# Тема : Квадратурные формулы Гаусса.

$\mathbf{1^0}$. Максимально возможный алгебраический порядок точности квадратурной формулы на отрезке. $\mathbf{2^0}$. Полиномы Лежандра: определение, ортогональность, рекуррентные соотношения. Лемма о корнях полинома Лежандра заданной степени. $\mathbf{3^0}$. Интерполяционная квадратурная формула с $n$ узлами в корнях полинома Лежандра: конструкция, точность на полиномах степени $\leqslant 2n-1$. Определение формулы Гаусса. $\mathbf{4^0}$. Свойства формулы Гаусса: симметричность узлов, веса и узлы при малых $n$. Усложненная (составная) формула Гаусса. Представление погрешности. $\mathbf{5^0}$. Сравнение формулы Гаусса с формулой Симпсона. $\mathbf{6^0}$. Метод Монте — Карло для вычисления интегралов.

$3^0$. Вернемся к интерполяционной квадратурной формуле

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j), \qquad (CF_N)$$

узлы $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, которой выбраны в корнях полинома Лежандра $X_N(x)$ степени $N$.

По доказанной лемме о корнях полиномов

Лежандра все числа $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, вещественны и расположены в интервале $(-1, 1)$.

Веса рассматриваемой квадратурной формулы определяются равенствами

$$c_j = \int\limits_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x) dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Подынтегральный полином $l_{N-1,j}(x)$ степени $(N-1)$ здесь задается как следующее отношение:

$$\frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_N)}{(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_N)}.$$

Заметим еще, что

$$\begin{cases} l_{N-1,j}(x_k) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j; \\ l_{N-1,j}(x_j) = 1. \end{cases}$$

**Теорема.** *Квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j) \qquad (G)$$

*с узлами в корнях* $x_j$ *полинома Лежандра степени* $N$ *и весами* $c_j$*, определяемыми как интегралы от базисных полиномов* $l_{N-1,j}(x)$*,* *то есть равенствами*

$$c_j = \int\limits_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x)dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

*точна для полиномов степени* $2N-1$.

*Доказательство.* Пусть $P_{2N-1}(x)$ — это произвольный алгебраический полином степени $(2N-1)$. Разделим его с остатком на полином

Лежандра $X_N(x)$, то есть получим равенство

$$P_{2N-1}(x) = U_{N-1}(x)X_N(x) + V_{N-1}(x).$$

Здесь $U_{N-1}(x)$ — это частное от деления, которое является полиномом степени $(N-1)$. Остаток от деления $V_{N-1}(x)$ — это также полином степени $(N-1)$.

Полином Лежандра $X_N(x)$ ортогонален любому полиному меньшей степени. Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{-1}^{1} U_{N-1}(x) X_N(x) dx = 0.$$

Учитывая это и интегрируя полином $P_{2N-1}(x)$, получаем равенство

$$\int_{-1}^{1} P_{2N-1}(x) dx = \int_{-1}^{1} V_{N-1}(x) dx.$$

Далее, учитывая, что $X_N(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, приходим к следующим соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j P_{2N-1}(x_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j U_{N-1}(x_j) X_N(x_j) + \sum_{j=1}^{N} c_j V_{N-1}(x_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j V_{N-1}(x_j).$$

Но рассматриваемая квадратурная формула — интерполяционная и поэтому точна на всех алгебраических полиномах степени $\leq N-1$. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} P_{2N-1}(x)dx - \sum_{j=1}^{N} c_j P_{2N-1}(x_j) =$$

$$= \int_{-1}^{1} V_{N-1}(x)dx - \sum_{j=1}^{N} c_j V_{N-1}(x_j) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая квадратурная формула действительно точна для всех полиномов степени не выше $2N - 1$. $\square$

**Определение.** *Интерполяционная квадратурная формула* ($CF_N$) *с узлами в корнях полинома Лежандра степени* $N$ *называется* ***формулой Гаусса***.

Таким образом, формула Гаусса с $N$ узлами точна для полиномов степени $2N-1$, то есть точна для полиномов максимально возможной степени.

