Тема : Определенный интеграл

$\mathbf{2^0}$. Интегральные суммы Дарбу и Римана. $\mathbf{3^0}$. Определение интеграла Римана. Пример: интеграл ступенчатой функции. Теорема об ограниченности интегрируемой по Риману функции. $\mathbf{4^0}$. Критерий Римана интегрируемости функции. $\mathbf{5^0}$. Колебание функции и критерий Римана интегрируемости в терминах колебаний. $\mathbf{6^0}$. Лемма о последовательности разбиений. $\mathbf{7^0}$. Мелкость разбиения. Теорема об интеграле Римана как пределе сумм Дарбу со стремящейся к нулю мелкостью.

2^0. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ с разбиением $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}$. Введем следующие обозначения:

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x); \qquad m_i \leqslant M_i.$$

Если $\Delta_i =< x_{i-1}, x_i >$, то его длина задается равенством

$$|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$$

и обозначается иногда как Δx_i (приращение переменной x на промежутке $< x_{i-1}, x_i >$).

Определение. *Для заданной функции $f(x)$, $x \in \Delta$, линейные комбинации вида*

$$s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i |\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f,\tau) = \sum_{i=1}^{N} M_i |\Delta_i|$$

называются нижней и верхней интегральной суммой Дарбу соответственно.

Из этого определения сразу следует, что для заданных f и τ *нижняя сумма Дарбу не пре-*

восходит верхнюю, т.е. справедливо неравенство

$$s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau). \qquad (\mathrm{D}_{\leqslant})$$

Лемма (поведение сумм Дарбу при измельчении). *Пусть разбиение* $\tau(\Delta)$ *промежутка* Δ *является продолжением разбиения* $\tau'(\Delta)$ *этого же промежутка. Тогда справедливы оценки*

$$s(f,\tau') \leqslant s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau'). \qquad (\mathrm{D},\tau,\tau')$$

Лемма. *Для заданной функции* $f(x)$, $x \in \Delta$, *и любых двух разбиений* $\tau'(\Delta)$ *и* $\tau''(\Delta)$ *промежутка* Δ *соответствующие им верхние и нижние суммы Дарбу связаны соотношениями*

$$s(f, \tau') \leqslant S(f, \tau''), \qquad s(f, \tau'') \leqslant S(f, \tau').$$

Доказательство. Согласно лемме об общем продолжении найдется разбиение $\tau(\Delta)$ промежутка Δ, являющееся одновременно продолжением как $\tau'(\Delta)$, так и $\tau''(\Delta)$.

По предыдущей лемме при измельчении сетки от $\tau'(\Delta)$ до $\tau(\Delta)$ нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя — не возрастает:

$$s(f,\tau') \leqslant s(f,\tau), \qquad S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau').$$

Аналогично, измельчение сетки от $\boldsymbol{\tau''}(\boldsymbol{\Delta})$ до $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Delta})$ приводит к неравенствам

$$\boldsymbol{s(f,\tau'') \leqslant s(f,\tau), \quad S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau'')}.$$

Комбинируя последние четыре неравенства с оценкой $\boldsymbol{s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau)}$, получаем первое из доказываемых неравенств

$$\boldsymbol{s(f,\tau') \leqslant s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau) \leqslant S(f,\tau'')}.$$

Меняя здесь местами разбиения $\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\Delta})$ и $\boldsymbol{\tau}''(\boldsymbol{\Delta})$, получаем и второе из доказываемых неравенств. $\square$

Пусть есть разбиение $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Delta}) = \{\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2, \ldots \boldsymbol{\Delta}_N\}$ промежутка $\boldsymbol{\Delta}$. В каждом из мелких промежутков $\boldsymbol{\Delta}_i$ выберем какую-нибудь точку $\boldsymbol{\xi}_i$ и свяжем с вектором $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N)$ понятие *интегральной суммы Римана*.

Определение. *Для данной функции* $f = f(x)$, $x \in \Delta$, *и разбиения* $\tau(\Delta)$ *промежутка* Δ *линейная комбинация вида*

$$\sigma(f,\tau) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)|\Delta_i|,$$

где любая точка ξ_i *лежит в промежутке* Δ_i, *называется интегральной суммой Римана функции* f.

