Тема : Линейные уравнения с переменными коэффициентами

$\mathbf{1^0}$. Общие свойства линейных уравнений. $\mathbf{2^0}$. Линейная зависимость и независимость систем функций. Определитель Вронского. $\mathbf{3^0}$. Фундаментальная система решений. Общее решение линейного однородного уравнения. $\mathbf{4^0}$. Неоднородное линейное уравнение. $\mathbf{5^0}$. Метод вариации произвольных постоянных. $\mathbf{6^0}$. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.

4^0. Рассмотрим теперь линейное *неоднородное* уравнение с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x). \qquad (4)$$

Пусть $y_0(x)$ — какое-нибудь частное решение этого неоднородного уравнения, а функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0.$$

Теорема. *Линейная комбинация вида*

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ *— произвольные постоянные, решает неоднородное уравнение* (4)*. Обратно, если* $y(x)$ *есть решение неоднородного уравнения* (4)*, то найдутся постоянные*

$C_1, \ldots, C_n$ *такие, что для всех* x *из* (a, b) *будет выполняться равенство*

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы сразу следует из линейности уравнения. Докажем второе утверждение.

Представим функцию $y(x)$ в виде суммы

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x), \tag{5}$$

где $y_0(x)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (4). Тогда функция $\widetilde{y}(x)$ является решением однородного уравнения.

Согласно основному свойству фундаментальных систем найдутся такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что для всех точек x из (a, b) выполняется равенство

$$\widetilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Подставляя это разложение в равенство (5), получаем требуемое. $\square$

Таким образом, чтобы построить общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

достаточно построить фундаментальную систему решений однородного уравнения и найти какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

5^0. Если фундаментальная система решений однородного уравнения найдена, то частное решение неоднородного можно найти с помощью *метода вариации произвольных постоянных*. Опишем этот метод в подробностях.

Частное решение линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

будем искать в виде следующей комбинации:

$$y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Здесь функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — образуют фундаментальную систему решений соответствующего линейного однородного уравнения.

Для того чтобы функция $y_0(x)$ решала рассматриваемое неоднородное уравнение, функции $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ требуется выбрать специальным образом. Опишем соответствующую процедуру выбора.

Продифференцировав функцию $y_0(x)$, получим равенство

$$y_0'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x) +$$

$$+ C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x).$$

Потребуем, чтобы функции $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ удовлетворяли условию

$$C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Учитывая это равенство, вычислим вторую производную от искомой функции:

$$y_0''(x) = C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x) +$$

$$+ C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x).$$

Вновь потребуем, чтобы n последних слагаемых в сумме дали нуль:

$$C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Вычисляя последовательно производные

$$y_0'''(x), \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)}(x)$$

и требуя каждый раз, чтобы последние n слагаемых в сумме давали нуль, получаем для функций $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ систему равенств

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \\ C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0. \end{cases}$$

При этом для производных

$$y_0'(x), \quad y_0''(x), \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)}(x), \quad y_0^{(n)}(x)$$

справедливы следующие последовательные

представления:

$$\begin{cases} y_0'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x), \\ y_0''(x) = C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x), \\ \ldots \\ y_0^{(n-1)}(x) = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x). \end{cases}$$

Дифференцируя последнее из равенств этой системы, получим производную порядка n от искомой функции:

$$y_0^{(n)}(x) = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}(x)+$$

$$+C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Подставим функцию $y_0(x)$ и найденные значения ее производных в исходное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x).$$

Учитывая, что каждая из функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ является решением соответствующего однородного уравнения, в результате получим равенство

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Добавляя это уравнение к предыдущим, получаем для функций $C_1'(x)$, …, $C_n'(x)$ следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы в каждой точке x интервала (a, b) представляет собой определитель Вронского $W(x)$ линейно независимых функций

$$y_1(x), \quad \ldots, \quad y_n(x).$$

Каждая из этих функций решает линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

и поэтому их определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке из (a, b).

Следовательно, полученная система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по правилу Крамера. В результате получим в каждой точке из (a, b) значения производных:

$$C_1'(x) = g_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = g_n(x).$$

Интегрируя эти уравнения, находим *искомое частное решение* $y_0(x)$.

