Содержание

1 Периодические функции и гармонический анализ

В математике имеется отдельный раздел, в рамках которого изучаются свойства периодических функций. Этот раздел называется гармоническим анализом.

Простейшей периодической функцией является синусоида, т.е. функция вида $y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$. Здесь t — это вещественная независимая переменная, постоянная A — это амплитуда функции, ω — ее частота и α — это фаза синусоиды. Синусоида $y = y(t)$ удовлетворяет следующему условию периодичности: $y(t+T) = y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — это период функции $y = y(t)$.

Отметим, что область определения любой периодической функции — это вся числовая прямая. Линейная комбинация любых двух периодических функций с одинаковым периодом T — это также периодическая функция с тем же периодом.

Таким образом, если сложить несколько синусоид вида $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, т.е. рассмотреть линейную комбинацию $\sum\limits_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, то получится периодическая функция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, график которой по форме существенно отличается от графика одной синусоиды.

Оказывается, что последовательность всех синусоид вида $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ является в пространстве всевозможных периодических функций с тем же периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ весьма представительным множеством. Точнее, любую достаточно гладкую функцию $\varphi(t)$ с условием периодичности $\varphi(t+T)=\varphi(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$, можно разложить в ряд вида

$$A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\sin{(k\omega t+\alpha_k)}, \tag{(SS)}$$

где $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

По другому этот фундаментальный факт формулируют следующим образом: каждое сложное колебание $\varphi(t)$ разлагается на отдельные гармонические колебания вида $y_k(t)=A_k\sin{(k\omega t+\alpha_k)}$.

Синусоиды, входящие в разложение (SS) функции $\varphi(t)$, называются ее гармониками. В зависимости от номера k в разложении (SS) гармоника может быть первой, второй и т.д.

Процесс разложения колебания, т.е. периодической функции, в ряд по ее гармоникам, называется гармоническим анализом этой функции.

Преобразуем ряд (SS) к эквивалентному виду, воспользовавшись хорошо известной тригонометрической формулой $\sin{(k\omega t+\alpha_k)}=\sin{(\alpha_k)}\cos{(k\omega t)}+\cos{(\alpha_k)}\sin{(k\omega t)}$. В результате получим разложение вида

$$a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos{(k\omega t)}+b_k\sin{(k\omega t)}), \tag{(TS)}$$

коэффициенты в котором задаются формулами $a_0=A_0$, $a_k=A_k\sin{(\alpha_k)}$, $b_k=A_k\cos{(\alpha_k)}$, $k=1,2,\ldots,N$.

Сделав в разложении (TS) замену переменной $x=\omega t$, придем к тригонометрическому ряду

$$a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos{(kx)}+b_k\sin{(kx)}). \tag{(TS')}$$

Таким образом, задача разложения сложного колебания в ряд (SS) по простым гармоникам сводится к задаче разложения периодической функции с периодом $T=2\pi$ в тригонометрический ряд (TS').

Последовательность функций $1,\cos{(x)},\sin{(x)},\cos{(2x)},\sin{(2x)},\ldots,\cos{(kx)},\sin{(kx)},\ldots$, по которой ведется разложение (TS'), называется тригонометрической системой и является простейшим примером так называемых ортогональных систем функций.

2 Ортогональные и ортонормированные системы функций

Пусть задана последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots. \tag{(Φ)}$$

Предположим, что области определения функций этой последовательности имеют непустое пересечение, которое также является областью.

Определение

Любой функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{(SΦ)}$$

где a_k — числа, называется рядом по системе функций (Φ). Числа a_k при этом называются коэффициентами ряда. Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, например, является рядом по системе функций $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$.

Пусть коэффициенты a_k таковы, что ряд ($S\Phi$) сходится в любой точке области определения некоторой функции $f(x)$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x)$ $/\forall x \in D_f$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ разложена в ряд по системе функций (Φ).

