

# Тема : Итерационные методы решения СЛАУ

1<sup>0</sup>. Запись СЛАУ в эквивалентном виде с помощью оператора перехода. Метод простой итерации (МПИ).  
2<sup>0</sup>. Достаточное условие сходимости МПИ. Критерий сходимости МПИ. Количество операций. 3<sup>0</sup>. Учет ошибок округления в методе простой итерации. 4<sup>0</sup>. Метод Якоби: оператор перехода, достаточное условие сходимости, критерий сходимости. 5<sup>0</sup>. Метод Зейделя: оператор перехода, рекуррентная схема вычислений, достаточное условие сходимости. 6<sup>0</sup>. Метод верхней релаксации: оператор перехода, итерационный параметр. 7<sup>0</sup>. Определение квадратичного функционала, функционала энергии. Вариационная задача минимизации квадратичного функционала и задача решения СЛАУ: теорема о минимуме квадратичного функционала.

5<sup>0</sup>. Вернемся к записи системы  $A\vec{u} = \vec{f}$ , в виде равенства

$$L\vec{u} + D\vec{u} + U\vec{u} = \vec{f}. \quad (I')$$

Здесь  $L$  — нижняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали,  $U$  — верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, а  $D$  — диагональная матрица,

$$D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}.$$

При этом справедливо разложение

$$A = L + D + U. \quad (\Sigma)$$

Расставим в левой части системы  $(I')$  нижние индексы у вектора  $\vec{u}$  по-другому, чем в методе Якоби. Точнее, рассмотрим последовательность равенств вида

$$L\vec{u}_{k+1} + D\vec{u}_{k+1} + U\vec{u}_k = \vec{f}, \quad (Z)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Задавая начальный вектор  $\vec{u}_0$ , получаем итерационный процесс ( $Z$ ) для отыскания последовательных приближений.

Если на главной диагонали матрицы  $A$  все элементы не нулевые, то нижняя треугольная матрица  $(L + D)$  невырождена.

В этом случае итерационный процесс ( $Z$ ) записывается в явной (нормальной) форме

следующим образом:

$$\vec{u}_{k+1} = -(L + D)^{-1}U\vec{u}_k + (L + D)^{-1}\vec{f}, \quad (Z+)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Полагая здесь

$$B = -(L + D)^{-1}U \quad \text{и} \quad \vec{F} = (L + D)^{-1}\vec{f},$$

приходим к записи итерационных соотношений в такой же общей форме, как и в методе простой итерации:

$$\vec{u}_{k+1} = B\vec{u}_k + \vec{F}.$$

В таком виде, то есть с матрицей перехода, задаваемой равенством

$$B = -(L + D)^{-1}U,$$

процесс называется итерационным методом Зейделя.

Отыскание вектора  $\vec{u}_{k+1}$  в методе Зейделя удобно упростить, организовав вычисления

по следующей рекуррентной схеме:

$$\vec{u}_{k+1} = -D^{-1}L\vec{u}_{k+1} - D^{-1}U\vec{u}_k + D^{-1}\vec{F},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для вычисления компоненты  $u_j^{k+1}$  вектора  $\vec{u}_{k+1}$  при этом используется формула, в которой присутствуют значения компонент предыдущего вектора  $\vec{u}_k$ , а также компонент  $\vec{u}_l^{k+1}$  с номерами  $l = 1, 2, 3, \dots, j - 1$ .

**Теорема** (достаточное условие сходимости метода Зейделя). Если матрица  $A$  системы вещественна, симметрична и положительно определена, то последовательные приближения по методу Зейделя сходятся к точному решению системы  $A\vec{u} = \vec{f}$ .

**Замечание.** Если невырожденная матрица  $A$  вещественна, но при этом не симметрична и не положительно определена, то вместо си-



системы  $A\vec{u} = \vec{f}$  можно рассмотреть эквивалентную ей:

$$(A^T A)\vec{u} = A^T \vec{f}.$$

При этом матрица  $A^T A$  вещественна, симметрична и положительно определена.

Этот прием называется симметризацией СЛАУ. Следует, однако, иметь в виду, что

$$\mu(A^T A) = \mu^2(A),$$

где  $\mu(\cdot)$  — число обусловленности матрицы. Таким образом, при  $\mu(A) > 1$  обусловленность симметризованной системы гораздо хуже, чем исходной.

