Вопрос №1

Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$, $x \in D_f$, называется непрерывной в предельной точке $x_0 \in D_f$, если существует предел $f(x)$ в точке x_0 и этот предел равен $f(x_0)$: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Замечание 1. Приведенное определение непрерывности подразумевает, вообще говоря, три допущения:

a Функция определена в точке;

b Существует конечный предел;

c Значение предела совпадает со значением функции в точке.

Замечание 2. Из определения видно, что при вычислении предела от непрерывной функции достаточно подставить предельное значение в функцию, находящуюся под знаком предела.

Заметим, что область определения D_f разбивается на два непересекающихся подмножества: первое образует предельные точки множества D_f, а второе состоит из изолированных точек множества D_f.

В любой изолированной точке из D_f функция $f(x)$ считается непрерывной (по определению).

Приведем эквивалентное определение непрерывности функции в точке на языке последовательностей: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D_f$, если $\forall \{x_n\} \ : \ x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow y_n = f(x_n)$ сходится при $n \to \infty$ и при этом ее предел равен $y_0 = f(x_0)$.

По этому определению, если $x_0 \in D_f$ - предельная точка для D_f и при этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в x_0.

Если же x_0 - изолированная точка из D_f, то сходящаяся к ней последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D_f$, является стационарной и поэтому $f(x_n) = f(x_0)$, начиная с некоторого номера.

Эквивалентное определение непрерывности функций через ε и δ (по Коши): функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется непрерывной в x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x, \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Точки разрыва

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D_f$, то x_0 называется точкой непрерывности функции f. В противном случае $x_0 \in D_f$ называется точкой разрыва функции f. К точкам разрыва функции f обычно относят также те вещественные числа x_0, которые не принадлежат D_f, но являются при этом предельными точками как для множеств $D_f \cap (-\infty, x_0)$, так и для $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

Пример. Функции $y = \operatorname{sgn} x$ и $y = \frac{1}{x}$ непрерывны в любой точке $x_0 \neq 0$. Точка же $x_0 = 0$ - это точка разрыва как для $y = \operatorname{sgn} x$, так и для $y = \frac{1}{x}$.

Определение. Если x_0 - точка разрыва функции f и при этом существует конечный предел $f(x)$ при $x \to x_0$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва. Если же у $f(x)$ в точке x_0 существует конечные односторонние пределы, но они не равны, то x_0 - точка разрыва первого рода. Точки разрыва функции, которые не являются точками разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода.

Примеры.

1. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ имеет в $x_0 = 0$ разрыв первого рода, а функция $y = |\operatorname{sgn} x|$ имеет в $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

2. Функции $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{|x|}$, $y = \sin\frac{1}{x}$ имеют в точке x_0 разрывы второго рода.

Односторонняя непрерывность. Примеры

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке $x_0 \in D_f$, если существует односторонний предел $f(x_0 + 0)$ и при этом $f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

Аналогично дается определение функции непрерывной слева в точке: $\exists f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0)$

Пример. Функция $y = [x]$, где $[x]$ - целая часть вещественного числа x, непрерывна во всех точках x_0, которые не являются целыми. В целых же точках у $y = [x]$ имеются разрывы первого рода. При этом в целых точках $y = [x]$ непрерывна справа.

Свойства функций, непрерывных на конечном отрезке числовой оси

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда образ этого отрезка при отображении $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ является замкнутым и ограниченным множеством.

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$, $\forall x_0 \in [a,b]\ \exists O(x_0) :\ |f(x) - f(x_0)| < 1\ \forall x \in O(x_0) \cap [a,b]$.

Множество $\{O(x_0)|x_0 \in [a,b]\}$ окрестностей представляет собой покрытие компакта $[a,b]$. По лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие отрезка $[a,b]$, т.е. $O(x_1), O(x_2), \ldots, O(x_N) :\ \bigcup\limits_{j=1}^{N} O(x_j) > [a,b]$. Рассмотрим следующие два вещественных числа: $m = \min 1 \le j \le N(f(x_j) - 1)$, $M = \max 1 \le j \le N(f(x_j) + 1)$. Тогда $\forall x \in O(x_j)\ \Rightarrow m < f(x) < M$. Поэтому $\forall x \in [a,b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} O(x_j)$ имеем: $m < f(x) < M$.