Определение

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, называются ортогональными на Δ, если их произведение интегрируемо на Δ и при этом справедливо равенство $\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\psi(x)dx = 0$. В частности, тождественно нулевая функция ортогональна любой другой функции.

Определение

Последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{(Φ)}$$

называется ортогональной на промежутке Δ, если все эти функции определены на Δ, все произведения вида $\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)$ интегрируемы на Δ и при этом справедливы равенства

$$\int\limits_{\Delta} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0,\ n \neq m. \qquad ((\Phi'))$$

Если выполнены условия (Φ'), то говорят также, что функции последовательности (Φ) попарно ортогональны друг другу на промежутке Δ.

Лемма

Тригонометрическая система функций $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(kx), \sin(kx), \ldots$ ортогональна на интервале $(-\pi, +\pi)$.

Доказательство

Используя формулу Ньютона Лейбница, получаем равенства $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx)dx = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx)dx = 0$, т.е. нулевая гармоника тригонометрической системы ортогональна всем другим гармоникам этой системы. Далее, проинтегрируем по интервалу $(-\pi, +\pi)$ обе части тригонометрического равенства $2\sin(nx)\cos(mx) = \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)$. Тогда для любых натуральных m и n получим $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin((n+m)x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin((n-m)x)dx = 0$. Таким образом, функции $\sin(nx)$ и $\cos(mx)$ ортогональны на интервале $(-\pi, +\pi)$. Поочередно проинтегрировав по интервалу $(-\pi, +\pi)$ тригонометрические равенства $2\cos(nx)\cos(mx) = \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)$, $2\sin(nx)\cos(mx) = \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)$, заключаем, что для любых натуральных m и n, $n \neq m$, гармоники $\cos(nx)$ и $\cos(mx)$ ортогональны друг другу, равно как и гармоники $\sin(nx)$ и $\sin(mx)$. $\square$

Следствие

Тригонометрическая система $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(kx), \sin(kx), \ldots$ ортогональна на любом промежутке длины 2π. Это утверждение следует из периодичности всех функций рассматриваемой последовательности с одним и тем же периодом 2π, вследствие чего интеграл по промежутку длины 2π от произведения любых двух функций тригонометрической системы будет совпадать с интегралом по интервалу $(-\pi, +\pi)$ от этого произведения.

Важным обобщением тригонометрической системы является следующая последовательность

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \ldots, \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \ldots. \tag{(T_l)}$$

Здесь l — положительное число. Отметим, что каждая из функций системы (T_l) периодична с периодом $2l$. Систему (T_l) также называют тригонометрической.

Определение

Последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{(Φ)}$$

определенных на промежутке Δ, называется ортонормированной на Δ, если эта система ортогональна на Δ и при этом справедливы равенства

$$\int\limits_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{(O_N)}$$

Условие (O_N) часто называют нормировкой (или калибровкой) функций последовательности.

Пример. Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi \cos(x)}}, \frac{1}{\sqrt{\pi \sin(x)}}, \frac{1}{\sqrt{\pi \cos(2x)}}, \frac{1}{\sqrt{\pi \sin(2x)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi \cos(kx)}}, \frac{1}{\sqrt{\pi \sin(kx)}}, \ldots \tag{(NT)}$$

ортонормирована на любом промежутке длины 2π.

Аналогично, система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}}, \ldots \tag{(NT_l)}$$

ортонормирована на любом промежутке длины $2l$.

Последовательности функций (NT) и (NT_l) называют нормированными тригонометрическими системами.

3 Ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд по ортогональной на промежутке Δ системе функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{(Φ)}$$

т.е. имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \ x \in \Delta. \tag{(E_Φ)}$$

Тогда возникает важный вопрос: как найти коэффициенты a_k этого разложения ?

