## Содержание

**1 Аналоговые сигналы, отсчеты, дискретизация и интерполяция сигнала. Потеря информации** **1**

**2 Пространство $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Преобразование Фурье и равенство Планшереля. Функции ограниченного спектра. Ширина спектра** **2**

**3 Теорема Котельникова для функций из $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$. Ряд Котельникова. Период и частота дискретизации** **3**

**4 Неулучшаемость условия на период $T$ отсчетов: пример** **7**

# 1 Аналоговые сигналы, отсчеты, дискретизация и интерполяция сигнала. Потеря информации

Математически заданный аналоговый сигнал принято отождествлять с некоторой непрерывной функцией $x = x(t)$ вещественной переменной $t$. Переменная $t$ при этом представляет собой время, измеряемое в процессе распространения исходного сигнала. Удобно предполагать, что функция $x(t)$ изначально задана на всей числовой оси, причем во время, когда сигнал отсутствует, эта функция равна нулю.

Пусть измерение распространяющегося аналогового сигнала происходит в равноотстоящие моменты времени $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $\Delta t > 0$. В результате получается некоторая новая числовая последовательность $\{x(t_k)\}$, элементы которой принято называть отсчетами.

Замена функции $x(t)$ последовательностью ее отсчетов называется дискретизацией сигнала. Процесс восстановления непрерывного сигнала $x = x(t)$ по известной последовательности его отсчетов $\{x(t_k)\}$ называется интерполяцией.

Имеется много возможностей интерполировать сигнал по известной системе отсчетов, т.е. множество правил вида $\{x(t_k) | k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\} \rightarrowtail x^* = x^*(t) \in C(\mathbb{R})$.

Восстановленная по такого рода правилу функция $x^*(t)$ в общем случае с исходной функцией $x(t)$ не совпадает. Таким образом, возникает разница между $x(t)$ и $x^*(t)$, о которой принято говорить как о потере информации, или же о погрешности интерполяции.

В связи с процессом сигнал — дискретизация — интерполяция — новый сигнал приходится решать вопрос о выборе таких шага дискретизации $\Delta t$ и последующего способа интерполяции, при котором потеря информации оказывается наименьшей. Вариант согласованных между собой дискретизации и интерполяции, при которых для достаточно широкого класса сигналов потери информации вообще не происходит, дает теорема Котельникова.

# 2 Пространство $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Преобразование Фурье и равенство Планшереля. Функции ограниченного спектра. Ширина спектра

Дадим определения, необходимые для формулировки теоремы отсчетов и укажем сопутствующие этим определениям результаты.

**Определение**

Абсолютно интегрируемые на числовой прямой функции образуют в совокупности линейное пространство, обозначаемое как $L_1(\mathbb{R})$. Функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$. Если $f(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, то определена норма этой функции $|f|_{L_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$.

**Определение**

Пусть функция $f(t)$ интегрируема с квадратом на числовой прямой, т.е $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$. Тогда говорят, что $f(t)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Если $f(t)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, то норма этой функции определяется равенством $|f|_{L_2} = (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.

**Формула Планшереля (равенство Парсеваля)**

Известно, что для любой функции $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$ определено ее преобразование Фурье $F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\xi t}dt$, $\xi \in \mathbb{R}$. При этом $F(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и имеет место формула Планшереля (равенство Парсеваля):

$$|f(t)|_{L_2}^2 = |\widehat{f}(\xi)|_{L_2}^2 = |M(\xi)|_{L_2}^2.$$

функция $f(t)$ связана со своим преобразованием Фурье формулой обращения: $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi$. Для любой функции $f(t)$ из $L_1(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье существует и удовлетворяет оценке $|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\xi t}dt| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = |f|_{L_1}$. Множество преобразований Фурье всевозможных функций из $L_1(\mathbb{R})$ условимся обозначать как $A = A(\mathbb{R})$.

**Определение**

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \ \forall \xi \colon |\xi| > \omega, \qquad ((B))$$

то говорят, что $f(t)$ имеет ограниченный спектр. При этом наименьшее положительное число $\omega$ со свойством $(B)$ называется шириной спектра.

# 3 Теорема Котельникова для функций из $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$. Ряд Котельникова. Период и частота дискретизации

Сформулируем основной результат о функциях с ограниченной шириной спектра. Точнее, установим, что сигнал с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями, отсчитанными через равные интервалы времени $T = \frac{1}{2\omega}$, где $\omega$ — ширина спектра сигнала.

