Тема : Определенный интеграл

$\mathbf{1^0}$. Следствие теоремы об интеграле Римана как пределе сумм Дарбу со стремящейся к нулю мелкостью. $\mathbf{2^0}$. Эквивалентность определений интеграла Римана как предела интегральных сумм Римана и как предела сумм Дарбу по разбиениям с исчезающей мелкостью. $\mathbf{3^0}$. Сохранение интегрируемости при переходе к меньшему промежутку. $\mathbf{4^0}$. Сохранение интегрируемости при переходе к объединению промежутков. $\mathbf{5^0}$. Наследование свойства интегрируемости модулем функции. Интегрируемость суммы, разности, произведения и отношения интегрируемых функций. Признак интегрируемости ограниченной на интервале функции. Пример.

1^0. В качестве следствия теоремы об интеграле Римана как пределе сумм Дарбу со стремящейся к нулю мелкостью сформулируем следующий полезный критерий интегрируемости.

Следствие (LEQ-критерий интегрируемости). *Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на промежутке $\Delta \subset D_f$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\tau_k(\Delta)$,*

$k = 1, 2, \ldots$, *разбиений промежутка* Δ *с условием, что при* $k \to +\infty$ *мелкость* $|\tau_k|$ *стремится к нулю и при этом выполняется следующее предельное равенство:*

$$\lim_{k \to +\infty} [S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)] = 0. \qquad (\mathrm{Int})$$

Отметим, что если найдется хотя бы одна последовательность $\tau_k(\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, разбиений промежутка с исчезающей в пределе мелкостью, удовлетворяющая к тому же предельному условию $(\mathbf{Int})$, то это же условие будет выполнено и для любой другой последовательности $\boldsymbol{\tau'_k(\Delta)}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$, разбиений промежутка с нулевой мелкостью в пределе, т.е. такой, что $\boldsymbol{\lim\limits_{k\to+\infty} |\tau'_k(\Delta)| = 0}$. Таким образом, условие $(\mathbf{Int})$ достаточно проверять лишь для какой-то одной конкретной последовательности $\boldsymbol{\tau_k(\Delta)}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$, разбиений промежутка с исчезающей в пределе мелкостью.

2^0. Пусть для функции $f(x)$, интегрируемой по Риману на промежутке $\Delta \subset D_f$, построена какая-нибудь последовательность $\tau_k(\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, разбиений промежутка Δ с исчезающей в пределе при $k \to +\infty$ мелкостью $|\tau_k|$. Если при этом

$$\lim_{k\to+\infty} [S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)] = 0,$$

то, как следует из теоремы о пределе сумм Дарбу, интеграл Римана функции $f(x)$ по промежутку Δ получается по формулам

$$\lim_{k\to+\infty} s(f,\tau_k) = \lim_{k\to+\infty} S(f,\tau_k) = \int_{\Delta} f(x)\,dx. \qquad (\mathrm{R}_{\lim})$$

Вместо сумм Дарбу в последнем равенстве допустимо также использовать последовательность $\sigma(f;\tau_k,\xi)$ интегральных сумм Римана, связанную с суммами Дарбу соотношениями

$$s(f,\tau_k) \leqslant \sigma(f;\tau_k,\xi) \leqslant S(f,\tau_k). \qquad (\sigma_{\leqslant})$$

Напомним, что согласно определению

$$\sigma(f;\tau_k,\xi) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i^k)|\Delta_i^k|,$$

где $\xi = (\xi_1^k, \xi_2^k, \ldots, \xi_N^k)$, а каждая из точек ξ_i^k, $k = 1, \ldots, N$, лежит в своем мелком промежутке Δ_i^k и в остальном произвольна. Переходя в неравенствах $(\sigma_{\leqslant})$ к пределу при $k \to +\infty$ и пользуясь равенствами $(\mathrm{R}_{\mathbf{lim}})$, получаем в результате

$$\lim_{k\to+\infty}\sigma(f;\tau_k,\xi)=\int\limits_{\Delta}f(x)dx. \qquad (\mathrm{R}'_{\mathbf{lim}})$$

