# Тема : Интеграл Фурье

$\mathbf{1^0}$. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. $\mathbf{2^0}$. Интегралы Фурье абсолютно интегрируемых функций. $\mathbf{3^0}$. Локально интегрируемые функции. Интеграл в смысле главного значения. Пример. $\mathbf{4^0}$. Признак Дини сходимости интеграла Фурье. Представление функций интегралом Фурье. $\mathbf{5^0}$. Комплексная форма интеграла Фурье.

$3^0$. Интеграл Фурье существует для функций из более широкого класса нежели абсолютно интегрируемые.

**Определение.** *Функция* $f(x)$ *называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале числовой прямой.*

Любая функция, непрерывная на числовой прямой, абсолютно интегрируема на любом конечном интервале и, следовательно, локально интегрируема.

Для любой локально интегрируемой функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, предел

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{+l} \varphi(x)\, dx,$$

если он существует, называется интегралом от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\varphi(x)$ *в смысле глав-*

*ного значения*. При этом применяется следующее обозначение:

$$\mathbf{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\lim_{l\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l}\varphi(x)\,dx.$$

Этот же предел иногда называют *интегралом в смысле Коши*.

Таким образом, в случае локально интегрируемой функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, полученные ранее для абсолютно интегрируемых функций формулы $(\mathrm{A}')$ и $(\mathrm{B}')$ принимают следующий вид:

$$a(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad (\mathrm{A}'')$$

$$b(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt. \qquad (\mathrm{B}'')$$

Символ $\mathbf{V.P.}$ перед интегралом обычно не пишут, и это, как правило, не приводит к недоразумениям.

**Пример.** *Для локально суммируемой функции* $f(x) = \dfrac{\sin(\delta x)}{x}$, *где* $\delta > 0$, *найти соответствующие ей интегралы в смысле главного значения* $a(f; y)$ *и* $b(f; y)$.

*Решение*. Рассматриваемая функция $f(x)$ является четной: $f(-x) = f(x)$. Следовательно, для любого вещественного $y$ произведение $f(x)\sin(yx)$ — это нечетная функция, интеграл от которой по любому симметричному интервалу $(-l, l)$ обязательно равен нулю.

Это означает, что функция $b(f; y)$ тождественно равна нулю.

Из четности произведения $f(x)\cos(yx)$ по переменной $x$ и определения $(\mathrm{A}'')$ имеем

$$a(f;y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta x)}{x}\cos(yx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta + y)x}{x}\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta - y)x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(\delta + y) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(\delta - y).$$

Здесь $\operatorname{sgn} x = x/|x|$ при $x \neq 0$ и $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Таким образом, функция $a(f; y)$ равна единице при $|y| < \delta$ и равна нулю при $|y| > \delta$. Кроме того $a(f; -\delta) = a(f; +\delta) = 1/2$. $\square$

Отметим, что полученная в предыдущем примере функция $a(f; y)$ разрывна по $y$. Это ничему не противоречит: функция

$$f(x) = \frac{\sin(\delta x)}{x}$$

локально суммируема, но не является абсолютно интегрируемой на числовой прямой.

$4^0$. Установим некоторые условия, достаточные для сходимости соответствующего функции $f(x)$ интеграла Фурье

$$\int_0^{+\infty} \Big(a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)\Big)\,dy. \qquad \textbf{(AB)}$$

Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой.

Тогда $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и вопрос о сходимости интеграла Фурье

$$\int_0^{+\infty} \Big(a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx)\Big)\,dy$$

сводится к вопросу о существовании предела функции

$$T_\eta(f;x) = \int\limits_0^\eta \Big(a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx)\Big)\,dy \qquad \text{(T)}$$

при $\eta \to +\infty$.

