовательно, оператор **аппликации** принимает функцию f, её аргумент a и выполняет *применение* f к a. В стандартной математической нотации это записывается как $f(a)$.

В λ-исчислении применение функции f к Аргументу a обозначается следующим образом:

$$(f\ a)$$

Определение

Для любой переменной x и выражения e, определяющего, как его значение рассчитывается из x, следующая запись

$$\lambda x.e$$

называется **абстракцией** образованной из x и e.

Определение

λ-терм, составленный из переменных X и констант C - это слово в алфавите $\mathcal{A}_\lambda \cup X \cup C$, определяемое по индукции:

- любая переменная $x \in X$ и любая константа $c \in C$ являются λ-термом.

- для любых λ-термов p и q запись

$$(p\ q)$$

является λ-термом и называется **аппликацией** p к q.

- для любой переменной $x \in X$ и λ-терма f, запись

$$(\lambda x.f)$$

является λ-термом и называется **абстракцией** f от x.

3 Correctness theorem for the propositional logic

Теорема (Корректность исчисления высказываний)

Если секвенция s является выводимой, то s тождественно истинна.

Доказательство

Доказательство индукцией по высоте дерева вывода s. Основание индукции: s - аксиома. Очевидно, что $\phi \vdash \phi$ является тождественно истинной. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех деревьев вывода высоты $< n$, и дано дерево вывода T высоты n. Тогда

$$T = \frac{T_1 \dots T_n}{s}$$

Пусть $s_i = r(T_i)$ - все корни деревьев T_i. По предположению индукции все секвенции s_i являются тождественно истинными. Нужно показать, что s также тождественно истинна. Известно, что $\frac{s_1 \dots s_n}{s} \in R_{PC}$ является правилом вывода. Теперь проверим, что все правила вывода в исчислении высказываний являются тождественно истинными, т.е. если $\frac{s_1 \dots s_n}{s}$ - правило вывода в исчислении высказываний и все s_i тождественно истинны, то s также является тождественно истинной. Рассмотрим, например, правило:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi}{\Gamma \vdash \chi}$$

Предположим, что секвенции $\Gamma, \phi \vdash \chi$, $\Gamma, \psi \vdash \chi$ и $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ являются тождественно истинными, но секвенция $\Gamma \vdash \chi$ ложно при некотором означивании γ. Тогда по определению значения секвенции $\gamma(\chi) = 0$ и $\gamma(\phi') = 1$ для всех формул, входящих в Γ. Так как $\gamma(\Gamma, \phi \vdash \chi) = 1$ и $\gamma(\chi) = 0$, это означает, что некоторая формула из Γ, ϕ ложна при означивании γ. Это может быть только ϕ, поэтому $\gamma(\phi) = 0$. Аналогично рассматривая секвенцию $\Gamma, \psi \vdash \chi$, приходим к выводу, что $\gamma(\psi) = 0$. Следовательно $\gamma(\phi \vee \psi) = 0$. Но так как секвенция $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ является тождественно истинной, существует некоторая формула ϕ' из секвенции Γ такая, что $\gamma(\phi') = 0$ - противоречие. Все остальные 13 рассматриваются аналогично.