Содержание

1 Определение кватерниона, кватернионные единицы

Естественным расширением поля $\mathbb{R}$, при котором удается сохранить все свойства введенных в $\mathbb{R}$ арифметических операций (сложение и умножение), служит поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{C} = 2$. Расширением же поля $\mathbb{C}$ являются кватернионы. Множество всех кватернионов обозначается как H: $\mathbb{C} \subset H$, $\dim \mathbb{C} = 2$, $\dim H = 4$. На множестве H вводятся операции сложения и умножения, при этом удается сохранить все привычные свойства этих операций (за исключением коммутативности умножения). Кроме того, на H вводится операция умножения на вещественные числа, причем H в результате становится четырехмерным векторным пространством

Другие существующие обобщения понятия числа, так называемые гиперкомплексные числа, приводят к структурам, в которых не выполняется ассоциативность умножения, а также появляются делители нуля, то есть такие числа a и b, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \cdot b = 0$. Пример такого рода умножения дает операция векторного произведения в $\mathbb{R}^3$: она не является ни коммутативной, ни ассоциативной и для нее имеются делители нуля.

Определение

Кватернионом g называется запись следующего вида $g = t + x_i + y_j + z_k$, где $t, x, y, z \in \mathbb{R}$, а i, j, k — базисные кватернионы, называемые кватернионными единицами.

При записи кватернионов используют следующие соглашения:

a) Коэффициенты x, y, z, равные единицы, не пишутся;

b) Коэффициенты, равные нулю, приводят к записи следующего вида:

$$\begin{aligned}
1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k &\equiv 1, \\
0 + 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k &\equiv i, \\
0 + 0 \cdot i + 1 \cdot j + 0 \cdot k &\equiv j, \\
0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 1 \cdot k &\equiv k
\end{aligned}$$

и т.д.;

c) Кватернионы вида $t + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ отождествляются с вещественными числами.

2 Сложение и умножение кватернионов, некоммутативность умножения

Определение

Суммой двух кватернионов $g = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$ и $h = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$ называется кватернион $f = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$.

Чтобы определить произведение кватернионов g и h, используется следующая таблица умножения

$$\begin{array}{cccc} 1\cdot i = i & 1\cdot j = j & 1\cdot k = k & 1\cdot 1 = 1 \\ i\cdot 1 = i & j\cdot 1 = j & k\cdot 1 = k & \\ i^2 = i\cdot i = -1 & j^2 = j\cdot j = -1 & k^2 = k\cdot k = -1 & \\ i\cdot j = k & j\cdot k = i & k\cdot i = j & \\ j\cdot i = -k & k\cdot j = -i & i\cdot k = -j & \end{array}$$

Если записать (координатные) кватернионные единицы в виде последовательности $i\ j\ k$, то произведение двух последовательных единиц в этой записи равно единице, сразу за ними следующей. Запись следует повторить циклически.

Определение

Произведением кватернионов g и h называется кватернион: $f = (t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (t_1x_2 + x_1t_2 + y_1z_2 - z_1y_2)i + (t_1y_2 + y_1t_2 + z_1x_2 - x_1z_2)j + (t_1z_2 + z_1t_2 + x_1y_2 - y_1x_2)k$.

Чтобы умножить кватернион g на вещественное число $\lambda \in \mathbb{R}$, надо умножить на λ каждую координату: $\lambda \cdot g = (\lambda t_1) + (\lambda x_1)i + (\lambda y_1)j + (\lambda z_1)k$.

Относительно операции сложения и умножения на вещественное число H представляет собой четырехмерное вещественное пространство, в котором базис образуют кватернионные единицы 1, i, j, k. $H \sim \mathbb{R}^n$, $t + xi + yj + zk \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Но в H дополнительно имеется операция умножения $\begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\ t_1x_2 + x_1t_2 + y_1z_2 - z_1y_2 \\ t_1y_2 + y_1t_2 + z_1x_2 - x_1z_2 \\ t_1z_2 + z_1t_2 + x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$.

Введенные на H операции обладают свойствами

1. $g + h = h + g$ (коммутативность сложения);
2. $(g + h) + f = g + (h + f)$ (ассоциативность сложения);
3. $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$ (ассоциативность умножения);
4. $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ (Дистрибутивность);
5. $(g + h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$.

Но: $f \cdot g \neq g \cdot f$.

Пример. $i \cdot j = k$, $j \cdot i = -k$.

3 Сопряженные кватернионы, модуль кватерниона

Определение

Сопряженным к кватерниону $g = t + xi + yj + zk$ называется кватернион $t - xi - yj - zk = \overline{g}$. При этом $g\overline{g} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.