Подставляя в равенство (T) формулы

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad \text{(A}'\text{)}$$

$$b(f;y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt \tag{B$'$}$$

получим следующее представление:

$$T_\eta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\eta} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))\,dt. \tag{T$'$}$$

Для внутреннего интеграла здесь справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))\,dt\Big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Выполнение этого условия позволяет поменять в формуле ($\mathrm{T}'$) порядок интегрирования и получить равенство

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Big(\int\limits_{0}^{\eta}\cos(y(x-t))\,dy\Big)dt.$$

Внутренний интеграл по $dy$ здесь вычисляется явно:

$$\int_0^{\eta} \cos(y(x-t))\,dy = \frac{\sin \eta(x-t)}{x-t}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее и делая замену переменной $t = x + \xi$, получаем

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin \eta\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Воспользовавшись в этом равенстве четностью функции $\dfrac{\sin \eta\xi}{\xi}$ по переменной $\xi$, получаем представление

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\xi} \sin(\eta\xi)\, d\xi. \quad (\mathrm{T}'')$$

Выясним, когда существует предел этой функции при $\eta \to +\infty$.

**Определение.** *Функция* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет в точке* $x_0$ *односторонним условиям Дини, если существуют оба односторонних предела* $f(x_0 + 0)$ *и* $f(x_0 - 0)$ *и при этом на некотором интервале вида* $(0, \delta)$, *где* $\delta > 0$, *абсолютно интегрируемы следующие две функции:*

$$F_+(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi},$$

$$F_-(\xi) = \frac{f(x_0 - \xi) - f(x_0 - 0)}{\xi}.$$

**Теорема** (признак Дини сходимости интеграла Фурье). *Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на числовой прямой и удовлетворяет в точке $x_0$ односторонним условиям Дини. Тогда соответствующий этой функции интеграл Фурье в точке $x_0$ сходится и равен величине*

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

*Доказательство.* Воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \eta\xi}{\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \forall\, \eta > 0$$

и представим величину $M_f(x_0)$ в следующем виде

$$M_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{\xi} \sin \eta\xi\, d\xi.$$

Вычитая это равенство из соотношения (T$''$)

и пользуясь определением функций $\boldsymbol{F_{\pm}(\xi)}$, получаем

$$\boldsymbol{T_\eta(f;x_0) - M_f(x_0) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big[F_+(\xi) + F_-(\xi)\Big]\sin(\eta\xi)d\xi =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F_+(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F_-(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi.}$$

Каждый из двух интегралов по $\boldsymbol{d\xi}$ в правой части этого равенства представим в виде следующей суммы трех слагаемых:

$$\int_{0}^{+\infty} F_{\pm}(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi = \int_{0}^{\delta} F_{\pm}(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi}\sin(\eta\xi)d\xi -$$

$$-f(x_0 \pm 0) \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi. \quad (\mathrm{F}_{\pm})$$

В качестве положительного предела интегрирования $\delta > 0$ здесь возьмем параметр из односторонних условий Дини, которым по условию удовлетворяет функция $f(x)$.

Далее, функции

$$F_{+}(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi}$$

и

$$F_{-}(\xi) = \frac{f(x_0 - \xi) - f(x_0 - 0)}{\xi}$$

абсолютно интегрируемы на интервале $(0,\delta)$. Следовательно, по теореме Римана об осцилляции имеют место предельные равенства

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_0^\delta F_\pm(\xi)\sin(\eta\xi)d\xi = 0.$$

Из условия, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой заключаем, что отношения $\frac{f(x_0+\xi)}{\xi}$ и $\frac{f(x_0-\xi)}{\xi}$ на интервале $(\delta, +\infty)$ также абсолютно интегрируемы:

$$\left|\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x_0 \pm \xi)|\, d\xi < +\infty.$$

Применяя к этим отношениям теорему Римана об осцилляции, получаем предельные равенства

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi} \sin(\eta\xi)\, d\xi = 0.$$

Для третьего интеграла в разложении ($\mathbf{F}_{\pm}$) справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta\eta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=0.$$

Последнее равенство справедливо в силу сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $\eta \to +\infty$ существует предел суммы в правой части равенств $(\mathbf{F}_{\pm})$ и этот предел равен нулю.

Следовательно, предел при $\eta \to +\infty$ разности $T_{\eta}(f; x_0) - M_f(x_0)$ также существует и равен нулю. $\square$

**Следствие.** *В условиях предыдущей теоремы справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x_0 - t))\,dt =$$

$$= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

*называемое формулой Фурье для функции* $f$ *в точке* $x_0$.

