Первообразная и неопределенный интеграл

ллlaал

ориг - https://pornhub.com/id/vaskevich/presentations/27022020.pdf

Функция F(x) называется **первообразной** функции f(x), заданной на некотором множестве X, если F′(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная функции f(x), то Φ(x) является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда Φ(x)=F(x)+C, где C - некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных функции f(x) называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

первообразная данной функции на промежутке определена с точностью до аддитивной постоянной

Понятие первообразной обобщается на случай кусочно-дифференцируемых функций

Опр. Пусть F(x) непрерывна на Δ и имеет здесь производную F ‘X = f(x) всюду кроме конечного числа точек. Тогда F(x) называется первообразной для f(x)

Опр. Любая первообразная функции f(x) называется также неопределённым интегралом от этой функции и обозначается ∫f(x)dx

Символ ∫ называется **знаком интеграла**, $f(x)dx$ называется **подынтегральным выражением**, а функция $f(x)$ - **подынтегральной функцией.**

Операция отыскания неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется **интегрированием функции f(x)**.

Пример.

1) $f(x) = x^2$. Рассмотрим $F(x) = \frac{1}{3} x^3$. Имеем $F'(x) = x^2$ для всех $x \in R$. Таким образом, $F(x) = \frac{1}{3} x^3$ - это первообразная (неопр. интеграл) для $f(x) = x^2$.
2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ - (знак, $x>0 \Rightarrow 1$, $x<0 \Rightarrow -1$). Рассмотрим кусочно дифференцируемую на R функцию $F(x) = |x|$. $F'(x) = 1$, $x>0$, $F'(x)=-1$, $x<0$, т.е. $F'(x) = \operatorname{sgn} x$ для всех $x \neq 0$, $\Rightarrow \int \operatorname{sgn} x\, dx = |x| + c$

Свойства неопределенного интеграла.

1. $(d/dx)(\int f(x)dx) = f(x) \Leftrightarrow d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ -- всюду на Δ, кроме, может быть, конечного числа точек

2. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$ -- $F(x)$ непрерывна и кусочно-диф-ма на Δ. При этом $F'(x)$ может быть неопределена в кон. числе точек

3. Аддитивность

$$\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

4. Однородность

$\int af(x)dx=a\int f(x)d$, При $a=0$ имеем $\int 0f(x)dx = \int 0dx = C$

5. Линейность

$\int(af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, a,b <- R

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

5. $\int \cos x dx = \sin x + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + c$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + c \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

17. $\int shxdx = chx + c$

18. $\int chxdx = shx + c$

19. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

20. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

http://matematikaprosta.ru

Все формулы справедливы на тех промежутках числовой оси, на которых **определены подынтегральные функции**

Производная **элементарной функции** является элементарной функцией, однако первообразная элементарной функции **не всегда** является элементарной функцией. Если все же интеграл от некоторой функции является элементарной функцией, то говорят, что **интеграл вычисляется.**

Далее будем рассматривать первообразные, имеющие производные во **всех** точках промежутка без исключения

Теорема (формула интегрирования по частям): Пусть функция $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы на промежутке Δ. Тогда если функция $g(x)f'(x)$ имеет на Δ первообразную. то и функция $f(x)g'(x)$ также имеет здесь первообразную и при этом

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Док-во: Для доказательства достаточно найти производную от правой части формулы (с левой тоже нужно взять, просто там это тривиально)

Иной вариант записи формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Примеры:

1) $\int \ln x \, dx = \{| \ u = \ln x; \ dv = dx, \Rightarrow v = x; \ du = (1/x) \, dx \ |\} \ x*(\ln x) - \int x(1/x)dx = \ * \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$
2) $\int x * e^x \, dx = \{| \ u = x; \ dv = e^x \, dx, \Rightarrow du = dx; \ v = e^x |\} \ x * e^x - \int e^x * dx = xe^x - e^x + C$

Теорема (формула замены переменной интегрирования): Пусть f(y) и g(x) определены на некоторых промежутках числовой оси и при этом имеет смысл композиция f(g(x)). Пусть также g(x) - дифференцируемая функция. Тогда функция f(g(x))g'(x) имеет в качестве первообразной функцию F(g(x)), где F(y) - первообразная для f(y). Иными словами справедлива формула

Иной вариант записи формулы:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

Сформулированная теорема является **следствием** формулы дифференцирования сложной функции.

Также данная формула называется **формулой подстановки** новой переменной интегрирования (подстановка y = g(x)).

Эту же формулу можно записать так:

$$\int f(y)dy = \int f(g(x))g'(x)dx$$

В таком виде - это метод замены переменной интегрирования ($x = g^{-1}(y)$)

Примеры:

1) $\int ctg(x)*dx = \int (\cos x / \sin x)\, dx =$ *{- y = sinx -}* $\int dy / y = \ln |y| + C = \ln |\sin x| + C$

2) $$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3x+1)'dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3+0)dx = \int \sin(3x+1)dx$$

Рациональной функцией (или дробью) называется функция вида $Qm(x)/Pn(x)$, где $Qm(x)$ и $Pn(x)$ - это многочлены степени m и n соответственно. Если $m < n$, то дробь называется **правильной**.

Лемма: Любой многочлен степени n с **вещественными** коэффициентами однозначно представим в виде произведения сомножителей вида $(x - a)^k$ и $((x - \alpha) + \beta^2)^k$, и сумма степеней сомножителей равна **n**.

Алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) Выделить *целую часть* рациональной функции (это будет многочлен)
2) Оставшуюся правильную дробь методом неопределенных коэффициентов представить в виде *суммы простых дробей,* то есть дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Ax+B}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$$

"белый свисток" "пьяная горилла"

Лемма: При интегрировании дроби вида (**белый свисток**) получается либо дробь того же вида, либо функция A*ln(x-a). Первообразная любой дроби вида (**пьяная горилла**) **-** это линейная комбинация дробей того же вида и, может быть, функции $\ln((x-\alpha)^2+\beta^2)$ или $\operatorname{arctg}(x-\alpha)/\beta$.

Пример.

$$\int (x^3 + x^2 + x)dx / (x^2 + 1)^2.$$

f(x) $= (x^3 + x^2 + x) / (x^2 + 1)^2 = x / (x^2+1) + x^2/(x^2 + 1)^2 = x/(x^2+1) + 1/(x^2+1) - 1/(x^2+1)^2, \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x - \int dx/(x^2 + 1)^2$