Вопрос №1

Арифметика вещественных чисел

Арифметические операции на множестве вещественных чисел вводятся как естественное расширение этих же бинарных операций с множества рациональных чисел на множество всевозможных десятичных дробей. Основным инструментом в построении такого типа расширений служит предельный переход в результатах арифметических операций, совершенных над соответствующими десятичными приближениями исходных вещественных чисел.

Определение суммы и разности двух вещественных чисел

Определение. Суммой двух вещественных чисел, представимых бесконечными десятичными дробями $\alpha = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots = \{\alpha_n\}$, $\beta = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots = \{\beta_n\}$ и удовлетворяющих условию Коши, обозначаемых как $\alpha = [\alpha_n]$ и $\beta = [\beta_n]$, называют число $\gamma = [\gamma_n]$, определенное суммой последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$: $\gamma = \alpha + \beta = [\alpha_n] + [\beta_n] = [\alpha_n + \beta_n]$. Вещественное число $\gamma = \alpha + \beta$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall \alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in \mathbb{Q};\ (\alpha' \le \alpha \le \alpha'') \wedge (\beta' \le \beta \le \beta'')\ \Rightarrow (\alpha' + \beta' \le \alpha + \beta \le \alpha'' + \beta'') \Rightarrow (\alpha' + \beta' \le \gamma \le \alpha''$$

Таким образом, сумма двух вещественных чисел α и β - это такое вещественное число γ, которое содержится между всеми суммами вида $\alpha' + \beta'$ с одной стороны и всеми суммами вида $\alpha'' + \beta''$ с другой.

Нахождение разности двух вещественных чисел по аналогии с разностью рациональных чисел вводится как действие, обратное нахождению суммы двух вещественных чисел (разность чисел α и β - это такое число γ, что $\beta + \gamma = \alpha$).

Теорема. Для любых вещественных чисел α и β их сумма γ существует и единственна.

Доказательство.

1. **Существование суммы.** Из условий $(\alpha' \le \alpha \le \alpha'')$ и $(\beta' \le \beta \le \beta'')$ в силу транзитивности знака неравенства следует, что $\alpha' \le \alpha''$ и $\beta' \le \beta''$. Отсюда, используя свойства неравенств рациональных чисел, получаем $\alpha' + \beta' \le \alpha'' + \beta''$. Пусть E_1 - множество чисел вида $\alpha' + \beta'$, E_2 - множество чисел вида $\alpha'' + \beta''$. Тогда по теореме

об отделимости числовых множеств существуют числа $\sup\{E_1\}$ и $\inf\{E_2\}$ и выполняется неравенство $\alpha' + \beta' \le \sup\{E_1\} \le \inf\{E_2\} \le \alpha'' + \beta''$. Поэтому число $\gamma = \sup\{E_1\}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha' + \beta' \le \gamma \le \alpha'' + \beta'', \tag{1}$$

то есть γ - сумма чисел α и β.

2. **Единственность суммы.** Пусть γ и γ' удовлетворяют условиям 1 и пусть $\gamma \le \gamma'$. Тогда $\alpha' + \beta' \le \gamma \le \gamma' \le \alpha'' + \beta''$. Тогда докажем, что $\gamma = \gamma'$. Заметим, что неравенства 1 будут выполняться, если в качестве α' и α'' (β' и β'') взять $n+1$-е десятичные приближения с недостатком (с избытком) соответственно для чисел α и β, то есть

$$\underline{\alpha_{n+1}} \le \alpha \le \overline{\alpha_{n+1}},\ \underline{\beta_{n+1}} \le \beta \le \overline{\beta_{n+1}}. \tag{2}$$

Так как сумма вещественных чисел α и β существует, то из условий 2 с учетом неравенства $\gamma \le \gamma'$ получаем

$$\alpha'_n = \underline{\alpha_{n+1}} + \underline{\beta_{n+1}} \le \gamma \le \gamma' \le \overline{\alpha_{n+1}} + \overline{\beta_{n+1}} = \beta'_n, \tag{3}$$

где

$$\beta'_n - \alpha'_n = \overline{\alpha_{n+1}} - \underline{\alpha_{n+1}} + \overline{\beta_{n+1}} - \underline{\beta_{n+1}} = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}. \tag{4}$$

Последовательности $\{\alpha'^n\}$ и $\{\alpha''^n\}$ удовлетворяют условиям 3 и 4 и выполняется равенство $\gamma = \gamma'$.

