Тема : Теорема Котельникова

$\mathbf{1^0}$. Аналоговые сигналы, отсчеты, дискретизация и интерполяция сигнала. Потеря информации. $\mathbf{2^0}$. Пространства $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Преобразование Фурье и равенство Планшереля. Функции ограниченного спектра. Ширина спектра. $\mathbf{3^0}$. Теорема Котельникова для функций из $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$. Ряд Котельникова. Период и частота дискретизации. $\mathbf{4^0}$. Неулучшаемость условия на период $\boldsymbol{T}$ отсчетов: пример.

4^0. Отметим, что условие $0 < 2T\omega \leqslant 1$ в теореме Котельникова существенно. Как показывает следующий пример, отказаться от этого условия нельзя.

Пусть $T > 0$, $\omega > 0$ и при этом $2T\omega > 1$. Непрерывная функция

$$f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

как уже отмечалось ранее, принадлежит линейному пространству $L_2(\mathbb{R})$.

Более того, функция $f(t)$ имеет ограниченный спектр, причем, в силу предположения, что $2T\omega > 1$, ширина $\frac{1}{2T}$ этого спектра строго меньше ω:

$$|\xi| \geqslant \omega > \frac{1}{2T} \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Далее имеем следующие равенства:

$$f(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq 0, \\ 1 & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, правая часть $g(t)$ формулы (**NK**) принимает следующий вид

$$2T\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin 2\pi\omega(t - nT)}{2\pi\omega(t - nT)} =$$

$$= 2T\omega \frac{\sin 2\pi\omega t}{2\pi\omega t} = g(t).$$

При этом непрерывные функции $f(t)$ и $g(t)$ в некоторой окрестности нуля отличаются друг от друга:

$$g(0) = 2T\omega > 1 = f(0).$$

Следовательно, $\|f - g\|_{L_2} > 0$ и для рассматриваемой функции $f(t)$ равенство $(\mathbf{NK})$ не выполняется ни поточечно, ни в смысле равенства элементов $L_2(\mathbb{R})$.

Тема : Пространство интегрируемых с квадратом на промежутке функций

$\mathbf{1^0}$. Определение и структура пространства $L_2(\Delta)$. Неравенство Коши — Буняковского. Сходимость. $\mathbf{2^0}$. Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье. $\mathbf{3^0}$. Полные в $L_2(\Delta)$ системы функций. $\mathbf{4^0}$. Ряды Фурье функций из $L_2(\Delta)$. Равенство Парсеваля.

1^0. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — конечный отрезок на числовой прямой.

Определение. *Абсолютно интегрируемые на промежутке* $\Delta = [\alpha, \beta]$ *функции образуют в совокупности линейное пространство, обозначаемое как* $L_1(\Delta)$.

Функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_1(\Delta)$ тогда и только тогда когда $\int\limits_\alpha^\beta |f(x)|\,dx < +\infty$.

Если $f(x)$ принадлежит пространству $L_1(\Delta)$, то ее L_1-*норма* определяется равенством

$$\|f\|_{L_1(\Delta)} = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx.$$

Эта же норма обозначается также несколько иным символом $\|f \mid L_1(\Delta)\|$.

Любая кусочно непрерывная функция принадлежит пространству $L_1(\Delta)$.

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема с квадратом на промежутке* $\Delta = [\alpha, \beta]$, *то есть*

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Тогда говорят, что $f(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(\Delta)$.

Множество $L_2(\Delta)$ не пусто: любая непрерывная на отрезке $\Delta = [\alpha, \beta]$ функция принадлежит пространству $L_2(\Delta)$. При этом пространство $C(\Delta)$ всех непрерывных на отрезке Δ функций, будучи подмножеством $L_2(\Delta)$, не совпадает с $L_2(\Delta)$. Например, любая кусочно непрерывная на отрезке Δ функция пространству $L_2(\Delta)$ принадлежит, а непрерывной на Δ быть не обязана:

$$C(\Delta) \subset L_2(\Delta), \qquad C(\Delta) \neq L_2(\Delta).$$

Значения функций из $L_2(\Delta)$ могут быть как вещественными, так и комплексными. К примеру, функция $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, где $x \in \mathbb{R}$, комплекснозначна и принадлежит $L_2(\Delta)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $L_2(\Delta)$, то их произведение также принадлежит $L_2(\Delta)$. Это утверждение сразу следует из оценки

$$2|f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \quad \forall\, x \in \Delta,$$

которую надо проинтегрировать по отрезку $[\alpha, \beta]$. Сумма $f(x) + g(x)$ — это снова элемент пространства $L_2(\Delta)$, как это следует из поточечного неравенства

$$(|f(x)| + |g(x)|)^2 \leqslant 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \quad \forall\, x \in \Delta,$$

если его проинтегрировать по отрезку $[\alpha, \beta]$.

