START 2.

Без доказательств

Пусть $\mathbb{A}$ – аффинное пространство, связанное с векторным X, $\dim X = n$. Любым двум точкам $\dot{A}$ и $\dot{B}$ из $\mathbb{A}$ сопоставляется вектор из X с началом в $\dot{A}$ и концом $\dot{B}$, т.е вектор $\overrightarrow{AB}$. При этом выполняется две аксиомы:

i) $\forall \dot{A} \in \mathbb{A}$ и $\forall a \in X$ $\exists!$ $\dot{B} \in \mathbb{A}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

Для любых (точки $\dot{A}$ и вектора a) существует точка $\dot{B}$, такая что образуется вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

ii) $\forall \dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \in \mathbb{A}$ справедливо равенство треугольника

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Пространство X называется также ассоциированным с аффинным $\mathbb{A}$.

Пример: аффинное пространство $\mathbb{R}^n$: обозначение такое же, как и для векторного координатного пространства $\mathbb{R}^n$. В случае, если их требуется различать, применяем обозначения $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ и $\mathbb{R}^n_{\text{век}}$.

Чтобы определить $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ требуется:

1) указать, что называется его точками

2) что называется ассоциированными векторами

3) как именно паре точек сопоставляется вектор

Точками $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ называют столбцы $\dot{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$, где $x^j \in \mathbb{R}$.

Векторами из $X = \mathbb{R}^n_{\text{век}}$ – также столбцы $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Если $\dot{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $\dot{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, то $a = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$

Проверим, что выполняется аксиома i):

Пусть $\dot{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{афф}$, $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{век}$. Тогда

$\exists! \, \dot{B} \in \mathbb{R}^n_{афф}$, $\dot{B} = \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \\ \vdots \\ x_n + a_n \end{bmatrix}$: $\overrightarrow{AB} = a$.

Проверим, что выполняется аксиома ii):

Пусть $\dot{A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\dot{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\dot{C} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$. Тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

$$= \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - x_1 \\ \vdots \\ z_n - x_n \end{bmatrix} = \overrightarrow{AC}$$

Получили, что $\mathbb{R}^n_{афф}$ – это действительно аффинное пространство, $\dim \mathbb{R}^n_{афф} = n$

Пусть X – векторное пространство, ассоциированное с аффинным A, $\dim X = n$. Возьмём какой-нибудь базис: $(B) = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ пространства X.

Определение: Аффинной системой координат в A называется совокупность, состоящая из точки $\dot{O} \in A$ и векторов $e_1, \dots, e_n$ выбранного базиса. Указанная система обозначается $\dot{O}e_1 e_2 \dots e_n$

В соответствии с аксиомой i), векторы e_j, $j = 1 \dots n$ удобно отложить от выбранной точки $\dot{O} \in A$. При этом радиус вектор $\overrightarrow{OA}$ разложим по базису (B), т.е $\overrightarrow{OA} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

Вектор $(a_1, \dots, a_n)$ задаёт координаты точки $\dot{A}$ из A в системе координат $Oe_1, e_2 \dots, e_n$.

Таким образом, получаем отображение $\dot{A} \in A \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{афф}}$

Это отображение задаёт изоморфизм произвольного аффинного пространства A в эталонное $\mathbb{R}^n$ афф и называется координатным изоморфизмом.

Следствие: любые два аффинных пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.

Пусть в аффинном пространстве A взяты две системы координат: $Oe_1 e_2 \dots e_n$ (старая)

$\tilde{O}\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n$ (новая).

Найдем связь координат точки M из A в этих двух системах.

Пусть „старые" координаты точки M – это скаляры $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $\mathbb{R}$, т.е $\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = [e_1, \dots, e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Аналогично, „новые" координаты точки M – это скаляры $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ из $\mathbb{R}$, т.е $\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \ldots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$.

Старый базис связан с новым соотношением

$$[\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n] = [e_1, \ldots, e_n] \cdot C$$

, где C – квадратная матрица размера $n \times n$

Столбцы матрицы $C = (c_{ij})$ состоят из координат новых базисных векторов в старом базисе. C – называется матрицей перехода.

