Тема : Численное интегрирование

$\mathbf{1^0}$. Вводные понятия (квадратурная сумма, узлы, веса, погрешность). Обобщенная теорема о среднем. $\mathbf{2^0}$. Базовая формула прямоугольников: конструкция, погрешность. Базовая формула трапеций: конструкция, погрешность. $\mathbf{3^0}$. Базовая формула парабол (Симпсона): конструкция, погрешность. $\mathbf{4^0}$. Составные (усложненные) квадратурные формулы прямоугольников и трапеций. $\mathbf{5^0}$. Составная квадратурные формула парабол: конструкция, погрешность. $\mathbf{6^0}$. Равномерные оценки погрешностей составных квадратурных формул. Оценки снизу. Пример.

1^0. Определенный интеграл от непрерывной функции в редких случаях удается вычислить точно. По этой причине такие интегралы вычисляются приближенно с помощью специально созданного для этих целей аппарата квадратурных формул.

Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда определенный интеграл от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$

приближенно вычисляется с помощью равенства следующего вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j). \tag{CF}$$

Здесь x_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, N$ — это некоторые точки из $[a, b]$, называемые узлами. Числа c_j называются весами (или коэффициентами) формулы и все не равны нулю.

Конечная сумма справа в (CF) называется квадратурной суммой, а само приближенное равенство — квадратурной формулой. Узлы и веса формулы не зависят от подынтегральной функции $f(x)$.

Определение. *Квадратурная формула точна для полиномов степени* $\leq m$*, если при замене в формуле* (CF) *функции* $f(x)$ *любым таким полиномом приближенное равенство* (CF) *превращается в точное.*

На практике важен вопрос о погрешности квадратурной формулы. Уменьшить эту погрешность на классе функций удается с помощью специального выбора узлов и весов формулы, а также увеличивая число N узлов.

При анализе погрешности квадратуры используем следующую обобщенную теорему о среднем.

Теорема (обобщенная теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, причем $g(x) \geq 0$ для всех x из $[a, b]$.*

Тогда существует такая точка ξ из $[a, b]$, что имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Введем следующие два числовых параметра:

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \qquad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Учитывая, что $g(x) \geq 0$, получаем

$$\forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства по отрезку $[a,b]$, получаем

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Учитывая, что $M \ge m$, а $\int\limits_a^b g(x)dx \ge 0$, заключаем из последнего двустороннего неравенства, что существует число c, $m \le c \le M$, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = c\int\limits_a^b g(x)dx.$$

По условию $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и при этом $m \leq f(x) \leq M$, а $c \in [m, M]$. По известному свойству области значений непрерывной функции найдется точка ξ из $[a, b]$, в которой значение $f(x)$ совпадает с числом c. $\square$

2^0. Рассмотрим некоторые простейшие квадратурные формулы. Пусть $h > 0$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Тогда применимо следующее приближенное равенство:

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f(x)dx \approx hf(0). \qquad (Rect)$$

Это — квадратурная **формула прямоугольников**. У нее в точности один узел — это начало отсчета, а ее единственный вес равен длине отрезка интегрирования.

Если $f(x)$ тождественно постоянна, то формула прямоугольников точна.

Название формулы происходит от ее геометрической интерпретации. Интеграл слева представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $f(x)$. Эта площадь заменяется площадью прямоугольника с длиной основания h и высотой $f(0)$.

Найдем погрешность формулы прямоугольников ($Rect$). Рассмотрим первообразную функции $f(x)$, то есть функцию

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(\xi)d\xi, \qquad \text{где} \qquad f(x) \in C^{(2)}\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Справедливы равенства $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0)$, $F''(0) = f'(0)$ и $F'''(x) = f''(x)$.