*Доказательство.* Несобственный интеграл в левой части формулы Фурье по определению представляет собой предел при $\eta \to +\infty$ функции

$$T_\eta(f; x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\eta dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(y(x_0 - t))\, dt.$$

Но этот же предел, как уже доказано, равен полусумме $M_f(x_0)$.

В силу единственности предела записанная выше формула Фурье действительно справедлива. $\square$

В частности, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна всюду на числовой прямой, а также удовлетворяет в точке $x$ односторонним условиям Дини, то имеет место разложение

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(y(x-t))\, dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Это равенство называется *представлением функции* $f(x)$ *интегралом Фурье*, или же формулой Фурье для функции $f(x)$.

**Определение.** *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ из интервала $(a, b)$. Если для некоторого положительного $\alpha > 0$ существуют такие постоянные $L$ и $\delta > 0$, что*

$$|f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \leqslant L|\xi|^{\alpha} \qquad \forall\, \xi \in (-\delta, \delta), \quad \text{(LC)}$$

*то функция $f(x)$, как говорят, удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$.*

Если в точке $x_0$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то она непрерывна в этой точке.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x_0$ условию Липшица положительного порядка $\alpha > 0$, то в этой точке $f(x)$ удовлетворяет и односторонним условиям Дини.

**Следствие.** *Если функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема всюду на числовой прямой и удовлетворяет в точке* $x_0$ *условию Липшица положительного порядка, то ее интеграл Фурье в этой точке сходится к* $f(x_0)$.

$5^0$. Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема на числовой прямой и при этом существуют соответствующие ей интегралы в смысле главного значения:

$$\boldsymbol{a(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt},$$

$$\boldsymbol{b(f;y) = \mathrm{V.P.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt}.$$

Тогда есть возможность определить следующую комплекснозначную функцию:

$$\boldsymbol{c(f;y) = \frac{1}{2}(a(f;y) - ib(f;y)) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2\pi}\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt.} \quad \mathbf{(FT)}$$

Последнее равенство здесь справедливо в силу линейности операций предельного перехода и интегрирования.

Домножая обе части первого из равенств

(**FT**) на функцию $e^{iyx}$ и интегрируя результат по переменной $y$ из интервала $(-\eta, \eta)$, получаем соотношение

$$\int_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{+\eta} (a(f;y) - ib(f;y))(\cos(yx) + i\sin(yx))\,dy.$$

Раскрывая в выражении под интегралом скобки и учитывая, что в силу четности $\boldsymbol{a(f;y)}$ и нечетности $\boldsymbol{b(f;y)}$ произведения $\boldsymbol{a(f;y)\sin(yx)}$ и $\boldsymbol{b(f;y)\cos(yx)}$ представляют собой нечетные функции переменной $\boldsymbol{y}$, запишем последнее равенство в следующем виде:

$$\int_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{+\eta} (a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx))\,dy =$$

$$= \int_{0}^{+\eta} (a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx))\,dy.$$

Переходя здесь к пределу при $\eta \to +\infty$ и учитывая, что правая часть переходит при этом в интеграл Фурье для функции $f$, заключаем, что этот самый интеграл Фурье представим в виде следующего интеграла в смысле главного значения:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(a(f;y)\cos(yx) + b(f;y)\sin(yx)\right) dy =$$

$$= \mathrm{V.P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(f;y)e^{iyx}\, dy. \quad (\mathrm{CFT})$$

**Определение.** *Интеграл* $(\mathrm{CFT})$, *в котором функция* $c(f;y)$ *задается формулой* $(\mathrm{FT})$, *называется интегралом Фурье в комплексной форме.*

**Теорема** (представление функции интегралом Фурье). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда в любой точке $x$ числовой прямой выполняется равенство*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \Big) e^{iyx}\, dy, \qquad (\mathrm{CFT}')$$

*где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.*

*Доказательство.* Заметим, что правые части формул ($\mathbf{CFT'}$) и ($\mathbf{CFT}$) совпадают друг с другом.

Это означает, что правая часть доказываемой формулы ($\mathbf{CFT'}$) является интегралом

Фурье рассматриваемой функции в обычной (вещественной) форме.

Но для функций, удовлетворяющих условиям теоремы, интеграл Фурье в любой точке вещественной прямой равен значению порождающей его функции в этой же точке.

