и приравнивания производные к нулю, получим уравнения

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \right) x^{i-1} dx = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{i+j-1} = \int_0^1 f(x)\, x^{i-1} dx\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \qquad \triangleright$$

3.5. Приближение сплайнами

Пусть на отрезке $[a,b]$ вещественной оси задана сетка: $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b$, $P_m(x)$ — множество многочленов степени не выше m $(m \geqslant 1)$, $C^{(r)}[a,b]$ — множество функций, имеющих на $[a,b]$ непрерывные производные до r-го порядка включительно $(r \geqslant 0)$.

Функцию $S_m(x) = S_{m,k}(x)$ называют *полиномиальным сплайном степени m дефекта k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ с узлами $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, для функции $f(x) \in C[a,b]$*, если выполнены следующие условия:

1) *на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, она является многочленом, т. е. $S_m(x) \in P_m(x)$;*

2) *на всем отрезке $[a,b]$ обладает непрерывностью производных, т. е. $S_m(x) \in C^{(m-k)}[a,b]$.*

Ниже термин «дефекта k» будем опускать, так как далее рассматривается только случай $k = 1$.

Сплайн называется *интерполяционным*, если в узлах $\{x_i\}$ справедливы равенства $S_m(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

3.139. Построить линейный интерполяционный сплайн по значениям $f(0), f(1)$.

Ответ: $S_1(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$.

3.140. Получить оценку погрешности приближения функции $f(x)$ линейным интерполяционным сплайном на равномерной сетке с шагом h, если $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$.

$\triangleleft$ Пусть $x_i = i\,h$, $h = \dfrac{1}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; тогда линейный интерполяционный сплайн на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеет вид

$$S_1(x) = f(x_{i-1})\, \frac{x_i - x}{h} + f(x_i)\, \frac{x - x_{i-1}}{h}\,.$$

Если $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$, то из оценки погрешности для интерполяционного многочлена Лагранжа следует, что

$$\max_{[x_{i-1},x_i]} |f(x) - S_1(x)| \leqslant \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''(x)|\, \frac{h^2}{8}\,.$$

Это неравенство справедливо на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, значит, на $[0,1]$ в целом. $\triangleright$

3.141. Обозначим через M_i значения второй производной $S_3''(x)$ кубического интерполяционного сплайна в узлах $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Показать, что они удовлетворяют системе линейных уравнений $C\,M = d$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h_i}{6} & \text{при} \quad j = i-1, \\ \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} & \text{при} \quad j = i, \\ \dfrac{h_{i+1}}{6} & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad |j-i| > 1; \end{cases} \qquad d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

$\lhd$ По определению, $S_3''(x)$ — линейная на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция. В силу ее непрерывности в концах отрезков имеем представление:

$$S_3''(x) = M_{i-1}\,\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\,\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\,.$$

Двухкратно интегрируя и учитывая условия $S_3(x_i) = f_i\,, S_3(x_{i-1}) = f_{i-1}$, получим аналитическое представление кубического интерполяционного сплайна на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S_3(x) = M_{i-1}\,\frac{(x_i - x)^3}{6\,h_i} + M_i\,\frac{(x - x_{i-1})^3}{6\,h_i} +$$
$$+ \left(f_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\,.$$

Вычислим производную сплайна $S_3'(x)$ слева в точке x_i, воспользовавшись представлением на $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S_3'(x_i - 0) = M_{i-1}\,\frac{h_i}{6} + M_i\,\frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\,,$$

и аналогично найдем производную сплайна $S_3'(x)$ справа в точке x_i, воспользовавшись представлением на $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_3'(x_i + 0) = -M_i\,\frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1}\,\frac{h_{i+1}}{6} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}\,.$$

Непрерывность $S_3'(x)$ в точках $x_i\,, i = 1, \ldots, n-1$, т. е. $S_3'(x_i - 0) = S_3'(x_i + 0)$, порождает искомую систему из $(n-1)$ уравнения относительно $(n+1)$-го неизвестного. $\rhd$

3.142. Построить кубический интерполяционный сплайн по значениям $f(0), f(1), f(2)$.

