Тема : Вводные понятия и определения

$\mathbf{1^0}$. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения. Порядок уравнения. Общее решение. Нормальная форма уравнения. $\mathbf{2^0}$. Интегральные кривые уравнений первого порядка. Поле направлений. Параметрическое задание решений. $\mathbf{3^0}$. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. $\mathbf{4^0}$. Задача Коши для уравнений и систем. $\mathbf{5^0}$. Особые решения. $\mathbf{6^0}$. Связь системы дифференциальных уравнений первого порядка для n функций с дифференциальным уравнением порядка n. $\mathbf{7^0}$. Простейшие классы интегрируемых уравнений. Симметричная форма записи уравнения первого порядка.

1^{0}. Пусть x — это одномерная вещественная переменная, а $y(x)$ — это неизвестная функция переменной x.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка* n *называется уравнение*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (\mathrm{Eq_n})$$

относительно неизвестной функции $y(x)$.

По сравнению с алгебраическими уравнениями отличительной чертой обыкновенных дифференциальных уравнений является та, что ОДУ обязательно содержит производные неизвестной функции.

Порядок старшей содержащейся в уравнении производной неизвестной функции называется *порядком уравнения*.

Определение. *Функция* $y = \varphi(x)$ *называется решением дифференциального уравнения* ($\mathbf{Eq_n}$) *если данное уравнение обращается в тождество после замены в нем*

y *на* $\varphi(x)$, y' *на* $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ *на* $\varphi^{(n)}(x)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много решений.

Как правило, помимо переменной x решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения порядка n зависит еще от n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, т.е. записывается в виде

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n).$$

Определение. *Семейство решений уравнения* ($\mathrm{Eq_n}$)*, зависящее от произвольных постоянных* $C_1, \ldots, C_n$ *и задаваемое равенством*

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

называют общим решением этого уравнения.

В результате математических преобразований уравнения ($\mathbf{Eq_n}$) часто получается не общее решение исходного уравнения, а лишь функциональное соотношение между независимой переменной x, функцией y и постоянными $C_1, \ldots, C_n$, т.е. равенство вида

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Такого типа соотношения называются *неявным заданием* искомой функции.

Используя теорему о неявной функции, возможно перейти к равенству, задающему y как явную функцию всех остальных входящих в равенство переменных. Полученное таким образом равенство будет давать общее решение.

В общем случае переход от неявной формы к явной осуществим лишь локально. Следует также иметь ввиду, что результат такого перехода может оказаться многозначным.

Пусть дифференциальное уравнение порядка n записано в *виде, разрешённом относительно старшей производной, т.е. как равенство*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Тогда говорят, что уравнение записано *в нормальной форме*.

2^0. Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое решение дифференциального уравнения ($\mathbf{Eqn}$).

График функции $y = \varphi(x)$ представляет собой некоторую кривую на плоскости OXY. Эта кривая называется *интегральной кривой*.

Рассмотрим произвольное уравнение первого порядка, записанное в нормальной форме

$$y' = f(x, y).$$

Через каждую точку (x, y) области определения функции $f(x, y)$ проведем прямую, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен $f(x, y)$.

Множество всех прямых такого вида определяет на плоскости *поле направлений*, соответствующее уравнению $y' = f(x, y)$.

Величина $y'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = y(x)$ в точке x. Следовательно, *для каждой интегральной кривой дифференциального уравнения поле её касательных совпадает с полем направлений для этого уравнения.*

Иными словами, интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений $f(x,y)$, соответствующего исходному уравнению первого порядка.

Для уравнения порядка n также имеется геометрическое истолкование семейства интегральных кривых, но осуществляется это истолкование на языке геометрических характеристик более высокого порядка.

Например, уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

допускает запись в следующем эквивалентном виде

$$F\left(x, y, y', (1+y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right) = 0.$$

Как известно, величина

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

представляет собой кривизну кривой $y = y(x)$.

Таким образом, *для уравнения второго порядка всякая интегральная кривая определяется связью между координатами точек этой кривой, наклоном касательной и кривизной в каждой её точке*.

Отождествление решений дифференциального уравнения с интегральными кривыми вместе с возможностью представления кривых на плоскости в параметрическом виде позволяет представить в параметрическом виде и само решение дифференциального уравнения, т.е. записать это решение в виде соотношений

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

3^0. Совокупность нескольких уравнений

$$F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

$$F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

$$\ldots$$

$$F_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

В каждое уравнение этой системы входят независимая переменная x, а также n неизвестных функций

$$y_1(x), \quad \ldots, \quad y_n(x)$$

и их производные, причем производные функции y_i имеют максимальный порядок m_i.

