Тема : Решение уравнений высокого порядка

$\mathbf{1^0}$. Формула общего решения уравнения высокого порядка. $\mathbf{2^0}$. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Общий вид и операторная форма записи. Характеристическое уравнение. Факторизованная форма. $\mathbf{3^0}$. Линейные однородные уравнения. Частные решения в виде экспонент. Формула общего решения в случае простых корней характеристического уравнения. Случай кратных вещественных корней. Случай комплексно сопряженных корней. $\mathbf{4^0}$. Линейные неоднородные уравнения. Основное правило общего решения. Метод неопределенных коэффициентов для уравнений со специальной правой частью. $\mathbf{5^0}$. Задачи для самостоятельного решения.

4^0. Сформулируем *основное правило построения общего решения для линейного неоднородного уравнения*.

Для того чтобы решить линейное неоднородное уравнение

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

надо сначала *найти общее решение соответствующего однородного уравнения, а затем* *сложить с ним любое частное решение неоднородного уравнения*.

Пусть функция $y(x) = u(x)$ задает общее решение однородного уравнения

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0,$$

а $y_*(x) = v(x)$ — это какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

В этом случае функция

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

задает общее решение неоднородного уравнения.

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти *методом неопределенных коэффициентов* при помощи одного из следующих правил.

а) Пусть правая часть $f(x)$ уравнения задается равенством

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ — полином степени m. Иными словами, неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)y = P_m(x)e^{\alpha x}.$$

Пусть число α в показателе экспоненты *не является корнем характеристического уравнения*:

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n \neq 0.$$

Тогда *частное решение неоднородного уравнения* можно найти в виде

$$y_*(x) = Q_m(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m с неопределенными коэффициентами:

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m.$$

Подставив функцию $y_*(x)$ в исходное неоднородное уравнение, приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях x.

Тогда получим алгебраическую систему из $(m+1)$ линейного уравнения для нахождения $(m+1)$ коэффициента q_0, q_1, ..., q_m.

Решив эту невырожденную систему линейных алгебраических уравнений, то есть отыскав неизвесные заранее коэффициенты q_0, q_1, ..., q_m, найдем в результате искомое частное решение.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x + 3.$$

Решение. Частное решение ищем в виде полинома первой степени $y_* = Ax + B$. Подставляя в уравнение, получаем

$$4Ax + 4B = 2x + 3.$$

Таким образом, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$, т.е. частное решение имеет вид

$$y_* = \frac{1}{4}(2x + 3).$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

задается равенством

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

так как характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$.

Следовательно, общим решением первоначального уравнения будет

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}(2x + 3).$$

Здесь C_1 и C_2 — это произвольные постоянные. $\square$

а1) Пусть число α *является корнем характеристического уравнения*, то есть

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Если кратность корня α равна k, $k \geqslant 1$, то частное решение неоднородного уравнения

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = Q_m(x) e^{\alpha x}$$

можно отыскать в виде

$$y_*(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m с неопределенными коэффициентами:

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m.$$

Подставив функцию $y_*(x)$ в исходное неоднородное уравнение, следует затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = x^2.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

Таким образом, нуль является корнем кратности 2 и частное решение ищем в виде

$$y_* = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Подставляя в данное уравнение, получаем

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$12A = 1, \quad 24A + 6B = 0, \quad 6B + 2C = 0.$$

Решая полученную систему, имеем

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = 1.$$

Записываем формулу общего решения:

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Здесь C_1, C_2 и C_3 — это произвольные постоянные. $\square$

б) Пусть правая часть $f(x)$ уравнения задается равенством

$$f(x) = \left[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right] e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — полиномы степеней m и l соответственно.

Если число $\alpha + \beta i$ *не является корнем характеристического уравнения*, то частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде

$$y_*(x) = [R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

где полиномы $R_p(x)$ и $T_p(x)$ степени

$$p = \max(m, l)$$

имеют неопределенные коэффициенты.

б1) Если число $\alpha + \beta i$ *является корнем характеристического уравнения кратности* k, $k \geqslant 1$, то частное решение можно отыскать в виде

$$y_*(x) = x^k [R_p(x) \cos \beta x + T_p(x) \sin \beta x] e^{\alpha x},$$

где полиномы $R_p(x)$ и $T_p(x)$ имеют степень

$$p = \max(m, l).$$

Коэффициенты полиномов $R_p(x)$ и $T_p(x)$ находим после подстановки функции $y_*(x)$ в исходное неоднородное уравнение.

