Тема : Интеграл Фурье

$\mathbf{1^0}$. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. $\mathbf{2^0}$. Интегралы Фурье абсолютно интегрируемых функций. $\mathbf{3^0}$. Локально интегрируемые функции. Интеграл в смысле главного значения. Пример. $\mathbf{4^0}$. Признак Дини сходимости интеграла Фурье. Представление функций интегралом Фурье. $\mathbf{5^0}$. Комплексная форма интеграла Фурье.

1^0. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Тогда на любом интервале $(-l, l)$ функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье по соответствующей интервалу тригонометрической системе

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right). \qquad \text{(TS)}$$

Здесь

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,\ \ a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,}$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots .}$$

Не вдаваясь в строгие обоснования, выяснним, во что перейдет ряд ($\mathbf{TS}$) при переходе к пределу при $l \to +\infty$.

1) Если функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, то интеграл $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx$ как функция переменной l ограничен:

$$\left|\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \qquad \forall\, l \geqslant 0.$$

Следовательно, в этом случае $a_0 = a_0(l)$ стремится к нулю при $l \to +\infty$.

Естественно предположить, что и в случае функций $f(x)$ из более общего класса нежели абсолютно интегрируемые на всей числовой прямой, предельное соотношение

$$\lim_{l \to +\infty} a_0(l) = 0$$

также имеет место.

2) Сумму слагаемых с косинусами в разло-

жении $(\mathbf{TS})$ запишем в равносильном виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt\right)\cos(y_k x)\cdot\Delta y_k, \quad (\mathbf{CS})$$

где $y_k = k\pi/l,\ k = 1, 2, \dots,$ и

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}.$$

Предположим теперь, что существует следующий предел:

$$a(y) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos(yt)\, dt. \qquad \text{(A)}$$

Тогда при достаточно больших l можем записать приближенные равенства

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}\, dt \approx a(y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots . \qquad \text{(CS}'\text{)}$$

Подставляя их в формулу (CS), приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a(y_k)\cos(y_k x)\cdot\Delta y_k. \qquad (\mathrm{CS}')$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} a(y)\cos(yx)\,dy$$

по положительной полуоси.

Узлами этой интегральной суммы служат числа y_1, ..., y_k, ..., а расстояние между соседними узлами $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \pi/l$ при $l \to +\infty$ стремится к нулю.

В качестве предельного значения интегральной суммы (CS') при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} a(y) \cos(yx)\, dy,$$

если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси.

В этом случае имеем

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)\,dy.$$

3) Аналогично преобразуется сумма слагае-

мых с синусами в разложении $(\mathbf{TS})$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt\right)\sin(y_k x)\cdot\Delta y_k, \quad (\mathbf{SS})$$

где, как и раньше, $y_k = k\pi/l$, $k = 1, 2, \ldots,$ и

$$\Delta y_k = \frac{\pi}{l} = y_{k+1} - y_k.$$

Предполагая, что существует конечный предел

$$b(y) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin(yt)\, dt, \qquad \text{(B)}$$

записываем при достаточно больших l последовательность приближенных равенств

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}\, dt \approx b(y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Подставляя их в формулу (SS), приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \approx \sum_{k=1}^{+\infty} b(y_k)\sin(y_k x)\cdot\Delta y_k. \qquad (\mathrm{SS}')$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy$$

по положительной полуоси.

Узлами этой интегральной суммы служат числа y_1, ..., y_k, ..., а расстояние между соседними узлами $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \pi/l$ стремится к нулю при $l \to +\infty$.

В качестве предельного значения интегральной суммы (SS') при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy,$$

если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси.

В этом случае имеем

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy.$$

В результате проведенных нами неформальных рассуждений приходим к заключению, что сумма тригонометрического ряда в пределе при $l \to +\infty$ переходит в интеграл вида

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \Big(a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)\Big)\, dy,$$

где функции $a(y)$ и $b(y)$ определяются равенствами (A) и (B).

В частности, $a(y)$ и $b(y)$ зависят от исходной функции $f(x)$. Для того чтобы эту зависимость подчеркнуть, иногда пишут $a = a_f(y)$ и $b = b_f(y)$.

Определение. *Несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \Big(a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)\Big)\,dy, \qquad \text{(AB)}$$

если только он существует, называется интегралом Фурье для исходной функции $f(x)$.

