Тема : Преобразование Лапласа

$\mathbf{1^0}$. Определение оригинала, порядка роста, изображения. Определение преобразования Лапласа. $\mathbf{2^0}$. Свойства преобразования Лапласа (линейность, теорема подобия). Примеры. Теорема смещения. Примеры. $\mathbf{3^0}$. Формула обращения преобразования Лапласа. $\mathbf{4^0}$. Теоремы о дифференцировании и интегрировании оригиналов и изображений. $\mathbf{5^0}$. Применение преобразование Лапласа к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1^0. Пусть есть локально суммируемая функция $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ аргумента $t \geq 0$. Тогда для любого конечного отрезка $[b,c]$, вложенного в положительную полуось, справедливо неравенство

$$\int\limits_b^c |f(t)|\,dt < +\infty.$$

Среди всех таких функций выделяется специальный подкласс, элементы которого называются оригиналами.

Определение. *Функция* $f(t)$ *называется оригиналом, если существует такое вещественное число* a, *что*

$$\int_{0}^{+\infty} |f(t)|e^{-at}dt < +\infty, \qquad a \in \mathbb{R}. \qquad (O)$$

На множестве всевозможных функций — оригиналов устанавливается определенная градация.

Точнее, каждому оригиналу приписывается некоторая его вещественная характеристика, называемая порядком роста этого оригинала.

Определение. *Порядком роста функции $f(t)$ называется точная нижняя граница множества всех вещественных чисел a, обладающих свойством (O):*

$$a(f) = \inf\left\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at}dt < +\infty\right\}.$$

Пример. Функция Хевисайда $\boldsymbol{H(t)}$, определяемая равенством

$$\boldsymbol{H(t)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \boldsymbol{t < 0}, \\ \mathbf{1} & \text{при } \boldsymbol{t \geq 0}, \end{cases}$$

является оригиналом с порядком роста нуль:

$$\forall \boldsymbol{a > 0} \quad \Rightarrow \int\limits_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{H(t)e^{-at}dt} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-at}dt} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}.$$

При этом

$$\int\limits_{0}^{+\infty} H(t)\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} dt = +\infty.$$

По заданному оригиналу $f(t)$ определим новую функцию $F = F(\rho)$ комплексной переменной $\rho = \tau + i\sigma$, положив

$$F(\rho) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\rho t}dt. \qquad (Im)$$

Этот интеграл сходится при условии, что вещественная часть комплексной переменной $\rho = \tau + i\sigma$ строго больше порядка роста функции $f(t)$, то есть при $\tau = \operatorname{Re} \rho > a(f)$. В этом случае имеем

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-\rho t} \, dt \right| \leq \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-\rho t}| dt.$$

Учитывая, что $|e^{-\rho t}| = e^{-\tau t}$, получаем далее для некоторого положительного ε с тем условием, что $0 < \varepsilon < \tau - a(f)$:

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-\rho t}| dt = \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\tau t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| \cdot e^{-(a(f)+\varepsilon)t} \cdot e^{-(\tau - a(f) - \varepsilon)t} dt \le$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-(a(f)+\varepsilon)t} dt < +\infty.$$

Последнее неравенство справедливо в силу определения порядка роста $a(f)$ и условия, что $\varepsilon > 0$.

Таким образом, область определения соответствующей заданному оригиналу функции $F(\rho)$ — это та часть комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в которой $\tau = \mathrm{Re}\,\rho > a(f)$, то есть полуплоскость.

Определение. *Функцию* $F(\rho)$, $\operatorname{Re}\rho > a(f)$, *определяемую по заданному оригиналу* $f(t)$ *формулой*

$$F(\rho) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\rho t}dt,$$

называют изображением оригинала $f(t)$.

Таким образом, установлено соответствие

$$\text{оригинал}\, f \quad \mapsto \quad \text{изображение}\, F.$$

Для того чтобы обозначить эту взаимосвязь между $f(t)$ и $F(\rho)$ часто используются специальные обозначения, например, такое:

$$f(t) \risingdotseq F(\rho).$$

Определение. *Преобразование, сопоставляющее каждому оригиналу его изображение, называют* ***преобразованием Лапласа****.*

Обычно преобразование Лапласа обозначают как $\mathcal{L}$, так что соотношение $f(t) \risingdotseq F(\rho)$ эквивалентно равенству $F(\rho) = \mathcal{L}(f(t))$.