□

Интеграл в правой части равенства ($\mathbf{CFT'}$), то есть интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt\Big)e^{iyx}\,dy$$

называют *повторным интегралом Фурье для функции* $f$. Представимость функции ее повторным интегралом Фурье впервые была установлена Коши.

Для вещественной функции $f$ функция $c(f;y)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_{-\eta}^{+\eta} \overline{c}(f;y)e^{-iyx}\,dy = \int\limits_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}\,dy,$$

где $\eta > 0$, а $\overline{c}(f;y)$ обозначает комплексно сопряженную к $c(f;y)$ функцию.

Переходя в этом интегральном тождестве к пределу при $\eta \to +\infty$ и пользуясь формулой $(\mathbf{CFT'})$, получаем в результате еще одно полезное равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\, dt \right) e^{-iyx}\, dy. \qquad (\mathbf{CFT''})$$

Отличие этой формулы от $(\mathbf{CFT'})$ — в показателях экспонент под интегралами в правой части.

**Следствие.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда, если $f(x)$ — четная, то в любой точке $x$ числовой прямой выполняется равенство*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt \, dt \right) \cos(xy) \, dy.$$

*Если же* $f(x)$ *— нечетная функция, то справедлива формула*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \left( \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin yt \, dt \right) \sin(xy) \, dy.$$

# Тема : Преобразование Фурье

$\mathbf{1^0}$. Образы и прообразы Фурье. $\mathbf{2^0}$. Свойства преобразования Фурье. $\mathbf{3^0}$. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Примеры. $\mathbf{4^0}$. Образ Фурье производной и производная образа Фурье. Следствия. $\mathbf{5^0}$. Пространство $\boldsymbol{S}$ быстроубывающих функций. Равенство Парсеваля.

$1^0$. Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также удовлетворяет всюду условию Дини. Тогда, как уже установлено, в любой точке $x$ из $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(f;y)e^{iyx}\,dy. \qquad \text{(CFI)}$$

Здесь комплекснозначная функция $c(f;y)$ определяется соотношением

$$c(f;y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx. \qquad (\mathbf{CFI'})$$

Формулы $(\mathbf{CFI})$ и $(\mathbf{CFI'})$ конструктивно очень схожи друг с другом, но в предложенном формате их записи отсутствует симметричность: во второй из этих формул имеется сомножитель $1/(2\pi)$ перед интегралом.

Эта асимметричность устраняется с помощью незначительно измененных определений и формул.

**Определение.** *Для любой локально суммируемой функции* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *порождаемый ею интеграл*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx = \widehat{f}(\xi),$$

если только он существует, называется образом Фурье функции $f$. Интеграл же

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx = \widetilde{f}(\xi),$$

комплексно сопряженный предыдущему, называется прообразом Фурье порождающей его функции $f$.

Образ Фурье определен не для любой локально суммируемой функции. Например, не существует локально суммируемой функции, являющейся образом (или прообразом) тождественной постоянной.

Но если $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой, то ее образ и прообраз Фурье существуют, ограничены и всюду непрерывны. При этом справедливы оценки

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1},$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widetilde{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1}.$$

Из теоремы Римана об осцилляции следует, что для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0, \qquad \lim_{\xi \to \pm\infty} \widetilde{f}(\xi) = 0.$$

**Определение.** *Оператор, сопоставляющий заданной локально суммируемой функции ее образ Фурье, называется преобразованием Фурье* $F$ *этой функции:*

$$F : f(x) \rightarrowtail \widehat{f}(\xi).$$

**Определение.** *Если функции сопоставляется ее прообраз Фурье, то оператор называется обратным преобразованием Фурье и обозначается символом* $F^{-1}$, *то есть*

$$F^{-1} : f(x) \rightarrowtail \widetilde{f}(\xi).$$

$2^0$. Установим ряд свойств преобразования Фурье.

1) Оператор преобразования Фурье линеен:

$$\boldsymbol{F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.}$$

Это свойство сразу следует из линейности операций предельного перехода и интегрирования.

2) Пусть функция $\boldsymbol{f(x)}$ абсолютно интегрируема и имеет образом Фурье функцию $\boldsymbol{\widehat{f}(\xi)}$.