$\lhd$ Из решения 3.141 следует, что здесь неизвестными являются величины M_0, M_1, M_2, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{6}\,M_0 + \frac{2}{3}\,M_1 + \frac{1}{6}\,M_2 = f(2) - 2\,f(1) + f(0).$$

При этом искомый сплайн имеет следующий вид:

на отрезке $[0,1]$

$$S_3(x) = M_0\,\frac{(1-x)^3}{6} + M_1\,\frac{x^3}{6} + \left(f(0) - \frac{M_0}{6}\right)(1-x) + \left(f(1) - \frac{M_1}{6}\right)x\,;$$

на отрезке $[1,2]$

$$S_3(x) = M_1\,\frac{(2-x)^3}{6} + M_2\,\frac{(x-1)^3}{6} + \\ + \left(f(1) - \frac{M_1}{6}\right)(2-x) + \left(f(2) - \frac{M_2}{6}\right)(x-1).$$

У построенного сплайна две степени свободы, которые фиксируются заданием M_0 и M_2 или уравнениями для них. *Естественному сплайну* соответствуют значения $M_0 = M_2 = 0$. $\triangleright$

3.143. Пусть в 3.141 $M_0 = M_n = 0$.

Показать, что в этом случае решение системы $C\,M = d$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n-1} |M_i| \leqslant 3\,\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} |d_i|}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} h_i}\,.$$

$\triangleleft$ Пусть $\max\limits_i |M_i| = |M_j|\,, 1 \leqslant j \leqslant n-1$. Рассмотрим j-е уравнение системы

$$d_j = M_{j-1}\,\frac{h_j}{6} + M_j\,\frac{h_j + h_{j+1}}{3} + M_{j+1}\,\frac{h_{j+1}}{6}\,,$$

из которого следует неравенство:

$$|d_j| \geqslant |M_j|\,\frac{h_j + h_{j+1}}{3} - \left(|M_{j-1}|\,\frac{h_j}{6} + |M_{j+1}|\,\frac{h_{j+1}}{6}\right) \geqslant |M_j|\,\frac{h_j + h_{j+1}}{6}\,,$$

так как $|M_{j\pm1}| \leqslant |M_j|$. Оценивая левую часть неравенства сверху через $\max\limits_i |d_i|$ и множитель в его правой части снизу, как

$$\min_i \frac{h_i + h_{i+1}}{6} \geqslant \frac{1}{3}\,\min_i h_i,$$

приходим к искомому неравенству. $\triangleright$

3.144. Пусть $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$, $\max\limits_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \leqslant A_4$, задана сетка с постоянным шагом $h_i = h$, и дополнительные условия для определения кубического интерполяционного сплайна имеют следующий вид:

$$S_3'(x_0+0) = f'(x_0), \quad S_3'(x_n-0) = f'(x_n).$$

Показать, что справедлива оценка погрешности

$$|S_3^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leqslant C_l A_4 h^{4-l}, \quad l = 0,1,2,3.$$

$\lhd$ *Поточечное неравенство для второй производной.* Воспользуемся решением 3.141. Разделив обе части i-го уравнения системы $C\,M = d$ на $\frac{h}{6}$, приведем его к виду

$$\frac{1}{2}\ M_{i-1} + 2\,M_i + \frac{1}{2}\ M_{i+1} = 3\ \frac{f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1}}{h^2}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Вычисляя производную сплайна $S_3'(x)$ справа в точке x_0, воспользовавшись представлением на $[x_0, x_1]$

$$S_3'(x_0 + 0) = -\,\frac{h}{6}\,(2\,M_0 + M_1) + \frac{f_1 - f_0}{h} = f'(x_0),$$

получим первое (для $i = 0$) уравнение системы

$$2\,M_0 + M_1 = \frac{6}{h}\ \left(\frac{f_1 - f_0}{h} - f'(x_0)\right).$$

Последнее уравнение (для $i = n$) строим аналогично

$$M_{n-1} + 2\,M_n = \frac{6}{h}\ \left(f'(x_n) - \frac{f_n - f_{n-1}}{h}\right).$$

