Вопрос №1
Числовые множества.

Натуральные числа $\mathbb{N}$

Множество этих чисел бесконечно, для его описания используется 10 цифр $0, \ldots, 9$. По определению $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11, \ldots\}$. Можно складывать и умножать.

Целые числа $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_+ \cup \mathbb{N}_- \cup \{0\}$. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Можно умножать, складывать и вычитать.

Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Множество образуют всевозможные дроби и ноль. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{-\frac{m}{n}, 0, \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Можно складывать, умножать, вычитать, делить (не на 0) и сравнивать числа. Множество плотно, то есть для любой пары рациональных чисел a и b найдется c, лежащее между ними.

Конечные и бесконечные десятичные дроби.

$+\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$. Здесь $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_0 \geq 0$. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ - десятичные числа.

$-\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$.

Эти слова называют бесконечными десятичными дробями.

Если для некоторого натурального n все цифры α_j с индексами $j \geq n+1$ в записи $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ равны нулю, то соответствующая дробь называется конечной.

Каждой конечной десятичной дроби соответствует рациональное x, определяемое по формуле $x = \pm(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n})$.

Конечные десятичные дроби складывают, вычитают, умножают и делят друг на друга по обычным правилам арифметики для рациональных чисел. Кроме того конечные десятичные дроби сравнивают друг с другом по правилам сравнения рациональных чисел.

Равенство и неравенство десятичных дробей.

Две неотрицательные бесконечные дроби $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ назовем одинаковыми, если соответствующие им слова из цифр тождественно совпадают, то есть если $\forall j = 0, 1, 2\ldots \Rightarrow \alpha_j = \beta_j$.

Конечный начальный отрезок $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ бесконечной десятичной дроби обозначим через $(\alpha)_n$ и назовем его n-отрезком исходной дроби.

Две бесконечные непериодические десятичные дроби $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ равны друг другу, если $\forall n = 0, 1, 2, ... \Rightarrow |(\alpha)_n - (\beta)_n| \leq 10^{-n}$

Введенное понятие равенства бесконечных непериодических десятичных дробей обладает свойством рефлексивности ($\alpha = \alpha$) и симметричности (если $\alpha = \beta$, то $\beta = \alpha$).

Класс равных дробей шире, чем одинаковых. Например, $\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, если $\forall n = 0, 1, 2\ldots$ справедливо $\left|\frac{p}{q} - (\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n})\right| \leq 10^{-n}$ пример: $1 = 0,9999\ldots$

Лемма 1. Пусть десятичные дроби $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ равны в смысле данного выше определения и $\alpha_0 > \beta_0$. Тогда $\alpha_0 = \beta_0 + 1$ и $\forall n \geq 1$ $\alpha_n = 0,$ $\beta_n = 9$.

Доказательство. По условию леммы десятичные дроби равны. Следовательно, $|(\alpha)_0 - (\beta)_0| \leq 10^0 = 1$, то есть$|(\alpha)_0 - (\beta)_0| \leq 1$. Но по условию α_0 и β_0 - неотрицательные целые числа, причем $\alpha_0 > \beta_0$. Это возможно лишь при $\alpha_0 = \beta_0 + 1$.

Проверим, что при $n \geq 1$ справедливы равенства $\alpha_n = 0$, $\beta_n = 9$. Используем принцип математической индукции.

База индукции $n = 1$. Имеем $(\alpha)_1 = (\beta)_0+1$, $\alpha_1 = \beta_0+1+\frac{\alpha_1}{10}$. $(\beta)_1 = \beta_0$, $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10}$.

Вычитаем из первого равенства второе. $|(\alpha)_1 - (\beta)_1| = 1 + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{10}$

По условию десятичные дроби равны, значит $1 + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{10} \leq \frac{1}{10}$. То есть $\beta_1 - \alpha_1 \leq 9$. Но β_1 и α_1 это цифры. Последнее неравенство возможно лишь при $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 9$. Значит заключение верно для $n = 1$.

