Лекция № 14

Введение в теорию игр. Часть 2
Introduction to game theory. Part 2

Доминирование стратегий

Определение. Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i в игре $Г = \{I, S, H\}$ *строго доминируема (строго доминируется)*, если существует другая стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ такая, что

$$H_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_n) > H_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \qquad (2.1)$$

для всех $s_k \in S_k$, $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

В этом случае стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *строго доминирует* стратегию $s_i \in S_i$.

Если неравенство (2.1) выполняется нестрого, но хотя бы для одного набора $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ строго, то стратегия s_i *слабо доминируется* стратегией $\bar{s}_i$.

Доминирование стратегий

Рассмотрим игру из **примера 2.1**.

$$H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \\ \end{array}$$

$$H = \left(\begin{array}{ccc} (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) \end{array} \right) \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}.$$

В соответствии с определением доминируемых стратегий следует, что стратегия $s_2^{(2)}$ *строго доминируема* стратегией $s_2^{(3)}$:

$$H_2(s_1, s_2^{(2)}) < H_2(s_1, s_2^{(3)}) \text{ для } \forall s_1 \in S_1\ ,$$

поэтому рациональный игрок 2 не должен играть $s_2^{(2)}$.

Доминирование стратегий

$$H = \begin{array}{cccc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\ \left(\begin{array}{c} (4,\ 3) \\ (2,\ 1) \\ (3,\ 0) \end{array}\right. & \begin{array}{c} (5,\ 1) \\ (8,\ 4) \\ (9,\ 6) \end{array} & \left.\begin{array}{c} (6,\ 2) \\ (3,\ 6) \\ (2,\ 8) \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Игрок 1 (сам рационален и знает, что игрок 2 тоже рационален) понимает, что игрок 2 не будет играть $s_2^{(2)}$. Поэтому для него (при исключении стратегии $s_2^{(2)}$) стратегия $s_1^{(1)}$ будет лучше, чем другие две.

Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 не будет играть $s_2^{(2)}$, и игрок 2 знает, что игрок 1 будет играть $s_1^{(1)}$, то игрок 2 должен играть $s_2^{(1)}$.

В результате приходим к ситуации ($s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$) – *ситуации равновесия по Нэшу*.

Доминирование стратегий

Рассмотренный выше процесс — *последовательное удаление строго доминируемых стратегий*. Более наглядно выполнять этот процесс пошагово.

$$H = \begin{array}{cccc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\ \left(\begin{array}{c} (4,\ 3) \\ (2,\ 1) \\ (3,\ 0) \end{array}\right. & \begin{array}{c} (5,\ 1) \\ (8,\ 4) \\ (9,\ 6) \end{array} & \left.\begin{array}{c} (6,\ 2) \\ (3,\ 6) \\ (2,\ 8) \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Шаг 1. Удаляется стратегия $s_2^{(2)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_2^{(3)}$:

$$H = \begin{array}{ccc} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ \left(\begin{array}{c} (4,\ 3) \\ (2,\ 1) \\ (3,\ 0) \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} (6,\ 2) \\ (3,\ 6) \\ (2,\ 8) \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Доминирование стратегий

$$H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc|c} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ \hline (4,\ 3) & (6,\ 2) & s_1^{(1)} \\ (2,\ 1) & (3,\ 6) & s_1^{(2)} \\ (3,\ 0) & (2,\ 8) & s_1^{(3)} \end{array}.$$

Шаг 2. Удаляется стратегия $s_1^{(2)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_1^{(1)}$, т. е. получим

$$H = \begin{array}{cc|c} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ \hline (4,\ 3) & (6,\ 2) & s_1^{(1)} \\ & & \\ (3,\ 0) & (2,\ 8) & s_1^{(3)} \end{array}.$$

