Тема: Числовые ряды

1* Ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сумма ряда.

2* Необходимое условие сходимости ряда.

3* Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда.

4* Ряды с неотрицательными членами: критерий сходимости, признак сравнения, теорема о совместной сходимости. Примеры. Гармонический ряд. Эйлерова постоянная.

5* Признак сходимости Коши. Следствие: признак Коши в предельной форме. Примеры. Признак сходимости Даламбера. Следствие: признак Даламбера в предельной форме. Примеры.

6* Интегральный признак сходимости монотонно убывающей числовой последовательности. Пример.

7* Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

1*

Определение. Выражение вида

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \text{ или } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \qquad (z_n \text{ – комплексное})$$

называется ***числовым рядом***.

При этом z_n называется общим членом ряда, а сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

называется ***частичной суммой*** ряда.

Числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{, где } u_k = z_{n+k} \quad \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

называется **n-м остатком ряда**.

Определение. Числовой ряд называется ***сходящимся***, если последовательность его *частичных сумм* (s_n) имеет конечный предел:

$$\exists\, s_\infty : \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty, \qquad |s_\infty| < +\infty$$

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует или равен $\pm\infty$, то ряд называется ***расходящимся***.

Если числовой ряд сходится, то данный предел называется ***суммой ряда***:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

2*

Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0$$

Доказательство. Общий член z_n представим в виде $z_n = s_n - s_{n-1}, \; n = 2,3,..$

По условию ряд сходится, т.е. существует предел

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Переходя в равенстве $z_n = s_n - s_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, получим в результате искомое необходимое условие.

Данное условие хоть и является *необходимым*, но *не является достаточным.*

3* Свойства сходящихся рядов.

Теорема (об остатках). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то и любой его остаток

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} z_k$$

также сходится. И наоборот. Если некоторый остаток ряда сходится, то и сам ряд также сходится.

Доказательство. S – сумма исходного ряда, s_p – частичная сумма (первых p элементов)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p+1}^{n} z_k = \sum_{k=p+1}^{\infty} z_k = S - s_p$$

т.к. S и s_p – конечные числа, то данный предел существует, и остаток ряда сходится.

Обратно: пусть остаток $\sum_{k=p+1}^{\infty} z_k$ сходится (обозначим эту сумму за r_∞),тогда:

$$S = s_p + \sum_{k=p+1}^{\infty} z_k = s_p + r_\infty$$

s_p и r_∞ - конечные числа $\Longrightarrow$ Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится.

Теорема. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходятся, то сходятся и ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm w_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{C} z_k = \mathrm{C} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad C \in \mathbb{C}$$

Утверждения теоремы следуют из соответствующих теорем о пределах, применённых к последовательностям частичных сумм соответствующих рядов.

Теорема (критерий Коши).

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится $\Leftrightarrow$ выполняется следующее условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \forall\, n > N_\varepsilon, p \in \mathbb{N} \;\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$$

Из равенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k = s_{n+p} - s_n$$

следует эквивалентность утверждения теоремы критерию Коши для сходящейся числовой последовательности $\{s_n\}$ частичных сумм рассматриваемого ряда ($|s_m - s_n| < \varepsilon$).

4* Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geq 0$$

Последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм любого такого ряда является *монотонно возрастающей* $\Rightarrow$ *У данной последовательности всегда есть предел, причём этот предел конечен* $\Leftrightarrow$ *последовательность* $\{s_n\}$ *ограничена (критерий сходимости).* В противном случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится и его сумма равна $+\infty$.

Теорема (признак сравнения).

$a_n \geq 0, b_n \geq 0$ и $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$.

Тогда если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится,

если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Следствие.

Если последовательности a_n и b_n $(a_n, b_n \geq 0)$одного порядка при $n \to \infty$ $(a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n))$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема (о совместной сходимости).

$\forall\, n \in \mathbb{N}: a_n > 0, b_n > 0$

Если $\exists\, M \in \mathbb{N}: \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \ge M$, тогда

из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$,

из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Доказательство.