6<sup>0</sup>. Систему  $A\vec{u} = \vec{f}$ , где  $A \equiv L + D + U$ , умножим на скаляр  $\tau$  и запишем в виде

$$(\tau L + D)\vec{u} + (\tau - 1)D\vec{u} + \tau U\vec{u} = \tau \vec{f}.$$

Расставив здесь индексы у вектора  $\vec{u}$ , получаем следующий итерационный процесс:

$$(\tau L + D) \vec{u}_{k+1} + (\tau - 1) D \vec{u}_k + \tau U \vec{u}_k = \tau \vec{f}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (SR)$$

Этот же процесс, записанный в явной (или нормальной) форме, имеет вид

$$\vec{u}_{k+1} = -(D + \tau L)^{-1} [(\tau - 1) D + \tau U] \vec{u}_k + \tau (D + \tau L)^{-1} \vec{f}, \quad (SR+)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При  $\tau = 1$  процесс ( $SR+$ ) превращается в метод Зейделя.

Выбирая разные значения  $\tau$ , можно существенно ускорить сходимость итераций. Таким образом, возникает задача отыскания оптимального значения  $\tau$  (итерационного параметра), которая не решена. Известно, однако, что оптимальный параметр  $\tau_{\text{opt}}$  находится в интервале  $1 < \tau < 2$ .

При  $\tau$  из  $(1, 2)$  итерационный метод ( $SR+$ ) называется методом верхней релаксации (Successive Over Relaxation, SOR).

Если же  $0 < \tau < 1$ , то ( $SR+$ ) — это метод последовательной нижней релаксации.

С решением СЛАУ разными методами тесно связано общее понятие квадратичного функционала и задача его минимизации.

7<sup>0</sup>. Пусть вектор  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  принадлежит евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Квадратичным функционалом от переменной  $\vec{u}$  называется функция вида

$$\Phi(\vec{u}) = (A\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{f}, \vec{u}) + c.$$

Здесь  $A$  — это квадратная матрица размера  $n \times n$ , символ  $(*, *)$  обозначает скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}$  — это вектор из  $\mathbb{R}^n$  и  $c$  — это постоянная.

Таким образом, областью определения квадратичного функционала  $\Phi(\vec{u})$  служит все пространство  $\mathbb{R}^n$ , а область его значений содержится в  $\mathbb{R}$ .

Для заданного квадратичного функционала  $\Phi(\vec{u})$  всегда справедливо равенство

$$\Phi(\vec{u}) = \left( \frac{A + A^*}{2} \vec{u}, \vec{u} \right) - 2(\vec{f}, \vec{u}) + c.$$

Здесь матрица  $\frac{1}{2}(A + A^*)$  симметрична.

По этой причине в общем представлении квадратичного функционала  $\Phi(\vec{u})$  почти всегда предполагается, что матрица  $A$  — симметричная, то есть что  $A = A^* = A^T$ .

Пусть кроме того матрица  $A$  положительно определена, то есть

$$(A\vec{u}, \vec{u}) > 0 \quad \text{для любого} \quad \vec{u} \neq 0.$$



В этом случае  $\Phi(\vec{u})$  называется также функционалом энергии. С функционалом энергии связана следующая постановка вариационной задачи.

**Задача.** Найти вектор  $\vec{v}$  из  $\mathbb{R}^n$ , доставляющий минимум функционалу  $\Phi(\vec{u})$  на этом пространстве, то есть такой, что

$$\Phi(\vec{v}) = \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\vec{u}). \quad (VP)$$

Если вектор  $\vec{v}$  является решением этой минимизационной проблемы, то используется следующее обозначение:

$$\vec{v} = \arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\vec{u}).$$

Решение этой вариационной задачи взаимосвязано с решением СЛАУ  $A\vec{u} = \vec{f}$  с теми же самыми матрицей  $A$  и вектором  $\vec{f}$ , что и в формуле, определяющей квадратичный функционал  $\Phi(\vec{u})$ .

**Теорема** (о минимуме квадратичного функционала). Пусть матрица  $A$  вещественна, симметрична и положительно определена. Тогда существует единственный вектор  $\vec{v}$  в  $\mathbb{R}^n$ , доставляющий минимум квадратичному функционалу

$$\Phi(\vec{u}) = (A\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{f}, \vec{u}) + c.$$

Этот вектор  $\vec{v}$  является решением СЛАУ  $A\vec{u} = \vec{f}$ .