Иное обозначение интегральной суммой Римана, используемое далее:

$$\sigma(f;\tau,\xi), \quad \text{где} \quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N).$$

Для заданной функции $f(x)$, $x\in\Delta$, при любом выборе точек ξ_i из промежутков Δ_i, $i=1,2,\ldots,N$, соответствующие этой функции интегральные суммы Римана и Дарбу, как это следует из их определений, связаны между собой соотношениями

$$s(f,\tau) \leqslant \sigma(f;\tau,\xi) \leqslant S(f,\tau).$$

Более того справедливы следующие равенства

$$s(f,\tau) = \inf_{\xi} \sigma(f;\tau,\xi); \qquad S(f,\tau) = \sup_{\xi} \sigma(f;\tau,\xi).$$

Точные нижние грани здесь берутся по всему множеству векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ с компонентами ξ_i из Δ_i, $i = 1, \dots, N$.

3^0. Как уже установлено выше, для любых двух разбиений $\tau'(\Delta)$ и $\tau''(\Delta)$ промежутка Δ справедлива оценка

$$s(f,\tau') \leqslant S(f,\tau'').$$

Фиксируя здесь разбиение $\tau''(\Delta)$ и заставляя разбиение $\tau'(\Delta)$ пробегать все допускаемые для него значения, получаем оценку

$$\sup_{\tau} s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau'').$$

В свою очередь, заставляя разбиение $\tau''(\Delta)$ в последнем неравенстве пробегать также все допускаемые для него значения, приходим к соотношению

$$\sup_{\tau} s(f,\tau) \leqslant \inf_{\tau} S(f,\tau). \tag{$\underline{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{J}}$}$$

Точные нижняя и верхняя грани здесь берутся по всевозможным разбиениям τ промежутка Δ с любым конечным числом узлов.

Определение. *Для данной функции* $f(x)$, $x \in \Delta$, *величины*

$$\underline{J}(f) = \sup_{\tau} s(f,\tau) \quad \text{и} \quad \bar{J}(f) = \inf_{\tau} S(f,\tau)$$

называются соответственно нижним и верхним интегралом Дарбу от функции f *по промежутку* Δ.

Перепишем соотношение ($\underline{\mathrm{J}}\bar{\mathrm{J}}$) с учетом только что данного определения. Тогда получим

$$\underline{J}(f) \leqslant \bar{J}(f).$$

Эта оценка объясняет, почему величину $\underline{J}(f)$ называют нижним интегралом Дарбу, а $\bar{J}(f)$ — верхним интегралом.

Отметим, что вехний и нижний интегралы Дарбу зависят лишь от функции f и никак не зависят от исходного разбиения τ промежутка Δ.

Определение. *Если для данной функции $f(x)$, $x \in \Delta$, нижний и верхний интегралы Дарбу от нее, взятые по промежутку Δ, конечны и равны между собой, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на промежутке Δ. При этом число*

$$J(f) = \underline{J}(f) = \bar{J}(f)$$

называют интегралом Римана от функции f по Δ.

Для интеграла Римана от функции $\boldsymbol{f}$ по $\boldsymbol{\Delta}$, если он существует, используется обозначение

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{f(x)dx}.$$

Из определения интеграла Римана сразу получается следующая его двусторонняя оценка через суммы Дарбу:

$$\boldsymbol{s(f,\tau) \leqslant \int\limits_{\Delta} f(x)dx \leqslant S(f,\tau) \qquad \forall\, \tau = \tau(\Delta).}$$

Интеграл от функции f не зависит от того, как обозначена независимая переменная: x, y, z, или как-то еще. Иными словами, справедливы равенства

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \int\limits_{\Delta} f(y)dy = \int\limits_{\Delta} f(z)dz = \ldots.$$

Примеры интегрируемых по Риману функций дают так называемые ступенчатые функции.

Определение. *Функция $f(x)$, $x \in \Delta$, называется ступенчатой на промежутке Δ, если существует такое разбиение*

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_N\}$$

этого промежутка, что

$$f(x) = C_i \qquad \forall\, x \in \Delta_i; \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где C_i не зависит от x из Δ_i.