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$F(\frac{h}{2}) = +\frac{h}{2}f(0) + \frac{h^2}{8}f'(0) + \frac{h^3}{48}f''(\xi_+),$$

$$F(-\frac{h}{2}) = -\frac{h}{2}f(0) + \frac{h^2}{8}f'(0) - \frac{h^3}{48}f''(\xi_-).$$

Здесь ξ_+ и ξ_- — некоторые точки с условием

$$-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}.$$

Вычитая из первого полученного равенства второе, приходим к следующему соотношению:

$$F(\frac{h}{2}) - F(-\frac{h}{2}) = hf(0) + \frac{h^3}{24} \cdot \frac{f''(\xi_+) + f''(\xi_-)}{2}.$$

Отсюда получаем формулу прямоугольников с остаточным членом

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(0) + \frac{h^3}{24}f''(\xi) = hf(0) + O(h^3),$$

где точка ξ удовлетворяет условию $|\xi| \leq \frac{h}{2}$.

Пусть функция $f = f(x)$ принадлежит классу

$C^{(2)}[0, h]$. Полагаем

$$\int_0^h f(x)dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}, \qquad (Trap)$$

где $f_0 = f(0)$ и $f_1 = f(h)$. Это приближенное равенство известно как формула трапеций. У нее два узла — концы отрезка интегрирования, веса положительные, равные и дают в сумме длину отрезка интегрирования.

Формула трапеций точна на линейных функциях.

Геометрическая интерпретация формулы трапеций: интеграл слева, представляющий площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, заменяется площадью трапеции с высотой h и полусуммой оснований, равной $\frac{1}{2}(f(0) + f(h))$.

Найдем погрешность формулы трапеций. Снова рассмотрим первообразную

$$F(x) = \int\limits_0^x f(\xi) d\xi,$$

где $f(x) \in C^{(2)}[0, h]$. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме имеем

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2} F''(0) + \frac{1}{2} \int\limits_0^h (h - \xi)^2 F'''(\xi) d\xi.$$

По определению функции $F(x)$ имеем равенства $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0)$, $F''(0) = f'(0)$ и $F'''(x) = f''(x)$. Подставляя их в предыдущее соотношение, получаем

$$F(h) = hf(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + \frac{1}{2} \int\limits_0^h (h - \xi)^2 f''(\xi) d\xi.$$

По формуле Тейлора с остаточным членом

в интегральной форме имеем также

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \int\limits_0^h (h-\xi) f''(\xi) d\xi.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{h}{2} f(0) = h\frac{f(h)}{2} - \frac{h^2}{2} f'(0) - \frac{h}{2} \int\limits_0^h (h-\xi) f''(\xi) d\xi.$$

Отделив слагаемое $\frac{h}{2} f(0)$ в правой части полученного выше представления для $F(h)$ и заменив затем это отделенное слагаемое его же выражением из правой части последнего равенства, найдем

$$\int_0^h f(x)dx = h\frac{f(0)+f(h)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^h (h-\xi)\xi f''(\xi)d\xi.$$

Полагая $g(\xi) = (h-\xi)\xi$, заметим, что $g(\xi) = (h-\xi)\xi \geqslant 0$ при $0 \leq \xi \leq h$.

Следовательно, к интегралу

$$\int\limits_0^h (h-\xi)\xi f''(\xi)d\xi$$

применима обобщенная теорема о среднем, в соответствии с которой получаем

$$\int\limits_0^h (h-\xi)\xi f''(\xi)d\xi = f''(\eta)\int\limits_0^h (h-\xi)\xi d\xi = \frac{h^3}{6} f''(\eta),$$

где $0 \le \eta \le h$.

Подставляя вычисленное значение последнего интеграла в полученное выше равенство для первообразной $F(h)$, получаем следующую формулу трапеций с остаточным членом:

$$\int\limits_0^h f(x)dx = h\frac{f(0)+f(h)}{2} - \frac{h^3}{12}f''(\eta),$$

где $0 \le \eta \le h$.

3^0. Предположим теперь, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $C^{(4)}[-h, h]$. Полагаем в этом случае

$$\int\limits_{-h}^{+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(-h) + 4f(0) + f(h)\Big). \qquad (SQ)$$

Это приближенное равенство известно как формула парабол (или формула Симпсона).

У нее три узла: концы и середина отрезка интегрирования. Веса формулы положительны и дают в сумме длину отрезка интегрирования. Формула парабол (Симпсона) точна на квадратичных функциях.