*Доказательство.* Пусть вектор  $\vec{v}$  — это решение системы  $A\vec{v} = \vec{f}$ . Такое решение существует и единственно в силу условия положительной определенности матрицы  $A$ : в этом случае  $\det A \neq 0$ .

Возьмем любой вектор  $\vec{w}$  из  $\mathbb{R}^n$  и найдем значение функционала

$$\Phi(\vec{v} + \vec{w}) = (A(\vec{v} + \vec{w}), \vec{v} + \vec{w}) - 2(\vec{f}, \vec{v} + \vec{w}) + c.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{v} + \vec{w}) &= \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) + (A\vec{v}, \vec{w}) + (A\vec{w}, \vec{v}) + (A\vec{w}, \vec{w}) - \\ &\quad - 2(\vec{f}, \vec{v}) - 2(\vec{f}, \vec{w}) + c.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$(A\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, A^*\vec{v}) = (\vec{w}, A\vec{v}) = (A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{f}, \vec{w}).$$

Учитывая это, имеем далее

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{v} + \vec{w}) = & \left[ (A\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{f}, \vec{v}) + c \right] + \\ & + 2(A\vec{v}, \vec{w}) - 2(\vec{f}, \vec{w}) + (A\vec{w}, \vec{w}).\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках в правой части — это значение  $\Phi(\vec{v})$ .

Следовательно, полученное равенство запи-

сывается в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{v} + \vec{w}) &= \Phi(\vec{v}) + 2(\underbrace{A\vec{v} - \vec{f}}_{=0}, \vec{w}) + (A\vec{w}, \vec{w}) = \\ &= \Phi(\vec{v}) + (A\vec{w}, \vec{w}).\end{aligned}$$

Но по условию матрица  $A$  положительно определена и поэтому

$$(A\vec{w}, \vec{w}) > 0 \quad \text{для любого вектора} \quad \vec{w} \neq 0.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\Phi(\vec{v} + \vec{w}) > \Phi(\vec{v}) \quad \text{для любого вектора} \quad \vec{w} \neq 0.$$

Это и означает, что функционал  $\Phi(\vec{u})$  достигает на векторе  $\vec{v}$  минимально возможного значения:

$$\Phi(\vec{v}) = \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\vec{u}).$$

Таким образом, существование элемента, доставляющего в  $\mathbb{R}^n$  минимум квадратичному функционалу  $\Phi(\vec{u})$  доказано. □



В процессе доказательства предыдущей теоремы было также установлено, что в качестве минимизирующего значения функционала энергии вектора  $\vec{v}$  годится решение ассоциированной с этим функционалом системы линейных алгебраических уравнений

$$A\vec{v} = \vec{f}.$$

# Тема : Минимизация квадратичного функционала

1<sup>0</sup>. Единственность минимизирующего квадратичный функционал вектора. 2<sup>0</sup>. Минимизация квадратичного функционала методом наискорейшего спуска. 3<sup>0</sup>. Метод минимальных невязок.

1<sup>0</sup>. Рассмотрим квадратичный функционал, то есть функцию многих переменных вида

$$\Phi(\vec{u}) = (A\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{f}, \vec{u}) + c,$$

где  $A$  — невырожденная и положительно определенная  $n \times n$  матрица,  $\vec{f}$  — заданный вектор из  $\mathbb{R}^n$ ,  $c$  — постоянная, а  $\vec{u}$  — переменный вектор из  $\mathbb{R}^n$ .

Функция  $\Phi(\vec{u})$  достигает своего минимального на  $\mathbb{R}^n$  значения на некотором векторе

$\vec{v}$  из  $\mathbb{R}^n$ :

$$\vec{v} = \arg \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\vec{u}). \quad (\text{min})$$

В качестве вектора  $\vec{v}$ , как уже доказано, может выступать решение системы линейных уравнений

$$A\vec{v} = \vec{f}.$$

**Теорема** (единственности). Вектор  $\vec{v}$  со свойством **(min)** единствен в  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Пусть есть вектор  $\vec{v}_1$  из  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v}_1 \neq \vec{v}$ , с тем же свойством (**min**), то есть такой, что

$$\Phi(\vec{v}_1) = \min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\vec{u}).$$

Тогда производная функции  $\Phi(\vec{u})$  по любой из переменных  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в точке  $\vec{u}_0 = \vec{v}_1$  должна равняться нулю, то есть

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \right) = \vec{0}. \quad (SP)$$

Вектор в левой части этого равенства называется градиентом функции  $\Phi$  и обозначается как  $\nabla\Phi$  или  $\text{grad } \Phi$ :

$$\nabla\Phi \equiv \left( \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial u_n} \right).$$

Дифференциальный оператор  $\nabla$  называется “набла”-оператором или оператором Гамильтона.

