1 Transitive reduction of a binary relation, theorem about it's existence

Определение

Для любого отношения r, отношение r^- является **транзитивным сокращением** отношения r, тогда и только тогда, когда

- $(r^-)^* = r^*$, т.е. его транзитивное замыкание равно транзитивному замыканию r
- r^- является наименьшим среди отношений, обладающих данным свойством.

Теорема

Для любого конечного r существует r^-.

Доказательство

Индукция по количеству элементов в r. Если r пустое, утверждение очевидно. Шаг индукции. Рассмотрим r с n элементами. Если существует **кратчайший путь**, т.е. три пары arb, brc и arc, тогда мы можем рассмотреть $r' = r \setminus \{(a, c)\}$. По предположению индукции в нем меньше элементов, поэтому существует $(r')^-$. Но тогда $((r')^-)^* = r^*$. Если r не содержит кратчайших путей, то $r = r^-$, так как дальнейшее сокращение невозможно.

2 Propositional logic: propositional formulas, tautological, satisfiable and unsatisfiable formulas

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ - произвольное множество. Тогда мы можем рассмотреть множество $\mathcal{A}$ **алфавит**, и любой кортеж $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ - **слово** алфавита $\mathcal{A}$.

Обозначение

Если $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ является словом алфавита $\mathcal{A}$, то будем писать его без скобок и запятых:

$$a_1 \ldots a_n \rightleftharpoons (a_1, \ldots, a_n)$$

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ - алфавит. Тогда множество всех слов алфавита $\mathcal{A}$ обозначается следующим образом

$$\mathcal{A}^* \rightleftharpoons \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{A}^n$$

Определение

Алфавит логики высказываний: $\mathcal{A}_{prop} = \{(,), \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \top, \bot\} \cup V$ где $V = \{v_i | i \in \omega\}$ - бесконечное множество **пропозициональных переменных**.

Определение

формула логики высказываний - это слово алфавита $\mathcal{A}_{prop}$, определяемое по индукции:

1. $\top, \bot$ и v_i для всех $i \in \omega$ являются **атомарными** формулами

2. если ϕ, ψ являются формулами, то следующие слова также являются формулами:

   - $(\phi \wedge \psi)$
   - $(\phi \vee \psi)$
   - $(\phi \rightarrow \psi)$
   - $\neg\phi$

Определение

Формула ϕ называется

- **тождественно истинной**, тогда и только тогда, когда для любого означивания γ: $\gamma(\phi) = 1$

- **выполнимой**, тогда и только тогда, когда для некоторого означивания γ: $\gamma(\phi) = 1$
- **невыполнимой**, тогда и только тогда, когда для любого означивания γ: $\gamma(\phi) = 0$

Если $\gamma(\phi) = 1$, то будем говорить, что эта формула **истинна** при означивании γ, если $\gamma(\phi) = 0$ будем говорить, что формула **ложна** при означивании γ.

пример

- $v_i \wedge \neg v_i$ является невыполнимой
- $v_i \vee \neg v_i$ является тождественно истинной
- $v_i \to \neg v_i$ является невыполнимой
- $(v_i \to (v_j \to v_i)$ является тождественно истинной
- $(v_i \to (v_j \wedge v_i))$ не является тождественно истинной, но является выполнимой.

3 Prenex normal forms, theorem about conversion to PNF

Определение

Формула логики предикатов ϕ находится в **дизъюнктивной нормальной форме** (ДНФ), тогда и только тогда, когда ϕ получена из пропозициональной формулы ψ, находящейся в ДНФ, заменой всех пропозициональных переменных атомарными формулами логики предикатов.

Определение

Формула логики предикатов ϕ находится в **пренексной нормальной форме** (ПНФ), тогда и только тогда, когда $\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \psi$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ - кванторы, $x_1, \dots, x_n$ - предметные переменные, ψ - бескванторная формула в ДНФ.

