Содержание

1 Образы и прообразы Фурье

Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируемаи непрерывна на всей числовой прямой, а также удовлетворяет всюду условию Дини. Тогда, как уже установлено, в любой точке x из $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \mathrm{V.\,P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(f;y) e^{iyx} dy, \tag{(CFI)}$$

где комплекснозначная функция $c(f;y)$ определяется соотношением

$$c(f;y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx. \tag{(CFI')}$$

Формулы (CFI) и (CFI') конструктивно очень схожи друг с другом, но в предложенном формате их записи отсутствует симметричность: во второй из этих формул имеется сомножитель $\frac{1}{2\pi}$ перед интегралом. Для того чтобы эту асимметричность устранить, обычно используются несколько иные определения и формулировки.

Определение

Для любой локально суммируемой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, порождаемый ею интеграл $\mathrm{V.\,P.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi)$, если только он существует, называется образом Фурье функции f. Интеграл же V. P. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = \widetilde{f}(\xi)$, комплексно сопряженный предыдущему, называется прообразом Фурье порождающей его функции f.

Образ Фурье определен не для любой локально суммируемой функции. Например, не существует локально суммируемой функции, являющейся образом (или прообразом) тождественной постоянной. Но если $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой, то ее образ и прообраз Фурье существуют и являются ограниченными и всюду непрерывными функциями, причем $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|f|L_1$, $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}|\widetilde{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|f|L_1$.

Из теоремы Римана об осцилляции следует, что для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ справедливы предельные соотношения $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \widetilde{f}(\xi) = 0$.

Определение

Оператор F, сопоставляющий заданной локально суммируемой функции ее образ Фурье, называется преобразованием Фурье. Если же функции сопоставляется ее прообраз Фурье, то оператор называется обратным преобразованием Фурье и обозначается символом F^{-1}.

В соответствии с этим определением имеем: F: $f(x) \rightarrowtail \widehat{f}(\xi)$ и F^{-1}: $f(x) \rightarrowtail \widetilde{f}(\xi)$.

2 Свойства преобразований Фурье

Установим ряд свойств преобразования Фурье.

Свойство 1

Оператор преобразования Фурье линеен: $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Это свойство сразу следует из линейности операций предельного перехода и интегрирования. $\square$

Свойство 2

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет образом Фурье функцию $\widehat{f}(\xi)$. Тогда для любого вещественного a и положительного α определены образы Фурье функций $f(x+a)$ и $f(\alpha x)$, причем

$$F[f(x+a)] = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi), F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}(\frac{\xi}{\alpha}). \qquad ((a\alpha))$$

Доказательство

Докажем первое из этих равенств. По определению имеем $F[f(x+a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_{-1}^{+1} f(x+a)e^{-i\xi x}dx$. Сделав в интеграле справа замену переменной $y = x + a$, получим $F[f(x+a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_{-l+a}^{+l+a} f(y)e^{-i\xi(y-a)}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi(y-a)}dy$. Вынося множитель $e^{ia\xi}$ за знак интеграла в правой части, получаем окончательно $F[f(x+a)] = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi)$. Это и есть первое из равенств $(a\alpha)$.

Аналогично, имеем по определению: $F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_{-l}^{+l} f(\alpha x)e^{-i\xi x}dx$. Сделав в интеграле справа замену переменной $y = \alpha x$ и учитывая положительность α, получаем второе из равенств $(a\alpha)$: $F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_{-\alpha l}^{+\alpha l} f(y)e^{-iy\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}dy = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}(\frac{\varepsilon}{\alpha})$. $\square$

Свойство 3

Пусть функция $f(x)$ имеет прообраз Фурье $\widetilde{f}(\xi)$. Тогда для любого вещественного b и положительного β определены прообразы Фурье функций $f(x+b)$ и $f(\beta x)$, причем

$$F^{-1}[f(x+b)] = e^{ib\xi}\widetilde{f}(\xi),\ F^{-1}[f(\beta x)] = \frac{1}{\beta}\widetilde{f}(\frac{\xi}{\beta}). \qquad ((b\beta))$$

Доказательство

Равенства $(b\beta)$ доказываются по той же схеме, что и предыдущие равенства $(a\alpha)$. $\square$

Свойство 4

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке этой прямой условию Дини. Тогда имеют место равенства

$$F^{-1}[F[f]] = f,\ F[F^{-1}[f]] = f. \qquad ((IF))$$

Эти формулы означают, что операторы F и F^{-1} взаимно обратны. По этой причине равенства (IF) называются формулами обращения для преобразования Фурье.

Доказательство

Справедливость формул обращения (IF) сразу следует из доказанной на предыдущей лекции теоремы о представлении функции интегралом Фурье и полученной там же формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt)e^{i\xi x}d\xi. \square \qquad ((CFT'))$$

3 Косинус–и синус–преобразования Фурье. Примеры

В случае если функция $f(x)$ четная или нечетная, ее достаточно задавать лишь при $x > 0$, и формулы обращения при этом существенно упрощаются.

