Вопрос №1

Определение вложенных отрезков

Пусть имеется правило, согласно которому каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый отрезок $[a_n, b_n]$ числовой оси: $n \to \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$. В этом случае задана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, а упорядоченная пара $(n, [a_n, b_n])$ называется элементом этой последовательности.

Определение. Последовательность отрезков называется последовательностью вложенных отрезков, если $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Условие можно записать в виде: $\forall x : a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n$.

Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема. Пусть $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ - это последовательность вложенных отрезков. Тогда существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим отрезкам: $\exists x \in \mathbb{R} : x \in [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Доказательство. По условию вложенных отрезков имеем неравенства: $a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$. $\{a_n\}$ - монотонно возрастающая, ограничена сверху, $\{b_n\}$ – монотонно убывающая, ограничена снизу.

По теореме Вейерштрасса: $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$ (теорема о предельном переходе). Отрезок $[a, b]$ – не пуст.

Но $\forall n\ [a, b] \subseteq [a_n, b_n] \Leftrightarrow [a, b] \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Непустой отрезок внутри пересечения, следовательно , существует общая точка пересечения.

Замечание. У последовательности вложенных интервалов может не быть ни одной общей точки: $(0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n})$, при этом общих точек не будет (доказывается от противного)

Теорема о стягивающихся отрезках на числовой оси

Определение. Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ называется стягивающейся, если последовательность $L_n = b_n - a_n$ их длин стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Теорема (аксиома непрерывности Кантора). Любая последовательность стягивающихся отрезков числовой прямой имеет единственную общую точку.

Доказательство. По предыдущей теореме найдется отрезок $[a, b]$ такой, что $[a, b] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этом, $a_n \leq a$, $b \leq b_n$ для всех n, следовательно, $0 \leq b - a \leq b_n - a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $b = a$. Это и есть общая точка всех стягивающихся отрезков.

Других точек нет, предположим противное. Пусть имеется две различные точки c и c': $\forall n: \ c, c' \in [a_n, b_n]$, $c \neq c'$. Тогда $\forall n: |c - c'| \leq b_n - a_n$.

В силу стремления длин отрезков к нулю, для любого $\varepsilon > 0$: для всех номеров n, начиная с некоторого, будет выполняться $b_n - a_n < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}|c - c'| > 0$, получим $|c - c'| < \frac{1}{2}|c - c'|$. Противоречие, значит существует только одна общая точка.

Множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности Кантора

Множество $\mathbb{Q}$ в отличие от числовой прямой $\mathbb{R}$ свойством непрерывности Кантора не обладает. Пусть a_n – нижние десятичные приближения $\sqrt{2}$, а b_n - соответственно верхние. Тогда $[a_n, b_n]$ - последовательность стягивающихся отрезков в точку $\sqrt{2}$, которая не является рациональным числом.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Сходящаяся последовательность ограничена. Но обратное неверно: $x_n = (-1)^n$ ограничена, но не сходится.

Теорема. Любая ограниченная последовательность вещественных чисел содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть дана ограниченная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Из ограниченности следует, что все ее члены лежат на некотором отрезке числовой прямой, обозначим как $[a_0, b_0]$. Разделим его пополам. По крайне мере, один из полученных отрезков содержит бесконечное число членов. Обозначим как $[a_1, b_1]$. Повторяем процедуру и получаем последовательность вложенных отрезков: $[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \ldots$, в которой каждый следующий является половиной предыдущего и содержит бесконечное число членов. Длины отрезков стремятся к нулю: $|b_m - a_m| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^m} \to 0$. Получили последовательность стягивающихся отрезков. В силу теоремы о стягивающихся отрезках, $\exists E : a_m \le E \le b_m$ - единственная точка принадлежащая всем отрезкам.

Искомую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ построим по индукции: $x_{n_1} \in [a_1, b_1]; x_{n_2} \in [a_2, b_2], n_2 > n_1; \ldots; x_{n_k} \in [a_k, b_k], n_k > n_{k-1}$ - точки из каждого отрезка выбираем так, чтобы номера строго возрастали. По построению имеем: $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. $a_k \to E$, $b_k \to E$ при $k \to \infty$. По теореме о двух полицейских, $x_{n_k} \to E$.

Вопрос №2
Комплексные числа

Определение комплексных чисел.

Определение. Число $z = a + bi$, где a, b - действительные числа, называется комплексным числом. При этом действительное число a называется действительной частью числа $z = a + bi$ и обозначается $a = \Re z$; действительное число b называется мнимой частью числа $z = a + bi$ и обозначается $b = \Im z$.

Определение. Число $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Замечание 1. Любое действительное число a является и комплексным, т.к. $a = a + 0 \cdot i$.

Замечание 2. Запись комплексного числа в виде $z = a+bi$ называют алгебраической формой комплексного числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Каждому комплексному числу $a + bi$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна действительной части комплексного числа, а ордината – мнимой части. Каждой точке $M(a, b)$ координатной плоскости поставим в соответствие комплексное число $a + bi$. Установленное соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность интерпретировать (истолковывать) комплексные числа как точки некоторой плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, так как на ней расположены точки, соответствующие действительным числам. Ось ординат - мнимая ось, на ней лежат мнимые числа.

$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ - геометрическая форма комплексного числа.

Модуль и аргументы комплексного числа

Определение. Модулем комплексного числа называется длина вектора, соответствующего этому числу. Для модуля числа z используется обозначение $|z|$.

По теореме Пифагора для модуля комплексного числа $z = a+bi$ легко получается следующая формула: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Для действительного числа $z = a+0i$ модуль совпадает с абсолютной величиной числа: $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Сопряженные числа имеют одинаковые модули.

Произведение сопряженных чисел равно квадрату их модуля: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

Модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке. $\phi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Для обозначения аргументов комплексного числа $z = a+bi$ используется обозначение $\arg z$ или $arg(a+bi)$.

Заданными модулем и аргументом комплексное число определяется однозначно. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $-1+i$ являются следующие углы: $\phi = \frac{3\pi}{4}$, $\phi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$, $\phi = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$.

Различные формы записи комплексных чисел

Запись комплексного числа z в виде $z = a+bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = a+bi$ выражаются через его модуль $|z| = \rho$ и аргумент ϕ. Здесь ρ - модуль комплексного числа, а ϕ - аргумент.

$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ - тригонометрическая форма записи.

Запись комплексного числа в виде $z = \rho e^{i\phi}$ называется показательной формой записи. Здесь ρ - модуль комплексного числа, а ϕ - его аргумент.

Операции над комплексными числами

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ определяются следующими правилами:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.
- $z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$.
- $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = (ac-bd)+i(ad+bc)$. т.е. при сложении, вычитании и умножении скобки раскрываются по обычным правилам, учитывается условие $i^2 = -1$ и приводятся подобные.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. При делении необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные.

Свойства операций над комплексными числами

- Переместительное свойство сложения: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Сочетательное свойство сложения: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется разностью чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.
- Переместительное свойство умножения: $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$.
- Сочетательное свойство умножения: $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z\_3)$.
- Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0 + 0i$ и z_2 существует число z такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется частным комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$. Деление на комплексное число $0+0i$, которое называется нулем, невозможно.
- Распределительное свойство: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Формула Эйлера

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ - формула Эйлера.

Так как комплексное число z можно записать в виде $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, его можно представить в виде $z = \rho e^{i\phi}$, так как $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.