Лекция № 15

Введение в теорию игр. Часть 3

Introduction to game theory. Part 3

Матричные игры

Определение. Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называются **матричными играми**.

Матричная игра — это конечная игра двух лиц с нулевой суммой (т. е. сумма выигрышей игроков в каждой ситуации равна нулю). Такая игра полностью определяется матрицей вида:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

Строки матрицы соответствуют чистым стратегиям игрока 1, столбцы — чистым стратегиям игрока 2, на их пересечении стоит выигрыш игрока 1 в соответствующей ситуации, т. е. ситуации $s = (i, j)$ соответствует выигрыш $H_1(s) \equiv H(i, j) = h_{ij}$.

Матричные игры

Тогда выигрыш игрока 2 равен $H_2(s) = -H_1(s)$ для всех $s \in S$.

Здесь игрок 1 имеет m стратегий, игрок 2 – n стратегий.
Такая игра называется $m \times n$ – игрой. Матрица H называется *матрицей игры* или *матрицей выигрышей* (*платежной матрицей*).

Цель игрока 1 — максимизировать свой возможный выигрыш, при этом увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 2 (так как игра антагонистическая).
Аналогично для игрока 2: увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 1.
Поэтому при выборе стратегии игрок 1 будет руководствоваться следующими соображениями. При стратегии i игрока 1 игрок 2 выберет стратегию j^*, максимизирующую его выигрыш (тем самым минимизирующую выигрыш игрока 1):

$$h_{ij^*} = \min_j h_{ij}.$$

Матричные игры

Тогда *оптимальная* стратегия игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей h_{ij*}, $i = 1, 2, \ldots, m$, (т. е. при любой стратегии игрока 2), будет состоять в выборе стратегии $i*$, для которой выполняется:

$$h_{i*j*} = \max_i h_{ij*} = \max_i \min_j h_{ij}.$$

Аналогичными соображениями будет руководствоваться игрок 2 при выборе стратегии: обеспечить наибольший возможный выигрыш при любом выборе стратегии игрока 1, т. е. выбрать стратегию, которая обеспечит ему max из возможных выигрышей:

$$-h_{i*j}, \; j = 1, 2, \ldots, n, \text{ где } h_{i*j} = \max_i h_{ij},$$

причем для второго игрока выигрыш равен $-h$, где h — выигрыш игрока 1.

Матричные игры

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 2 будет состоять в выборе стратегии j*, для которой выполняется:

$$-h_{i^*j^*} = \max_j(-h_{i^*j}) = \max_j(-\max_i h_{ij}) = -\min_j \max_i h_{ij}\,,$$

отсюда получим:

$$h_{i^*j^*} = \min_j \max_i h_{ij}.$$

Матричные игры

Теорема 3.1. Для любой матрицы H справедливо неравенство $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь j-й столбец, например, $j = 1$. Тогда имеем:

$$h_{i1} \le \max_i h_{i1} \text{ при любом } i = 1, 2,.., m.$$

Данное неравенство справедливо и при других $j = 2, \dots, n$, и поэтому

$$h_{ij} \le \max_i h_{ij} \text{ при всех } i \text{ и для любого } j.$$

Взятие минимума по j от обеих частей не нарушает неравенства, следовательно,

$$\min_j h_{ij} \le \min_j \max_i h_{ij} \text{ при всех } i.$$

Так как с правой стороны стоит константа и при всех i левое выражение ограничено этой константой, то имеем:

$$\max_i \min_j h_{ij} \le \min_j \max_i h_{ij}.$$

Ситуации равновесия в матричной игре

Определение. В игре с матрицей H стратегии, на которых достигаются $\max_i \min_j h_{ij}$ и $\min_j \max_i h_{ij}$, называются соответственно *максиминной* (игрока 1) и *минимаксной* (игрока 2).

Величины $v_* = \max_i \min_j h_{ij}$ и $v^* = \min_j \max_i h_{ij}$ называются соответственно нижнее и верхнее значения (цена) игры.