Определение произведения и частного двух вещественных чисел

Определение. Произведением двух положительных вещественных чисел α и β называют такое вещественное число γ, что для любых рациональных чисел α', α'', β', β'', удовлетворяющих условиям

$$0 < \alpha' \le \alpha \le \alpha'',\ 0 < \beta' \le \beta \le \beta'' \tag{5}$$

выполняется неравенство

$$\alpha' \cdot \alpha'' \le \gamma \le \beta' \cdot \beta''. \tag{6}$$

Теорема. Произведение любых двух положительных вещественных чисел существует и единственно.

Доказательство.

1. **Существование произведения.** По аналогии с суммой.

2. **Единственность произведения.** Пусть α_0 - целая часть числа α, а β_0 - целая часть числа β; $\underline{\alpha_m}$ и $\underline{\beta_m}$ - десятичные приближения с недостатком, $\overline{\alpha_m}$ и $\overline{\beta_m}$ - десятичные приближения с избытком для чисел α и β соответственно. Тогда $\underline{\alpha_m} \leq \alpha \leq \overline{\alpha_m} \leq \alpha_0 + 1$, $\underline{\beta_m} \leq \beta \leq \overline{\beta_m} \leq \beta_0 + 1$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_0 + \beta_0 + 2 < 10^k$. Тогда для любого m справедливо неравенство
$$\underline{\alpha_m} + \overline{\beta_m} < 10^k, \tag{7}$$
так как $\underline{\alpha_m} \leq \alpha_0 + 1$ и $\beta_m \leq \beta_0 + 1$. Предположим, что существуют γ и γ', удовлетворяющие условию 6, причем $\gamma \leq \gamma'$. Возьмем в неравенствах 5 и 6 в качестве чисел α', β', α'', β'' соответственно $\underline{\alpha_{n+k}}$, $\overline{\alpha_{n+k}}$, $\underline{\beta_{n+k}}$, $\overline{\beta_{n+k}}$ и обозначим $\alpha'_n = \underline{\alpha_{n+k}\beta_{n+k}}$ и $\beta'_n = \overline{\alpha_{n+k}}\overline{\beta_{n+k}}$. Тогда, используя 6 и 7, получаем $\beta'_n - \alpha'_n = (\overline{\alpha_{n+k}} - \underline{\alpha_{n+k}})\overline{\beta_{n+k}} + \underline{\alpha_{n+k}}(\overline{\beta_{n+k}} - \underline{\beta_{n+k}}) = \frac{\overline{\beta_{n+k}}}{10^{n+k}} + \frac{\underline{\alpha_{n+k}}}{10^{n+k}} \leq \frac{10^k}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Получаем $\gamma = \gamma'$.

Произведение любых вещественных чисел α и β определяется следующими правилами:

1. Если $\alpha = 0$, то $\alpha\beta = 0$ для любого $\beta \in \mathbb{R}$

2. Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|$

3. Если $\alpha > 0$, $\beta < 0$, или $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то $\alpha\beta = -|\alpha| \cdot |\beta|$.

Деление определяется как действие, обратное умножению (частное от деления α на $\beta \neq 0$ - это такое число γ, что $\beta \cdot \gamma = \alpha$).

Предел суммы, разности и произведения последовательностей

Симметричные окрестности на числовой прямой, эквивалентное определение предела последовательности

Определение. Симметричной (открытой) окрестностью точки a называется произвольный интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = O_\varepsilon(a)$ $(\varepsilon > 0)$, для которого точка a является серединой. Этот интервал еще называют ε-окрестностью точки a. Любая окрестность точки a содержит бесконечно много симметричных окрестностей и наоборот.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число n_ε, что все члены последовательности x_n с номерами n, большими n_ε, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В символьной форме это определение имеет вид

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon\ :\ |x_n - a| < \varepsilon. \tag{8}$$

Эквивалентное определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если для любой окрестности $O(a)$ точки a существует число n_O такое, что для любого $n > n_O$ выполняется $x_n \in O(a)$.