Эта операция завершает метод вариации постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \tag{6}$$

Реализация для него метода вариации постоянных приводит к частному решению следующего вида:

$$y_0(x) = y_2(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt - y_1(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt.$$

Здесь x_0 — произвольная точка из (a, b), а функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (6).

Для построения общего решения уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

достаточно найти лишь одно его ненулевое решение. Второе решение этого же однородного уравнения, линейно независимое с первым, всегда можно получить, используя формулу Остроградского — Лиувилля.

Задача. *Пусть известно одно частное решение* $y_1(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Требуется найти второе решение этого уравнения, линейно независимое с первым.

Решение. Согласно формуле Остроградского — Лиувилля имеем

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(\xi)\, d\xi}$$

или, что то же самое,

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(\xi)\, d\xi}.$$

Относительно функции $y_2(x)$ это равенство представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая это уравнение, находим функцию $y_2(x)$.

Заметим, что в случае уравнения порядка n формула Остроградского — Лиувилля позволяет построить общее решение, если известны лишь $n-1$ функция из фундаментальной системы решений.

Если правая часть $f(x)$ в неоднородном уравнении

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

представлена в виде суммы нескольких слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

то частное решение всего уравнения можно найти как сумму частных решений

$$y_0(x) = y_{01}(x) + \ldots + y_{0m}(x).$$

Здесь каждая из функций $y_{0i}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, решает неоднородное уравнение с правой частью $f_i(x)$:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_i(x).$$

6^0. Сформулируем некоторые критерии линейной зависимости (независимости) системы функций, которые не используют понятие определителя Вронского.

Пусть на (a, b) заданы непрерывные функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$. Рассмотрим связанную с ними матрицу интегралов

$$\alpha_{ij} = \int_a^b y_i(x) y_j(x)\, dx, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Определение. *Детерминант матрицы интегралов*

$$\Gamma(y_1,\dots,y_m) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

называется определителем Грама системы функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$.

Система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно независима на этом отрезке тогда и только тогда, когда ее определитель Грама отличен от нуля.

Лемма. *Пусть* $y_1(x)$, *...,* $y_m(x)$ *— линейно независимая на интервале* (a, b) *система функций. Тогда и любая ее подсистема из* k *функций,* $1 \leqslant k \leqslant m$, *также линейно независима на том же интервале.*

Доказательство. Рассмотрим подсистему из первых k функций $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$. Предположим, что она линейно зависима.

Тогда найдутся числа α_1, ..., α_k, не все одновременно равные нулю и такие, что для всех x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_k y_k(x) = 0.$$

Рассмотрим набор чисел

$$\alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_m = 0.$$

В этом наборе по-прежнему не все числа одновременно равны нулю. При этом для всех точек x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0.$$

Но тогда вся система функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ должна быть линейно зависимой на интервале (a, b), а это не так.

Полученное противоречие с условием линейной независимости системы $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ доказывает, что подсистема $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$ также линейно независима. $\square$

Лемма. *Пусть подсистема* $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$ *системы функций* $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$, $1 < k < m$, *линейно зависима на интервале* (a, b). *Тогда и вся система* $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ *линейно зависима на интервале* (a, b).

Доказательство. Предположим, что система $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно независима на интервале (a, b). Но тогда, согласно предыдущему, и любая её подсистема, в том числе подсистема $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$, должна быть линейно независимой. А это противоречит условию. $\square$

Пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно независимы на интервале (a, b). Верно ли, что они линейно независимы и на любом вложенном интервале (c, d), где $a \le c < d \le b$?

Неверно, как показывает следующий пример. Функции x и $|x|$ линейно независимы на интервале $(-1, 1)$, и в то же время линейно зависимы на $(0, 1)$.

Лемма. *Пусть функции* $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ *линейно независимы на интервале* (a, b). *Тогда они линейно независимы на любом объемлющем интервале* (c, d), *где* $c \leq a$, $d \geq b$.

Доказательство. Предположим противное —

что функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (c, d).