Геометрическая интерпретация формулы парабол: интеграл слева (площадь криволинейной трапеции) заменяется площадью другой криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, и проходящей через три точки на плоскости Oxy: точку $(-h, f(-h))$, точку $(0, f(0))$ и точку $(h, f(h))$.

Уравнение указанной параболы имеет вид

$$y = f(0) + \frac{f(h) - f(-h)}{2h}x + \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{2h^2}x^2.$$

Интегрируя обе части этого равенства по отрезку $[-h, h]$, получаем в результате формулу Симпсона (SQ).

Найдем погрешность формулы парабол ($\boldsymbol{SQ}$).

Снова рассмотрим первообразную

$$\boldsymbol{F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi.}$$

Имеем равенства

$$\boldsymbol{F(0) = 0, \quad F^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.}$$

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, примененной к первообразной $F(x)$, имеем

$$F(h) = hf(0) + \frac{h^2}{2}f'(0) + \frac{h^3}{6}f''(0) + \\ + \frac{h^4}{24}f'''(0) + \frac{1}{24}\int\limits_0^h (h-\xi)^4 f^{(4)}(\xi)d\xi.$$

Аналогичное равенство справедливо для значения первообразной в точке $-h$:

$$F(-h) = -hf(0) + \frac{h^2}{2}f'(0) - \frac{h^3}{6}f''(0) + \\ + \frac{h^4}{24}f'''(0) - \frac{1}{24}\int\limits_0^h (h-\xi)^4 f^{(4)}(-\xi)d\xi.$$

Аналогично, для подынтегральной функции

$f(x)$ справедливы равенства

$$f(\pm h) = f(0) \pm h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) \pm$$

$$\pm \frac{h^3}{6} f'''(0) + \frac{1}{6} \int\limits_0^h (h - \xi)^3 f^{(4)}(\pm \xi) d\xi.$$

Составляя линейную комбинацию четырех последних равенств с нужными коэффициентами, приходим к следующему представлению остатка формулы парабол:

$$F(h) - F(-h) - \frac{h}{3}\Big(f(-h) + 4f(0) + f(h)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{24}\int\limits_0^h (h-\xi)^3(\frac{h}{3}+\xi)\Big(f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(-\xi)\Big)d\xi.$$

Полагая $g(\xi) = (h-\xi)^3(\frac{h}{3}+\xi)$, заметим, что $g(\xi) \geqslant 0$ при $0 \leq \xi \leq h$. Следовательно, к интегралу справа в полученной формуле

$$\int\limits_0^h (h-\xi)^3\Big(\frac{h}{3}+\xi\Big)\Big(f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(-\xi)\Big)d\xi$$

применима обобщенная теорема о среднем, в соответствии с которой получаем

$$-\frac{1}{24}\int\limits_0^h (h-\xi)^3\Big(\frac{h}{3}+\xi\Big)\Big(f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(-\xi)\Big)d\xi =$$

$$-\frac{f^{(4)}(\eta)+f^{(4)}(-\eta)}{24}\int\limits_0^h (h-\xi)^3(\frac{h}{3}+\xi)d\xi = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

где $0 \leq \eta \leq h$ и $-h \leq \xi \leq h$. По определению первообразной имеем далее

$$F(h)-F(-h)=\int\limits_{-h}^{+h} f(x)dx.$$

Учитывая это, приходим к формуле Симпсона с остаточным членом

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(-h) + 4f(0) + f(h)\Big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

где $-h \le \xi \le h$.

4^0. Рассмотренные квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол — простейшие, создающие исходную базу.

Для более сложных конструкций, основанных на базовых формулах, применяется термин усложненные (или составные) квадратурные формулы.

Для того чтобы построить составную квадратуру, сначала делят заданный отрезок $[a, b]$ на N равных частей.

Затем на каждом из полученных частичных отрезков длины $\frac{b-a}{N}$ применяют какую-нибудь базовую квадратуру. Полученные приближенные равенства суммируют, приходя в результате к составной квадратурной формуле на отрезке $[a, b]$.

При использовании в качестве базовых квадратурных формул прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков интегрирования удобно считать равной h, то есть полагать $Nh = b - a$.

