# 1 Синтаксическая эквивалентность формул

## 1.1 Определение синтаксической эквивалентности

### Определение

Две формулы $\phi$ и $\psi$ называются **синтаксически эквивалентными** тогда и только тогда, когда $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \phi$. Это отношение обозначается следующим образом:

$$\phi \equiv \psi$$

### Лемма

Отношение $\equiv$ на множестве всех формул $L_{prop}$ - это отношение эквивалентности.

### Доказательство

Рефлексивность: очевидно следует из $\phi \vdash \phi \in A_{PC}$. Симметричность - следует из определения. Транзитивность. Пусть $\phi \equiv \psi \equiv \chi$. Тогда по определению $\rhd\phi \vdash \psi$ и $\rhd\psi \vdash \chi$. Следовательно, по правилу сечения $\rhd\phi \vdash \chi$. Доказательство $\rhd\chi \vdash \phi$ выполняется аналогично. Следовательно, $\phi \equiv \chi$.

## 1.2 Лемма об эквивалентности

### Лемма

1. Если $\phi \equiv \psi$, то $\rhd\phi \Leftrightarrow \rhd\psi$.
2. Если $\phi_1 \equiv \phi_2$ и $\psi_1 \equiv \psi_2$, то

   1. $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$
   2. $(\phi_1 \wedge \psi_1) \equiv (\phi_2 \wedge \psi_2)$
   3. $(\phi_1 \vee \psi_1) \equiv (\phi_2 \vee \psi_2)$
   4. $(\phi_1 \to \psi_1) \equiv (\phi_2 \to \psi_2)$

**Доказательство**

Докажем 1. Пусть $\rhd\phi$, т.е. секвенция $\vdash \phi$ является выводимой. Тогда по правилу сечения:

$$\rhd \quad \frac{\vdash \phi \quad \phi \vdash \psi}{\vdash \psi}$$

таким образом $\rhd\psi$. Обратное включение - аналогично. Доказательство $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$:

$$\frac{\dfrac{\phi_2 \vdash \phi_1 \quad \neg\phi_1 \vdash \neg\phi_1}{\neg\phi_1, \phi_2 \vdash \perp}}{\neg\phi_1 \vdash \neg\phi_2}$$

Доказательство $(\phi_1 \land \psi_1) \equiv (\phi_2 \land \psi_2)$:

$$\frac{\dfrac{(\phi_1 \land \psi_1) \vdash \phi_1 \quad \phi_1 \vdash \phi_2}{(\phi_1 \land \psi_1) \vdash \phi_2} \qquad \dfrac{(\phi_1 \land \psi_1) \vdash \psi_1 \quad \psi_1 \vdash \psi_2}{(\phi_1 \land \psi_1) \vdash \psi_2}}{(\phi_1 \land \psi_1) \vdash (\phi_2 \land \psi_2)}$$

## 1.3 Теорема о замене

**Теорема (о замене)**

Пусть $\phi$ - формула и $\psi \sqsubseteq \phi$ - некоторая подформула. Тогда если $\psi \equiv \psi'$, и $\phi'$ - результат замены некоторого вхождения формулы $\psi$ на формулу $\psi'$, то $\phi \equiv \phi'$.

**Доказательство**

Это доказательство повторяет аналогичную теорему о замене для семантической эквивалентности. Индукция по разности глубин $n$ формул $d(\phi) - d(\psi)$. Если $n = 0$, то $\phi = \psi$, доказывать нечего. Пусть $0 < n$ и утверждение верно для всех $k < n$. Рассмотрим варианты построения $\phi$. Случай 1. Если $\phi = \neg\phi_1$, $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$, по предположению индукции, тогда если $\phi_1'$ является результатом замены формулы $\psi$ на формулу $\psi'$, то $\phi_1' \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = \neg\psi_1' \equiv \neg\phi_1 = \phi$$