Определение

Для любой функции $f(x)$, заданной и локально суммируемой на промежутке $(0, +\infty)$ числовой оси интеграл $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(yx)dx = F_c[f]$ называется косинус–преобразованием Фурье функции f, а интеграл $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin{(yx)}dx =$ $F_s[f]$ называется ее же синус–преобразованием Фурье. Операторы, сопоставляющие функции $f(x)$ ее косинус–и синус–преобразование Фурье, обозначают символами F_c и F_s соответственно.

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ справедливы равенства $F[f] = F_c[f] = F^{-1}[f]$. Если же функция $f(x)$ нечетная, $f(x) = -f(-x)$, то имеют место соотношения $F[f] = -iF_s[f] = -F^{-1}[f]$.

Следствие

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на интервале $(0, +\infty)$, а также удовлетворяет в каждой точке этого интервала условию Дини. Тогда имеют место равенства $F_c[F_c[f]] = f$ и $F_s[F_s[f]] = f$.

Пример. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, равной единице на конечном отрезке $[-\delta, +\delta]$ и нулю вне этого отрезка.

Решение. Функция $f(x)$ четная и, следовательно, $F[f] = F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\delta}\cos{(yx)}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin{(\delta y)}}{y}$. Это и есть искомый образ Фурье. □

Пример. Найти косинус–и синус–преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Решение. Из определения имеем $F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos{(yx)}dx$, $F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin{(yx)}dx$. Применяя к интегралу $F_c[f]$ формулу интегрирования по частям, получаем равенство $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos{(yx)}dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\cos{(yx)}\mid_{x=0}^{x=+\infty} -y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-}$ или, что то же самое, $F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_s[f]$. Если же применить формулу интегрирования по частям к интегралу $F_s[f]$, то получим $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin{(yx)}dx =$ $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\sin{(yx)}\mid_{x=0}^{x=+\infty} +y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos{(yx)}dx$, или же, в символьных обозначениях: $F_s[f] = yF_c[f]$. Подставляя это равенство в уже полученное соотношение $F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_s[f]$, находим $F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - y^2F_c[f]$. Следовательно, искомые преобразования имеют вид $F_c[f] =$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}$, $F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{1+y^2}$. $\square$

Пример. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, где x изменяется вдоль всей числовой оси.

Решение. Функция $f(x)$ четная и, следовательно, $F[f] = F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos{(yx)} dx$. Обозначив интеграл в правой части через $g(y)$, продифференцируем его по переменной y. Тогда получим $g'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin{(yx)} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}}) \sin{(yx)} dx$. Применяя формулу интегрирования по частям, приходим к соотношению $g'(y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin{(yx)} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos{(yx)} dx$, или, что эквивалентно: $g'(y) = -yg(y)$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $g(y)$. Для того чтобы найти функцию $g(y)$, т.е. решить полученное уравнение, перепишем его в следующем виде: $\frac{g'(y)}{g(y)} = -y \Leftrightarrow \frac{d}{dy}(\ln{(g(y))}) = -\frac{d}{dy}(\frac{y^2}{2})$. Перенося все слагаемые в левую часть, получаем $\frac{d}{dy}[\ln{(g(y))} + \frac{y^2}{2}] = 0 \Rightarrow \ln{(g(y))} + \frac{y^2}{2} = C$, где C — произвольная постоянная. Выражая отсюда функцию $g(y)$, получаем формулу общего решения рассматриваемого дифференциального уравнения: $g(y) = C_1 e^{-\frac{y^2}{2}}$. Постоянную C_1 в этом равенстве находим из условия $C_1 = g(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Таким образом, искомый образ Фурье задается равенством $\widehat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$. $\square$

Пользуясь последним равенством и свойством $(a\alpha)$ преобразования Фурье, для любой положительной постоянной α получаем следующие соотношения $F[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\alpha})^2}$, $F^{-1}[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\alpha})^2}$.

4 Образ Фурье производной и производная образа Фурье. Следствие

Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также имеет здесь же кусочно непрерывную первую производную $f'(x)$, которая абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

Тогда имеют место следующие предельные соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} f(x)=0. \tag{$(F_\pm)$}$$

Оба эти равенства получаются с помощью предельного перехода по переменной $x\to\pm\infty$ в представлении $f(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)dt$, где $a\in\mathbb{R}$. Возможность такого предельного перехода вытекает из условия абсолютной интегрируемости кусочно непрерывной производной $f'(x)$ на всей числовой прямой: $|\int\limits_a^x f'(t)dt|\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|dt<+\infty$. Равенство же предельных значений $f(x)$ на бесконечности нулю получается из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$.

