

4. Матрица смежности и свойства графа

Матрица смежности (adjacency matrix) - таблица $n \times n$, где (n - кол-во вершин в графе). $matrix[i][j] = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in edges$. Для мультиграфов вместо единицы записывается количество рёбер.

Матрицы смежности могут использовать для подсчёта количества путей в графе.

Условные обозначения:

- I - единичная матрица (главная диагональ из единиц, остальное - нули)
- J - матрица целиком состоящая из единиц
- A - матрица смежности (ячейка a_{ij} будет обозначаться как $A(i, j)$)

Для неорграфа $A^T = A$.

Связь степеней вершин и значений A :

- в неорграфе: $deg(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$
- в орграфе: $deg_+(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ и $deg_-(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$

Т. о количестве путей произвольной длины через матрицу смежности. Для любого графа G ячейка (i, j) матрицы смежности в степени k - кол-во путей из v_i в v_j длины k . *Доказательство:* для матрицы A^1 утверждение очевидно - $A(i, j) = 1 \Rightarrow$ вершины смежны. Это база индукции. Далее будем считать, что утверждение теоремы верно для A^k и докажем его справедливость для A^{k+1} . Любой путь длины $k+1$ из v_i в v_j будет содержать путь длины k из v_i в соседей v_j ($N(v_j)$). Будем обозначать принадлежащие этому множеству вершины как v_p , тогда по условию кол-во путей из v_i в v_p длины k будет $A^k(i, p)$. Значит для вычисления путей из i в j длины $k+1$ нам надо сложить все $A^k(i, p)$, то есть получаем формулу:

$$\sum_{v_p \in N(v_j)} A^k(i, p) = \sum_{l=1}^n A^k(i, l) A(l, j) = A^{k+1}(i, j)$$

След матрицы (trace) - сумма главной диагонали матрицы смежности в степени k. Некоторые особенности следа:

- $\text{tr}(A) = 0$ - для простого графа без петель
- Для неориентированного графа: $\text{tr}(A^2) = 2|E|$. Доказывается через банальный факт того, что мы из каждой вершины идём во всех её соседей, а затем обратно, то есть $A^2(i, i) = \text{deg}(v_i)$
- Связь с количеством треугольников t в графе: $6t = \text{tr}(A^3)$. Для каждой вершины мы можем пройти циклический путь двумя способами (условно выражаясь, по часовой стрелке и против), также учитывая, что в треугольнике 3 вершины, каждая из которых может быть стартовой, получаем, что ячейка $A(i, i)$ показывает нам кол-во треугольников, в которые входит v_i , умноженное на 6
- q - циклы длины 4. Тогда $\text{tr}(A^4) = 8q - 2|E| + 2 \sum_{i=1}^{|V|} \text{deg}^2(v_i)$.
Получается данная формула простыми арифметическими преобразованиями при суммировании 3 случаев циклов длины 4 для каждой вершины:

1. Обычный квадрат. Их будет $8q$ по тем же резонам, что $6t$ в пункте выше (в итоговом выражении для следа, для отдельной вершины - $2q$)
2. $v_i - x - v_i - y$, где $x, y \in N(v_i)$ - таких циклов будет $\text{deg}^2(v_i)$
3. $v_i - x - y - x$, где $x \in N(v_i)$ и $y \neq v_i$ & $y \in N(x)$ - таких циклов будет $\sum_{x \in N(v_i)} (\text{deg}(x) - 1)$

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(A^4) &= \sum_{i=1}^n \left(2q_i + \text{deg}(v_i)^2 + \sum_{v_j \sim v_i} (\text{deg}(v_j) - 1) \right) \\
 &= 8q + \sum_{i=1}^n \left(\text{deg}(v_i)^2 - \text{deg}(v_i) + \sum_{v_j \sim v_i} \text{deg}(v_j) \right) \\
 &= 8q - 2m + \sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{v_j \sim v_i} \text{deg}(v_j) \\
 &= 8q - 2m + \sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i)^2 + \sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i)^2 \\
 &= 8q - 2m + 2 \sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i)^2
 \end{aligned}$$

○

Графы с $n = |V| \geq 2$ связные \Leftrightarrow все ячейки вне главной диагонали матрицы $B = A + A^2 + \dots + A^{(n-1)} > 0$. Фактически, минимальная степень, в которой $A(i, j) > 0$ - это минимальная длина пути $i-j$.