Положим $\varphi_i = f''(x_i)$ и вычтем из обеих частей уравнения $C\,M = d$ выражение $C\,\varphi$. Имеем $C(M-\varphi) = d - C\,\varphi$. Для полученной системы, используя решение 3.143, можно получить оценку $\max\limits_i |M_i - \varphi_i| \leqslant \max\limits_i |d_i - (C\varphi)_i|$. Представляет интерес величина $d_i - (C\varphi)_i$ в правой части неравенства. Рассмотрим ее для $i = 0$. Получаем

$$\frac{6}{h}\ \left(\frac{f_1 - f_0}{h} - f'(x_0)\right) - (2\,f''(x_0) + f''(x_0 + h)) =$$

$$= \frac{6}{h}\ \Bigg(\frac{f_0 + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{6}\,f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}\,f^{(4)}(\xi_1) - f_0}{h} -$$

$$-f'(x_0)\Bigg) - \left(2\,f''(x_0) + f''(x_0) + hf^{(3)}(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f^{(4)}(\eta_1)\right) =$$

$$= \frac{h^2}{4}\,\left(f^{(4)}(\xi_1) - 2f^{(4)}(\eta_1)\right).$$

Мы пришли к неравенству $|d_0 - (C\varphi)_0| \leqslant c_0 h^2 A_4$ с постоянной $c_0 = \frac{3}{4}$. Аналогичная оценка справедлива для $i = n$, в которой также $c_n = \frac{3}{4}$.

Далее потребуются два следствия формулы Тейлора:

$$\frac{f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1}}{h^2} = f''(x_i) + \frac{h^2}{12}\,f^{(4)}(\xi_i),$$

$$f_{i+1} + 4\,f_i + f_{i-1} = 6\,f_i + h^2 f''(\tilde{\eta}_i).$$

Применим их для получения оценок при $1 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$3\ \frac{f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1}}{h^2} - \left(\frac{1}{2}\ f''(x_{i+1}) + 2\,f''(x_i) + \frac{1}{2}\ f''(x_{i-1})\right) =$$

$$= 3\,f''(x_i) + \frac{h^2}{4}\,f^{(4)}(\xi_i) - \left(3\,f''(x_i) + \frac{h^2}{2}\,f^{(4)}(\eta_i)\right) =$$

$$= \frac{h^2}{4}\,\left(f^{(4)}(\xi_i) - 2f^{(4)}(\eta_i)\right),$$

т. е. $|d_i - (C\varphi)_i| \leqslant c_i h^2 A_4$. Таким образом, получено поточечное неравенство $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |M_i - f''(x_i)| \leqslant \tilde{C}_2 h^2 A_4, \quad \tilde{C}_2 = \frac{3}{4}$. Напомним, что $M_i = S_3''(x_i)$.

Оценка для второй производной. Рассмотрим на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разность

$$f''(x) - S_3''(x) = f''(x) - \left(M_{i-1}\,\frac{x_i - x}{h} + M_i\,\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) \pm$$

$$\pm f''(x_{i-1})\,\frac{x_i - x}{h} \pm f''(x_i)\,\frac{x - x_{i-1}}{h}\,.$$

Знак $\pm$ здесь и далее означает одновременное добавление и вычитание соответствующего слагаемого. Преобразуем эту разность к виду

$$\left[f''(x) - \left(f''(x_{i-1})\,\frac{x_i - x}{h} + f''(x_i)\,\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)\right] +$$

$$+ \left(f''(x_{i-1}) - M_{i-1}\right)\frac{x_i - x}{h} + \left(f''(x_i) - M_i\right)\frac{x - x_{i-1}}{h}\,.$$

Первое слагаемое можно оценить как приближение функции $f''(x)$ ее линейным интерполянтом, а для оставшихся двух слагаемых можно применить полученное ранее поточечное неравенство. Учитывая, что величины $|x - x_{i-1}|, |x - x_i|$ не превосходят h, окончательно получим

$$\max_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} |S_3''(x) - f''(x)| \leqslant \frac{A_4}{2}\;\frac{h^2}{4} + 2\,\tilde{C}_2 h^2 A_4 = C_2 h^2 A_4,\; C_2 = \frac{13}{8}\,.$$

Правая часть неравенства не зависит от конкретного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, поэтому полученная оценка справедлива для $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$.