Предположение индукции $n = k$. Пусть имеются равенства $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 9$. $(\alpha)_k = \beta_0+1, 0\ldots 0$, $(\beta)_k = \beta_0, 9\ldots.9$. После запятой в этих равенствах взяты ровно k цифр. Вычитая из первого равенства второе, получаем $|(\alpha)_k - (\beta)_k| = 10^{-k}$

Шаг индукции $n = k + 1$. Имеем, $(\alpha)_{k+1} = (\alpha)_k + 0, 0\ldots 0\alpha_{k+1} =$

$(alpha)_k + \frac{\alpha_{k+1}}{10^{k+1}}$ и $(\beta)_{k+1} = (\beta)_k + 0,0\ldots0\beta_{k+1} = (\beta)_k + \frac{\beta_{k+1}}{10^{k+1}}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = (\alpha)_k - (\beta)_k + \frac{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}}{10^{k+1}}$. Или в соответствии с предположением индукции $(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = \frac{1}{10^k} + \frac{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}}{10^{k+1}}$. По условию десятичные дроби равны, значит должна выполняться оценка $(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = |(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1}| \leq \frac{1}{10^{k+1}}$ или $\frac{1}{10^k} + \frac{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}}{10^{k+1}} \leq \frac{1}{10^{k+1}}$. Домножаем на 10^k, получаем $1 + \frac{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}}{10} \leq \frac{1}{10}$. то есть $\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} \geq 9$. Но это цифры, то есть это возможно лишь при $\alpha_{k+1} = 0$ и $\beta_{k+1} = 9$. Заключение верно для $n = k+1$.

Следствия этих отношений.

Следствие. Десятичная дробь равна нулю тогда и только тогда когда все цифры в ней равны нулю. $\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \forall j = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Обозначим через β десятичную дробь, в записи которой все цифры нулевые. Пусть десятичная дробь α равна β по условию. Предположим, что при этом α и β не одинаковы. Тогда по определению равенства десятичных дробей имеем $(\alpha)_0 = \alpha_0$, $(\beta)_0 = 0$, $|(\alpha)_0 - (\beta)_0| \leq 10^0 = 1$, или $|\alpha_0| \leq 1$. Это возможно лишь в случае если $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$. Но вариант $\alpha_0 = 1$ невозможен: в этом случае в соответствии с доказанной леммой должны выполняться равенства $\beta_n = 9$, $n = 1, 2, \ldots$, что противоречит определению β. Таким образом, $\alpha_0 = 0$ и десятичная дробь α имеет вид $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$. По определению равенства десятичных дробей имеем $(\alpha)_1 = 0, \alpha_1$, $(\beta)_1 = 0, 0$, $|(\alpha)_1 - (\beta)_1| \leq \frac{1}{10}$, или $|\alpha_1| \leq 1$. Это возможно лишь в случае если $\alpha_1 = 0$ или же $\alpha_1 = 1$. Но вариант $\alpha_1 = 1$ снова невозможен: в этом случае в соответствии с доказанной леммой должны выполняться равенства $\beta_n = 9$, $n = 2, 3, \ldots$ что противоречит определению β. Таким образом, $\alpha_1 = 0$ и десятичная дробь α имеет вид $\alpha = 0, 0\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$. Равенства $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_n = 0$ доказываются аналогично.

Следствие. Если две разные десятичные дроби $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ равны друг другу, то одна - конечная, другая - периодическая с периодом 9.

Если при этом $\alpha = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n999\ldots$ и $\alpha_n \neq 9$, то $\beta = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha)_n + 1)$

Следствие (транзитивность равенства). Пусть есть десятичные дроби α, β, γ. Причем $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$. Тогда $\alpha = \gamma$.

Доказательство. Пусть α и β одинаковые слова. Тогда $\alpha = \gamma$ по определению равенства десятичных дробей.

Пусть α и β разные слова, причем α - бесконечная десятичная дробь. Тогда по предыдущему следствию имеем $\alpha = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 999\ldots$ и $\alpha_n \neq 9$ и $\beta = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)$. Далее, если β и γ - одинаковые слова, то $\alpha = \gamma$ по определению равенства десятичных дробей. если же β и γ - разные слова, то по доказанной лемме $\gamma = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 99\ldots$ т.е. снова $\alpha = \gamma$.