Иными словами, $f(x)$ — ступенчатая на промежутке Δ, если она кусочно-постоянна на этом промежутке.

Любая ступенчатая функция интегрируема по Риману и при этом

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} C_i |\Delta_i|.$$

Теорема (ограниченность интегрируемых функций). *Если функция интегрируема по Риману на промежутке числовой оси, то она ограничена на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$, $x \in \Delta$, интегрируема по Риману на промежутке Δ. Предположим, что эта функция неограничена сверху на Δ, т.е. что

$$\sup_{x\in\Delta} f(x) = +\infty. \tag{UnB}$$

Возьмем произвольное разбиение

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}$$

промежутка Δ. Из условия неограниченности (UnB) следует, что в разбиении $\tau(\Delta)$ найдется мелкий промежуток Δ_i, $|\Delta_i| > 0$, такой, что функция $f(x)$ на нем также неограничена сверху:

$$\sup_{x \in \Delta_i} f(x) = +\infty.$$

Но в этом случае верхняя интегральная сумма Дарбу $S(f,\tau)$ также неограничена сверху:

$$S(f,\tau) = \sum_{j=1}^{N} M_j|\Delta_j| = M_i|\Delta_i| + \sum_{j\neq i} M_j|\Delta_j| = +\infty.$$

Учитывая, что разбиение $\tau(\Delta)$ промежутка Δ здесь произвольно, заключаем, что верхний интеграл Дарбу от функции $f(x)$, взятый по промежутку Δ, также бесконечен:

$$\bar{J}(f) = \inf_{\tau} S(f,\tau) = +\infty.$$

Но по условию функция $f(x)$, $x \in \Delta$, интегрируема по Риману на промежутке Δ и, в соответствии с определением, ее верхний интеграл Дарбу $\bar{J}(f)$ должен быть конечен.

Это противоречит полученному равенству и, следовательно, сделанное изначально предположение о неограниченности функции $f(x)$ неверно.

Аналогично, предположив, что функция $f(x)$ неограничена снизу на Δ, т.е. что

$$\inf_{x \in \Delta} f(x) = -\infty,$$

с необходимостью получим неограниченность снизу соответствующего функции нижнего интеграла Дарбу:

$$\underline{J}(f) = \sup_{\tau} s(f, \tau) = -\infty.$$

Таким образом, интегрируемая по Риману функция обязана быть ограниченной как снизу так и сверху. $\square$

Отметим, что ограниченность функции на промежутке — это необходимое, но не достаточное условие интегрируемости функции по Риману. Пример ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции дает *функция Дирихле*. Эта функция определяется на отрезке $[0, 1]$ числовой оси следующим образом. В рациональных точках отрезка ее значения полагают равными единице, а во всех остальных точках отрезка $[0, 1]$ она полагается равной нулю. Докажите в качестве упражнения, что эта ограниченная функция не является интегрируемой по Риману на $[0, 1]$.

4^0. Укажем некоторые условия, которые необходимы и достаточны для интегрируемости функции по Риману.

Теорема (критерий Римана). *Функция $f(x)$, $x \in \Delta$, интегрируема по Риману на промежутке Δ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau_\varepsilon(\Delta)$ промежутка Δ такое, что разность соответствующих этому разбиению верхней и нижней* *сумм Дарбу удовлетворяет неравенству*

$$S(f, \tau_\varepsilon) - s(f, \tau_\varepsilon) < \varepsilon. \qquad (\mathrm{R}_1)$$

Доказательство. Установим существование разбиения $\tau_\varepsilon(\Delta)$ промежутка Δ с оценкой (R_1) при условии, что исходная функция интегрируема. Согласно определению интеграла Римана $J(f)$ имеют место равенства

$$J(f) = \sup_\tau s(f, \tau) = \inf_\tau S(f, \tau).$$

Пользуясь известными свойствами точных верхней и нижней граней и задавшись любым $\varepsilon > 0$, выберем такие два разбиения $\tau'_\varepsilon(\Delta)$ и $\tau''_\varepsilon(\Delta)$ промежутка Δ, для которых выполняются неравенства

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau'_\varepsilon) \leqslant J(f);$$

$$J(f) \leqslant S(f, \tau''_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно лемме о продолжении для выбранных разбиений $\tau'_\varepsilon(\Delta)$ и $\tau''_\varepsilon(\Delta)$ найдется некоторое общее их продолжение $\tau_\varepsilon(\Delta)$.

