Вопрос №1
Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Теорема Ферма

Определение. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой на интервале (a, b), если f определена на (a, b) и имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ конечную производную $f'(x)$.

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и x_0 - это точка экстремума для $f(x)$, то имеет место равенство $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По условию f дифференцируема в точке x_0, поэтому f определена в некоторой окрестности этой точки. Если x_0 - точка максимума f, то $\exists O_1(x_0) \subset O(x_0) \; : \forall x \in O_1(x_0) \;\; \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$. Если $x \in O_1(x_0)$ и при этом $x < x_0$, то имеем неравенство: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Переходя здесь к пределу при $x \to x_0 - 0$, получаем $f'^{-}(x_0) \geq 0$. Аналогично, если $x \in O_1(x_0)$ и при этом $x > x_0$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ или, в пределе при $x \to x_0 + 0$, получаем $f'^{+}(x_0) \leq 0$.

Но f имеет в x_0 производную $f'(x_0)$, которая обязана совпадать как с $f'^{-}(x_0)$, так и с $f'^{+}(x_0)$: $f'(x_0) = f'^{-}(x_0) = f'^{+}(x_0)$. Это возможно лишь в случае, когда все три величины в последних равенствах равны нулю: $f'(x_0) = 0$. Случай, когда x_0 - точка минимума рассматривается аналогично.

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), и при этом $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a, b) \; : \; f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Если $f(\xi)$ - тождественно постоянная функция, то в качестве ξ с условием $f'(\xi) = 0$ подойдёт любая точка внутри (a, b). Пусть $f(\xi)$ - не тождественно постоянная функция.

Отрезок $[a, b]$ - компакт на числовой оси, и по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $f(x)$ достигает на $[a, b]$ как наибольшего M_1, так и наименьшего m_1 значений. Следовательно: $\exists \xi_1 \in [a, b] \; : \; f(\xi_1) = \max f(x) = M_1$ $(a \leq x \leq b)$, $\exists \xi_2 \in [a, b] \; : \; f(\xi_2) = \min f(x) = m_1$ $(a \leq x \leq b)$. Заметим, что из двух чисел ξ_1 и ξ_2 по крайней мере одно лежит внутри отрезка (a, b). В противном случае должно выполняться неравенство: $f(\xi_1) = f(a) = f(b) = f(\xi_2)$, т.е. $M_1 = m_1$, а это противоречит предположению, что $f(x)$ не тождественно постоянна.

Пусть теперь: $\xi = \xi_1$, если $a < \xi_1 < b$, $\xi = \xi_2$, в противном случае. Тогда по теореме Ферма получаем: $f'(\xi) = 0$, т.е. требуемое соотношение.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, где построенная λx находится из условия: $F(a) = F(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), и при этом $F(a) = F(b)$, т.е. $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$, или: $F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство. По теореме Ролля из условия, что $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$ следует неравенство: $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, где постоянную λ найдем из условия: $F(a) = F(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Функция $F(x)$ при этом удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$. Поэтому: $f'(\xi) = \lambda g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в x_0 производную порядка n. Тогда $f(x)$ имеет в этой же точке x_0 производные порядков $1, 2, \ldots, n-1$.

Определение. Многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Многочлен Тейлора обладает следующими свойствами: $P_n^{(k)}(x_0) = f(k)(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Чтобы оценить приближение функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ рассматривается разность $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Функция $r_n(x)$ называется погрешностью приближения $f(x)$ ее многочленом Тейлора. Равенство $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$ называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 с остаточным членом $r_n(x)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ порядка n в окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и пусть $f(n)(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$. Тогда $\forall x \in \dot{O}(x_0)$ $\exists \xi = \xi(x)$, лежащее строго между x и x_0 и такое, что имеет место равенство: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$.