Если же в качестве базовой выступает формула парабол, то удобно полагать $2Nh = b-a$, то есть длина частичного отрезка интегрирования в этом случае равна $2h$.

Опишем подробнее структуру составной формулы прямоугольников. Полагаем $h = \frac{b-a}{N}$ и берем в качестве узлов точки

$$x_i = x_0 + ih, \quad \text{где} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

При этом $x_0 = a$ и $x_N = b$. Далее полагаем

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx hf(x_{i+\frac{1}{2}}),$$

где $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. При этом

$$f(x_{i+\frac{1}{2}}) = f\Big(a + (i + \frac{1}{2})h\Big) \equiv f_{i+1/2},$$

то есть $f(x_{i+\frac{1}{2}})$ — это значение подынтегральной функции в середине частичного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

Для погрешности этой частичной квадратурной формулы имеем представление

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{h^3}{24} f''(\xi_i),$$

где точка ξ_i лежит в отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Суммируя все частичные квадратуры по индексу i от 0 до $N-1$, получаем составную формулу прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\Big\{f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+\ldots$$

$$\ldots+f(b-\frac{3h}{2})+f(b-\frac{h}{2})\Big\}.$$

При этом составная формула прямоугольника с остаточным членом имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\Big\{f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+\ldots$$

$$\ldots+f(b-\frac{3h}{2})+f(b-\frac{h}{2})\Big\}+\frac{(b-a)h^2}{24}f''(\xi),$$

где $a \le \xi \le b$.

Аналогично выводится составная формула

трапеций с остаточным членом

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$h\left\{\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+\ldots+f(b-h)+\frac{f(b)}{2}\right\}-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi),$$

где ξ — некоторая точка с условием $a \leq \xi \leq b$.

5^0. Опишем теперь конструкцию составных формул Симпсона. Пусть $h = \frac{b-a}{2N}$, то есть в сетке интегрирования четное число $2N$ узлов.

Запишем базовую формулу Симпсона на отрезке $[x_{2j}, x_{2j+2}]$ длины $2h$. Тогда получим

$$\int\limits_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\Big).$$

Заметим, что $[a, b] = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} [x_{2j}, x_{2j+2}]$ и при этом отрезки в правой части этого равенства примыкают друг к другу, имея лишь одну общую точку — конец левого из них совпадает с началом правого. Учитывая это, заключаем, что

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)dx.$$

Применяя к каждому из интегралов в правой части базовую формулу парабол, получаем следующую квадратурную сумму:

$$\frac{h}{3}\sum_{j=0}^{N-1}\left\{f(x_{2j})+4f(x_{2j+1})+f(x_{2j+2})\right\}=$$

$$=\frac{h}{3}\left\{f(a)+f(b)+4\sum_{j=1}^{N}f(x_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{N-1}f(x_{2j})\right\}.$$

Это и есть искомая квадратурная сумма составной формулы Симпсона.

Если подынтегральная функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{(4)}[a,b]$, то остаток составной формулы Симпсона, то есть разность

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\Big\{f(a)+f(b)+4\sum_{j=1}^{N} f(x_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{N-1} f(x_{2j})\Big\}$$

представляет собой величину вида

$$-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi),$$

где точка ξ лежит в отрезке $[a,b]$.

Прилагательное “составное” при ссылке на построенные усложненные квадратуры прямоугольников, трапеций и парабол принято опускать.

В кратком варианте построенные приближенные равенства для интеграла по $[a, b]$ — это просто формулы прямоугольников, трапеций и парабол.

Из представлений остатков этих формул заключаем, что формулы прямоугольников и трапеций точны на линейных функциях, а формула Симпсона точна на многочленах третий степени.

5^0. Погрешность формул прямоугольников и трапеций на произвольной функции $f(x)$ из $C^{(2)}[a,b]$ имеет второй порядок по h, то есть это величина $O(h^2)$.

Погрешность формулы Симпсона на $f(x)$ из $C^{(4)}[a, b]$ — это величина $O(h^4)$.

Таким образом, при малых h погрешность формулы парабол обычно гораздо меньше чем погрешность формул прямоугольников и трапеций.