В частности, проведенные построения доказывают, что максимально возможный алгебраический порядок точности $d(N)$ квадратурной формулы с $N$ узлами на отрезке числовой прямой равен $2N-1$, то есть $d(N) = 2N - 1$.

$4^{\mathbf{0}}$. Узлы квадратурной формулы Гаусса расположены на интервале $(-1, 1)$ симметрично относительно точки $x = 0$.

Веса $c_j$ формулы Гаусса положительны. В симметричных узлах веса совпадают при любом $N$. Сумма весов квадратурной формулы Гаусса равна 2, то есть длине отрезка интегрирования.

В качестве примера приведем численные выражения неотрицательных узлов и соответствующих им весов $c_j$ формулы Гаусса для $N = 1, 2, 3, 4$ с десятью десятичными знаками после запятой.

$$N = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0.0000000000, \\ c_1 = 2.0000000000; \end{array}$$

$$N = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0.5773502692, \\ c_1 = 1.0000000000; \end{array}$$

$$N=3 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0.0000000000, \\ c_1 = 0.8888888888, \\ x_2 = 0.7745966692, \\ c_2 = 0.5555555555; \end{array}$$

$$N=4 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0.3399810436, \\ c_1 = 0.6521451549, \\ x_2 = 0.8611363116, \\ c_2 = 0.3478548451. \end{array}$$

Неудобство формулы Гаусса в общем случае — это иррациональность ее узлов и весов.

В частном случае $N = 1$ формула Гаусса совпадает с канонической квадратурной формулой прямоугольников для отрезка $[-1, 1]$.

Формулу Гаусса с $N$ узлами на отрезке $[-1, 1]$ называют иногда **канонической**.

Усложненная квадратурная формула Гаусса на произвольном отрезке $[a, b]$ конструируется следующим образом.

Отрезок $[a, b]$ разбивается на $M$ равных частей точками

$$\begin{cases} X_k^* = a + k\frac{b-a}{M}, & k = 0, 1, 2, \ldots, M-1, \\ X_M^* = b. \end{cases}$$

Затем на каждом из интервалов $(X_k^*, X_{k+1}^*)$ задаются $N$ точек с помощью равенства

$$x_{kj} = \frac{X_k^* + X_{k+1}^*}{2} + x_j \frac{b-a}{2M}, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь $x_j$ — узлы канонической формулы Гаусса на отрезке $[-1, 1]$.

Расположение узлов усложненной формулы

$$x_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

на каждом частичном отрезке $[X_k^*, X_{k+1}^*]$ геометрически подобно расположению узлов $x_j$ канонической формулы Гаусса на $[-1, 1]$.

Следовательно, квадратурная формула по каждому частичному отрезку

$$\int\limits_{X_k^*}^{X_{k+1}^*} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2M} \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_{kj}), \qquad (G_k)$$

где $c_j$ — это веса канонической формулы Гаусса, точна для полиномов степени $2N-1$.

Суммируя равенства $(G_k)$ по всем $k$ от $0$ до

$M-1$, получаем в итоге **усложненную формулу Гаусса**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2M} \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{k=0}^{M-1} f(x_{kj}),$$

точную для всех полиномов степени $\leq 2N-1$.

Усложненная квадратурная формула Гаусса имеет всего $N \cdot M$ узлов, а ее погрешность определяется равенством

$$R_N(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2M}\sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{k=0}^{M-1} f(x_{kj}).$$

При условии, что $f(x)$ принадлежит классу $C^{(2N)}[a,b]$, остаток $R_N(f)$ допускает следующее представление:

$$R_N(f) = \frac{(b-a)^{2N+1}}{M^{2N}} \frac{\left(N!\right)^4}{\left((2N)!\right)^3(2N+1)} f^{(2N)}(\xi).$$

Здесь $\xi$ — это некоторая точка из отрезка интегрирования $[a, b]$.

