1 Замыкания

1.1 Определение замыкания

Здесь мы используем понятие *свойство* отношения, и поскольку мы не готовы дать его строгое определение, мы будем использовать это понятие в общепринятом смысле. Классическими примерами свойств отношений являются: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Определение

Дано бинарное отношение $r \subseteq A^2$ и свойство $\mathcal{P}$, назовём бинарное отношение r^* **замыканием** r относительно $\mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $r \subseteq r^*$
- r^* обладает свойством $\mathcal{P}$
- для любого другого r' такого, что r' обладает $\mathcal{P}$ и $r \subseteq r'$, $r^* \subseteq r'$

1.2 Единственность замыкания

Предложение

Для любого бинарного отношения $r \subseteq A^2$ и свойства $\mathcal{P}$ верно следующее: если замыкание r относительно $\mathcal{P}$ существует, оно единственно и совпадает с множеством

$$cl_{\mathcal{P}}(r) = \bigcap \{r' | r \subseteq r' \text{ и } r' \text{ обладает } \mathcal{P}\}$$

Доказательство

Единственность. Предположим, что существует другое замыкание r^{**} r относительно $\mathcal{P}$. Тогда, поскольку $r \subseteq r^*$ и r^* обладает $\mathcal{P}$, по определению замыкания, $r^{**} \subseteq r^*$. С другой стороны, используя определение r^*, можно получить обратное включение: $r^* \subseteq r^{**}$. Тогда $r^{**} = r^*$. Теперь предположим, что r' существует. Чтобы доказать вторую часть, проверим два включения: $cl_{\mathcal{P}}(r) \subseteq r^*$ и $r^* \subseteq cl_{\mathcal{P}}(r)$. Первое верно, потому что r^* принадлежит пересечению, второе верно, потому что r^* минимальный элемент этого пересечения.

1.3 Рефлексивное замыкание

Теперь рассмотрим наиболее распространённые случаи замыканий.

Предложение (Рефлексивное замыкание)

Дано отношение r на множестве A, оно является рефлексивным замыканием (т.е. замыканием относительно свойства рефлексивности), т.е. $r^* = r \cup id_A$.

Доказательство

Проверим, что r^* удовлетворяет условиям рефлексивного замыкания. Во-первых, оно рефлексивно, так как $id_A \subseteq r \cup id_A$; затем оно, очевидно, содержит множество r. Теперь проверим третье свойство (минимальность): если любое другое отношение r' рефлексивно (т.е. содержит диагональ id_A) и содержит r, то оно должно содержать их объединение, т.е. $r^* \subseteq r'$.

1.4 Симметричное замыкание

Предложение (Симметричное замыкание)

Дано отношение r на множестве A, оно является симметричным замыканием, т.е. $r^* = r \cup r^{-1}$.

Доказательство

Проверим, что r^* удовлетворяет условиям симметричного замыкания. Во-первых, оно симметрично, поскольку $(r \cup r^{-1})^{-1} = r \cup r^{-1}$; затем оно, очевидно, содержит множество r. Теперь проверим третье свойство: если любое другое отношение r' симметрично и содержит r, то оно должно содержать r^{-1}, т.е. $r^* \subseteq r'$.

1.5 Транзитивное замыкание

Предложение (Транзитивное замыкание)

Дано отношение r на множестве A, оно является транзитивным замыканием, т.е.

$$r^* = \bigcup\{r^n | n \geq 1\}$$

Доказательство

Во-первых, отметим, что r^* транзитивно. Действительно, пусть $(a, b), (b, c) \in r^*$. Тогда для некоторых $n, m \geq 1$, $(a, b) \in r^n$ и $(b, c) \in r^m$. Но тогда $(a, c) \in r^n \circ r^m = r^{n+m} \subseteq r^*$. Так как $r^1 = r$, то $r \subseteq r^*$. Доказательство минимальности r^* проведём по индукции: покажем, что $r^n \subseteq r'$ для любого транзитивного r' содержащего r. Основание индукции - $n = 1$ очевидно. Теперь предположим, что $r^{n-1} \subseteq r'$ и $(a, c) \in r^n \stackrel{def}{=} r^{n-1} \circ r$. По определению композиции существует некоторое b такое, что $(a, b) \in r^{n-1}$ и $(b, c) \in r$. Тогда $(a, b), (b, c) \in r'$, и так как r' транзитивно, то $(a, c) \in r'$.