В условиях теоремы имеем следующие неравенства:

$$0 < \frac{a_{M+1}}{a_M} \le \frac{b_{M+1}}{b_M}, \quad \dots \quad , 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Перемножив данные неравенства получим при $n > M$:

$$\frac{a_n}{a_M} \le \frac{b_n}{b_M} \Leftrightarrow a_n \le \left(\frac{a_M}{b_M}\right) b_n \quad \Rightarrow \quad a_n = O(b_n), \text{ при } n \to \infty$$

По предыдущей теореме имеем требуемое.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin^2 kx}{k^2}, x \in \mathbb{R}$$

Решение. Справедливы оценки:

$$0 \le \frac{sin^2 kx}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$$

и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

По признаку сходимости данный ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Решение. Для частичной суммы ряда имеет место неравенство

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(1+k) - \ln(k)] = \ln(n+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n \to \infty \text{ при } n \to \infty \ \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

Для частичной суммы *гармонического ряда* справедлива эквивалентность:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n + C$$

Константа C этого асимптотического равенства называется ***эйлеровой постоянной***, для которой справедливо представление:

$$\mathrm{C} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] \approx 0.577$$

$$\text{Ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}} \quad \text{сходится при } \beta > 1 \text{ и расходится при } \beta \leq 1$$

5*

Теорема (признак Коши). *Пусть последовательность a_k, $k = 1, 2, \ldots$, неотрицательных чисел такова, что для некоторых числа q, $0 < q < 1$, и номера N справедлива оценка*

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1, \quad \text{где} \quad k \geqslant N.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$ при $k \geqslant N$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. Из первого условия теоремы получаем

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \Rightarrow \quad a_k \leqslant q^k \quad \text{при} \quad k \geqslant N.$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится как сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ и, следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится.

Если же

$$\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant N,$$

то $a_k \geqslant 1$ при всех достаточно больших k и необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не выполняется: нижний предел последовательности a_k всегда не меньше единицы. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. □

Следствие (признак Коши в предельной форме). *Пусть последовательность неотрицательных чисел a_k, $k = 1, 2, \ldots$, такова, что существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = C.$$

Если при этом $C < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $C > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. Пусть $C < 1$, тогда найдется q: $C < q < 1$. По определению предела, начиная с некоторого номера N будет справедливо неравенство $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q$, $k \geqslant N$. Пользуясь признаком Коши заключаем, что в этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если же $C > 1$, то по определению предела при всех достаточно больших k имеет место оценка $a_k \geqslant 1$. По признаку Коши в этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. $\square$

Если в условии признака Коши в предельной форме $C = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. *Доказать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k}\right)^k \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{k} = 0 \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

По признаку Коши в предельной форме ряд сходится. □

Пример. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k} \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \quad \text{при} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с признаком Коши в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $|x| < \sqrt{2}$ и расходится при $|x| > \sqrt{2}$.

Если $|x| = \sqrt{2}$, то ряд, как легко видеть, также расходится. $\square$

Теорема (признак Даламбера). *Пусть последовательность a_k, $k = 1, 2, \ldots$, неотрицательных чисел такова, что для некоторых числа q, $0 < q < 1$, и номера N при $k \geqslant N$ числа a_k строго положительны и удовлетворяют оценке*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q \qquad \forall\, k \geqslant N.$$

Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \text{при} \quad \forall\, k \geqslant N,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. Пусть $a_{k+1} \leqslant q a_k$ при $k \geqslant N$. Тогда для любого $k > N$ справедливы неравенства

$$a_k \leqslant q a_{k-1} \leqslant q^2 a_{k-2} \leqslant \ldots \leqslant a_N q^{k-N} = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) q^k.$$

Заметим, что в силу условия $0 < q < 1$ сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_N}{q^N}\right) q^k = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \left(\frac{a_N}{q^N}\right) \frac{q}{1-q}$$

существует и конечна. Следовательно, согласно признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также сходится.