Пусть есть две десятичные дроби α и β, не равные друг другу, $\alpha \neq \beta$.

В этом случае согласно определению равенства десятичных дробей существует такой номер $n = p$, для которого оценка $|(\alpha)_n - (\beta)_n| \leq 10^{-n}$ неверна. Это означает, что для номера $n = p$ должна выполняться противоположная оценка, т.е. $|(\alpha)_p - (\beta)_p| > 10^{-p}$.

заметим, что $10^p \cdot (\alpha)_p$ и $10^p \cdot (\beta)_p$ - это целые числа и в соответствии с выбором номера p модуль расстояния между ними строго больше единицы:

$$|10^p \cdot (\alpha)_p - 10^p \cdot (\beta)_p| > 1. \tag{1}$$

Это возможно лишь в том случае, если расстояние между рассматриваемыми целыми числами не меньше двух:

$$|10^p \cdot (\alpha)_p - 10^p \cdot (\beta)_p| \geq 2. \tag{2}$$

следовательно, для номера p справедлива такая оценка $|(\alpha)_p - (\beta)_p| \geq 2 \cdot 10^{-p}$.

Лемма 2. Пусть десятичные дроби α и β таковы, что для некоторого номера p справедливо неравенство $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. Тогда для всех номеров $n > p$ справедлива оценка $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}$.

Доказательство. Пусть α имеет знак минус, а β имеет знак плюс. Тогда при $n > p$ имеем $(\beta)_n - (\alpha)_n \geq (\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. Пусть как α так и β имеют знак плюс. Тогда при $n > p$ имеем $(\beta)_n - (\alpha)_n = (\beta)_p - (\alpha)_p \pm (0, \beta_{p+1}\ldots\beta_n - 0, \alpha_{p+1}\ldots\alpha_n) \cdot 10^{-p}$. Воспользовавшись оценкой 2, получаем далее $(\beta)_n - (\alpha)_n \geq 2 \cdot 10^{-p} - 0, \underbrace{99\ldots9} \cdot 10^{-p}$. Цифра 9, охваченная в записи выше фигурной скобкой снизу, повторяется $(n-p)$ раз. Вынося сомножитель 10^{-p}, получаем следующую оценку снизу: $(\beta)_n - (\alpha)_n \geq (2 - 0, \underbrace{99\ldots9}) \cdot 10^{-p} = 1,00\ldots01 \cdot 10^{-p} > 10^{-p}$. Эта оценка справедлива для всех $n \geq p$.

Линейный порядок на множестве десятичных дробей

Десятичная дробь α меньше десятичной дроби β, если существует такой номер n, что $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}$.

Отметим, что в левой части последнего неравенства берется разность двух рациональных чисел, т.е. величина вполне определенная.

В соответствии с данным определением десятичная дробь $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда β положительна, и дробь $\beta < 0$ тогда и только тогда, когда β отрицательна.

Бинарное отношение $<$ обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Если $\alpha < \beta$, то и $-\alpha > -\beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$, тогда существует такой номер n: $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}$. Числа $(\beta)_n$ и $(\alpha)_n$ рациональные, $(-\beta)_n = -(\beta)_n$ и $(-\alpha)_n = -(\alpha)_n$. Учитываем это и домножаем предыдущую оценку на -1, $(-\beta)_n - (-\alpha)_n < -10^{-n}$. Домножаем на -1, $(-\alpha)_n - (-\beta)_n > 10^{-n}$. Это и значит, что $-\alpha > -\beta$.

Определенные отношения $<$ и $>$ обладают свойством **транзитивности**.

Лемма 3 (транзитивность $<$). Пусть есть три десятичные дроби α, β, γ, причем $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Тогда $\alpha < \gamma$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Тогда по определению существуют два таких номера p и q, что $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$, $(\gamma)_q - (\beta)_q > 10^{-q}$.

Возьмем $n = max(p, q)$. Тогда по лемме 2 справедливы следующие две оценки $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}$, $(\gamma)_n - (\beta)_n > 10^{-q}$.