Таким образом, ограниченность множества $f([a,b]) = \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in [a,b] :\ y = f(x)\}$ доказана. Убедимся, что это множество замкнуто. Пусть y_0 - предельная точка множества $f([a,b])$. Тогда $\exists \{y_n\} :\ y_n \in f([a,b])$ и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Пусть $x_n \in [a,b] :\ f(x_n) = y_n$. У ограниченной последовательности $\{x_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$; Отрезок $[a,b]$ - замкнутое множество. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ принадлежит $[a,b]$. По условию, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, т.е. $y_0 = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.

Таким образом, предельная точка y_0 принадлежит самому множеству $f([a,b])$, т.е. это множество замкнуто.

Следствие. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство. По теореме $f([a,b])$ ограничено. Поэтому существуют конечные грани этого множества: $m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$, $-\infty < m \le M < +\infty$.

Точки m и M - предельные для множества $f([a,b])$ и по доказанной теореме этому замкнутому множеству принадлежат, т.е. $\exists x_0 \in [a,b] :\ m = f(x_0)\ \exists x_1 \in [a,b] :\ M = f(x_1)$. В точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наименьшего на $[a,b]$ значения, а в точке x_1 - наибольшего.

Примеры.

1. Непрерывная на ограниченном интервале $(0,1)$ функция $y = \frac{1}{x}$

неограничена на $(0,1)$. Таким образом, существенно, что в условии теоремы отрезок $[a,b]$ - замкнут.

2. Непрерывная на $[0,+\infty)$ функция $y=x$ является неограниченной на $[0,+\infty)$. Таким образом, существенно, что в условии теоремы отрезок $[a,b]$ - конечен.

3. Непрерывная на $(0,1)$ функция $y=x$ не достигает на $(0,1)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений. Так как интервал $(0,1)$ не замкнут, теоремой и следствием пользоваться нельзя.

4. Непрерывная на $[0,+\infty)$ функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ не достигает на $[0,+\infty)$ своего наименьшего значения. $[0,+\infty)$ - замкнутое, но не ограниченное множество.

Свойства функций, непрерывных на промежутках. Теорема о промежуточных значениях

Любой промежуток Δ вещественной прямой $\mathbb{R}$ обладает следующим свойством:

$$a\in\Delta,\ b\in\Delta,\ a<b\ \Rightarrow\ [a,b]\subset\Delta \tag{1}$$

Верно и обратное: если множество $\Delta\subset\mathbb{R}$ обладает свойством 1, то это промежуток числовой оси.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ и принимает на нем значения A и B, $A<B$, то $f(x)$ принимает на Δ любое значение C: $A<C<B$.

Доказательство. Построим вспомогательную последовательность вложенных отрезков, стягивающихся в точку. Построение проведем по индукции. По условию, $\exists a\in\Delta$ и $b\in\Delta$: $f(a)=A$ и $f(b)=B$. Пусть $a<b$, тогда в качестве начального отрезка возьмем $[a,b]$. Далее, пусть c_1 - середина $[a,b]$, т.е. $c_1=\frac{a+b}{2}$.

Если $f(c_1)=C$, то теорема доказана. Пусть $f(c_1)\neq C$. Если $f(c_1)>C$, то полагаем $a_1=b_1$ и $b_1=c_1$. Если же $f(c_1)<C$, то $a_1=c_1$ и $b_1=b$. Таким образом, имеем отрезок $[a_1,b_1]$, длина которого в два раза меньше длины $[a,b]$. И при этом $f(a_1)<C<f(b_1)$.

Отрезок $[a_1,b_1]$ снова разделим пополам: $c_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f(c_2)=c_1$, то теорема доказана. Пусть $f(c_2)\neq C$. Если $f(c_2)>C$, то полагаем $a_2=a_1$ и $b_2=c_2$. Если $f(c_2)<C$, то $a_2=c_2$ и $b_2=b_1$. Таким образом, имеем

отрезок $[a_2, b_2]$, длина которого в два раза меньше длины $[a_1, b_1]$ и при этом $f(a_2) < C < f(b_2)$. Дальнейшие построения проведем аналогично.

В результате процесс или оборвется на некотором шаге и тогда теорема будет доказана, или же получится искомая последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ вложенных отрезков таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ и $f(a_n) < C < f(b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Как уже доказано ранее, числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$. Этот предел принадлежит $[a, b]$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $f(a_n) < C < f(b_n)$. В силу непрерывности $f(x)$ получаем $f(C) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq C \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(C)$.

