Вопрос №1

Определение производной

Определение. Для любого x существует D_F, $x \neq x_0$, $x_0 \in D_F$, отношение $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$, где $h = x - x_0$. Это отношение называется разностным отношением функции F в точке x_0. Если существует предел этого отношения, тогда этот предел будет называться производной F в точке x_0 (где x_0 является некоторой внутренней точкой некоего множества точек D_F. Значит функция F определена в окрестности этой точки). $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta F(x)}{h}$ $(\lim\limits_{x-x_0\to 0} \frac{F(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x-x_0\to 0} \frac{\Delta F(x)}{x-x_0})$.

Может оказаться, что предела при $h \to 0$ не существует, но при этом есть односторонние пределы при $h \to +0$ и $h \to -0$. Они называются соответственно правой $({F'}^{+}(x_0))$ и левой $({F'}^{-}(x_0))$ производной функции F. Если функция имеет в точке производную, то односторонние производные в этой точке совпадают.

Определение. Функция F называется дифференцируемой, в точке x_0, если F определена в окрестности этой точки и имеет при этом конечную производную $F'(x_0)$.

Определение. Приращением функции называется разность $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Приращением аргумента называется Δx.

Примеры:

1. $y \equiv C \Rightarrow \Delta y = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$

2. $y(x) = \sin x;\ \Delta x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin(\frac{\Delta x}{2}) \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \cos(x + t) = 1 \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow (\sin x)' = \cos x.$

3. $y(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ в этом доказательстве рассматриваются три случая: для $x > 0$, $x < 0$ и $x = 0$. В первом случае производная равна 1, во втором – -1, а в третьем случае правая односторонняя производная равна 1, а левая односторонняя - -1. Они не совпадают. Значит функция $|x|$ не дифференцируема.

Линейное приближение функции в точке

Лемма. Если функция $y = F(x)$ дифференцируема в x_0, то:

$F(x) = F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$ где $\alpha(x)$ непрерывна в x_0 и $\alpha(x_0) = 0.$ (L_1)

Доказательство. Пусть $x \neq x_0 \Rightarrow \alpha(x_0) = \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - F'(x_0)$. Осталось доказать, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$, но это вытекает из определения производной. Полагая, что $\alpha(0) = 0$, получаем искомое равенство L_1. Следовательно, если функция дифференцируема, то непрерывна, но не наоборот (пример: $|x|$).

Условие L_1 допускает запись в виде асимптотического неравенства: $F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \overset{=}{O}(\Delta x)$ при $x \to x_0$, где $\Delta x = x - x_0$.

Равенство L_1 служит основанием для приближения функции $F(x)$ в окрестности точки x_0: $F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ - линейное приближение $F(x)$ в окрестности точки x_0.

Определение. Линейное приближение - приближение произвольной функции линейной функцией

Дифференциал

Определение. Дифференциал - линейная часть приращения функции в точке x_0. Является произведением производной этой функции на приращение независимой переменной x и обозначается как $dF(x_0)$ (или dy). $dF(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow dy = y' \cdot dx$; $dx = x - x_0$ (дифференциал независимой переменной); $dF(x_0) = F'(x_0)dx \Leftrightarrow dy = y' \cdot dx \Leftrightarrow \frac{dF}{dx} = F'(x_0) \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала: приращение ординаты касательной к графику функции, когда аргумент получает приращение Δx.

Геометрический смысл производной

Пусть $y = F(x)$ непрерывна в точке x_0, а точка $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Возьмём на графике этой функции ещё одну точку $M_h = (x_0 + h, F(x_0 + h))$. Через точки M и M_h проведём прямую, называемую секущей графика. Уравнение секущей:

$$y - y_0 = \frac{\Delta f}{h}(x - x_0). \tag{1}$$

Прямая M_0M_h, уравнение которой получается из уравнения 1 с помощью предельного перехода при $h \to 0$, называется касательной к графику функции $F(x)$ в точке M_0. Касательная к графику функции может и не существовать, но если она дифференцируема в точке x_0, то касательная в этой точке задаётся уравнением: $y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0)$. Это наклонная касательная. Верно и обратное: если график в точке имеет касательную, то функция имеет в ней производную. При $k = F'(x_0)$, если α - угол между касательной и осью абсцисс Ox, то: $k = F'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Если функция непрерывна и имеет в точке $x - x_0$ бесконечную производную ($\pm\infty$), то уравнение секущей 1 запишем в эквивалентном виде: $x - x_0 = \frac{h}{\Delta f}(y - y_0)$ и только потом перейдём к пределу: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\Delta F} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{F(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$ - таким образом уравнение принимает вид: $x = x_0$ и график имеет в x_0 вертикальную касательную ($\angle\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \infty$). Особо рассматривается случай, когда