В частности, при $N = 2$ получаем

$$R_2(f) = \frac{(b-a)^5}{4320 \cdot M^4} f^{(4)}(\xi),$$

а при $N = 3$ имеем

$$R_3(f) = \frac{(b-a)^7}{2016000 \cdot M^6} f^{(6)}(\xi).$$

$5^0$. Сравним погрешность усложненной квадратурной формулы Гаусса при $N = 2$ и с числом $2M$ промежуточных отрезков интегрирования с погрешностью усложненной квадратурной формулы Симпсона и с числом узлов $2M$ и с шагом $h = \frac{b-a}{2M}$.

При условии, что $f(x)$ принадлежит классу $C^{(4)}[a, b]$, остаточный член $R_S(f)$ формулы

Симпсона представим в виде

$$R_S(f) = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot M^4} f^{(4)}(\xi).$$

Таким образом, числовой сомножитель перед четвертой производной функции в представлении остатка $R_S(f)$ формулы Симпсона по модулю в $1.5$ раза больше, чем модуль сомножителя перед $f^{(4)}(\xi)$ в представлении погрешности $R_2(f)$ усложненной формулы Гаусса.

Обе формулы точны на полиномах третьей степени. В формуле Симпсона требуется вычислить $(2M+1)$ значение функции, а в усложненной формуле Гаусса требуется найти $(2M)$ значений функции.

Квадратурную формулу Гаусса целесообразно применять при $N > 2$ для приближенного вычисления интегралов от функций с высокой гладкостью.

$6^0$. Пусть функция $f = f(x)$ определена на числовой прямой, причем на отрезке $[0, 1]$ эта функция такова, что определен интеграл

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

который может быть и несобственным. При этом на отрезке $[0, 1]$, как предполагается, может быть лишь конечное число особых точек, в которых $f(x)$ неограничена.

Условимся, что во всех особых точках функция $f(x)$ равна нулю.

Помимо прочих условий, предполагается также, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L_2[0,1]$, то есть

$$\int\limits_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

В этом случае для подсчета интеграла $I$ используется **метод Монте-Карло**.

При реализации этого вероятностного подхода рассматривается случайная величина $\eta$, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

Это означает, что соответствующая случайной величине $\eta$ функция распределения имеет плотность

$$\boldsymbol{P_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \ \text{ и } \ x > 1. \end{cases}}$$

Суперпозиция функции $f(\cdot)$ со случайной величиной $\eta$ также представляет собой случайную величину $\xi = f(\eta)$.

Математическое ожидание $M[\xi]$ этой величины в соответствии со своим определением удовлетворяет равенству

$$M[\xi] = \int\limits_0^1 f(x) P_\eta(x) dx = \int\limits_0^1 f(x) dx = I.$$

Таким образом, подсчет интеграла $I$ равнозначен вычислению математического ожидания $M[\xi]$ случайной величины $\xi = f(\eta)$.

Для того чтобы подсчитать $M[\xi]$, предлагается провести серию из $N$ независимых испытаний случайной величины $\eta$.

Пусть результаты этих испытаний — это числа (величины) $\eta_1$, $\eta_2$, …, $\eta_N$. Тогда рассмотрим соответствующие им значения случайной величины $\xi$, то есть числа

$$\xi_1 = f(\eta_1), \quad \xi_2 = f(\eta_2), \quad \ldots, \quad \xi_N = f(\eta_N).$$

Среднее арифметическое этих чисел используем в приближенном равенстве

$$M[\xi] \approx \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j) \equiv \overline{\xi_N}.$$

Иными словами, для подсчета интеграла $I$ предлагается использовать следующую квадратурную формулу с равными весами и со случайно подсчитанными узлами:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(\eta_j). \qquad (CF\eta)$$

Заметим, что $\xi_j = f(\eta_j)$ — это такая случайная величина, для которой справедливы равенства $M[\xi_j] = M[\xi] = I$. Следовательно,

$$M\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j\Big] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} M[\xi_j] = \frac{NI}{N} = I.$$

Сосчитаем дисперсию $\sigma$ случайной величины $\xi = f(\eta)$. Имеем по определению

$$\sigma^2 = D[\xi] = D[f(\eta)] = \int_0^1 \Big| f(x) - M[f] \Big|^2 dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)dx - \big(M[f]\big)^2 < +\infty.$$

Из условия на функцию $f$ следует, что величина $\sigma$ конечна и таким образом, справедливы равенства

$$D[\overline{\xi_N}] = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} D[\xi_j] = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}.$$

В силу **центральной предельной теоремы** распределение случайной величины $\overline{\xi_N}$ при $N \to \infty$ стремится к нормальному.