Все числа в последней строке - это рациональные числа. Их можно складывать и вычитать, пользуясь при этом известными свойствами арифметических операций на множестве $\mathbb{Q}$. Имеем $(\gamma)_n - (\alpha)_n = (\gamma)_n - (\beta)_n + (\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-q} + 10^{-p} > 10^{-n}$.

Последнее неравенство справедливо в силу выбора n. Итоговая оценка $(\gamma)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}$ означает по определению, что $\alpha < \gamma$.

Исключив из рассмотрения периодические дроби с периодом 9, получаем следующие утверждения.

1. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall n \geq 0: \ (\alpha)_n = (\beta)_n$
2. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists n \geq 0: \ (\alpha)_n < (\beta)_n$
3. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall n \geq 0: \ (\alpha)_n \leq (\beta)_n$

Из 1),2) делаем вывод, что α и β лежат в одном из отношений порядка: $>$, $=$ или $<$

Множество десятичных дробей с введенными на нем арифметическими операциями и линейным отношением порядка (сравнением любых двух его элементов по величине) называется множеством вещественных чисел.

Числовая прямая

Числовая прямая - это прямая, на которой выбраны:

- некоторая точка O - начало отсчета; (числовой ноль)
- положительное направление, лежащее правее начала, указанное стрелкой (противоположное направление называется отрицательным);

Интервалы, отрезки и промежутки

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < +\infty\}$
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x \leqslant b\}$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$,

и так далее.

В частности, $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$.

Любой интервал представляется в виде непрерывного отрезка. Отсюда получим лемму:

Плотность множества конечных десятичных дробей

Лемма 4. Для любых двух десятичных дробей α и β, $\alpha < \beta$, существует такая конечная десятичная дробь γ, что $\alpha < \gamma < \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$, α и β - десятичные дроби, причем α не является периодической дробью с периодом 9.

По определению отношения $\alpha < \beta$ существует такой номер p, что $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. По лемме 2 для всех $n \geq p$ имеем $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}$

Рассмотрим следующую конечную десятичную дробь $\gamma = (\alpha)_{p+1} + 2 \cdot 10^{-p-1}$. Считая, что $\alpha_{p+1} \neq 9$, получаем $(\gamma)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} = 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}$

Это по определению означает, что $\alpha < \gamma$. Далее $(\beta)_{p+1} - (\gamma)_{p+1} = (\beta)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} - 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}$. То есть $\gamma < \beta$.

Доказанную лемму переформулируем двумя способами:

a Между любыми двумя вещественными числами лежит конечная десятичная дробь

b Множество конечных десятичных дробей плотно в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Десятичные приближения и их свойства

Пусть $\alpha \geq 0$, тогда $\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n$ и $\overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n + 10^{-n}$ называются соответственно нижним и верхним десятичными приближениями.

Если $\alpha < 0$, то $\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n - 10^{-n}$ и $\overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n$.

Из определения следует, что для любой десятичной дроби справедливы оценки

$$(\alpha)_n - 10^{-n} \leq \underline{(\alpha)_n} \leq \overline{(\alpha)_n} \leq (\alpha)_n + 10^{-n} \tag{3}$$

Лемма (о десятичных приближениях). Для любой десятичной дроби α справедливы следующие соотношения $\underline{(\alpha)_n} \leq \underline{(\alpha)_{n+1}}$, $\overline{(\alpha)_n} > \overline{(\alpha)_{n+1}}$, $\underline{(\alpha)_n} \leq \alpha \leq \overline{(\alpha)_n}$. Где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассуждения проведем для нижних десятичных приближений, верхние десятичные приближения рассматриваются аналогично. Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда $\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_{n+1} - (\alpha)_n = 0,\underbrace{00\ldots0}\alpha_{n+1} = 0,\alpha_{n+1} \cdot 10^{-n} \geq 0$. Цифра 0, охваченная в записи выше нижней фигурной скобкой, повторяется n раз. Таким образом, полученное итоговое неравенство имеет требуемый вид: $\underline{(\alpha)_n} \leq \underline{(\alpha)_{n+1}}$. Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда $\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_{n+1} - 10^{-n-1} - (\alpha)_n + 10^{-n} = -0,\underbrace{00\ldots0}\alpha_{n+1} + 0,9 \cdot 10^{-n} = 0,(9\alpha_{n+1}) \cdot 10^{-n}$. Учтем, что α_{n+1} - это цифра, т.е. $\alpha_{n+1} \leq 9$. Поэтому имеем искомое неравенство и для отрицательных десятичных дробей: $\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} \geq 0$.