1.6 Представление отношений в виде бинарных матриц

Определение

Любое отношение r на конечном множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, можно представить в виде бинарной матрицы **смежности** $M(r) = (m_{ij} | i, j \leq n)$, определённой следующим образом:

$$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in r$$

Пример матричного представления

Для отношения $r = \{(a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$ матрица $M(r)$ будет выглядеть так:

$$M(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Алгоритм Флойда-Уоршелла

Алгоритм (Флойда-Уоршелла)

Дано отношение r на конечном множестве A и $M(r)$ - матрица смежности, его транзитивное замыкание может быть вычислено по следующему алгоритму. Вначале инициализируем матрицу `W` элементами из $M(r)$. Затем мы перебираем k и индексы i, j от 1 до n, где n - количество элементов в A, и изменяем `W` следующим образом:

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      W[i][j] = W[i][j] or (W[i][k] and W[k][j])
```

1.8 Ациклические отношения

Зафиксируем некоторое бинарное отношение $r \subseteq A^2$.

Определение

Последовательность элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется **путём** на отношении r, тогда и только тогда, когда для всех $i < n$, $a_i \neq a_{i+1}$ и пара (a_i, a_{i+1}) или (a_{i+1}, a_i) лежит в r. Номер n - это **длина** пути. Путь является **направленным**, тогда и только тогда, когда для всех $i < n$ существует только одна возможность: $(a_i, a_{i+1}) \in r$.

Определение

Отношение r называется **ациклическим**, тогда и только тогда, когда оно не содержит **циклов**, т.е. направленных путей длины ≥ 2, конец которых совпадает с началом: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = a_1)$.

Определение

Отношение r называется **связным**, тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $a, b \in A$ существует путь $(a = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = b)$.

Ациклическое связное бинарное отношение называется **деревом**.

1.9 Транзитивное сокращение

Определение

Для любого отношения r, отношение r^- является **транзитивным сокращением** отношения r, тогда и только тогда, когда

- $(r^-)^* = r^*$, т.е. его транзитивное замыкание равно транзитивному замыканию r
- r^- является наименьшим среди отношений, обладающих данным свойством.

Теорема

Для любого конечного r существует r^-.

Доказательство

Индукция по количеству элементов в r. Если r пустое, утверждение очевидно. Шаг индукции. Рассмотрим r с n элементами. Если существует **кратчайший путь**, т.е. три пары arb, brc и arc, тогда мы можем рассмотреть $r' = r \setminus \{(a,c)\}$. По предположению индукции в нем меньше элементов, поэтому существует $(r')^-$. Но тогда $((r')^-)^* = r^*$. Если r не содержит кратчайших путей, то $r = r^-$, так как дальнейшее сокращение невозможно.

Теорема

Для любого транзитивного и антисимметричного r, если r^- существует, оно единственно.

Доказательство

Рассмотрим два сокращения r_1^- и r_2^-. Если они различны, то существует некоторая пара $(a,b) \in r_1^- \setminus r_2^-$. Так как $r_1^- \subseteq r$, то $(a,b) \in (r_2^-)^*$. Тогда a и b соединены в r_2^- направленным путем p. Возьмем произвольный элемент c из p_2. Тогда должен существовать направленный путь p_1 из a в b через c в r_1^-. Проверим возможные варианты: либо a или b принадлежат p_1 либо оба принадлежат p_1 только в качестве начала/конца. В первом случае, должен существовать цикл, поэтому, так как r асимметрично, $a = c$ или $b = c$ - что неверно, во втором случае существует кратчайший путь в r_1^-, что неверно, потому что r_1^- - минимально и не содержит кратчайших путей.

1.10 Диаграммы Хассе

Определение

Диаграмма Хассе для ЧУМ (A, r) - это минимальное бинарное отношение $r_0 \subset A^2$, транзитивное-рефлексивное замыкание которого равно r:

$$r_0^* = r$$

Диаграммы Хассе используются для удобного представления ЧУМ:

1.11 Ацикличность порядков

Теорема

Любой частичный порядок $\leq$ на множестве A ацикличен.

Доказательство

Дан порядок $\leq$ предположим, что он содержит некоторый цикл

$$c = (a_1, a_2, \ldots, a_n = a_1)$$

По определению, $a_i \leq a_{i+1}$ для всех i, поэтому по транзитивности для всех i верно, что

$$a_i \leq a_1 \text{ и } a_1 \leq a_i$$

Тогда по антисимметричности можно заключить, что для всех i, $a_i = a_1$, и последовательность c не может быть циклом.

1.12 Топологическая сортировка

Определение

Дано отношение $r \subseteq A^2$, отношение r^L называется **топологической сортировкой** r, тогда и только тогда, когда

- $r \subseteq r^L$
- r^L - линейный порядок на A

замечание

Если $\leq$ - *конечный* линейный порядок на $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то его диаграмма Хассе будет выглядеть как цепь:

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots a_{i_n}$$

где все индексы i_j различны.

Алгоритм (Кана)

Дано отношение r, построим r^L. Начнём с инициализации двух переменных:

- S - множество всех элементов из A без входящих рёбер,
- L - пустая последовательность упорядоченных элементов из A.

Затем мы меняем S и L следующим циклом:

```
while S is non-empty do
    remove a node n from S
    add n to tail of L
    for each node m with an edge e from n to m do
        remove edge e from the graph
        if m has no other incoming edges then
            insert m into S
if graph has edges then
    return error   (graph has at least one cycle)
else
    return L   (a topologically sorted order)
```

2 Мощность

2.1 Равномощность множеств

Если мы сравниваем конечные множества по их "размеру то естественно использовать количество элементов в качестве этого "размера". Но что использовать в случае бесконечных множеств? Во-первых, определим отношение "равномощности"множеств - понятие, представляющее свойство "иметь одинаковое количество элементов".

Определение

Два множества A и B **равномощны**, тогда и только тогда, когда существует биекция из A в B. Это отношение обозначается как $A \approx B$. В множестве A содержится **не более** элементов, чем в B, тогда и только тогда, когда существует всюду определенная инъекция из A в B. Это отношение обозначается как $A \preceq B$.

2.2 Свойства отношения $\approx$

Предложение

Для любых множеств A, B и C верно следующее:

1. $A \approx A$ - рефлексивность
2. $A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$ - симметричность
3. $A \approx B \approx C \Rightarrow A \approx C$ - транзитивность

Доказательство

Первое верно, так как $id_A : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A$. Второе верна, потому что если$f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$, то существует обратная биекция $f^{-1} : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A$. Третье верно, потому что если $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$ является биекцией и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$ является биекцией, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$ также является биекцией.

2.3 Свойства отношения $\preceq$

Предложение

Для любых множеств A, B и C верно следующее:

1. $A \preceq A$ - рефлексивность
2. $A \preceq B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$ - транзитивность
3. $A \preceq B,\ B \preceq A \Rightarrow A \approx B$ - Теорема Кантора-Бернштейна

Доказательство

Первое верно, так как $id_A : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} A$. Третье: если $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} B$ является инъекцией и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail} C$ является инъекцией, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} C$ также является инъекцией.

2.4 Теорема Кантора-Бернштейна

Теорема (Кантора-Бернштейна)

Пусть A, B - множества, $A \preceq B$ и $B \preceq A$. Тогда $A \approx B$.

Доказательство

По предложениям, существуют инъекции $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} B$ и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail} A$. Необходимо построить биекцию $A \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} B$. Построим последовательность множеств $A_i \subseteq A,\ i \in \omega$.

- Начало последовательности: $A_0 = A$ и $A_1 = g(B)$
- Другие члены последовательности: $A_{n+2} = (f \circ g)(A_n)$ при $n > 1$

