1 Relation of equinumerosity of sets, properties of this relation

Определение

Два множества A и B **равномощны**, тогда и только тогда, когда существует биекция из A в B. Это отношение обозначается как $A \approx B$. В множестве A содержится **не более** элементов, чем в B, тогда и только тогда, когда существует всюду определенная инъекция из A в B. Это отношение обозначается как $A \preceq B$.

Свойства отношения $\approx$

Для любых множеств A, B и C верно следующее:

1. $A \approx A$ - рефлексивность
2. $A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$ - симметричность
3. $A \approx B \approx C \Rightarrow A \approx C$ - транзитивность

Доказательство

Первое верно, так как $id_A : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A$. Второе верна, потому что еслиf : $A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$, то существует обратная биекция $f^{-1} : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} A$. Третье верно, потому что если $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$ является биекцией и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$ является биекцией, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$ также является биекцией.

Свойства отношения $\preceq$

Для любых множеств A, B и C верно следующее:

1. $A \preceq A$ - рефлексивность
2. $A \preceq B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$ - транзитивность
3. $A \preceq B,\ B \preceq A \Rightarrow A \approx B$ - Теорема Кантора-Бернштейна

Доказательство

Первое верно, так как $id_A : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} A$. Третье: если $f : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} B$ является инъекцией и $g : B \overset{1:1}{\rightarrowtail} C$ является инъекцией, то $f \circ g : A \overset{1:1}{\rightarrowtail} C$ также является инъекцией.

2 Normal forms of propositional formulas: DNF, CNF. Theorem about conversion to the normal form

Определение

Формула ϕ находится в **дизъюнктивной нормальной форме** (**ДНФ**), тогда и только тогда, когда ϕ является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Определение

Формула ϕ находится в **конъюнктивной нормальной форме** (**КНФ**), тогда и только тогда, когда ϕ является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Примеры

- $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (v_2 \vee v_1)$ - формула находится в КНФ.
- $(v_1 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_3 \wedge v_1 \wedge \neg v_2)$ - формула находится в ДНФ.
- $v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3$ - формула находится одновременно в КНФ и в ДНФ.
- $\neg(v_1 \to v_2)$ - формула не находится ни в КНФ ни в ДНФ.

Теорема (приведение к КНФ)

Для любой формулы ϕ существует такая формула ϕ', находящаяся в КНФ, что $\phi \sim \phi'$.

Доказательство

Докажем теорему индукцией по глубине ϕ. Основание индукции: если ϕ - атомарная формула, то ϕ является литералом, тогда он уже находится в КНФ. Теперь шаг индукции: предположим, что $d(\phi) = n + 1$ и утверждение верно для всех формул глубины $\leq n$. Рассмотрим все возможные варианты построения ϕ. Если ϕ начинается с $\neg$, то, так как ϕ - формула с тесными отрицаниями, ϕ является литералом, следовательно, она находится в КНФ. Теперь случай, когда ϕ начинается с (. Так как ϕ не содержит символов $\rightarrow$, возможны два случая: $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ или $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. Рассмотрим случай, когда $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$. Тогда по предположению индукции для формул ψ_i существуют такие формулы ψ_i', находящиеся в КНФ, что $\psi_i \sim \psi_i'$. Следовательно, по теореме о замене: $\phi \sim (\psi_1' \wedge \psi_2')$ является формулой, находящейся в КНФ. Теперь рассмотрим случай $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. По предположению индукции существуют такие ψ_i', находящиеся в КНФ, что $\psi_i \sim \psi_i'$. Следовательно, $\phi \sim (\psi_1' \vee \psi_2')$. Докажем утверждение индукцией по m количеству символов $\wedge$ в формулах ψ_i'. Если $m = 0$, это означает, что $(\psi_1' \vee \psi_2')$ является элементарной дизъюнкцией, следовательно, она находится в КНФ. Пусть утверждение верно для всех $k \leq m$, Покажем, что оно верно и для $m + 1$. Рассмотрим случай, когда символ $\wedge$ входит, например, в формулу ψ_2'. Тогда $\psi_2' = \chi_1 \wedge \chi_2$. Следовательно, по дистрибутивности:

$$\psi_1' \vee \psi_2' = \psi_1' \vee (\chi_1 \wedge \chi_2) \sim (\psi_1' \vee \chi_1) \wedge (\psi_1' \vee \chi_2)$$

Но формулы $\psi_1' \vee \chi_1$ и $\psi_1' \vee \chi_2$ содержат один символ $\wedge$, тогда по предположению индукции существуют формулы $\psi_1'' \sim \psi_1' \vee \chi_1$ и $\psi_2'' \sim \psi_1' \vee \chi_2$, находящиеся в КНФ. Следовательно, $\phi \sim (\psi_1'' \wedge \psi_2'')$ искомая формула, находящаяся в КНФ. $\square$

Теорема (приведение к ДНФ)

Для любой формулы ϕ существует такая формула ϕ', находящаяся в ДНФ, что $\phi \sim \phi'$.

Доказательство

Доказывается аналогично теореме о приведении к КНФ.

Определение

Литерал - это пропозициональная переменная/константа или отрицание пропозициональной переменной/константы. Примеры: $v_1,\ v_2,\ \neg v_1,\ \neg v_3,\ \top,\ \neg\top,\ \ldots$

Определение

Формула ϕ называется формулой с **тесными отрицаниями**, тогда и только тогда, когда после любого вхождения символа $\neg$ в формулу ϕ следует пропозициональная переменная или константа (а не символ "(" или "$\neg$").

3 Skolem normal form, theorem about Skolemization

Нормальная форма Сколема

Начнем с некоторой формулы $\phi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$, находящейся в пренексной нормальной форме. Определим **Нормальную форму Сколема** (или **Сколемизацию**) $Sk(\phi)$ формулы ϕ следующим образом.

- если ϕ является $\forall$-формулой, то $Sk(\phi) = \phi$
- в противном случае $\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi(\bar{x}, y)$ и для некоторого *нового n-местного функционального символа* f возьмём

$$Sk(\phi) = Sk(\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(\bar{x}, f(\bar{x})))$$

пример:

$$Sk(\forall x \exists y \forall z (p(x,y) \to q(f(y), z) \wedge y = h(z))) =$$

$$\forall x \forall z (p(x, g(x)) \to q(f(g(x)), z) \wedge g(x) = h(z))$$

Теорема (о сколемизации)

Для любой формулы ϕ верно следующее: ϕ выполнима $\Leftrightarrow$ $Sk(\phi)$ также выполнима.

Доказательство

Индукция по количеству кванторов $\exists$ n. Если $n = 0$, то $Sk(\phi) = \phi$ и доказывать нечего. Шаг индукции. Предположим, что $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(\bar{x}, f(\bar{x}))$ выполнима. Тогда понятно, что $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi(\bar{x}, y)$ будет также выполнима, потому что значение $y = f(\bar{x})$ - следствие такой переменной y. Обратное включение, если $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi(\bar{x}, y)$ является выполнимой в некоторой модели $\mathcal{M}$, то для любого кортежа $\bar{a} \in M$ (состоящего из значений x_i) существует такой элемент b (значение y) что $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$. Можно определить означивание f, каждому $\bar{a}$ сопоставляя b, и в таком случае $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, f(\bar{b}))$, следовательно, $Sk(\phi)$ выполнима.