Глава 2

Разностные уравнения

Пусть неизвестная функция y и заданная функция f являются функциями одного целочисленного аргумента. Тогда линейное уравнение

$$a_0 y(k) + a_1 y(k+1) + \cdots + a_n y(k+n) = f(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ — постоянные коэффициенты и $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, называют *линейным разностным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Если в этом уравнении положить $y(k+i) = y_{k+i}$ и $f(k) = f_k$, то оно принимает вид

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \cdots + a_n y_{k+n} = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для однозначного определения решения требуется задать n условий, например,

$$y_i = b_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Как в постановках задач, так и в методах решения, имеется глубокая аналогия между рассмотренным разностным уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\tilde{a}_0 y(x) + \tilde{a}_1 y'(x) + \cdots + \tilde{a}_n y^{(n)}(x) = \tilde{f}(x)\,.$$

2.1. Однородные разностные уравнения

Если в разностном уравнении правая часть f_k равна нулю, то уравнение называют *однородным*. Напомним, как ищется общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Положим $y(x) = \exp(\lambda\, x)$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение и сокращая на $\exp(\lambda\, x)$, получим характеристическое уравнение

$$\tilde{p}(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j \lambda^j = 0.$$

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные корни этого уравнения кратности $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ соответственно, то общее решение можно записать в виде

$$y(x) = c_{11} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_{12} x \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + c_{1\sigma_1} x^{\sigma_1 - 1} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots$$
$$\cdots + c_{r1} \mathrm{e}^{\lambda_r x} + c_{r2} x \mathrm{e}^{\lambda_r x} + \cdots + c_{r\sigma_r} x^{\sigma_r - 1} e^{\lambda_r x}\,,$$

где c_{ij} — произвольные постоянные.

Аналогично ищется решение разностного уравнения. Положим $y_k = \mu^k$. Подставляя это выражение в разностное уравнение и сокращая на μ^k, получим характеристическое уравнение

$$p(\mu) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \mu^j = 0\,.$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — его различные корни, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — их кратности. Тогда общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y_k = c_{11}\mu_1^k + c_{12}k\mu_1^k + \cdots\cdots + c_{1\sigma_1}k^{\sigma_1-1}\mu_1^k + \cdots$$
$$+ c_{r1}\mu_r^k + c_{r2}k\mu_r^k + \cdots + c_{r\sigma_r}k^{\sigma_r-1}\mu_r^k\,,$$

где c_{ij} — произвольные постоянные. Таким образом, каждому корню μ кратности σ соответствует набор частных решений вида $\mu^k, k\mu^k, \ldots, k^{\sigma-1}\mu^k$.

2.1. Найти общее решение уравнения $by_{k+1} - cy_k + ay_{k-1} = 0$.

$\lhd$ Найдем корни характеристического уравнения $b\mu^2 - c\mu + a = 0$. Имеем

$$\mu_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{D}}{2b}\,, \quad D = c^2 - 4ab\,.$$

Рассмотрим следующие три случая:

а) $D > 0, \quad \mu_1 \neq \mu_2$ — вещественные:

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k\,.$$

б) $D < 0, \quad \mu_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}$ — комплексно-сопряженные.

Здесь $\rho = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{|D|}}{c}\right), & \dfrac{c}{b} > 0, \\ \pi - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{|D|}}{c}\right), & \dfrac{c}{b} < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & c = 0. \end{cases}$

При этом $y_k = \rho^k(C_1\cos k\varphi + C_2\sin k\varphi)$. Так записывают общее действительное решение; для комплексного решения можно использовать формулу из п. а).

в) $D = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu$ — кратные. Имеем

$$y_k = C_1\mu^k + C_2k\mu^k.$$

В предыдущих формулах C_1, C_2 — произвольные постоянные. $\rhd$

2.2. Найти общее действительное решение уравнения $y_{k+1} - y_k + 2y_{k-1} = 0$.
Ответ: $y_k = (\sqrt{2})^k(C_1\sin\, k\varphi + C_2\cos\, k\varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

2.3. Верно ли, что любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$$

удовлетворяет уравнению

$$y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0\,?$$

Ответ: да, так как характеристический многочлен второго уравнения делится на характеристический многочлен первого без остатка.

2.4. Пусть φ_k и z_k — частные решения уравнения

$$a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0, \quad a_1, a_{-1} \neq 0\,.$$

Доказать, что определитель матрицы

$$A_k = \begin{pmatrix} \varphi_k & \varphi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$$

либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

Указание. Для определителя $I_k = \det A_k$ справедливо разностное уравнение $I_k = \dfrac{a_{-1}}{a_1}\, I_{k-1}$.

Соответствующее утверждение можно обобщить на случай разностных уравнений более высокого порядка. Равенство нулю определителя означает линейную зависимость соответствующих частных решений.

2.5. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+4} + 2y_{k+3} + 3y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 0, \quad y_0 = y_1 = y_3 = 0,\ y_2 = -1\,.$$

Указание. Характеристическое уравнение имеет следующий вид $(\mu^2 + \mu + 1)^2 = 0$. Отсюда получим

$$y_k = \frac{2(k-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi k}{3}\ .$$

2.6. Показать, что для чисел Фибоначчи

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1$$

справедливо равенство

$$f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Указание. Формула для чисел Фибоначчи имеет вид

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

2.7. Вычислить определитель порядка k:

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & . & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Разлагая определитель Δ_k по первой строке, получим следующую разностную задачу:

$$\Delta_k = b\Delta_{k-1} - ac\Delta_{k-2}\,, \quad \Delta_1 = b\,, \Delta_2 = b^2 - ac\,.$$

Отсюда формально находим $\Delta_0 = 1$, что упрощает последующие выкладки.

Найдем корни характеристического уравнения

$$\mu_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\,.$$

Рассмотрим следующие два случая.

а) $D = \sqrt{b^2 - 4ac} \neq 0$, тогда

$$\Delta_k = C_1 \left(\frac{b-D}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{b+D}{2}\right)^k\,.$$

Из начальных условий $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = b$ получаем линейную систему

$$C_1 + C_2 = 1, \quad \frac{C_1}{2}\,(b - D) + \frac{C_2}{2}\,(b + D) = b\,,$$

решение которой имеет вид $C_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{D}\right)$, $C_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{D}\right)$. Для случая ненулевого дискриминанта

$$\Delta_k = \frac{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^{k+1} - \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{b^2 - 4ac}}\,.$$

б) $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, тогда

$$\Delta_k = C_1 \left(\frac{b}{2}\right)^k + C_2 k \left(\frac{b}{2}\right)^k\,.$$

Из начальных условий получаем линейную систему

$$C_1 = 1, \quad C_1\,\frac{b}{2} + C_2\,\frac{b}{2} = b\,,$$

решение которой $C_1 = C_2 = 1$. Для случая нулевого дискриминанта

$$\Delta_k = \left(\frac{b}{2}\right)^k (1 + k)\,.$$

Данное решение можно получить из вида Δ_k для $D \neq 0$ предельным переходом при $4ac \to b^2$. ▷

2.8. Используя разностное уравнение, записать формулу для вычисления интеграла

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\cos(kx) - \cos(k\alpha)}{\cos x - \cos\alpha}\,dx\,,$$

где α — параметр из отрезка $[0, \pi]$.

