Вопрос №1

Определение вложенных отрезков

Пусть имеется правило, согласно которому каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый отрезок $[a_n, b_n]$ числовой оси: $n \to \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$. В этом случае задана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, а упорядоченная пара $(n, [a_n, b_n])$ называется элементом этой последовательности.

Определение. Последовательность отрезков называется последовательностью вложенных отрезков, если $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Условие можно записать в виде: $\forall x : a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n$.

Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема. Пусть $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ - это последовательность вложенных отрезков. Тогда существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим отрезкам: $\exists x \in \mathbb{R} : x \in [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Доказательство. По условию вложенных отрезков имеем неравенства: $a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$. $\{a_n\}$ - монотонно возрастающая, ограничена сверху, $\{b_n\}$ – монотонно убывающая, ограничена снизу.

По теореме Вейерштрасса: $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$ (теорема о предельном переходе). Отрезок $[a, b]$ – не пуст.

Но $\forall n\ [a, b] \subseteq [a_n, b_n] \Leftrightarrow [a, b] \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Непустой отрезок внутри пересечения, следовательно , существует общая точка пересечения.

Замечание. У последовательности вложенных интервалов может не быть ни одной общей точки: $(0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n})$, при этом общих точек не будет (доказывается от противного)

Теорема о стягивающихся отрезках на числовой оси

Определение. Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ называется стягивающейся, если последовательность $L_n = b_n - a_n$ их длин стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Теорема (аксиома непрерывности Кантора). Любая последовательность стягивающихся отрезков числовой прямой имеет единственную общую точку.

Доказательство. По предыдущей теореме найдется отрезок $[a, b]$ такой, что $[a, b] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этом, $a_n \leq a$, $b \leq b_n$ для всех n, следовательно, $0 \leq b - a \leq b_n - a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $b = a$. Это и есть общая точка всех стягивающихся отрезков.

Других точек нет, предположим противное. Пусть имеется две различные точки c и c': $\forall n :\ c, c' \in [a_n, b_n]$, $c \neq c'$. Тогда $\forall n : |c - c'| \leq b_n - a_n$.

В силу стремления длин отрезков к нулю, для любого $\varepsilon > 0$: для всех номеров n, начиная с некоторого, будет выполняться $b_n - a_n < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}|c - c'| > 0$, получим $|c - c'| < \frac{1}{2}|c - c'|$. Противоречие, значит существует только одна общая точка.

Множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности Кантора

Множество $\mathbb{Q}$ в отличие от числовой прямой $\mathbb{R}$ свойством непрерывности Кантора не обладает. Пусть a_n – нижние десятичные приближения $\sqrt{2}$, а b_n - соответственно верхние. Тогда $[a_n, b_n]$ - последовательность стягивающихся отрезков в точку $\sqrt{2}$, которая не является рациональным числом.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Сходящаяся последовательность ограничена. Но обратное неверно: $x_n = (-1)^n$ ограничена, но не сходится.

Теорема. Любая ограниченная последовательность вещественных чисел содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть дана ограниченная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Из ограниченности следует, что все ее члены лежат на некотором отрезке числовой прямой, обозначим как $[a_0, b_0]$. Разделим его пополам. По крайне мере, один из полученных отрезков содержит бесконечное число членов. Обозначим как $[a_1, b_1]$. Повторяем процедуру и получаем последовательность вложенных отрезков: $[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \ldots$, в которой каждый следующий является половиной предыдущего и содержит бесконечное число членов. Длины отрезков стремятся к нулю: $|b_m - a_m| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^m} \to 0$. Получили последовательность стягивающихся отрезков. В силу теоремы о стягивающихся отрезках, $\exists E : a_m \le E \le b_m$ - единственная точка принадлежащая всем отрезкам.

Искомую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ построим по индукции: $x_{n_1} \in [a_1, b_1]; x_{n_2} \in [a_2, b_2], n_2 > n_1; \dots; x_{n_k} \in [a_k, b_k], n_k > n_{k-1}$ - точки из каждого отрезка выбираем так, чтобы номера строго возрастали. По построению имеем: $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. $a_k \to E$, $b_k \to E$ при $k \to \infty$. По теореме о двух полицейских, $x_{n_k} \to E$.

Вопрос №2

Определители второго и третьего порядка

Определитель второго порядка

Рассмотрим таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, a_2, b_2 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей второго порядка, Числа a_1, b_1, a_2, b_2 - элементами матрицы.

Число, равное $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем данной матрицы или определителем второго порядка и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей третьего порядка.

Определитель третьего порядка выражается через определители второго порядка следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Раскрывая определители второго порядка по 1, находим, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2. \tag{2}$$

Некоторые свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если строки (или столбцы) этого определителя поменять местами, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

2. Перестановка двух строк (или столбцов определителя) равносильна умножению его на число (-1), то есть такая перестановка меняет знак определителя на противоположный

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю

4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число k равносильно умножению определителя на это число k

5. если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю

6. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (правило Крамера)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты левых частей уравнений системы образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Теорема. Система уравнений 4 имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

В этом случае решение находят по правилу Крамера:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A},\ y = \frac{\det A_2}{\det A},\ z = \frac{\det A_3}{\det A}, \tag{6}$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 равны $A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$, т.е. эти матрицы получаются из матрицы системы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбца свободных членов.

Векторное произведение двух векторов

Определение. Векторным произведением вектора a на вектор b называется такой третий вектор $[ab]$, длина и направление которого определяется условиями:

1. $|[ab]| = |a||b| \sin \phi$, где ϕ - угол между a и b
2. $[ab]$ перпендикулярен каждому из векторов a и b
3. $[ab]$ направлен так, что кратчайший поворот от a до b виден с его конца совершающимся против часовой стрелки

Свойства:

1. $[ab] = -[ba]$
2. $[(a + b)c] = [ac] + [bc]$
3. $[(\lambda a)b] = \lambda [ab]$
4. векторное произведение равно 0 (нуль-вектор) тогда и только тогда, когда векторы a и b коллинеарны. В частности, $[aa]$ - 0 для любого вектора a.

5. если векторы a и b неколлинеарны, то модуль векторного произведения равен площади S построенного на них параллелограмма.

Из первых трёх свойств следует, что векторное умножение суммы векторов на сумму векторов подчиняется обычным правилам перемножения многочленов.

Выражение через координаты сомножителей

Если $a = a_x i + a_y j + a_z k$ и $b = b_x i + b_y j + b_z k$, то

$$[ab] = (a_y b_z - a_z b_y)i - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_x b_y - a_y b_x)k, \tag{7}$$

или в свёрнутой форме

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Формула 7 получается разложением определителя 8 по первой строке.

Смешанное произведение трёх векторов в пространстве

Определение. Смешанным произведением abc трёх векторов называется их векторно-скалярное произведение

$$abc = [ab]c \tag{9}$$

Геометрический смысл

Тройка некомпланарных векторов a, b, c называется правой, если кратчайшее вращение от a к b видно с конца вектора c совершающимся против часовой стрелки, и левой, если по часовой стрелке.

1. необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов a, b, c является равенство $abc = 0$

2. если некомпланарные векторы a, b, c приведены к общему началу, то модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c. Если $abc > 0$, то тройка векторов a, b, c - правая, если $abc < 0$, то левая. Если векторы a, b, c

заданы своими координатами $a\{a_x, a_y, a_z\}$, $b\{b_x, b_y, b_z\}$, $c\{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{10}$$

то есть смешанное произведение равно определителю из координат сомножителей.