При этом соответствующие верхние и нижние суммы Дарбу связаны следующим образом:

$$s(f,\tau'_\varepsilon) \leqslant s(f,\tau_\varepsilon), \qquad S(f,\tau_\varepsilon) \leqslant S(f,\tau''_\varepsilon).$$

Учитывая еще, что

$$s(f,\tau_\varepsilon) \leqslant S(f,\tau_\varepsilon),$$

получаем следующие последовательные неравенства:

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_\varepsilon') \leqslant s(f,\tau_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant S(f,\tau_\varepsilon) \leqslant S(f,\tau_\varepsilon'') < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Исключив из этой цепочки первое и четвертое неравенства, получим

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_\varepsilon) \leqslant S(f, \tau_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Как следствие этих соотношений имеем для разбиения $\tau_\varepsilon(\Delta)$ искомую оценку (R_1):

$$S(f, \tau_\varepsilon) - s(f, \tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Установим достаточность существования разбиения $\tau_\varepsilon(\Delta)$ промежутка Δ с оценкой (R_1)

для интегрируемости функции $f(x)$. Пусть $\tau_\varepsilon(\Delta)$ — это разбиение промежутка с условием (R_1). Тогда согласно определению верхнего и нижнего интегралов Дарбу имеем следующие неравенства:

$$s(f,\tau_\varepsilon) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \bar{J}(f) \leqslant S(f,\tau_\varepsilon).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\bar{J}(f) - \underline{J}(f) \leqslant S(f,\tau_\varepsilon) - s(f,\tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Последнее неравенство здесь справедливо в силу условия $(\mathbf{R_1})$.

Таким образом, верхний и нижний интегралы Дарбу связаны отношением

$$0 \leqslant \bar{J}(f) - \underline{J}(f) < \varepsilon.$$

В частности, из полученной оценки следует конечность интегралов Дарбу $\underline{J}(f)$ и $\bar{J}(f)$.

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим в результате совпадение верхнего и нижнего интегралов Дарбу: $\underline{J}(f) = \bar{J}(f)$.

Таким образом, все условия из определения интеграла Римана выполнены. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на промежутке Δ. $\square$

5^0. Пусть есть функция $f(x)$, $x \in D_f$, и множество $g \subset D_f$. Распространенной метрической характеристикой поведения функции на множестве g является *колебание* функции $f(x)$ на указанном множестве.

Определение. *Колебанием функции* $f(x)$ *на множестве* $g \subset D_f$ *называется разность*

$$\omega(f;g) = \sup_{x\in g} f(x) - \inf_{x\in g} f(x).$$

В качестве упражнения подсчитайте колебание функции $\sin x$ на промежутке $[0, 2\pi)$.

Любая ограниченная функция $f(x)$, $x \in D_f$, имеет на произвольном подмножестве g своей области определения, $g \subset D_f$, конечное и неотрицательное колебание $\omega(f; g)$.

Кроме того имеет место оценка

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(f; g) \qquad \forall\, x, y \in g.$$

Для любого разбиения

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}$$

промежутка Δ числовой оси разность соответствующих верхней и нижней сумм Дарбу функции $f(x)$, $x \in \Delta$, допускает представление в виде линейной комбинации колебаний $f(x)$ на мелких промежутках разбиения $\tau(\Delta)$.

Точнее имеет место равенство

$$\boldsymbol{S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j)|\Delta_j| =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{j=1}^{N} \omega(f;\Delta_j)|\Delta_j|.} \qquad (\Sigma\omega)$$

Это замечание позволяет сформулировать критерий Римана интегрируемости функции в терминах ее колебаний.