в) Если правая часть $f(x)$ в уравнении

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

представима в виде суммы нескольких слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

то *частное решение всего уравнения можно найти как сумму частных решений*

$$y_*(x) = y_{*1}(x) + \ldots + y_{*m}(x).$$

Здесь каждая из функций $y_{*j}(x)$, $j = 1, \ldots, m$, решает неоднородное уравнение с правой частью $f_j(x)$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_j(x).$$

Этот принцип применим, в частности, если правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения задается как сумма нескольких функций вида а) и б).

В этом случае частное решение получается как *сумма частных решений, построенных* *отдельно для каждого из слагаемых, входящих в разложение функции* $f(x)$.

<u>**Пример**</u>. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 2 + e^{x}.$$

Решение. Запишем уравнение в операторной форме:

$$(D^2 + 3D + 2)y = 2 + e^{x}.$$

Будем искать его частное решение в виде

$$y = A + Be^{x}.$$

Подставляя это выражение в данное уравнение, находим

$$2A + 6Be^{x} = 2 + e^{x}.$$

Следовательно,

$$2A = 2, \qquad 6B = 1, \qquad A + Be^{x} = 1 + \frac{1}{6}e^{x}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$. Таким образом, общее решение исходного неоднородного уравнения задается равенством

$$y = 1 + \frac{1}{6}e^{x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Здесь C_1 и C_2 — это произвольные постоянные. $\square$

5^0. Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

   Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

2. $y'' + y = e^x$.

   Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$.

3. $y'' + y = 2\cos^3 x(\sec^2 x - 1).$

Ответ:

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{16}(4x \sin x + \cos 3x).$

4. $y'' - 2y' + y = \sin ax$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{(1-a^2)\sin ax + 2a\cos ax}{(1+a^2)^2}$

5. $y'' - 6y' + 9y = \frac{2+6x+9x^2}{x^3},$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{x}.$

6. $y'' + y' - 6y = a^x$

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \dfrac{a^x}{(2-\ln a)(3+\ln a)}$

7. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6,$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3.$

8. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 +$ $e^x(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}).$

9. $y'' - y = e^{x} x \cos x.$

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} +$
$+e^{x}\left((-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}) \cos x + (\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}) \sin x\right).$

10. $\frac{d^4y}{dx^x} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = \sin ax$

Ответ:

$$y = C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_3 \cos x\sqrt{3} + C_4 \sin x\sqrt{3}$$

$$+\frac{\sin ax}{a^4 - 5a^2 + 6}.$$

Тема : Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1$^{\mathbf{0}}$. Общие свойства линейных уравнений. **2**$^{\mathbf{0}}$. Линейная зависимость и независимость систем функций. Определитель Вронского. **3**$^{\mathbf{0}}$. Фундаментальная система решений. Общее решение линейного однородного уравнения. **4**$^{\mathbf{0}}$. Неоднородное линейное уравнение. **5**$^{\mathbf{0}}$. Метод вариации произвольных постоянных. **6**$^{\mathbf{0}}$. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.

1^0. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

В дальнейшем как коэффициенты

$$a_1(x), \quad \ldots, \quad a_n(x)$$

так и правая часть $f(x)$ уравнения (1) *непрерывны на интервале* (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение (1) называется *однородным*; в противном случае — *неоднородным*.

Задача Коши с начальными данными

$$y(x_0) = y_1,\ y'(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n \quad (2)$$

для уравнения (1) *имеет единственное решение*, какова бы не была точка x_0 из интервала (a, b). Это решение определено на всем интервале (a, b).

Пусть $y(x)$ — это n раз непрерывно дифференцируемая на (a, b) функция.

Будем обозначать через $L(y)$ следующее дифференциальное выражение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y.$$

Говорят, что $L(y)$ — это линейный дифференциальный оператор порядка n.

Оператор $L(y)$ обладает следующим свойством линейности:

1. $L(Cy) = CL(y)$, где C — произвольная постоянная;

2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Из свойства линейности получаем очевидные следствия:

$1'$. Если функция $y(x)$ — решение однородного уравнения $L(y) = 0$, то функция $y_1(x) = Cy(x)$, где C — постоянная, также будет решением того же однородного уравнения $L(y) = 0$.

$2'$. Если функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ — решения однородного уравнения $L(y) = 0$, то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — постоянные, также будет решением однородного уравнения $L(y) = 0$.

2^0. Функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называются *линейно независимыми функциями на промежутке* $< a, b >$ *числовой прямой*, если равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0$$

выполняется одновременно для всех чисел x из $< a, b >$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

В противном случае функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называются *линейно зависимыми на множестве* E.

Приведём примеры линейно независимых и линейно зависимых систем функций.