Равенства $(\mathrm{R}_{\mathbf{lim}})$ и $(\mathrm{R}'_{\mathbf{lim}})$ справедливы для любой последовательности $\tau_k(\Delta)$, $k=1,2,\ldots$, разбиений промежутка Δ с исчезающей в пределе при $k\to+\infty$ мелкостью $|\tau_k|$. По этой причине вместо этих двух равенств зачастую используются следующие эквивалентные им формулы:

$$\lim_{|\tau|\to 0} s(f,\tau) = \lim_{|\tau|\to 0} S(f,\tau) = \int_{\Delta} f(x)dx,$$

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;\tau,\xi) = \int_{\Delta} f(x)dx.$$

Последнее из этих равенств обычно рассматривают в качестве определения интеграла

Римана от функции по промежутку. Проведенные нами рассуждения показывают, что это определение интеграла как предела интегральных сумм Римана равносильно принятому нами ранее.

3^0. Свойство интегрируемости функции сохраняется при переходе к меньшему промежутку, содержащемуся в исходном.

Лемма. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману на промежутке* Δ. *Тогда функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману и на любом меньшем промежутке* Δ', *вложенном в исходный,* $\Delta' \subset \Delta$.

Доказательство. Пусть последовательность разбиений $\tau'_k(\Delta')$, $k = 1, 2, \ldots$, меньшего промежутка Δ' имеют в пределе исчезающую мелкость $|\tau'_k|$, то есть $|\tau'_k| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Каждое из разбиений $\tau'_k(\Delta')$ дополним до некоторого разбиения $\tau_k(\Delta)$ бо́льшего промежутка Δ таким образом, чтобы мелкость $|\tau_k(\Delta)|$ не превосходила мелкости исходного меньшего разбиения:

$$|\tau_k(\Delta)| \leqslant |\tau'_k(\Delta')|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$, видим, что мелкость $|\tau_k(\Delta)|$ также стремится к нулю.

Следовательно, и в силу интегрируемости функции $f(x)$ на промежутке Δ имеем равенство

$$\lim_{k\to+\infty}[S(f,\tau_k(\Delta))-s(f,\tau_k(\Delta))]=0.$$

Разбиение $\tau'_k(\Delta')$ вложено в дополняющее его множество $\tau_k(\Delta)$. По этой причине и в соответствии с определением сумм Дарбу имеем неравенство

$$S(f,\tau'_k(\Delta'))-s(f,\tau'_k(\Delta'))\leqslant S(f,\tau_k(\Delta))-s(f,\tau_k(\Delta)).$$

Переходя здесь к пределу по $k \to +\infty$ и пользуясь предыдущим равенством, получаем

$$\lim_{k\to+\infty} [S(f, \tau_k'(\Delta')) - s(f, \tau_k'(\Delta'))] = 0.$$

Таким образом, на промежутке Δ' с последовательностью разбиений $\tau_k'(\Delta')$, $k = 1, 2, \ldots$, функция $f(x)$ удовлетворяет условию $(\mathbf{Int})$ из критерия интегрируемости.

Применяя этот критерий заключаем, что $f(x)$ интегрируема и на промежутке Δ'. $\square$

4^0. Если функция интегрируема на двух примыкающих к друг к другу, возможно с пересечением, промежутках, то она интегрируема и на их объединении, которое также должно быть промежутком.

Лемма. *Пусть* Δ', Δ'' *и* $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ *— это промежутки. Если функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману на* Δ' *и на* Δ'', *то она интегрируема и на* Δ.