Случай 2. Если $\phi = (\phi_1 \bullet \phi_2)$, где $\bullet \in \{\land, \lor, \to\}$, и $\psi \sqsubset \phi$, то $\psi \sqsubseteq \phi_1$ или $\psi \sqsubseteq \phi_2$. Пусть, например, $\psi \sqsubseteq \phi_1$. Тогда по предположению индукции если $\phi'_1$ является результатом замены формулы $\psi$ на формулу $\psi'$, то $\phi'_1 \equiv \phi_1$. Следовательно, по лемме об эквивалентности

$$\phi' = (\psi'_1 \wedge \phi_2) \equiv (\phi_1 \wedge \phi_2) = \phi$$

□

## 1.4 Лемма (основные эквивалентности)

### Лемма (основные эквивалентности)

Существуют следующие эквивалентности:

| | |
|---|---|
| 1) $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$ | 2) $\neg\neg\phi \equiv \phi$ |
| 3) $\phi \wedge \phi \equiv \phi$ | 4) $\phi \vee \phi \equiv \phi$ |
| 5) $\phi \wedge \top \equiv \phi$ | 6) $\phi \wedge \bot \equiv \bot$ |
| 7) $\phi \vee \top \equiv \top$ | 8) $\phi \vee \bot \equiv \phi$ |
| 9) $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$ | 10 $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi) \wedge ($ |
| 11) $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ | 12) $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ |

13) $\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$
14) $\phi \vee (\psi \vee \chi) \equiv \phi \vee (\psi \vee \chi)$
15) $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
16) $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$

## 1.5 Лемма

### Лемма

Для любой формулы $\phi$ существует такая формула $\phi'$, что $\phi'$ не содержит $\to$ и $\phi' \equiv \phi$.

### Лемма

Для любой формулы $\phi$, не содержащей символа $\to$, существует такая формула $\phi'$, что $\phi'$ является формулой с тесными отрицаниями и $\phi' \equiv \phi$.

### Доказательство

Повторяет аналогичные леммы для семантической эквивалентности $\sim$.

## 1.6 Теорема (приведение к КНФ/ДНФ)

### Теорема (приведение к КНФ/ДНФ)

Для любой формулы $\phi$ существуют такие формулы $\psi_1$ и $\psi_2$, что $\phi \equiv \psi_1 \equiv \psi_2$ и $\psi_1$ находится в КНФ, и $\psi_2$ находится в ДНФ.

### Доказательство

Повторяет аналогичную теорему для семантической эквивалентности $\sim$.

## 1.7 Дизъюнктивные/конъюнктивные части формул

### Определение

Пусть $\phi$ - формула. Определим **дизъюнктивные** $D(\phi)$ и **конъюнктивные** $K(\phi)$ **части** $\phi$ по индукции:

- если $\phi$ является атомарной формулой, то $D(\phi) = K(\phi) = \{\phi\}$
- если $\phi = \neg\psi$, то $D(\phi) = K(\phi) = \{\phi\}$
- если $\phi = (\psi \wedge \chi)$, то $D(\phi) = \{\phi\}$ и $K(\phi) = K(\psi) \cup K(\chi)$
- если $\phi = (\psi \vee \chi)$, то $K(\phi) = \{\phi\}$ и $D(\phi) = D(\psi) \cup D(\chi)$
- если $\phi = (\psi \to \chi)$, то $D(\phi) = \{\phi\}$ то $K(\phi) = \{\phi\}$

### пример

- $D(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3)) = \{v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3)\}$
- $K(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3)) = \{v_1, v_2 \vee \neg v_3\}$
- $K(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3) \wedge \neg v_2) = \{v_1, v_2 \vee \neg v_3, \neg v_2\}$
- $D((v_1 \to v_2) \vee (v_2 \vee \neg v_3) \vee \neg v_1) = \{v_1 \to v_2, v_2, \neg v_3, \neg v_1\}$

## 1.8 Лемма о дизъюнктивной части формулы

### Лемма (о дизъюнктивной части)

Пусть $\phi, \psi$ - две формулы и $D(\phi) \subseteq D(\psi)$. Тогда $\rhd \phi \vdash \psi$.

