Содержание

1 **Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сумма ряда** 1

2 **Необходимое условие сходимости ряда** 3

3 **Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда** 4

4 **Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости, признак сравнения, теорема о совместной сходимости. Примеры. Гармонический ряд. Эйлерова постоянная** 6

5 **Признак сходимости Коши. Следствие: признак Коши в предельной форме. Примеры. Признак сходимости Даламбера. Следствие: признак Даламбера в предельной форме. Примеры** 9

6 **Интегральный признак сходимости монотонно убывающей числовой последовательности. Пример** 12

7 **Знакопеременные ряды. Признак Лейбница** 14

1 Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сумма ряда

С помощью операции предельного перехода понятие суммы нескольких конечных чисел обобщается на случай счетного, т.е. бесконечного, числа слагаемых. Сформулируем основные определения.

Определение

Для любой заданной последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ выражения вида

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \text{ или } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \qquad ((S))$$

называются числовыми рядами. При этом z_n называется общим членом ряда, а сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k,\ n = 1, 2, \ldots \tag{(S')}$$

называется частичной суммой ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_k = z_{n+k}$, называется n-м остатком ряда (S) и обозначается как следующая бесконечная сумма: $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k} + \cdots$.

Определение

Числовой ряд (S) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\exists s_\infty\colon \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s_\infty$, $|s_\infty| < +\infty$. Если же предел последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда (S) не существует или равен $\pm\infty$, то ряд называется расходящимся.

Определение

Если числовой ряд (S) сходится, то предел последовательности его частичных сумм называется суммой ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Заметим, что произвольная числовая последовательность $\{z_n\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда сходится ряд $z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots$. Частичная сумма с номером n указанного ряда совпадает с элементом z_n исходной последовательности. Таким образом, задача исследования ряда на сходимость эквивалентна задаче исследования на сходимость некоторой числовой последовательности. Иными словами, теория числовых рядов представляет собой некоторый специальный раздел теории числовых последовательностей.

Отметим, что ряды во многих случаях оказываются более удобными для разного рода аналитических операций как при доказательстве существования пределов, так и при вычислении этих пределов.

Пример. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Решение. Имеем равенство $z_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Поэтому частичная сумма ряда представима в виде $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, находим сумму ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. $\square$

Пример. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Решение. Оценим частичную сумму s_n ряда сверху: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{N} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + (1 - \frac{1}{n})$, $n \geq 2$. Таким образом, для любого номера n монотонная последовательность частичных сумм удовлетворяет неравенствам $0 \leq s_n < 2$. По теореме Вейерштрасса, монотонно возрастающая и ограниченная последовательность s_n обязана иметь некоторый конечный предел, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. $\square$

Пример. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Решение. Оценим частичную сумму s_n ряда снизу: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n}$. Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, видим, что s_n стремится к бесконечности, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится. $\square$

2 Необходимое условие сходимости ряда

Сформулируем необходимое условие сходимости числового ряда.

Теорема

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0. \qquad ((NC))$$

Доказательство

Представим общий член z_n исходного ряда в следующем виде: $z_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. По условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, т.е. существует предел

$S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$. Переходя в равенстве $z_n = s_n - s_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, получим в результате искомое необходимое условие (NC). $\square$

Заметим, что условие (NC) является необходимым следствием сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, но не обеспечивает этой сходимости, т.е. не является достаточным. Подтверждающий это замечание пример дает ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, который, как это уже установлено, расходится и при этом $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$, где q — комплексное число.

Решение. Имеем равенство $z_k = q^k$. Пусть $q \neq 1$, тогда для частичной суммы ряда справедливо представление $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. При $|q| < 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, т.е. ряд сходится. Если $q = 1$, то $s_n = n$ и, следовательно, ряд расходится. При $|q| > 1$ ряд расходится: вэтом случае не выполнено необходимое условие (NC) его сходимости. Отметим еще, что при $q = -1$ справедливы равенства $s_{2n} = 0$ и $s_{2n+1} = 1$ и поэтому предела последовательности частичных сумм s_n не существует. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} -1^k$ вообще не имеет суммы (ни конечной, ни бесконечной). $\square$

Пусть последовательность частичных сумм s_n ряда является стационарной, т.е. существует номер N, начиная с которого все суммы s_n совпадают друг с другом: $s_{n+1} = s_n$, $n = N, N+1, \ldots$. Тогда $z_n = s_n - s_{n-1} = 0$ при $n = N+1, N+2, \ldots$ и сумма ряда превращается в обычную сумму конечного числа слагаемых.