Указание. Можно показать, что

$$I_{k-1} + I_{k+1} = 2I_k \cos\alpha\,, \quad I_0 = 0, \quad I_1 = 1,$$

откуда для $0 < \alpha < \pi$ следует формула $I_k(\alpha) = \dfrac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}$. Для оставшихся значений корни характеристического уравнения кратные, поэтому формула имеет другой вид.

2.9. Найти решение разностного уравнения

$$y_{k+2} - y_{k+1} + 2\,y_k - y_{k-1} + y_{k-2} = 0\,, \quad 2 \leqslant k \leqslant N-2\,,$$

удовлетворяющее следующим *краевым* условиям:

$$\begin{gathered} 2\,y_2 - y_1 + y_0 = 2\,, \\ y_3 - y_2 + y_1 - y_0 = 0\,, \\ y_{N-3} - y_{N-2} + y_{N-1} - y_N = 0\,, \\ 2\,y_{N-2} - y_{N-1} + y_N = 0\,. \end{gathered}$$

◁ Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^4 - \mu^3 + 2\,\mu^2 - \mu + 1 = (\mu^2 - \mu + 1)\,(\mu^2 + 1)\,.$$

Следовательно, общее решение можно записать так:

$$y_k = C_1 \cos\tfrac{\pi}{3}\,k + C_2 \sin\tfrac{\pi}{3}\,k + C_3 \cos\tfrac{\pi}{2}\,k + C_4 \sin\tfrac{\pi}{2}\,k\,.$$

Для определения постоянных воспользуемся краевыми условиями

$$D \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с матрицей D следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\frac{N\,\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{N\,\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ \cos\frac{(N-2)\,\pi}{3} & \sin\frac{(N-2)\,\pi}{3} & -\left(\cos\frac{N\,\pi}{2} + \sin\frac{N\,\pi}{2}\right) & \cos\frac{N\,\pi}{2} - \sin\frac{N\,\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Определитель этой системы равен $-2\sin\left(\frac{N\,\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{N\,\pi}{2}\right)$ и отличен от нуля, если N четное, но не кратное 3. В этом случае $C_1 = C_2 = 0\,, \quad C_3 = C_4 = -1\,.$ ▷

Ответ: если N четное, но не кратное 3, то решение имеет вид

$$y_k = -\left(\cos\tfrac{\pi}{2}\,k + \sin\tfrac{\pi}{2}\,k\right)\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant N\,.$$

В противном случае решение либо не существует, либо оно не единственное.

2.10. Предложить удобную форму записи решения уравнения

$$y_{k+1} - 2\,p\,y_k + y_{k-1} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,; \quad p > 0\,.$$

Ответ: при $p < 1$ положим $p = \cos\alpha$ $(\alpha \neq 0)$, тогда $y_k = C_1 \cos k\alpha + C_2 \sin k\alpha$. При $p > 1$ положим $p = \cosh\alpha$, тогда $y_k = C_1 \cosh k\alpha + C_2 \sinh k\alpha$. При $p = 1$ имеем $y_k = C_1 + C_2 k$.

2.11. Показать, что если $-1 < \lambda < 1$, то любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 2\lambda y_k + y_{k-1} = 0$$

ограничено при $k \to \infty$. Если λ — любое комплексное число, не принадлежащее интервалу действительной оси $-1 < \lambda < 1$, то среди решений этого разностного уравнения имеются неограниченные при $k \to \infty$.

$\triangleleft$ Если z — корень характеристического уравнения $z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$, то $\frac{1}{z}$ — другой его корень. Ограниченность решений разностного уравнения равносильна следующему условию: корни характеристического уравнения различны и лежат на единичной окружности. Поэтому (см. 2.10) решение ограничено, если только $z_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha$, $\alpha \neq 0, \pi$. В этом случае $\lambda = \cos\alpha$. $\triangleright$

2.12. Найти общее решение уравнения второго порядка: 1) $y_{k+2} - y_{k+1} - 2\,y_k = 0$; 2) $y_{k+2} - 5\,y_{k+1} + 4\,y_k = 0$; 3) $y_{k+2} - 4\,y_{k+1} + 5\,y_k = 0$.

2.13. Найти общее решение уравнения третьего порядка: 1) $y_{k+2} + y_{k+1} + 5\,y_k + 3\,y_{k-1} = 0$; 2) $y_{k+2} - 5\,y_{k+1} + 8\,y_k - 4\,y_{k-1} = 0$.

2.14. Найти общее решение уравнения четвертого порядка: 1) $y_{k+2} + 2\,y_k + y_{k-2} = 0$; 2) $y_{k+4} + y_k = 0$.

2.15. Доказать, что любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 12\,y_{k-1} + 2\,y_{k-2} + 27\,y_{k-3} - 18\,y_{k-4} = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений

$$y_{k+1} - 3\,y_{k-1} + 2\,y_{k-2} = 0 \quad \text{и} \quad y_{k+1} - 9\,y_{k-1} = 0\,.$$

2.16. Найти решение краевой задачи

$$y_{k+1} - y_k + y_{k-1} = 0\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1\,,$$
$$y_0 = 1\,, \quad y_N = 0\,.$$

О т в е т: если N не кратно 3, то $y_k = \dfrac{\sin((N-k)\,\pi}{3)}\sin(Nk\pi/3)/$. В противном случае решения не существует.

2.17. Найти решение системы $a_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $b_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + b_k}{2}$, если a_1, b_1 заданы.

О т в е т: $a_k = \dfrac{a_1 + 2b_1}{3} + \dfrac{2(a_1 - b_1)}{3 \cdot 4^{k-1}}\,, \quad b_k = \dfrac{a_1 + 2b_1}{3} - \dfrac{a_1 - b_1}{3 \cdot 4^{k-1}}\,.$

2.18. Найти общее действительное решение уравнения

$$20y_{k-1} - 8y_k + y_{k+1} = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = \left(\sqrt{20}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right).$

2.19. Найти общее действительное решение уравнения

$$2y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = \left(\sqrt{2}\right)^k \left(C_1 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right).$

2.20. Найти общее действительное решение уравнения

$$26y_{k-1} + 10y_k + y_{k+1} = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = \left(\sqrt{26}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)\,, \quad \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right).$

2.21. Найти общее действительное решение уравнения

$$13y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1} = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = \left(\sqrt{13}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)\,, \quad \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right).$

2.22. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0, \quad y_0 = 1,\ y_1 = 4\,.$$

О т в е т: $y_k = (-2)^k(1 - 3k)\,.$

2.23. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 0, \quad y_0 = 2,\ y_1 = 1\,.$$