Тогда найдутся числа α_1, ..., α_m, не все одновременно равные нулю, что для всех точек x из интервала (c, d) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0.$$

Но в этом случае это же равенство должно выполняться и для точек x из вложенного интервала (a, b). Это означает, что функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b). Получили противоречие. $\square$

Пусть есть система n раз непрерывно дифференцируемых линейно независимых на интервале (a, b) функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, определитель Вронского которой не равен нулю ни в одной точке этого интервала.

Тогда существует одно и только одно (с точностью до постоянного множителя) однородное линейное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений на (a, b). Возникает вопрос, как такое уравнение найти?

Заметим, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ искомого уравнения в каждой точке

x из интервала (a, b) должны удовлетворять системе

$$y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_1 = 0,$$

$$y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_n = 0.$$

Это система относительно неизвестных $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$. Ее определитель с точностью до знака совпадает с определителем Вронского функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, который заведомо не равен нулю.

Следовательно, в каждой точке x из интервала (a, b) система имеет единственное решение $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, которое можно найти, например, методом Гаусса.

Лемма. *Если функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ — линейно независимые на интервале (a, b) решения линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

где $n \geq m$, то эти же функции линейно независимы и на любом вложенном интервале (c, d), где $a \leq c < d \leq b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (c, d).

Тогда для любой точки x из этого интервала имеем

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0,$$

где среди чисел α_1, ..., α_m не все нулевые.

Функция $y_0(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x)$ при этом является решением исходного уравнения

$$y_0^{(n)} + p_1(x) y_0^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_0 = 0.$$

Далее, для любой точки x_0 интервала (c, d) выполняются равенства

$$y_0(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y_0^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Другими словами, функция $y_0(x)$ является решением задачи Коши для линейного однородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

По теореме единственности функция $y_0(x)$ тождественно нулевая на интервале (a, b). Но это противоречит линейной независимости системы функций $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ на данном интервале. $\square$

Тема : Методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$\mathbf{1^0}$. Метод замены переменных. $\mathbf{2^0}$. Уравнение Эйлера. Уравнение Лагранжа. Примеры. $\mathbf{3^0}$. Понижение порядка уравнения при известном частном решении. Примеры. $\mathbf{4^0}$. Уравнение Чебышева.

1^0. В отличие от уравнений с постоянными коэффициентами общего метода решения линейного уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами не существует.

Известны лишь некоторые специальные методы, позволяющие в ряде случаев упростить заданное уравнение и получить окончательное решение.

Одним из таких методов является *метод замены переменных*, позволяющий иногда свести линейное уравнение с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами.

В частности, этот метод применим для решения *уравнения Эйлера*, уравнения Лагранжа и уравнения Чебышева.

В некоторых случаях с помощью подходящей замены уравнение можно привести к более простому виду.

Перейдем от независимой переменной x к новой независимой переменной t по формуле $t = \psi(x)$.

Функция $y(x)$ при такой замене перейдёт в функцию $u(t) = y(\psi^{-1}(t))$, для производных же

y', y'', ..., $y^{(n)}$ справедливы формулы

$$y' = u' \cdot \psi'(x), \qquad y'' = u'' \cdot \psi'^2(x) + u' \cdot \psi''(x),$$

$$y''' = u''' \cdot \psi'^3(x) + 3u'' \cdot \psi'(x) \cdot \psi''(x) + u' \cdot \psi'''(x).$$

Здесь штрихи при y означают взятие производных по переменной x, а штрихи при u означают взятие производных по новой переменной t.

Подставляя значения y', y'', ... в уравнение и заменяя переменную x на выражение $\psi^{-1}(t)$, получим для функции $u(t) = y(\psi^{-1}(t))$ новое дифференциальное уравнение.

2^0. Укажем подходящую замену переменной, приводящую уравнение Эйлера с переменными коэффициентами к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Определение. *Линейное уравнение вида*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

где a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *— это постоянные числа, называется* *уравнением Эйлера*.

Уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной:

$$x = e^t \quad \text{при} \quad x > 0, \qquad x = -e^t \quad \text{при} \quad x < 0,$$

или, что то же самое:

$$t = \ln x \quad \text{при} \quad x > 0, \quad t = \ln(-x) \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Покажем, как происходит указанное сведение на примере уравнения Эйлера третьего порядка

$$x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = f(x).$$

В соответствии с приведенными выше формулами при $x > 0$ и $\psi(x) = \ln x$ имеем

$$xy' = u', \quad x^2y'' = u''(t) - u'(t),$$

$$x^3y''' = u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$u''' - 3u'' + 2u' + a_1(u'' - u') + a_2u' + a_3u = f(e^t).$$

Характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + a_1(\lambda^2 - \lambda) + a_2\lambda + a_3 = 0.}$$

Это же уравнение допускает запись в эквивалентном виде

$$\boldsymbol{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + a_1\lambda(\lambda - 1) + a_2\lambda + a_3 = 0.}$$

Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 — три разных корня последнего уравнения. Тогда функции $u_j(t) = e^{\lambda_j t}$, образуют базис в пространстве решений уравнения

$$u''' - 3u'' + 2u' + a_1(u'' - u') + a_2 u' + a_3 u = 0.$$

В случае уравнения Эйлера порядка n характеристическое уравнение для полученного в результате замены уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)+\ldots}$$
$$\boldsymbol{+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0}.$$

В качестве упражнения докажите это утверждение индукцией по порядку $\boldsymbol{n}$.

Определение. *Линейное уравнение вида*

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

где a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a *и* b *— это постоянные числа, называется уравнением Лагранжа.*

Уравнение Лагранжа приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены

$$ax + b = e^t \quad \Longrightarrow \quad t = \ln|ax + b|.$$

Заметим еще, что частные решения уравнения Эйлера удобно сразу искать в виде степенной функции с неизвестным заранее показателем:

$$y = x^\lambda.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Решение. Первый способ. Сразу ищем характеристическое уравнение и решаем его

$$\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Следовательно, общим решением преобразованного уравнения будет функция

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

По условию $x = e^t$. Поэтому справедливо

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Второй способ. Будем искать решение данного уравнения в виде

$$y = x^{\lambda},$$

где λ — неизвестное число. Подставив $y = x^{\lambda}$ в уравнение, получаем

$$x^2\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^{\lambda} = 0,$$

или $x^{\lambda}[\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 6] = 0$. Таким образом, получили то же самое характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Им соответствует фундаментальная система решений

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3.$$

Формула общего решения имеет вид

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3. \quad \square$$

Пример. Решить уравнение

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 + 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Общее решение преобразованного уравнения:

$$\boldsymbol{y = C_1 \sin t + C_2 \cos t.}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{t = \ln|x|}$ и переходя к переменной $\boldsymbol{x}$, получим общее решение исходного уравнения

$$\boldsymbol{y = C_1 \sin \ln|x| + C_2 \cos \ln|x|.} \qquad \square$$

Пример. Решить уравнение

$$(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$$

Решение. Сделаем замену независимой переменной по формуле $x-2=e^t$, тогда

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = e^t + 2.$$

Характеристическое уравнение имеет корень кратности два $\lambda_{1,2}=2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y = e^{2t}(C_1 + C_2 t) = (x-2)^2(C_1 + C_2 \ln|x-2|).$$

Правая часть неоднородного уравнения равна $e^t + 2$, поэтому существует частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_* = Ae^t + B.$$

Подставив в уравнение, найдем $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\boldsymbol{y_* = e^t + 0,5 = x - 2 + 0,5 = x - 1,5.}$$

Общее решение исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$\boldsymbol{y = (x-2)^2 (C_1 + C_2 \ln|x-2|) + x - 1,5.} \qquad \square$$

Пример. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, имеющее следующие частные решения

$$y_1 = x^4, \quad y_2 = x^4 \ln x.$$

Решение. Функции y_1 и y_2 линейно независимы. Следовательно, они могут быть фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения второго порядка.