Пример. Изображение функции Хевисайда задается равенством

$$F(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} dt = \frac{1}{\rho}.$$

Последнее равенство справедливо при любом комплексном ρ, лежащем в правой полуплоскости, то есть при $\mathrm{Re}\,\rho > 0$. В этом случае в силу аналитичности функции $e^{-\rho t}$ интеграл вычисляется по формуле Лейбница как приращение первообразной:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho t} dt = -\frac{1}{\rho} e^{-\rho t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty}.$$

Учитывая, что $\mathrm{Re}\,\rho > 0$, имеем предельное равенство

$$e^{-\rho t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, получаем искомое выражение для преобразования Лапласа от функции Хевисайда

$$H(t) \risingdotseq \frac{1}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \mathcal{L}(H(t)).$$

Отметим, что не всякая гладкая функция является оригиналом, то есть не для всякой гладкой функции определено ее преобразование Лапласа.

Например, функция $f(t) = e^{t^2}$ бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, но оригиналом не является.

Функция $f(t) = \frac{1}{t}$ также не имеет преобразования Лапласа: для любого вещественного числа a несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-at}\, dt$ расходится. При этом удобно полагать, что порядок роста функции $f(t) = \frac{1}{t}$ равен $+\infty$.

Функция $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, хотя и стремится к бесконечности при $t \to +0$, но преобразование Лапласа имеет, то есть является оригиналом. Порядок роста этой функции равен нулю: $a(f) = 0$.

Отметим, что порядок роста функции может равняться $-\infty$. В качестве примера достаточно рассмотреть оригинал $f(t) = e^{-t^2}$.

Лемма (признак оригинала). *Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна при $t \geqslant 0$ и при этом существуют такие постоянные $M > 0$ и $k \geq 0$, что*

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \quad \text{при} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Тогда функция $f(t)$ — это оригинал.

Применяя эту лемму, заключаем, что оригиналами являются функции $e^{\alpha t}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, и степенная функция t^n. Соответствующие преобразования Лапласа вычисляются по формулам

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}, \qquad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Теорема (об аналитичности изображения). *Пусть функция $f(t)$ — это оригинал с пока-*

зателем роста $a(f)$. Тогда несобственный интеграл

$$F(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-\rho t}dt, \qquad \rho = \tau + i\sigma,$$

абсолютно сходится при любом ρ с условием $\operatorname{Re}\rho > a(f)$. При этом функция $F(\rho)$ аналитична в полуплоскости $\tau > a(f)$. Если $\tau = \operatorname{Re}\rho$ стремится к $+\infty$, то $F(\rho) \to 0$.

Замечание. *Если $F(\rho)$ — функция, аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки, то $F(\rho) \to 0$ при условии, что ρ стремится к ∞ по любому направлению, а не только при $\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$.*

Пример. Пусть функция $f(t) = e^{\alpha t}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда ее преобразование Лапласа задается равенством

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho - \alpha}.$$

Эта функция $F(\rho)$ является аналитической во всей комплексной плоскости кроме точки $\rho = \alpha$, в которой $F(\rho)$ имеет полюс первого порядка. По теореме об аналитичности $F(\rho)$ аналитична при $\mathrm{Re}\,\rho > \mathrm{Re}\,\alpha$ и при этом $F(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$.

2^0. Укажем некоторые свойства преобразования Лапласа.

1) Преобразование Лапласа **линейно**, то есть

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

для любых комплексных α, β и любых оригиналов $f(t)$ и $g(t)$.