О т в е т: $y_k = (-1)^k(5 - 3\cdot 2^k)\,.$

2.24. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + y_k = 0, \quad y_0 = 2,\ y_1 = 1\,.$$

О т в е т: $y_k = 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).$

2.25. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+1} - 4y_k + y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0, \quad y_0 = 6,\ y_1 = 12,\ y_4 = 276\,.$$

О т в е т: $y_k = (-1)^k + 2^{k+1} + 3^{k+1}\,.$

2.26. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+4} - 2\,y_{k+3} + 3\,y_{k+2} + 2\,y_{k+1} - 4\,y_k = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = C_1 + C_2(-1)^k + 2^k\left(C_3 \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right).$

2.27. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+4} - 7\,y_{k+3} + 18\,y_{k+2} - 20\,y_{k+1} + 8\,y_k = 0\,.$$

О т в е т: $y_k = C_1 + 2^k\left(C_2 + C_3 k + C_4 k^2\right).$

2.28. Найти общее решение уравнения $y_{k+4}+8\,y_{k+2}+16\,y_k=0$.
Ответ: $y_k=2^k\left[(C_1+C_2k)\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)+(C_3+C_4k)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right]$.

2.29. Вывести и решить разностное уравнение для коэффициентов ряда Тейлора функции $\dfrac{1}{t^2+t+1}$.

Указание. Полагая

$$\frac{1}{t^2+t+1}=f_0+f_1t+f_2t^2+\dots+f_mt^m+\dots,$$

найдем

$$1=(t^2+t+1)\,(f_0+f_1t+f_2t^2+\dots+f_mt^m+\dots)\,,$$

откуда $f_0=1$, $f_0+f_1=0$, $f_{k+2}+f_{k+1}+f_k=0$, $k\geqslant 0$.

2.30. Пусть задана последовательность интегралов

$$I_k=\int\limits_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-x}\sin x\,dx,\quad k\geqslant 0\,.$$

Показать, что для целых неотрицательных n справедливо равенство $I_{4n+3}=0$.

$\lhd$ Заметим, что $I_k=\operatorname{Im}\left[\int\limits_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-x+\mathrm{i}x}\,dx\right]$. Обозначим через K_k вещественную часть этого выражения:

$$K_k=\int\limits_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-x}\cos x\,dx,\quad k\geqslant 0\,.$$

Интегрируя по частям, имеем систему разностных уравнений

$$I_k=\frac{k}{2}\,(I_{k-1}+K_{k-1})\,,\qquad K_k=\frac{k}{2}\,(-I_{k-1}+K_{k-1})$$

с начальными условиями $I_0=K_0=\frac{1}{2}$. Если положить

$$I_k=\frac{k!}{2^k}\,j_k,\quad K_k=\frac{k!}{2^k}\,l_k\,,$$

то исходная система с переменными коэффициентами переходит в систему с постоянными коэффициентами

$$j_k=j_{k-1}+l_{k-1},\ j_0=\frac{1}{2}\,,\quad l_k=-j_{k-1}+l_{k-1},\ l_0=\frac{1}{2}\,.$$

Исключая l_k, получим разностное уравнение второго порядка относительно j_k:

$$j_{k+1}-2j_k+2j_{k-1}=0,\quad j_0=\frac{1}{2},\quad j_1=1.$$

Его решение имеет вид

$$j_k=\frac{1}{2}\left[(1+\mathrm{i})^{k-1}+(1-\mathrm{i})^{k-1}\right],\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

Отсюда находим
$$I_k = \frac{k!}{2^{k+1}}\left[(1+\mathrm{i})^{k-1} + (1-\mathrm{i})^{k-1}\right].$$
Заметим, что $(1+\mathrm{i})^4 = -4 = (1-\mathrm{i})^4$, следовательно,
$$j_{4n+3} = (-4)^n j_3 = \frac{(-4)^n}{2}\left[(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2) + (1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)\right] = 0\,,$$
откуда $I_{4n+3} = 0$. ▷

2.31. Для целых положительных чисел $a_0 > a_1$ наибольший общий делитель находится последовательным делением a_0 на a_1, затем a_1 — на первый остаток и т. д. Указать оценку сверху для числа делений (длину алгоритма Евклида).

◁ Обозначим частное от деления a_i на a_{i+1} через d_i и запишем систему равенств
$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 d_1 + a_2\,,\\ a_1 &= a_2 d_2 + a_3\,,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m-2} &= a_{m-1} d_{m-1} + a_m\,,\\ a_{m-1} &= a_m d_m\,. \end{aligned}$$
Наибольшее количество операций деления m имеет место в том случае, когда все $d_1, d_2, \ldots, d_m$ равны единице (доказать почему!). Поэтому введем числа $y_0, y_1, \ldots, y_m$ при условиях $y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ \ldots,\ y_{i+1} = y_{i-1} + y_i$, для которых справедливы неравенства
$$a_{m+1} = y_0,\ a_m \geqslant y_1,\ \ldots,\ a_2 \geqslant y_{m-1},\ a_1 \geqslant y_m.$$
Последнее из них можно использовать для определения m, если известно выражение $y_m = f(m)$. Но y_m — числа Фибоначчи, поэтому
$$y_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right],$$
т. е. при всех m справедливо неравенство
$$y_m > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1$$
или
$$a_1 + 1 > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$
Отсюда после логарифмирования имеем
$$m < \frac{\lg(1+a_1) + \lg\sqrt{5}}{\lg\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\,.$$
Обозначим через p число цифр в a_1. Тогда числитель $\lg\left((1+a_1)\sqrt{5}\right) \approx p$. Поскольку $\lg\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < \dfrac{1}{5}$, получаем $m < 5p$. Это неравенство называют теоремой Ламе. ▷

2.32. Пусть задано k чисел: $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$ и построена последовательность

$$f_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} f_j\,, \quad f_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_j\,, \quad f_{k+2} = \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k+1} f_j\,, \quad \dots .$$

Найти $\lim\limits_{m\to\infty} f_m$.

$\lhd$ Функция f_m удовлетворяет разностному уравнению

$$f_{m+k} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} f_{m+j}\,, \tag{2.1}$$

характеристическое уравнение которого имеет вид:

$$\mu^k - \frac{1}{k}\left(\mu^{k-1} + \mu^{k-2} + \dots + 1\right) = 0\,.$$

Это уравнение имеет один корень, равный единице: $\mu_1 = 1$, остальные корни различны и по модулю меньше единицы: $|\mu_i| < 1\,,\ i = 2, 3, \dots, k\,.$ Поэтому общее решение f_m уравнения (2.1) имеет вид

$$f_m = C_1 + C_2\mu_2^m + C_3\mu_3^m + \dots + C_k\mu_k^m\,.$$

Постоянные $C_1, C_2, \dots, C_k$ находятся из начальных условий:

$$\begin{array}{lllll} C_1 + C_2 & + \dots + C_k & = f_0\,, \\ C_1 + C_2\mu_2 & + \dots + C_k\mu_k & = f_1\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 + C_2\mu_2^{k-1} & + \dots + C_k\mu_k^{k-1} & = f_{k-1}\,. \end{array}$$

Эта система имеет единственное решение, так как все корни $\mu_i\,,\ i = 2, 3, \dots, k,$ — простые.