Доказательство. Пара функций $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и $\phi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Коши на интервале (x_0, x) при $x > x_0$ (или на интервале (x, x_0) при $x < x_0$). При этом справедливы равенства $r_n^{(k)}(x_0) = 0$, $\phi^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Поэтому по теореме Коши, для $x \in O(x_0)$ и $x < x_0$

$$\exists \xi_1 \in (x, x_0) : \ \frac{r_n(x)}{\phi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{r'{}_n(\xi_1)}{\phi'(\xi_1)} \tag{1}$$

По тем же причинам имеем:

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1, x_0) : \ \frac{r'{}_n(\xi_1)}{\phi'(\xi_1)} = \frac{r''{}_n(\xi_2)}{\phi''(\xi_2)} \tag{2}$$

. . . .

$$\tag{3}$$

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1}, x_0) : \ \frac{r_n{}^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\phi^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\phi^{(n)}(\xi_n)} \tag{4}$$

Но, как легко сосчитать, $\phi^{(n)}(x) = (n+1)!(x - x_0)$; $r_n^{(n)} = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$. Применим к паре функций $r_n^{(n)}(x)$ и $\phi^{(n)}(x)$ теорему Коши на интервале (ξ_n, x_0). Тогда получим, что

$$\exists \xi_n \in (\xi_n, x_0) : \ \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\phi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_n)}{\phi^{(n+1)}(\xi_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \tag{5}$$

Последовательно применяя равенства 1, 2, ..., 4 и 5, получаем: $\frac{r_n(x)}{\phi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, где $\xi \in (x, x_0)$.

Таким образом, имеем равенство: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Случай $x \in O(x_0)$ и $x > x_0$ рассматривается аналогично.

Определение. равенство $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$, где ξ лежит строго между x и x_0, называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Эта же формула справедлива и при $x = x_0$, если считать, что $r_n(x_0) = 0$.

Формула Маклорена и разложения по этой формуле основных элементарных функций

Определение. В частном случае, когда $x_0 = 0$, формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Примеры разложения функций по формуле Маклорена:

1. Пусть $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$. Тогда: $f^{(k)}(x) = e^x$ и $f^{(k)}(0) = 1$, при $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\exists \theta \in (0,1) \;:\; e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (6)$$

2. Пусть $f(x) = \sin(x)$ и $x_0 = 0$. Тогда: $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\cos(\theta x) \cdot x^{2n+3}$.

3. Пусть $f(x) = \cos(x)$ и $x_0 = 0$. Тогда: $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cos(\theta x) \cdot x^{2n+2}$.

4. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha > 0$ и $x_0 = 0$. Тогда: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $\ldots$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $\ldots$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$. Следовательно, $\forall x\ \exists \theta \in (0,1) \;:\; (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$. Используются обозначения: $\binom{\alpha}{k} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \equiv C_\alpha{}^k$. При этом формула Маклорена принимает вид: $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1}$.

Вопрос №2

Скалярные и векторные величины на плоскости и в пространстве

Определение. Скалярными величинами называют величины, имеющие численное значение, но не имеющие направления. Примеры: длина, плотность, масса.

Определение. Векторными величинами, или векторами, называют величины, имеющие и численное значение, и направление. Примеры: скорость, сила, перемещение.

Геометрически векторную величину можно изобразить с помощью направленного отрезка, длина которого в заданном масштабе измерения равна числовому значению векторной величины, а направление совпадает с направлением этой величины.

Определение 1. Длиной (модулем) вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка AB. Она обозначается как $|\vec{AB}|$.

Определение 2. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. У нулевого вектора начало совпадает с концом. Нулевой вектор направления не имеет.

Определение 3. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Поскольку нулевой вектор может иметь произвольное направление, то разумно считать его коллинеарным любому ненулевому вектору.

Определение 4. Если два ненулевых вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны, а их лучи AB и CD сонаправлены, то данные векторы называются сонаправленными. Этот факт обозначается так: $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$. Если же эти лучи не являются сонаправленными, то векторы называются противоположно направленными. Этот факт обозначается так: $\vec{AB} \updownarrow \vec{CD}$.

Определение 5. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

Например, пусть $ABCD$ - ромб, векторы $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$ равны, так как $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$, $AD \parallel BC$ и отрезки $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$ направлены в одну сторону. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ не равны друг другу, так как прямые AB и AD не являются параллельными. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ также не равны, поскольку имеют противоположные направления.

Определение 6. Векторы в пространстве называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости. Два любые вектора в пространстве компланарны.

Например, пусть $ABCDEFGH$ - параллелепипед, векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{FE}$, $\vec{FG}$, $\vec{HG}$, $\vec{HE}$ компланарны.

Угол между векторами

Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим эти векторы от некоторой точки O, то есть построим векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, такие, что $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$. Тогда величина внутреннего угла AOB треугольника AOB называется углом между данными векторами и обозначается $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. По определению угол между векторами лежит в промежутке от $0°$ до $180°$. Угол между коллинеарными векторами равен $0°$, если они направлены в одну сторону, и $180°$, если они направлены противоположно.