Таким образом, любая линейная комбинация функций из $L_2(\Delta)$ — это снова функция из $L_2(\Delta)$. Это означает по определению, что $L_2(\Delta)$ с обычными операциями сложения и умножения на число является линейным (векторным) пространством как над полем вещественных чисел (в случае вещественнозначных функций), так и над полем комплексных чисел.

В пространстве $L_2(\Delta)$ вводится скалярное произведение. В случае вещественнозначных функций $f(x)$ и $g(x)$ их скалярное произведение определяется следующим равенством:

$$f, g \in L_2(\Delta) \Rightarrow (f, g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x)\, dx.$$

Если же функции $f(x)$ и $g(x)$ комплекснозначны, то полагают

$$f, g \in L_2(\Delta) \Rightarrow (f, g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Здесь $\overline{g(x)}$ означает взятие комплексного сопряжения к величине $g(x)$.

Например, скалярное произведение (f, g) по отрезку $[-\pi, +\pi]$ двух комплекснозначных функций $f(x) = e^{inx}$ и $g(x) = e^{imx}$ с натуральными степенными параметрами n и m, $m \neq n$, вычисляется по формуле

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0.$$

Это означает, что функции e^{inx} и e^{imx}, $m \neq n$, ортогональны в пространстве $L_2([-\pi, +\pi])$.

Определенная на линейном пространстве $L_2(\Delta)$ билинейная форма (f, g) в случае вещественнозначных функций обладает следующими свойствами:

$$(f, f) \geqslant 0, \ (f, g) = (g, f), \ (\alpha f, g) = \alpha(f, g) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$(f + g, h) = (f, h) + (g, h).$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ комплекснозначны, то второе из указанных свойств заменяется на следующее равенство: $(f, g) = \overline{(g, f)}$. В частности, при $f = g$ имеет место соотношение $(f, f) = \overline{(f, f)}$, означающее что величина (f, f) вещественна. При этом вещественное число (f, f) еще и неотрицательно.

Таким образом, во всех случаях билинейная форма (f, g) обладает всеми свойствами скалярного произведения кроме одного. Именно, из условия, что $(f, f) = 0$ не следует, что функция $f(x)$ тождественно равна нулю на отрезке $[\alpha, \beta]$. Например, взяв на отрезке конечное число узловых точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, определим функцию $f(x)$ равной единице в этих выбранных узлах и нулем во всех остальных точках отрезка $[\alpha, \beta]$:

$$f(x_j) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, N; \quad f(x) = 0, \quad x \neq x_j.$$

Для определенной таким образом функции $f(x)$ по определению интеграла имеем равенства

$$(f,f)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2\,dx=0.$$

При этом подынтегральная функция не является тождественно нулевой.

Для того чтобы избежать указанной несогласованности введенной билинейной формы (f, g) с общим определением скалярного произведения предлагается придерживаться следующего соглашения:

$$f(x) \text{ и } g(x) \text{ равны в } L_2[\alpha, \beta] \Leftrightarrow (f-g, f-g) = 0.$$

В рамках этого соглашения говорят, что *разность* $(f-g)(x)$ *равна нулю почти всюду на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна и при этом $(f, f) = 0$, то $f(x)$ равна нулю во всех точках из отрезка $[\alpha, \beta]$.

Определение. *Линейное пространство* $L_2(\Delta)$ *над полем вещественных чисел с введенным на нем скалярным произведением*

$$(f, g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx$$

называют евклидовым пространством интегрируемых с квадратом на отрезке $\boldsymbol{\Delta = [\alpha, \beta]}$ *функций.*

Для этого евклидова пространства сохраняется то же самое обозначение $\boldsymbol{L_2(\Delta)}$, что и для исходного линейного пространства.

В случае пространства $\boldsymbol{L_2(\Delta)}$ над полем комплексных чисел скалярное произведение его элементов определяется следующим равенством:

$$f, g \in L_2(\Delta) \Rightarrow (f, g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Здесь $\overline{g(x)}$ — это комплексно сопряженная величина к функции $g(x)$. При этом справедливы соотношения

$$(f, g) = \overline{(g, f)}; \quad (\alpha f, g) = \alpha (f, g) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C};$$

$$(f, \alpha g) = \overline{\alpha}(f, g) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}; \qquad (f, f) \geqslant 0.$$

Определение. *Линейное пространство* $L_2(\Delta)$ *над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел с введенным на нем скалярным произведением*

$$(f, g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

называют унитарным (или эрмитовым) пространством интегрируемых с квадратом на отрезке $\Delta = [\alpha, \beta]$ *функций.*

Для унитарного пространства испольэуется то же самое обозначение $L_2(\Delta)$, что и для евклидова.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(\Delta)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$f, g \in L_2(\Delta), \quad (f, g) = 0 \; \Rightarrow \; f \perp g \quad \text{в } L_2(\Delta).$$

Множество функций из $L_2(\Delta)$ называется ортогональным, если любые его два элемента ортогональны друг другу.