Пространство последовательностей и операции на нем

Пусть X - множество всевозможных вещественных последовательностей. На X вводятся следующие арифметические операции:

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$ в частности, последовательность можно умно-
$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
жать на вещественное число: $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$.

Предел суммы, разности и произведения

Операция предельного перехода на X обладает важным свойством линейности: $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (справедливо, если пределы существуют и конечны).

Также верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (справедливо, если пределы существуют и конечны).

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства

Определение. Любая последовательность, сходящаяся к нулю, называется бесконечно малой.

Определение. $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Замечание. Если $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел $\pm\infty$, то она бесконечно большая.

Обратное неверно: например, $a_n = (-1)^n n$ - бесконечно большая, но не имеет предела.

Свойство. $\{\alpha_n\}$, где $\alpha \neq 0$ является бесконечно малой $\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ является бесконечно большой.

Доказательство. Пусть x_n - бесконечно малая. Докажем, что $y_n = \frac{1}{x_n}$ - бесконечно большая. По условию, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$. по определению, $\forall\varepsilon > 0 \; : \; \exists N(\varepsilon) \; : \; \forall n \geq N \; : \; |x_n < 0| < \varepsilon$, или $|x_n| < \varepsilon$.

Можно перейти к неравенству $|\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\varepsilon}$. То есть условие сводится к тому, что для любого $\varepsilon_{\text{modified}}$ можно подобрать номер N, после которого элементы $\frac{1}{x_n}$ будут больше его.

Вопрос №2

Скалярные и векторные величины на плоскости и в пространстве

Определение. Скалярными величинами называют величины, имеющие численное значение, но не имеющие направления. Примеры: длина, плотность, масса.

Определение. Векторными величинами, или векторами, называют величины, имеющие и численное значение, и направление. Примеры: скорость, сила, перемещение.

Геометрически векторную величину можно изобразить с помощью направленного отрезка, длина которого в заданном масштабе измерения равна числовому значению векторной величины, а направление совпадает с направлением этой величины.

Определение 1. Длиной (модулем) вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка AB. Она обозначается как $|\vec{AB}|$.

Определение 2. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. У нулевого вектора начало совпадает с концом. Нулевой вектор направления не имеет.

Определение 3. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Поскольку нулевой вектор может иметь произвольное направление, то разумно считать его коллинеарным любому ненулевому вектору.

Определение 4. Если два ненулевых вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны, а их лучи AB и CD сонаправлены, то данные векторы называются сонаправленными. Этот факт обозначается так: $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$. Если же эти лучи не являются сонаправленными, то векторы называются противоположно направленными. Этот факт обозначается так: $\vec{AB} \updownarrow \vec{CD}$.

Определение 5. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

Например, пусть $ABCD$ - ромб, векторы $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$ равны, так как $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$, $AD \parallel BC$ и отрезки $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$ направлены в одну сторону. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ не равны друг другу, так как прямые AB и AD не являются параллельными. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ также не равны, поскольку имеют противоположные направления.

Определение 6. Векторы в пространстве называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости. Два любые вектора в пространстве компланарны.

Например, пусть $ABCDEFGH$ - параллелепипед, векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{FE}$, $\vec{FG}$, $\vec{HG}$, $\vec{HE}$ компланарны.

Угол между векторами

Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим эти векторы от некоторой точки O, то есть построим векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, такие, что $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$. Тогда величина внутреннего угла AOB треугольника AOB называется углом между данными векторами и обозначается $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. По определению угол между векторами лежит в промежутке от $0°$ до $180°$. Угол между коллинеарными векторами равен $0°$, если они направлены в одну сторону, и $180°$, если они направлены противоположно.

Если угол между векторами равен $90°$, то эти векторы называются перпендикулярными или ортогональными.

Проекция вектора на ось

Определение. Осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица длины.