Оценка для третьей производной. Эта оценка является следствием поточечной оценки для второй производной и явного представления $S_3^{(3)}(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S_3^{(3)}(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h}\,.$$

Получаем

$$f^{(3)}(x) - S_3^{(3)}(x) + \frac{\pm f''(x_i) \pm f''(x_{i-1})}{h} =$$

$$= \left(f^{(3)}(x) - \frac{f''(x_i) - f''(x_{i-1})}{h}\right) + \frac{f''(x_i) - M_i}{h} - \frac{f''(x_{i-1}) - M_{i-1}}{h}\,.$$

Для оценки первого слагаемого разложим $f''(x_i)$ и $f''(x_{i-1})$ в точке x. Получаем

$$f''(x_i) = f''(x) + (x_i - x) f^{(3)}(x) + \frac{(x_i - x)^2}{2}\, f^{(4)}(\xi_+),$$

$$f''(x_{i-1}) = f''(x) + (x_{i-1} - x) f^{(3)}(x) + \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2}\, f^{(4)}(\xi_-).$$

Теперь приходим к неравенству

$$\left| f^{(3)}(x) - \frac{1}{h}\left(h f^{(3)}(x) + \frac{(x_i - x)^2}{2}\, f^{(4)}(\xi_+) - \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2}\, f^{(4)}(\xi_-)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{h}{2}\;A_4 = h\,A_4.$$

Для оценок оставшихся слагаемых можно воспользоваться поточечной оценкой для второй производной разности, что приводит к окончательному результату

$$\max_x |f^{(3)}(x) - S_3^{(3)}(x)| \leqslant h\,A_4 + 2\,\tilde{C}_2 h\,A_4 = C_3 h\,A_4, \quad C_3 = \tfrac{5}{2}.$$

Оценка для первой производной. Эта оценка следует из непрерывной оценки для второй производной. Так как $f(x_i) = S_3(x_i)$, $f(x_{i-1}) = S_3(x_{i-1})$, то на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует точка ξ_i такая, что $f'(\xi_i) = S_3'(\xi_i)$. Отсюда, по формуле конечных приращений Лагранжа, получим

$$f'(x) - S_3'(x) = (f'(x) - S_3'(x)) - (f'(\xi_i) - S_3'(\xi_i)) = \\ = (x - \xi_i)(f''(\theta_i) - S_3''(\theta_i)),$$

где $x \leqslant \theta_i \leqslant \xi_i$. Поскольку $|x - \xi_i| \leqslant h$, сразу имеем оценку

$$\max_x |f'(x) - S_3'(x)| \leqslant C_1 h^3 A_4, \quad C_1 = C_2 = \frac{13}{8}.$$

Оценка для разности. Эту оценку получают из непрерывной оценки для второй производной тем же способом, что и при выводе оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z) - S_3(z) - R(z - x_i)(z - x_{i-1})$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, где число R определяется из условия $g(x) = 0$, $x \neq x_i, x_{i-1}$. Таким образом, на этом отрезке существуют три точки: x, x_i, x_{i-1}, в которых $g(z)$ обращается в нуль. Поэтому в силу теоремы Ролля существуют две точки, в которых $g'(z)$ обращается в нуль, и, наконец, найдется точка ξ такая, что $g''(\xi) = 0$. Отсюда получаем $g''(\xi) = f''(\xi) - S_3''(\xi) - 2\,R = 0$, следовательно,

$$|R| = \frac{1}{2}\,|f''(\xi) - S_3''(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\,C_2 h^2 A_4.$$

Вспоминая, что точка x выбиралась из условия $g(x) = 0$, приходим к оценке

$$\max_x |f(x) - S_3(x)| \leqslant |R|\,\max_x |(x - x_i)(x - x_{i-1})| \leqslant \frac{1}{2}\,C_2 h^2 A_4\,\frac{h^2}{4} = C_0 h^4 A_4,$$

с константой $C_0 = \dfrac{C_2}{8} = \dfrac{13}{64}$. Все требуемые оценки получены. $\triangleright$

3.145. На сетке с постоянным шагом h построены естественные сплайны $S_3(x)$ и $S_3^*(x)$ при использовании точных f_i и приближенных f_i^* значений функции, так что $|f_i - f_i^*| \leqslant \varepsilon$. Показать справедливость оценки

$$\max_x |S_3(x) - S_3^*(x)| \leqslant K\,\varepsilon, \quad K = 10.$$

$\triangleleft$ Пусть $x \in [x_{i-1}, x_i]$; тогда, используя аналитическое представление сплайна из 3.141, получим

$$\max_{[x_{i-1}, x_i]} |S_3(x) - S_3^*(x)| \leqslant \\ \leqslant |M_{i-1} - M_{i-1}^*|\,\frac{h^2}{3} + |M_i - M_i^*|\,\frac{h^2}{3} + |f_{i-1} - f_{i-1}^*| + |f_i - f_i^*|.$$