3 Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда

Сформулируем некоторые свойства сходящихся рядов, вытекающие из уже известных вам свойств сходящихся последовательностей.

Теорема (об остатках)

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то и любой его остаток $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ также сходится. Если некоторый остаток $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ ряда сходится, то и сам ряд также сходится.

Доказательство

Для любых номеров n и p, $n > p$, имеет место равенство $\sum\limits_{k=p+1}^{n} z_k = s_n - s_p$. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится к сумме S. Тогда существует предел последовательности $s_n - s_p$ при $n \to \infty$, и этот предел равен $S - s_p$. Следовательно, существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k = S - s_p$, т.е. остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k$ сходится.

Обратно, пусть какой-нибудь остаток $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} z_k$ сходится и его сумма равна r_p. Тогда при $n > p$ имеет место равенство $s_n = s_p + \sum\limits_{k=p+1}^{n} z_k$. Предел выражения справа при $n \to \infty$ существует и равен $s_p + r_p$. Следовательно, существует и предел последовательности слева, равный той же величине $s_p + r_p$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится. $\square$

Теорема

Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k$ сходятся, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (z_k + \omega_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (z_k - \omega_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C z_k$, где C — комплексное число, также сходятся и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C z_k = C \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Доказательство

Утверждения теоремы следуют из соответствующих теорем о пределах, примененных к последовательностям частичных сумм соответствующих рядов. □

Иная формулировка той же теоремы: сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, получая при этом также сходящиеся ряды. Общий для всех членов ряда сомножитель можно вынести за знак суммы ряда.

Теорема (критерий Коши)

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится тогда и только тогда когда выполняется следующее условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \colon \forall n \geq N_\varepsilon, p \in \mathbb{N} \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k| < \varepsilon. \qquad ((CC))$$

Доказательство

Условие (CC) совпадает с условием Коши для последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, как это следует из равенства $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k = s_{n+p} - s_n$. Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно критерию Коши для сходящейся числовой последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм рассматриваемого ряда. □

4 Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости, признак сравнения, теорема о совместной сходимости. Примеры. Гармонический ряд. Эйлерова постоянная

Отдельное место в теории рядов занимают числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными неотрицательными членами, $a_k \geq 0$. Последовательность

$\{s_n\}$ частичных сумм для любого такого ряда является монотонно возрастающей. По этой причине у этой последовательности всегда имеется предел, причем этот предел конечен тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ограничена. В противном случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится и его сумма равна $+\infty$.

Таким образом, получаем следующий критерий сходимости: ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Теорема (признак сравнения)

Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ при любом натуральном n и $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. Если же ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ также расходится.

Следствие

Пусть $a_n > 0$ и $b_n > 0$ для всех натуральных n, причем последовательности a_n и b_n одного порядка при $n \to \infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Из условий следствия имеем $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$ при $n \to \infty$. Применяя предыдущую теорему, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема (о совместной сходимости)

Пусть при любом натуральном n справедливы неравенства $a_n > 0$, $b_n > 0$, и при этом существует такое натуральное число M, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall n \geq M$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство

В условиях теоремы имеем следующие неравенства: $0 < \frac{a_{M+1}}{a_M} \le \frac{b_{M+1}}{b_M}, \ldots, 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$, где $n > M$. Перемножая их, получаем при всех $n > M$ следующее соотношение $\frac{a_n}{a_M} \le \frac{b_n}{b_M} \Leftrightarrow a_n \le (\frac{a_M}{b_M})b_n$. Таким образом, $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$. По предыдущей теореме имеем требуемое. $\square$

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(kx)}{k^2}$, где x — вещественное число.

Решение. Справедливы оценки $0 \le \frac{\sin^2(kx)}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. По признаку сходимости, рассматриваемый ряд сходится. $\square$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{k})$.

Решение. Для частичной суммы ряда имеет место равенство $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1)$. Таким образом, s_n стремится к бесконечности при $n \to \infty$, т.е. ряд расходится. $\square$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k = \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})$.

Решение. Согласно формуле Тейлора имеем $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ при $x \to \infty$. Следовательно, $a_k = f_k \sim \frac{1}{2k^2}$ при $k \to \infty$, при этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. В соответствии со следствием из признака сходимости ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. $\square$

Заметим, что для частичной суммы s_n ряда из предыдущего примера справедливо следующее представление $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Как уже установлено, существует предел s_n при $n \to \infty$, т.е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Поэтому имеет место равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + C + o(1)$ при $n \to \infty$. В частности, для частичной суммы гармонического ряда справедлива эквивалентность $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n) + C$ при $n \to \infty$. Константа C из этого асимптотического равенства называется эйлеровой постоянной и для нее справедливо представление $C = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] \approx 0,577$.