Определение. Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора на ось называется число, равное произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью. Проекция вектора $\vec{a}$

на ось l обозначается символом $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a}$. Таким образом, по определению $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi$, где ϕ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ (единичным положительно направленным вектором) острый, то проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна длине отрезка OA_1, где точка A_1 проекция точки A на прямую l: $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi = |\vec{OA}|\cos\angle AOA_1 = \vec{OA_1}$. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ тупой, то проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна длине отрезка OA_1, взятой со знаком минус $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi = |\vec{a}|\cos\angle BOA = -|\vec{a}|\cos\angle A_1OA = -\vec{OA_1}$. Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен оси l, то его проекция равна нулю.

Свойства проекций:

1. $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi$, где ϕ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$
2. $\mathrm{Pr}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Pr}_l\,\vec{a} + \mathrm{Pr}_l\,\vec{b}$
3. $\mathrm{Pr}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_l\,\vec{a}$

Сумма векторов

Определение (правило треугольника). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположены так, что конец вектора $\vec{a}$ совпадает с началом вектора $\vec{b}$, то суммой $\vec{a}+\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$.

Теорема (правило параллелограмма). Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одному началу. Построим на этих векторах параллелограмм, рассматривая их как смежные стороны. Тогда вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец - с концом диагонали параллелограмма, выходящей из этого начала, равен $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. По правилу треугольника, с учетом определения равенства векторов, получим $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$.

Определение. Сумма нескольких векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ - это вектор, получающийся после ряда последовательных сложений: к вектору $\vec{a_1}$ прибавляется вектор $\vec{a_2}$, к полученному вектору прибавляется $\vec{a_3}$ и т.д.

Определение (правило многоугольника (или правило цепи)). Из произвольного начала O строим вектор $\vec{OA_1} = \vec{a_1}$, из точки A_1, как из начала, строим вектор $\vec{A_1A_2} = \vec{a_2}$, из точки A_2 строим вектор $\vec{A_2A_3} = \vec{a_3}$ и т.д. Вектор $\vec{OA_n}$ есть сумма векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.

Определение (правило параллелепипеда). Сумма трех некомпланарных векторов равна вектору, изображаемому направленной диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства сложения векторов:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность)

Разность векторов

Определение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одному началу, то вектор $\vec{c}$ с началом в конце вектора $\vec{a}$ и с концом в конце вектора $\vec{b}$ называется разностью $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

Произведение вектора на число.

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число и произведением любого вектора на нуль является нулевой вектор.

Свойства:

- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda + \mu)\vec{a}$
- $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

Теорема (необходимое и достаточное условие коллинеарности). Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Прямоугольная система координат на плоскости

Прямоугольную систему координат образуют две взаимно перпендикулярные оси на плоскости с общим началом. Эти оси называются осями координат, а общее начало - началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (горизонтальная прямая) и обозначают Ox, другую - осью ординат (вертикальная прямая) и обозначают Oy. Единичные векторы осей обычно обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (единичные ортогональные векторы).

Определение 1. Проекции вектора на оси координат называются координатами вектора. Если через x_a и y_a обозначить координаты вектора $\vec{a}$, то согласно определению $x_a = \mathrm{Pr}_{O_x}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})$, $y_a = \mathrm{Pr}_{O_y}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})$. Так же вектор $\vec{a}$ можно представить в следующем виде $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$ Данное равенство означает, что любой вектор можно разложить по двум взаимно перпендикулярным векторам. Более общее утверждение заключается в том, что любой вектор на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

Прямоугольная система координат в пространстве

В пространстве прямоугольная декартова система координат образуется тремя взаимно перпендикулярными осями с общим началом. Одну из осей называют осью абсцисс и обозначают Ox, другую - осью ординат и обозначают Oy, третью - осью аппликат и обозначают Oz. Единичные векторы осей Ox, Oy и Oz обычно обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ соответственно. Координатами вектора в пространстве называются его проекции на оси координат.

Пусть в пространстве задан вектор $\vec{a}$ с координатами x_a, y_a и z_a, тогда справедливо равенство $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$. Данное равенство означает, что любой вектор в пространстве можно разложить по трем взаимно перпендикулярным векторам. Более общее утверждение заключается в том, что любой вектор в пространстве можно разложить по трём некомпланарным векторам.