Определение

Модулем кватерниона g называется величина $|g| = \sqrt{g\overline{g}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

4 Группа единичных кватернионов

Лемма

Кватернионы, модуль которых равен единице, образуют группу по умножению: $H_1 = \{g \in H | |g| = 1\}$.

Базисные кватернионы $1, i, j, k$ принадлежат H_1. Множество H_1 представляет собой сферу радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$.

5 Скалярная и векторная часть кватернионов

Определение

Скалярной частью кватерниона $g = t + xi + yj + zk$ называется число t. Справедливо равенство $t = \frac{1}{2}(g + \overline{g})$.

Определение

Векторной частью кватерниона $g = t+xi+yj+zk$ называется кватернион $u = xi + yj + zk$. Справедливы равенства $u = \frac{1}{2}(g - \overline{g})$, $g = t + u$.

6 Скалярное и векторное произведение в пространстве кватернионов–векторов

Определение

Кватернионы вида $u = xi + yj + zk$ называются векторами, то есть кватернион–вектор $\Leftrightarrow$ его скалярная часть — 0. Критерии: g — вектор $\Leftrightarrow \overline{g} = -g$.

Кватернионы–векторы образуют трехмерное пространство $H_0 = \{u = xi+yj+zk\} \sim \mathbb{R}^3$. Базис в H_0 образуют кватернионные единицы i, j, k. По определению, этот базис полагается ортонормированным и положительно ориентированным. Это позволяет ввести в H_0 скалярное произведение: $u = x_1i+y_1j+z_1k$, $v = x_2i+y_2j+z_2k \Rightarrow \langle u, v\rangle = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \in \mathbb{R}$. Все свойства скалярного произведения выполнены.

Определение

Векторным произведением $u \times v$ называется следующий кватернион–вектор $u \times v = (y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k$ или: $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$. Например $i \times j = k$, $j \times k = i$.

Для любых двух $u \in H_0$ и $v \in H_0$ справедливо равенство

$$u \cdot v = -\langle u, v\rangle + u \times v, \qquad ((*))$$

где $u \cdot v$ — произведение в H, $\langle u, v\rangle$ — скалярное произведение в H_0, $u \times v$ — векторное произведение в H_0. Равенство $(*)$ следует из определений соответствующих произведений. Критерий: $u \in H_0$, $v \in H_0$. Тогда $u \cdot v \in H_0 \Leftrightarrow u \perp v$.

Лемма

$\forall g, h \in H$ справедливо

a) $|g \cdot h| = |g| \cdot |h|$;

b) $\overline{g \cdot h} = \overline{h} \cdot \overline{g}$;

c) $\overline{\overline{g}} = g$;

d) $\forall g \in H,\ g \neq 0\ \exists! g^{-1}\colon gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ (обратный элемент $g^{-1} = \frac{1}{|g|^2}\overline{g}$).

7 Описание вращения трехмерного пространства с помощью кватернионов

Любому кватерниону $g \in H_1$ сопоставляется матрица Q размера 3 на 3 и с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$: $g \in H_1 \mapsto Q = T(g)$.

Приведем формулу, которая позволяет построить матрицу Q по известному $g = s + ai + bj + ck$: $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$; $q_{ij} \in \mathbb{R}$, где

$$\begin{aligned}
q_{11} &= s^2 + a^2 - b^2 - c^2,\\
q_{12} &= 2ab - 2sc,\\
q_{13} &= 2ac - 2sb,\\
q_{21} &= 2ab + 2sc,\\
q_{22} &= s^2 - a^2 + b^2 - c^2,\\
q_{23} &= 2bc - 2sa,\\
q_{31} &= 2ac - 2sb,\\
q_{32} &= 2bc + 2sa,\\
q_{33} &= s^2 - a^2 - b^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Поясним, как именно эти формулы получаются. Пусть есть $g = s + ai + bj + ck$, причем $|g|^2 = s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Возьмем производный кватернион $\overrightarrow{x} = xi + yj + zk \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Образуем произведение $\overrightarrow{x'} = g \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{g}$. Тогда $|\overrightarrow{x'}| = ?\ \overline{\overrightarrow{x'}} = \overline{g \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{g}} = \overline{\overline{g}} \cdot \overline{\overrightarrow{x}} \cdot \overline{g} = g \cdot (-\overrightarrow{x}) \cdot \overline{g} = -g \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{g} = -\overrightarrow{x'}$. Таким образом, $\overline{\overrightarrow{x'}} \in H_0 \Rightarrow \overrightarrow{x'} = x'i + y'j + z'k$. Из определения произведения кватернионов получаем

$$\begin{aligned}
x' &= q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z,\\
y' &= q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z,\\
z' &= q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z,
\end{aligned}$$

где q, i, j, k — вещественные числа.