Если же $a_{k+1} \geqslant a_k$ при $k \geqslant N$, то имеем следующую цепочку неравенств:

$$a_k \geqslant a_{k-1} \geqslant a_{k-2} \geqslant \ldots \geqslant a_N > 0 \quad \text{при} \quad \forall k \geqslant N.$$

Следовательно, всегда существующий нижний предел последовательности a_k строго больше нуля, т.е. необходимое условие сходимости ряда не выполнено. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. □

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть последовательность неотрицательных чисел* a_k, $k = 1, 2, \ldots$, *такова, что существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D.$$

Если этот предел $D < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Если же* $D > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Если в условии следствия $D = 1$, то ничего определенного о сумме ряда сказать нельзя: ряд может как сходиться так и расходиться.

Пример. *Доказать сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{при} \quad \forall\, x > 0.$$

Решение. Справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{x}{k+1}=0.$$

В соответствии с признаком Даламбера в предельной форме заключаем, что ряд сходится при $x>0$.

Как можно заметить, его сумма совпадает с функцией e^x-1. $\square$

Теорема (интегральный признак). *Пусть неотрицательная функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $x \geqslant 1$ числовой прямой. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится в том и только том случае, если сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ монотонна и поэтому интегрируема по Риману на любом отрезке вида $[1,n]$, где n — натуральное число, $n \geqslant 2$. При этом справедливы соотношения

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx =$$

$$= f(1) + \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx.$$

Таким образом, если интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ ограничена и, следовательно, сам ряд также сходится.

Возьмем теперь произвольное число $\eta > 1$ и обозначим как $n = [\eta]$ его целую часть. Тогда справедливы соотношения

$$\int\limits_1^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Последнее неравенство справедливо в силу монотонного убывания функции $f(x)$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится, то из полученного неравенства получается оценка

$$\int\limits_1^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

Таким образом, первообразная от неотрицательной функции $f(x)$ при $\eta \geqslant 1$ ограничена. Этого достаточно для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. $\square$

Следствие. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *сходится или расходится одновременно с интегралом* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$.

Для обоснования этого следствия достаточно применить предыдущую теорему к неотрицательной монотонно убывающей функции $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ он расходится.

7^{0}.

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с вещественными членами* a_n, *которые поочередно то положительны, то отрицательны, называется знакопеременным (или знакочередующимся) рядом.*

Теорема (признак Лейбница). *Пусть последовательность $\{a_k\}$ монотонна и $a_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сходится. Если S — это его сумма, а s_n — его частичная сумма, то справедлива оценка*

$$|S - s_n| \leqslant |a_{n+1}| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем предполагать, что $\{a_k\}$ монотонно убывает и, следовательно, a_k — это неотрицательное число при любом k. Для любого натурального p имеет место равенство

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-n-1} a_k| =$$

$$= a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}. \qquad (1)$$

Если p — четное, то сумма в правой части равенства (1) — это сумма неотрицательных разностей вида $a_k - a_{k+1}$. Если же p — нечетное, то к сумме такого вида разностей добавляется еще одно неотрицательное слагаемое a_{n+p}.

Заметим еще, что для любого натурального p справедлива оценка

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-n-1} a_k| \leqslant a_{n+1}. \tag{2}$$

При p нечетном оценка (2) следует из представления (1), правая часть которого записывется как сумма неотрицательного числа a_{n+1} и неположительных разностей вида $a_{k+1} - a_k$ при k от $n+2$ до $n+p-1$.

Если же p четное, то из предыдущей суммы следует еще вычесть неотрицательное число a_{n+p}. Следовательно, оценка (2) будет и в этом случае выполнена.

Оценку (2) перепишем в эквивалентном виде

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-n-1}a_k| =$$

$$= |\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}a_k| \leqslant a_{n+1}. \qquad (2')$$

Эта оценка вместе с условием $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ приводит к заключению, что последовательность частичных сумм исходного ряда фундаментальна, т.е. удовлетворяет условию Коши. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится.

Переходя к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (2'), получаем требуемую оценку погрешности. $\square$

Пример. *Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

Решение. При $\alpha > 0$ выполнены условия признака Лейбница: последовательность $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно убывает к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится при $\alpha > 0$. Если же $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится: не выполняется необходимое условие сходимости. $\square$