Вычислив частные производные от квадратичного функционала

$$\Phi(\vec{u}) = (A\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{f}, \vec{u}) + c,$$

подставим результат в (*SP*). Тогда придем к соотношению

$$\nabla\Phi = 2A\vec{v}_1 - 2\vec{f} = \vec{0}.$$

Таким образом, рассматриваемый вектор  $\vec{v}_1$  со свойством минимальности обязан быть

решением системы

$$A\vec{v}_1 = \vec{f}.$$

Но решение этой системы в силу невырожденности матрицы  $A$  единственно. Следовательно, с необходимостью должно выполняться равенство  $\vec{v}_1 = \vec{v}$ . Таким образом, установлено, что задача решения СЛАУ эквивалентна вариационной задаче минимизации квадратичного функционала. □



Отметим, что системы линейных уравнений с симметричными вещественными и положительно определенными матрицами возникают, например, при решении краевых задач для эллиптических уравнений.

2<sup>0</sup>. Минимум квадратичного функционала  $\Phi(\vec{u})$  ищут с помощью итерационного процесса. В частности, этот минимум можно найти по

следующей итерационной схеме:

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k - \alpha_k \nabla \Phi(\vec{u}_k), \quad (III)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Параметр  $\alpha_k$  здесь — это число, определяемое из условия минимума по  $\alpha$  функции

$$\Phi[\vec{u}_k - \alpha \nabla \Phi(\vec{u}_k)].$$

В этом случае соответствующий итерационный метод (*III*) называется методом наискорейшего спуска.

Учитывая, что  $\nabla\Phi(\vec{u}) = 2(A\vec{u} - \vec{f})$ , получаем следующие равенства

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k - \tau_k(A\vec{u}_k - \vec{f}),$$

где  $\tau_k = 2\alpha_k$ .

Таким образом, снова имеем процесс вида

$$\vec{u}_{k+1} = B\vec{u}_k + \vec{F}_k,$$

где  $B = (E - \tau_k A)$  и  $\vec{F}_k = \tau_k \vec{f}$ .

Параметр  $\tau_k$  здесь определяется соотношением

$$\tau_k = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(A\vec{r}_k, \vec{r}_k)}, \quad \text{где} \quad \vec{r}_k = A\vec{u}_k - \vec{f}.$$

3<sup>0</sup>. В итерационной схеме

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k - \tau_k(A\vec{u}_k - \vec{f}) \quad (*)$$

параметр  $\tau_k$  можно выбирать на каждом шаге таким образом, чтобы минимизировалась

евклидова норма соответствующего шагу вектора невязки

$$\vec{r}_{k+1} = A\vec{u}_{k+1} - \vec{f}.$$

Покажем, что этим условиям удовлетворяют числа

$$\tau_k = \frac{(A\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(A\vec{r}_k, A\vec{r}_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Запишем итерационный процесс в эквивалентном виде через векторы невязки. Для этого умножим равенство (\*) слева на матрицу  $A$ , а затем вычтем из обеих частей получающегося равенства вектор  $\vec{f}$ . В итоге получим равенство

$$\vec{r}_{k+1} = \vec{r}_k - \tau_k A \vec{r}_k.$$

Имеем далее

$$\begin{aligned}(\vec{r}_{k+1}, \vec{r}_{k+1}) &= (\vec{r}_k - \tau_k A \vec{r}_k, \vec{r}_k - \tau_k A \vec{r}_k) = \\&= (\vec{r}_k, \vec{r}_k) - 2\tau_k (A \vec{r}_k, \vec{r}_k) + \tau_k^2 (A \vec{r}_k, A \vec{r}_k).\end{aligned}$$

Вычисляя производную квадратичной функции в предыдущем равенстве по переменной  $\tau_k$  и приравнивая результат к нулю, заключаем, что минимум этой функции достигается

при  $\tau_k$ , удовлетворяющем условию

$$-2(A\vec{r}_k, \vec{r}_k) + 2\tau_k(A\vec{r}_k, A\vec{r}_k) = 0.$$

Следовательно, нужное значение параметра  $\tau_k$  задается равенством

$$\tau_k = \frac{(A\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(A\vec{r}_k, A\vec{r}_k)}.$$

При таких значениях  $\tau_k$  итерационный процесс (\*) называется методом минимальных невязок.