Если угол между векторами равен $90°$, то эти векторы называются перпендикулярными или ортогональными.

Проекция вектора на ось

Определение. Осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица длины.

Определение. Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора на ось называется число, равное произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l обозначается символом $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a}$. Таким образом, по определению $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi$, где ϕ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ (единичным положительно направленным вектором) острый, то проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна длине отрезка OA_1, где точка A_1 проекция точки A на прямую l: $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi = |\vec{OA}|\cos\angle AOA_1 = \vec{OA}_1$. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ тупой, то проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна длине отрезка OA_1, взятой со знаком минус $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi = |\vec{a}|\cos\angle BOA = -|\vec{a}|\cos\angle A_1OA = -\vec{OA}_1$. Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен оси l, то его проекция равна нулю.

Свойства проекций:

1. $\mathrm{Pr}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi$, где ϕ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$
2. $\mathrm{Pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{Pr}_l\,\vec{a} + \mathrm{Pr}_l\,\vec{b}$
3. $\mathrm{Pr}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_l\,\vec{a}$

Сумма векторов

Определение (правило треугольника). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположены так, что конец вектора $\vec{a}$ совпадает с началом вектора $\vec{b}$, то суммой $\vec{a}+\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$.

Теорема (правило параллелограмма). Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одному началу. Построим на этих векторах параллелограмм, рассматривая их как смежные стороны. Тогда вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец - с концом диагонали параллелограмма, выходящей из этого начала, равен $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. По правилу треугольника, с учетом определения равенства векторов, получим $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Определение. Сумма нескольких векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ - это вектор, получающийся после ряда последовательных сложений: к вектору $\vec{a_1}$ прибавляется вектор $\vec{a_2}$, к полученному вектору прибавляется $\vec{a_3}$ и т.д.

Определение (правило многоугольника (или правило цепи)). Из произвольного начала O строим вектор $\vec{OA_1} = \vec{a_1}$, из точки A_1, как из начала, строим вектор $\vec{A_1A_2} = \vec{a_2}$, из точки A_2 строим вектор $\vec{A_2A_3} = \vec{a_3}$ и т.д. Вектор $\vec{OA_n}$ есть сумма векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.

Определение (правило параллелепипеда). Сумма трех некомпланарных векторов равна вектору, изображаемому направленной диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства сложения векторов:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность)

Разность векторов

Определение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одному началу, то вектор $\vec{c}$ с началом в конце вектора $\vec{a}$ и с концом в конце вектора $\vec{b}$ называется разностью $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

Произведение вектора на число.

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число и произведением любого вектора на нуль является нулевой вектор.

Свойства:

- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda + \mu)\vec{a}$
- $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$

Теорема (необходимое и достаточное условие коллинеарности). Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Прямоугольная система координат на плоскости

Прямоугольную систему координат образуют две взаимно перпендикулярные оси на плоскости с общим началом. Эти оси называются осями координат, а общее начало - началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (горизонтальная прямая) и обозначают Ox, другую - осью ординат (вертикальная прямая) и обозначают Oy. Единичные векторы осей обычно обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (единичные ортогональные векторы).

Определение 1. Проекции вектора на оси координат называются координатами вектора. Если через x_a и y_a обозначить координаты вектора $\vec{a}$, то согласно определению $x_a = \mathrm{Pr}_{O_x}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})$, $y_a = \mathrm{Pr}_{O_y}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})$. Так же вектор $\vec{a}$ можно представить в следующем виде $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$ Данное равенство означает, что любой вектор можно разложить по двум взаимно перпендикулярным векторам. Более общее утверждение заключается в том, что любой вектор на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

Прямоугольная система координат в пространстве

В пространстве прямоугольная декартова система координат образуется тремя взаимно перпендикулярными осями с общим началом. Одну из осей называют осью абсцисс и обозначают Ox, другую - осью ординат и обозначают Oy, третью - осью аппликат и обозначают Oz. Единичные векторы осей Ox, Oy и Oz обычно обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ соответственно. Координатами вектора в пространстве называются его проекции на оси координат.