Определение. Для матричной игры с платежной матрицей H *ситуация равновесия по Нэшу* $(s_1^{(i*)}, s_2^{(j*)}) \equiv (i*, j*)$ определяется неравенствами:

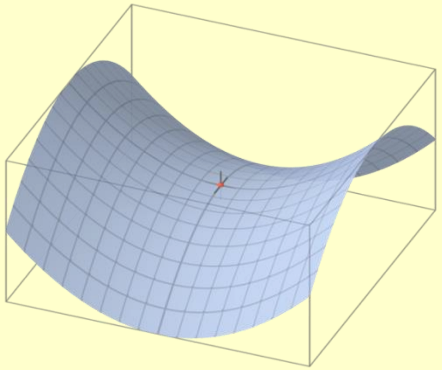
$$h_{ij*} \leq h_{i*j*} \leq h_{i*j} \qquad (3.1)$$

для любых $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пара $(i*, j*)$, удовлетворяющая неравенству (3.1), называется *седловой точкой* матрицы H. В седловой точке элемент матрицы h_{i*j*} является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Седловая точка существует не всегда.

Ситуации равновесия в матричной игре

Матрица с 1-м седловым элементом (равным 4):



$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Матрица с 4-мя седловыми элементами (равными 2):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Эта матрица не имеет седловой точки:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ситуации равновесия в матричной игре

Для матричных игр характерны следующие свойства.

1. Функция выигрыша $H(i, j) = h_{ij}$ принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия.

Если ситуация (i^*, j^*) — ситуация равновесия по Нэшу в матричной игре Γ, то $v = H(i^*, j^*)$ называется *значением (ценой) игры* Γ.

2. $\max\limits_{1 \leq i \leq m} \min\limits_{1 \leq j \leq n} h_{ij} \leq \min\limits_{1 \leq j \leq n} \max\limits_{1 \leq i \leq m} h_{ij}.$

3. $v = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \min\limits_{1 \leq j \leq n} h_{ij} = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \max\limits_{1 \leq i \leq m} h_{ij} = h_{i^*j^*}.$

4. Если существует седловая точка (i^*, j^*) платежной матрицы H, то стратегии $(s_1^{(i^*)}, s_2^{(j^*)})$ являются *оптимальными* стратегиями игроков в данной игре. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого игрока не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Ситуации равновесия в матричной игре

Теорема 3.2. Для существования в матричной игре седловых точек (ситуаций равновесия) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} \,. \qquad (3.2)$$

Следствие из теоремы 3.2. Имеет место следующее свойство седловых точек — *прямоугольность множества седловых точек*. Если (i^*, j^*) и (i^{**}, j^{**}) — седловые точки платежной матрицы H, то точки (i^*, j^{**}) и (i^{**}, j^*) также будут седловыми для матрицы H. Значения функции выигрыша $H(i, j) = h_{ij}$ во всех ее седловых точках равны друг другу.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ситуации равновесия в матричной игре

Схема нахождения седловых точек матрицы *H*.

1. Для каждой стратегии *i* игрока 1 (по строкам) находится $\min_j h_{ij}$.

2. Среди полученных величин $\min_j h_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, определяется наибольшая, т. е. $\max_i \min_j h_{ij}$.

3. Для каждой стратегии *j* игрока 2 (по столбцам) находится $\max_i h_{ij}$.

4. Среди полученных величин $\max_i h_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определяется наименьшая, т. е. $\min_j \max_i h_{ij}$.

5. Если выполняется равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij},$$

то существует седловая точка $s^0 = (i^0, j^0)$, причем значение игры $v(H) = v^0 = h_{i0j0}$.

Ситуации равновесия в матричной игре

Схема нахождения седловых точек матрицы *H*.

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn}\end{pmatrix}\left.\begin{matrix}\to \min\limits_j h_{1j}\\ \to \min\limits_j h_{2j}\\ \to \dots\\ \to \min\limits_j h_{mj}\end{matrix}\right\}\to \max_i \min_j h_{ij}.$$

$$\begin{matrix}\downarrow & \quad\downarrow & \quad\downarrow & \quad\downarrow\end{matrix}$$

$$\underbrace{\max_i h_{i1}\quad \max_i h_{i2}\quad \dots\quad \max_i h_{in}}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij}$$

Ситуации равновесия в матричной игре

Пример 3.1. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -3 \\ \to 0 \\ \to 2 \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}}\right\} \to \max_i \min_j h_{ij} = 2.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$\underbrace{2 \quad 5 \quad 4}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij} = 2$$

Здесь максимин и минимакс равны, следовательно, значение игры $v\ (H) = v^0 = 2$. Существует седловая точка матрицы H — ситуация $(i^0, j^0) = (3, 1)$, образованная третьей стратегией игрока 1 и первой стратегией игрока 2, которые являются *оптимальными* стратегиями игроков в данной игре.