Доказательство. Если $\Delta' = \Delta$ или $\Delta'' = \Delta$, то утверждение очевидно. Поэтому предполагаем, что $\Delta' \neq \Delta$ и $\Delta'' \neq \Delta$. При этом разность множеств $\Delta''' = \Delta'' \setminus \Delta'$ — это также промежуток, причем

$$\Delta = \Delta' \cup \Delta''', \quad \Delta' \cap \Delta''' = \emptyset, \quad \Delta''' \neq \emptyset.$$

Пусть $\tau'_k(\Delta')$ — это разбиение промежутка Δ' с исчезающей в пределе мелкостью $|\tau'_k|$, то есть $|\tau'_k| \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть также есть разбиение $\tau_k'''(\Delta''')$ промежутка Δ''' с мелкостью $|\tau_k'''|$ и при этом $|\tau_k'''| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Объединение $\tau_k = \tau_k'(\Delta') \cup \tau_k'''(\Delta''')$ представляет собой некоторое разбиение промежутка Δ. Мелкость этого разбиения стремится к нулю при неограниченном увеличении k:

$$|\tau_k| = \max\{|\tau_k'|, |\tau_k'''|\} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Вычисляя разность вехней и нижней сумм Дарбу при выбранном разбиении $\tau_k = \tau_k(\Delta)$, получаем

$$S(f, \tau_k(\Delta)) - s(f, \tau_k(\Delta)) =$$

$$= [S(f, \tau_k') - s(f, \tau_k')] + [S(f, \tau_k''') - s(f, \tau_k''')].$$

По условию функция $f(x)$ интегрируема по Риману на Δ' и на Δ''.

Учитывая, что $\Delta''' \subset \Delta''$ и применяя предыдущую лемму, заключаем, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману и на Δ'''. Таким образом, справедливы равенства

$$\lim_{k\to+\infty}[S(f,\tau_k') - s(f,\tau_k')] = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty}[S(f,\tau_k''') - s(f,\tau_k''')] = 0.$$

Но тогда и $\lim\limits_{k\to+\infty}[S(f,\tau_k(\Delta)) - s(f,\tau_k(\Delta))] = 0$.

Таким образом, функция $f(x)$ на промежутке Δ с последовательностью разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию $(\mathbf{Int})$ критерия интегрируемости.

Следовательно, на объединенном промежутке Δ функция $f(x)$ также интегрируема. $\square$

5^0. Интеграл Римана определен в случае конечного промежутка интегрирования на числовой оси. Таким образом, в текущей лекции *все рассматриваемые промежутки интегрирования конечны*. Сформулируем ряд свойств определенного интеграла Римана.

$(\mathbf{DI})_1$. Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке Δ. Тогда функция $|f|(x)$ также интегрируема на промежутке Δ.

Доказательство. Пусть промежуток Δ' вложен в промежуток Δ, а в остальном произволен, $\Delta' \subset \Delta$. Тогда для любой пары точек x_1 и x_2 из Δ' справедливо неравенство

$$\big||f(x_2)| - |f(x_1)|\big| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \omega(f, \Delta'). \quad (1)$$

Здесь $\omega(f, \Delta')$ — это колебание функции $f(x)$ на промежутке Δ'. Из оценки (1) получаем

$$\omega(|f|, \Delta') \leqslant \omega(f, \Delta') \leqslant \omega(f, \Delta). \quad (2)$$

Пусть последовательность разбиений

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \dots, \Delta_{N_k}^k\}$$

промежутка Δ имеет исчезающую в пределе мелкость $|\tau_k|$, то есть $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Применяя на каждом из промежутков Δ_i^k этого разбиения оценку (2), имеем

$$\omega(|f|, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leqslant \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k|, \qquad i = 1, 2, \dots, N_k.$$

Суммируя эти неравенства, получаем

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{N_k} \omega(|f|, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leqslant \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k|.$$

При $k \to +\infty$ мажоранта в правой части последней оценки стремится к нулю в силу интегрируемости функции $f(x)$ на Δ. Следовательно, при $k \to +\infty$ неотрицательная сумма $\sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega(|f|, \Delta_i^k)|\Delta_i^k|$ в пределе также стремится к нулю. Это и означает, что модуль $|f|(x)$ является интегрируемой на Δ функцией. $\square$

$(\mathbf{DI})_2$. Пусть функция $f(x)$, $x \in D_f$, интегрируема на промежутке Δ и при этом

$$|f(x)| \geqslant C > 0 \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \Delta,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Тогда отношение $\frac{1}{f}$ — это также интегрируемая на промежутке Δ функция.