**Доказательство**

Отметим, что если $\chi \in D(\psi)$, то $\rhd \chi \vdash \psi$ (*). Так как $\chi \in D(\psi)$, $\chi \sqsubseteq \psi$. Докажем это индукцией по разности $n$ глубин формул $\chi$ и $\psi$: $n = d(\psi) - d(\chi)$. Основание индукции. Если $n = 0$, то $\chi = \psi$ и $\chi \vdash \psi = \psi \vdash \psi$ - аксиома. Шаг индукции. Предположим, что утверждение (*) верно для всех подформул с разностью глубин $< n$, теперь докажем его для формулы с разностью глубин $n$. Отметим, что поскольку $\chi \neq \psi$, $D(\psi) \neq \{\psi\}$, это означает, что $\psi$ может быть представлена в виде $\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. Тогда $\chi \sqsubseteq \psi_1$ или $\chi \sqsubseteq \psi_2$. Предположим, что $\chi \sqsubseteq \psi_1$. Следовательно $\chi \in D(\psi_1)$ по определению $D(\psi_1)$, тогда по предположению индукции $\rhd \chi \vdash \psi_1$. Следовательно, можно сделать следующий вывод:

$$\frac{\chi \vdash \psi_1}{\chi \vdash \psi_1 \vee \psi_2}$$

следовательно, $\rhd \chi \vdash \psi$ Теперь индукцией по глубине формулы $\phi$ докажем утверждение леммы. Основание индукции, если $\phi$ является атомарной формулой, то $D(\phi) = \{\phi\}$, и тогда утверждение следует из только что доказанного (*). Шаг индукции. Пусть $d(\phi) > 0$. Если $\phi \neq \phi_1 \vee \phi_2$, то $D(\phi) = \{\phi\}$, и мы снова применяем (*). Пусть $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Тогда $D(\phi_1) \cup D(\phi_2) = D(\phi) \subseteq D(\psi)$, т.е. $D(\phi_1), D(\phi_2) \subseteq D(\psi)$. По предположению индукции $\rhd \phi_1 \vdash \psi$ и $\rhd \phi_2 \vdash \psi$. Следовательно,

$$\frac{\phi_2 \vdash \psi \quad \phi_1 \vdash \psi \quad \phi \vdash \phi_1 \vee \phi_2}{\phi \vdash \psi}$$

- вывод из секвенции $\phi \vdash \psi$. $\Box$

**Следствие**

Если для двух формул $\phi$ и $\psi$ верно, что $D(\phi) = D(\psi)$, то $\phi \equiv \psi$.

## 1.9 Лемма о конъюнктивной части формулы

### Лемма (о конъюнктивной части)

Даны две формулы $\phi, \psi$ такие, что $K(\psi) \subseteq K(\phi)$ верно, что $\rhd \phi \vdash \psi$.

**Доказательство**

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы..

**Следствие**

Если для двух формул $\phi$ и $\psi$ верно, что $K(\phi) = K(\psi)$, то $\phi \equiv \psi$.

## 1.10 Лемма

**Лемма**

Пусть $\Gamma$ - кортеж формул, $\phi$ - формула. Тогда
$\rhd\Gamma \vdash \phi \iff \rhd\Gamma \vdash \psi$ для всех $\psi \in K(\phi)$.

**Доказательство**

$\Rightarrow$ Пусть $\rhd\Gamma \vdash \phi$, $\psi \in K(\phi)$. Тогда по предыдущей лемме $\rhd\phi \vdash \psi$,

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}(\text{сечение})$$

$\Leftarrow$ Докажем индукцией по структуре $\phi$. Если $\phi$ не является конъюнкцией $\psi_1 \wedge \psi_2$, то $K(\phi) = \{\phi\}$ и доказывать нечего. Пусть $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Тогда, так как $K(\phi) = K(\psi_1) \cup K(\psi_2)$, $K(\psi_1), K(\psi_2) \subseteq K(\phi)$. По предположению индукции $\Gamma \vdash \psi_1$ и $\Gamma \vdash \psi_2$. Следовательно,

$$\frac{\Gamma \vdash \psi_1 \qquad \Gamma \vdash \psi_2}{\Gamma \vdash \psi_1 \wedge \psi_2}(\text{Введение}\wedge)$$

- вывод секвенции $\Gamma \vdash \phi$.

**Лемма**

Пусть $\phi$ - формула, и существует такая формула $\psi$, что $\psi, \neg\psi \in D(\phi)$. Тогда $\rhd\phi$.