Так как все $|\mu_i| < 1$, то $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = C_1$. Для определения C_1, чтобы избежать решения системы относительно C_1, C_2, $\dots$, C_k, воспользуемся искусственным приемом. Коэффициент C_1 линейно зависит от начальных данных (доказать почему), т. е. $C_1 = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j f_j$, где α_j выражаются только через корни характеристического уравнения μ_i, следовательно, от начальных данных f_j не зависят. Напомним, что разностное уравнение k-го порядка однозначно определяется k подряд идущими значениями $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, или $f_1, f_2, \dots, f_k$, или вообще $f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+k-1}$ при любом $j \geqslant 0$. При этом для рассматриваемого уравнения всегда будем получать одно и то же решение f_m с одними и теми же постоянными $C_1, C_2, \dots, C_k$. Поэтому можно написать равенство

$$C_1 = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j f_j = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j f_{j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j f_{j+l}$$

с произвольным фиксированным l. Воспользуемся первым равенством сумм

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1} = \alpha_0 f_1 + \alpha_1 f_2 + \dots + \alpha_{k-1}\,\frac{f_0 + f_1 + \dots + f_{k-1}}{k}\,.$$

Учитывая произвольность начальных данных $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$, приравняем коэффициенты при одинаковых f_i из обеих частей последнего уравнения:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = \frac{1}{k}\,\alpha_{k-1}\,, \\
\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{1}{k}\,\alpha_{k-1} = 2\,\alpha_0\,, \\
\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{k}\,\alpha_{k-1} = 3\,\alpha_0\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{k-1} = \alpha_{k-2} + \frac{1}{k}\,\alpha_{k-1} = k\,\alpha_0\,.
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$C_1 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) f_j\,,$$

и остается определить α_0. Для этого положим $f_0 = f_1 = \cdots = f_{k-1} = 1$; тогда $f_m \equiv 1$, и $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = C_1 = 1$. Отсюда имеем $\alpha_0 = \dfrac{2}{k(k+1)}$, и окончательно получаем

$$\lim_{m\to\infty} f_m = C_1 = 2\,\frac{f_0 + 2\,f_1 + 3\,f_2 + \cdots + k\,f_{k-1}}{k(k+1)}\,.$$

Пусть $k = 2$, $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, тогда последовательность f_m будет следующая: $1, 2, \frac{3}{2}\,, \frac{7}{4}\,, \frac{13}{8}\,, \ldots$, а ее предел равен $2\,\dfrac{1+4}{2(2+1)} = \dfrac{5}{3}$. $\triangleright$

2.2. Вспомогательные формулы

Пусть φ_i — функция целочисленного аргумента i. Введем обозначения для разностей первого порядка:

$$\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad \nabla\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Разности более высокого порядка определяются рекуррентно:

$$\Delta^m\varphi_i = \Delta(\Delta^{m-1}\varphi_i), \quad m \geqslant 1.$$

Рассмотрим ряд полезных соотношений.

Формулы «разностного дифференцирования» произведения. Известна формула дифференцирования произведения функций

$$\frac{d}{dx}\,[u(x)v(x)] = u(x)\,\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\,\frac{du(x)}{dx}\,.$$

Аналогичные формулы для разностей имеют вид

$$\begin{gathered}
\Delta\,(uv)_i = u_i\Delta v_i + v_{i+1}\Delta u_i = u_{i+1}\Delta v_i + v_i\Delta u_i, \\
\nabla\,(uv)_i = u_{i-1}\nabla v_i + v_i\nabla u_i = u_i\nabla v_i + v_{i-1}\nabla u_i.
\end{gathered}$$

При их проверке достаточно учесть, что $\Delta\varphi_{i-1} = \nabla\varphi_i$.

2.33. Получить выражения для $\Delta^k\varphi_i$ и $\nabla^k\varphi_i$ в виде линейной комбинации значений φ_j.

Ответ: $\Delta^k\varphi_i = \sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\varphi_{i+j}$, где C_k^j — биномиальные коэффициенты.

2.34. Найти общее решение уравнения $\Delta^3\varphi_k - 3\Delta\varphi_k + 2\varphi_k = 0$.

2.35. Решить уравнение $\Delta^3\varphi_k = 0$ при начальных условиях $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$.

Разностные аналоги интегрирования по частям. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$$

и введем суммы

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i\psi_i, \quad (\varphi,\psi] = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\psi_i, \quad [\varphi,\psi) = \sum_{i=0}^{N-1}\varphi_i\psi_i$$

— аналоги интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$. С помощью формулы Абеля

$$\sum_{i=0}^{N-1}(a_{i+1}-a_i)b_i = -\sum_{i=0}^{N-1}(b_{i+1}-b_i)a_{i+1} + a_Nb_N - a_0b_0$$

можно показать справедливость формулы суммирования по частям:

$$(\varphi,\Delta\psi) = -(\nabla\varphi,\psi] + \varphi_N\psi_N - \varphi_0\psi_1.$$

2.36. Вычислить сумму $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} i2^i$.

$\lhd$ Положим $u_i = i, \Delta v_i = 2^i$. Имеем

$$v_{i+1} = v_i + 2^i = \sum_{k=0}^{i}2^k + v_0 = 2^{i+1} - 1 + v_0.$$

Чтобы выполнялось условие $v_{N+1} = 0$, достаточно положить $v_0 = 1-2^{N+1}$. Далее применим формулу суммирования по частям

$$\sum_{i=1}^{N} i2^i = \sum_{i=1}^{N}u_i\Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N+1}v_i\Delta u_i + u_{N+1}v_{N+1} - u_0v_1 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N+1}\left(2^i - 2^{N+1}\right) = -2\left(2^{N+1}-1\right) + 2^{N+1}(N+1) = (N-1)2^{N+1} + 2. \quad \rhd$$

Ответ: $S_N = (N-1)2^{N+1} + 2$.

2.37. Вычислить сумму $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} ia^i,\ a \neq 1.$

Указание. Положить $u_i = i$, $\Delta v_i = a^i$, $v_i = \dfrac{a^i - a^N}{a-1}$, $v_{N+1} = 0$.

Ответ: $S_N = \dfrac{a^{N+1}\,(N(a-1)-1)+a}{(a-1)^2}$.

2.38. Вычислить сумму $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} i(i-1).$

Ответ: $S_N = \dfrac{N^3-N}{3}$.

