# Содержание



# 1 Определение ортогональных и ортонормированных систем

Пусть $X$ — это Евклидово векторное пространства. Это означает, что

1. $X$ — конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$;

2. В $X$ задано скалярное произведение $(x, y) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X, y \in X$.

По определению справедливы соотношения

1. $(x, x) > 0$ $\forall x \in X$, $x \neq 0$, иначе $(x, x) = 0$ (то есть при $x = 0$);

2. $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);

3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В частности, если $X = \mathbb{R}^n$, то $\dim X = n$ и для стандартного базиса $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ этого линейного пространства справедливы соотношения

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \\ y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \end{array}\right| \Rightarrow (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Наличие скалярного произведения в $X$ позволяет вводить в нем метрические соотношения. Длиной вектора $v \in X$ называется вещественное число $|v| = \sqrt{(v, v)}$. Длина $v$ равна нулю $\Leftrightarrow v = 0$, в противном случае длина строго положительна

$\forall x, y \in X$ справедливо неравенство Коши–Буняковского:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \qquad ((C - B))$$

причем равенство здесь возможно в том и только том случае, если векторы $x$ и $y$ линейно зависимы (Коллинеарны). Из неравенства $(C - B)$ следует, в частности, что тригонометрическое уравнение $\cos(\varphi) = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$, $\forall x \neq 0, y \neq 0$ имеет на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ ровно один корень $\varphi$. Именно этот корень называется углом между ненулевыми векторами $x$ и $y$.

**Определение**

Векторы $x$ и $y$ ортогональны друг другу ($x \perp y$), если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Если в $X$ имеется система $x_1, x_2, \ldots, x_m$ попарно ортогональных векторов ($x_i \perp x_j$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$), то справедлива теорема Пифагора

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_m|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x^m|^2.$$

Система: $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} (x_i, x_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i, x_i)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ попарно ортогональны и образуют канонический (стандартный) базис. При этом $|e_j| = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Оказывается, что базисы с аналогичными свойствами существуют и в любом Евклидовом пространстве $X$.

**Определение**

Базис

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \qquad ((B))$$

Евклидова векторного пространства $X$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Если при этом $|e_i| = \sqrt{(e_i, e_j)} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то базис $(B)$ называется ортонормированным.

Любой ортогональный базис $(B)$ преобразуется в ортонормированный с помощью замены ${e'}_j = \frac{1}{|e_j|} e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При этой замене имеем $({e'}_i, {e'}_j) = \frac{1}{|e_i|} \cdot \frac{1}{|e_j|} (e_i, e_j) = \delta_i^j$, где $\delta_i^j$ — символ Кронекера, $\delta_i^j = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j \end{cases}$.

# 2 Теорема о линейной независимости ортогональной системы

**Теорема (линейная независимость ортогональных векторов)**

Любые ненулевые взаимно ортогональные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ из $X$ линейно независимы.

**Доказательство**

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ взаимно ортогональны; $|e_j| \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; Предположим, что имеется какая-то линейная комбинация

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m = 0, \tag{(1)}$$

в которой не все коэффициенты $\alpha_j$ нулевые. Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$. Тогда, домножив обе части равенства (1) скалярно на $e_k$, получим $0 = (0, e_k) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m, e_k) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j (e_j, e_k) = \alpha_k \cdot (e_k, e_k) = \alpha_k |e_k|^2$.

По условию вектор $e_k \neq 0 \Rightarrow |e_k|^2 > 0$. Следовательно, из равенства $0 = \alpha_k \cdot |e_k|^2$ вытекает, что $\alpha_k = 0$. Но это противоречит первоначальному выбору номера $k$.

Таким образом, должно быть: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, т.е. система $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ линейно независима. $\square$

**Следствие**

Если в условиях теоремы $\dim x = n$, а число $m$ векторов в ортогональной системе $(e_1, e_2, \ldots, e_m) = n$, то есть $m = n$, то $(B)$ — это ортогональный базис исходного Евклидова векторного пространства $X$.

Как мы докажем, во всяком $n$-мерном пространстве $X$ ортогональные базисы существуют.

# 3 Координаты вектора в ортогональном базисе

Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис $X$. Тогда координаты любого вектора

$$v = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n \qquad ((2))$$

в этом базисе находятся особенно просто.

Домножая скаляр на обе части равенства (2) на базисный вектор $e_k$, получаем $(v, e_k) = (\sum\limits_{j=1}^{n} c_je_j, e_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(e_j, e_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot \delta_j^k = c_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Это и есть искомое выражение координат вектора в ортонормированном базисе.

В Евклидовом пространстве $X$ линейная оболочка $\langle e \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \operatorname{span}\{e\}$ для любого ненулевого вектора $e$ называется прямой. Если $|e| = 1$, то величина $(x, e)$ называется проекцией вектора $x$ на прямую $\langle e \rangle_{\mathbb{R}}$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис $X$. Тогда прямые $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ называются осями координат в $X$.

Таким образом, координаты любого вектора $v \neq 0$ в ортонормированном базисе совпадают с проекциями $v$ на оси координат, соответствующих этому базису.

