1 Equivalence relations, examples of equivalences. Equivalence classes, properties of equivalence classes, set partitions, lemma about equivalence classes and partitions

Определение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности**, тогда и только тогда, когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Другими словами, выполняются следующие свойства:

1. **рефлексивность** $\forall a \in A\ (a, a) \in r$
2. **симметричность** $\forall a, b \in A\ (a, b) \in r \Rightarrow (b, a) \in r$
3. **транзитивность** $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in r,\ (b, c) \in r \Rightarrow (a, c) \in r$

Замечание

Для обозначения отношений эквивалентности используются символы вида $\sim$, $\equiv$. Если использовать символ $\sim$ (или $\equiv$) для отношения эквивалентности r, то вместо $(a, b) \in \sim$ можно писать $a \sim b$ и называть $\sim$ просто эквивалентностью.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 1

Определим эквивалентность $\sim_{\mathbb{Q}}$ на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$(n_1, n_2) \sim_{\mathbb{Q}} (m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$$

Понятно, что $(n_1, n_2) \sim_{\mathbb{Q}} (m_1, m_2)$ означает, что $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2}$

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ - натуральные числа. Введем следующие обозначения:

- $\lfloor n/k \rfloor$ - целая часть от деления n на k, т.е. $\lfloor n/k \rfloor \cdot k \leq n < (\lfloor n/k \rfloor + 1) \cdot k$
- $rest(n, k) \rightleftharpoons n - \lfloor n/k \rfloor \cdot k$ - остаток от деления n на k

Пример 2

Мы можем определить отношение эквивалентности $\equiv_k$ на множестве $\mathbb{Z}$:

$$n_1 \equiv_k n_2 \Leftrightarrow rest(n_1, k) = rest(n_2, k)$$

Определение

Пусть $\sim$ - эквивалентность на множестве A, $a \in A$. Тогда множество

$$[a]_\sim \risingdotseq \{b | b \in A, a \sim b\}$$

называется **классом эквивалентности** элемента a относительно эквивалентности r.
Подмножество $X \subseteq A$ называется классом эквивалентности относительно $\sim$, тогда и только тогда, когда $X = [a]_\sim$ для некоторого $a \in A$.

Лемма

Пусть $\sim$ - эквивалентность. Тогда:

1. $a \in [a]_\sim$
2. если $[a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim \neq \emptyset$, то $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$
3. $A = \bigcup\{[a]_\sim | a \in A\}$

Доказательство

Первое следует из рефлексивности $\sim$. Докажем второе. Пусть $b \in [a_1]_\sim \cap [a_2]_\sim$. Тогда $b \in [a_1]_\sim$ и $b \in [a_2]_\sim$. По определению класса эквивалентности это означает, что $a_1 \sim b$ и $a_2 \sim b$. Поскольку $\sim$ симметрично, $b \sim a_2$, и так как $\sim$ транзитивно, $a_1 \sim a_2$.

Теперь покажем, что $[a_1]_\sim \subseteq [a_2]_\sim$. Пусть $b \in [a_1]_\sim$, тогда $b \sim a_1$, $a_1 \sim a_2$, поэтому $b \sim a_2$, следовательно, $b \in [a_2]_\sim$ по определению класса эквивалентности. Обратное включение получается таким же образом, заменим a_1 на a_2, а a_2 на a_1. Третье следует из первого.

Определение

Пусть A - множество. Тогда множество подмножеств $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ называется **разбиением** множества A, тогда и только тогда, когда

1. $\emptyset \notin X$
2. для любых $a, b \in X$, если $a \cap b \neq \emptyset$, то $a = b$
3. $A = \cup X$

Следствие (из леммы)

Если $\sim$ - эквивалентность на множестве A, то множество всех классов эквивалентности относительно $\sim$ - это разбиение A.

Лемма

Пусть $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ - разбиение множества A. Определим бинарное отношение $\sim_X$ следующим образом:

$$a \sim_X b \Leftrightarrow \exists x \in X\ (a \in x) \text{ и } (b \in x)$$

Тогда $\sim_X$ - отношение эквивалентности и $X = \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$.