Ситуации равновесия в матричной игре

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -3 \\ \to 0 \\ \to 2 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} \right\} \to \max_i \min_j h_{ij} = 2.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{2 \quad 5 \quad 4}}_{\downarrow}$$

$$\min_j \max_i h_{ij} = 2$$

Замечание. Хотя выигрыш в ситуации (3, 3) также равен 2, эта точка не является седловой, так как для игрока 2 данная ситуация приемлема (проигрыш минимален среди проигрышей третьей строки), а для игрока 1 — не приемлема (выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца).

Ситуации равновесия в матричной игре

Пример 3.2. Задана следующая игра с платежной матрицей:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 10 \\ \to 20 \end{matrix} \Big\} \to \max_i \min_j h_{ij} = 20.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 40 & 30 \end{matrix}$$

$$\underbrace{40 \quad 30}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij} = 30$$

Максимин равен 20 и достигается при $i = 2$, а минимакс равен 30 (при $j = 2$). Таким образом, игра не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). Однако игрок 1 может обеспечить себе гарантированный выигрыш, равный 20, поскольку $\max_i \min_j h_{ij} = 20$, а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем $\min_j \max_i h_{ij} = 30$ (гарантированный проигрыш игрока 2).

Следует заметить, что ни одна из ситуаций не является приемлемой одновременно для обоих игроков.

Смешанные стратегии

Если в игре с платежной матрицей H максимин и минимакс не равны друг другу, то по теореме 3.2 игра с такой матрицей не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). В этом случае игрок 1 может обеспечить себе выигрыш

$$\max_i \min_j h_{ij} = v_* \text{ (гарантированный выигрыш),}$$

а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем

$$\min_j \max_i h_{ij} = v^* \text{ (гарантированный проигрыш).}$$

Разность $v^* - v_* \geq 0$, поэтому в условиях повторяющейся игры возникает вопрос о разделе этой величины $v^* - v_*$ между игроками. Поэтому естественно желание игроков получить дополнительные стратегические возможности для уверенного получения в свою пользу возможно большей доли этой разности.

Смешанные стратегии

Игрокам целесообразно выбирать свои стратегии случайно, т. е. определять распределение вероятностей на множестве чистых стратегий, а затем предоставлять выбор конкретной чистой стратегии случайному механизму, отвечающему заданному распределению вероятностей.

Выбор игроками своих чистых стратегий с некоторыми наперед заданными вероятностями — это, по существу, один из планов проведения игры и, таким образом, тоже является некоторой стратегией. В отличие от первоначально заданных чистых стратегий, такие стратегии называются *смешанными*.

Смешанные стратегии

Определение. *Смешанной стратегией* игрока называется распределение вероятностей на множестве его чистых стратегий. Смешанную стратегию игрока можно представить в виде вектора-столбца (3.3) :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}, \qquad (3.3)$$

где x_i — вероятность выбора игроком его i-й стратегии, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2,.., m$; $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$; X^T — транспонированный вектор X.

Смешанные стратегии

Замечания

1. Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

2. Каждая чистая стратегия может рассматриваться как смешанная стратегия, в которой эта чистая стратегия выбирается с вероятностью 1, а все остальные — с вероятностью 0.

Таким образом, все чистые стратегии являются ортами e_i (векторами единичной длины) в m-мерном евклидовом пространстве векторов вида (1),

т. е. $e_i^T = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

3. Множество всех векторов (3.3) (т. е. множество смешанных стратегий игрока) составляет (m–1)-й симплекс (выпуклый многогранник), натянутый на орты чистых стратегий.

Этот симплекс обозначается S_m.

Смешанные стратегии

Смешанное расширение матричной игры.
Пусть в игре с $m\times n$-матрицей выигрышей H игроки 1 и 2 независимо друг от друга выбирают свои смешанные стратегии

$X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S_m$ и $Y^T = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S_n$.

Пара (X, Y) смешанных стратегий игроков в матричной игре называется *ситуацией в смешанных стратегиях* в этой игре.

В условиях ситуации в смешанных стратегиях каждая ситуация (i, j) в чистых стратегиях реализуется с вероятностью $x_i y_j$.