Пусть $f(x)$ принадлежит $L_2(\Delta)$. Тогда неотрицательное число

$$\sqrt{(f,f)} = \Big(\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

называется нормой функции $f(x)$ в пространстве $L_2(\Delta)$. Для этой нормы используются следующие обозначения:

$$\|f\|_{L_2(\Delta)}, \quad \|f\|_{L_2}, \quad \|f \mid L_2(\Delta)\|.$$

Определение. *Ортогональная последовательность* $\{\varphi_k(x)\}$ *функций из* $L_2(\Delta)$ *называется ортонормированной, если*

$$\|\varphi_k\|_{L_2(\Delta)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Лемма (неравенство Коши—Буняковского). *Для любых двух функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из пространства* $L_2(\Delta)$ *справедлива оценка*

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_{L_2(\Delta)} \cdot \|g\|_{L_2(\Delta)}. \tag{B}$$

Доказательство. Получим неравенство (B) в случае унитарного пространства $L_2(\Delta)$. Если $g(x) = 0$, то оценка (B) верна: в обеих ее частях стоят нули. Пусть теперь $g \neq 0$ и при этом $\|g\|^2_{L_2(\Delta)} = (g,g) = 1$. Тогда для любого комплексного числа α справедливо равенство

$$(f+\alpha g, f+\alpha g) = (f,f) + \alpha(g,f) + \overline{\alpha}(f,g) + \alpha\overline{\alpha}(g,g).$$

Полагая $\alpha = -(f,g)$, получаем

$$\alpha(g,f) = -(f,g)(g,f) = -(f,g)\overline{(f,g)} = -|(f,g)|^2,$$

$$\overline{\alpha}(f,g) = -(g,f)(g,f) = -|(g,f)|^2,\ \alpha\overline{\alpha} = |(f,g)|^2.$$

Учитывая, что $|(f,g)| = |(g,f)|$ и что $(g,g) = 1$, имеем далее

$$\alpha(g,f) + \overline{\alpha}(f,g) + \alpha\overline{\alpha}(g,g) = -2|(f,g)|^2 + |(f,g)|^2,$$

$$(f+\alpha g, f+\alpha g) = (f,f)(g,g) - |(f,g)|^2 \geqslant 0.$$

Полученное неравенство запишем следующим образом: $|(f,g)|^2 \leqslant (f,f)(g,g)$. Извлекая из обеих частей квадратный корень, получаем искомое соотношение (в).

Пусть теперь $g \neq 0$ и при этом $\|g\|^2_{L_2(\Delta)} \neq 1$. В этом случае применим к паре функций $f(x)$ и $\frac{1}{\|g\|}g(x)$ оценку (В), что возможно в силу равенства $\|\frac{1}{\|g\|}g(x)\| = 1$, снова получим искомое соотношение (В). $\square$

Впервые неравенство (В) было получено Буняковским. Его также называют неравенством Шварца.

Отметим также, что оценка (В) представляет собой интегральный аналог следующего неравенства Коши для сумм:

$$\left|\sum_{j=1}^{N} a_j b_j\right| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{N} |b_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Это объясняет, почему оценку (В) называют также неравенством Коши — Буняковского.

Наличие в линейном пространстве $L_2(\Delta)$ скалярного произведения и соответствующей ему нормы позволяет ввести в $L_2(\Delta)$ понятие сходящейся последовательности его элементов.

Определение. *Последовательность* $\{f_k(x)\}$ *функций из* $L_2(\Delta)$ *сходится к функции* $f(x)$ *из этого пространства, если* $\|f_k - f\|_{L_2(\Delta)} \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Для обозначения этой $L_2(\Delta)$-сходимости последовательности $\{f_k(x)\}$ используют обычную символику теории пределов, то есть пишут $f_k \to f$ при $k \to \infty$, или же

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

При этом последнее равенство понимается не как поточечный предел, но как сходимость к нулю $L_2(\Delta)$-нормы разности $f_k - f$.