В матричном виде эти соотношения записываются следующим образом: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{x'} = Q\overrightarrow{x}$. Следовательно, каждому единичному кватерниону соответствует некоторое линейное отображение пространства $\mathbb{R}^3$ в себя. Матрица этого отображения — это определенная выше матрица Q. Будем писать $Q = T(g)$. Исследуем поподробнее свойства матрицы Q.

1. Пусть $\overrightarrow{x'} = g \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{g}$, где $g \in H_1$. Тогда $|\overrightarrow{x'}| = |g| \cdot |\overrightarrow{x}| \cdot |\overline{g}| = 1 \cdot |\overrightarrow{x}| \cdot \underbrace{|\overline{g}|}_{=1} = |\overrightarrow{x}|$. Следовательно, преобразование $Q \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ переводит вектор (x, y, z) заданной длины в вектор такой же длины;

2. Покажем, что $\det Q = 1$. Пользуясь определением матрицы Q, получаем следующие равенства $Q^* \cdot Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; где Q^* — транспонированная матрица. Следовательно, $(\det Q^*) \cdot (\det Q) = (S^2 + a^2 + b^2 + c^2)^6$, но $\det Q^* = \det Q$ и поэтому $\det Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3$ (знак + выбран опять из-за определения матрицы Q). Таким образом, если $|g| = 1$, то есть $s^2 + a^2 + b^2 + c^2$, то $\det Q = +1$.

Определение

Множество матриц Q, обладающих свойствами 1 и 2, обозначаются через $SO(3)$ и называются группой матриц вращения.

8 Отображение множества единичных кватернионов на группу матриц вращения

Поясним смысл термина матрица вращения, точнее установим, что геометрически действие матрицы Q на вектор из $\mathbb{R}^3$ сводится к вращению всего пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, на некоторый угол w, $0 \leq w \leq 2\pi$.

Пусть $g = s + ai + bj + ck \in H_1$ и $\overrightarrow{a} = ai + bj + ck$, то есть $g = s + \overrightarrow{a}$. Если $\overrightarrow{a} = 0$, $g = \pm 1$, то $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $T(g)$ можно рассматривать как тождественное преобразование $\mathbb{R}^3$ в себя. Пусть $\overrightarrow{a} \neq 0$, тогда полагаем $\overrightarrow{n} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$. Ясно, что $|\overrightarrow{n}| = 1$ и $\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{n}$, поэтому $g = s + \overrightarrow{a} = s + |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{n}$. При этом $|g|^2 = s^2 + |\overrightarrow{a}|^2 = 1$. В силу этого равенства $\exists w \in (0, 2\pi)$: $s = \cos\left(\frac{w}{2}\right)$ и $|\overrightarrow{a}| = \sin\left(\frac{w}{2}\right)$. Следовательно, $g = \cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{n}$, где $\overrightarrow{n} \in H_0$, $|\overrightarrow{n}| = 1$ и $0 \leq w \leq 2\pi$.

Теорема

Геометрически умножение вектора $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ из $\mathbb{R}^3$ на матрицу Q означает поворот $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ вокруг оси с направляющим вектором $\overrightarrow{n}$ на угол w.

Доказательство

Дополним вектор $\overrightarrow{n}$ до ортонормированного и положительно ориентированного базиса $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Покажем, что матрица Q обладает свойствами:

$$\begin{cases} Q\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}, \\ Q\overrightarrow{n} = \cos(w) \cdot \overrightarrow{n} + \sin(w) \cdot \overrightarrow{v}, \\ Q\overrightarrow{v} = -\sin(w) \cdot \overrightarrow{n} + \cos(w) \cdot \overrightarrow{v}. \end{cases} \tag{(Q_1)}$$

Иными словами, преобразование $Q = T(g)$ оставляет на месте вектор $\overrightarrow{n}$ и поворачивает на угол w плоскость, натянутую на векторы $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, то есть вращает $\mathbb{R}^3$ вокруг оси, проходящей через вектор $\overrightarrow{n}$ на угол w. Таким образом установив равенство (Q_1), мы докажем теорему.

Для вывода формул (Q_1) нам понадобится правило перемножения векторов $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{v}$ из H_0 друг на друга. Чтобы эти правила получить, воспользуемся равенством $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = -\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} \Rightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} = -1$; $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = -1$; $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = -1$; $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}$; $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}$. Таким образом, любая тройка ортонормированных положительно ориентированных векторов из H_0 перемножается по тем же правилам, что и кватернионные единицы: $\ldots, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \ldots$.