Разностные формулы Грина. Формулы

$$\int\limits_a^b u(x)Lv(x)dx = -\int\limits_a^b k(x)u'(x)v'(x)dx - \int\limits_a^b p(x)u(x)v(x)dx + k(x)u(x)v'(x)\big|_a^b\,,$$

$$\int\limits_a^b \left[u(x)Lv(x) - Lu(x)v(x)\right] dx = k(x)\left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\right]\big|_a^b\,,$$

где $Lv(x) = (k(x)v'(x))' - p(x)v(x)$, называют соответственно *первой* и *второй формулами Грина* для оператора L.

2.39. Доказать справедливость соотношений

$$(\varphi, \Delta\nabla\psi) = -(\nabla\varphi, \nabla\psi) + \varphi_{N-1}\nabla\psi_N - \varphi_0\nabla\psi_1,$$
$$(\varphi, \Delta\nabla\psi) - (\Delta\nabla\varphi, \psi) = \varphi_{N-1}\psi_N - \varphi_N\psi_{N-1} + \varphi_1\psi_0 - \varphi_0\psi_1.$$

Указание. Воспользоваться формулой суммирования по частям.

2.40. Вывести формулы Грина для разностного оператора

$$\Lambda\varphi_i = \Delta\left(a_i\nabla\varphi_i\right) - d_i\varphi_i \equiv a_{i+1}\left(\varphi_{i+1} - \varphi_i\right) - a_i\left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) - d_i\varphi_i.$$

Ответ: $(\psi, \Lambda\varphi) = -(a\nabla\varphi, \nabla\psi] - (d\varphi, \psi) + (a\psi\nabla\varphi)_N - \psi_0(a\nabla\varphi)_1$,
$(\varphi, \Lambda\psi) - (\psi, \Lambda\varphi) = a_N(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)_N - a_1(\psi_0\nabla\varphi_1 - \varphi_0\nabla\psi_1)$.

2.3. Неоднородные разностные уравнения

Пусть y_k^0 — общее решение однородного, y_k^1 — частное решение неоднородного уравнения. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно представить в виде их суммы

$$y_k = y_k^0 + y_k^1\,.$$

Если правая часть имеет специальный вид, то частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$f_k = \alpha^k\left(P_m(k)\cos\beta k + Q_n(k)\sin\beta k\right),$$

где $P_m(k)$, $Q_n(k)$ — многочлены степени m и n соответственно. Тогда частное решение ищут в виде

$$y_k^1 = k^s\,\alpha^k\,(R_l(k)\,\cos\beta k + T_l(k)\,\sin\beta k), \tag{2.2}$$

где $s = 0$, если $\alpha e^{\pm i\beta}$ не являются корнями характеристического уравнения, и s равно кратности корня в противном случае; $l = \max(m, n)$ — степень многочленов $R_l(k)$ и $T_l(k)$. Чтобы найти коэффициенты этих многочленов, надо подставить выражение (2.2) в неоднородное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

2.41. Найти частное решение уравнения $2y_k - y_{k+1} = 1 + 2k - k^2$.

$\lhd$ Корень характеристического уравнения $\mu = 2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_k^1 = bk^2 + ck + d$. Подставим его в уравнение

$$2bk^2 + 2ck + 2d - [b(k+1)^2 + c(k+1) + d] = 1 + 2k - k^2 \quad \forall\, k.$$

Совпадение коэффициентов при линейно независимых функциях приводит к следующим равенствам:

при k^2 $\quad 2b - b = -1,$

при k^1 $\quad 2c - (2b + c) = 2,$

при $k^0 = 1$ $\quad 2d - (b + c + d) = 1.$

Отсюда имеем: $b = -1$, $c = 0$, $d = 0$, следовательно, $y_k^1 = -k^2$. $\rhd$

2.42. Найти частное решение уравнения $2y_k - y_{k+1} = k\,2^k$.

$\lhd$ Корень характеристического уравнения $\mu = 2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_k^1 = 2^k k(bk + c)$. Подставим его в уравнение

$$2^{k+1}(bk^2 + ck) - 2^{k+1}(b(k+1)^2 + c(k+1)) = k\,2^k \quad \forall\, k\,.$$

Совпадение коэффициентов при линейно независимых функциях приводит к следующим равенствам:

при $2^k\,k^2$ $\quad 2b - 2b = 0,$

при $2^k\,k^1$ $\quad 2c - (4b + 2c) = 1,$

при $2^k\,k^0$ $\quad -(2b + 2c) = 0.$

Отсюда имеем: $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$, следовательно, $y_k^1 = 2^{k-2}(k - k^2)$. $\rhd$

2.43. Найти частное решение уравнения $2y_k - y_{k+1} = \sin k$.

$\lhd$ Корень характеристического уравнения $\mu = 2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_k^1 = c\,\sin k + d\,\cos k$. Подставим его в уравнение

$$2(c\,\sin k + d\,\cos k) - (c\,\sin(k+1) + d\,\cos(k+1)) = \sin k \quad \forall\, k\,.$$

Так как $\sin(k+1) = \sin k\,\cos 1 + \cos k\,\sin 1$ и $\cos(k+1) = \cos k\,\cos 1 - \sin k\,\sin 1$, то совпадение коэффициентов при линейно независимых функциях приводит к следующим равенствам:

при $\sin k$ $\quad (2 - \cos 1)\,c + d\,\sin 1 = 1,$

при $\cos k$ $\quad (2 - \cos 1)\,d - c\,\sin 1 = 0,$

следовательно,

$$c = \frac{2-\cos 1}{5-4\cos 1}\,, \quad d = \frac{\sin 1}{5-4\cos 1}$$

и

$$y_k^1 = \frac{2-\cos 1}{5-4\,\cos 1}\sin k + \frac{\sin 1}{5-4\cos 1}\cos k\,. \qquad \triangleright$$

2.44. Найти решение разностной задачи $y_{k+1} - b\,y_k = a^k,\ y_0 = 1\ (a, b \neq 0)\,.$

Ответ: корень характеристического уравнения $\mu = b$, поэтому возможны два случая:

при $b \neq a$ имеем $y_k = \frac{a-b-1}{a-b}\,b^k + \frac{1}{a-b}\,a^k\,,$

при $b = a$ имеем $y_k = a^{k-1}(a+k)\,.$

2.45. Найти решение разностной задачи $y_{k+1} - y_{k-1} = \frac{1}{k^2-1}\,,\ y_1 = 0,$ $y_2 = 0\,.$

$\triangleleft$ Преобразуем уравнение к виду

$$y_{k+1} - y_{k-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right).$$

Отсюда находим частное решение $y_k^1 = -\frac{1}{2k}$. Окончательно имеем $y_k = \frac{1}{8}\,(3-(-1)^k) - \frac{1}{2k}$. $\triangleright$