Доказательство. Для произвольного вложенного в Δ промежутка Δ', $\Delta' \subset \Delta$, справедливы следующие оценки:

$$\left|\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}\right| = \frac{1}{|f(x_1)f(x_2)|}\bigl|f(x_2) - f(x_1)\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C^2}\bigl|f(x_2) - f(x_1)\bigr| \leqslant \frac{1}{C^2}\omega(f, \Delta'). \qquad (3)$$

Здесь x_1, x_2 — произвольные точки из Δ'.

Пусть последовательность разбиений

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$$

промежутка Δ имеет исчезающую в пределе мелкость $|\tau_k|$, то есть $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Применяя на каждом из малых промежутков Δ_i^k оценку (3), получаем неравенства

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{N_k} \omega\left(\frac{1}{f}, \Delta_i^k\right)|\Delta_i^k| \leqslant \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k|.$$

При $k \to +\infty$ мажоранта в правой части последней оценки стремится к нулю в силу интегрируемости функции $f(x)$ на Δ. Следовательно, при $k \to +\infty$ промежуточная неотрицательная сумма $\sum\limits_{i=1}^{N_k} \omega\left(\frac{1}{f}, \Delta_i^k\right)|\Delta_i^k|$ в пределе также стремится к нулю.

Это и означает, что отношение $\frac{1}{f}$ — это также интегрируемая на Δ функция. $\square$

$(\mathbf{DI})_3$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда их сумма $f+g$, разность $f-g$ и произведение $f\cdot g$ также интегрируемы на том же промежутке Δ.

Доказательство. Пусть Δ' — произвольный вложенный в Δ промежуток, $\Delta'\subset\Delta$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$0\leqslant\omega(f+g,\Delta')\leqslant\omega(f,\Delta')+\omega(g,\Delta'). \tag{4}$$

Рассуждая таким же образом, как при доказательстве предыдущих свойств $(\mathbf{DI})_1$ и $(\mathbf{DI})_2$, выводим из (4) свойство интегрируемости суммы $f+g$ на промежутке Δ.

Для разности $f-g$ целесообразно использовать оценку

$$0 \leqslant \omega(f-g,\Delta') \leqslant \omega(f,\Delta') + \omega(g,\Delta').$$

Оценим теперь колебание произведения $f \cdot g$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ и, следовательно, ограничены на этом промежутке.

Таким образом, существует такая конечная константа M, что

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant M \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Учитывая эти неравенства, для любой пары точек x_1 и x_2 из Δ' имеем

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant |g(x_1)(f(x_1) - f(x_2)) + (g(x_1) - g(x_2))f(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant M|f(x_1) - f(x_2)| + M|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant M\omega(f, \Delta') + M\omega(g, \Delta'). \qquad (5)$$

Из оценки (5) получаем теперь

$$\omega(fg, \Delta') \leqslant M\omega(f, \Delta') + M\omega(g, \Delta') \leqslant$$

$$\leqslant M(\omega(f, \Delta) + \omega(g, \Delta)). \qquad (6)$$

Рассуждая далее аналогично доказательствам свойств $(\mathrm{DI})_1$ и $(\mathrm{DI})_2$, получаем из (6) интегрируемость произведения fg на промежутке Δ. $\square$

$(\mathbf{DI})_4$. Пусть функция $f(x)$ ограничена на конечном интервале $(a, b) \subset D_f$ и при этом интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, вложенном в интервал (a, b), $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на (a, b).

Доказательство. По условию существует такая конечная константа M, что

$$|f(x)| \leqslant M \qquad \forall\, x \in (a, b).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выберем затем отрезок $[\alpha, \beta]$ вложенным в интервал (a, b) таким образом, чтобы сумма положительных расстояний $L_1 = \alpha - a > 0$ и $L_2 = b - \beta > 0$ не превышала отношения $\frac{\varepsilon}{4M}$, то есть чтобы $L_1 + L_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$.

По условию функция $f(x)$ интегрируема на выбранном отрезке $[\alpha, \beta]$. Следовательно, существует разбиение $\tau([\alpha,\beta]) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ такое, что

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{N} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим еще два интервала $\Delta_0 = (a, \alpha)$ и $\Delta_{N+1} = (\beta, b)$. Тогда множество

$$\{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N, \Delta_{N+1}\}$$

задает некоторое разбиение интервала (a, b).