Конечно же, если $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ для каждой точки x из отрезка Δ, то есть сходится поточечно, то $f_k(x)$ сходится к $f(x)$ и по норме пространства $L_2(\Delta)$.

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называют сходящимся по норме пространства $L_2(\Delta)$, если по этой норме сходится последовательность частичных сумм этого ряда.

Помимо нормы $\|f\|_{L_2(\Delta)}$ функции $f(x)$ часто используются следующие ее же нормы:

$$\|f\|_{L_1(\Delta)} = \int\limits_{\Delta} |f(x)|\, dx, \qquad \|f\|_{C(\Delta)} = \max_{\Delta} |f(x)|.$$

2^0. Пусть есть последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ ненулевых функций из $L_2(\Delta)$. Тогда

$$\|\varphi_k\|_{L_2(\Delta)} \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Будем предполагать также, что функции этой последовательности взаимно ортогональны:

$$\varphi_k \perp \varphi_l, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \ldots .$$

Взяв произвольную функцию $f(x)$ из $L_2(\Delta)$, рассмотрим всевозможные разности вида

$$f(x) - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k(x), \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Здесь β_1, β_2, ..., β_N — это некоторые числа, вещественные или комплексные. Квадрат $L_2(\Delta)$-нормы рассматриваемой разности вычисляется по формуле

$$\|f-\sum_{k=1}^{N}\beta_k\varphi_k\|^2=(f-\sum_{k=1}^{N}\beta_k\varphi_k, f-\sum_{k=1}^{N}\beta_k\varphi_k)=$$

$$(f,f)-\sum_{k=1}^{N}\overline{\beta}_k(f,\varphi_k)-\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\varphi_k,f)+\sum_{k=1}^{N}\beta_k\overline{\beta}_k(\varphi_k,\varphi_k).$$

Коэффициент Фурье a_k функции $f(x)$ из $L_2(\Delta)$ по ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$ определяется из соотношения

$$(f, \varphi_k) = a_k(\varphi_k, \varphi_k) = a_k \|\varphi_k\|^2.$$

Следовательно, рассматриваемый квадрат нормы $\|f - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k\|^2$ представим как следующее выражение:

$$\|f\|^2 + \sum_{k=1}^{N} (\beta_k \overline{\beta}_k - \overline{\beta}_k a_k - \beta_k \overline{a}_k) \|\varphi_k\|^2. \qquad \text{(Sq)}$$

Взяв в этом равенстве $\beta_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, получим в результате

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2.$$

В частности, получаем следующую последовательность оценок:

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Здесь a_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, — это коэффициенты Фурье функции $f(x)$ из $L_2(\Delta)$ по исходной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$.

Перейдя в полученном неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получим оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{Bes}$$

Это соотношение называется *неравенством Бесселя*.

Представление выражения $\|f - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k\|^2$ в виде квадратичной формы

$$\|f\|^2 + \sum_{k=1}^{N} (\beta_k \overline{\beta}_k - \overline{\beta}_k a_k - \beta_k \overline{a}_k) \|\varphi_k\|^2 \qquad \textbf{(Sq)}$$

позволяет также обосновать важное *свойство минимальности коэффициентов Фурье*.

Заметим, что при любом номере k число $\beta_k \overline{\beta}_k - \overline{\beta}_k a_k - \beta_k \overline{a}_k$, входящее сомножителем в выражение $(\mathbf{Sq})$, является вещественным и при этом справедливо равенство

$$\beta_k\overline{\beta}_k - \overline{\beta}_k a_k - \beta_k \overline{a}_k = |a_k - \beta_k|^2 - |a_k|^2.$$

Следовательно, квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^{N}(\beta_k\overline{\beta}_k - \overline{\beta}_k a_k - \beta_k \overline{a}_k)\|\varphi_k\|^2$$

достигает своего минимального значения при условии, что $\beta_k = a_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$.

Таким образом, справедливо соотношение

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\| = \min_{\beta_1,\dots,\beta_N} \|f - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k\|. \quad \text{(Min)}$$

Заметим, что всевозможные линейные комбинации вида $\sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k(x)$ образуют в эрмитовом пространстве $L_2(\Delta)$ линейное подпространство.

Равенство (Min) означает, что расстояние произвольного элемента $f(x)$ до этого подпространства совпадает с нормой

$$\|f-\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\|,$$

где a_k, $k=1,2,\ldots,N$, — это коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

3^0. Важную роль в описании эрмитовых пространств играют *полные множества элементов* этих пространств.