Это уравнение с неизвестной функцией y получается по формуле

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y''(x) \end{vmatrix} = 0.$$

По другому это же уравнение можно получить, заметив, что функции y_1 и y_2 представляют собой частные решения некоторого уравнения Эйлера. При этом корни соответствующего искомому уравнению Эйлера характеристического уравнения кратные: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Следовательно, это характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$

Этому уравнению соответствует следующее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0, \qquad t = \ln|x|.$$

Переходя к переменной $x = e^t$, получаем искомое дифференциальное уравнение Эйлера:

$$x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0. \qquad \square$$

3^0. Если известно частное решение $y = y_1(x)$ линейного однородного уравнения любого порядка, то *порядок понижается на единицу с сохранением линейности уравнения*.

Для понижения порядка в уравнении следует сделать сделать замену $y = y_1 \cdot z$, где z — новая неизвестная функция. После необходимых преобразований следует сделать замену $z' = u$, затем найти функцию u и ее первообразную z.

Найти общее решение однородного уравнения второго порядка, одно частное решение $y_1(x)$ которого известно, можно понизив порядок уравнения с помощью *формулы Остроградского — Лиувилля*. Имеем по этой формуле

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi}.$$

Раскрывая определитель, получаем для искомой функции $y_2(x)$, линейно независимой с известным по условию решением $y_1(x)$, следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y_2'(x)y_1(x) - y_2(x)y_1'(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi}.$$

Разделив обе его части на y_1^2, приходим к соотношению

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{C}{y_1^2(x)}e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi}.$$

В правой части этого уравнения стоит известная функция. Отыскав ее первообразную, следует приравнять ее отношению $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ и затем уже найти $y_2(x)$.

Напомним, что общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами не существует. Однако в некоторых случаях частное решение удается найти подбором среди функций указанного вида. Покажем, как это может быть сделано на примере.

Пример. Решить уравнение

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$$

Решение. Будем искать частное решение данного уравнения в виде полинома с единичным коэффициентом при старшей степени, то есть в виде

$$y_* = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Подставляя этот полином в исходное уравнение и требуя, чтобы коэффициент при старшей степени *получившегося в результате полинома обратился в нуль*, приходим к соотношению $4n - 4 = 0$. Следовательно, $n = 1$.

Таким образом, если полином задает частное решение исходного однородного уравнения, то он обязан иметь первую степень, т.е.

имеет следующий вид: $y_*(x) = x + a$. Подставляя в уравнение, получаем $a = 0$.

Воспользуемся теперь формулой Остроградского — Лиувилля, тогда получим

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{4\xi}{2\xi+1} d\xi} = C(2x+1)e^{-2x}.$$

Здесь функция $y_1(x) = x$.

Получилось линейное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции y_2. Разделив обе его части на y_1^2, получим

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C(2x+1)e^{-2x}}{y_1^2}.$$

Учитывая, что $y_1 = x$, находим

$$\frac{y_2}{y_1} = C\int \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x^2}\,dx = -C\frac{e^{-2x}}{x}.$$

Следовательно, $y_2 = Ce^{-2x}$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет следующий вид:

$$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}.$$

Здесь C_1 и C_2 — это произвольные постоянные.

Отметим, что второе частное решение исходного уравнения можно было бы сразу искать в виде экспоненциальной функции $y_2 = e^{ax}$ с неизвестным показателем a. $\square$

<u>**Пример.**</u> Решить уравнение

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

Решение. Ищем частное решение в виде экспоненты $y_1 = e^{ax}$. Подставляя ее в исходное уравнение, получим $a = 1$.

Далее, как и в предыдущем примере, находим

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{Ce^{\int \frac{2x+1}{x} dx}}{e^{2x}} = Cx.$$

Следовательно,

$$y_2 = C \int x dx e^x = \frac{C}{2} x^2 e^x.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2 e^x = (C_1 + C_2 x^2) e^x. \qquad \square$$

4^0. *Уравнение Чебышева* записывается в виде

$$(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0,$$

где n — натуральное число, при x из $(-1, 1)$. Заменой $x = \cos t$, или $t = \arccos x$, уравнение Чебышева приводится к следующему уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(t) = C_1 \cos\, nt + C_2 \sin\, nt.$$

Возврашаясь к исходной переменной x, получаем

$$y(x) = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

Функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ является полиномом по x степени n. Это полином Чебышева.