Покажем, что $A_{n+1} \subseteq A_n$ для всех n индукцией по n. Основание индукции: $A_1 = g(B) \subseteq A_0 = A$. Шаг индукции: пусть $A_{i+1} \subseteq A_i$ для всех $i < n$, необходимо показать, что $A_{n+1} \subseteq A_n$. Возьмем $a \in A_{n+1} = (f \circ g)(A_{n-1})$. Тогда $a = g(f(b))$ для некоторого $b \in A_{n-1} \overset{ind}{\subseteq} A_{n-2}$. Следовательно, $a \in g(f(A_{n-2})) = A_n$. Итак, мы построили последовательность множеств $A_n,\ n \in \omega$ таких, что $A_{n+1} \subseteq A_n$. Рассмотрим $D = \cap_{n\in\omega} A_n$, и для любого $n \in \omega$ определим $M_i = A_i \setminus A_{i+1}$. Тогда $f \circ g : M_i \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} M_{i+2}$. Теперь определим отображение $h : A \rightarrowtail A$:

$$h(a) = \begin{cases} (f \circ g)(a), & \text{если } a \in \bigcup_{n\in\omega} M_{2n}, \\ a & \text{если } a \in \left(\bigcup_{n\in\omega} M_{2n+1}\right) \cup D \end{cases}$$

Образ отображения h:

$$rang(h) = \left(\bigcup_{1\leq n\in\omega} M_n\right) \cup D = A_1$$

Следовательно, $h : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A_1$. Так как $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A_1$, то $h \circ g^{-1} : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$ - биекция
Ч.Т.Д. $\square$

2.5 Сравнение множеств по мощности

Теорема (сравнение множеств)

Для любых множеств A и B верно, что $A \preceq B$ или $B \preceq A$.

Теорема (Кантора)

Для любого множества A, $A \prec \mathcal{P}(A)$ (т.е. $A \preceq \mathcal{P}(A)$ и $A \not\approx \mathcal{P}$).

Доказательство

Инъективное отображение $A \ni a \mapsto \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ показывает, что $A \preceq \mathcal{P}(A)$. Предположим, что $A \approx \mathcal{P}(A)$. Тогда существует биекция $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Теперь определим множество $B = \{a | a \notin f(a)\}$. Проверим, верно ли, что $B \in f^{-1}(B)$.

- Предположим, что $B \in f^{-1}(B)$. Тогда по определению B, $B \notin f^{-1}(B)$.
- Предположим, что $B \notin f^{-1}(B)$. Тогда по определению B, $B \in f^{-1}(B)$.

В обоих случаях имеем противоречие, поэтому такое f не может существовать.

2.6 Натуральные числа

Определение

Мы можем определить натуральные числа по индукции, используя только пустое множество.

1. $0 \rightleftharpoons \emptyset$
2. $n + 1 \rightleftharpoons n \cup \{n\}$

Примеры натуральных чисел

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $\ldots$
- $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

2.7 Кардиналы

Определение

Мы можем определить множество всех натуральных чисел.

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2\ldots\}$$

Определение

Множество A называется **конечным**, тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому натуральному числу n, число n называется его **мощностью**. Множество A называется **счётным**, тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству натуральных чисел ω, ω - его мощность. Если множество не является ни конечным, ни счётным, оно называется **несчётным**. Два множества имеют одинаковую мощность, тогда и только тогда, когда они равномощны.

Примеры несчётных множеств

Множество $\mathcal{P}(\omega)$ несчётно по теореме Кантора, и его мощность называется **континуумом**. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ также несчётно, и равномощно $\mathcal{P}(\omega)$, следовательно, его мощность также равна континууму.

2.8 Характеризация конечных множеств