Совокупность функций

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

называется *решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, если все уравнения этой системы обратятся в тождество после замены

y_1 на $\varphi_1(x)$, y_1' на $\varphi_1'(x)$, ..., $y_1^{(m_1)}$ на $\varphi_1^{(m_1)}(x)$,

$$\dots\;\dots\;\dots$$

y_n на $\varphi_n(x)$, y_n' на $\varphi_n'(x)$, ..., $y^{(m_n)}$ на $\varphi_n^{(m_n)}(x)$.

Система первого порядка в *нормальной форме* записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_1)$$

Семейство решений системы ($\mathbf{S_1}$)

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n),$$

каждое из которых зависит от одного и того же набора n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, *называют общим решением этой системы*.

Функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется *интегра-*

лом системы (S_1) *в окрестности точки*

$$(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0),$$

если в этой окрестности $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ имеет непрерывные первые частные производные и при этом имеет место равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1, \dots, y_n) + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}(x, y_1, \dots, y_n) f_1(x, y_1, \dots, y_n) +$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_2} f_2(x, y_1, \dots, y_n) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) = 0.$$

Система из n интегралов называется *общим интегралом системы* ($\mathbf{S_1}$) *в окрестности точки* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, если от равенств

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \ \ldots, \ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n$$

можно перейти к эквивалентной системе равенств

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$$

и при этом правые части этой эквивалентной системы дают в той же окрестности общее решение исходной.

4^0. *Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка* n состоит в том, что среди всех решений этого уравнения требуется найти такое решение $y = y(x)$, которое вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно принимает заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ при заданном значении x_0 независимой переменной:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Параметры x_0, y_0, ..., y_{n-1} образуют в совокупности *начальные данные задачи Коши*.

Для системы (S_1) обыкновенных уравнений первого порядка задача Коши состоит в нахождении таких функций

$$y_1(x), \ldots, y_n(x),$$

которые в заданной начальной точке x_0 принимают заданные начальные значения:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Числа x_0, y_{10}, ..., y_{n0} вместе называются *начальными значениями задачи Коши* для системы ($\mathbf{S_1}$).

Условия Коши для одного уравнения или же для системы уравнений позволяют среди совокупности всех его решений выделить некоторое частное (возможно, не одно) решение.

Частное решение можно выделить и с помощью других условий.

Например, с помощью условий на поведение решения в той или иной точке, с помощью условий периодичности, а в случае уравнений порядка выше первого — с помощью краевых условий (то есть условий на решение, задаваемых в разных точках).

Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в нормальной форме, допускают наглядное механическое истолкование.

Независимую переменную в механике принято обозначать через t, подразумевая, что t — это время. Таким образом, решением системы ОДУ является система функций

$$y_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(t),$$

значения которых меняются со временем. Эти функции порождают в n-мерном пространстве с координатами $(y_1, \dots, y_n)$ кривую, которую при изменении времени описывает точка

$$(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)).$$

Каждая такая кривая называется *траекторией системы* ОДУ.

Задача Коши для системы ОДУ состоит в том, что среди всех траекторий данной системы требуется найти ту, которая проходит через заданную точку $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$.

5^0. Важнейшим свойством задачи Коши как с точки зрения математической теории, так и с точки зрения приложений является существование решения этой задачи, а также единственность этого решения. Не всякая задача Коши обладает этим свойством.

Например, задача Коши

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0$$

имеет два разных решения

$$y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2 \quad \text{и} \quad y(x) \equiv 0.$$

Эта же задача Коши, но с ненулевым начальным условием

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(x_0) = y_0 > 0$$

имеет в окрестности точки (x_0, y_0) лишь одно решение.

Существуют уравнения, для которых на плоскости (x, y) можно выделить такое множество, что при начальных данных из этого множества задача Коши имеет неединственное решение, а при начальных данных из оставшейся части плоскости решение задачи Коши единственно.

В некоторых случаях подобное множество (множество неединственности) может само по себе представлять решение исходного дифференциального уравнения.

Определение. *Решение, в каждой точке* (x_0, y_0) *которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.*

В рассмотренном выше примере тождественно нулевое решение $y(x) \equiv 0$ как раз и является особым.

Некоторые уравнения имеют ‘‘частично’’ особые решения — решения, склеенные из "хорошего"и особого.

Например, уравнение $y' = \sqrt{y}$ помимо решений

$$y(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$$

имеет следующие:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_0, \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2 & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

6^0. Между системами дифференциальных уравнений первого порядка для n функций и одним дифференциальным уравнением порядка n имеется тесная связь. Покажем это.

