START 3.

① Естественным расширением $\mathbb{R}$ является $\mathbb{C}$:
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{C} = 2$

Расширением $\mathbb{C}$ являются кватернионы $\mathbb{H}$:

$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$, $\dim \mathbb{H} = 4$

На множестве $\mathbb{H}$ вводятся операции сложения и умножения. При этом удаётся сохранить все привычные свойства этих операций (за исключением коммутативности умножения)

Кроме того на $\mathbb{H}$ вводится операция умножения на вещественные числа, причём $\mathbb{H}$ в результате становится четырёхмерным пространством.

Кватернионом называется запись следующего вида:

$q = t + xi + yj + zk$, где $t, x, y, z \in \mathbb{R}$, а i, j, k – базисные кватернионы, называемые кватернионными единицами.

$$\boxed{\text{При записи кватернионов используют следующие соглашения}}$$

При записи кватернионов используют следующие соглашения:

а) коэффициенты x, y, z, равные 1, пишутся

б) $1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \equiv 1$

$0 + 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \equiv i$

и т.д

в) Кватернионы вида $t + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ отождествляются с вещественными числами.

Суммой двух кватернионов

$$g = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k \quad \text{и}$$

$$h = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

называется кватернион

$$f = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)\, i + (y_1 + y_2)\, j + (z_1 + z_2)\, k$$

Для определения произведения кватернионов, используется таблица:

$1 \cdot i = i$

$i \cdot 1 = i$

$i^2 = i \cdot i = (-1)$

$i \cdot j = k$

$j \cdot i = (-k)$

$1 \cdot j = j$

$j \cdot 1 = j$

$j^2 = j \cdot j = (-1)$

$j \cdot k = i$

$k \cdot j = (-i)$

$1 \cdot k = k$

$k \cdot 1 = k$

$k^2 = k \cdot k = (-1)$

$k \cdot i = j$

$i \cdot k = -j$

$1 \cdot 1 = 1$

Произведением кватернионов g и h называется кватернион:

$$f = (t_1 \cdot t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (t_1 x_2 + x_1 t_2 + y_1 z_1 - z_1 y_2)\, i +$$

$$+ (t_1 y_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2)\, j + (t_1 z_2 + z_1 t_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)\, k$$

Умножение на вещественное число:

$$\underbrace{\tau}_{\text{число}} \cdot \underbrace{g}_{\text{кватернион}} = \tau t_1 + (\tau x_1)\, i + (\tau y_1)\, j + (\tau z_1)\, k$$

Относительно операций $\oplus$ и умножения на вещественное число, $\mathbb{H}$ - представляет собой четырёхмерное вещественное пространство с базисом $1, i, j, k$

$$\mathbb{H} \sim R^4, \quad t + xi + yj + z \cdot k \iff \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Также в $\mathbb{H}$ имеется дополнительно операция умножения

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ t_1 x_2 + x_1 t_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ t_1 y_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ t_1 z_2 + z_1 t_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

Свойства введённых операций:

1. $g + h = h + g$ (коммутативность $\oplus$)
2. $(g+h)+f = g+(h+f)$ (ассоциативность $\oplus$)
3. $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$ (ассоциативность $\odot$)
4. $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ (дистрибутивность)
5. $(g+h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$

! Но! $f \cdot g \neq g \cdot f$ (коммутативности умножения нет)

Сопряжённым кватерниону $g = t + xi + yj + zk$ называется кватернион $t - xi - yj - zk = \overline{g}$

При этом $g\overline{g} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$

Модулем кватерниона g называют: $|g| = \sqrt{g\overline{g}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

Кватернионы, модуль которых равен 1, образуют группу по умножению: $\mathbb{H}_1 = \{g \in \mathbb{H} : |g| = 1\}$

Базисные кватернионы $1, i, j, k$ принадлежат $\mathbb{H}_1$.

Множество $\mathbb{H}_1$ представляет собой сферу радиуса 1 в $\mathbb{R}^4$.

Скалярной частью кватерниона g называется число $t = \frac{1}{2} \cdot (g + \bar{g})$

Векторной частью кватерниона g называется кватернион $u = xi + yj + zk$

Справедливы равенства:

- $u = \frac{1}{2}(g - \bar{g})$
- $g = t + u$

Вектором называют кватернион $u = xi + yj + zk$, т.е кватернион-вектор $\Leftrightarrow$ скалярная часть $= 0$

Кватернионы-векторы образуют трёхмерное пространство $\mathbb{H}_0 = \{u = xi + yj + zk\} \sim \mathbb{R}^3$

Базис в $\mathbb{H}_0$ образуют кватернионные единицы i, j, k. Этот базис является ортонормированным и положительно ориентированным.