С учетом этого получаем для $g \in H_1$, $g = \cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{w}{2}\right)\overrightarrow{n}$, $|g| = 1$: $g \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n} \cdot g \Rightarrow g \cdot \overrightarrow{n} \cdot \overline{g} = \overrightarrow{n} \cdot g \cdot \overline{g} = \overrightarrow{n} \cdot |g|^2 = \overrightarrow{n}$, то есть $Q(\overrightarrow{n}) = \overrightarrow{n}$. Далее, $g \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overline{g} = \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] \cdot \overrightarrow{u} \cdot \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] = \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{u} + \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{v}\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] = \left[\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right] \cdot \overrightarrow{u} + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \cos(w) \cdot \overrightarrow{u} + \sin(w) \cdot \overrightarrow{v}$, то есть второе из равенств (Q_1) имеет место.

Далее $g \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overline{g} = \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] \cdot \overrightarrow{v} \cdot \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] = \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{v} - \sin\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{u}\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{w}{2}\right) \quad \overrightarrow{n}\right] = -2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{u} + \left[\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right] \cdot \overrightarrow{v}$. То есть и третье из равенств (Q_1) также выполнено — теорема доказана. $\square$

9 Композиция двух вращений

Покажем, что построенное отображение $T\colon H_1 \to SO(3)$ переводит H_1 на все $SO(3)$. Для этого воспользуемся известным утверждением, что любая матрица Q из $SO(3)$ задает вращение вокруг некоторого единичного вектора $\overrightarrow{n}$, $|\overrightarrow{n}| = 1$, на некоторый угол w. Взяв для этой матрицы Q кватернион $g = \cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \overrightarrow{n}$, получим $Q = T(g)$, что и требовалось.

Отметим, что $T\colon H_1 \to SO(3)$ не является взаимно однозначным, так как $T(g) = T(-g)$. Однако, если $g_1 \in H_1$ и при этом $T(g_1) = T(g)$, то обязательно $g_1 = +g$ или $g_1 = -g$

Пусть $g_1 \in H_1$ и $g_2 \in H_1$. Тогда справедлива формула

$$T(g_2 \cdot g_1) = T(g_2) \cdot T(g_1). \tag{(Q_2)}$$

$T(g_1)$ определяет следующее линейное преобразование $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{x'} = g_1 \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{g_1}$, $T(g_2) \to \overrightarrow{x''} = g_2 \cdot \overrightarrow{x'} \cdot \overline{g_2}$. Поэтому $T(g_2) \cdot T(g_1) \Rightarrow \overrightarrow{x''} = g_2 \cdot (g_1 \cdot \overrightarrow{x}\,\overline{g_1}) \cdot \overline{g_2} = (g_2 \cdot g_1) \cdot \overrightarrow{x} \cdot (\overline{g_1} \cdot \overline{g_2}) = (g_2 \cdot g_1) \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overline{(g_2 \cdot g_1)}$, то есть $T(g_2) \cdot T(g_1)$ совпадает с $T(g_2 \cdot g_1)$.

Как уже установлено, преобразование $T(g_2 \cdot g_1)$ представляет собой вращение вокруг оси, проходящей через вектор $\overrightarrow{a}$ на некоторый угол w. Пользуясь формулой (Q_2), выразим вектор $\overrightarrow{a}$ и угол w через s_1, a_1, s_2, a_2, соответствующие в (Q_2) сомножителям

$$\begin{array}{lcl} g_1 = s_1 + \overrightarrow{a_1} & \text{и} & g_2 = s_2 + \overrightarrow{a_2}, \\ s_1 = \cos\left(\frac{w_1}{2}\right) & \text{и} & s_2 = \cos\left(\frac{w_2}{2}\right). \end{array}$$

Пусть $g_2 \cdot g_1 = g = s + \overrightarrow{a}$, где $s = \cos\left(\frac{w}{2}\right)$. Тогда $g_2 \cdot g_1 = \left[s_2 + \overrightarrow{a_2}\right] \cdot \left[s_1 + \overrightarrow{a_1}\right] = s_2 \cdot s_1 + s_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + s_1 \cdot \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_1} = \left[s_1 \cdot s_2 - \langle\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\rangle\right] + s_2 \cdot \overrightarrow{a_1} + s_1 \cdot \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{a_1}$. Таким образом, $T(g_2 \cdot g_1)$ производит вращение на угол w, определенный из соотношения $\cos\left(\frac{w}{2}\right) = s_1 \cdot s_2 - \langle\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\rangle$. Вращение происходит вокруг вектора $\overrightarrow{a} = s_2 \cdot \overrightarrow{a_1} + s_1 \cdot \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}$.