1. Функции

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \ldots, \quad y_n(x) = x^{n-1}$$

линейно независимы на всей числовой оси и вообще на любом интервале.

Действительно, равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$$

может выполняться для всех x из некоторого интервала лишь в случае, если все коэффициенты полинома в левой части нулевые.

2. Функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ линейно независимы на любом интервале. Если бы эти функции были линейно зависимы, то должно было бы выполняться равенство

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = C$$

одновременно для всех чисел x из выбранного интервала. Очевидно, что это не так.

3. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные числа. Функции

$$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, \quad xe^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_2 x}, \ldots,$$

$$e^{\lambda_m x}, \quad xe^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_m x}$$

линейно независимы на любом интервале.

4. Функции

$$y_1(x) = \cos^2 x, \quad y_2(x) = \sin^2 x, \quad y_3(x) = 1$$

линейно зависимы на любом интервале. Достаточно взять $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ имеют производные до порядка $n-1$ включительно на интервале (a, b). Тогда составим следующий определитель (детерминант):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Функция $W(x)$ называется *определителем*

Вронского в точке x для множества

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n(x).$$

Теорема. *Если функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы на (a, b), то их определитель Вронского $W(x)$ равен нулю в каждой точке этого интервала.*

Доказательство. Пусть $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ — линейно зависимые на интервале (a, b) функции.

Тогда найдутся постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю и такие что для каждой точки x из (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0. \tag{3}$$

Предположим, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда из (3) можем выразить функцию $y_n(x)$:

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Продифференцировав это равенство последовательно $n-1$ раз, подставим найденные значения $y_n(x)$, $y_n'(x)$, ..., $y_n^{(n-1)}(x)$ в определитель Вронского $W(x)$.

Тогда получим определитель, последний столбец которого представляет собой линейную комбинацию предыдущих его столбцов. Как известно, такой определитель равен нулю.

$\square$

Обратное предыдущей теореме утверждение неверно. Например, следующие две функции

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x \geq 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \geq 0, \\ x^2, & \textit{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

непрерывно дифференцируемы и линейно независимы на интервале $(-a, a)$.

При этом их определитель Вронского равен нулю в каждой точке:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема. *Пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы на (a, b) и каждая из них является решением линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда соответствующий этим функциям определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке (a, b).*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется точка x_0 из (a, b), в которой $W(x_0) = 0$. Составим систему из n линейных уравнений

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0,$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \qquad \ldots \qquad \qquad \ldots \qquad \qquad \ldots$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Определитель этой системы линейных относительно неизвестных C_1, ..., C_n уравнений равен нулю (он как раз и равен значению определителя Вронского в точке x_0). Следовательно, эта система имеет ненулевое решение C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0.

Рассмотрим теперь линейную комбинацию

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

Функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения $L(y) = 0$, поэтому и функция $y(x)$ будет решением того же уравнения.

Согласно выбору постоянных C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 для функции $y(x)$ имеют место равенства

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Другими словами, функция $y(x)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения $L(y) = 0$ с нулевыми условиями

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Но и функция $y_*(x) \equiv 0$ также является решением задачи Коши для однородного уравнения $L(y) = 0$ с нулевыми начальными данными.

В силу теоремы единственности для задачи Коши функции $y(x)$ и $y_*(x) \equiv 0$ обязаны совпадать всюду на (a, b). Иначе говоря, для любого числа x из интервала (a, b) должно выполняться равенство

$$C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x) = 0.$$

Но это означает, что функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы на (a, b). Это противоречит условию теоремы.

Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение о существовании точки, в которой определитель Вронского равен нулю, неверно и, следовательно, такой точки не существует. $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского* n *решений однородного уравнения* $L(y) = 0$ *равен нулю хотя бы в одной точке интервала* (a, b)*, то он равен нулю во всех точках этого интервала.*

Доказательство. Пусть в точке x_0 интервала (a, b) выполняется равенство

$$W(x_0) = 0.$$

Тогда решения $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ обязаны быть линейно зависимыми на (a, b). Следовательно, по теореме об определителе Вронского равенство $W(x) = 0$ справедливо при любом x из (a, b). $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского n решений однородного уравнения $L(y) = 0$ отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b), то он отличен от нуля во всех точках этого интервала.*

Следствие. *Для линейной независимости* n *решений линейного однородного дифференциального уравнения* $L(y) = 0$ *на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке этого интервала.*

Для вычисления определителя Вронского применяется *формула Остроградского — Лиувилля*.

Теорема (формула Остроградского-Лиувилля). *Пусть функции* $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ *являются решениями однородного уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi},$$

где x *и* x_0 — *произвольные точки из интервала* (a,b).