Доминирование стратегий

$$H = \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & (6,\ 2) \\ & \\ (3,\ 0) & (2,\ 8) \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Шаг 3. Удаляется стратегия $s_1^{(3)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_1^{(1)}$, т. е. получим

$$H = \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & (6,\ 2) \\ & \\ & \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Доминирование стратегий

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & \qquad s_2^{(3)} \end{array} & \\ H = & \begin{pmatrix} (4,\ 3) & \qquad (6,\ 2) \\ & \\ & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Шаг 4. Удаляется стратегия $s_2^{(3)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_2^{(1)}$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} s_2^{(1)} \end{array} & \\ H = & \begin{pmatrix} (4,\ 3) & \qquad \\ & \\ & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

В результате остается пара стратегий $s = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ — ситуация равновесия (по Нэшу) с выигрышами игроков $H(s_{11}) = (4, 3)$.

Доминирование стратегий

Свойство. Множество стратегий, выдерживающих такое исключение (оставшихся после удаления) строго доминируемых стратегий, *не зависит* от последовательности (порядка) исключений.

Замечание. Для слабо доминируемых стратегий данное свойство может не выполняться.

Рассмотрим следующую игру:

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} (1,\ 1) & (0,\ 0) \\ (1,\ 1) & (2,\ 1) \\ (0,\ 0) & (2,\ 1) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)}. \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}$$

Пусть сначала удаляется стратегия $s_1^{(1)}$ (слабо доминируется $s_1^{(2)}$), а затем — стратегия $s_2^{(1)}$ (слабо доминируется $s_2^{(2)}$).

Доминирование стратегий

Тогда приходим к исходу с выигрышами игроков (2, 1) (игрок 2 выбирает стратегию $s_2^{(2)}$):

$$\begin{array}{cc} s_2^{(2)} & \\ \left(\begin{array}{c} (2,\ 1) \\ (2,\ 1) \end{array}\right) & \begin{array}{l} s_1^{(2)}. \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}$$

Если же сначала удаляется стратегия $s_1^{(3)}$ (слабо доминируется $s_1^{(2)}$), а затем — стратегия $s_2^{(2)}$ (слабо доминируется $s_2^{(1)}$), то приходим к исходу с выигрышами игроков (1, 1) (игрок 2 выбирает стратегию $s_2^{(1)}$):

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc} (1,\ 1) & (0,\ 0) \\ (1,\ 1) & (2,\ 1) \\ (0,\ 0) & (2,\ 1) \end{array}\right) & \begin{array}{l} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)}. \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} s_2^{(1)} & \\ \left(\begin{array}{c} (1,\ 1) \\ (1,\ 1) \end{array}\right) & \begin{array}{l} s_1^{(1)}. \\ s_1^{(2)} \end{array} \end{array}$$

Доминирование стратегий

Определение. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *доминирующей*, если она доминирует (хотя бы слабо) все остальные стратегии игрока i.

Замечание. Наличие доминирующей стратегии у игрока приводит к тому, что он будет пользоваться только этой стратегией независимо от выбора других игроков. Тогда его можно исключить из рассмотрения и перейти к редуцированной игре с меньшим числом участников.

Оптимальные по Парето ситуации

Определение. В бескоалиционной игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ ситуация $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0)$, называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$, для которой имеет место неравенство $H_i(s) \geq H_i(s^0)$ для $\forall i \in I$, причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое.

Множество всех ситуаций, оптимальных по Парето, будем обозначать через S^P .

Содержательно ситуация $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0) \in S^P$, означает, что не существует другой ситуации $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$, которая была бы предпочтительнее ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0)$ для всех игроков.