Разность $M_i - M_i^*$ удовлетворяет уравнению

$$C(M_i - M_i^*) = d_i - d_i^* = \frac{1}{h}\left[f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1} - (f_{i+1}^* - 2\,f_i^* + f_{i-1}^*)\right].$$

Отсюда на основании решения 3.143 для коэффициентов естественного сплайна имеем оценку $\max\limits_i |M_i - M_i^*| \leqslant \dfrac{12}{h^2}\,\varepsilon$. Поэтому справедливо неравенство

$$\max_{[x_{i-1},x_i]} |S_3(x) - S_3^*(x)| \leqslant \frac{12}{h^2}\,\varepsilon\;\frac{2\,h^2}{3} + 2\,\varepsilon = 10\,\varepsilon.$$

Правая часть неравенства не зависит от рассматриваемого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, значит, оно справедливо для $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$.

Встречается термин *вычислительная устойчивость сплайна*. Это означает, что возмущение сплайна пропорционально возмущению исходных данных с некоторой абсолютной постоянной. В рассмотренном примере получена оценка с постоянной $K = 10$. ▷

Используют также *локальные (аппроксимационные) сплайны*, значения которых в узлах, как правило, не совпадают со значениями $f(x)$. Это обстоятельство не принципиально, так как сами значения $f(x)$ обычно известны приблизительно. Рассмотрим построение локального сплайна третьей степени на сетке с постоянным шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, для отрезка $[0, 1]$. Возьмем *стандартный* сплайн $B(x)$, определяемый соотношениями

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - x^2 + |x|^3/2 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ (2 - |x|)^3/6 & \text{при} \quad 1 \leqslant |x| \leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad 2 \leqslant |x|. \end{cases}$$

Локальные сплайны третьей степени $B_2^{(1)}(x)$ и $B_2^{(2)}(x)$ записываются в виде

$$B_2^{(k)}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i^{(k)} B\left(\frac{x - ih}{h}\right), \quad k = 1, 2,$$

и отличаются выбором коэффициентов.

При $k = 1$ доопределяют значения f_{-1} и f_{n+1} линейной интерполяцией по значениям f_0, f_1 и f_n, f_{n-1} соответственно и полагают $\alpha_i = f_i$ $(f_i = f(x_i))$ при $-1 \leqslant i \leqslant n + 1$. При $k = 2$ доопределяют значения f_{-2}, f_{-1} и f_{n+1}, f_{n+2} кубической интерполяцией по значениям f_0, f_1, f_2, f_3 и $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$ соответственно и полагают $\alpha_i = \dfrac{8f_i - f_{i+1} - f_{i-1}}{6}$.

Значения полученных сплайнов в узлах сетки равны некоторому среднему значений функции в ближайших узлах.

3.146. Показать, что при любых $\alpha_i^{(k)}$, $k = 1, 2$, функции $B_2^{(k)}(x)$ являются сплайнами третьей степени, причем они тождественно равны нулю вне отрезка $[-3h, 1 + 3h]$.

$\triangleleft$ Справедливость первого утверждения следует из свойств стандартного сплайна $B(x)$: он является кусочно-кубической функцией, имеющей в точках $\pm 1, \pm 2$ непрерывные производные до второго порядка включительно (проверяется непосредственно). Линейная комбинация таких функций удовлетворяет определению кубического сплайна.

Далее рассмотрим в формуле $B_2^{(k)}(x)$ множитель $B\left(\dfrac{x+h}{h}\right)$ при α_{-1}. Эта функция обращается в нуль при $\left|\dfrac{x+h}{h}\right| \geqslant 2$, т. е. при $x \leqslant -3\,h$ и $x \geqslant h$. Аналогично множитель $B\left(\dfrac{x-(n+1)h}{h}\right)$ при α_{n+1} обращается в нуль при $x \leqslant x_n - h = 1 - h$ и $x \geqslant 1 + 3\,h$. Эти слагаемые являются крайними в сумме (первым и последним), поэтому определяют область, где $B_2^{(k)}(x) \not\equiv 0$, а именно отрезок $[-3h, 1+3h]$. Областью определения приближаемой функции $f(x)$ является отрезок $[0,1]$. $\triangleright$

3.147. Записать значения f_{-1} и f_{n+1}, необходимые для определения локального сплайна $B_2^{(1)}(x)$.