Определение. *Последовательность* $\{\varphi_k(x)\}$ *функций из* $L_2(\Delta)$ *называется полной в этом пространстве, если для любой функции* $f(x)$ *из этого пространства и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая линейная комбинация вида* $\sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)$, *что*

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k\|_{L_2(\Delta)} < \varepsilon.$$

Например, в эрмитовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ полной является тригонометрическая система функций

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \ldots, \cos nx, \quad \sin nx, \ldots$$

На любом конечном отрезке $[a, b]$ последовательность алгебраических степенных функций $1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \ldots, x^n, \ldots$ образует полную в $L_2[a, b]$ последовательность функций.

Особый интерес представляют полные ортогональные системы функций в $L_2(\Delta)$. Такого рода системы исполняют в пространстве ту же роль, что и ортогональные базисы в конечномерном евклидовом пространстве.

4^0. Пусть последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ ортогональных на отрезке $[a, b]$ функций не содержит нулевых элементов. Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2(\Delta)$ возможно построить соответствующий ей ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}.$$

Этот ряд аналогичен разложению произвольного элемента конечномерного евклидова пространства в линейную комбинацию по векторам ортогонального базиса.

Теорема (равенство Парсеваля). *Ряд Фурье функции* $f(x)$ *из пространства* $L_2(\Delta)$ *по ортогональной системе* $\{\varphi_k(x)\}$ *сходится по норме в пространстве* $L_2(\Delta)$ *тогда и только тогда когда выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2, \tag{Par}$$

где a_k *— это коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *по рассматриваемой ортогональной системе.*

Доказательство. Воспользуемся установленным ранее равенством

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (\mathrm{P_N})$$

Если ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится по норме в $L_2(\Delta)$, то по определению имеет место предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\|^2 = 0.$$

Учитывая его и переходя к пределу в формуле $(\mathrm{P_N})$, получим в результате искомое равенство (Par).

Если же для функции $f(x)$ из $L_2(\Delta)$ справедливо равенство Парсеваля (Par), то это означает по определению, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\|f\|^2-\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\|\varphi_k\|^2\right)=0.$$

Следовательно, предел при $N \to \infty$ выражения в правой части равенства $(\mathrm{P_N})$ равен нулю. Но тогда равен нулю и предел выражения в левой части этого же равенства, то есть ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится по норме в $L_2(\Delta)$. $\square$

Если система $\{\varphi_k(x)\}$ не только ортогональна, но и ортонормирована, то равенство Парсеваля принимает особенно простой вид:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \qquad (\mathrm{Par}')$$

Теорема (достаточность полноты для сходимости в среднем). *Пусть ортогональная система функций $\{\varphi_k(x)\}$ полна в пространстве $L_2(\Delta)$. Тогда ряд Фурье по этой системе любой функции $f(x)$ из $L_2(\Delta)$ сходится к этой функции по $L_2(\Delta)$-норме.*

Доказательство. По условию полноты для любого $\varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация вида $\sum\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k\varphi_k(x)$, обладающая тем свойством, что

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k\varphi_k(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Для любого номера $N \geqslant N(\varepsilon)$ рассмотрим линейную комбинацию $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)$, где a_k — это коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой ортогональной системе. Пользуясь свойством минимальности коэффициентов Фурье, получаем оценку

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)\| \leqslant \|f(x) - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi_k(x)\|,$$

где β_1, β_2, ..., β_N — произвольные комплексные числа. Возьмем в этой оценке

$$\beta_1 = c_1, \ldots, \beta_{N(\varepsilon)} = c_{N(\varepsilon)}, \ \beta_{N(\varepsilon)+1} = \cdots = \beta_N = 0.$$

Тогда получим неравенство

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)\| \leqslant \|f(x) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k \varphi_k(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь N — произвольный номер с условием $N \geqslant N(\varepsilon)$. По определению предела полученная оценка означает, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ по норме пространства $L_2(\Delta)$, то есть в среднем. $\square$

Известно, что система тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \ldots$$

ортонормирована на отрезке $[-\pi, \pi]$ и полна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Применяя предыдущую теорему, заключаем, что *ряд Фурье по тригонометрической системе любой функции* $f(x)$ *из* $L_2[-\pi, \pi]$ *сходится к этой функции в среднем.*

Точнее функция $f(x)$ совпадает как элемент пространства $L_2[-\pi,\pi]$ с суммой тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Коэффициенты в этом разложении вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

При этом равенство Парсеваля принимает следующий вид:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

В случае, если функция представляется рядом Фурье в комплексной форме, получаем следующую формулировку:

Функция $f(x)$ *и сумма тригонометрического ряда в комплексной форме* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ *совпадают как элементы пространства* $L_2[-\pi, \pi]$.

При этом справедливо равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$