# Тема : Методы поиска безусловного экстремума функции

1<sup>0</sup>. Постановка задачи, локальный и глобальный минимумы. Целевая функция. Условный минимум. 2<sup>0</sup>. Связь задачи минимизации функций с задачей решения системы нелинейных алгебраических уравнений. 3<sup>0</sup>. Минимизация функций одной переменной: метод перебора. 4<sup>0</sup>. Минимизация функций одной переменной: метод исключения отрезков, метод дихотомии. 5<sup>0</sup>. Минимизация функций одной переменной: метод золотого сечения.

1<sup>0</sup>. Среди всевозможных задач вычислительной математики особо выделяются задачи на поиск локальных и глобальных минимумов функций многих переменных.

Пусть на множестве  $\mathbb{U}$  элементов линейного нормированного пространства  $\mathbb{X}$  определена скалярная функция

$$\Phi: u \in \mathbb{U} \rightarrow \Phi(u) \in \mathbb{R}.$$

Пусть также в множестве  $\mathbb{U}$  выделен некоторый вектор  $u^*$ .

**Определение.** Если существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого вектора  $u \in \mathbb{U}$  с условием  $\|u - u^*\| < \varepsilon$  выполняется неравенство

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^*),$$

то говорят, что функция  $\Phi(\cdot)$  имеет в точке  $u^*$  локальный минимум.

**Определение.** Если для любого вектора  $u$  из  $\mathbb{U}$  выполняется неравенство

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^*), \quad \forall u \in \mathbb{U},$$

то говорят, что функция  $\Phi(\cdot)$  имеет в  $u^*$  глобальный минимум на  $\mathbb{U}$ :

$$\Phi(u^*) = \inf_{u \in \mathbb{U}} \Phi(u).$$

Функцию  $\Phi(u)$ , для которой требуется найти

Точки минимума или максимума, называют целевой функцией.

Если  $U = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , то задача поиска локальных и глобальных минимумов состоит в указании всех возможных экстремумов функции многих переменных.

Если область определения  $U \subset X$  состоит из функций, то есть если  $X$  — это функциональ-

ное пространство, то для  $\Phi(\cdot)$  используется термин “функционал”.

Задачи минимизации функционалов относятся к сфере оптимального управления и динамического программирования.

Часто к задаче на поиск минимума функции многих переменных добавляются ограничения на искомую точку  $u^*$ , а также на

варьируемые функции  $u$  из  $\mathbb{U}$ . Дополнительные условия при этом формулируются в виде неравенств на координаты переменных задачи, например, следующим образом:

$$u_k^{(0)} \leq u_k \leq u_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K,$$

или же в виде

$$F_i^{(0)} \leq \Phi_i(u) \leq F_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, I.$$

Здесь параметры  $u_k^{(0)}$ ,  $u_k^{(1)}$  — это заданные числа,  $F_i^{(0)}$ ,  $F_i^{(1)}$  — это также числа, а  $\Phi_1(u)$ ,  $\Phi_2(u)$ ,  $\Phi_3(u)$ , ...,  $\Phi_I(u)$  — это заданные функции своих аргументов.

В этом случае говорят о поиске целевого минимума, или условного экстремума.

Если все функции  $\Phi_i(u)$  из дополнительных ограничений линейны, то задачу поиска услов-



ного минимума относят к линейному программированию. Если же хотя бы одна из функций  $\Phi_i(u)$  нелинейна, то это задача нелинейного программирования.

Обе эти задачи, а также задачу динамического программирования в теории оптимального управления, относят к математическому программированию.

Отметим, что рассматриваются также аналогичные задачи на поиск максимума функции.

При этом полезно помнить, что если  $\Phi(u)$  достигает в какой-то точке  $u^*$  своего максимального значения, то в этой же точке противоположная функция  $(-\Phi(u))$  достигает минимального значения.

$2^0$ . Задача минимизации значений функции тесно связана с задачей вычисления корней системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ).

Пусть на подмножестве  $\mathbb{U}$  линейного пространства  $\mathbb{L}^n$ ,  $\dim \mathbb{L}^n = n$ , решается система

нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = 0, \\ f_2(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = 0, \\ f_3(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ f_n(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = 0. \end{array} \right. \quad (SE)$$

Введем целевую функцию  $\Phi(u)$ , положив

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n f_k^2(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Из определения следует, что

$$\Phi(u) \geq 0 \quad \text{для любого} \quad u \in \mathbb{U},$$

причем равенство нулю здесь достигается в том и только том случае, когда  $u$  совпадает с каким-либо корнем  $u^*$  рассматриваемой системы (***SE***) алгебраических уравнений.