$\triangleleft$ Построим многочлен Лагранжа первой степени для $f(x)$ по значениям f_0, f_1:

$$L_2(x) = f_0\,\frac{x_1 - x}{h} + f_1\,\frac{x - x_0}{h}\,, \quad x_i = x_0 + i\,h, \quad i = 0, 1,$$

и вычислим его значение в точке $x = x_0 - h$. Имеем $f_{-1} = L_2(x_0 - h) = 2\,f_0 - f_1$. Аналогично по значениям f_n, f_{n-1} строится величина $f_{n+1} = 2\,f_n - f_{n-1}$. $\triangleright$

3.148. Записать значения f_{-2}, f_{-1} и f_{n+1}, f_{n+2}, необходимые для определения локального сплайна $B_2^{(2)}(x)$.

$\triangleleft$ Построим многочлен Лагранжа третьей степени для $f(x)$ по значениям f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}. Имеем

$$L_4(x) = \sum_{i=1}^{4} f_{n+1-i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{x - x_{n+1-j}}{x_{n+1-i} - x_{n+1-j}}\,,$$

где $x_i = x_0 + i\,h$; $i = n, n-1, n-2, n-3$; $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, и вычислим значения многочлена в точках $x_n + h$ и $x_n + 2\,h$. Получаем

$$f_{n+1} = L_4(x_n + h) = 4\,f_n - 6\,f_{n-1} + 4\,f_{n-2} - f_{n-3},$$
$$f_{n+2} = 10\,f_n - 20\,f_{n-1} + 15\,f_{n-2} - 4\,f_{n-3}.$$

Аналогично по значениям f_0, f_1, f_2, f_3 строят величины

$$f_{-2} = 10\,f_0 - 20\,f_1 + 15\,f_2 - 4\,f_3, \quad f_{-1} = 4\,f_0 - 6\,f_1 + 4\,f_2 - f_3. \quad \triangleright$$

3.149. Показать, что величина $B_2^{(1)}(x)$ зависит только от значений f_i в четырех ближайших к x точках x_i, а величина $B_2^{(2)}(x)$ — в шести точках.

$\lhd$ Пусть $x \in [x_{k-1}, x_k]$, тогда $x = \theta\, h$, $k-1 \leqslant \theta \leqslant k$. Неравенство $\left|\dfrac{x-i\,h}{h}\right| \equiv |\theta - i| < 2$ выполняется только для значений $i = k-2, k-1, k, k+1$. Так как стандартный сплайн $B(x)$ равен нулю при $|x| \geqslant 2$, то $B_2^{(1)}(x)$ зависит только от значений f_i, $i = k-2, k-1, k, k+1$. Напомним, что для $B_2^{(1)}(x)$ коэффициенты определяются как $\alpha_i = f_i$.

Анализ для $B_2^{(2)}(x)$ проводится аналогично, только зависимость от значений в шести точках связана с другой формулой для коэффициентов: $\alpha_i = \dfrac{8f_i - f_{i+1} - f_{i-1}}{6}$. $\rhd$

3.150. Показать, что $B_2^{(i)}(x_0) = f_0$, $B_2^{(i)}(x_n) = f_n$, $i = 1, 2$; $B_2^{(2)}(x_1) = f_1$, $B_2^{(2)}(x_{n-1}) = f_{n-1}$.