Теорема (критерий Римана в терминах колебаний). *Функция* $f(x)$, $x \in \Delta$, *интегрируема по Риману на промежутке* Δ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое разбиение* $\tau_\varepsilon(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N\}$ *промежутка* Δ, *что*

$$\sum_{j=1}^{N} \omega(f; \Delta_j)|\Delta_j| < \varepsilon. \qquad (\mathrm{R}_1')$$

Для обоснования теоремы в приведенной формулировке достаточно воспользоваться уже доказанным критерием интегрируемости функции по Риману и применить его к представлению (Σ_ω) разности верхней и нижней сумм Дарбу в терминах локальных колебаний функции.

6^0. В качестве удобного следствия критерия Римана докажем следующее утверждение.

Лемма (о последовательности разбиений). *Функция* $f(x)$, $x \in \Delta$, *интегрируема по Риману на промежутке* Δ *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{\tau_k(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ *разбиений промежутка* Δ, *обладающая следующим предельным свойством:*

$$\lim_{k \to +\infty} [S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)] = 0. \qquad (1)$$

Если последовательность $\{\tau_k(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ *разбиений обладает свойством* (1), *то функция* $f(x)$ *не только интегрируема на промежутке* Δ, *но и удовлетворяет при этом следующим предельным равенствам:*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} S(f,\tau_k) = \lim_{k\to+\infty} s(f,\tau_k). \quad (2)$$

Доказательство. Убедимся в достаточности существования последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, с предельным свойством (1) для интегрируемости по Риману функции $f(x)$.

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое разбиение $\tau_k(\Delta)$ из рассматриваемой последовательности с условием (1), для которого выполняется оценка

$$S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k) = \sum_{j=1}^{N} \omega(f; \Delta_j)|\Delta_j| < \varepsilon.$$

При этом выполнено условие (R_1') и, согласно уже установленному критерию Римана, функция $f(x)$ интегрируема на Δ.

Убедимся, что условия (1)-(2) с необходимостью выполняются для интегрируемой по промежутку Δ функции.

Взяв $\varepsilon = \dfrac{1}{k} > 0$, где k натуральное, воспользуемся критерием Римана и найдем такое разбиение $\tau_\varepsilon \equiv \tau_k(\Delta)$ промежутка Δ, для которого выполняются оценки

$$0 \leqslant S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получаем искомое равенство (1).

Далее, интеграл Римана $J(f) = \int\limits_{\Delta} f(x)dx$, как это уже установлено, связан с верхней и нижней суммами Дарбу на разбиении $\tau_k(\Delta)$ следующими соотношениями:

$$0 \leqslant J(f) - s(f, \tau_k) \leqslant S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$ и пользуясь (1), получим

$$0 \leqslant \lim_{k \to +\infty} [J(f) - s(f, \tau_k)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k \to +\infty} [S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)] = 0.$$

Это означает, что интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)dx$ представляет собой предел последовательности нижних сумм Дарбу, соответствующих разбиениям τ_k промежутка интегрирования:

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} s(f, \tau_k).$$

Аналогично рассматривается последовательность верхних сумм Дарбу, для каждой из которых справедлива оценка

$$0 \leqslant S(f, \tau_k) - J(f) \leqslant S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to +\infty$ и пользуясь (1), получаем

$$0 \leqslant \lim_{k \to +\infty} [S(f, \tau_k) - J(f)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k \to +\infty} [S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)] = 0.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)dx$ равен пределу последовательности верхних сумм Дарбу, соответствующих разбиениям τ_k промежутка интегрирования:

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} S(f, \tau_k).$$

Таким образом, оба равенства в (2) полностью доказаны. $\square$

$\mathbf{7^0}$. Возьмем произвольное разбиение

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots \Delta_N\}$$

промежутка Δ на мелкие промежутки

$$\Delta_i = < x_{i-1}, x_i >,$$

где $i = 1, \ldots, N$. Длину малого промежутка Δ_i, то есть число $h_i = x_i - x_{i-1}$, называют *шагом сетки* $\tau(\Delta)$.

Определение. *Максимальный из шагов сетки $\tau(\Delta)$ называют ее мелкостью и обозначают как $|\tau|$:*

$$|\tau| = \max_{i=1,\dots,N} h_i = \max_{i=1,\dots,N} |\Delta_i|.$$

Отметим, что *для любого конечного промежутка всегда найдется разбиение со сколь угодно малой мелкостью.*

Такое разбиение можно получить, взяв, например, равномерное распределение N узлов на промежутке при достаточно большом N.