Предположим, что для некоторого номера n имеет место оценка $\alpha < \underline{(\alpha)_n}$. Тогда применяя определение отношения $<$ на множестве десятичных дробей, а затем лемму 2, найдем такой номер p, что

$$(\underline{(\alpha)_n})_m - (\alpha)_m > 10^{-p}, \forall m \geq p \tag{4}$$

.

Если $\alpha \geq 0$, то для любого номера $m > n$ имеем $(\underline{(\alpha)_n})_m - (\alpha)_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = -0,00 \ldots 0\alpha_{n+1} \ldots \alpha_m \leq 0$. Взяв здесь $m > \max(n,p)$, получим противоречие с оценкой 4.

Если же $\alpha < 0$, то для любого номера $m > n$ имеем $(\underline{(\alpha)_n})_m - (\alpha)_m = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n - 10^{-n} + \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = 10^{-n} \cdot 0, \alpha_{n+1} \ldots \alpha_m - 10^{-n} \leq 0$. Взяв здесь $m > \max(n,p)$, снова получим противоречие с оценкой 4.

Следовательно, для всех номеров n нижнее десятичное приближение $\underline{(\alpha)_n}$ не больше чем соответствующая десятичная дробь: $\underline{(\alpha)_n} \leq \alpha$.

Лемма (сравнение дробей по десятичным приближениям). Десятичная дробь α меньше β тогда и только тогда когда для некоторого номера n верхнее десятичное приближение $\overline{(\alpha)_n}$ меньше нижнего десятичного приближения $\underline{(\beta)_n}$, т.е. когда $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$. Тогда в соответствии с определением отношения $\alpha < \beta$ существует такой неотрицательный номер p, что $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. При этом $(\alpha)_p < (\beta)_p$, а по лемме 2 при всех $n > p$ справедлива оценка $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}$. Взяв $n = p + 1$, воспользуемся неравенствами 3 и оценим разность $(\beta)_n - (\alpha)_n \geq \underline{(\beta)_n} - \overline{(\alpha)_n} - 2 \cdot 10^{-n} > 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} = 10^{-p}(1 - \frac{2}{10}) > 0$. Следовательно, $\overline{(\alpha)_n} < \overline{(\beta)_n}$. Пусть теперь для некоторого номера n верхнее десятичное приближение $\overline{(\alpha)_n}$ меньше нижнего десятичного приближения $\underline{(\beta)_n}$: $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$. По лемме о десятичных приближениях имеем $\alpha \leq \overline{(\alpha)_n}$ и $\underline{(\beta)_n} \leq \beta$. Подставляя оба этих неравенства в верхнее, получаем $\alpha \leq \overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n} \leq \beta$. Следовательно, $\alpha < \beta$.

Вопрос №2
Линейные пространства

Аксиоматическое определение векторного пространства над полем

Определение. Пусть k - произвольное поле. Линейным пространством над k называется множество X элементов, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A) На X задана бинарная операция $X \cdot X \to X$, обычно записывается аддитивно, как сложение: $(x, y) \mapsto x + y$. Множество X с указанной операцией образует абелеву группу (в такой группе групповая операция является коммутативной). Это означает следующее:

   1 $x + y = y + x$ (коммутативность)

   2 $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность)

   3 Существует нейтральный элемент $\vec{0}$ из X, называемый нулевым вектором, такой, что $x + \vec{0} = x$ для всех $x \in X$

   4 Для всех $x \in X$ существует противоположный ему вектор $(-x)$: $x + (-x) = 0$

B) На множестве $k \cdot X$ задана операция $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, называемая умножением векторов из X на скаляры из k и обладающая свойствами:

   5 $1 \cdot x = x$ (унитарность) $(1, x) \mapsto x$

   6 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$ (ассоциативность)

C) Сложение и умножение на скаляр связаны законами дистрибутивности:

   7 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$

   8 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x, y \in X$

Примечание: в 7 знак + имеет разную природу. Слева относится к элементам поля K (скалярам), а справа применяется к векторам из X.