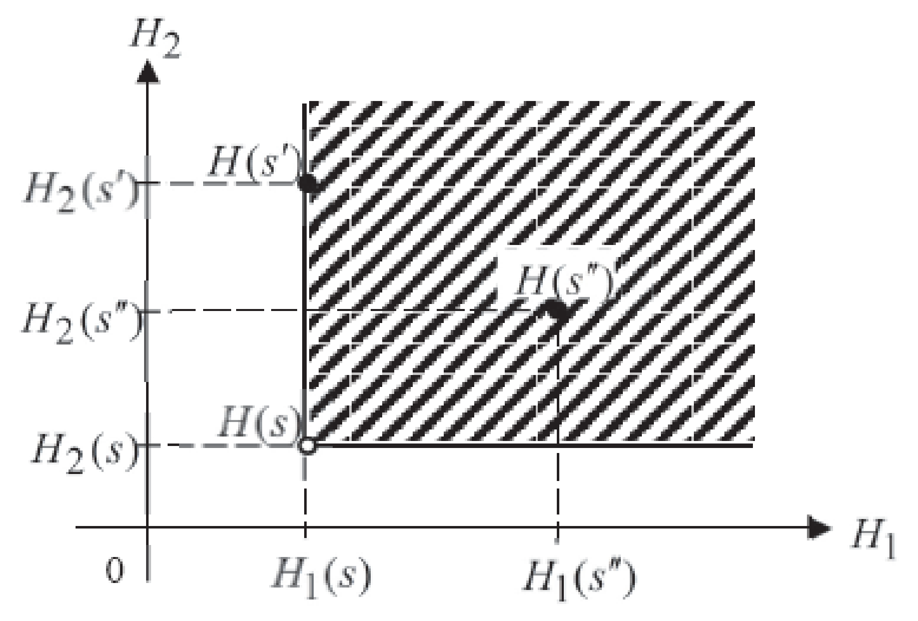
Определим понятие *предпочтительности* ситуаций.
Пусть есть ситуации $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$ и $s' = (s_1', s_2', \ldots, s_n') \in S$.

Ситуация s *предпочтительнее* s' , если $H_i(s) \geq H_i(s')$ для $\forall i \in I$, причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое, т.е. $H(s') \neq H(s)$.