Пусть $I_R^h(f)$ обозначает квадратурную сумму в формуле прямоугольников для отрезка

$[a, b]$, соответствующую числу узлов N, где $Nh = b - a$.

Аналогично, $I^h_{Tr}(f)$ — квадратурная сумма для $[a, b]$, соответствующая числу узлов N в формуле трапеций.

С учетом этих обозначений имеют место следующие оценки погрешности $\left(I \equiv \int\limits_a^b f(x)dx\right)$:

$$|I - I_R^h(f)| \le h^2 \frac{b-a}{24} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|;$$

$$|I - I_{Tr}^h(f)| \le h^4 \frac{b-a}{180} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Справедлива также следующая оценка снизу для погрешности формулы прямоугольников:

$$|I - I_R^h(f)| \geq \frac{(b-a)h^2}{24} \cdot \min_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Если знак производной $f''(x)$ подынтегральной функции не изменяется на $[a, b]$, то остаточные члены формул прямоугольников и трапеций противоположны по знаку.

Это замечание позволяет дать двусторонние оценки интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ через суммы $I_R^h(f)$ и $I_{Tr}^h(f)$.

Например, если $f''(x) < 0$ при $x \in [a, b]$, то справедливы неравенства

$$I_{Tr}^h(f) \leq I \leq I_R^h(f).$$

Если в этой ситуации приблизить интеграл

I полусуммой

$$\frac{I^h_{Tr}(f) + I^h_R(f)}{2},$$

то получим

$$\left| I - \frac{I^h_{Tr}(f) + I^h_R(f)}{2} \right| \leq \frac{I^h_{Tr}(f) + I^h_R(f)}{2}.$$

Таким образом, погрешность приближающей формулы оценивается через сами приближающие квадратурные суммы.

Квадратурная сумма в формуле Симпсона для числа $2N$ узлов обозначается как $I_S^h(f)$.

Пример. Исследовать погрешность квадратурных формул для интеграла $I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$.

Отметим, что интеграл I не выражается в элементарных функциях и часто встречается в приложениях.

Имеем равенства $f(x) = e^{-x^2}$,

$f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$, $\quad f^{(4)}(x) = 4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$.

Следовательно при $h = 0.05$ справедливы оценки

$$0.4 \cdot 10^{-4} \leq |I - I_R^h(f)| \leq 0.11 \cdot 10^{-3},$$

$$|I - I_S^h(f)| \leq 0.21 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, верхняя оценка погрешности формулы Симпсона значительно меньше нижней оценки формулы прямоугольников.

$\mathbf{7^0}$. Между максимальной степенью полиномов, для которых точна квадратурная формула, и порядком точности этой же формулы по отношению к параметру $\frac{1}{N}$, где N — число узлов формулы, имеется прямая связь.

Например, формулы прямоугольников и трапеций точны для полиномов первой степени и обладают вторым порядком точности относительно $\frac{1}{N}$, то есть погрешность этих формул есть величина $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ при $N \to \infty$.

Формула же Симпсона (парабол), точная для полиномов третьей степени, при $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ имеет погрешность порядка $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ при неограниченном увеличении N.

В этой связи естественным образом возникает **задача о нахождении среди всех квадратурных формул с** N **узлами** той, которая будет точна для алгебраических полиномов **максимально возможной степени** $\boldsymbol{d = d(N)}$.

При этом можно надеяться, что погрешность искомой формулы будет величиной $\boldsymbol{O\left(\frac{1}{N^{d+1}}\right)}$ при $N \to \infty$.

Прежде чем указать конструкцию искомой формулы, приведем оценку сверху на ее максимально возможную степень $d = d(N)$.

Пусть искомая квадратурная формула имеет узлы $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ и соответствующие им ненулевые коэффициенты c_1, c_2, ..., c_N, то есть

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j). \qquad (M_d)$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_{2N}(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 \dots (x - x_N)^2.$$

Этот полином неотрицателен и имеет степень $2N$. При этом погрешность квадратурной формулы (M_d) на полиноме $P_{2N}(x)$ имеет вид

$$\int_a^b P_{2N}(x)dx - \sum_{j=1}^{N} c_j P_{2N}(x_j) = \int_a^b P_{2N}(x)dx > 0.$$

Таким образом, степень $\boldsymbol{d = d(N)}$ формулы $(\boldsymbol{M_d})$ не может быть больше, чем $\boldsymbol{2N - 1}$, то есть $\boldsymbol{d(N) \leq 2N - 1}$.