# 4 Линейные подпространства Евклидовых пространств и ортогональные дополнения

Пусть $X_1$ — линейное подпространство $X$, то есть $X_1 \subset X$ и при этом

1. $\forall x, y \in X_1 \Rightarrow x + y \in X_1$;
2. $\forall x \in X_1, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in X_1$.

Если $X_1$ — линейное подпространство $X$, то имеет место неравенство

$$\dim X_1 \leq \dim X.$$

Если $\dim X_1 < \dim X$, то $X_1 \neq X$ и называется собственным подпространством $X$.

*Пример.* Пусть $v \in X$, $v \neq 0$. Множество $\{u \in X \colon u \perp v\}$ является линейным подпространством $X$. Пусть $x \perp v$ и $y \perp v$. Тогда $(\alpha x + \beta y, v) =$

$\alpha(x,v) + \beta(y,v) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \perp v$. Пространство $\{u \in X\colon u \perp v\}$ называется ортогональным дополнением к $v$.

### Определение

Вектор $v \in X$ ортогонален подпространству $X_1 \subset X$, если $v \perp u \; \forall u \in X_1$. Множество всех векторов из $X$, ортогональных заданному подпространству $X_1 \subset X$, является подпространством $X$. Для этого подпространства используется специальное обозначение $X_1^{\perp}$.

### Определение

Пространство $X_1^{\perp}$ называют ортогональным дополнением к $X_1$ в пространстве $X$.

# 5 Процесс Грама–Шмидта. Следствие о дополняемости ортогональной системы до ортогонального базиса

### Теорема (процесс ортогонализации)

Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ — система из $m$ линейно независимых векторов Евклидова пространства $X$. Тогда существует ортонормированная система векторов $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$, обладающая тем свойством, что линейные оболочки $L_i = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ и ${L'}_i = \mathrm{span}\{{e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_i\}$ совпадают при всех $i = 1, 2, \ldots, m$; $m \leq n$.

### Доказательство

Построение ортонормированной системы $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_m)$ с нужными свойствами проведем по индукции.

Первый вектор зададим равенством ${e'}_1 = \lambda e_1$, где $\lambda = \frac{1}{|e_1|}$. Тогда $|{e'}_1| = 1$ и при этом $L_1 = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle {e'}_1 \rangle_{\mathbb{R}} = {L'}_1$.

Предположим, что имеется ортонормированная система $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_k)$ со свойством $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_i\} = \mathrm{span}\{{e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_i\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ ($\Leftrightarrow L_i = L$; для $i = 1, 2, \ldots, k$).

Построим в этих предположениях следующий вектор ${e'}_{k+1}$ — искомая система. Заметим, что $e_{k+1}$ исходной системы в подпространстве $L_k = {L'}_k$ не содержится (иначе $e_{k+1}$ представим линейной комбинацией векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, что противоречит исходному условию о линейной независимости векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1})$). Рассмотрим множество векторов вида

$$v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i {e'}_i, \ \ \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{(3)}$$

Для любого набора скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ имеет место равенство $L_{k+1} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k; v\}$. Оказывается, что скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ в формуле (3) для вектора $v$ можно выбрать таким образом, что вектор $v$ будет ортогонален векторам $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_k)$, то есть ортогонален пространству ${L'}_k$. Искомые значения скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ищем из системы условий $(v, {e'}_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Подставляя сюда вместо $v$ разложение (3), получаем $(e_{k+1}, {e'}_j) - (\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i {e'}_i, e_j) = (e_{k+1}, {e'}_j) - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i ({e'}_i, {e'}_j) = (e_{k+1}, {e'}_j) - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i^k = (e_{k+1}, {e'}_j) - \lambda_j = 0$; $j = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, взяв $\lambda_j = (e_{k+1}, {e'}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, получим вектор $v_* = e_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k} (e_{k+1}, {e'}_j) {e'}_i$, обладающий свойствами:

1. $v_* \neq 0$;
2. $v_* \perp {L'}_k$;
3. $L_{k+1} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k; v_*\}$.

Возьмем теперь ${e'}_{k+1} = \mu v_*$, где $\mu = \frac{1}{|v_*|}$. Тогда система $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_k, {e'}_{k+1})$ ортонормированная и при этом $L_{k+1} = {L'}_{k+1}$.

Заключаем теперь, что теорема верна в соответствии с принципом математической индукции. $\square$

Процесс ортогонализации, примененный при доказательстве предыдущей теоремы, носит название процесса Грама–Шмидта. Подчеркнем, что этот процесс конструктивен.

**Следствие**

Всякую ортонормированную систему векторов Евклидова пространства $X$ можно дополнить до ортонормированного базиса $X$.

**Доказательство**

Пусть имеется ортонормированная система $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ пространства $X$. Это линейно независимая система. Как уже доказано ранее, любую такую систему можно дополнить до базиса $(e_1, e_2, \dots, e_m; e_{m+1}, \dots, e_n)$ пространства $X$. Этот базис может и не быть ортонормированным. Однако к нему возможно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта. В итоге получится ортонормированный базис вида $(e_1, e_2, \dots, e_m; {e'}_{m+1}, \dots, {e'}_n)$. $\square$

В частности, любой ненулевой вектор $v$ Евклидова пространства $X$ можно нормировать и дополнить затем до ортогонального базиса пространства $X$.