2.46. Найти решение разностной задачи с переменными коэффициентами

$$y_{k+1} - ky_k = 2^k\,k!\,, \quad k \geqslant 0\,.$$

$\triangleleft$ При $k = 0$ из уравнения получим $y_1 = 1$. Запишем исходное уравнение в следующем виде:

$$y_{k+1} = (2^k(k-1)! + y_k)k.$$

Воспользовавшись заменой $y_k = z_k\,(k-1)!$, приходим к разностной задаче для z_k

$$z_{k+1} - z_k = 2^k, \quad z_1 = 1\,.$$

Найдем ее решение: $z_k = 2^k - 1$, следовательно, $y_k = (k-1)!\,(2^k-1)$. $\triangleright$

2.47. Найти решение нелинейной разностной задачи $y_{k+1} = \frac{y_k}{1+y_k}\,,$ $y_0 = 1\,.$

$\triangleleft$ Исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$y_{k+1} = \frac{1}{1/y_k + 1}\,.$$

Заменяя $y_k = \frac{1}{z_k}$, получаем $z_k = k+1$, откуда $y_k = \frac{1}{k+1}$. $\triangleright$

2.48. Найти решение нелинейной разностной задачи $y_{k+1} = \dfrac{a\,y_k + b}{c\,y_k + d}$, $y_0 = 1$, при условии $(a-d)^2 + 4\,b\,c > 0$.

$\triangleleft$ Положим $y_k = \dfrac{u_k}{v_k}$, тогда

$$\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} = \frac{a\,u_k + b\,v_k}{c\,u_k + d\,v_k}\,.$$

Рассмотрим систему

$$u_{k+1} = a\,u_k + b\,v_k\,, \quad v_{k+1} = c\,u_k + d\,v_k\,,$$

из которой следует уравнение второго порядка

$$v_{k+2} = (a+d)v_{k+1} - (ad - bc)v_k\,.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^2 - \mu(a+d) + ad - bc = 0\,,$$

а корни соответственно равны

$$\mu_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)}\,.$$

Из условия на коэффициенты следует, что дискриминант больше нуля, значит, вещественные корни различны $\mu_1 \neq \mu_2$, следовательно, $v_k = A\,\mu_1^k + B\,\mu_2^k$. Из второго уравнения системы получаем:

$$u_k = \frac{v_{k+1} - d\,v_k}{c} = \frac{1}{c}\left[A\,\mu_1^k(\mu_1 - d) + B\,\mu_2^k(\mu_2 - d)\right]\,.$$

Подставим полученные выражения в y_k и разделим числитель и знаменатель на $A\,\mu_1^k$:

$$y_k = \frac{u_k}{v_k} = \frac{\mu_1 - d + K\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k(\mu_2 - d)}{c\left[1 + K\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k\right]}\,.$$

Здесь через K обозначена пока неизвестная постоянная ($K = \frac{B}{A}$). Определим ее из начального условия $y_0 = 1$:

$$1 = \frac{\mu_1 - d + K(\mu_2 - d)}{c(1+K)}\,,$$

отсюда $K = -\dfrac{\mu_1 - (c+d)}{\mu_2 - (c+d)}$. $\triangleright$

2.49. Найти частное решение уравнения $y_{k+2} - y_{k+1} - 6\,y_k = 4 \cdot 2^k$.
Ответ: $y_k = -\,2^k$.

2.50. Найти решение разностной задачи

1) $y_{k+2} - 4\,y_k = 5 \cdot 3^k\,, \qquad y_0 = 0\,, y_1 = 1\,,$

2) $y_{k+2} - 4\,y_k = 2^k\,, \qquad y_0 = 0\,, y_1 = 1\,,$

3) $y_{k+2} - 4\,y_{k+1} + 4\,y_k = 2^k\,, \quad y_0 = 0\,, y_1 = 1\,.$

2.51. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+4} - \frac{5}{2}\, y_{k+3} + \frac{5}{2}\, y_{k+1} - y_k = 1\,,$$

$$y_0 = 0\,,\ y_1 = 11\,,\ y_2 = -8\,,\ y_3 = 6\,.$$

Ответ: $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = -1$, $y_k = 8\cdot(-1)^{k-1} + 8\cdot 2^{-k} - k$.

2.52. Вычислить сумму $S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$, $a_n = (1+n+n^2)\cos\beta n\,.$

Указание. Решение удовлетворяет разностному уравнению $S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$ и начальному условию $S_0 = a_0$.

2.53. Найти решение нелинейного уравнения $y_{k+1} = \dfrac{1}{2-y_k}$.

◁ Преобразуем исходное уравнение к виду

$$y_{k+1}(1-y_k) = 1 - y_{k+1}$$

и запишем его в более удобной форме

$$\frac{y_{k+1}}{1-y_{k+1}} = \frac{1}{1-y_k}\,.$$

Заменяя $y_k = 1 - \dfrac{1}{z_k}$, получаем разностную задачу для z_k: $z_{k+1} - z_k = 1$. Отсюда

$$y_k = \frac{y_0 + k(1-y_0)}{1+k(1-y_0)}\,. \qquad ▷$$

2.54. Найти решение нелинейной разностной задачи $y_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{y_k}$, $y_0 = 2\,.$

◁ Преобразуем исходное уравнение к виду

$$y_{k+1} - 1 = \frac{y_k - 1}{y_k};$$

сделав замену $y_k = 1 + \dfrac{1}{z_k}$, получим $z_{k+1} = z_k + 1$, откуда $y_k = \dfrac{k+2}{k+1}$. ▷

2.55. Найти решение нелинейного уравнения $y_{k+1}^2 - y_k^2 = 1\,,\ k \geqslant 0\,.$

Ответ: $y_k = \sqrt{k+C}$, $C \geqslant 0$.

2.56. Найти решение нелинейного уравнения $y_{k+1}^2 = 2\,y_k\,.$

◁ Прологарифмируем обе части уравнения и выполним замену $z_k = \log y_k$. Получаем уравнение

$$2\,z_{k+1} - z_k = \log 2\,,$$

общее решение которого

$$z_k = C_1\,\left(\frac{1}{2}\right)^k + \log 2,$$

следовательно, $y_k = 2\,C^{(1/2)^k}$. ▷

2.57. Найти решение нелинейной разностной задачи
$$y_k y_{k+2}^3 = y_{k+1}^3 y_{k+3}\,, \quad y_0 = 1,\ y_1 = \mathrm{e}^{-1/2},\ y_2 = \mathrm{e}^{-2}\,.$$
Ответ: $y_k = \mathrm{e}^{-k^2/2}$ (см. решение 2.56).

2.58. Найти решение нелинейной разностной задачи $y_{k+1} = \dfrac{a\,y_k + b}{c\,y_k + d}$, $y_0 = 1$, при условии $(a-d)^2 + 4\,b\,c = 0$.

2.59. Найти частное решение уравнения $\frac{1}{8}\,y_{k-1} - \frac{3}{4}\,y_k + y_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
Ответ: $y_k = 4\,k\,2^{-k}$.

2.60. Найти частное решение уравнения $y_{k+1} - y_k - 12y_{k-1} = 4^k$.
Ответ: $y_k = \frac{k}{7}\,4^k$.