$\lhd$ Покажем в качестве примера равенство $B_2^{(2)}(x_n) = f_n$. Так как $x_n = n\,h$, получим

$$B_2^{(2)}(x_n) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i B\left(\frac{nh - ih}{h}\right) = \alpha_{n+1}B(-1) + \alpha_n B(0) + \alpha_{n-1}B(1) =$$

$$= \frac{\alpha_{n+1} + 4\,\alpha_n + \alpha_{n-1}}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{-f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n}{6} + 4\,\frac{-f_{n+1} + 8\,f_n - f_{n-1}}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{-f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}}{6}\right) = \frac{1}{36}\left(-f_{n+2} + 4f_{n+1} + 30f_n + 4f_{n-1} - f_{n-2}\right) = f_n.$$

Для получения последнего равенства использованы выражения для f_{n+2} и f_{n+1} из 3.148. $\rhd$

3.151. Пусть $|f^{(4)}(x)| \leqslant A_4$. Показать, что

$$\left|\left(B_2^{(2)}(x)\right)^{(l)} - f^{(l)}(x)\right| \leqslant C_l A_4 h^{4-l}, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

$\lhd$ Для сплайна $B_2^{(2)}(x)$ будем использовать обозначение $B_2(x)$, чтобы избежать недоразумений с символами производных.

Поточечное неравенство для второй производной. Рассмотрим выражение $B_2''(x)$ в одном из узлов $x_k = k\,h$. Имеем

$$B_2''(x_k) = \frac{1}{h^2}\left(\alpha_{k-1}B''(1) + \alpha_k B''(0) + \alpha_{k+1}B''(-1)\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{k-1} - 2\,\alpha_k + \alpha_{k+1}}{h^2} = \frac{-f_{k-2} + 10\,f_{k-1} - 18\,f_k + 10\,f_{k+1} - f_{k+2}}{6\,h^2}.$$

Используя разложения в ряд Тейлора для величин $f_{k\pm1}$, $f_{k\pm2}$ в точке $x = x_k$, получим $B_2''(x_k) = f''(x_k) + \tilde{C}_2 h^2 f^{(4)}(\xi_k)$.

Оценка для второй производной. Эта оценка выводится из поточечного неравенства как для интерполяционного сплайна (см. решение 3.144), если в приведенных там выкладках $S_3(x)$ заменить на $B_2(x)$.

Оценка третьей производной. В этом случае необходимо отметить, что на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо равенство

$$B_2^{(3)}(x) = \frac{-\alpha_{k-2} + 3\,\alpha_{k-1} - 3\,\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}}{h^3} = \frac{B_2''(x_k) - B_2''(x_{k-1})}{h}\,.$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как для интерполяционного сплайна (см. решение 3.144).

Оценка для первой производной. Рассмотрим на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функцию $g(x)$, про которую известно следующее:

1)$g'(x)$ непрерывна; 2)$|g'(x)| \leqslant K$. Тогда

$$g(x) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x} g'(\xi)d\xi + g(x_{k-1}) \quad \text{и} \quad |g(x)| \leqslant K\,h + |g(x_{k-1})|.$$

В рассматриваемом случае $g(x) = B_2'(x) - f'(x)$, и имеется оценка $|g'(x)| = |B_2''(x) - f''(x)| \leqslant K = C_2 A_4 h^2$. Для нахождения недостающей величины $|g(x_{k-1})|$ рассмотрим значение $B_2'(x)$ в узлах $x_k = k\,h$

$$B_2'(x_k) = \frac{1}{h}\left(\alpha_{k-1}B'(1) + \alpha_k B'(0) + \alpha_{k+1}B'(-1)\right) = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_{k-1}}{2\,h} =$$

$$= \frac{f_{k-2} - 8\,f_{k-1} + 8\,f_{k+1} - f_{k+2}}{12\,h} = f'(x_k) + \tilde{C}_1 f^{(4)}(\xi_k)\,h^3.$$

Откуда и следует искомая оценка:

$$\max_x |f'(x) - B_2'(x)| \leqslant C_1 h^3 A_4.$$

Оценка для разности. Эта оценка получается таким же способом: $g(x) = B_2(x) - f(x)$. В данном случае $K = C_1 A_4 h^3$,

$$B_2(x_k) = \alpha_{k-1}B(1) + \alpha_k B(0) + \alpha_{k+1}B(-1) =$$

$$= \frac{\alpha_{k+1} + 4\,\alpha_k + \alpha_{k-1}}{6} = f(x_k) + \tilde{C}_0 f^{(4)}(\xi_k)\,h^4,$$

что приводит к завершающей оценке для $l = 0$. ▷

3.152. Пусть $|f^{(2)}(x)| \leqslant A_2$. Показать, что

$$\left|\left(B_2^{(1)}(x)\right)^{(l)} - f^{(l)}(x)\right| \leqslant C_l A_2 h^{2-l}, \quad l = 0, 1.$$