Пусть дано уравнение порядка n в нормальной форме

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Обозначим неизвестную функцию y через y_1 и введем новые неизвестные

$$y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Имеют место равенства

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y_n,$$

$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Другими словами, функции $y_1, \dots, y_n$ связаны системой

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_2)$$

Пусть решение $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ данной системы найдено. Тогда функция $y_1(x)$ является решением исходного дифференциального уравнения.

Верно и обратное — всякое решение $y(x)$ исходного дифференциального уравнения порядка n в нормальной форме дает решение $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ системы ($\mathbf{S_2}$), если определить функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ через функцию $y(x)$ указанным выше способом.

Другими словами, *дифференциальное уравнение порядка* n *в нормальной форме и система* $(\mathbf{S_2})$ *равносильны.*

Пусть теперь дана система из n уравнений первого порядка в нормальной форме. При определенных условиях всякую такую систему можно свести к одному дифференциальному уравнению порядка n.

В общем случае делается это весьма громоздким образом. Продемострируем алгоритм сведения на примере системы из двух уравнений — именно, системы

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2).$$

Пусть первое уравнение этой системы таково, что функцию y_2 можно выразить через величины (x, y_1, y_1'), т.е. получить соотношение вида

$$y_2 = g_1(x, y_1, y_1').$$

Дифференцируя первое уравнение рассматриваемой системы по переменной x по правилу дифференцирования сложной функции, получаем соотношение

$$y_1'' = f_{1x}(x, y_1, y_2)+$$
$$f_{1y_1}(x, y_1, y_2)y_1' + f_{1y_2}(x, y_1, y_2)y_2'.$$

Заменяя здесь y_2 функцией $g_1(x, y_1, y_1')$, а y_2' — функцией $f_2(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))$, получим следующее содержащее только функцию $y_1(x)$ уравнение:

$$y_1'' = f_{1x}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))+$$

$$+f_{1y_1}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))y_1'+$$

$$+f_{1y_2}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))f_2(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1')),$$

или в сокращенном виде $y_1'' = f(x, y_1, y_1')$.

Другими словами, от исходной системы мы перешли к одному дифференциальному уравнению в нормальной форме.

Решив это уравнение, найдем функцию $y_1(x)$. Затем, используя равенство $y_2 = g_1(x, y_1, y_1')$, находим и функцию $y_2(x)$.

Условиями, при выполнении которых возможно сведение системы уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка, является существование либо функции g_1, определяющей величину y_2 (либо функции g_2, определяющей величину y_1), а также условие существования всех частных производных первого порядка либо у функции $f_1(x, y_1, y_2)$, либо у функции $f_2(x, y_1, y_2)$. Во многих реальных ситуациях эти условия выполняются.

Действуя по алгоритму сведения уравнения к системе, можно также свести систему с производными более высокого порядка нежели первый к системе первого порядка.

Пусть дана система второго порядка

$$
\begin{aligned}
z_1'' &= g_1(x, z_1, z_2, z_1', z_2'),\\
z_2'' &= g_2(x, z_1, z_2, z_1', z_2').
\end{aligned}
$$

Здесь неизвестные — это функции $z_1(x)$, $z_2(x)$. Введем новые неизвестные функции:

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_1', \quad y_4 = z_2'.$$

Тогда исходная система может быть записана в виде

$$y_1' = y_3 \equiv f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_2' = y_4 \equiv f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_3' = g_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_4' = g_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv f_4(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

то есть в виде системы первого порядка в нормальной форме.

7^0. Опишем некоторые простейшие классы уравнений, общие решения которых (в явной или неявной форме) удается найти с помощью интегрирования и некоторых элементарных преобразований.

Начнем с *уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной*. Эти уравнения будем рассматривать в одном из двух следующих видов

$$y' = f(x, y), \quad \text{или} \quad f_1(x, y)y' = f_2(x, y).$$

Формально на множестве точек (x, y), для которых выполняется $f_1(x, y) \neq 0$, второе уравнение можно свести к первому, разделив обе его части на $f_1(x,y)$. Обратно, если функция $f(x,y)$ имеет вид

$$f(x,y) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)},$$

то после умножения на $f_1(x,y)$ первое уравнение сводится ко второму.

При таких действиях в первом случае мы сужаем множество точек (x,y), на которых рассматриваем уравнение, во втором случае

— расширяем. Другими словами, при переходе от второго уравнения к первому возможно потерять решение, а при переходе от первого ко второму — приобрести лишние решения.

Сказанное означает, что *рассматриваемые уравнения могут оказаться неравносильными*.