Пример. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} [\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}]$ при $\alpha > 0$.

Решение. Для частичных сумм ряда имеем соотношения $\sum\limits_{k=2}^{n}[\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}] = 1 - \frac{1}{n^\alpha} \to 1$ при $n \to \infty$. Это и означает, что ряд сходится. Заметим, что при $\alpha > 0$ по теореме Лагранжа о среднем для любого $x \geq 2$ имеет место равенство $\frac{1}{(x-1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} = \frac{\alpha}{(x-1+\theta)^{\alpha+1}}$, где $\theta = \theta(x)$ — число из интервала $(0,1)$. Применив это равенство для последовательности значений $x = k$, $k = 2, 3, \ldots$, суммируя получающиеся при этом соотношения и пользуясь затем предыдущим примером, получим $\sum\limits_{k=2}^{\infty}[\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}] = \alpha \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1+\theta_k)^{\alpha+1}} = 1$. Таким образом, при любом $\alpha > 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1+\theta_k)^{\alpha+1}}$ сходится. Функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ монотонно убывает и поэтому при $0 < \theta_k < 1$ справедливо неравенство $a_k \geq \frac{1}{k^{\alpha+1}}$. Следовательно, $0 < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leq \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k < +\infty$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ при $\beta > 1$ сходится. Если же $\beta \leq 1$, то этот ряд расходится. Последнее утверждение следует из оценки $\frac{1}{k^\beta} > \frac{1}{k}$ справедливой при $k \geq 1$, и уже установленной нами расходимости гармонического ряда: $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\beta} \geq \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n) + C$ при $n \to \infty$. $\Box$

5 Признак сходимости Коши. Следствие: признак Коши в предельной форме. Примеры. Признак сходимости Даламбера. Следствие: признак Даламбера в предельной форме. Примеры

В результате сравнения ряда с неотрицательными членами с геометрической прогрессией получаются признаки сходимости Коши и Даламбера.

Теорема (признак Коши)

Пусть последовательность a_k, $k = 1, 2, \ldots$ неотрицательных чисел такова, что для некоторого числа q, $0 < q < 1$, и номера N справедлива оценка $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$, где $k \geq N$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ при

$k \geq N$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство

Из первого условия теоремы получаем $\sqrt[k]{a_k} \geq q < 1 \Rightarrow a_k \geq q^k$ при $k \geq N$. Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится как сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ и, следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. Если же $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ при $k \geq N$, то $a_k \geq 1$ при всех достаточно больших k и необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не выполняется: нижний предел последовательности a_k всегда не меньше единицы. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие (признак Коши в предельной форме)

Пусть последовательность неотрицательных чисел a_k, $k = 1, 2, \ldots$ такова, что существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = C$. Если при этом $C < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $C > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство

Пусть $C < 1$, тогда найдется $q \colon C < q < 1$. По определению предела, начиная с некоторого номера N будет справедливо неравенство $\sqrt[k]{a_k} \leq q$, $k \geq N$. Пользуясь признаком Коши заключаем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $C > 1$, то по определению предела при всех достаточно больших k имеет место оценка $a_k \geq 1$. По признаку Коши в этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Если в условии признака Коши в предельной форме $C = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{x^2}{k})^k \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^2}{k} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. По признаку Коши в предельной форме ряд сходится. $\square$

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$. В соответствии с признаком Коши в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $|x| < \sqrt{2}$ и расходится при $|x| > \sqrt{2}$. Если $|x| = \sqrt{2}$, то ряд, как легко видеть, также расходится. $\square$

Теорема (признак Даламбера)

Пусть последовательность a_k, $k = 1, 2, \ldots$ неотрицательных чисел такова, что для некоторого числа q, $0 < q < 1$, и номера N при $k \geq N$ числа a_k строго положительны и удовлетворяют оценке $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \ \forall k \geq N$. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \ \forall k \geq N$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство

Пусть $a_{k+1} \leq q a_k$ при $k \geq N$. Тогда для любого $k > N$ справедливы неравенства $a_k \leq q a_{k-1} \leq q^2 a_{k-2} \leq \ldots \leq q^{k-N} a_N = (\frac{a_N}{q^N}))q^k$. Заметим, что в силу условия $0 < q < 1$ сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{a_N}{q^N}) q^k = (\frac{a_N}{q^N} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = (\frac{a_N}{q^N}) \frac{q}{1-q}$ существует и конечна. Следовательно, согласно признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится. Если же $a_{k+1} \geq a_k$ при $k \geq N$, то имеем следующую цепочку неравенств: $a_k \geq a_{k-1} \geq a_{k-2} \geq \ldots \geq a_N > 0 \ \forall k \geq N$. Следовательно, всегда существующий нижний предел последовательности a_k строго больше нуля, т.е. необходимое условие сходимости ряда не выполнено. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Следствие (признак Даламбера в предельной форме)

Пусть последовательность неотрицательных чисел a_k, $k = 1, 2, \ldots$ такова, что существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D$. Если этот предел $D < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $D > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Если в условии следствия $D = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x > 0$.

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x}{k+1} = 0$. В соответствии с признаком Даламбера в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $x > 0$. Как можно заметить, его сумма совпадает с функцией $e^x - 1$. □

Теорема (обобщение предельного признака Коши)

Пусть неотрицательные числа a_k, $k = 1, 2, \ldots$ таковы, что верхний предел $C = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ строго меньше единицы: $C < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $C > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

6 Интегральный признак сходимости монотонно убывающей числовой последовательности. Пример

Сформулируем признак сходимости ряда с неотрицательными членами, образующими монотонную последовательность.

Теорема (интегральный признак)

Пусть неотрицательная функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке числовой прямой. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится в том и только том случае, если сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство

Функция $f(x)$ монотонна и поэтому интегрируема по Риману на любом отрезке вида $[1, n]$, где n натуральное число, $n \geq 2$. При этом справедливы соотношения $0 \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx = f(1) + \int\limits_{1}^{n} f(x)dx$. Таким образом, если интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ ограничена и, следовательно, сам ряд также сходится.

Возьмем теперь произвольное число $\eta > 1$ и обозначим как $n = [\eta]$ его целую часть. Тогда справедливы соотношения $\int\limits_{1}^{\eta} f(x)dx \le \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$. Последнее неравенство справедливо в силу монотонного убывания функции $f(x)$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится, то из полученного неравенства получается оценка $\int\limits_{1}^{\eta} f(x)dx \le \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$. Таким образом, первообразная от неотрицательной функции $f(x)$ при $\eta \ge 1$ ограничена. Этого достаточно для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$. $\square$

Следствие

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

Доказательство

Для обоснования этого следствия достаточно применить предыдущую теорему к неотрицательной монотонно убывающей функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \le 1$ он расходится. $\square$

7 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Определение

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными членами a_n, которые поочередно то положительны, то отрицательны, называется знакопеременным (или знакочередующимся) рядом.

Теорема (признак Лейбница)

Пусть последовательность $\{a_k\}$ монотонна и $a_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сходится. Если S это его сумма, а s_n его частичная сумма, то справедлива оценка

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}| \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство

Без ограничения общности можем предполагать, что $\{a_k\}$ монотонно убывает и, следовательно, a_k — это неотрицательное число при любом k. Для любого натурального p имеет место равенство

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-n-1} a_k| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}. \qquad ((1))$$

Если p четное, то сумма в правой части равенства (1) — это сумма неотрицательных разностей вида $a_k - a_{k+1}$. Если же p нечетное, то к сумме такого вида разностей добавляется еще одно неотрицательное слагаемое a_{n+p}. Заметим еще, что для любого натурального p справедлива оценка

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-n-1} a_k| \leq a_{n+1}. \qquad ((2))$$

При p нечетном оценка (2) следует из представления (1), правая часть которого записывается как сумма неотрицательного числа a_{n+1} и неположительных разностей вида $a_{k+1} - a_k$ при k от $n+2$ до $n+p-1$. Если же p

четное, то из предыдущей суммы следует еще вычесть неотрицательное число a_{n+p}. Следовательно, оценка (2) будет и вэтом случае выполнена. Оценку (2) перепишем в эквивалентном виде

$$| \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-n-1} a_k| = | \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-1} a_k| \leq a_{n+1}. \qquad ((2'))$$

Эта оценка вместе с условием $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ приводит к заключению, что последовательность частичных сумм исходного ряда фундаментальна, т.е. удовлетворяет условию Коши. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сходится. Переходя к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве $(2')$, получаем требуемую оценку погрешности. □

Пример. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

Решение. При $\alpha > 0$ выполнены условия признака Лейбница: последовательность $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно убывает к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится при $\alpha > 0$. Если же $\alpha \leq 0$, то ряд расходится: не выполняется необходимое условие сходимости. □