пример

$\forall x \exists y \forall z ((p(x,y) \wedge \neg q(y)) \vee (p(y,z) \wedge q(x)))$ - находится в ПНФ.

Теорема (приведение к ПНФ)

Для любой формулы ϕ сигнатуры σ существует такая формула ϕ', находящаяся в ПНФ, что $\phi \equiv \phi'$.

Доказательство

По эквивалентности $\phi_1 \to \phi_2 \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$ и теореме о замене существует такая формула $\phi' \equiv \phi$, что ϕ' не содержит символов $\to$. Индукцией по длине ϕ' докажем, что существует такая формула $\phi'' \equiv \phi'$, что $\phi'' = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ и ψ не содержит кванторов. Основание индукции. Если ϕ' является атомарной формулой, то ϕ' не содержит кванторов, поэтому можно рассматривать ϕ' в качестве ϕ''. Шаг индукции. Пусть $\phi' = Q_0x_0\phi_1$. Тогда $l(\phi_1) < l(\phi')$, следовательно, существует такая формула $Q_1x_1 \dots Q_kx_k\psi_1$, что $\phi_1 \equiv Q_1x_1 \dots Q_kx_k\psi_1$ и ψ_1 не содержит кванторов. По теореме о замене $\phi \equiv Q_0x_0Q_1x_1 \dots Q_kx_k\psi_1$. Пусть $\phi' = \neg\phi_1$. Тогда $l(\phi_1) < l(\phi')$, следовательно, существует такая формула $Q_1x_1 \dots Q_kx_k\psi_1$ что $\phi_1 \equiv Q_1x_1 \dots Q_kx_k\psi_1$ и ψ_1 не содержит кванторов. Для кванторов будем использовать соглашение: $\bar{\forall} = \exists$ и $\bar{\exists} = \forall$. k раз применяя индукцию, по теореме о замене и эквивалентности $\neg Qx\phi \equiv \bar{Q}\neg\phi$, получим $\phi \equiv \bar{Q}_1x_1 \dots \bar{Q}_kx_k\neg\psi_1$. Пусть $\phi' = \phi_1 \bullet \phi_2$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee\}$. Тогда $l(\phi_1), l(\phi_2) < l(\phi')$. Если обе формулы ϕ_1 и ϕ_2 не содержат кванторов, то утверждение доказано. Предположим, что ϕ_1 содержит кванторы. По предположению индукции $\phi_1 \equiv Qx\psi_1$ для некоторой ψ_1. Пусть y - некоторая новая переменная, вхождений которой нет в ϕ'. Тогда $Qx\psi_1 \equiv Q_y[\psi_1]^x_y$, и по теореме о замене

$$\phi' \equiv \phi_1 \bullet \phi_2 \equiv Qy[\psi_1]^x_y \bullet \phi_2 \equiv Qy([\psi_1]^x_y \bullet \phi_2)$$

Поскольку $l([\psi_1]^x_y \bullet \phi_2) < l(\phi')$, предположение индукции верно. Таким образом, мы получаем некую формулу $\phi'' \equiv \phi'$, такую, что $\phi'' = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ и ψ не содержит кванторов. Затем необходимо привести ψ к ДНФ. Для этого сначала преобразуем ψ в формулу с тесными отрицаниями (т.е. отрицание может находиться только перед атомарными формулами), после чего, используя дистрибутивность, приведём её к ДНФ.

Оба действия могут быть выполнены, так как для логики предикатов существуют те же эквивалентности, что и для логики высказываний:

$$\neg\neg\phi \equiv \phi$$

$$\neg(\phi_1 \vee \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$$

$$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$$

$$\psi \vee (\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv (\psi \vee \phi_1) \wedge (\psi \vee \phi_2)$$

$$\psi \wedge (\phi_1 \vee \phi_2) \equiv (\psi \wedge \phi_1) \vee (\psi \wedge \phi_2)$$

□