Пусть в пространстве задан вектор $\vec{a}$ с координатами x_a, y_a и z_a, тогда справедливо равенство $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$. Данное равенство означает, что любой вектор в пространстве можно разложить по трем взаимно перпендикулярным векторам. Более общее утверждение заключается в том, что любой вектор в пространстве можно разложить по трём некомпланарным векторам.

Координаты точки

Пусть в пространстве имеется декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки A координаты вектора $\vec{OA}$ называются координатами точки A. Вектор $\vec{OA}$ называется радиус-вектором точки A. Следовательно, координаты точки - это координаты ее радиус-вектора. Координаты точки A записывают обычно в круглых скобках рядом с буквой, ее обозначающей $A(x, y, z)$.

Координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала $\vec{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$.

Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении

Требуется разделить данный отрезок AB в заданном отношении $m : n$, т.е. найти координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$ отрезка AB, такой, что $\frac{|\vec{AM}|}{|\vec{MB}|} = \frac{m}{n}$. Очевидно, что точка M делит отрезок AB в данном отношении $m : n$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{AM} = \frac{m}{n}\vec{MB}. \tag{7}$$

Выразим векторы $\vec{AM}$ и $\vec{MB}$ через радиус-векторы $\vec{OA}$, $\vec{OM}$ и $\vec{OB}$. Тогда уравнение 7 примет вид $\vec{OM} - \vec{OA} = \frac{m}{n}(\vec{OB} - \vec{OM})$. Отсюда

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB}. \tag{8}$$

Формула 8 дает решение задачи, так как выражает радиус-вектор искомой точки M, делящей отрезок AB в заданном отношении $m : n$ через радиус-векторы заданных точек A и B. Векторное равенство 8 равносильно трем числовым равенствам: $x_M = \frac{n}{m+n}x_A + \frac{m}{m+n}x_B$, $y_M = \frac{n}{m+n}y_A + \frac{m}{m+n}y_B$, $z_M = \frac{n}{m+n}z_A + \frac{m}{m+n}z_B$.

В частном случае, когда M является серединой отрезка AB данная формула принимает вид $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$, $z_M = \frac{z_A+z_B}{2}$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если из двух векторов хотя бы один нулевой, то скалярное произведение этих векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}$. По определению $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$, где ϕ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то скалярное произведение принимает вид $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (коммутативность)

2. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$ (числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения).

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (дистрибутивность)

Теорема. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и, значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$.

Наоборот, если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то из равенства $\vec{a}\vec{b}\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ следует, что $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, так как $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Следовательно, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть имеется некоторая прямоугольная декартова система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ и пусть заданы векторы $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Так как данные векторы можно разложить по единичным векторам, получаем $\vec{a}\vec{b} = (x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}) = x_a x_b\vec{i}^2+y_a y_b\vec{j}^2+z_a z_b\vec{k}^2 + x_a y_b\vec{i}\vec{j} + x_a z_b\vec{i}\vec{k} + y_a x_b\vec{j}\vec{i} + y_a z_b\vec{j}\vec{k} + z_a x_b\vec{k}\vec{i} + z_a y_b\vec{k}\vec{j}$.

Так как $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0$, мы нашли что $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Другими словами, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Определители второго и третьего порядка

Определитель второго порядка

Рассмотрим таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, a_2, b_2 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей второго порядка, Числа a_1, b_1, a_2, b_2 - элементами матрицы.

Число, равное $a_1 b_2 - a_2 b_1$ называется определителем данной матрицы или определителем второго порядка и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную таблицу вида $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 - некоторые числа. Любая такая таблица называется матрицей третьего порядка.

Определитель третьего порядка выражается через определители второго порядка следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Раскрывая определители второго порядка по 9, находим, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2. \qquad (10)$$

Некоторые свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится, если строки (или столбцы) этого определителя поменять местами, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

2. Перестановка двух строк (или столбцов определителя) равносильна умножению его на число (-1), то есть такая перестановка меняет знак определителя на противоположный

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю

4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число k равносильно умножению определителя на это число k

5. если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю

6. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (правило Крамера)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (12)$$

Коэффициенты левых частей уравнений системы образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Теорема. Система уравнений 12 имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

В этом случае решение находят по правилу Крамера:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A},\ y = \frac{\det A_2}{\det A},\ z = \frac{\det A_3}{\det A}, \tag{14}$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 равны $A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$, т.е. эти матрицы получаются из матрицы системы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбца свободных членов.