Выясним, для каких именно функций интеграл Фурье существует.

$\mathbf{2^0}$. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Тогда соответствующие ей пределы $(\mathbf{A})$ и $(\mathbf{B})$ заведомо существуют и обозначаются следующим образом

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad (\mathrm{A}')$$

$$b(f;y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt. \qquad (\mathrm{B}')$$

При этом функции $a(f;y)$ и $b(f;y)$ определены на всей числовой прямой и ограничены на своей области определения:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |a(f;y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt,$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |b(f;y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Более того для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ интегралы $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны по переменной y и, как следует из теоремы Римана об осцилляции, удовлетворяют следующим предельным соотношениям на бесконечности:

$$\lim_{y\to\pm\infty} a(f;y) = 0, \qquad \lim_{y\to\pm\infty} b(f;y) = 0.$$

Если же функция $f(x)$ не является абсолютно интегрируемой, то сделанные утверждения о свойствах функций $a(f;y)$ и $b(f;y)$, вообще говоря, неверны.

3^0. Интеграл Фурье существует для функций из более широкого класса нежели абсолютно интегрируемые.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале числовой прямой.*

Для любой локально интегрируемой функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, предел

$$\lim_{l \to +\infty} \int\limits_{-l}^{+l} \varphi(x)\, dx,$$

если он существует, называется интегралом от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\varphi(x)$ *в смысле главного значения*. При этом применяется следующее обозначение:

$$\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\lim_{l\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l}\varphi(x)\,dx.$$

Этот же предел иногда называют *интегралом в смысле Коши*.

Таким образом, формулы (A') и (B') в случае локально интегрируемой функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, принимают следующий вид:

$$a(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad (\mathrm{A}'')$$

$$b(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt. \qquad (\mathrm{B}'')$$

Символ V.P. перед интегралом часто не пишут, что как правило не приводит к недоразумениям.

Пример. *Для локально суммируемой функции* $f(x) = \frac{\sin(\delta x)}{x}$, *где* $\delta > 0$, *найти соответствующие ей интегралы в смысле главного значения* $a(f; y)$ *и* $b(f; y)$.

Решение. Рассматриваемая функция $f(x)$ является четной: $f(-x) = f(x)$. Следовательно, для любого вещественного y произведение $f(x)\sin(yx)$ — это нечетная функция, интеграл от которой по любому симметричному интервалу $(-l, l)$ обязательно равен нулю.

Это означает, что функция $\boldsymbol{b(f;y)}$ тождественно равна нулю.

Далее из четности произведения $\boldsymbol{f(x)\cos(yx)}$ по переменной и определения $(\mathbf{A''})$ имеем

$$\boldsymbol{a(f;y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\delta x)}{x}\cos(yx)\,dx =}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta + y)x}{x}\, dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta - y)x}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(\delta + y) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(\delta - y).$$

Здесь $\mathrm{sgn}\, x = x/|x|$ при $x \neq 0$ и $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$.

Таким образом, функция $a(f; y)$ равна единице при $|y| < \delta$ и равна нулю при $|y| > \delta$. Кроме того $a(f; -\delta) = a(f; +\delta) = 1/2$. $\square$

Отметим, что полученная в предыдущем примере функция $a(f; y)$ разрывна по y. Это ничему не противоречит: функция

$$f(x) = \frac{\sin(\delta x)}{x}$$

локально суммируема, но не является абсолютно интегрируемой на числовой прямой.

4^0. Установим некоторые условия, достаточные для сходимости соответствующего функции $f(x)$ интеграла Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Тогда $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и вопрос о сходимости интеграла Фурье

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(a(f;y)\cos(yx)+b(f;y)\sin(yx)\Big)\,dy$$

сводится к вопросу о существовании предела функции

$$T_\eta(f;x) = \int\limits_0^\eta \Big(a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx)\Big)\,dy \quad (\mathrm{T})$$

при $\eta \to +\infty$.