**Теорема (Котельникова)**

Пусть функция $f(t)$ принадлежит пересечению $L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$, или же пространству $L_2(\mathbb{R})$, причем образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ обращается в нуль вне отрезка $[-\omega, +\omega]$ числовой оси, т.е. $f(t)$ имеет конечную ширину спектра. Тогда для любого положительного $T$, удовлетворяющего условию

$$0 < 2T\omega \leq 1, \qquad ((T))$$

справедливо равенство

$$f(t) = 2T\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin(2\pi\omega)(t-nT)}{2\pi\omega(t-nT)}. \qquad ((NK))$$

Ряд в правой части формулы $(NK)$ сходится поточечно, если $f(t)$ принадлежит пересечению $L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$. Если же $f(t)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$, то ряд $(NK)$ сходится по норме $L_2(\mathbb{R})$.

**Доказательство**

Пусть сначала функция $f(t)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$. Определим вспомогательную функцию $G(\xi) = \begin{cases} F(\xi) = \widehat{f}(\xi) \text{ при } |\xi| < \omega, \\ 0 \text{ при } \omega \leq |\xi| \leq \frac{1}{2T} \end{cases}$. Это определение корректно в силу соотношений $0 < 2T\omega \leq 1$, справедливых по условию теоремы. Отметим, что так определенная функция $G(\xi)$ на отрезке $-\frac{1}{2T} \leq \xi \leq +\frac{1}{2T}$ непрерывна. Продолжим функцию $G(\xi)$ на всю числовую прямую периодически с периодом $\frac{1}{T}$ и получившуюся в результате функцию разложим в соответствующий периоду $\frac{1}{T}$ комплексный ряд Фурье: $G(\xi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n\xi t}$. Коэффициенты этого ряда определяются формулами $c_n = T \int\limits_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} g(\xi) e^{-i2\pi n\xi t} d\xi = T \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi n\xi T} d\xi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Применяя формулу обращения и учитывая, что $\widehat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi| > \omega$, имеем далее

$$f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} \widehat{f}(\xi) e^{-i2\pi\xi t} d\xi = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi t} d\xi. \qquad ((1))$$

Полагая здесь $t = nT$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получаем последовательность равенств

$$f(nT) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi nT} d\xi = \frac{c_n}{T}. \qquad ((2))$$

Подставив в равенство (1) полученное выше разложение функции $G(\xi)$ в ряд Фурье, поменяем затем операции интегрирования и суммирования местами. Тогда придем к соотношениям

$$f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi m\xi t}) e^{-i2\pi\xi t} d\xi = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i2\pi(t-nT)\xi}) d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi} d\xi. \qquad ((3))$$

Возможность интегрировать здесь ряд Фурье почленно обеспечивается условием принадлежности функции $f(t)$ пространству $L_1(\mathbb{R})$. Интеграл в правой части равенства (3) считается явно: $\int\limits_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi} d\xi = \frac{\sin[2\pi(t-nT)\omega]}{\pi(t-nT)}$. Подставляя это представление в формулу (3), получаем далее

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{\sin[2\pi(t-nT)\omega]}{\pi(t-nT)}. \qquad ((4))$$

Но согласно равенству (2) $c_n = Tf(nT)$. Следовательно, имеем $f(t) = 2\omega T \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin[2\pi\omega(t-nT)]}{2\pi\omega(t-nT)}$, т.е. искомое равенство $(NK)$.

В случае, если $f(t)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$, равенство $(NK)$ понимается как равенство функции $g(t)$ его правой части, принадлежащей пространству $L_2(\mathbb{R})$, другому элементу $f(t)$ из этого же пространства, т.е. как следующее соотношение:

$$|f-g|_{L_2} = 0. \qquad ((E))$$

Отметим, что если $f(t)$ и $g(t)$ равны поточечно, то они совпадают и как элементы $L_2(\mathbb{R})$, обратное же, вообще говоря, неверно. Имея целью установить соотношение $(E)$ для заданной $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$, как и в предыдущем случае введем вспомогательную функцию $G(\xi) = \begin{cases} F(\xi) = \widehat{f}(\xi) \text{ при } |\xi| < \omega, \\ 0 \text{ при } \omega \le |\xi| \le \frac{1}{2T} \end{cases}$.

