1 Properties of binary relations: reflexivity, symmetricity, transitivity, antisymmetricity. Definition and characterization of these properties

Определение

Пусть $r \subseteq A^2$ - бинарное отношение на множестве A. Тогда

- r называется **рефлексивным**, тогда и только тогда, когда $id_A \subseteq r$
- r называется **симметричным**, тогда и только тогда, когда $r = r^{-1}$, т.е. оно совпадает со своим обратным отношением
- r называется **транзитивным**, тогда и только тогда, когда $r \circ r \subseteq r$
- r называется **антисимметричным**, тогда и только тогда, когда $r \cap r^{-1} \subseteq id_A$

Пример

Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

- отношение $\leq$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично,
- отношение $\sim$, определённое как: $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$, рефлексивно, транзитивно и симметрично

Характеризация рефлексивных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ рефлексивно $\Leftrightarrow$ для любого $a \in A$ пара (a, a) лежит в r, т.е. $(a, a) \in r$

Доказательство

Следует из определения диагонали: $id_A = \{(a, a) | a \in A\}$

Характеризация симметричных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ симметрично $\Leftrightarrow$ для любого $a, b \in A$, $(a, b) \in r \Leftrightarrow (b, a) \in r$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r = r^{-1}$ и $(a, b) \in r$. Тогда $(b, a) \in r^{-1}$, так как $r = r^{-1}$, $(b, a) \in r$. Обратное следствие $\Rightarrow$. Известно, что для любого $a, b \in A$ верно, что $(a, b) \in r \Leftrightarrow (b, a) \in r$. Нам нужно показать, что $r = r^{-1}$. Покажем два включения: $r \subseteq r^{-1}$ и $r^{-1} \subseteq r$. Первое: если $(a, b) \in r$, то $(b, a) \in r$, тогда по определению обратного отношения, $(a, b) \in r^{-1}$. Второе включение доказывается аналогично.

Характеризация транзитивных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ транзитивно $\Leftrightarrow$ для любого $a, b, c \in A$ из $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$ следует, что $(a, c) \in r$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r \circ r \subseteq r$, и $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$. Тогда по определению композиции $(a, c) \in r \circ r$, следовательно, $(a, c) \in r$, Ч.Т.Д. Обратное следствие $\Rightarrow$. Нужно показать, что $r \circ r \subseteq r$. Пусть $(a, c) \in r \circ r$. Значит, существует такой $b \in A$, что $(a, b) \in r$ и $(b, c) \in r$. Следовательно, $(a, c) \in r$ - Ч.Т.Д.

Характеризация антисимметричных отношений

Предложение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ антисимметрично $\Leftrightarrow$ для любых $a, b \in A$ из $(a, b) \in r$ и $(b, a) \in r$ следует, что $a = b$.

Доказательство

Покажем следствие $\Leftarrow$. Пусть $r \cap r^{-1} \subseteq id_A$, $(a, b) \in r$ и $(b, a) \in r$. Тогда $(a, b) \in r^{-1}$, поэтому $(a, b) \in r \cap r^{-1} \subseteq id_A$, тогда $(a, b) \subseteq id_A$. Следовательно, $a = b$. Обратное следствие $\Rightarrow$ - аналогично.

2 Reductions in λ-calculus: η-reduction

η-**редукция** правило переписывания:

$$\lambda x.(f\ x) \Rightarrow_\eta f$$

может применяться, когда $x \notin FV(f)$.

η-редукция - это еще один элементарный шаг вычисления, при котором абстракция сокращается, когда в ней нет необходимости. Терм вида $\lambda x.(f\ x)$ называется η-**редексом**, а результат редукции f называется η-**сокращением**.

3 Congruence on the structure of signature σ

Определение

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ - структура. Отношение эквивалентности $\sim_\theta$ на множестве M называется **конгруэнцией**, тогда и только тогда, когда для любого функционального символа $f^n \in \sigma$ и для любой пары кортежей $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$

$$((a_1 \sim_\theta b_1)\ \wedge \ldots \wedge\ (a_n \sim_\theta b_n)) \Rightarrow f(\bar{a}) \sim_\theta f(\bar{b})$$

пример

Рассмотрим структуру $\mathbb{Z} = (Z, \sigma_{\mathbb{Z}})$ - кольцо целых чисел, где $\sigma_{\mathbb{Z}} = \{+^2, \cdot^2, 0, 1\}$. Пусть $n \in \omega \setminus \{0\}$ - положительное натуральное число. Тогда отношение

$$m_1 \sim_n m_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} rest(m_1, n) = rest(m_2, n)$$

- это конгруэнция на $\mathbb{Z}$.