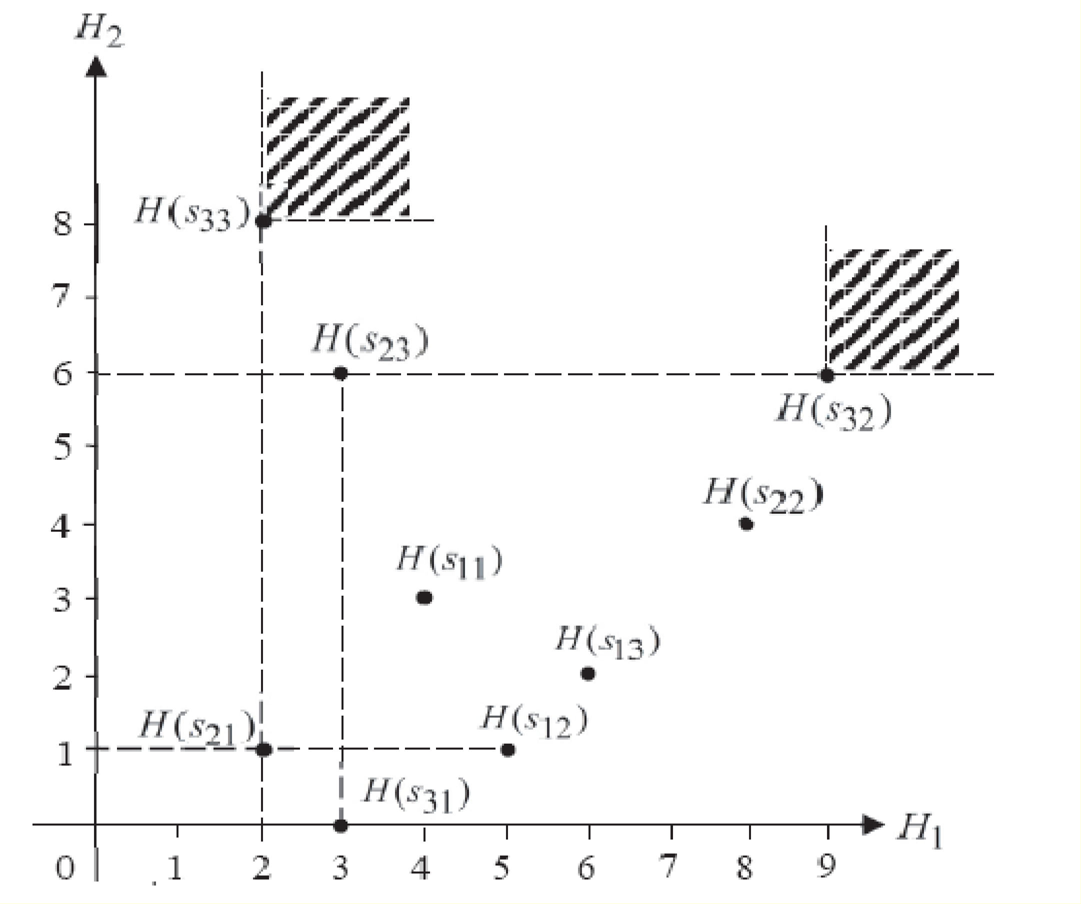
Оптимальные по Парето ситуации

Рассмотрим геометрическую интерпретацию предпочтительности ситуаций при $I = \{1, 2\}$. Тогда функция выигрышей игроков
$H(s) = (H_1(s), H_2(s))$.

Ситуации s' , s'' предпочтительнее ситуации s, если точки $H(s')$, $H(s'')$, не совпадающие с точкой $H(s)$, попадают в область, образованную сторонами прямого угла с выколотой вершиной $H(s)$.



Оптимальные по Парето ситуации



В примере 2.1 ситуация $s_{32}=(s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$ является *оптимальной по Парето*, $H(s_{32}) = H(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}) = (9, 6)$.

$$H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\ (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) & s_1^{(1)} \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) & s_1^{(2)} \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) & s_1^{(3)} \end{array}.$$

Оптимальной по Парето является и ситуация $s_{33}=(s_1^{(3)}, s_2^{(3)})$, причем $H(s_{33}) = H(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) = (2, 8)$, однако (в отличие от ситуации s_{32}) она не является более предпочтительной по сравнению с равновесной ситуацией $s_{11}=(s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$.

Оптимальные по Парето ситуации

Свойство оптимальных по Парето ситуаций.
В бескоалиционной игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ для ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \in S^P$ существует вектор $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0$ такой, что

$$\lambda^T H(s^0) = \max_{s \in S} \lambda^T H(s) = \max_{s \in S} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i(s),$$

где неравенство $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0$ означает $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;
λ^T — транспонированный вектор λ.
Данное свойство вполне согласуется с интерпретацией оптимальности по Парето через область прямого угла.

Однако для разных ситуаций, оптимальных по Парето, но не сравниваемых по области прямого угла (в примере 2.1 ситуации s', $s'' \in S^P$), используют дополнительные условия эффективности стратегий (как решений).
Например, условие *«взвешенной эффективности»* для оптимальных по Парето ситуаций $s \in S^P$: $\bar{\lambda}^T H(s) \to \max_{s \in S} H(s)$ для некоторого фиксированного $\bar{\lambda} > 0$.

Оптимальные по Парето ситуации

При $\bar{\lambda} = (1, \ldots, 1)$ имеем условие *«взвешенной эффективности»* для $s \in S^P$ в следующем виде: в качестве взвешенной оптимальной по Парето выбирают ситуацию $s^0 \in S^P$, доставляющую

$$\max_{s \in S^P} \sum_{i=1}^{n} H_i(s) = \sum_{i=1}^{n} H_i(s^o)$$

Проверим условие *«взвешенной эффективности»* при $\bar{\lambda} = (1, \ldots, 1)$ для полученных оптимальных по Парето ситуаций s_{32}, s_{33}.