$$F'^{+}(x_0) = +\infty \text{ и } F'^{-}(x_0) = -\infty \tag{2}$$

и когда

$$F'^{+}(x_0) = -\infty \text{ и } F'^{-}(x_0) = +\infty. \tag{3}$$

Производные высших порядков

Определение. Производная функции $F''(x)$ называется второй производной от функции $F(x)$ в точке x_0: $F''(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F'(x_0+\Delta x)-F'(x_0)}{\Delta x}$ (обозначается $F''(x)$, y'', $F^{(2)}$, $y^{(2)}$, $\frac{d^{(2)}F}{dx^{(2)}}$). Производная порядка n от $F(x)$ определяется по индукции с помощью соотношения: $F^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F^{(n)}(x_0+\Delta x)-F^{(n)}(x_0)}{\Delta x}$ ($F^{(0)}(x) \equiv F(x)$). Следовательно, для того, чтобы определить производную порядка $n+1$, нужно знать производную порядка n. Обозначения: $F^{(n)} = \frac{d^{(n)}F}{dx^{(n)}}$ или $y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$.

Свойства операторов дифференцирования

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Для всех постоянных α, β линейная комбинация $\alpha u(x) + \beta v(x)$ также дифференцируема в x_0 и при этом: $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\alpha u + \beta v) = \alpha\cdot\frac{du}{dx} + \beta\cdot\frac{dv}{dx}$.

2. Произведение $u(x) \cdot v(x)$ также дифференцируемо в точке x_0 и при этом: $(uv)' = u'v + uv'$.

3. Если $v(x_0) \neq 0$, то $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируемо в x_0 и при этом: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство.

1.
$$\begin{cases} \Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \\ \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0). \end{cases}$$

   Если $y = \alpha u(x) + \beta v(x)$, то имеем: $\Delta y = \alpha \Delta u + \beta \Delta v$. Разделив на Δx, получаем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta v}{\Delta x}$. Переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ и получаем:
$$y' = \alpha u' + \beta v'. \tag{4}$$

2. Если $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, то имеем $\Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - u \cdot v = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$. Делим на Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + (\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}) \cdot \Delta x \Leftrightarrow (uv)' = uv' + vu' + u' \cdot v' \cdot 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:
$$(uv)' = uv' + vu'. \tag{5}$$

3. Если $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, то имеем $\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$. Разделив на Δx, получаем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + \Delta v + v}$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:
$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{6}$$

Дифференцирование сложной функции

Теорема. Если $u = \phi(x)$ дифференцируема в x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f(\phi(x))$ также дифференцируема в x_0 и при этом: $F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \phi'(x_0)$.

Доказательство. Пусть $y = f(u)$, тогда $\Delta u = u - u_0$, $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(u) \cdot \Delta u$, где $\alpha(u)$ непрерывна в u_0 и $\alpha(u_0) = 0$. Разделив обе части на Δx, получаем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:
$$y'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0) + 0 \cdot u'(x_0) \Leftrightarrow y'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0). \tag{7}$$

Эквивалентная запись:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{8}$$

Примеры:

1. $y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$. Эта степенная функция определена при $x > 0$. Имеем: $y = e^{\alpha \ln x}$, или $y = e^u$, где $y = \alpha \ln x$. По формуле 8 имеем: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x \alpha - 1$. Таким образом степенная функция $y = x^\alpha$ дифференцируема в любой точке $x > 0$ и при этом: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Эта формула распространяется на все случаи, когда x^α определена. В частности, если $0 < \alpha < 1$, то $y'^{+}(0) = +\infty$; при $\alpha > 1$: $y'^{+}(0) = 0$.

2. Функции $y_1 = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $y_2 = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называются гиперболическими: $y_1 = \operatorname{sh}(x)$ - гиперболический синус, а $y_2 = \operatorname{ch}(x)$ - гиперболический косинус. Справедливы равенства:
$$\begin{array}{l}(\operatorname{sh}(x))' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch}(x)\\ (\operatorname{ch}(X))' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh}(x).\end{array}$$

3. $y = \ln(|x|)$, $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $y' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $y' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln(|x|))' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Следовательно, если $u(x)$ дифференцируема и $u(x) \neq 0$: $\alpha(\ln(|x|)) = \frac{du}{u} = \frac{u'}{u} dx$.

4. $y = u^v$, где $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Имеем: $y = e^{v + \ln(u)} \Rightarrow u' = e^{v+\ln(u)}(v \cdot \ln(u))' = u^v \cdot (v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u})$. При $y = x^x \Rightarrow y' = x^x(\ln(x) + 1)$.