Подставляя в равенство (T) формулы

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt,$$

$$\boldsymbol{b(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt}$$

получим следующее представление:

$$\boldsymbol{T\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\eta} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))\,dt.} \qquad (\mathbf{T'})$$

Для внутреннего интеграла здесь справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))\,dt\Big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Выполнение этого условия позволяет поменять в формуле (T') порядок интегрирования и получить равенство

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Big(\int\limits_{0}^{\eta} \cos(y(x-t))\,dy\Big)dt.$$

Внутренний интеграл по dy здесь вычисляется явно:

$$\int_0^\eta \cos(y(x-t))\,dy = \frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее и делая замену переменной интегрирования $t = x+\xi$, получаем

$$T\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Воспользовавшись в этом равенстве четностью функции $\frac{\sin \eta\xi}{\xi}$ по переменной ξ, получаем представление

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\xi} \sin(\eta\xi)\, d\xi. \quad (\mathrm{T}'')$$

Определение. *Функция* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет в точке* x_0 *односторонним условиям Дини, если*

1) в этой точке существуют оба односторонних предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$,

2) функции

$$F_+(\xi)=\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi}$$

и

$$F_-(\xi)=\frac{f(x_0-\xi)-f(x_0-0)}{\xi}$$

абсолютно интегрируемы на некотором интервале вида $(0,\delta)$, где $\delta>0$.

Теорема (признак Дини сходимости интеграла Фурье). *Пусть функция* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *абсолютно интегрируема на числовой прямой и удовлетворяет в точке* x_0 *односторонним условиям Дини. Тогда соответствующий этой функции интеграл Фурье в точке* x_0 *сходится и равен величине*

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \eta\xi}{\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \forall\, \eta > 0$$

и представим величину $M_f(x_0)$ в следующем виде

$$M_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{\xi} \sin \eta\xi\, d\xi.$$

Вычитая это равенство из соотношения (T$''$)

и пользуясь определением функций $\boldsymbol{F_{\pm}(\xi)}$, получаем

$$\boldsymbol{T\eta(f;x_0) - M_f(x_0) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big[F_+(\xi) + F_-(\xi)\Big]\sin(\eta\xi)d\xi =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F_+(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F_-(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi.}$$

Каждый из двух интегралов по $\boldsymbol{d\xi}$ в правой части этого равенства представим в виде следующей суммы

$$\int\limits_{0}^{+\infty} F_{\pm}(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi = \int\limits_{0}^{\delta} F_{\pm}(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi}\sin(\eta\xi)d\xi -$$

$$- f(x_0 \pm 0) \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi. \quad (\mathrm{F}_{\pm})$$

В качестве положительного предела интегрирования $\delta > 0$ здесь возьмем параметр из односторонних условий Дини, которым по условию удовлетворяет функция $f(x)$.

Далее, функции $F_{+}(\xi) = \dfrac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi}$ и $F_{-}(\xi) = \dfrac{f(x_0 - \xi) - f(x_0 - 0)}{\xi}$ абсолютно интегрируемы на интервале $(0, \delta)$ и, следовательно, по теореме Римана об осцилляции имеют место предельные равенства

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\delta} F_{\pm}(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi = 0.$$

Из условия, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой заключаем, что отношения $\frac{f(x_0+\xi)}{\xi}$ и $\frac{f(x_0-\xi)}{\xi}$ на интервале $(\delta, +\infty)$ также абсолютно интегрируемы:

$$\left| \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi} \, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x_0 \pm \xi)| \, d\xi < +\infty.$$

Применяя к этим отношениям теорему Римана об осцилляции, получаем предельные равенства

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi} \sin(\eta\xi) d\xi = 0.$$

Для третьего интеграла в разложении $(\mathbf{F}_{\pm})$ справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta\eta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=0.$$

Последнее равенство справедливо в силу сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $\eta \to +\infty$ существует предел суммы в правой части равенств $(\mathbf{F}_{\pm})$ и этот предел равен нулю.

Следовательно, предел при $\eta \to +\infty$ разности $T_{\eta}(f; x_0) - M_f(x_0)$ также существует и равен нулю. $\square$

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x_0-t))\,dt = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

называемое формулой Фурье для функции f в точке x_0.

Доказательство. Несобственный интеграл в левой части формулы Фурье по определению представляет собой предел при $\eta \to +\infty$ функции

$$T_\eta(f;x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\eta dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x_0-t))\,dt.$$

Но этот же предел, как уже доказано, равен полусумме $M_f(x_0)$. В силу единственности предела записанная выше формула Фурье действительно справедлива. $\square$

В частности, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна всюду на числовой прямой, а также удовлетворяет в точке x односторонним условиям Дини, то имеет место разложение

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(y(x-t))\, dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Это равенство называется *представлением* *функции* $f(x)$ *интегралом Фурье*, или же формулой Фурье для функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица положительного порядка $\alpha > 0$, то в этой точке $f(x)$ удовлетворяет и односторонним условиям Дини.

