1 Transitive closure of a binary relation, it's existence

Предложение (Транзитивное замыкание)

Дано отношение r на множестве A, оно является транзитивным замыканием, т.е.

$$r^* = \bigcup \{r^n | n \geq 1\}$$

Доказательство

Во-первых, отметим, что r^* транзитивно. Действительно, пусть $(a, b), (b, c) \in r^*$. Тогда для некоторых $n, m \geq 1$, $(a, b) \in r^n$ и $(b, c) \in r^m$. Но тогда $(a, c) \in r^n \circ r^m = r^{n+m} \subseteq r^*$. Так как $r^1 = r$, то $r \subseteq r^*$. Доказательство минимальности r^* проведём по индукции: покажем, что $r^n \subseteq r'$ для любого транзитивного r' содержащего r. Основание индукции - $n = 1$ очевидно. Теперь предположим, что $r^{n-1} \subseteq r'$ и $(a, c) \in r^n \overset{def}{=} r^{n-1} \circ r$. По определению композиции существует некоторое b такое, что $(a, b) \in r^{n-1}$ и $(b, c) \in r$. Тогда $(a, b), (b, c) \in r'$, и так как r' транзитивно, то $(a, c) \in r'$.

2 Semantically equivalent propositional formulas: distributivity, and De-Morgan laws

Определение

Формулы $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ и $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ называются **семантически эквивалентными**, тогда и только тогда, когда при любом означивании $\gamma : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \{0, 1\}$ верно, что

$$\gamma(\phi) = \gamma(\psi)$$

Отношение семантической эквивалентности $\sim \subseteq L^2_{prop}$ обозначается следующим образом:

$$\phi \sim \psi \overset{def}{\Leftrightarrow} \phi \text{ и } \psi \text{ семантически эквивалентны}$$

Замечание

Формулы $\phi(v_1, \dots, v_n)$ и $\psi(v_1, \dots, v_n)$ семантически эквивалентны $\Leftrightarrow$ тогда и только тогда, когда их таблицы истинности совпадают.

Предложение

Отношение семантической эквивалентности - это отношение эквивалентности, т.е. оно является рефлексивным, транзитивным и симметричным.

Доказательство

Рефлексивность, симметричность и транзитивность следуют из соответствующих свойств равенства $=$.

Лемма 1

Следующие формулы семантически эквивалентны:

1. $(v_1 \bullet v_1) \sim v_1$ - **идемпотентность** $\bullet$
2. $(v_1 \bullet v_2) \sim (v_2 \bullet v_1)$ - **коммутативность** $\bullet$
3. $(v_1 \bullet (v_2 \bullet v_3)) \sim ((v_1 \bullet v_2) \bullet v_3)$ - **ассоциативность** $\bullet$

где $\bullet \in \{\wedge, \vee\}$

Доказательство

Доказывается сравнением соответствующих таблиц истинности.

Лемма 2

Следующие формулы семантически эквивалентны:

1. $\neg\neg v_1 \sim v_1$
2. $(v_1 \to v_2) \sim (\neg v_1 \vee v_2)$,
3. $(v_1 \wedge (v_2 \vee v_3)) \sim ((v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3))$ - **дистрибутивность** $\wedge$ над $\vee$
4. $(v_1 \wedge (v_2 \vee v_3)) \sim ((v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3))$ - **дистрибутивность** $\vee$ над $\wedge$

5. $\neg(v_1 \wedge v_2) \sim (\neg v_1 \vee \neg v_2)$ - Закон де Моргана
6. $\neg(v_1 \vee v_2) \sim (\neg v_1 \wedge \neg v_2)$ - Закон де Моргана

Доказательство

Доказывается сравнением соответствующих таблиц истинности.

3 Correctness theorem for the predicate calculus

Теорема (корректность $\mathbf{PredC}_\sigma$)

Если секвенция s является выводимой, то s тождественно истинна.

Доказательство

Доказательство проводится индукцией по высоте дерева вывода s. Основание индукции: s - аксиома. тождественная истинность секвенций $\phi \vdash \phi, \vdash \top$ и $\vdash (x = x)$ очевидна. Тождественная истинность секвенции $x = y, (\phi)^z_x \vdash (\phi)^z_y$ также очевидна. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех деревьев вывода высоты $< n$, и рассмотрим дерево вывода T высоты n. Тогда

$$T = \frac{T_1 \dots T_n}{s}$$

Пусть $s_i = r(T_i)$ - корни деревьев T_i. По предположению индукции все секвенции s_i тождественно истинны. Необходимо доказать тождественную истинность s. Известно, что $\frac{s_1 \dots s_n}{s} \in R_{PC}$ является правилом вывода. Проверим, что все правила вывода PredC_σ сохраняют тождественную истинность: если $\frac{s_1 \dots s_n}{s}$ является правилом вывода PredC_σ и все s_i тождественно истинны, то s также тождественно истинно. Для правил вывода PredC_σ, имеющих тот же вид, что и правила вывода исчисления высказываний, доказательство аналогично их доказательству в исчислении высказываний. Следовательно, достаточно проверить только правила с кванторами.. Возьмем, например, правило $\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x \phi}$ при условии, что $x \notin FV(\Gamma)$. Пусть $\Gamma \vdash \phi$ - тождественно истинна. Предположим, что $\Gamma \vdash \forall x \phi$ не является тождественно истинной. Тогда существует такая структура $\mathcal{M}$ и означивание $\gamma : FV(\Gamma \cup \{\phi\})$, что $\mathcal{M} \models \Gamma[\gamma]$ и $\mathcal{M} \not\models \forall x \phi$.

По определению это означает, что существует такой элемент $a \in M$, что $\mathcal{M} \not\models \phi[\gamma^x_a]$. Поскольку $x \notin FV(\Gamma)$ и $\mathcal{M} \models \Gamma[\gamma]$, $\mathcal{M} \models \Gamma[\gamma^x_a]$. По условию секвенция $\Gamma \vdash \phi$ тождественно истинна, следовательно, $\mathcal{M} \models \phi[\gamma^x_a]$ - противоречие. Остальные 3 правила рассматриваются аналогично. $\square$