В теории интеграла главную роль играют такие разбиения, мелкость которых при неограниченном увеличении числа узлов N стремится к нулю.

Теорема (предел сумм Дарбу). *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману на промежутке* $\Delta \subset D_f$.

Тогда для любой последовательности разбиений $\{\tau_k(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ *промежутка* Δ *со стремящейся к нулю мелкостью* $|\tau_k|$ *выполняются следующие предельные равенства:*

$$\lim_{k\to+\infty} s(f,\tau_k) = \lim_{k\to+\infty} S(f,\tau_k) = \int_{\Delta} f(x)dx. \quad (\mathrm{R_{lim}})$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{\tau_k(\Delta)\}_{k=1}^{\infty}$ разбиений промежутка Δ имеет в пределе исчезающую мелкость:

$$\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \ldots \Delta_{N_k}^k\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} |\tau_k| = 0.$$

Задавшись интегрируемой функцией $f(x)$, введем следующее обозначение

$$\Lambda_k = \sum_{j=1}^{N_k} \omega(f; \Delta_j^k)|\Delta_j^k| = S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k).$$

Если доказать предельное равенство

$$\lim_{k\to+\infty} \Lambda_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} [S(f,\tau_k) - s(f,\tau_k)] = 0,$$

то искомые предельные соотношения $(\mathrm{R}_{\lim})$ получаются по той же схеме, что и равенства (2), т.е. переходом к пределу при $k \to +\infty$ в неравенствах

$$0 \leqslant J(f) - s(f,\tau_k) \leqslant S(f,\tau_k) - s(f,\tau_k),$$

$$0 \leqslant S(f,\tau_k) - J(f) \leqslant S(f,\tau_k) - s(f,\tau_k),$$

где через $J(f)$ обозначен интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)dx$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к обоснованию равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \Lambda_k = 0.$$

Заметим, что из интегрируемости функции $f(x)$ следует ее ограниченность на промежутке Δ, т.е. существование такой конечной постоянной M, что

$$|f(x)| \leqslant M \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Из определения колебания функции получаем теперь

$$\Delta_j^k \subset \Delta \quad \Rightarrow \quad \omega(f; \Delta_j^k) \leqslant 2M.$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда согласно критерию интегрируемости Римана найдется такое разбиение $\tau_\varepsilon(\Delta) = \{\Delta_1^\varepsilon, \ldots \Delta_{N_\varepsilon}^\varepsilon\}$ промежутка Δ, для которого справедливо неравенство

$$S(f, \tau_\varepsilon) - s(f, \tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Для всех достаточно больших номеров k мелкость $|\tau_k|$ не превосходит длины любого из мелких промежутков Δ_j^ε, $j = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon$. Разбиения $\tau_k(\Delta)$ именно с этими номерами условимся рассматривать далее.

Сумму $\boldsymbol{\Lambda_k}$ разобьем на два слагаемых

$$\boldsymbol{\Lambda_k = \Lambda_k^* + \Lambda_k^{**}}.$$

В первую сумму $\boldsymbol{\Lambda_k^*}$ включаем те и только те слагаемые $\boldsymbol{\omega(f;\Delta_j^k)|\Delta_j^k|}$, для которых малый промежуток $\boldsymbol{\Delta_j^k}$ из $\boldsymbol{\tau_k(\Delta)}$ не содержится ни в одном из малых промежутков $\boldsymbol{\Delta_l^\varepsilon}$ из разбиения $\boldsymbol{\tau_\varepsilon(\Delta)}$.

Слагаемое же $\boldsymbol{\Lambda}_k^{**}$ включает в себя те и только те величины $\omega(f; \Delta_j^k)|\Delta_j^k|$, которые не вошли в первую сумму $\boldsymbol{\Lambda}_k^{*}$. Заметив, что

$$|\boldsymbol{\Lambda}_k| \leqslant |\boldsymbol{\Lambda}_k^{*}| + |\boldsymbol{\Lambda}_k^{**}|,$$

оценим поочередно обе величины в правой части последнего неравенства.