Доказательство:

- Если граф связный, то между любыми вершинами i, j можно будет построить путь длины $k \leq n-1 \Rightarrow A^k(i, j) > 0 \Rightarrow B(i, j) > 0$
- *В обратную сторону:* если для любой $B(i, j) > 0 (i \neq j) \Rightarrow$ найдётся такое минимальное $k \leq n-1$, что $A^k(i, j) > 0$, значит есть простой путь из i в j . Отсюда следует, что все вершины связаны со всеми, а значит граф связный

Матрица смежности дополнения графа ($A(G')$), далее будет A') - матрица, где все ячейки изначально равные нулям (не считая диагональных), равны единицам - и наоборот. Матрица смежности и матрица смежности дополнения связаны равенством $A + A' + I = J$, которое напрямую следует из определения дополнения графа как графа, при объединении с которым исходный граф даст полный граф.

Если матрица симметрична, то все собственные значения будут вещественными, а собственные вектора будут взаимноортогональны. Напомним, что с.з. будут находиться через уравнение $\det(\lambda I - M) = 0$

○. Характеристический полином матрицы смежности - $p(t) = \det(tI - A)$. Или, выражая полученные с.з., получаем $p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$

○. Спектр графа - набор скаляров собственных значений графа, расположенный по неубыванию. ($\text{spec}(G) = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$)

Любое собственное значение графа не превосходит его максимальную степень. Более того, будет справедливо неравенство $\frac{2|E|}{n} \leq \lambda_n \leq \Delta(G)$

Регулярный граф - граф, в котором все степени вершин одинаковы. Граф k -регулярный \Leftrightarrow единичный вектор - его собственный вектор с собственными значениями $= k$. Доказывается в обе стороны через тот факт, что для k -регулярного графа $Ae = ke = \{\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)\} = \{k, k, \dots, k\}$

Спектры изоморфных графов идентичны. **Обратное не верно**

12. Способы подсчета количества остовных деревьев

Алгоритм стягивания ребра

Обозначим $T(G)$ как кол-во деревьев графа G .

G^*e граф со стянутым ребром e , то есть для $e = (u, v)$ мы получаем новую вершину, инцидентную со всеми рёбрами, с которыми были инцидентны u и v .
 $V(G^*e) = V(G) - 1$, $E(G^*e) = E(G) - 1$. **Стянутое дерево продолжает быть деревом**

Т. Для ребра $e = u-v$, где $u \neq v$: $T(G) = T(G^*e) + T(G-e)$. *Доказательство:* $T(G-e)$ будет содержать все деревья, в которых нет e , $T(G^*e)$ будет содержать все деревья, в которые включено ребро e (добавляя стянутую вершину в дерево, мы тут же добавляем в дерево стянутое ребро и обе его вершины). Отсюда мы получаем 2 непересекающихся множества деревьев, объединение которых целиком покрывает исходное $T(G)$

Из этой теоремы легко вытекает алгоритм для поиска кол-ва остовных деревьев:

- Делим граф на граф со стянутым ребром и вырезанным.
- Количество остовных деревьев исходного графа - сумма кол-ва остовных деревьев со стянутыми вершинами и деревьев, где стянутого ребра нет.
- Рекурсивно продолжаем операцию до тех пор, пока граф не будет разложен на простые компоненты, для которых кол-во остовных деревьев считается "на глаз"

Дополнение к этому методу: если у нас в графе возникает cut-vertex, то мы можем разорвать граф по этой вершине, продублировав её в двух новых графах. Тогда кол-во остовных деревьев в исходном графе будет равно произведению кол-ва остовных в новых двух графах

Теорема для полного графа и код Прюфера

Формула Келли: Кол-во остовных деревьев для n -дерева $= n^{(n-2)}$.

Доказывается через тот факт, что описно остовное дерево может быть кодом Прюфера длины $n-2$, а таких различных кодов для полного графа может быть n штук

Использование на практике: Выбираем лист с наименьшим номером.

Записываем в код Прюфера вершину, смежную с данной, затем удаляем этот

лист. Повторяем до тех пор, пока не останется одно ребро (т.е. дерево не будет состоять из двух листьев).

Обладая кодом Прюфера, можно восстановить остовное дерево: в код Прюфера не входят листья, при этом выбирали мы листья с наименьшим номером, поэтому идёт прямо по коду, добавляя к вершинам из кода листья с соответствующими номерами (*номера возрастают с пропуском входящих в код вершин (когда мы добавили лист к коду, мы вычёркиваем эту запись из кода, а значит вершина, которой больше нет в коде, также добавляется в очередь на присоединение)*)

Метод Лапласиана

Матрица Лапласа:

- $i == j \Rightarrow a_{ij} = \deg v_i$
- $(i, j) \in E \Rightarrow a_{ij} = -1$
- otherwise $\Rightarrow a_{ij} = 0$

То есть $L = D - A$, где D - матрица степеней, A - матрица смежности

Т. Киргоффа о связи матриц и деревьев: кол-во остовных деревьев в графе можно посчитать как определитель матрицы Лапласа, из которой мы удалили i -ю строку и столбец.