При этом справедливы соотношения

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{N+1} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| = \omega(f, \Delta_0)|\Delta_0| +$$

$$+\omega(f, \Delta_{N+1})|\Delta_{N+1}| + \sum_{i=1}^{N} \omega(f, \Delta_i)|\Delta_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(\alpha - a) + 2M(b - \beta) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2M(L_1 + L_2) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Величина ε здесь произвольна и, следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на интервале (a,b). $\square$

Пример. *Функция* $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\frac{1}{x})$ *интегрируема на любом интервале вида* $(0,a)$.

Доказательство. Заметим, что $f(x)$ ограничена на интервале $(0,a)$, и при этом на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset(0,a)$ функция $f(x)$ является ступенчатой.

Как уже отмечалось, любая ступенчатая функция интегрируема по Риману.

Таким образом, свойство интегрируемости рассматриваемой функции $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ сразу следует из доказанного свойства $(\mathbf{DI})_4$.

$\square$

Тема : Свойства определенных интегралов и интегрируемых функций

$\mathbf{1^0}$ Достаточные признаки интегрируемости функций. $\mathbf{2^0}$ Линейность, аддитивность и монотонность интеграла. $\mathbf{3^0}$ Интегральная теорема о среднем. $\mathbf{4^0}$ Интеграл по ориентированному промежутку. Интеграл с переменным верхним пределом: определение, непрерывность, оценка приращения. $\mathbf{5^0}$ Производная по верхнему пределу интегрирования. Следствия. $\mathbf{6^0}$ Формула Ньютона — Лейбница. Примеры и следствия. $\mathbf{7^0}$ Формула интегрирования по частям для определенных интегралов. $\mathbf{8^0}$ Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

1^0. Функции, интегрируемые по Риману на заданном промежутке Δ числовой прямой, образуют в совокупности векторное (линейное) пространство. Размерность этого пространства равна бесконечности.

Укажем ряд признаков, достаточных для принадлежности функции этому бесконечномерному классу интегрируемых по Риману функций.

(**RS**). Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на конечном интервале (a, b), то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно непрерывна на конечном промежутке Δ, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

Лемма. *Пусть функция* $f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a, b]$*. Тогда* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$*.*

Доказательство. Для колебания монотонной функции $f(x)$ справедлива формула

$$\omega(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

Пусть последовательность

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \dots, \Delta_{N_k}^k\}$$

разбиений отрезка $[a, b]$ имеет в пределе исчезающую мелкость $|\tau_k|$, то есть $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. Из условий, что $\Delta_i^k \cap \Delta_j^k = \emptyset$ при $i \neq j$ получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k) \leqslant |f(b) - f(a)| = \omega(f, [a, b]).$$

Пользуясь ею, имеем далее

$$\sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leqslant |\tau_k| \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k) \leqslant |\tau_k||f(b) - f(a)|.$$

Устремляя здесь $k \to +\infty$, получим в пределе равенство

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)|\Delta_i^k| = 0.$$

Это означает по определению, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. $\square$

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна на конечном интервале (a, b), то $f(x)$ интегрируема на этом интервале.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на конечном промежутке Δ, то $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

Пример. *Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ интегрируема на любом промежутке вида $(0, a]$.*

Это утверждение следует из ограниченности функции $\sin\frac{1}{x}$ на промежутке $(0, a]$ и непрерывности этой функции, а значит и ее интегрируемости, на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, a]$.

Пример. *Пусть* $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$*, где* $[\frac{1}{x}]$ *— это целая часть* $\frac{1}{x}$*. Тогда* $f(x)$ *интегрируема на любом промежутке вида* $(0, a]$*.*

Интегрируемость следует из ограниченности функции $f(x)$, удовлетворяющей оценкам

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

и ее кусочной монотонности на любом отрезке вида $[\alpha, \beta] \subset (0, a]$.