Доказательство. При дифференцировании определителя порядка n, элементами которого являются функции, его производная равна сумме n элементарных определителей, получающихся из исходного поочерёдной заменой элементов в 1-й, 2-й и т. д. строках их производными.

Но все такие определители, кроме последнего, равны нулю (в каждом из них имеются две одинаковые строки). Отсюда получаем

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Умножим элементы первых $n-1$ строк этого определителя соответственно на коэффициенты

$$a_n(x), \quad a_{n-1}(x), \quad \dots, \quad a_2(x).$$

Затем сложим результат с элементами последней строки. Тогда, вследствие выполнения для функций $y_i(x)$ однородного уравнения (1), получим для производной $W'(x)$ следующее выражение

$$-a_1(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Согласно определению $W(x)$ полученное равенство записывается в следующем виде

$$W'(x) = -a_1(x)W(x).$$

Заменив здесь x на переменную t, умножим обе части уравнения на функцию

$$e^{\int\limits_{x_0}^{t} a_1(s)ds}.$$

Тогда после несложных преобразований получим соотношение

$$\left(e^{\int\limits_{x_0}^{t} a_1(s)ds} W(t) \right)' = 0.$$

Интегрируя это соотношение от x_0 до x, получаем искомую формулу. $\square$

3^0. В пространстве решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ выделяют специальные системы функций, называемые базисами.

Определение. *Совокупность n решений линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

определенных и линейно независимых на (a, b), называется фундаментальной системой решений для рассматриваемого уравнения.

Теорема (существование фундаментальной системы). *Для любого линейного уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

с непрерывными на интервале (a, b) *коэффициентами существует фундаментальная на* (a, b) *система решений этого уравнения.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку x_0 интервала (a, b) и построим функцию

$y_1(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Согласно теореме существования для уравнения порядка n, функция y_1 определена во всех точках интервала (a, b).

Далее, построим функцию $y_2(x)$ как решение рассматриваемого однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad \ldots, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

На последнем шаге построим функцию $y_n(x)$ как решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Определитель Вронского построенной системы функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в точке x_0 имеет диагональный вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен 1. Поэтому система решений $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независима на интервале (a, b) и, следовательно, является фундаментальной. □

Теорема. *Пусть $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0.$$

Тогда всякая функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где C_1, ..., C_n — произвольные постоянные, решает рассматриваемое однородное уравнение.

Обратно, если $y(x)$ *есть произвольное решение однородного уравнения, то найдутся постоянные* C_1, ..., C_n, *такие что для всех* x *из* (a, b) *выполняется равенство*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Справедливость первого утверждения теоремы следует из линейности уравнения. Докажем второе утверждение.

Рассмотрим следующую систему линейных относительно C_1, ..., C_n уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y(x_0), \\ \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0), \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0), \end{cases}$$

где $y(x)$ — произвольное решение рассматриваемого однородного дифференциального уравнения, а x_0 — произвольная точка из интервала (a, b). Определитель рассматриваемой системы — это определитель Вронского функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в точке x_0. Этот определитель не равен нулю так как по условию функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения. Следовательно, сама система (с этим ненулевым определителем) имеет единственное решение C_1^0, ..., C_n^0.

Докажем, что именно эти числа и удовлетворяют нужному свойству, то есть что

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

Рассмотрим линейную комбинацию в правой части последнего равенства

$$y_*(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

Эта функция решает однородное уравнение и удовлетворяет условиям

$$y_*(x_0) = y(x_0), \quad y'_*(x_0) = y'(x_0), \quad y''_*(x_0) = y''(x_0),$$

$$\ldots, \quad y_*^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

В силу единственности решения задачи Коши функции $y_*(x)$ и $y(x)$ обязаны совпадать всюду на (a, b). $\square$

Теорема. *Однородное уравнение*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

не может иметь более n линейно независимых решений.

Доказательство. Пусть однородное уравнение имеет $n+1$ линейно независимое решение

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n(x), \quad y_{n+1}(x).$$

Рассмотрим первые n из этих решений. Если они линейно зависимы, то найдутся числа α_1, α_2, ..., α_n, не равные нулю одновременно и такие, что для всех x из (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Но тогда и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ также линейно зависимы, поскольку выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0,$$

а среди чисел α_1, α_2, ..., α_n, 0 не все равны нулю.

Если же решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему по определению.

Но тогда, согласно основному свойству фундаментальных систем, решение $y_{n+1}(x)$ выражается через эти функции:

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x), \;\; x \in (a, b).$$

Следовательно, система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ линейно зависима. $\square$