Для того чтобы справиться с этой задачей, умножим обе части равенства (E_Φ) на функцию $\varphi_n(x)$, после чего проинтегрируем получившееся соотношение по промежутку Δ. В результате получим $\int\limits_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = \int\limits_\Delta (\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x))dx$. Предположим, что операции интегрирования и бесконечного суммирования в правой части можно поменять местами. Тогда получим $\int\limits_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(\int\limits_\Delta a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x))dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \int\limits_\Delta \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\delta_k^n \int\limits_\Delta |\varphi_k(x)|^2 dx$. Здесь δ_k^n — это символ Кронекера. Последнее равенство справедливо в силу ортогональности системы функций (Φ). Таким образом, имеем равенство $\int\limits_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = a_n \int\limits_\Delta |\varphi_n(x)|^2 dx$. Предположим еще, что среди функций системы (Φ) нет тождественно нулевых. Тогда $\int\limits_\Delta |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и при этом

$$a_n = \frac{\int\limits_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_\Delta |\varphi_n(x)|^2 dx}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{(FC)}$$

Это и есть искомые коэффициенты разложения (E_Φ).

Числа a_n, определяемые для заданной функции $f(x)$ по формулам (FC), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. При этом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе (Φ).

Заметим, что для заданной ортогональной системы (Φ), не содержащей тривиальных функций, по формулам (FC) всегда можно найти коэффициенты Фурье данной интегрируемой функции $f(x)$. Следовательно, можно рассмотреть ряд Фурье по системе (Φ) с этими коэффициентами. Однако нужно иметь ввиду, что этот ряд Фурье, во- первых, может расходиться в некоторых точках промежутка Δ и, во-вторых, если он сходится, то его сумма в общем случае не обязательно совпадает с $f(x)$. По этой причине вместо знака равенства функции $f(x)$ сумме ее ряда Фурье иногда используется иной символ знак эквивалентности:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \ x \in \Delta. \qquad ((E'_\Phi))$$

Это замечание относится, в частности, к разложениям по ортогональным тригонометрическим системам, т.е. к тригонометрическим рядам Фурье.

Для того чтобы выяснить, сходится ли тригонометрический ряд Фурье к значениям соответствующей функции $f(x)$, эту функцию изначально подчиняют некоторым дополнительным условиям. Точнее, требуют, чтобы $f(x)$ принадлежала некоторому функциональному классу.

4 Определение тригонометрического ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном интервале (a, b) и при этом

$$\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty. \qquad ((L_2))$$

Совокупность всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (L_2), образует линейное пространство, которое обозначается как $L_2(a, b)$.

Для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2(a,b)$ определены ее коэффициенты Фурье по ортогональной на (a,b) тригонометрической системе $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{l\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}}, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots,$ где $l = \frac{b-a}{2}$. Соответствующий функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье обычно записывается в следующем виде: $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right))$. Коэффициенты Фурье этого разложения вычисляются по формулам $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$, $b_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$, $k = 1, 2, \ldots$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о коэффициентах Фурье именно функции $f(x)$, пишут $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$.

Пример. Найти ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, где $x \in (-1, +1)$.

Решение. Имеем $a = -1$, $b = 1$ и $l = \frac{b-a}{2} = 1$. Искомый ряд Фурье имеет вид $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos(k\pi x) + b_k\sin(k\pi x))$. Для его коэффициентов в силу нечетности функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ имеем равенства $a_0 = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{+1}\operatorname{sign} x dx = 0$, $a_k = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\cos(k\pi x)dx = \int\limits_{-1}^{+1}\operatorname{sign} x\cos(k\pi x)dx = 0$. Произведение $f(x)\sin(k\pi x)$ это четная функция и поэтому $b_k = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\sin(k\pi x)dx = 2\int\limits_0^{+1}\sin(k\pi x)dx = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k]$. Следовательно, $b_{2k} = 0$ и $b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$ и $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x)$, $x \in (-1, +1)$. Сходимость полученного ряда Фурье в каждой точке из интервала $(-1, +1)$ требуется исследовать отдельно. $\square$