**Доказательство**

По лемме о дизъюнктивной части формулы, так как $D(\psi \vee \neg\psi) \subseteq D(\phi)$, $\rhd\psi \vee \neg\psi \vdash \phi$. Формула $q \vee \neg q$ является выводимой, тогда по теореме о замене $\rhd \vdash \psi \vee \neg\psi$, следовательно, по правилу сечения $\rhd \vdash \phi$, т.е. $\rhd\phi$.

**Лемма**

Если $\phi, \psi$ - формулы, и $\rhd\phi$, то $\psi \wedge \phi \equiv \psi$.

**Доказательство**

Достаточно отметить вывод: $\frac{\psi\wedge\phi\vdash\psi\wedge\phi}{\psi\wedge\phi\vdash\psi}$(удаление$\wedge$) $\frac{\vdash\phi \qquad \psi\vdash\psi}{\psi\vdash\psi\wedge\phi}$(введение$\wedge$)

**Лемма**

Для любых формул $\phi, \psi$ существует эквивалентность $\phi \equiv \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)$.

**Доказательство**

Покажем, что $\rhd\phi \vdash \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)$

$$\frac{\phi \vdash \phi}{\phi \vdash \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)}(\text{введение}\vee)$$

Покажем, что $\rhd\phi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \vdash \phi$

$$\frac{\phi \vdash \phi \qquad \dfrac{\frac{\psi\wedge\neg\psi\vdash\psi \qquad \psi\wedge\neg\psi\vdash\neg\psi}{\psi\wedge\neg\psi\vdash\bot}}{\psi \wedge \neg\psi \vdash \phi} \qquad \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \vdash \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)}{\phi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \vdash \phi}(\text{удаление}\vee)$$

## 1.11 Теорема приведение к совершенным формам

**Теорема (приведение к СКНФ)**

Если $\phi$ не является выводимой, то существует такая формула $\phi'$, находящаяся в СКНФ, что $\phi \equiv \phi'$.

**Доказательство**

Пусть $\phi'' \equiv \phi$ - формула, находящаяся в КНФ, $\phi'' = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, где $\psi_i$ - элементарные дизъюнкции. Тогда конъюнктивная часть $K(\phi'') = \{\psi_i | 1 \le i \le n\}$ делится на две части: $K(\phi'') = X \cup Y$. $Y$ состоит из таких элементарных дизъюнкций $\psi_i$, что некоторая переменная $v$ входит в $\psi_i$ вместе с её отрицанием: $v, \neg v \in D(\psi_i)$, и $X = K(\phi'') \setminus Y$. Тогда для любой элементарной дизъюнкции $\psi_i \in Y$ верно, что $\rhd\psi_i$, и по леммам о конъюнктивной и дизъюнктивной частях формул, $X \neq \emptyset$, потому что иначе $\phi''$ будет выводимой, и, следовательно, $\phi$ также будет выводимой. Поскольку все элементарные дизъюнкции из $Y$ выводимы по предыдущей лемме

$$\phi'' \equiv \bigwedge_{\psi_i \in X} \psi_i$$

Поэтому, так как $\phi \vee \phi \equiv \phi$, любая переменная $v \in V(\phi)$ входит в любую элементарную дизъюнкцию $\psi$ не более одного раза. Рассмотрим некоторую переменную $v \notin V(\psi_i)$, где $\psi_i \in X$. Если $\psi_i^1 = (\psi_i \vee v)$ и $\psi_i^2 = (\psi_i \vee \neg v)$, то

$$\psi_i \equiv \psi_i \wedge (v \vee \neg v) \equiv (\psi_i \vee v) \wedge (\psi_i \vee \neg v) = \psi_i^1 \wedge \psi_i^2$$

Заменяя элементарную дизъюнкцию $\psi_i$ в множестве $X$ на $\psi_i^1$ и $\psi_i^2$, мы получим множество $X' = (X \setminus \{\psi_i\}) \cup \{\psi_i^1, \psi_i^2\}$, и

$$\phi'' \equiv \bigwedge_{\psi' \in X'} \psi'$$

Применяя это для всех переменных $v$, в итоге мы получим СКНФ.

### Теорема (приведение к СДНФ)

Если $\phi$ является выполнимой, то существует такая формула $\phi'$, находящаяся в СДНФ, что $\phi \equiv \phi'$.

### Доказательство

Аналогично предыдущему доказательству.