2.61. Найти частное решение уравнения $3y_{k+1} + 17y_k - 6y_{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
Ответ: $y_k = \frac{k}{19}\,3^{-k}$.

2.62. Найти частное решение уравнения $y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 2^k$.
Ответ: $y_k = -k\,2^k$.

2.63. Найти общее решение уравнения $y_{k+1} - \frac{5}{2}\,y_k + y_{k-1} = \cos k$.

Ответ: $y_k = C_1\,2^k + C_2\,2^{-k} + \dfrac{2\cos k}{4\cos 1 - 5}$.

2.64. Найти общее решение уравнения $y_{k+2} - 2y_{k+1} - 3y_k + 4y_{k-1} = k$.
Ответ: $y_k = C_1 + C_2\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^k + C_3\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^k - \dfrac{3}{16}\,k - \dfrac{1}{8}\,k^2.$

2.65. Найти общее решение уравнения $y_{k+1} + y_k - 5y_{k-1} + 3y_{k-2} = 1$.
Ответ: $y_k = C_1 + C_2\,k + C_3\,(-3)^k + \frac{1}{8}\,k^2$.

2.66. Найти общее решение уравнения $y_{k+1} - 2y_k - 8y_{k-1} = \sin k$.
Ответ: $y_k = C_1\,(-2)^k + C_2\,4^k - \dfrac{7\cos 1 + 2}{D}\sin k - \dfrac{9\sin 1}{D}\cos k$, где $D = (2 + 7\cos 1)^2 + (9\sin 1)^2$.

Отыскание частного решения методом вариации постоянных. Пусть требуется найти частное решение уравнения
$$y_{k+2} + a_k y_{k+1} + b_k y_k = f_k\,, \quad b_k \neq 0\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2.3}$$
общее решение которого при $f_k \equiv 0$ имеет вид
$$y_k^0 = C^{(1)} y_k^{(1)} + C^{(2)} y_k^{(2)}\,,$$
где $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ — линейно независимые функции.

Будем искать частное решение y_k^1 в виде

$$Y_k = C_k^{(1)} y_k^{(1)} + C_k^{(2)} y_k^{(2)}\,, \tag{2.4}$$

считая $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ не постоянными, а переменными функциями аргумента k (при $f_k \neq 0$).

Из формулы (2.4) имеем

$$\begin{gathered} Y_{k+1} = C_{k+1}^{(1)} y_{k+1}^{(1)} + C_{k+1}^{(2)} y_{k+1}^{(2)} = \\ = C_k^{(1)} y_{k+1}^{(1)} + C_k^{(2)} y_{k+1}^{(2)} + y_{k+1}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+1}^{(2)} \Delta C_k^{(2)}\,, \end{gathered}$$

где $\Delta C_k^{(j)} = C_{k+1}^{(j)} - C_k^{(j)}$, $j = 1, 2$. Потребуем, чтобы для всех k выполнялось равенство

$$y_{k+1}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+1}^{(2)} \Delta C_k^{(2)} = 0\,, \tag{2.5}$$

тогда

$$Y_{k+1} = C_k^{(1)} y_{k+1}^{(1)} + C_k^{(2)} y_{k+1}^{(2)}\,; \tag{2.6}$$

увеличивая индекс k на единицу, получим

$$\begin{gathered} Y_{k+2} = C_{k+2}^{(1)} y_{k+2}^{(1)} + C_{k+2}^{(2)} y_{k+2}^{(2)} = \\ = C_{k+1}^{(1)} y_{k+2}^{(1)} + C_{k+1}^{(2)} y_{k+2}^{(2)} + \left[y_{k+2}^{(1)} \Delta C_{k+1}^{(1)} + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_{k+1}^{(2)} \right]. \end{gathered}$$

В силу выполнения равенства (2.5) при замене k на $k+1$ выражение в квадратных скобках равно нулю, откуда

$$\begin{gathered} Y_{k+2} = C_{k+1}^{(1)} y_{k+2}^{(1)} + C_{k+1}^{(2)} y_{k+2}^{(2)} = \\ = C_k^{(1)} y_{k+2}^{(1)} + C_k^{(2)} y_{k+2}^{(2)} + y_{k+2}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_k^{(2)}\,. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подставим выражения для Y_{k+1} и Y_{k+2} (формулы (2.6) и (2.7)) в исходное уравнение (2.3). Так как $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ — частные решения однородного уравнения, получим

$$\begin{aligned} f_k &= Y_{k+2} + a_k Y_{k+1} + b_k Y_k = C_k^{(1)} y_{k+2}^{(1)} + C_k^{(2)} y_{k+2}^{(2)} + y_{k+2}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + \\ &\quad + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_k^{(2)} + a_k \left[C_k^{(1)} y_{k+1}^{(1)} + C_k^{(2)} y_{k+1}^{(2)} \right] + b_k \left[C_k^{(1)} y_k^{(1)} + C_k^{(2)} y_k^{(2)} \right] = \\ &= C_k^{(1)} \left[y_{k+2}^{(1)} + a_k y_{k+1}^{(1)} + b_k y_k^{(1)} \right] + C_k^{(2)} \left[y_{k+2}^{(2)} + a_k y_{k+1}^{(2)} + b_k y_k^{(2)} \right] + \\ &\quad + y_{k+2}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_k^{(2)} = y_{k+2}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_k^{(2)}\,. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta C_k^{(1)}$ и $\Delta C_k^{(2)}$ должны при всех k удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+1}^{(2)} \Delta C_k^{(2)} &= 0, \\ y_{k+2}^{(1)} \Delta C_k^{(1)} + y_{k+2}^{(2)} \Delta C_k^{(2)} &= f_k. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Напомним, что первое уравнение системы — это уравнение (2.5). Определитель системы (2.8), обозначим его через

$$\det_{k+1,k+2} = \begin{vmatrix} y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \\ y_{k+2}^{(1)} & y_{k+2}^{(2)} \end{vmatrix},$$

отличен от нуля при всех k, так как $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ — линейно независимые решения. Поэтому можно записать

$$\Delta C_k^{(1)} = -\frac{y_{k+1}^{(2)}}{\det_{k+1,k+2}}\, f_k \equiv F_k^{(1)}, \qquad \Delta C_k^{(2)} = \frac{y_{k+1}^{(1)}}{\det_{k+1,k+2}}\, f_k \equiv F_k^{(2)}.$$

Из этих соотношений находим $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$:

$$C_k^{(l)} = \sum_{j=1}^{k} F_{j-1}^{(l)} + C_0^{(l)}, \quad l = 1, 2.$$

Так как мы ищем частное решение уравнения (2.3), то можно положить $C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = 0$. Окончательно получим

$$Y_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j^{(1)} y_k^{(2)} - y_k^{(1)} y_j^{(2)}}{\det_{j,j+1}}\, f_{j-1}.$$

