1 Adjacency matrix of a binary relation, Floyd-Warshall algorithm

Определение

Любое отношение r на конечном множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, можно представить в виде бинарной матрицы **смежности** $M(r) = (m_{ij} | i, j \leq n)$, определённой следующим образом:

$$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in r$$

Пример матричного представления

Для отношения $r = \{(a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$ матрица $M(r)$ будет выглядеть так:

$$M(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Алгоритм (Флойда-Уоршелла)

Дано отношение r на конечном множестве A и $M(r)$ - матрица смежности, его транзитивное замыкание может быть вычислено по следующему алгоритму. Вначале инициализируем матрицу `W` элементами из $M(r)$. Затем мы перебираем k и индексы i, j от 1 до n, где n - количество элементов в A, и изменяем `W` следующим образом:

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      W[i][j] = W[i][j] or (W[i][k] and W[k][j])
```

2 Modelling of recursion with Y-combinator

Рекурсия в λ-исчислении

Напомним, что Y-комбинатор: $Y = \lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))$ является комбинатором неподвижной точки $Yf \equiv f(Yf)$. Используя Y можно смоделировать рекурсивный вызов функции. В качестве примера возьмем функцию, вычисляющую факториал. Определим

$$F = \lambda fx.(IF\ (ISZERO\ x)\ \underline{1}\ (MULT\ x\ (f\ (PRED\ x))))$$

Тогда функция $FACT = Y\ F$ будет представлять факториал:

$$FACT\underline{n} = \underline{n!}$$

Посмотрим, как работает рекурсия с Y-комбинатором на примере факториала. Для этого вычислим 3!.

$$FACT\ \underline{3} = Y\ F\ \underline{3} \Rightarrow F\ (Y\ F)\ \underline{3} \Rightarrow$$

$$(\lambda fx.(IF\ (ISZERO\ x)\ \underline{1}\ (MULT\ x\ (f\ (PRED\ x))))\ (Y\ F)\ \underline{3} \Rightarrow$$
$$IF\ (ISZERO\ \underline{3})\ \underline{1}\ (MULT\ \underline{3}\ ((Y\ F)\ (PRED\ \underline{3}))) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (Y\ F\ (PRED\ \underline{3})) \Rightarrow MULT\ \underline{3}\ (F\ (Y\ F)\ \underline{2}) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (\lambda fx.(IF\ (ISZERO\ x)\ \underline{1}\ (MULT\ x\ (f\ (PRED\ x))))\ (Y\ F)\ \underline{2}) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (IF\ (ISZERO\ \underline{2})\ \underline{1}\ (MULT\ \underline{2}\ ((Y\ F)\ (PRED\ \underline{2})))) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (MULT\ \underline{2}\ (F\ (Y\ F)\ \underline{1})) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (MULT\ \underline{2}\ (IF\ (ISZERO\ \underline{1})\ \underline{1}\ (MULT\ \underline{1}\ ((Y\ F)\ (PRED\ \underline{1}))))) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (MULT\ \underline{2}\ (MULT\ \underline{1}\ (F\ (Y\ F)\ \underline{0}))) \Rightarrow$$
$$MULT\ \underline{3}\ (MULT\ \underline{2}\ (MULT\ \underline{1}\ \underline{1})) \Rightarrow \underline{6}$$

3 Syntactical equivalence in predicate calculus, replacement theorem

Определение

Две формулы ϕ и ψ сигнатуры σ называются **синтаксически эквивалентными** (или просто **эквивалентными**), тогда и только тогда, когда $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \phi$. Это отношение обозначается как: $\phi \equiv \psi$.

Лемма

Отношение $\equiv$ на множестве $F(\sigma)$ является отношением эквивалентности.

Доказательство

Рефлексивность: очевидно следует из $\phi \vdash \phi \in \mathrm{PredC}_\sigma$. Симметричность - следует из определения. Транзитивность. Пусть $\phi \equiv \psi \equiv \chi$. Тогда по определению $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \chi$. Следовательно, по правилу сечения $\rhd\phi \vdash \chi$. Доказательство $\rhd\chi \vdash \phi$ выполняется аналогично. Следовательно, $\phi \equiv \chi$.

Лемма (эквивалентность)

Пусть $\phi_1 \equiv \phi_2, \psi_1 \equiv \psi_2$. Тогда:

1. $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$
2. $(\phi_1 \bullet \psi_1) \equiv (\phi_2 \bullet \psi_2)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}$
3. $\forall x\phi_1 \equiv \forall x\phi_2$
4. $\exists x\phi_1 \equiv \exists x\phi_2$

Доказательство

Эквивалентности 1 и 2 доказываются точно так же, как и в логике высказываний. Докажем эквивалентности 3 и 4. Пусть $\phi_1 \equiv \phi_2$. Тогда $\rhd\phi_1 \vdash \phi_2$.

Рассмотрим квази-выводы: $\dfrac{\dfrac{\phi_1 \vdash \phi_2}{\forall x\phi_1 \vdash \phi_2}}{\forall x\phi_1 \vdash \forall x\phi_2}$ $\quad$ $\dfrac{\dfrac{\phi_1 \vdash \phi_2}{\phi_1 \vdash \exists x\phi_2}}{\exists x\phi_1 \vdash \exists x\phi_2}$

Таким образом $\rhd Qx\phi_1 \vdash Qx\phi_2$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$. Обратные секвенции $\rhd Qx\phi_2 \vdash Qx\phi_1$ могут быть доказаны аналогично. $\square$

Теорема (о замене)

Пусть формула ϕ' получена из ϕ заменой некоторого вхождения подформулы ψ формулой ψ'. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, то $\phi \equiv \phi'$.

Доказательство

Доказательство проводится индукцией по разности глубин формул ϕ и ψ. Шаг индукции следует из леммы об эквивалентностях.

Теорема (о замене)

Пусть ϕ - формула и $\psi \sqsubseteq \phi$ - некоторая подформула. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, и ϕ' - результат замены некоторого вхождения формулы ψ на формулу ψ', то $\phi \equiv \phi'$.

Доказательство

Индукция по разности глубин n формул $d(\phi) - d(\psi)$. Если $n = 0$, то $\phi = \psi$, доказывать нечего. Пусть $0 < n$ и утверждение верно для всех $k < n$. Рассмотрим варианты построения ϕ. Случай 1. Если $\phi = \neg\phi_1$, $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$, по предположению индукции, тогда если ϕ_1' является результатом замены формулы ψ на формулу ψ', то $\phi_1' \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = \neg\psi_1' \equiv \neg\phi_1 = \phi$$

Случай 2. Если $\phi = (\phi_1 \bullet \phi_2)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, и $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$ или $\psi \sqsubseteq \phi_2$. Пусть, например, $\psi \sqsubseteq \phi_1$. Тогда по предположению индукции если ϕ_1' является результатом замены формулы ψ на формулу ψ', то $\phi_1' \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = (\psi_1' \wedge \phi_2) \equiv (\phi_1 \wedge \phi_2) = \phi$$

□