Доказательство

Симметричность $\sim_X$ очевидно из определения. Рефлексивность: так как $A = \cup X$, любой элемент a попадает в какой-то элемент разбиения $a \in x \in X$. Тогда по определению $a \sim_X a$. Транзитивность: пусть $a \sim_X b$ и $b \sim_X c$. Это означает, что для некоторых элементов разбиения $x, y \in X$, $a, b \in x$ и $b, c \in y$. Тогда $b \in x \cap y$, поэтому $x \cap y \neq \emptyset$, следовательно, $x = y$. Отсюда следует, что $a, c \in x$, это значит, что $a \sim_X c$. Нам нужно показать, что $X = \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$. Докажем включение $X \subseteq \{[a]_{\sim_X} | a \in A\}$. Пусть $x \in X$. тогда $x \neq \emptyset$, следовательно, существует некоторый $a \in x$. Но тогда любой элемент $b \sim_X a$ будет лежать в x, так как, если $a \sim_X b$, то для некоторого $y \in X$ выполняется $a, b \in y$. Поскольку $a \in x$, $x \cap y \neq \emptyset$, поэтому $x = y$, тогда $b \in y$. Это означает, что $[a]_{\sim_X} \subseteq x$. Обратное, если некоторое $b \in x$, то по определению $\sim_X$, $b \sim_X a$, т.е. $b \in [a]_{\sim_X}$. Следовательно, $x = [a]_{\sim_X}$.

Обратное включение: если $[a]_{\sim_X}$ - некоторый класс эквивалентности, то так как $A = \cup X$, $a \in x$ для некоторого $x \in X$. Дальше, рассуждая как в предыдущем случае, мы получим $[a]_{\sim_X} = x$.

2 Term rewriting in λ-calculus: call-by-value and call-by-name strategies

Две основные стратегии редукции:

- **вызов по значению**: в любом терме вида $((\lambda x.t)s)$ сначала s сводится к s', и только после этого к нему применяется β-редукция и результат сводится к $t[x = s']$.

  Пример: $(\lambda pq.pqp)(\lambda ab.a)(\lambda ab.b)$

  1. α эквивалентная формула: $(\lambda pq.pqp)(\lambda ab.a)(\lambda cd.d)$.
  2. Редукция: используя редекс $(\lambda pq.pqp)(\lambda ab.a)$: $\lambda q(\lambda ab.a)q(\lambda ab.a)(\lambda cd.d)$.
  3. Подстановка $\theta_1 = [q = (\lambda cd.d)]$: $(\lambda ab.a)(\lambda cd.d)(\lambda ab.a)$.
  4. Подстановка $\theta_2 = [a = (\lambda cd.d)]$: $(\lambda b.(\lambda cd.d))(\lambda ab.a)$.
  5. Подстановка $\theta_3 = [b = (\lambda ab.b)]$: $(\lambda cd.d)(\lambda ab.a)$.

- **вызов по имени**: к любому терму вида $((\lambda x.t)s)$ сначала применяется β-редукция, а затем результат сводится к $t[x = s]$.

  Пример: $(\lambda pq.pqp)(\lambda ab.a)(\lambda ab.b)$

  1. α эквивалентная формула: $(\lambda pq.pqp)(\lambda ab.a)(\lambda cd.d)$.
  2. Подстановка $\theta_1 = [c = (\lambda ab.a)]$: $(\lambda pq.pqp)(\lambda d.d)$.
  3. Подстановка $\theta_2 = [d = (\lambda pq.pqp)]$: $(\lambda pq.pqp)$.

3 Quotient structure of structure M by congruence θ

Определение

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ - структура, $\sim_\theta$ - некоторая конгруэнция на $\mathcal{M}$. Можно определить **разбиение структуры** или **фактор структуру** $\mathcal{M}/\sim_\theta = (N, \sigma)$ по конгруэнции $\sim_\theta$ следующим образом:

- $N = M/\sim_\theta = \{[a]_{\sim_\theta} | a \in M\}$ - разбиение множества M по эквивалентности $\sim_\theta$
- $f^{\mathcal{M}/\sim_\theta}([a_1]_{\sim_\theta}, \ldots, [a_n]_{\sim_\theta}) \rightleftharpoons [f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)]_{\sim_\theta}$
- $([a_1]_{\sim_\theta}, \ldots, [a_n]_{\sim_\theta}) \in p^{\mathcal{M}/\sim_\theta} \Leftrightarrow \exists \bar{b} \in M^n$
  $(b_1 \in [a_1]_{\sim_\theta} \wedge \ldots \wedge b_n \in [a_n]_{\sim_\theta} \wedge \bar{b} \in p^{\mathcal{M}})$

Пример - кольцо вычетов по модулю n

Поскольку отношение $\sim_n$ на кольце $\mathbb{Z}$ является конгруэнцией, структура $\mathbb{Z}_n \rightleftharpoons \mathbb{Z}/\sim_n$ определена и называется **кольцом вычетов по модулю** n. Носитель $\mathbb{Z}$ обозначается как Z_n.