Поэтому при достаточно больших $N$ (практически при $N > 10$) и согласно формулам

$$M[\overline{\xi_N}] = I, \qquad D[\overline{\xi_N}] = \frac{\sigma^2}{N}$$

вероятность того события, что

$$|I - \overline{\xi_N}| < 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (E_*)$$

равна приблизительно $0.997$. Таким образом, оценка ($E_*$) погрешности квадратурной формулы ($CF_\eta$) верна с вероятностью $0.997$, весьма близкой к единице.

На практике при $N > 10$ для оценки $\sigma$ в правой части неравенства неравенства ($E_*$) используют приближенное равенство

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(\xi_j - \overline{\xi_N}\right)^2}.$$

Отметим, что случайные числа (величины), равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$, задаются в современных компьютерах с помощью специальных физических датчиков и программ. При применении программ эти числа называются **псевдослучайными**.

Недостатком метода Монте-Карло является вероятностный характер результата, то есть отсутствие строгих стремящихся к нулю оценок погрешности при $N \to \infty$.

# Тема : Численные методы решения задачи Коши для ОДУ

$\mathbf{1^0}$. Дифференциальная постановка задачи Коши для уравнения первого порядка. $\mathbf{2^0}$. Базовые понятия сеточных методов на отрезке. Лемма об оценке сеточных функций. $\mathbf{3^0}$. Метод Эйлера: расчетные формулы, геометрическая интерпретация. $\mathbf{4^0}$. Оценка устойчивости метода Эйлера, порядок точности относительно шага сетки. $\mathbf{5^0}$. Методы Рунге — Кутта: расчетные формулы, порядок точности (локальный и глобальный). Усовершенствованный метод Эйлера: расчетные формулы, аппроксимационные свойства. $\mathbf{6^0}$. Методы Рунге — Кутта четвертого порядка точности.

$1^0$. Рассмотрим некоторые численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть имеется следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$u' = f(x, u). \tag{E}$$

Его решение — функция $u = u(x)$, определенная на отрезке $x_0 \le x \le x_0 + l$ числовой прямой.

При этом график $u(x)$ содержится в некотором прямоугольнике вида

$$\overline{G} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_0 + l, \quad a \leq u \leq b\right\}.$$

К уравнению ($E$) добавим условие Коши в начальной точке отрезка:

$$u(x_0) = u_0. \tag{$Ic$}$$

По условию $a < u_0 < b$. Предполагаем, что решение задачи Коши, состоящей из уравнения ($E$) и начальных данных ($Ic$), существует, единственно и расположено в замкнутом прямоугольнике $\overline{G}$.

Для численного решения поставленной задачи Коши используются различные методы, среди которых выделяются метод Эйлера, методы Рунге-Кутта и метод Адамса.

Изложим далее основные идеи этих методов и приведем соответствующие расчетные формулы.

$2^0$. Приближения к решению $u = u(x)$ задачи Коши ($E$)-($Ic$) принято искать на конечном подмножестве отрезка $[x_0, x_0 + l]$.

Точки этого конечного подмножества называют узлами, в совокупности узлы образуют множество $\omega_h$, называемое сеткой метода.

Выберем в качестве узлов равноотстоящие друг от друга точки, задаваемые равенством

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N; \quad Nh = l.$$

Здесь $N$ — натуральное число, $x_N = x_0 + l$. Таким образом, узлы $x_j$ разбивают отрезок $[x_0, x_0 + l]$ на $N$ равных частей, каждая длины $h = \frac{l}{N}$.