Матрица C является матрицей перехода от одного базиса к другому тогда и только тогда, когда C – обратима.

Теорема (следующие утверждения эквивалентны):

- квадратная матрица C обратима
- столбцы матрицы C линейно независимы
- строки также линейно независимы
- $\det C \neq 0$

Если C – матрица перехода от базиса (B) к базису $(\tilde{B})$, то координаты вектора $e = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{e}_j$ связаны соотношением $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$, где C – матрица перехода от (B) к $(\tilde{B})$

Получим аналогичное соотношение для аффинных координат:

Пусть

$$\overrightarrow{OM} = [e_1, e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O\tilde{O}} = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j = [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$b_1, \dots, b_n$ - координаты точки $\tilde{O}$ в „старой" системе координат.

Используем равенство:

$\overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}M} = \overrightarrow{OM}$ (равенство треугольника)

Имеет место разложение:

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = [e_1, \dots, e_n]\, C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$$

Подставляя разложение векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{\tilde{O}M}$ и $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ по векторам $(e_1 \dots e_n)$ в равенство треугольника, получаем:

$$\boxed{\begin{aligned} &[e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + [e_1, \dots, e_n]\, C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= [e_1 \dots e_n] \left\{ C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}}$$

В силу однозначности разложения вектора по базису, получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (OB \to O\tilde{B})$$

1) Если $O=\tilde{O}$, то $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ и формулы принимают вид: $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$

2) Если $(e_1, \ldots, e_n) = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$, то $C=E$

Пусть M и N – точки аффинного пространства, имеющие следующие разложения по базису $Oe_1e_2\ldots e_n$:

$$M: \overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

$$N: \overrightarrow{ON} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

Зададим преобразование A в себя соотношением $M \mapsto N$, причём $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, где $\det C \neq 0$

Если ввести обозначения: $=y$; $=x$; $=b$, то получим короткую запись: $y = Cx + b$ – такое преобразование аффинного пространства в себя называется аффинным ($\det C \neq 0$)

Теорема: аффинное преобразование имеет такой вид $y = Cx + b$ в любом базисе $\tilde{O}\tilde{e}_1\ldots\tilde{e}_n$, где $\det\tilde{C} = \det C \neq 0$

Док-во: в лекции № 18

Свойства аффинного преобразования:

1° Оно является взаимно однозначным.

2° Два последовательно применённых аффинных преобразования – это снова аффинное преобразование.

Да ладно?

3° Тождественное преобразование $M \mapsto M$ является аффинным

4° Обратное преобразование, также является аффинным.

5° Композиция аффинных преобразований ассоциативна.

Свойства 1–5 означают, что все аффинные преобразования образуют группу. $A(n)$ – обозначение группы.

Аффинное преобразование $y = Cx + b$, где $\det C > 0$, называется собственным.

При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые, а плоскости в плоскости.

Докажите в качестве упражнения. (в лекции нет)

Теорема: Взаимно однозначное преобразование аффинного пространства в себя, при котором прямые переходят в прямые, является аффинным преобразованием. Док-во в лекции НЕ приводится.

Лемма: При афф. преобр.:

1) пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся
2) параллельные в параллельные
3) пересекающиеся и параллельные плоскости,

соответственно

4) прямая, пересекающая плоскость,

соответственно.

Теорема: (основное свойство аффинных преобразований)

Афф. преобр. евклидова пространства сохраняет отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой.

Док-во: в лекции №18

Афф. пр-е вида $y = x + b$, т.е $C = E$, называют **сдвигом (трансляцией)** на вектор b.

Всевозможные сдвиги Афф. пр-ва образуют группу, которая обозначается $\mathbb{R}^n$ (здесь $n = \dim A$)

Афф. пр-е вида $y = Cx$, т.е $b = 0$, называют **линейными**.

Пара примеров в конце лекции №18.