Для ситуации $s_{32} = (s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$: $H_1(s_{32}) + H_2(s_{32}) = 9 + 6 = 15$.

Для ситуации $s_{33} = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)})$: $H_1(s_{33}) + H_2(s_{33}) = 2 + 8 = 10$.

Т. е. максимальное значение $\bar{\lambda}^T H(s)$ достигается для ситуации

$s^0 = s_{32} = (s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$, которая является взвешенной оптимальной по Парето ситуацией (более эффективной по этому условию).

Стратегическая эквивалентность игр

В виду большого разнообразия бесконалиционных игр требуется объединение их в такие классы, внутри которых игры обладают одними и теми же свойствами.

Идея классификации состоит в том, чтобы все множество игр γ разбить на классы по определенному признаку эквивалентности (*отношению эквивалентности*), причем так, что получающиеся классы попарно не пересекаются и охватывают все элементы множества γ.

Если элементы $a \in \gamma$, $b \in \gamma$, то запись $a \sim b$ означает, что элемент *a эквивалентен* элементу b.

Отношение эквивалентности обладает следующими свойствами:

- *рефлексивность*: $a \sim a$;
- *симметричность*: если $a \sim b$, то $b \sim a$;
- *транзитивность*: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

Стратегическая эквивалентность игр

Во множестве бескоалиционных игр отношением эквивалентности может служить *стратегическая эквивалентность* игр.
Тогда в качестве классов игр выступают классы стратегически эквивалентных игр.

Определение. Пусть есть две бескоалиционные игры Γ' и Γ'' с одними и теми же множествами игроков и их стратегий, отличающиеся лишь функциями выигрыша:

$$\Gamma' = \{I, S, H'\}, \qquad \Gamma'' = \{I, S, H''\},$$

и пусть существуют число $k > 0$ и для каждого игрока число c_i, $i \in I$, такие, что в любой ситуации $s \in S$

$$H_i'(s) = k\, H_i''(s) + c_i.$$

Тогда игры Γ' и Γ'' называются *стратегически эквивалентными*:

$\Gamma' \sim \Gamma''$.

Стратегическая эквивалентность игр

Стратегическая эквивалентность обладает всеми свойствами отношения эквивалентности и, значит, разбивает множество бесколиционных игр на попарно не пересекающиеся классы эквивалентных друг другу игр.
Данное обстоятельство позволяет изучать свойства игр одного класса эквивалентности на примере одной игры из этого класса.
Различие между двумя стратегически эквивалентными играми, по сути, состоит лишь в различии фиксированной (постоянной) составляющей c_i выигрыша игроков и единиц измерения выигрышей, определяемых коэффициентом k.

Поэтому естественно, что разумное поведение игроков
в стратегически эквивалентных играх должно быть одинаковым.

Стратегическая эквивалентность игр

Теорема 2.1. Стратегически эквивалентные игры имеют одни и те же ситуации равновесия.

Пример 2.2. Рассмотрим игру *Г* с матрицей выигрышей

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \\ H = \Bigg(& (2/3,\ 1/2) & (1/6,\ 7/6) & \Bigg) \ s_1^{(1)} . \\ & (7/6,\ 1/6) & (-1/2,\ -1/2) & \ \ s_1^{(2)} \end{array}$$

Приведем данную игру к стратегически эквивалентной игре с целочисленными и неотрицательными показателями выигрышей. Выберем $k = 6$ (общий знаменатель равен 6). Тогда получим матрицу

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \\ H' = \Bigg(& (4,\ 3) & (1,\ 7) & \Bigg) \ s_1^{(1)} . \\ & (7,\ 1) & (-3,\ -3) & \ \ s_1^{(2)} \end{array}$$

Стратегическая эквивалентность игр

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \\ H' = & (4,\ 3) & (1,\ 7) & s_1^{(1)}. \\ & (7,\ 1) & (-3,\ -3) & s_1^{(2)} \end{array}$$

Далее примем $c_1 = c_2 = 3$. Получим матрицу

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \\ H'' = & (7,\ 6) & (4,\ 10) & s_1^{(1)}. \\ & (10,\ 4) & (0,\ 0) & s_1^{(2)} \end{array}$$

Таким образом, получим стратегически эквивалентную игру Γ'' с матрицей выигрышей H''.