Пример. *Функция Римана $f(x)$ определяется следующим образом. Если $x = 0$ или x — иррациональное, то $f(x) = 0$. Если $x \neq 0$ и $x = \frac{p}{q}$, где p — целое, q — натуральное, и дробь $\frac{p}{q}$ несократимая, то $f(x) = \frac{1}{q}$. Определенная таким образом функция Римана $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$.*

Докажите последнее утверждение в качестве упражнения.

$\mathbf{2^0}$. Продолжим формулировать важнейшие свойства определенного интеграла.

$\mathbf{(DI)_5}$. Если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь в конечном числе точек из промежутка Δ, то $f(x)$ интегрируема на Δ и при этом

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\, dx = 0.$$

$(\mathbf{DI})_6$. Пусть $f(x)$ — ступенчатая функция на промежутке Δ, т.е. существует разбиение

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$$

промежутка Δ такое, что

$$f(x) = C_i \qquad \forall\, x \in \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где C_i — постоянные. Тогда $f(x)$ — интегрируема на Δ и при этом

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} C_i |\Delta_i|. \qquad (1)$$

Теорема (линейность интеграла). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда для любых постоянных λ и μ линейная комбинация $\lambda f(x) + \mu g(x)$ также интегрируема на Δ и при этом справедливо* *равенство*

$$\int\limits_{\Delta}(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx + \mu\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть последовательность

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$$

разбиений промежутка Δ имеет в пределе исчезающую мелкость $|\tau_k|$, то есть $|\tau_k| \to 0$

при $\boldsymbol{k \to +\infty}$. Для интегральных сумм Римана, соответствующих разбиению $\boldsymbol{\tau_k(\Delta)}$, справедливо соотношение

$$\boldsymbol{\sigma(\lambda f + \mu g, \tau_k) = \lambda\sigma(f, \tau_k) + \mu\sigma(g, \tau_k)}.$$

Переходя здесь к пределу при $\boldsymbol{k \to +\infty}$, получаем в результате искомую формулу (2) для интеграла от линейной комбинации. $\square$

Следствие. *Если изменить значения интегрируемой функции $f(x)$ в конечном числе точек промежутка интегрирования, то интеграл от измененной функции по рассматриваемому промежутку равен интегралу от исходной $f(x)$.*

Доказательство. Пусть значения $f(x)$ изменены в точках $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ промежутка Δ. Определим функцию $g(x)$ в точке x_j равной изменению $f(x)$ в этой самой точке. Во всех остальных точках промежутка Δ полагаем $g(x)$ равной нулю. Тогда измененная функция представляет собой сумму $f(x)+g(x)$ и согласно свойству линейности интеграла имеем равенство

$$\int\limits_{\Delta}(f(x)+g(x))\,dx=\int\limits_{\Delta}f(x)\,dx+\int\limits_{\Delta}g(x)\,dx.$$

Последний интеграл равен нулю в силу формулы (1). Таким образом, интеграл от измененной функции $f(x)+g(x)$ совпадает с интегралом от исходной функции $f(x)$. $\square$

Следствие. *Если интегрируемую на интервале* (a, b) *функцию* $f(x)$ *доопределить произвольным образом в крайних точках* a *и* b*, то интегралы по промежуткам* (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ *и* $(a, b]$ *совпадают друг с другом.*

В силу последнего утверждения интегралы по всем четырем промежуткам (a, b), $[a, b]$,

$[a,b)$ и $(a,b]$ обозначаются одним и тем же символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Теорема (аддитивность интеграла). *Пусть промежутки Δ, Δ' и Δ'' связаны соотношениями $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta'} f(x)\,dx + \int\limits_{\Delta''} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Аддитивность интеграла докажите самостоятельно в качестве упражнения.