Пример: возьмем множество $X = \mathbb{R}_+$ (положительные вещественные числа). Полагая

1. $x + y = xy \forall x, y \in X$

2. $\lambda \cdot x = x^\lambda$ (возведение x в степень $\lambda \in \mathbb{R}$).

убеждаемся в справедливости всех аксиом 1-8. Значит X в этом случае - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Нулевым вектором здесь служит $1 \in \mathbb{R}_+$.

Следствия

Из определения линейного пространства X с помощью систем аксиом извлекаются некоторые элементарные следствия. Приведем их в качестве примеров обращения с аксиомами.

1. $0 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in X$

   Доказательство. Из 7: $0 \cdot \vec{x} = (0+0)\vec{x} = 0\vec{x} + 0\vec{x}$. Добавив к обеим частям $-0\vec{x}$, получим $0\vec{x} = 0$. Аналогично $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (применяли 8)

2. Если $\lambda\vec{x} = 0$, то $\lambda = 0$ или $\vec{x} = 0$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда $\exists \lambda^{-1}$ и поэтому $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \lambda^{-1})\vec{x} = \lambda^{-1}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = 0$ (в силу следствия 1)

3. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}, \forall \vec{x} \in X$. Имеем $\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 + (-1))\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = 0$ (следствие 1)

Линейные комбинации векторов

Пусть X - линейное пространство над полем k. Для всех наборов скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k$ и векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определено выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$. Это выражение называется линейной комбинацией векторов x_i с коэффициентами λ_i.

- Умножение скаляра $\lambda \in k$ на линейную комбинацию - снова линейная комбинация: $\lambda(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum\limits_{i \in I} (\lambda\lambda_i) x_i$.

- Сумма любых линейных комбинаций - снова линейная комбинация: $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i \in I} \mu_i x_i = \sum\limits_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) x_i \in X$. Среди $\lambda_i + \mu_i$ при $i \in I$ лишь конечное число элементов поля k, отличных от нуля.

Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_i \in X | i \in I\}$ - это подмножество линейного пространства X. Тогда через $\langle M \rangle_k$ обозначается множество всевозможных линейных комбинаций векторов $x_i \in M$; $M \subset \langle M \rangle_k$

Множество $\langle M \rangle$ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры из k: $\lambda \in k$, $x, y \in \langle M \rangle \Rightarrow x + y \in \langle M \rangle, \lambda x \in \langle M \rangle$.

Линейные оболочки подмножеств векторного пространства

Определение. Множество $\langle M \rangle$ называют линейной оболочкой множества $M \subset X$.

Определение. Пусть X - векторное пространство над полем k, а Y - его подмножество. Если Y - аддитивная подгруппа в X, переходящая в себя при умножении на скаляры из k, то Y - тоже векторное пространство относительно операций сложения и умножения на скаляр, индуцированных операциями на X. В этом случае Y - линейное подпространство в X.

Пересечение любого числа векторных подпространств - это снова векторное подпространство.

Линейная оболочка $\langle M \rangle$ произвольной системы векторов $M \subset X$ является подпространством в X. При этом $\langle M \rangle$ - наименьшее из всех подпространств в X, содержащих в себе исходное множество M.

Определение. Подпространство $\langle M \rangle$ порождено векторами $x_i \in M$.

$\langle M \rangle$ также называют линейной оболочкой множества M и обозначают $\langle M \rangle = \operatorname{span}\{x_i \in M : i \in I\}$.

Примеры векторных пространств

1. Нульмерное пространство. Над любым полем k определено одноэлементное векторное пространство $X = \{0\}$. Закон умножения на скаляры: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. Основное поле k - это одномерное координатное пространство. По определению, $X = k$, операции совпадают. Если 1 - единица поля k, то $k = \langle 1 \rangle$ - линейная оболочка, порожденная множеством $\{1\}$.

3. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ - это векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{R}$ - это векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4. Пространство k^n - это n-мерное пространство ($k^n = k \cdot k \cdot \ldots \cdot k$). Операции:

   (a) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$, где $\lambda_j \in k$ и $\mu_j \in k$

(b) $\forall v \in k$ имеем $v(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (v\lambda_1, v\lambda_2, \ldots, v\lambda_n)$, где $\lambda_j \in k$

При $k = \mathbb{R}$, получаем вещественное координатное пространство $\mathbb{R}^n$

5. Пусть D - произвольное непустое множество, k - поле. Обозначим k^D множество функций $f : D \mapsto k$, наделенное операциями сложения и умножения на скаляры:

   (a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$

   (b) $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in D$

   Тогда k^D - линейное пространство функций.

6. Пусть (a, b) - интервал числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда линейное пространство $\mathbb{R}^{(a+b)}$ содержит в качестве подпространства пространство $C(a, b)$ всех непрерывных на (a, b) функций. Пространство $C(a, b)$ содержит в качестве подпространства $C^{(1)}(a, b)$ пространство всех непрерывно дифференцируемых на (a, b) функций.

7. Многочлены f от переменной t с коэффициентами из поля k, имеющие степени, меньшие n, с обычными операциями сложения и умножения на скаляр, образуют векторное пространство P_n.

Кольцо квадратных матриц с коэффициентами из поля. Определение структуры векторного пространства

Определение. Пусть есть поле k. Матрицей называется прямоугольная таблица элементов k, содержащая m строк одинаковой длины n.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = \underset{i \in 1,\ldots,n,\ j \in 1,\ldots,m}{a_{ij}}$$

i - номер строки, j -номер столбца матрицы. Матрица размера $m \cdot n$ (иногда пишут $A_{m \times n}$). Также элементы матрицы называются её коэффициентами. $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - образуют главную диагональ матрицы. Матрицы, у которых все элементы, за исключением элементов главной диагонали, равны 0, называются, диагональными.

Определение. Суммой двух матриц A и B называется матрица C, в которой все элементы попарно складываются: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Определение. Произведение матрицы A на скаляр λ - умножение каждого элемента a_{ij} на скаляр λ.

Определение. Матрица $-A = (-1)A$ называется противоположной матрицы A. Справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
8. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)A$

Таким образом, квадратные матрицы образуют линейное пространство над полем k. Обозначение: $M_n(k)$.

Определение. Произведением матриц A и B называется матрица $C = AB$, в которой элементы: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, $i \in 1, \ldots, n$, $j \in 1, \ldots, m$.

Векторное пространство $M_n(k)$ с введенной операцией умножения является кольцом.

Определение линейно зависимых и линейно независимых систем элементов векторного пространства

Пусть X - линейное пространство над полем k.

Определение. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из X называются линейно-зависимыми, если существует некоторая их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $\exists \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \in k : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, причем $\exists j : \alpha_j \neq 0$.

Определение. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ не являются линейно зависимыми, то их называют линейно независимыми: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теорема. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, где $n \geq 2$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists j :$ v_j является линейной комбинацией остальных векторов.

Если некоторая подсистема векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима, то и вся система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима.

Если система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независимая.

Теорема $(s \leq t)$. Если каждый из векторов линейно независимой системы $e_1, e_2, \ldots, e_s$ является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_t$, то $s \leq t$.

Эквивалентные системы векторов

Определение. Две системы векторов считаются эквивалентными, когда каждый вектор одной системы является линейной комбинацией другой системы.

Эквивалентные линейно зависимые системы могут состоять из разного числа векторов.

Одна из эквивалентных систем может быть линейно независимой, а другая при этом - линейно зависимой.

Число элементов в линейно независимых эквивалентных системах

Следствие теоремы $s \leq t$. Любые две эквивалентные системы линейно независимых векторов векторного пространства X содержат одинаковое количество элементов.