Теорема

Множество A конечно тогда и только тогда, когда любое из его подмножеств $B \subsetneq A$ не равномощно A: $B \not\approx A$.

Доказательство

Пусть A конечно, без ограничения общности можно предположить, что $A = n \in \omega$ и что существует биекция $f : n \to B$, где $B \subsetneq n$. Рассматривая $|B|$ вместо B можно предположить, что $B = m < n$ также является натуральным числом, и f сохраняет порядок на натуральных числах. Докажем теперь, что это невозможно индукцией по n. Если $n = 1$, то $m = 0$ - пустое множество, но оно должно содержать $f(0)$ - противоречие. Теперь шаг индукции: $n = \{0, 1, \ldots, n-1\} > 1$. Тогда введём ограничение f' для f на множестве $n-1 = \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Это биекция $f' : n-1 \to m-1$. По предположению индукции это возможно только если $n-1 = m-1$, следовательно, $n = m$ - противоречие. Теперь возьмем A - множество, которое не равномощно ни одному из своих подмножеств. Докажем, что существует такое n, что $A \preceq n$. Если такого n не существует, то для любого n, $n \preceq A$, т.е. существует $f_n : n \rightarrowtail A$. Выберем такие отображения, что если $n \leq m$, то $f_n \subseteq f_m$. Действительно, учитывая f_n, построим f_{n+1}, обладающее этим свойством. Отметим, что

$$cod(f_{n+1}) \nsubseteq cod(f_n)$$

потому что иначе $n+1 \preceq n$, что неверно. Тогда существует некоторое $a \in cod(f_{n+1}) \backslash cod(f_n)$ Следовательно, $f'_{n+1} = f_n \cup \{(n, a)\}$ является инъективным. Рассматривая объединение $\bigcup\{f_n | n \in \omega\}$, получаем инъективное отображение ω в A, тогда существует подмножество $A' \subsetneq A$ такое, что $A' \approx A$

2.9 Мощность квадрата счётных множеств

Теорема

Дано счётное множество A, его квадрат A^2 также является счётным.

Доказательство

Поскольку A счётно, существует биекция $f : A \to \omega$. Тогда отображение $A^2 \ni (a, b) \mapsto (f(a), f(b)) \in \omega^2$ - биекция A^2 на ω^2. Ясно, что $\omega \preceq \omega^2$, потому что отображение $n \mapsto (0, n)$ очевидно инъективно. С другой стороны, отображение $(n, m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$ также инъективно, поэтому $\omega^2 \preceq \omega$. По теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $\omega^2 \approx \omega$, следовательно, A^2 счётно.

Следствие

Дано счётное множество A, любая его конечная степень A^n, $n \geq 1$ также счётна.

Доказательство

Индукция по n. Основание очевидно, шаг - по теореме.

2.10 Мощность счётного объединения счётных множеств

Теорема

Для любого счётного множества счётных множеств A, их объединение $\bigcup A$ также счётно.

Доказательство

Во-первых, отметим, что $\omega \preceq \bigcup A$. Необходимо показать обратное сравнение. Представим A как $A = \{B_i | i \in \omega\}$. Без ограничения общности можно предположить, что все A_i не пересекаются, т.е. при $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Отметим, что так как все A_i счётны, то для любого $i \in \omega$ существует биекция $f_i : A_i \to \omega$. Тогда можно составить отображение

$$f : \bigcup_{i \in \omega} A_i \to \omega$$

при $A_i \ni a \mapsto (i, f_i(a)) \in \omega^2 \approx \omega$. Это отображение инъективно, поэтому $\bigcup A \preceq \omega$, и, следовательно, $\bigcup A$ счётно.