Всюду выше по умолчанию предполагалось, что решение того или иного уравнения есть функция, зависящая от x. Но если возможно перейти от этих уравнений к соотношению

$$\boldsymbol{\Phi(x, y, C) = 0},$$

то переменные x и y становятся равноправными. Если выразить x как функцию y и C,

то эта функция будет решением либо урав-
нения

$$x' = \frac{1}{f(x, y)},$$

либо соответственно уравнения

$$f_2(x, y)x' = f_1(x, y).$$

В некоторых случаях эти уравнения инте-
грируются (решаются) легче, чем исходные.

Во многих случаях дифферениальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, удобно записывать через дифференциалы в симметричной форме

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

При переходе от дифференциального уравнения, записанного в нормальной форме, к *уравнению в симметричной форме* необходимо следить за эквивалентностью переходов.

Тема : Простейшие классы интегрируемых уравнений и методы их решения

$\mathbf{1^0}$. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. $\mathbf{2^0}$. Однородные уравнения и приводящиеся к ним. $\mathbf{3^0}$. Линейные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним. $\mathbf{4^0}$. Уравнение Бернулли. $\mathbf{5^0}$. Уравнение Риккати.

1^0. Важный класс дифференциальных уравнений первого порядка образуют *уравнения с разделяющимися переменными.* Общий вид уравнений из этого класса задается следующими равенствами:

$$y' = f(x)g(y),$$

$$f_1(x)g_1(y)y' = f_2(x)g_2(y).$$

Чтобы найти формулу общего решения уравнения с разделяющимися переменными, следует сначала переписать уравнение в симметричной форме, а затем разделить переменные. В результате получися уравнение одного из двух видов

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Предположим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением второго из них. С учётом соотношения $dy = \varphi'(x)dx$ получаем равенство

$$\left[\frac{g_1(\varphi(x))}{g_2(\varphi(x))}\varphi'(x) - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] dx = 0,$$

которое после интегрирования преобразуется к равенству

$$\int \frac{g_1(\varphi(x))}{g_2(\varphi(x))}\varphi'(x)dx = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C.$$

В интеграле слева сделаем замену переменной, положив $y = \varphi(x)$, тогда получим

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx + C.$$

Это равенство и представляет собой конечное соотношение, которому удовлетворяют почти все решения исходного уравнения.

Таким образом, чтобы найти решение уравнения с разделяющимися переменными, требуется перейти к симметричной форме этого уравнения, далее разделить в нем переменные и затем выполнить интегрирование так, как если бы переменные x и y были независимы друг от друга.

При разделении переменных выполняется операция деления в предположении, что $g(y)$ (либо $g_2(y)$ и $f_1(x)$) не обращается в нуль. Но в исходных уравнениях функции $g(y)$, $g_2(y)$

или $f_1(x)$ вполне могут иметь один или несколько нулей. Игнорирование этой возможности может привести к потере решений. Для того чтобы этого избежать, требуется отдельно исследовать, являются ли решениями корни уравнений

$$g(y) = 0, \qquad g_2(y) = 0, \qquad f_1(x) = 0.$$

Корни b_j, $j = 1, \ldots, N$, уравнения $g(y) = 0$ порождают тождественно постоянные решения $y(x) = b_j$, $j = 1, \ldots, N$, уравнения

$$y' = f(x)g(y).$$

Корни же $x_j = a_j$ уравнения $f_1(x) = 0$ дают дополнительные решения дифференциального уравнения, изначально записанного в симметричной форме

$$f_1(x)g_1(y)dy - f_2(x)g_2(y)dx = 0.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

Решение. Разделяем переменные, для чего делим обе части уравнения на произведение

$$(y^2-1)(x^2-1).$$

В результате получаем уравнение в симметричной форме

$$\frac{x dx}{x^2 - 1} + \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0.$$

Интегрируем сумму двух дифференциалов, т.е. вычисляя первообразную для каждого из них, получаем

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = \ln|C|,$$

или, после очевидных преобразований:

$$(x^2-1)(y^2-1)=C.$$

Равенства $y^2-1=0$ и $x^2-1=0$ дают кривые, которые также могут оказаться решениями уравнения. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что прямые $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ таковыми решениями являются. При этом они получаются из полученной формулы общего решения при $C=0$. $\square$

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся уравнения следующих двух видов:

$$y' = f(ax + by + c);$$

$$f_1(ax + by + c)y' = f_2(ax + by + c), \qquad b \neq 0.$$

Если перейти к новой неизвестной функции $z = ax + by + c$, то исходные уравнения преобразуются к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$z' = bf(z) + a, \qquad f_1(z)z' = bf_2(z) + af_1(z).$$