Каждому узлу $x_j$ сопоставим вещественное число $\varphi_j$, то есть зададим некоторое соответствие

$$x_j \mapsto \varphi_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

из $\omega_h$ в $\mathbb{R}$. Вектор

$$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) = \overrightarrow{\varphi_h}$$

называют сеточной функцией. Совокупность $\mathbb{U}_h$ всех таких векторов образует векторное пространство, изоморфное $\mathbb{R}^{N+1}$.

Суммой двух сеточных функций $\varphi_h$ и $\psi_h$ из $\mathbb{U}_h$ называется сеточная функция, получаемая суммированием в $\mathbb{R}^{N+1}$ соответствующих векторов $\overrightarrow{\varphi_h}$ и $\overrightarrow{\psi_h}$.

Произведение сеточной функции на скаляр $\lambda$ — это вектор $\lambda\overrightarrow{\varphi_h}$ из $\mathbb{R}^{N+1}$.

Введем в линейном пространстве $\mathbb{U}_h$ сеточных функций следующую основную норму:

$$\|\varphi_h\|_h = \|\varphi\|_h = \max_{0\le j\le N} |\varphi_j|.$$

Пусть решение $u = u(x)$ задачи Коши $(E)$-$(Ic)$ определено на отрезке $[x_0, x_0 + l]$.

Тогда оно известно также и в узлах $x_j$ сетки $\omega_h$, то есть определена сеточная функция

$$\overrightarrow{u_h} = \big(u(x_0), u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)\big).$$

Под нормой $\|u\|_h$ подразумевается норма соответствующей сеточной функции $u_h$ в пространстве $\mathbb{U}_h$, то есть

$$\|u\|_h = \max_{0\le j\le N} |u(x_j)|.$$

Для оценки погрешностей приближений к решению $u = u(x)$ задачи Коши нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\varepsilon_0 = 0$ *и при этом для* $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ *справедливы неравенства*

$$|\varepsilon_{j+1}| \leq (1+\alpha)|\varepsilon_j| + \beta. \qquad (Es_0)$$

*Тогда справедлива и следующая оценка:*

$$|\varepsilon_k| \leq \beta \frac{e^{k\alpha} - 1}{\alpha}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (Es)$$

*Доказательство.* Применим метод математической индукции. При $k = 0$ оценка $(Es)$ принимает вид $|\varepsilon_0| \le 0$, то есть верна в силу условия $\varepsilon_0 = 0$.

Предположим, что ($Es$) выполнена при некотором $k = m$, то есть

$$|\varepsilon_m| \le \beta \frac{e^{m\alpha} - 1}{\alpha}.$$

Тогда при $k = m + 1$ имеем в силу условия ($Es_0$) и индуктивного предположения:

$$|\varepsilon_{m+1}| \le (1+\alpha)|\varepsilon_m| + \beta \le (1+\alpha)\frac{\beta}{\alpha}(e^{m\alpha} - 1) + \beta.$$

Преобразуя выражение в правой части, имеем далее

$$|\varepsilon_{m+1}| \le \frac{\beta}{\alpha}(e^{m\alpha} - 1) + \beta(e^{m\alpha} - 1) + \beta =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}(e^{m\alpha} - 1) + \beta e^{m\alpha} = \beta[\frac{e^{m\alpha} - 1}{\alpha} + e^{m\alpha}] =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}[e^{m\alpha} - 1 + \alpha e^{m\alpha}] = \frac{\beta}{\alpha}[(1+\alpha)e^{m\alpha} - 1].$$

Учитывая, что при $\alpha > 0$ имеет место неравенство $(1+\alpha) < e^{\alpha}$, получаем далее

$$|\varepsilon_{m+1}| \leq \frac{\beta}{\alpha}[e^{\alpha}e^{m\alpha} - 1] = \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{(m+1)\alpha} - 1\right).$$

Таким образом, искомая оценка ($Es$) при $k = m+1$ также справедлива. $\square$

$3^0$. Перейдем к формулировке различных сеточных методов, применяемых для численного решения задачи Коши ($E$)-($Ic$).

Прежде всего условимся о классе, которому должна принадлежать функция $f(x,u)$ из правой части уравнения ($E$).