Если требуется найти минимум целевой функции  $\Phi(u)$ , у которой в области  $\mathbb{U}$  имеются первые непрерывные производные, то этот минимум следует искать среди стационарных точек функции  $\Phi(u)$ .

**Определение.** Стационарная точка функции  $\Phi(u)$  — это любая такая точка, в которой все частные производные функции  $\Phi(u)$  обращаются в нуль.

Таким образом, стационарная точка  $u^*$  функции  $\Phi(\cdot)$  — это некоторое решение следующей системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ):

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u_1,u_2,\dots,u_n)=0, \\[6pt] \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}(u_1,u_2,\dots,u_n)=0, \\[6pt] \dots\dots\dots, \\[6pt] \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(u_1,u_2,\dots,u_n)=0. \end{cases}$$

Не каждая стационарная точка функции является ее точкой минимума или максимума.

Пусть функция  $\Phi(u)$  дважды непрерывно дифференцируема в области  $\mathbb{U}$ . Достаточное условие того, что стационарная точка доставляет минимум этой целевой функции дает следующая теорема.



**Теорема.** Функция  $\Phi(u)$  достигает минимума в стационарной точке  $u = u^*$ , если в этой точке положительно определена следующая матрица Гессе из вторых производных:

$$G(u) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_n} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3 \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3 \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3 \partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n^2} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что методы отыскания минимума целевой функции часто оказываются более эффективными, чем другие методы численного решения СНАУ.

3<sup>0</sup>. Рассмотрим некоторые методы минимизации функции одной переменной.

Самый простой из них — метод перебора. Пусть на отрезке  $[a, b]$  числовой оси непре-

равная функция  $\Phi(u)$  унимодальна, то есть имеет единственную точку минимума  $u^*$ :

$$\Phi(u^*) = \min_{u \in [a, b]} \Phi(u).$$

Возьмем натуральное  $n$  и разобьем отрезок  $[a, b]$  на равные части с концами в точках

$$u_i = a + i \frac{b - a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Затем вычислим в узлах  $u_i$  значения  $\Phi(\cdot)$ , то есть найдем числа

$$\Phi(u_i) \equiv \Phi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Среди всех  $\Phi_i$  найдем то число  $\Phi_i^*$ , для которого имеет место равенство

$$\Phi_i^* = \min \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}.$$

В качестве приближения к искомому минимуму возьмем теперь точку  $u_i^*$ , то есть по-

лагаем

$$u^* \approx u_i^* \quad \text{и} \quad \Phi(u^*) \approx \Phi_i^*.$$

Для достаточно больших значений  $n$  погрешность  $|u^* - u_i^*|$  не превосходит  $\frac{b-a}{n}$ . Иными словами, метод имеет первый порядок точности.

Метод перебора допускает естественное расширение на многомерный случай, когда надо

найти точку минимума функции в многомерном кубе

$$\mathbb{U} = \{ (u_1, u_2, \dots, u_m) \mid a \leq u_i \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, m \}.$$

Однако в случае поиска минимума функции многих переменных метод перебора неэкономичен.

Оценим, например, время нахождения этим методом минимума функции  $\Phi(u)$  десяти переменных при условии, что для вычисления

значения  $\Phi(\cdot)$  в точке требуется выполнить тысячу арифметических операций. Каждое ребро куба

$$\mathbb{U} = \{(u_1, \dots, u_{10}) \mid 0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 10\}.$$

разобьем на 10 равных частей. В соответствии с этим разбиением найдем  $\approx 10^{10}$  узловых точек, лежащих в кубе и на его границе.

Пусть компьютер совершает в секунду  $10^6$  операций. Тогда для нахождения  $\min_{u \in \mathbb{U}} \Phi(u)$  методом перебора потребуется около  $10^7$  секунд (то есть примерно 4 месяца).

Метод перебора становится эффективнее, если сначала найти минимум с грубым шагом, то есть при небольшом  $n$ , а уже после этого искать минимум с гораздо меньшим шагом, то есть при большом значении  $n$ , но



на существенно меньшем отрезке  $[u_i, u_{i+1}]$ ,  
где, как предполагается, находится искомый  
минимум.