Вопрос №2
Линейные пространства

Аксиоматическое определение векторного пространства над полем

Определение. Пусть k - произвольное поле. Линейным пространством над k называется множество X элементов, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A) На X задана бинарная операция $X \cdot X \to X$, обычно записывается аддитивно, как сложение: $(x, y) \mapsto x + y$. Множество X с указанной операцией образует абелеву группу (в такой группе групповая операция является коммутативной). Это означает следующее:

   1 $x + y = y + x$ (коммутативность)

   2 $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность)

   3 Существует нейтральный элемент $\vec{0}$ из X, называемый нулевым вектором, такой, что $x + \vec{0} = x$ для всех $x \in X$

   4 Для всех $x \in X$ существует противоположный ему вектор $(-x)$: $x + (-x) = 0$

B) На множестве $k \cdot X$ задана операция $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, называемая умножением векторов из X на скаляры из k и обладающая свойствами:

   5 $1 \cdot x = x$ (унитарность) $(1, x) \mapsto x$

6 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$ (ассоциативность)

C) Сложение и умножение на скаляр связаны законами дистрибутивности:

7 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in k$, $\forall x \in X$

8 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x, y \in X$

Примечание: в 7 знак + имеет разную природу. Слева относится к элементам поля K (скалярам), а справа применяется к векторам из X.

Пример: возьмем множество $X = \mathbb{R}_+$ (положительные вещественные числа). Полагая

1. $x + y = xy \forall x, y \in X$
2. $\lambda \cdot x = x^\lambda$ (возведение x в степень $\lambda \in \mathbb{R}$).

убеждаемся в справедливости всех аксиом 1-8. Значит X в этом случае - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Нулевым вектором здесь служит $1 \in \mathbb{R}_+$.

Следствия

Из определения линейного пространства X с помощью систем аксиом извлекаются некоторые элементарные следствия. Приведем их в качестве примеров обращения с аксиомами.

1. $0 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in X$

   Доказательство. Из 7: $0 \cdot \vec{x} = (0+0)\vec{x} = 0\vec{x} + 0\vec{x}$. Добавив к обеим частям $-0\vec{x}$, получим $0\vec{x} = 0$. Аналогично $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (применяли 8)

2. Если $\lambda\vec{x} = 0$, то $\lambda = 0$ или $\vec{x} = 0$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда $\exists \lambda^{-1}$ и поэтому $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \lambda^{-1})\vec{x} = \lambda^{-1}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = 0$ (в силу следствия 1)

3. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in X$. Имеем $\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{x} = (1 + (-1))\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = 0$ (следствие 1)

Линейные комбинации векторов

Пусть X - линейное пространство над полем k. Для всех наборов скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k$ и векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определено выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$. Это выражение называется линейной комбинацией векторов x_i с коэффициентами λ_i.

- Умножение скаляра $\lambda \in k$ на линейную комбинацию - снова линейная комбинация: $\lambda(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum\limits_{i \in I} (\lambda \lambda_i) x_i$.

- Сумма любых линейных комбинаций - снова линейная комбинация: $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i \in I} \mu_i x_i = \sum\limits_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) x_i \in X$. Среди $\lambda_i + \mu_i$ при $i \in I$ лишь конечное число элементов поля k, отличных от нуля.

Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_i \in X | i \in I\}$ - это подмножество линейного пространства X. Тогда через $\langle M \rangle_k$ обозначается множество всевозможных линейных комбинаций векторов $x_i \in M$; $M \subset \langle M \rangle_k$

Множество $\langle M \rangle$ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры из k: $\lambda \in k$, $x, y \in \langle M \rangle \Rightarrow x + y \in \langle M \rangle, \lambda x \in \langle M \rangle$.

Линейные оболочки подмножеств векторного пространства

Определение. Множество $\langle M \rangle$ называют линейной оболочкой множества $M \subset X$.

Определение. Пусть X - векторное пространство над полем k, а Y - его подмножество. Если Y - аддитивная подгруппа в X, переходящая в себя при умножении на скаляры из k, то Y - тоже векторное пространство относительно операций сложения и умножения на скаляр, индуцированных операциями на X. В этом случае Y - линейное подпространство в X.

Пересечение любого числа векторных подпространств - это снова векторное подпространство.

Линейная оболочка $\langle M \rangle$ произвольной системы векторов $M \subset X$ является подпространством в X. При этом $\langle M \rangle$ - наименьшее из всех подпространств в X, содержащих в себе исходное множество M.