2.67. Найти частное решение уравнения

$$y_{k+2} - 5\,y_{k+1} + 6\,y_k = 6^{k+1}.$$

$\lhd$ Линейно независимые решения однородного уравнения имеют вид

$$y_k^{(1)} = 2^k, \quad y_k^{(2)} = 3^k, \quad \det_{j,j+1} = \begin{vmatrix} 2^j & 3^j \\ 2^{j+1} & 3^{j+1} \end{vmatrix} = 6^j.$$

Воспользуемся формулой для частного решения

$$Y_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j^{(1)} y_k^{(2)} - y_k^{(1)} y_j^{(2)}}{\det_{j,j+1}}\, f_{j-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j 3^k - 2^k 3^j}{6^j}\, 6^j =$$

$$= 3^k \sum_{j=1}^{k} 2^j - 2^k \sum_{j=1}^{k} 3^j = \frac{1}{2}\cdot 6^k + \frac{3}{2}\cdot 2^k - 2\cdot 3^k. \qquad \rhd$$

2.68. Найти методом вариации постоянных формулу для решения разностного уравнения

$$y_{k+1} + a_k y_k = f_k, \quad a_k \neq 0,\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2.69. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+1} - a\,y_k = f_k, \quad k \geqslant 0,\ y_0 = c.$$

Ответ: $y_k = c\,a^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} a^j f_{k-j-1}$.

2.70. Пусть для элементов последовательности y_k справедливо

$$y_{k+1} \leqslant a\,y_k + f_k\,, \quad k \geqslant 0\,,\ y_0 = c,\ a > 0\,.$$

Найти оценку для y_k в зависимости от a, c, f_i, $i = 0, \ldots, k-1$.

$\lhd$ Из (2.69) следует, что решение уравнения

$$v_{k+1} = a\,v_k + f_k\,, v_0 = y_0$$

имеет вид $v_k = c\,a^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} a^j f_{k-j-1}$. Теперь покажем, что $y_k \leqslant v_k$. Вычтем уравнение из неравенства

$$y_{k+1} - v_{k+1} \leqslant a\,(y_k - v_k) \leqslant \cdots \leqslant a^{k+1}\,(y_0 - v_0) = 0\,.$$

Отсюда получаем $y_k \leqslant c\,a^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} a^j f_{k-j-1}\,, k \geqslant 0.$ $\rhd$

2.71. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+1} - \exp(2k)\,y_k = 6k^2 \exp(k^2 + k)\,.$$

$\lhd$ Найдем сначала решение однородного уравнения

$$y_{k+1} = \exp(2k)\,y_k = \exp(2k)\exp(2(k-1))\,y_{k-1}\,,$$

$$y_{k+1} = \cdots = \exp\left(2\sum_{j=1}^{k} j\right)\,y_1 = \exp(k(k+1))\,y_1\,.$$

Отсюда имеем

$$y_k^0 = C\,\exp(k(k-1))\,.$$

Далее методом вариации постоянных найдем частное решение неоднородного уравнения

$$y_k^1 = 6\exp(k(k-1))\sum_{j=1}^{k-1} j^2 = k(k-1)(2k-1)\exp(k(k-1))\,. \qquad \rhd$$

О т в е т: $y_k = [C + k(k-1)(2k-1)]\exp(k^2 - k)$.

2.72. Найти общее решение уравнения

$$a_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = f_k\,,$$

где $a_k = k^2 - k + 1,\ b_k = -2(k^2+1),\ c_k = k^2 + k + 1,\ f_k = 2^k(k^2 - 3k + 1)$.

$\lhd$ Заметим, что $c_k = a_{k+1}$ и $b_k = -(a_k + c_k)$, поэтому данное уравнение можно переписать в виде

$$a_k(y_{k+2} - y_{k+1}) - a_{k+1}(y_{k+1} - y_k) = f_k\,. \tag{2.9}$$

Частные решения однородного уравнения $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ выделим условиями

$$v_0^{(1)} = v_1^{(1)} = 1\,,\quad v_0^{(2)} = 0,\ v_1^{(2)} = 3\,.$$

Эти решения линейно независимы, так как определитель отличен от нуля:

$$\det \begin{vmatrix} v_0^{(1)} & v_1^{(1)} \\ v_0^{(2)} & v_1^{(2)} \end{vmatrix} = 3\,.$$

Решение $v_k^{(1)}$ находится легко: $v_k^{(1)} = 1$, а для определения $v_k^{(2)}$ преобразуем (2.9) при $f_k \equiv 0$. Имеем

$$y_{k+2} - y_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k}\,(y_{k+1} - y_k) = \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\,(y_k - y_{k-1}) = \dots = \frac{a_{k+1}}{a_0}\,(y_1 - y_0)\,.$$

Учитывая начальные значения для $v_k^{(2)}$, получим

$$v_{k+1}^{(2)} - v_k^{(2)} = 3a_k = 3(k^2 - k + 1)\,.$$

Окончательно имеем

$$v_k^{(2)} = k(k^2 - 3k + 5)\,.$$

Общее решение исходного однородного уравнения имеет вид

$$y_k^{(0)} = C_1 + C_2 k(k^2 - 3k + 5)\,.$$

Построим теперь частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{v_k^{(2)} - v_{j+1}^{(2)}}{v_{j+2}^{(2)} - v_{j+1}^{(2)}}\,\frac{f_j}{a_j} = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{v_k^{(2)} - v_{j+1}^{(2)}}{3a_{j+1}a_j}\left[2^{j+1}a_j - 2^j a_{j+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-2}\left[v_k^{(2)} - v_{j+1}^{(2)}\right]\left[\frac{2^{j+1}}{a_{j+1}} - \frac{2^j}{a_j}\right].$$

Введем следующие обозначения: $x_j = v_k^{(2)} - v_{j+1}^{(2)}$, $z_j = \dfrac{2^j}{a_j}$, и перепишем частное решение в виде

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-2}\left[z_{j+1} - z_j\right] x_j\,.$$

Применяя формулу суммирования по частям, получаем

$$y_k^{(1)} = -\,\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\left[x_j - x_{j-1}\right] z_j + \frac{1}{3}\left[z_{k-1}x_{k-1} - z_0 x_{-1}\right].$$

По определению x_k и z_k имеем

$$x_j - x_{j-1} = v_k^{(2)} - v_{j+1}^{(2)} = -3a_j\,,$$

$$x_{k-1} = v_k^{(2)} - v_k^{(2)} = 0\,,$$

$$x_{-1} = v_k^{(2)} - v_0^{(2)} = v_k^{(2)}\,.$$

Отсюда

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j - \frac{1}{3}\,v_k^{(2)} = 2^k - 1 - \frac{1}{3}\,k(k^2 - 3k + 5)\,. \qquad \triangleright$$

О т в е т: $y_k = 2^k - 1 - \frac{1}{3}\,(k^2 - 3k + 5) + C_1 + C_2 k(k^2 - 3k + 5)$.