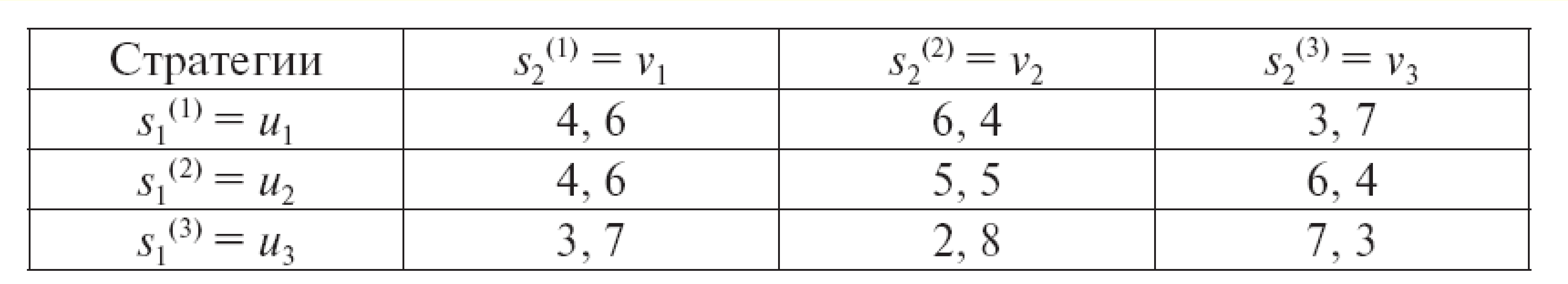
Стратегическая эквивалентность игр

Определение. Бескоалиционная игра $\Gamma = \{I, S, H\}$ называется *игрой с постоянной суммой*, если существует такая $C = const$, что $\sum_{i \in I} H_i(s) = C$ для любой ситуации $s \in S$.

Если $C = 0$, то такая игра называется *игрой с нулевой суммой.*

Теорема 2.2. Всякая бескоалиционная игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

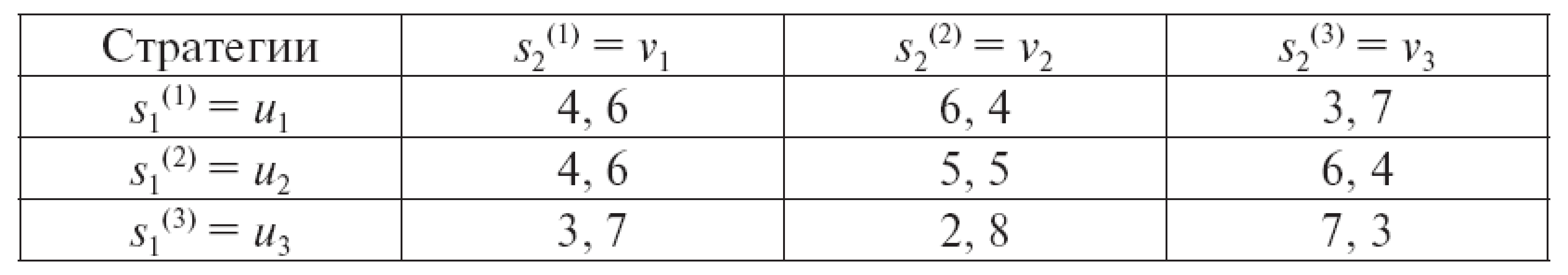
Пример 2.3. В этой игре найти равновесную по Нэшу ситуацию



Стратегии	$s_2^{(1)} = v_1$	$s_2^{(2)} = v_2$	$s_2^{(3)} = v_3$
$s_1^{(1)} = u_1$	4, 6	6, 4	3, 7
$s_1^{(2)} = u_2$	4, 6	5, 5	6, 4
$s_1^{(3)} = u_3$	3, 7	2, 8	7, 3

Данная игра является игрой с постоянной суммой, причем $H_1(s) + H_2(s) = 10$.