Теорема (монотонность интеграла). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ и при этом*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Delta} g(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть последовательность

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \ldots, \Delta_{N_k}^k\}$$

разбиений промежутка Δ имеет в пределе исчезающую мелкость $|\tau_k|$, то есть $|\tau_k| \to 0$ при $k \to +\infty$. В силу условия, что $f(x) \leqslant g(x)$, для интегральных сумм Римана, соответствующих разбиению $\tau_k(\Delta)$, получаем соотношение

$$\sigma(f, \tau_k) \leqslant \sigma(g, \tau_k).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема и неотрицательна на промежутке* Δ, *то*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на промежутке* Δ, *то*

$$\Big|\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{\Delta} |f(x)|\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Из условия, что $f(x)$ интегрируема на промежутке Δ следует интегрируемость здесь же ее модуля $|f|(x)$. При этом

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Из этих оценок в силу монотонности интеграла следуют соотношения

$$-\int\limits_{\Delta} |f(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{\Delta} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\Delta} |f(x)|\, dx.$$

Это и есть искомое неравенство (4). $\square$

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на промежутке* Δ *и при этом*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Тогда для интеграла от $f(x)$ *справедливы неравенства*

$$m|\Delta| \leqslant \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \leqslant M|\Delta|.$$

3^0. Востребованное свойство определенных интегралов часто формулируется как *теорема о среднем* для этих интегралов.

Теорема (интегральная теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке Δ, функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ неотрицательна на Δ. Тогда существует такая точка ξ из Δ, что*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$m = \inf_{x \in \Delta} f(x), \qquad M = \sup_{x \in \Delta} f(x).$$

Обе эти величины конечны в силу непрерывности $f(x)$ на отрезке Δ. Из неотрицательности на Δ функции $g(x)$ следует, что

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Интегрируя эти неравенства, получаем

$$m \int\limits_{\Delta} g(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int\limits_{\Delta} g(x)\,dx.$$

Если $\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx = 0$, то из последних двух неравенств следует, что $\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx = 0$, и поэтому равенство (5) справедливо.

Пусть теперь $\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx > 0$. Тогда имеем

$$m \leqslant \frac{\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_{\Delta} g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{6}$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна на Δ. Следовательно, она принимает на Δ все значения из отрезка $[m, M]$. В частности, как это следует из (6), существует точка ξ из Δ, удовлетворяющая равенству (5). $\square$

4^{0}. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по промежутку Δ числовой прямой, т.е. определен интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)\, dx$. Если $\Delta = [a, b]$, где $a < b$, то этот же интеграл обозначается символом

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)\, dx$$

и называется "интегралом от $f(x)$ по dx от a до b".

Понятие интеграла распространяется также на случай, когда интегрирование ведется от большей точки к меньшей, т.е. “от b до a”, где $a < b$. В этом случае по определению полагается, что

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\Delta f(x)\,dx,$$

а соответствующий интеграл, как говорят, является “интегралом от b до a по dx”. В частности, при $b = a$ имеем

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Определение. *Интегралы* $\int_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int_b^a f(x)\,dx$ *называются интегралами по ориентированным промежуткам.*

На интегралы по ориентированным промежуткам распространяются основные свойства определенного интеграла.

$(\mathrm{DI})'_1$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ. Тогда для любых постоянных λ и μ справедливы равенства

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

где a и b — любые числа из промежутка Δ.

$(\mathbf{DI})'_{\mathbf{2}}$. Если функция $f(x)$ интегрируема на Δ, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где a, b, c — любые числа из промежутка Δ.

$(\mathbf{DI})'_{\mathbf{3}}$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке Δ, функция $f(x)$ непрерывна на Δ, а функция $g(x)$ не меняет знак на Δ. Тогда для любых точек a и b из Δ существует точка ξ, лежащая между a и b и такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (\text{MT}')$$

В частности, при $g(x) = 1$ имеем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Подчеркнем, что в свойствах $(\mathbf{DI})'_1$, $(\mathbf{DI})'_2$ и $(\mathbf{DI})'_3$ числа a и b выбираются из промежутка Δ *произвольным образом*, т.е. возможны три случая: $a < b$, $a = b$ и $a > b$.

В равенстве $(\mathbf{DI})'_2$ точки a, b, c выбираются в промежутке Δ также произвольным образом. При этом возможны все шесть случаев: $a \leqslant b \leqslant c$, $a \leqslant c \leqslant b$, $b \leqslant a \leqslant c$ и т.д.