Затем продолжим эту заданную на отрезке $[-\frac{1}{2T}, +\frac{1}{2T}]$ функцию периодически с периодом $\frac{1}{T}$ на всю ось и разложим получившуюся периодическую функцию в ряд Фурье с периодом $\frac{1}{T}$. Частичная сумма $S_N(\xi)$ этого ряда Фурье имеет следующее представление $S_N(\xi) = \sum\limits_{n=-N}^{+N} c_n e^{i2\pi n\xi T}$, где $c_n = Tf(nT)$. Для функции $f(t)$, как и ранее, справедливо представление $f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} \widehat{f}(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi$. Следовательно, справедлива формула $|f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2} = |\int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2} =$ $|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2}$, где $\chi_\omega(\xi)$ — это единичный импульс, определяемый соотношениями $\chi_\omega(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\xi| \le \omega, \\ 0 \text{ при } |\xi| > \omega \end{cases}$. Применяя формулу Планшереля (равенство Парсеваля), получаем следующее соотношение $|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2} = |\chi_\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]|_{L_2} = |G(\xi) - S_N(\xi)|_{L_2[-\omega,+\omega]}$. Для полученной нормы в силу условия $0 < 2T\omega \le 1$ справедлива оценка $|G(\xi) - S_N(\xi)|_{L_2[-\omega,+\omega]} \le |G(\xi) - S_N(\xi)|_{L_2[-\frac{1}{2T},+\frac{1}{2T}]}$. Таким образом, справедливо неравенство $|f(t) - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2} \le |G(\xi) - S_N(\xi)|_{L_2[-\frac{1}{2T},+\frac{1}{2T}]}$. Переходя здесь к пределу при $N \to +\infty$ и учитывая, что $S_N(\xi)$ — это частичная сумма ряда Фурье $G(\xi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n\xi T}$, получаем предельное равенство $\lim\limits_{N\to+\infty} |f(t) - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi|_{L_2} = 0$. Покажем, что это соотношение и есть искомая формула $(NK)$. Имеем в соответствии с определением частичной суммы: $\int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi t}d\xi = \sum\limits_{n=-N}^{+N} c_n \int\limits_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi}d\xi =$ $\sum\limits_{n=-N}^{+N} c_n \frac{\sin[2\pi(t-nT)\omega]}{\pi(t-nT)}$. Подставляя сюда равенство $c_n = Tf(nT)$, видим, что интеграл $\int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi)e^{-i2\pi\xi T}d\xi$ представляет собой частичную сумму ряда в правой части формулы $(NK)$. $\square$

**Определение**

Ряд в правой части формулы $(NK)$ называют рядом Котельникова. Параметр $T$ в этом разложении называют периодом дискретизации. Величина $2\omega$ называется частотой Найквиста, или частотой дискретизации.

Параметры в разложении функции в ряд Котельникова имеют определенный физический смысл: $2\omega$ — это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не допустить потерю информации; $T = \frac{1}{2\omega}$ — это максимальный период дискретизации, т.е. максимально допустимый промежуток времени между импульсами, при котором информация о сигнале не теряется.

# 4 Неулучшаемость условия на период $T$ отсчетов: пример

Отметим, что условие $0 < 2T\omega \leq 1$ в теореме Котельникова существенно. Как показывает следующий пример, отказаться от этого условия нельзя.

Пусть $T > 0$, $\omega > 0$ и при этом $2T\omega > 1$. Рассмотрим следующую функцию: $\frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}$, $t \in \mathbb{R}$. Эта функция всюду непрерывна, причем $f(0) = 1$. Кроме того $f(t)$ принадлежит линейному пространству $L_2(\mathbb{R})$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})})^2 dt = \frac{T}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(\xi)}{\xi})^2 d\xi < +\infty$. Преобразование Фурье рассматриваемой функции $f(t)$ находится в явном виде: $F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \begin{cases} T \text{ при } |\xi| \leq \frac{1}{2T}, \\ 0 \text{ при } |\xi| > \frac{1}{2T} \end{cases}$. Таким образом, функция $f(t)$ имеет ограниченный спектр, причем, в силу предположения, что $2T\omega > 1$, ширина $\frac{1}{2T}$ этого спектра строго меньше $\omega$: $|\xi| \geq \omega > \frac{1}{2T} \Rightarrow \widehat{f}(\xi) = 0$. Далее имеем следующие равенства: $f(nT) = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq 0, \\ 1 \text{ при } n = 0 \end{cases}$. Таким образом, правая часть $g(t)$ формулы $(NK)$ принимает следующий вид $2T\omega \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin(2\pi\omega(t-nT))}{2\pi\omega(t-nT)} = 2T\omega \frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega t} = g(t)$. При этом непрерывные функции $f(t)$ и $g(t)$ в некоторой окрестности нуля отличаются друг от друга: $g(0) = 2T\omega > 1 = f(0)$. Следовательно, $|f - g|_{L_2} > 0$ для рассматриваемой функции $f(t)$ равенство $(NK)$ не выполняется ни поточечно, ни в смысле равенства элементов $L_2(\mathbb{R})$.