Предположим, что $f(x,u)$ принадлежит пространству $C^{(m)}(\overline{G})$, где $\overline{G}$ — определенный ранее замкнутый прямоугольник

$$\overline{G} = [x_0, x_0 + l] \times [a, b].$$

Известна следующая теорема, доказываемая в теории ОДУ.

**Теорема.** *Пусть* $f = f(x,u)$ *имеет в* $\overline{G}$ *непрерывные производные до порядка* $m$ *включительно,* $m \geq 1$. *Тогда всякое решение* $u = u(x)$ *уравнения* $u' = f(x,u)$, *расположенное в* $\overline{G}$, *имеет* $(m+1)$ *непрерывную производную по переменной* $x$.

В случае, если $f(x,u)$ принадлежит классу

$\boldsymbol{C^{(1)}(\overline{G})}$, решение задачи Коши

$$\boldsymbol{u' = f(x,u), \qquad u(x_0) = u_0}$$

единственно и принадлежит классу $\boldsymbol{C^{(2)}(\overline{G})}$.

Пользуясь равенством

$$\boldsymbol{u' = f(x,u) \quad \forall\, x \in [x_0, x_0 + l],}$$

несложно выразить в терминах функции $f(x, u)$ и ее частных производных вторую производную решения:

$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x))\frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \cdot f(x, u(x)). \quad (D'')$$

Отметим, что при выборе метода численного приближения существенны свойства гладкости искомой функции $u = u(x)$.

Кроме того свойства гладкости решения дифференциальной задачи весьма интенсивно используются при анализе погрешности численного решения этой же задачи.

Первым рассмотрим метод Эйлера. В качестве приближения к решению задачи Коши на сетке $\omega_h$ используется сеточная функция, значения которой в точках сетки $\omega_h$ вычисляются по формулам

$$\begin{cases} y_0 = u_0, \\ y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \\ j = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \qquad (Eu_1)$$

Пусть сеточная функция $y_h = (y_0, y_1, \ldots, y_N)$ содержится в прямоугольнике $\overline{G}$, то есть

$$a \le y_j \le b, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Переход по формулам ($Eu_1$) от значения $y_j$ к значению $y_{j+1}$ геометрически означает перемещение по касательной к интегральной кривой $\widetilde{u_j}(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$.

Касательная проходит через точку $(x_j, y_j)$, а перемещение по ней происходит в направлении оси $Ox$ на шаг $h$.

На следующем шаге перемещение происходит из точки $(x_{j+1}, y_{j+1})$ в точку касательной к другой интегральной кривой $\widetilde{u_{j+1}}(x)$ того же уравнения. Интегральная кривая $\widetilde{u_{j+1}}(x)$ проходит через точку $(x_{j+1}, y_{j+1})$.

При этом начальной точкой, с которой начинается построение, служит точка $(x_0, y_0)$, где $y_0 = u_0$. Итог построения — ломаная, проходящая через точки $(x_j, y_j)$ плоскости и лежащая в прямоугольнике $\overline{G}$.

$4^{0}$. Оценим, насколько формулы ($Eu_1$) метода Эйлера устойчивы к погрешностям округлений.

Для этого вместо формул ($Eu_1$) рассмотрим следующие возмущенные к ним:

$$\begin{cases} y_0 = u_0, \\ y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \eta_j, \\ j = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \qquad (\widetilde{Eu_1})$$

Пусть сеточная функция $\eta_h = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N)$, характеризующая возмущение, удовлетворяет условию

$$\|\eta\|_h = \max_{0 \le j \le N} |\eta_j| \le C_0 h^2,$$

где $C_0$ — постоянная, не зависящая от $h$.

Введем обозначения $\varepsilon_j = u_j - y_j$, где $u_j = u(x_j)$, а $u = u(x)$ — решение исходной задачи Коши.

Используем в дальнейших оценках следующий набор констант, характеризующих количественно функцию $f(x,u)$ из $(\boldsymbol{E})$:

$$M_0 = \max_{(x,u)\in\overline{G}} |f(x,u)|,$$

$$M_1 = \max_{(x,u)\in\overline{G}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right|;$$

$$M_2 = \max_{(x,u)\in\overline{G}} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right|.$$

Предполагаем далее, что число $M_2$ строго положительно.