Стратегическая эквивалентность игр



Стратегии	$s_2^{(1)} = v_1$	$s_2^{(2)} = v_2$	$s_2^{(3)} = v_3$
$s_1^{(1)} = u_1$	4, 6	6, 4	3, 7
$s_1^{(2)} = u_2$	4, 6	5, 5	6, 4
$s_1^{(3)} = u_3$	3, 7	2, 8	7, 3

Тогда она стратегически эквивалентна игре с нулевой суммой $\Gamma' = \{I, S, H'\}$, (при $c_1 = 0$, $c_2 = 10$) с функциями выигрышей

$$H_i'(s) = H_i(s) - c_i,\ i = 1, 2;\ \ s \in S.$$

Тогда $H_1'(s) = -H_2'(s)$ для всех ситуаций $s \in S$, т. е. эта игра является *антагонистической*.

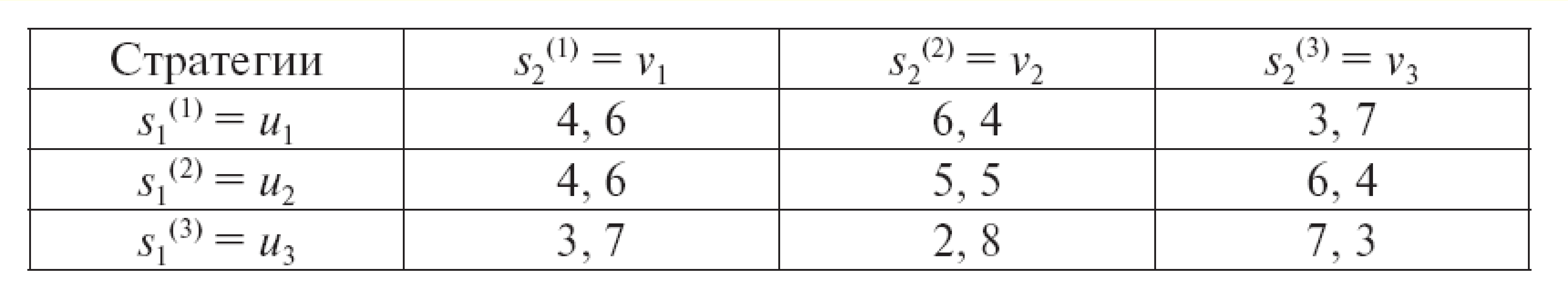
Рассмотрим *наилучшие ответы игроков* на чистые стратегии противника.

Обозначим: $u(v_j)$ — наилучший ответ игрока 1 на стратегию $s_2^{(j)} = v_j$ игрока 2,