Следствие. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема всюду на числовой прямой и удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица положительного порядка, то ее интеграл Фурье в этой точке сходится к значению $f(x_0)$.*

5^0. Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема на числовой прямой и при этом существуют соответствующие ей интегралы в смысле главного значения:

$$\boldsymbol{a(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt,}$$

$$\boldsymbol{b(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt.}$$

Тогда есть возможность определить следующую комплекснозначную функцию:

$$\boldsymbol{c(f;y) = \frac{1}{2}(a(f;y) - ib(f;y)) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2\pi}\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt.} \quad \mathbf{(FT)}$$

Последнее равенство здесь справедливо в силу линейности операций предельного перехода и интегрирования.

Домножая обе части первого из равенств

$(\mathbf{FT})$ на функцию e^{iyx} и интегрируя результат по переменной y из интервала $(-\eta, \eta)$, получаем соотношение

$$\int_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{+\eta} (a(f;y) - ib(f;y))(\cos(yx) + i\sin(yx))\,dy.$$

Раскрывая в выражении под интегралом скобки и учитывая, что в силу четности $\boldsymbol{a(f;y)}$ и нечетности $\boldsymbol{b(f;y)}$ произведения $\boldsymbol{a(f;y)\sin(yx)}$ и $\boldsymbol{b(f;y)\cos(yx)}$ представляют собой нечетные функции переменной $\boldsymbol{y}$, запишем последнее равенство в следующем виде:

$$\int\limits_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\eta}^{+\eta} (a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx))\,dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\eta} (a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx))\,dy.$$

Переходя здесь к пределу при $\eta \to +\infty$ и учитывая, что правая часть переходит при этом в интеграл Фурье для функции f, заключаем, что этот самый интеграл Фурье представим в виде следующего интеграла в смысле главного значения:

$$\int\limits_0^{+\infty} (a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx))\,dy =$$

$$= \mathrm{V.P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(f;y)e^{iyx}\,dy. \quad (\mathrm{CFT})$$

Определение. *Интеграл* (CFT), *в котором функция* $c(f;y)$ *задается формулой* (FT), *называется интегралом Фурье в комплексной форме.*

Теорема (представление функции интегралом Фурье). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда в любой точке x числовой прямой выполняется равенство*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \Big) e^{iyx}\, dy, \qquad (\mathrm{CFT}')$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Заметим, что правые части формул ($\mathbf{CFT'}$) и ($\mathbf{CFT}$) совпадают друг с другом. Это означает, что правая часть доказываемой формулы ($\mathbf{CFT'}$) является интегралом Фурье рассматриваемой функции в обычной (вещественной) форме. Но для функций, удовлетворяющих условиям теоремы, интеграл Фурье в любой точке вещественной прямой равен значению порождающей его функции в этой же точке. $\square$

Интеграл в правой части равенства ($\mathbf{CFT'}$) называют *повторным интегралом Фурье для функции* f. Представимость функции повторным интегралом Фурье впервые была установлена Коши.

Заметим, что функция $c(f;y)$ удовлетворяет для вещественной функции f следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_{-\eta}^{+\eta} \overline{c}(f;y)e^{-iyx}\,dy = \int\limits_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy,$$

где $\eta > 0$, а $\overline{c}(f;y)$ обозначает комплексно сопряженную к $c(f;y)$ функцию. Переходя в этом интегральном тождестве к пределу при

$\eta \to +\infty$ и пользуясь формулой $(\mathbf{CFT'})$, получаем в пределе еще одно полезное равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\, dt \Big) e^{-iyx}\, dy. \qquad (\mathbf{CFT''})$$

Отличие этой формулы от $(\mathbf{CFT'})$ — в показателях экспонент под интегралами в правой части.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой пря-*

мой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда, если $f(x)$ — четная, то в любой точке x числовой прямой выполняется равенство

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos yt \, dt \Big) \cos(xy) \, dy.$$

Если же $f(x)$ — нечетная, то справедлива *формула*

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin yt \, dt \Big) \sin(xy) \, dy.}$$