В частичной сумме $\boldsymbol{\Lambda}_k^{*}$ содержится не более чем N_ε неотрицательных слагаемых. Для каждого из них справедлива следующая оценка сверху:

$$\omega(f; \Delta_j^k)|\Delta_j^k| \leqslant 2M \max_{l=1,\dots,N_k} |\Delta_l^k| = 2M|\tau_k|.$$

Суммируя эти неравенства по всем допустимым значениям j, получаем неравенство

$$|\Lambda_k^*| \leqslant 2M|\tau_k| \cdot N_\varepsilon.$$

Вторая частичная сумма Λ_k^{**}, согласно ее же определению, допускает следующее специальное представление:

$$\Lambda_k^{**} = \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} \left(\sum_{\{j:\, \Delta_j^k \subset \Delta_l^\varepsilon\}} \omega(f;\Delta_j^k)|\Delta_j^k| \right).$$

Внутреннее суммирование здесь происходит по всем тем индексам j, $1 \leqslant j \leqslant N_k$, для которых $\Delta_j^k \subset \Delta_l^\varepsilon$.

Если для заданного номера l, $1 \leqslant l \leqslant N_\varepsilon$, промежутков Δ_j^k, вложенных в промежуток Δ_l^ε, вообще нет, то внутренняя сумма в приведенном представлении величины Λ_k^{**} полагается равной нулю.

Колебание $\omega(f; \Delta_j^k)$ допускает следующую оценку сверху:

$$\Delta_j^k \subset \Delta_l^\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \omega(f; \Delta_j^k) \leqslant \omega(f; \Delta_l^\varepsilon).$$

Подставляя это неравенство в рассматриваемое представление суммы Λ_k^{**}, получаем неравенства

$$0 \leqslant \Lambda_k^{**} \leqslant \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} \omega(f; \Delta_l^\varepsilon) \left(\sum_{\{j:\, \Delta_j^k \subset \Delta_l^\varepsilon\}} |\Delta_j^k| \right).$$

Для фиксированного номера k промежутки Δ_j^k, $1 \leqslant j \leqslant N_k$, попарно не пересекаются в соответствии с определением разбиения.

По этой причине справедливо неравенство

$$\sum_{\{j:\,\Delta_j^k\subset\Delta_l^\varepsilon\}} |\Delta_j^k| \leqslant |\Delta_l^\varepsilon|.$$

Таким образом, для второй частичной суммы Λ_k^{**} справедлива следующая оценка сверху:

$$|\Lambda_k^{**}| \leqslant \sum_{l=1}^{N_\varepsilon} \omega(f;\Delta_l^\varepsilon)|\Delta_l^\varepsilon| = S(f,\tau_\varepsilon) - s(f,\tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Последнее неравенство здесь имеет место согласно изначальному выбору разбиения $\boldsymbol{\tau_\varepsilon}$.

Объединяя полученные верхние оценки частичных сумм $\boldsymbol{\Lambda_k^*}$ и $\boldsymbol{\Lambda_k^{**}}$, приходим к неравенствам

$$|\boldsymbol{\Lambda_k}| \leqslant |\boldsymbol{\Lambda_k^*}| + |\boldsymbol{\Lambda_k^{**}}| \leqslant \boldsymbol{2M|\tau_k| \cdot N_\varepsilon + \varepsilon}.$$

Таким образом, для верхнего и нижнего пределов последовательности $|\boldsymbol{\Lambda_k}|$ при $\boldsymbol{k \to \infty}$

справедливы оценки

$$\mathbf{0} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} |\Lambda_k| \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} |\Lambda_k| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь ε — любое положительное число, причем верхний и нижний пределы от этого параметра не зависят.

Переходя в полученных оценках к пределу при $\varepsilon \to \mathbf{0}$, получаем существование нулевого предела последовательности $\boldsymbol{\Lambda_k}$:

$$\lim_{k\to\infty}\Lambda_k = \varliminf_{k\to\infty}|\Lambda_k| = \varlimsup_{k\to\infty}|\Lambda_k| = 0.$$

Таким образом, искомые предельные соотношения ($\mathrm{R}_{\mathbf{lim}}$) установлены. $\square$