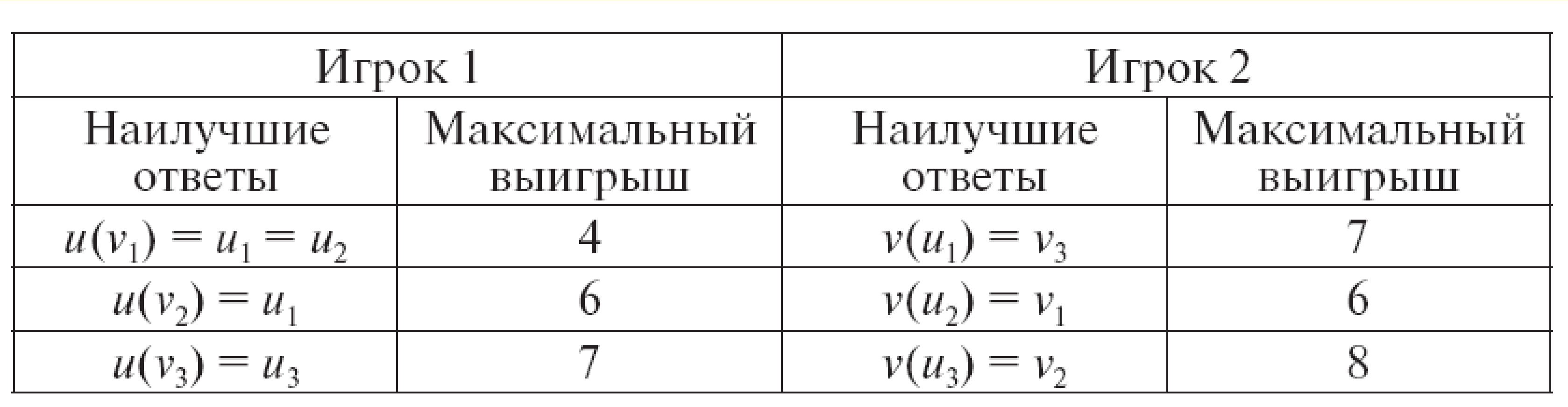
$v(u_i)$ — наилучший ответ игрока 2 на стратегию $s_1^{(i)} = u_i$ игрока 1.

Составим таблицу ответов.

Стратегическая эквивалентность игр



Стратегии	$s_2^{(1)} = v_1$	$s_2^{(2)} = v_2$	$s_2^{(3)} = v_3$
$s_1^{(1)} = u_1$	4, 6	6, 4	3, 7
$s_1^{(2)} = u_2$	4, 6	5, 5	6, 4
$s_1^{(3)} = u_3$	3, 7	2, 8	7, 3



Игрок 1		Игрок 2	
Наилучшие ответы	Максимальный выигрыш	Наилучшие ответы	Максимальный выигрыш
$u(v_1) = u_1 = u_2$	4	$v(u_1) = v_3$	7
$u(v_2) = u_1$	6	$v(u_2) = v_1$	6
$u(v_3) = u_3$	7	$v(u_3) = v_2$	8

Тогда пара *взаимных* наилучших ответов есть *ситуация равновесия по Нэшу*. В данном случае имеем единственную ситуацию равновесия (в чистых стратегиях) $s_{21} = (u_2, v_1)$, доставляющую выигрыши (4, 6).

Свойство наилучших ответов игроков

Пусть задана бескоалиционная игра n лиц $\Gamma = \{I, S, H\}$. Обозначим через $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ – набор стратегий всех игроков в игре Γ, кроме i-го игрока.

Определение. *Наилучшим ответом* игрока i на стратегии остальных игроков s_{-i} в игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ называется множество стратегий

$$BR_i(s_{-i}) = \{ \ \bar{s}_i \in S_i \mid \max_{s_i \in S_i} H_i(s_i, s_{-i}) = H_i(\bar{s}_i, s_{-i})\},$$

где $H_i\,(s_i, s_{-i}) \equiv H_i\,(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Если игрок i выбирает стратегию $s_i \in BR_i(s_{-i})$, то никакое отклонение от нее (при фиксированных стратегиях остальных игроков) не сможет дать ему больший выигрыш.

Стратегия $\bar{s}_i \in BR_i(s_{-i})$ обязательно входит в приемлемую для игрока i ситуацию, так как $H_i(s|_{s^-{}_i}) \geq H_i(s|_{si})$ для любых $s_i \in S_i$.

Свойство наилучших ответов игроков

Свойство. Ситуация $\bar{s} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ такая, что $\bar{s}_i \in Br_i(\bar{s}_{-i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и является *равновесной* по Нэшу.

Таким образом, ни один из игроков в одиночку не может улучшить свой выигрыш по сравнению с результатом равновесной ситуации.