Производная обратной функции

Пусть есть функции $y = f(x)$ и $x = \phi(y)$. Тогда: $f(\phi(y)) = y$, $\forall y \in D_\phi$. Если f и ϕ дифференцируемы, то по правилу 8 получаем: $\frac{d}{dy}[f(\phi(y))] = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dy} = 1$. Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$, где $y = f(x)$.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, обратима на этой окрестности и непрерывна в x_0. Тогда, если обратная ей функция $x = \phi(y)$ имеет производную в $y_0 = f(x_0)$ и $\phi'(y_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 и при этом: $f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(x_0)}$, где $y_0 = f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ - дифференцируемая функция, $y' \neq 0$. Пусть $\Delta y \neq 0$ - приращение независимой переменной y и Δx - соответствующее приращение обратной функции $x = \phi(y)$. Имеем тождество: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (где $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$). Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$ получим: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow x' = \frac{1}{y'}$, где x' - производная обратной функции.

Вычисление производных высших порядков

Пусть есть функция $y = f(x)$, которая имеет производную на некотором промежутке (a, b). Тогда все последующие производные порядка, большего 1, вычисляются индуктивно от производных предыдущих порядков, если они существуют и дифференцируемы.

Общая рекуррентная формула: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Формула Лейбница

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n в точке x_0 и при этом:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {C_n}^k n^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{9}$$

где ${C_n}^k \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Применяется для поиска производной n-го порядка произведения двух функций.

Доказательство/ Докажем формулу Лейбница индукцией по порядку n. При $n = 1$: $(uv)' = uv' + u'v$ 9.

Пусть 9 доказано при данном n, докажем, что она верна при $n + 1$. Имеем: $(uv)^{(n+1)} = ((uv)^{(n)})' = (\sum\limits_{k=0}^{n} {C_n}^k n^{(k)} v^{(n-k)})' = \sum\limits_{k=0}^{n} {C_n}^k n^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} {C_n}^k n^{(k+1)} v^{(n-k)} = n^{(0)} v^{(n+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} {C_n}^k n^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} {C_n}^k n^{(k+1)} v^{(n-k)} + n^{(n+1)} v^{(0)}$. Во второй сумме перейдём от суммирования по индексу k к суммированию по индексу $j = k + 1$, то есть сделаем замену $k = j - 1$: $(uv)^{(n+1)} = n^{(0)} v^{(n+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} {C_n}^k n^{(k)} v^{(n-k)} + \sum\limits_{j=1}^{n} {C_n}^{j-1} n^{(j)} v^{(n+1-j)} + n^{(n+1)} v^{(0)}$.

Далее переходим к суммированию по общему индексу, в качестве которого выберем k, то есть во второй сумме сделаем замену $j = k$ и вынесем $\sum\limits_{k=1}^{n}$ за скобки: $(uv)^{(n+1)} = n^{(0)}v^{(n+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n}({C_n}^k + {C_n}^{k-1})n^{(k)}v^{(n+1-k)} + n^{(n+1)}v^{(0)}$. Биноминальные коэффициенты связаны рекуррентным соотношением: ${C_n}^k + {C_n}^{k-1} = {C_{n+1}}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому окончательно имеем: $(uv)^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} {C_{n+1}}^k n^{(k)}v^{(n+1-k)}$. Таким образом шаг индукции завершён.

Вопрос №2

Определение Аффинного пространства связанного с линейным

Пусть A - некоторое непустое множество, элементы которого условимся называть точками и обозначать как $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \ldots$.

Пусть также имеется линейное пространство над полем k.

Определение. Множество A называется аффинным пространством, связанным с X, если задано отображение $(\dot{p}, v) \in A \cdot X \to \dot{p} + v \in A$, обладающее свойствами:

1. $\dot{p} + 0 = \dot{p}$;
2. $(\dot{p} + u) + v = \dot{p} + (u + v)$ $\forall \dot{p} \in A$ и $\forall u, v \in X$;
3. $\forall \dot{p}, \dot{q} \in A \exists \vec{v} \in X \; : \; \dot{p} + \vec{v} = \dot{q}$ Этот вектор $\vec{v}$ обозначается как $\vec{pq}$ или $\dot{q} - \dot{p}$.

Иногда аффинным пространством называют пару (A, X) + отображение с указанными свойствами.

Размерность аффинного пространства X равна размерности связанного с A линейного пространства: $\dim A = \dim X = n$.

Иногда, чтобы подчеркнуть размерность, пишут A^n. Если $k = \mathbb{R}$, то говорят о вещественном аффинном пространстве.

Сдвиги на Аффинном пространстве

Аксиома из определения аффинного пространства утверждает, что $\forall \dot{p} \in A$ работает биекция $v \to \dot{p} + v$ множеств X и A.