Это позволяет ввести в $\mathbb{H}_0$ скалярное произведение:

$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v = x_2 i + y_2 j + z_2 k \Rightarrow \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \in \mathbb{R}$

Векторное произведение: $u \times v = (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k$

или: $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Имеем $u \cdot v = -(u, v) + u \times v$

Лемма $\forall g, h \in \mathbb{H}$ справедливо:

а) $|g \cdot h| = |g| \cdot |h|$

б) $\overline{gh} = \overline{h} \cdot \overline{g}$ $\quad \overline{\overline{g}} = g$

в) $\forall g \in \mathbb{H}, g \neq 0 \quad \exists!\, g^{-1} : g g^{-1} = g^{-1} g = 1$

Обратный элемент $g^{-1} = \frac{1}{|g|^2} \overline{g}$

Любому $g \in \mathbb{H}_1$ сопоставляется матрица $Q_{3\times3}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$: $g \in \mathbb{H}_1 \longmapsto Q = T(g)$

Покажем, как найти эту матрицу для $g = s + ai + bj + ck$:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

$q_{11} = s^2 + a^2 - c^2$

$q_{12} = 2ab - 2sc$

$q_{13} = 2ac - 2sb$

$q_{21} = 2ab + 2sc$

$q_{22} = s^2 - a^2 + b^2 - c^2$

$q_{23} = 2bc - 2sa$

$q_{31} = 2ac - 2sb$

$q_{32} = 2bc + 2sa$

$q_{33} = s^2 - a^2 - b^2 + c^2$

Пояснение, как получаются эти формулы:

Пусть $\exists\, g = s + ai + bj + ck$, причём $|g|^2 = s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Возьмём произвольный кватернион: $\vec{x} = xi + yj + zk \iff$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Образуем произведение: $\vec{x}' = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$

$\overline{\vec{x}'} = \overline{g \cdot \vec{x}\, \bar{g}} = \bar{\bar{g}}\, \bar{\vec{x}}\, \bar{g} = g \cdot (-\vec{x}) \cdot \bar{g} = -g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g} = -\vec{x}'$

Таким образом $\vec{x}' \in \mathbb{H}_0 \Rightarrow \vec{x}' = x'i + y'j + z'k$

Из определения произведения кватернионов:

$$\left.\begin{aligned} x' &= q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z \\ y' &= q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z \\ z' &= q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z \end{aligned}\right\} \text{ или: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = Q\vec{x}$$

Следовательно, каждому единичному кватерниону соответствует некоторое линейное отображение пр-ва R^3 в себя. $Q = T(g)$ — просто обозначение

Свойства матрицы Q:

(1) Пусть $\vec{x}' = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$, где $g \in \mathbb{H}_1$. Тогда $|\vec{x}'| = |g| \cdot |\vec{x}| \cdot |\bar{g}| =$

$= 1 \cdot |\vec{x}| \cdot \underbrace{|\bar{g}|}_{=1} = |\vec{x}|$

Следовательно, преобразование $Q \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ переводит вектор (x, y, z) в вектор такой же длины.

② Покажем, что $\det Q = 1$. Пользуясь определением матрицы Q, получаем следующее равенство:

$$Q^* \cdot Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

где Q^* – транспонированная к Q

Следовательно

$$(\det Q^*) \cdot (\det Q) = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^6, \text{ но}$$

$\det Q^* = \det Q$ и поэтому

$$\det Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3$$

(знак $\oplus$ из-за определения Q)

Значит, если $|q| = 1$, то есть $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$\det Q = +1$

Множество матриц, которые соблюдают св-ва 1 и 2, обозначают $SO(3)$ и называют группой матриц вращения.

Теорема: Геометрически умножение $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ на Q означает поворот $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ вокруг оси с направляющим вектором $\vec{n}$ на угол $\vec{w}$

Док-во: в лекции № 19 стр. 17.

Покажем, что отображение $\mathbb{H}_1 \to SO(3)$ переводит $|\mathbb{H}|_1$ на все $SO(3)$. Для этого воспользуемся известным утверждением, что любая матрица Q из $SO(3)$ задаёт вращение вокруг некоторого единичного вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, на некоторый угол w.

Взяв для этой матрицы Q кватернион $g = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}\bar{n}$,

получим $Q = T(g)$, что и требовалось.

Отметим, что $T: |H|_1 \to SO(3)$ не является взаимнооднозначным,

так как $T(g) = T(-g)$. Однако, если $g_1 \in |H|_1$ и при этом

$T(g_1) = T(g)$, то обязательно $g_1 = +g$ или $g_1 = -g$

Пусть $g_1 \in |H|_1$ и $g_2 \in |H|_1$. Тогда справедлива формула:

$$T(g_2 \cdot g_1) = T(g_2) \cdot T(g_1)$$

Пользуясь формулой $\uparrow$, выразим вектор $\vec{a}$ и угол ω через

s_1, a_1, s_2, a_2 в соответствующие сомножители.

$$g_1 = s_1 + \vec{a}_1 \quad \text{и} \quad g_2 = s_2 + \vec{a}_2$$

$$s_1 = \cos\frac{\omega_1}{2} \qquad s_2 = \cos\frac{\omega_2}{2}$$

Пусть $g_2 \cdot g_1 = g = s + a$, где $s = \cos\frac{\omega}{2}$

Тогда $g_2 \cdot g_1 = [s_2 + a_2] \cdot [s_1 + a_1] \doteq s_2 s_1 + s_2 a_1 + s_1 a_2 + a_2 a_1 =$

$= [s_2 s_1 - \langle a_1, a_2 \rangle] + s_2 a_1 + s_1 a_2 + a_2 a_1$

Таким образом, $T(g_2 g_1)$ производит вращение на угол ω,

определённый из соотношения $\cos\frac{\omega}{2} = s_2 s_1 - \langle a_1, a_2 \rangle$

Вращение происходит вокруг вектора

$$\vec{a} = s_2 \cdot \vec{a}_1 + s_1 \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

ДИЧЬ...