Тогда для любого вещественного $a$ и положительного $\alpha$ определены образы Фурье функций $f(x+a)$ и $f(\alpha x)$, причем

$$F[f(x+a)] = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi), \qquad F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big). \quad (\mathrm{a}\alpha)$$

Докажем первое из этих равенств. По определению имеем

$$F[f(x+a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to+\infty} \int\limits_{-l}^{+l} f(x+a)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Сделав в интеграле справа замену переменной $y = x + a$, получим

$$F[f(x+a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \to +\infty} \int\limits_{-l+a}^{+l+a} f(y) e^{-i\xi(y-a)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi(y-a)}\, dy.$$

Вынося множитель $e^{ia\xi}$ за знак интеграла в правой части, получаем окончательно

$$F[f(x+a)] = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$

Это и есть первое из равенств $(\mathbf{a}\alpha)$.

Аналогично, имеем по определению:

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to+\infty} \int\limits_{-l}^{+l} f(\alpha x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Сделав в интеграле справа замену переменной $y = \alpha x$ и учитывая положительность $\alpha$, получаем второе из равенств $(\mathbf{a}\alpha)$:

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to\infty} \int\limits_{-\alpha l}^{+\alpha l} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} dy = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big).$$

3) Пусть функция $f(x)$ имеет прообраз Фурье $\widetilde{f}(\xi)$. Тогда для любого вещественного $b$ и положительного $\beta$ определены прообразы Фурье функций $f(x+b)$ и $f(\beta x)$, причем

$$F^{-1}[f(x+b)] = e^{ib\xi}\widetilde{f}(\xi),$$

$$F^{-1}[f(\beta x)] = \frac{1}{\beta}\widetilde{f}\left(\frac{\xi}{\beta}\right). \quad (\mathrm{b}\beta)$$

Равенства $(\mathrm{b}\beta)$ доказываются по той же схеме, что и предыдущие равенства $(\mathrm{a}\alpha)$.

4) Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке этой прямой условию Дини. Тогда имеют место равенства

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f. \tag{IF}$$

Эти формулы означают, что операторы $F$ и $F^{-1}$ взаимно обратны.

Равенства $(\mathbf{IF})$ называют *формулами обращения* для прямого и обратного преобразования Фурье.

Справедливость формул обращения $(\mathbf{IF})$ сразу следует из доказанной на предыдущей лекции теоремы о представлении функции интегралом Фурье с применением полученной там же формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t}\, dt \right) e^{i\xi x}\, d\xi. \qquad (\mathrm{CFT}')$$

$3^0$. В случае если функция $f(x)$ четная или нечетная, ее достаточно задавать лишь при $x > 0$. Формулы обращения при этом существенно упрощаются.

**Определение.** *Для любой локально суммируемой на промежутке* $(0, +\infty)$ *числовой оси функции* $f(x)$ *интеграл*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \cos yx \, dx = F_C[f]$$

*называется ее косинус-преобразованием Фурье.*

*Интеграл же*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin yx \, dx = F_s[f]$$

*называется синус-преобразованием Фурье функции* $f$.

Операторы, сопоставляющие функции $f(x)$ ее косинус- и синус-преобразование Фурье, обозначают символами $F_C$ и $F_S$ соответственно.

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ справедливы равенства

$$F[f] = F_C[f] = F^{-1}[f].$$

Если же функция $f(x)$ нечетная, $f(x) = -f(-x)$, то имеют место соотношения

$$F[f] = -iF_S[f] = -F^{-1}[f].$$

**Следствие.** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и абсолютно интегрируема на интервале* $(0, +\infty)$, *а также удовлетворяет в каждой точке этого интервала условию Дини.*

*Тогда имеют место равенства*

$$F_C[F_C[f]] = f \quad \text{и} \quad F_S[F_S[f]] = f.$$

**Пример.** *Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, равной единице на конечном отрезке $[-\delta, \delta]$ и нулю вне этого отрезка.*

*Решение.* Функция $f(x)$ четная и, следовательно,

$$F[f] = F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\delta} \cos yx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \delta y}{y}.$$

Это и есть искомый образ Фурье. $\square$