Определение. Биективное отображение T_v: $\dot{p} \to \dot{p}+v = T_v(\dot{p})$, $\dot{p} \in A$ на множестве A называется сдвигом в A (или параллельным переносом в A) на вектор v из X.

Из определения следует, что $T_u \circ T_v = T_{u+v}$, $T_v \circ T_{-v} = I$, I - тождественное отображение.

Таким образом, множество сдвигов $\{T_n | n \in X\}$ образует группу, изоморфную аддитивной группе пространства X.

Если определить линейную комбинацию сдвигов $aT_u + bT_v = T_{au+bv}$, то множество всех сдвигов становится векторным пространством (изоморфным пространству X).

Пусть $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{s}$ - такие точки из A, что $\dot{p} + v = \dot{q}$, $\dot{r} + v = \dot{s}$. Тогда $\vec{pq}$ и $\vec{rs}$ - это разные представители класса эквиваленции, соответствующие вектору v. Из определения получаем, $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$; $\vec{pq} = -\vec{qp}$; $\vec{pp} = 0$ или $(\dot{q} - \dot{p}) + (\dot{r} - \dot{q}) = (\dot{r} - \dot{p})$; $(\dot{q} - \dot{p}) = -(\dot{p} - \dot{q})$; $(\dot{p} - \dot{p}) = 0$.

Определение евклидова векторного пространства

Определение. Евклидовым векторным пространством называется вещественное линейное пространство X с заданным на нем скалярным произведением $\langle x, y \rangle$, для которого выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle > 0 \ \forall x \neq 0$, иначе $\langle x, x \rangle = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, x \rangle$

$\forall x, y \in X$ скалярное произведение – вещественное число.

Скалярное произведение и его свойства

По определению, $\langle x, y \rangle$ - это произведение длин векторов на косинус угла между ними: $\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\phi$. Если $x = (x_1, x_2, x_3)$, разложение по базису пространства $\mathbb{R}^3$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, то длина $|x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. Если $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, то $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Длина вектора в евклидовом пространстве

Пусть X - евклидово векторное пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$.

Определение. Длиной или нормой вектора $x \in X$ называется неотрицательное вещественное число $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \langle v, v \langle^{\frac{1}{2}}$.

Пример. поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ представляет собой одномерное евклидово векторное пространство, длина вектора в котором совпадает с абсолютным значением (модулем) соответствующего вещественного числа.

Неравенство Коши-Буняковского

Теорема (неравенство Коши-Буняковского). Для всех x, y из евклидова векторного пространства X имеет место неравенство $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Доказательство. Рассмотрим следующее выражение: $\langle x + ly, x + ly \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, ly \rangle + \langle ly, x \rangle + \langle ly, ly \rangle = \langle x, x \rangle + 2l\langle x, y \rangle + l^2\langle y, y \rangle$. Фиксируя x, y, получаем квадратный трехчлен от l. Коэффициент при l^2 - неотрицателен (при $y = 0$, нулевой). Значения этого квадратичного трехчлена также неотрицательны.

Это возможно только при $D \leq 0$: $D = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$, или, что то же самое $|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$ это и есть требуемое неравенство.

Замечание. Если $|\langle x, y \rangle| = |x| \cdot |y|$, то $D = 0$, квадратный трехчлен имеет только один вещественный корень l_0. При этом $\langle x + l_0 y, x + l_0 y \rangle = 0 \Rightarrow x + l_0 y = 0$. То есть векторы линейно зависимы. Получили, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается только когда векторы линейно зависимы (коллинеарны).

Угол между векторами

Из неравенства Коши-Буняковского: $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| \Rightarrow \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x| \cdot |y|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x| \cdot |y|} \leq 1$.

Следовательно, уравнение $\cos \phi = \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x| \cdot |y|}$ на интервале $0 \leq \phi \leq \pi$ имеет ровно одно решение ϕ. Этот корень называется углом между векторами x и y.

Определение. Векторы x и y называются ортогональными ($x \perp y$), если соответствующий угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Нулевой вектор ортогонален любому вектору из X.

Теорема Пифагора

Теорема. Если $x \perp y$, то $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Неравенство треугольника

Следствие. Пусть x и y - произвольные векторы евклидова пространства E^n, т.е. $x \in E^n$ и $y \in E^n$. Докажем, что

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \qquad \text{(Неравенство треугольника)}$$

Доказательство. Очевидно, что $(x+y, x+y) = |x+y|^2$. С другой стороны, $(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x| + 2(x,y) + |y|$. Принимая во внимание неравенство Коши-Буняковского, получим $|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2 \cdot |x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$.