Теорема (образ Фурье производной)

Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также имеет здесь же кусочно непрерывную первую производную $f'(x)$, которая абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда для образа и прообраза Фурье производной f' справедливы формулы

$$F[f']=i\xi\widehat{f}(\xi) \text{ и } F^{-1}[f']=-i\xi\widetilde{f}(\xi).$$

Доказательство

Используя определение образа Фурье и формулу интегрирования по частям, получаем равенство $F[f']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i\xi x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\xi x}\,|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)(-i\xi)e^{-i\xi}$ Из формул $(F_\pm)$ следует, что $f(x)e^{-i\xi x}\,|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)e^{-i\xi x}]-\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)e^{-i\xi x}]=0$. Таким образом, формула для $F[f']$ упрощается и принимает вид $F[f']=i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx=i\xi F[f]$. Формула для прообраза $F^{-1}[f']$ выводится аналогично. $\square$

Следствие

Пусть функции $f, f', \cdots, f^{(n)}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой прямой. Тогда для $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливы представления

$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k F[f] \text{ и } F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k F^{-1}[f].$$

В частности, для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям предыдущего следствия, справедливы следующие асимптотические равенства: $\widehat{f}(\xi) = o(\frac{1}{\xi_n})$ и $\widetilde{f}(\xi) = o(\frac{1}{\xi_n})$ при $\xi \to \pm\infty$. Если при этом функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, то ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени переменной ξ.

Теорема (производная образа Фурье)

Пусть вещественные функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция $\widehat{f}(\xi)$ всюду непрерывно дифференцируема и при этом справедлива формула

$$\frac{d\widehat{f}(\xi)}{d\xi}(\xi) = -iF[xf(x)].$$

Доказательство

Отметим, что образ Фурье $F[xf(x)]$ существует в силу абсолютной интегрируемости на всей числовой прямой функции $xf(x)$. При этом равенство для производной образа Фурье $\widehat{f}(\xi)$ получается дифференцированием по переменной ξ обеих частей формулы $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

□

Следствие

Пусть функции $f(x), xf(x), \cdots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция $\widehat{f}(\xi)$ имеет на всей числовой прямой непрерывные производные до порядка n включительно и при этом справедливы формулы

$$\frac{d^k\widehat{f}(\xi)}{d\xi^k}(\xi) = (-i)^k F[x^k f(x)], \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

5 Пространство S быстро убывающих функций. Равенство Парсеваля

Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и при этом как она сама так и ее производные любого порядка стремятся к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{x}$, т.е. для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ и при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы асимптотические равенства $f^{(k)}(x) = o(\frac{1}{x^n})$ при $x \to \pm\infty$. Множество всех функций $f(x)$, обладающих указанными свойствами, принято обозначать как S.

Множество S, снабженное естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число, является линейным пространством. Размерность этого пространства бесконечна.

Любая функция $f(x)$ из S абсолютно интегрируема на всей числовой прямой и поэтому для нее определен образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$. Оказывается, что этот образ Фурье также принадлежит пространству S.

Теорема (образ Фурье пространства S)

Для любой функции $f(x)$ из S ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ также принадлежит S. Верно и обратное утверждение: для любой функции $\widehat{f}(\xi)$ из S существует функция $f(x)$ из S, образ Фурье которой совпадает с $\widehat{f}(\xi)$. Таким образом, оператор Фурье F отображает пространство S на себя.

Аналогичное утверждение справедливо и для обратного преобразования Фурье. Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из S произведение $f(x)\overline{g}(x)$, где $\overline{g}(x)$ обозначает комплексносопряженную функцию, также принадлежит пространству S. В частности, это произведение абсолютно интегрируемо на всей числовой прямой и по этой причине определен интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g}(x)dx = (f, g)$. Задаваемая этим равенством операция (f, g) называется скалярным произведением в пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R})$.

Заметим теперь, что образы Фурье $\widehat{f}(\xi)$ и $\widehat{g}(\xi)$ являются элементами пространства S и по этой причине определено их скалярное произведение $(\widehat{f}, \widehat{g})$. Оказывается, что это скалярное произведение образов Фурье совпадает со скалярным произведением (f, g) исходных функций.

Доказательство

Имеем по определению $\widehat{\overline{g}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{g}(x) e^{i\xi x} dx = \overline{\widehat{g}}(\xi)$. Учитывая это, а также пользуясь равенством $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$ и определением скалярного произведения в L_2, получаем далее $(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi$. В интеграле справа поменяем порядок интегрирования, что возможно в силу принадлежности функций f и $\overline{\widehat{g}}$ пространству S: $(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{g}}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi) dx$. Под интегралом в круглых скобках стоит образ Фурье функции $\overline{\widehat{g}}(\xi) = \widehat{\overline{g}}(\xi)$, который в силу формулы обращения совпадает с $\overline{g}(x)$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{g}}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\overline{g}}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \overline{g}(x)$. Подставляя это равенство в найденное выше представление скалярного произведения $(\widehat{f}, \widehat{g})$, получаем равенство

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g}(x) dx = (f, g) \ \forall f, g \in S. \ \Box$$

Эта формула, называемая равенством Парсеваля, справедлива для сомножителей f и g из гораздо более широкого класса нежели пространство S. Точнее, равенство Парсеваля имеет место для любых двух функций из пространства L_2, т.е. таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx < +\infty$. Обоснование этого факта — гораздо более трудоемкое занятие нежели вывод равенства Парсеваля для элементов из S.