Это свойство сразу следует из линейности операции интегрирования. Следует только заметить, что если оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ имеют разные порядки роста, то соответствующие им интегралы Лапласа сходятся в **разных** полуплоскостях, то есть при

$$\operatorname{Re}\rho > a(f) \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\rho > a(g).$$

В этом случае интеграл Лапласа для их суммы заведомо сходится при

$$\operatorname{Re}\rho > \max\{a(f), a(g)\}.$$

В качестве примера найдем преобразование Лапласа от функции $f(t) = \sin \omega t$, где $\omega \in \mathbb{C}$. По формуле Эйлера имеем

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Используя линейность преобразования Лапласа, получаем далее

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{\rho - i\omega} - \frac{1}{\rho + i\omega}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{\rho^2+\omega^2} = \frac{\omega}{\rho^2+\omega^2} = F(\rho).$$

Теорема (подобия). *Пусть $f(t)$ — оригинал, $f(t) \risingdotseq F(\rho)$ и $\omega > 0$. Тогда*

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega}F\left(\frac{\rho}{\omega}\right).$$

Доказательство. Проводится с помощью замены переменной под интегралом, определяющим преобразование Лапласа. $\square$

Рассмотрим два примера применения теоремы подобия. Пусть $f(t) = \cos t$. Тогда для вещественных значений ρ имеем

$$F(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \cos t \, dt = \mathrm{Re}\,\{ \int\limits_0^{+\infty} e^{it-\rho t} dt\} =$$

$$= \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{i-\rho} e^{(i-\rho)t}\Big|_0^{+\infty}\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{\rho - i}\Big\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{\rho + i}{\rho^2+1}\right\} = \frac{\rho}{\rho^2+1}.$$

Полученное равенство допускает естественное продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\rho > 0$.

В силу теоремы подобия справедливы равенства

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\frac{\rho}{\omega}}{1+(\frac{\rho}{\omega})^2} = \frac{\rho}{\rho^2+\omega^2}.$$

Аналогично:

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{1+\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{\rho^2+\omega^2}.$$

Теорема (смещения). *Пусть* $f(t)$ *— это оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(\rho)$, *и* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Тогда произведение* $e^{-\alpha t} f(t)$ *— это также оригинал и при этом имеет место соответствие*

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(\rho + \alpha).$$

Применяя теорему смещения, получаем следующие три соответствия.

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \risingdotseq \frac{\rho - \alpha}{(\rho - \alpha)^2 + \omega^2};$$

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(\rho-\alpha)^2+\omega^2}; \qquad t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(\rho-\alpha)^{n+1}}.$$

Теорема (запаздывания). *Пусть* $f(t)$ *— это оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(\rho)$*, и* $a > 0$*. Тогда функция*

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a \\ f(t-a) & \text{при } t \geq a \end{cases}$$

также является оригиналом, преобразование Лапласа которого задается соотношением

$$f_a(t) \risingdotseq e^{-\rho a} F(\rho).$$

Рассмотрим два примера применения теоремы запаздывания. Сдвиг функции Хевисайда задается равенством

$$H(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq a; \\ 0 & \text{при } t < a. \end{cases}$$

Следовательно, имеет место соответствие

$$H(t-a) = H_a(t) \risingdotseq \frac{1}{\rho} e^{-\rho a}.$$

Определим **единичный импульс** следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le t < a; \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \ge a, \end{cases}$$

где $a > 0$. Заметим, что $\varphi(t) = H(t) - H_a(t)$ и по теореме запаздывания справедливы равенства

$$\varphi(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} = \frac{1 - e^{-pa}}{p}.$$

3^0. Пусть функция $u(t)$ определена и **непрерывно дифференцируема** при $t \geq 0$, причем

$$|u(t)| \leq Me^{kt}, \quad |u'(t)| \leq Me^{kt} \quad \forall t \geq 0.$$

Пусть кроме того

$$|u'(t_2) - u'(t_1)| \leq N(T)|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 2T],$$

где $T > 0$ — произвольное конечное число. Тогда функции $u(t)$ и $u'(t)$ — это оригиналы.