Поэтому игрок 1 получает выигрыш h_{ij} с вероятностью $x_i y_j$,
а математическое ожидание его выигрыша (как случайной величины ξ_1) равно

$$M\xi_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, x_i y_j = X^T H Y$$

Смешанные стратегии

Определение. *Смешанным расширением* матричной игры называется антагонистическая игра $\{S_m, S_n, H\}$, в которой стратегиями игроков являются их смешанные стратегии в исходной игре, а функция выигрыша игрока 1 определяется как

$$H(X, Y) = M\xi_1 = X^T H Y.$$

Смешанные стратегии

Обозначения. Матрицу $H = (h_{ij})$ ($i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n$) запишем в виде

$$H = \begin{pmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(m)} \end{pmatrix} = (h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(n)}),$$

где $h^{(i)}$ — i-я строка матрицы H; $h_{(j)}$ — j-й столбец матрицы H.

Тогда имеем (рассматривая $h^{(i)}$ как вектор-строку, а $h_{(j)}$ как вектор-столбец)

$$h^{(i)} = e_i^T H,\ h_{(j)} = He_j\ .$$

Таким образом, можно записать

$$H(X, Y) = X^T HY = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, x_i y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i\, h^{(i)} Y = \sum_{j=1}^{n} X^T\, h_{(j)} y_j \quad (3.4)$$

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Определение. В смешанном расширении матричной игры ситуация (X^*, Y^*) является *ситуацией равновесия* (седловой точкой функции выигрыша $H(X, Y) = X^T HY$), если выполняется неравенство

$$H(X, Y^*) \le H(X^*, Y^*) \le H(X^*, Y), \ \forall X \in S_m, \ \forall Y \in S_n \quad (3.5)$$

или

$$X^T HY^* \le X^{*T} HY^* \le X^{*T} HY, \ \forall X \in S_m, \ \forall Y \in S_n. \quad (3.6)$$

Число $v = H(X^*, Y^*) = X^{*T} HY^*$ является *значением игры в смешанном расширении*.

Теорема 3.3. Для того чтобы ситуация (X^*, Y^*) была равновесной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$h^{(i)}Y^* \le X^{*T} HY^* \le X^{*T} h_{(j)} \quad (3.7)$$

для $\forall i = 1, \ldots, m$; $\forall j = 1, \ldots, n$.

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Теорема 3.4. Если ситуация (i^*, j^*) в чистых стратегиях является равновесной для матричной игры с матрицей H, то она является равновесной и для смешанного расширения этой игры.

Теорема 3.5 (фон Нейман). Пусть H — произвольная $m \times n$-матрица выигрышей игры. Тогда функция выигрыша $H(X, Y) = X^T HY$ имеет седловую точку (существует ситуация равновесия в смешанном расширении игры), причем

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} X^T\, XY = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} X^T\, XY. \qquad (3.8)$$

Общее значение минимакса и максимина в (3.8) называется *значением матричной игры* с матрицей выигрышей H (в смешанном расширении) и обозначается $v(H)$.

Замечание. Представленные в теореме величины

$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} X^T\, XY$ и $\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} X^T\, XY$ существуют.

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Таким образом, **смешанное расширение матричной игры всегда имеет седловую точку** (ситуацию равновесия), образованную равновесными смешанными стратегиями игроков, доставляющими значение игры $v(H)$. Эти равновесные стратегии игроков называются их *оптимальными стратегиями*.

Значение игры $v(H)$ называют также *ценой игры*, оптимальные смешанные стратегии X^0, Y^0 игроков удовлетворяют условию (3.8), причем

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} X^T XY = \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} X^T XY =$$

$$= H\,(X^0, Y^0\,) = v(H) = v$$

По определению седловой точки $(X^0, Y^0\,)$ имеем

$$X^T HY^0 \le X^{0T} HY^0 \le X^{0T} HY \text{ для } \forall X \in S_m\,,\ \forall Y \in S_n\,. \qquad (3.9)$$

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Таким образом, выбор игроком 1 своей оптимальной стратегии дает ему средний выигрыш не меньший, чем значение игры v при любой стратегии игрока 2.

Выбор игроком 2 его оптимальной стратегии дает ему средний проигрыш не больший, чем значение игры v при любой стратегии игрока 1.