Координаты точки

Пусть в пространстве имеется декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки A координаты вектора $\vec{OA}$ называются координатами точки A. Вектор $\vec{OA}$ называется радиус-вектором точки A. Следовательно, координаты точки - это координаты ее радиус-вектора. Координаты точки A записывают обычно в круглых скобках рядом с буквой, ее обозначающей $A(x, y, z)$.

Координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала $\vec{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$.

Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении

Требуется разделить данный отрезок AB в заданном отношении $m : n$, т.е. найти координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$ отрезка AB, такой, что $\frac{|\vec{AM}|}{|\vec{MB}|} = \frac{m}{n}$. Очевидно, что точка M делит отрезок AB в данном отношении $m : n$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{AM} = \frac{m}{n}\vec{MB}. \tag{9}$$

Выразим векторы $\vec{AM}$ и $\vec{MB}$ через радиус-векторы $\vec{OA}$, $\vec{OM}$ и $\vec{OB}$. Тогда уравнение 9 примет вид $\vec{OM} - \vec{OA} = \frac{m}{n}(\vec{OB} - \vec{OM})$. Отсюда

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB}. \tag{10}$$

Формула 10 дает решение задачи, так как выражает радиус-вектор искомой точки M, делящей отрезок AB в заданном отношении $m : n$ через радиус-векторы заданных точек A и B. Векторное равенство 10 равносильно трем числовым равенствам: $x_M = \frac{n}{m+n}x_A + \frac{m}{m+n}x_B$, $y_M = \frac{n}{m+n}y_A + \frac{m}{m+n}y_B$, $z_M = \frac{n}{m+n}z_A + \frac{m}{m+n}z_B$.

В частном случае, когда M является серединой отрезка AB данная формула принимает вид $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$, $z_M = \frac{z_A+z_B}{2}$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если из двух векторов хотя бы один нулевой, то скалярное произведение этих векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}$. По определению $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$, где ϕ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то скалярное произведение принимает вид $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (коммутативность)

2. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$ (числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения).

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (дистрибутивность)

Теорема. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и, значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$.

Наоборот, если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то из равенства $\vec{a}\vec{b}\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ следует, что $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, так как $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Следовательно, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть имеется некоторая прямоугольная декартова система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ и пусть заданы векторы $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Так как данные векторы можно разложить по единичным векторам, получаем $\vec{a}\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) = x_a x_b \vec{i}^2 + y_a y_b \vec{j}^2 + z_a z_b \vec{k}^2 + x_a y_b \vec{i}\vec{j} + x_a z_b \vec{i}\vec{k} + y_a x_b \vec{j}\vec{i} + y_a z_b \vec{j}\vec{k} + z_a x_b \vec{k}\vec{i} + z_a y_b \vec{k}\vec{j}$.

Так как $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0$, мы нашли что $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Другими словами, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Определители второго и третьего порядка

Определитель второго порядка

Рассмотрим таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, a_2, b_2 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей второго порядка, Числа a_1, b_1, a_2, b_2 - элементами матрицы.

Число, равное $a_1 b_2 - a_2 b_1$ называется определителем данной матрицы или определителем второго порядка и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей третьего порядка.

Определитель третьего порядка выражается через определители второго порядка следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Раскрывая определители второго порядка по 11, находим, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2. \tag{12}$$

Некоторые свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если строки (или столбцы) этого определителя поменять местами, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

2. Перестановка двух строк (или столбцов определителя) равносильна умножению его на число (-1), то есть такая перестановка меняет знак определителя на противоположный

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю

4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число k равносильно умножению определителя на это число k

5. если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю

6. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (правило Крамера)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{14}$$

Коэффициенты левых частей уравнений системы образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Теорема. Система уравнений 14 имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

В этом случае решение находят по правилу Крамера:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A},\ y = \frac{\det A_2}{\det A},\ z = \frac{\det A_3}{\det A}, \tag{16}$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 равны $A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$, т.е. эти матрицы получаются из матрицы системы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбца свободных членов.