Введем обозначение

$$\widetilde{u}(\rho) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Тогда для всех $t \in [t_0, T]$, где $t_0 > 0$, имеет место следующее неравенство:

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-bi}^{a+bi} \widetilde{u}(\rho) e^{\rho t} d\rho \right| \leq \frac{M_1}{b}. \qquad (\mathcal{L}^{-1}_{\leq})$$

Здесь $b > 0$ и $a > k$, где k — показатель из условий на функцию $u(t)$ и ее производную

$u'(t)$. Постоянная M_1 в правой части оценки ($\mathcal{L}^{-1}_{\leq}$) не зависит от величины b.

Устремляя b к $+\infty$, получаем в пределе **формулу обращения** преобразования Лапласа:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \widetilde{u}(\rho) e^{\rho t} d\rho, \qquad a > k. \qquad (\mathcal{L}^{-1})$$

По этой формуле оригинал восстанавливается по известному своему изображению.

4^0. Установим связь производной оригинала с соответствующим ему преобразованием Лапласа.

Теорема (о производной оригинала). *Пусть $f(t)$ — это функция, непрерывная при $t \geq 0$ и дифференцируемая при $t \geq 0$, причем ее производная $f'(t)$ — это оригинал. Тогда сама $f(t)$ также является оригиналом и при этом*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{\rho}f(0) + \frac{1}{\rho}\mathcal{L}\{f'(t)\}.$$

Последнее равенство получается обычным интегрированием по частям:

$$\int_{0}^{+\infty} f'(t)e^{-\rho t}dt = -f(0) + \rho \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\rho t}dt.$$

Следствие. *Если функция* $u(t)$ *имеет* n *непрерывных производных, причем* $u^{(n)}(t)$ *является оригиналом, то* $u(t)$ *— также оригинал. Если при этом* $u(t) \risingdotseq v(\rho)$, *то*

$$u^{(n)}(t) \risingdotseq \rho^n v(\rho) - \rho^{n-1}u(0) - \rho^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0).$$

На использовании этой формулы основаны приложения преобразования Лапласа к решению задач для линейных дифференциальных уравнений и систем.

Пример. Используем преобразование Лапласа для решения следующей задачи Коши.

$$x''' - 2x'' + x' = 4, \quad \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ x'(0) = 2, \\ x''(0) = -2. \end{array}$$

Решение. Применим преобразование Лапласа поочередно к обеим частям дифференциального уравнения $x''' - 2x'' + x' = 4$. Проведем необходимые выкладки. Имеем

$$\int_{0}^{+\infty} x'(t)e^{-\lambda t}dt = -x(0) + \lambda\widetilde{x}(\lambda) = -1 + \lambda\widetilde{x}(\lambda);$$

$$\int_{0}^{+\infty} x''(t)e^{-\lambda t}dt = -x'(0) + \lambda \int_{0}^{+\infty} x'(t)e^{-\lambda t}dt =$$

$$= -2 + \lambda(\lambda\widetilde{x}(\lambda) - 1);$$

$$\int\limits_0^{+\infty} x'''(t)e^{-\lambda t}dt = -x''(0) + \lambda \int\limits_0^{+\infty} x''(t)e^{-\lambda t}dt =$$

$$= 2 + \lambda^2(\lambda\widetilde{x}(\lambda) - 1) - 2\lambda = \lambda^3\widetilde{x}(\lambda) - \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\{x''' - 2x'' + x'\} = \lambda^3\widetilde{x}(\lambda) - \lambda^2 - 2\lambda + 2 - 2\lambda^2\widetilde{x}(\lambda) +$$

$$+2\lambda + 4 + \lambda\widetilde{x}(\lambda) - 1 = \lambda(\lambda - 1)^2\widetilde{x}(\lambda) - \lambda^2 + 5.$$

Вычисляя преобразование Лапласа от правой части дифференциального уравнения, получаем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} 4e^{-\lambda t}dt = -\frac{4}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{4}{\lambda} \qquad \text{при } \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Таким образом, имеем при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$:

$$\widetilde{x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)^2}\left(\frac{4}{\lambda} + \lambda^2 - 5\right) = \frac{\lambda^3 - 5\lambda + 4}{\lambda^2(\lambda-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2(\lambda-1)^2}(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4).$$