Если же $M_2 = 0$, то функция $f(x, u)$ не зависит от переменной $u$ внутри прямоугольника $G$, то есть $f(x, u) = f(x)$ и поиск решения задачи Коши сводится к вычислению первообразной функции одной переменной.

Для точного решения $u = u(x)$ задачи Коши согласно формуле Тейлора имеем

$$\begin{cases} u_0 = u_0, \\ \\ u_{j+1} = u_j + hf(x_j, u_j) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_j), \\ \\ \text{где } x_j < \xi_j < x_{j+1},\ j = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{1}$$

Вычитая из равенств (1) равенства ($\widetilde{Eu_1}$), получаем уравнение для сеточного возмущения $\varepsilon_j$:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 0, \\ \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + h(f(x_j, u_j) - f(x_j, y_j)) + (\frac{h^2}{2}u''(\xi_j) - \eta_j). \end{cases}$$

К разности $f(x_j, u_j) - f(x_j, y_j)$ применим формулу конечных приращений Лагранжа. Учитывая, что $(u_j - y_j) = \varepsilon_j$, получим

$$f(x_j, u_j) - f(x_j, y_j) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_j, \theta_j)(u_j - y_j) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_j, \theta_j)\varepsilon_j,$$

где $\theta_j$ лежит между $u_j$ и $y_j$.

Таким образом, получили неравенства

$$|\varepsilon_{j+1}| \le |\varepsilon_j| + hM_2|\varepsilon_j| + h^2\Big(|\frac{1}{2}u''(\xi_j)| + C_0\Big).$$

Для оценки $|u''(\xi_j)|$ используем следующее равенство, получаемое дифференцированием исходного ОДУ:

$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \cdot f(x, u(x)).$$

Полагая здесь $x = \xi_j$, имеем далее

$$|u''(\xi_j)| \le M_1 + M_2 \cdot M_0.$$

Таким образом, для погрешности $\varepsilon_j$ выполняется следующая серия оценок:

$$|\varepsilon_{j+1}| \le (1 + hM_2)|\varepsilon_j| + h^2 M.$$

Постоянная $M$ здесь задается равенством

$$M = C_0 + \frac{1}{2}(M_1 + M_0 M_2).$$

В результате получаем следующую мажоранту сеточной погрешности метода:

$$\|\varepsilon\|_h = \max_{0\le k\le N} |\varepsilon_k| \le \max_{1\le k\le N} [(1+\alpha)|\varepsilon_{k-1}| + \beta],$$

где $\alpha = M_2 h$ и $\beta = M h^2$.

Пользуясь доказанной ранее леммой о рекуррентных оценках, имеем далее:

$$\|\varepsilon\|_h \le \frac{M h^2 (e^{N\alpha} - 1)}{M_2 h} = h \frac{M}{M_2}(e^{N h M_2} - 1).$$

Учитывая, что $Nh = l$, получаем

$$\|\varepsilon\|_h \leqslant h\frac{M}{M_2}(e^{M_2 l} - 1). \qquad (Es_h)$$

В этой итоговой оценке учтены как погрешности замены точных значений $u(x_j)$ в узлах сетки приближенными, так и влияние возможных ошибок округления. В частности, заключаем, что метод Эйлера — это метод первого порядка точности.

Сделаем еще два вывода из оценки ($Es_h$).

1. Локальная погрешность метода Эйлера, то есть погрешность на одном шаге $h$, возникающая за счет перемещения по касательной, а не по интегральной кривой, является величиной $O(h^2)$. Это следует из приведенной выше формулы (1):

$$u_{j+1} = u_j + hf(x_j, u_j) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_j).$$

Глобальная же погрешность, как следует из ($Es_h$), это величина $O(h)$, то есть на $1$ меньшего порядка чем локальная.

2. Если погрешность округлений имеет тот же порядок точности $O(h^2)$, что и локальная погрешность, то глобальная погрешность по порядку не ухудшается.