Определение. Подпространство $\langle M \rangle$ порождено векторами $x_i \in M$.
$\langle M \rangle$ также называют линейной оболочкой множества M и обозначают $\langle M \rangle = \mathrm{span}\{x_i \in M : i \in I\}$.

Примеры векторных пространств

1. Нульмерное пространство. Над любым полем k определено одноэлементное векторное пространство $X = \{0\}$. Закон умножения на скаляры: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. Основное поле k - это одномерное координатное пространство. По определению, $X = k$, операции совпадают. Если 1 - единица поля k, то $k = \langle 1 \rangle$ - линейная оболочка, порожденная множеством $\{1\}$.

3. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ - это векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{R}$ - это векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4. Пространство k^n - это n-мерное пространство ($k^n = k \cdot k \cdot \ldots \cdot k$). Операции:

   (a) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$, где $\lambda_j \in k$ и $\mu_j \in k$

   (b) $\forall v \in k$ имеем $v(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (v\lambda_1, v\lambda_2, \ldots, v\lambda_n)$, где $\lambda_j \in k$

   При $k = \mathbb{R}$, получаем вещественное координатное пространство $\mathbb{R}^n$

5. Пусть D - произвольное непустое множество, k - поле. Обозначим k^D множество функций $f : D \mapsto k$, наделенное операциями сложения и умножения на скаляры:

   (a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$

   (b) $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in D$

   Тогда k^D - линейное пространство функций.

6. Пусть (a, b) - интервал числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда линейное пространство $\mathbb{R}^{(a+b)}$ содержит в качестве подпространства пространство $C(a, b)$ всех непрерывных на (a, b) функций. Пространство $C(a, b)$ содержит в качестве подпространства $C^{(1)}(a, b)$ пространство всех непрерывно дифференцируемых на (a, b) функций.

7. Многочлены f от переменной t с коэффициентами из поля k, имеющие степени, меньшие n, с обычными операциями сложения и умножения на скаляр, образуют векторное пространство P_n.

Кольцо квадратных матриц с коэффициентами из поля. Определение структуры векторного пространства

Определение. Пусть есть поле k. Матрицей называется прямоугольная таблица элементов k, содержащая m строк одинаковой длины n.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \underset{i \in 1,\dots,n,\ j \in 1,\dots,m}{a_{ij}}$$

i - номер строки, j -номер столбца матрицы. Матрица размера $m \cdot n$ (иногда пишут $A_{m \times n}$). Также элементы матрицы называются её коэффициентами. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - образуют главную диагональ матрицы. Матрицы, у которых все элементы, за исключением элементов главной диагонали, равны 0, называются, диагональными.

Определение. Суммой двух матриц A и B называется матрица C, в которой все элементы попарно складываются: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Определение. Произведение матрицы A на скаляр λ - умножение каждого элемента a_{ij} на скаляр λ.

Определение. Матрица $-A = (-1)A$ называется противоположной матрицы A. Справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

8. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)A$

Таким образом, квадратные матрицы образуют линейное пространство над полем k. Обозначение: $M_n(k)$.

Определение. Произведением матриц A и B называется матрица $C = AB$, в которой элементы: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, $i \in 1, \ldots, n$, $j \in 1, \ldots, m$.

Векторное пространство $M_n(k)$ с введенной операцией умножения является кольцом.

Определение линейно зависимых и линейно независимых систем элементов векторного пространства

Пусть X - линейное пространство над полем k.

Определение. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из X называются линейно-зависимыми, если существует некоторая их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $\exists \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \in k : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, причем $\exists j : \alpha_j \neq 0$.

Определение. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ не являются линейно зависимыми, то их называют линейно независимыми: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теорема. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, где $n \geq 2$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists j :$ v_j является линейной комбинацией остальных векторов.

Если некоторая подсистема векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима, то и вся система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима.

Если система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независимая.

Теорема $(s \leq t)$. Если каждый из векторов линейно независимой системы $e_1, e_2, \ldots, e_s$ является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_t$, то $s \leq t$.

Эквивалентные системы векторов

Определение. Две системы векторов считаются эквивалентными, когда каждый вектор одной системы является линейной комбинацией другой системы.

Эквивалентные линейно зависимые системы могут состоять из разного числа векторов.

Одна из эквивалентных систем может быть линейно независимой, а другая при этом - линейно зависимой.

Число элементов в линейно независимых эквивалентных системах

Следствие теоремы $s \leq t$. Любые две эквивалентные системы линейно независимых векторов векторного пространства X содержат одинаковое количество элементов.