Следовательно,

$$\widetilde{x}(\lambda) = \frac{\lambda^2+\lambda-4}{\lambda^2(\lambda-1)}.$$

Применяя формулу обращения, получаем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\lambda^2+\lambda-4}{\lambda^2(\lambda-1)} e^{\lambda t}\, d\lambda, \qquad a > 1,$$

или

$$x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 4\right)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\lambda^2(\lambda-1)} e^{\lambda t}\, d\lambda\right].$$

Остается вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}\, d\lambda, \qquad a > 1.$$

Согласно определению имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}\,d\lambda=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iR}^{a+iR}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}\,d\lambda.$$

Заметим, что в комплексной плоскости подынтегральная функция $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}$ имеет в точности две изолированные особые точки: $\lambda_0=1$ (простой полюс) и $\lambda_0=0$ (полюс второго порядка).

По теореме о вычетах при достаточно большом $R > a$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iR}^{a+iR}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}\,d\lambda =$$

$$= \operatorname*{Res}_{\lambda=0}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)} + \operatorname*{Res}_{\lambda=1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)} -$$

$$- \int\limits_{\substack{|\lambda-a|=R\\ \operatorname{Re}\lambda<a}}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}\,d\lambda. \qquad (I_R)$$

Рассмотрим третье слагаемое в правой части последнего равенства, представляющее собой интеграл по полуокружности с центром в точке a и радиуса R.

Параметрически эту полуокружность можно задать следующим образом:

$$\lambda = a + Re^{i\varphi}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

В точках этой полуокружности оценим по модулю подынтегральную функцию. При условии, что $\operatorname{Re}\lambda < a$ справедливы следующие оценки:

$$|e^{\lambda t}| = e^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \leqslant e^{at},$$

$$\left|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda - 1)}\right| \leq C\frac{e^{at}}{|\lambda|^3}.$$

Если к тому же $\lambda = a + Re^{i\varphi}$, $R > a$, то

$$|\lambda|^2 = a^2 + R^2 + 2aR\cos\varphi \geqslant (R - a)^2.$$

Таким образом, в точках полуокружности подынтегральная функция мажорируется следующим образом:

$$\left|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda - 1)}\right| \leq C\frac{e^{at}}{(R-a)^3}, \qquad R > a.$$

При этом $d\lambda = iRe^{i\varphi}d\varphi$ и для любого достаточно большого радиуса $R > a$ справедливы соотношения

$$\Bigg|\int\limits_{\substack{|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{R}\\ \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\lambda}<\boldsymbol{a}}}\frac{e^{\boldsymbol{\lambda} t}}{\boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{\lambda}-1)}\,d\boldsymbol{\lambda}\Bigg|\leqslant\frac{CRe^{at}}{(R-a)^3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi=C\frac{\pi Re^{at}}{(R-a)^3}.$$

Переходя здесь к пределу при $R\to+\infty$, видим, что рассматриваемый интеграл по полуокружности стремится к нулю. Учитывая это и перейдя к пределу при $R\to+\infty$ в установленном выше равенстве (I_R), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}d\lambda =$$

$$= \operatorname*{Res}_{\lambda=0}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)} + \operatorname*{Res}_{\lambda=1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)}.$$

Сосчитаем вычеты в правой части. Имеем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)} = \lim_{\lambda\to 1}\frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t} = e^t,$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=0}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda-1)} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{d}{d\lambda}[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-1}] =?.$$

Вычисляя производную, получаем

$$\frac{d}{d\lambda}[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 1}] = \frac{te^{\lambda t}}{\lambda - 1} - e^{\lambda t}\frac{1}{(\lambda - 1)^2}.$$

Если здесь $\lambda \to 0$, то в пределе получается функция $-t-1$. Таким образом, искомый интеграл задается равенством

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2(\lambda - 1)}d\lambda = e^t - t - 1.$$

Возвращаясь к решению $x = x(t)$ исходной задачи Коши, получаем окончательную формулу

$$x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 4\right)\left[e^t - t - 1\right] = 4t + 3 - 2e^t.$$

Это и есть искомый ответ.