Оценим теперь величину $\boldsymbol{d = d(N)}$ снизу. Пусть $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_N}$ — произвольные попарно неравные узлы из отрезка $\boldsymbol{[-1, 1]}$. Далее предполагаем, что $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{b = 1}$, то есть $\boldsymbol{[a, b] = [-1, 1]}$.

Для каждого номера j, $1 \le j \le N$, рассмотрим полином $l_{N-1,j}(x)$ степени $(N-1)$, задаваемый как следующее отношение:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_N)}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_N)}. \qquad (LC_j)$$

Заметим, что

$$\begin{cases} l_{N-1,j}(x_k) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j; \\ l_{N-1,j}(x_j) = 1. \end{cases}$$

Полином $l_{N-1,j}(x)$ называется лагранжевым коэффициентом для интерполяционного полинома Лагранжа степени $(N-1)$ с узлами $\{x_k\}_{k=1}^{N}$.

Как известно, любой полином $P_{N-1}(x)$ степени $(N-1)$ представим в виде

$$P_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^{N} l_{N-1,j}(x) \cdot P_{N-1}(x_j), \quad (E_{N-1})$$

где коэффициенты $l_{N-1,j}(x)$ определены выше равенствами (LC_j).

Интегрируя обе части равенства (E_{N-1}) по отрезку $[-1,1]$, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} P_{N-1}(x)dx = \sum_{j=1}^{N}\Big(\int\limits_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x)dx\Big)P_{N-1}(x_j).$$

Это означает, что квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j), \qquad (CF_N)$$

веса которой определяются равенствами

$$c_j = \int_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x)dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

точна для всех полиномов степени $\leq N - 1$.

Таким образом, справедлива оценка снизу $d(N) \geqslant N - 1$.

Формула (CF_N), получаемая интегрированием по отрезку интерполяционной формулы Лагранжа, называется интерполяционной.

8^0. Для того чтобы решить задачу о квадратурной формуле с N узлами, точной для алгебраических многочленов максимально возможной степени $d = d(N)$, нам понадобится специальная последовательность полиномов возрастающей степени.

Определение. *Полином степени N, задаваемый выражением*

$$X_N(x) = \frac{1}{N!2^N} \frac{d^N}{dx^N} \left[(x^2 - 1)^N \right],$$

называется ***полиномом Лежандра****.*

Из этого определения следует, в частности, что $X_0(x) \equiv 1$ и для более высоких степеней

$$X_1(x) = x; \qquad X_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2};$$

$$X_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x; \qquad X_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}.$$

Последовательность полиномов Лежандра обладает свойством ортогональности на отрезке $[-1,1]$. Точнее, справедливы равенства

$$\int\limits_{-1}^{1} X_j(x) X_k(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad j \neq k; \\ \frac{2}{2j+1}, & \text{при} \quad j = k. \end{cases} \qquad (O_{jk})$$

Эти равенства устанавливаются применением к произведению полиномов $X_j(x) \cdot X_k(x)$ формулы интегрирования по частям.

Для полиномов Лежандра справедлива следующая рекуррентная формула:

$$(N+1)X_{N+1}(x)-(2N+1)xX_N(x)+N\cdot X_{N-1}(x)=0.$$

Это соотношение позволяет вычислить значение полинома Лежандра высокой степени через значение полиномов степеней ниже на единицу или двойку.

При этом будут использованы лишь арифметические операции умножения и сложения.

Важное свойство полиномов Лежандра дает следующая лемма.

Лемма (о нулях полиномов Лежандра). *Все корни полинома Лежандра $X_N(x)$ вещественны, просты и расположены в интервале* $(-1, 1)$.

Доказательство. Любой полином $P_k(x)$ степени k допускает разложение в сумму вида

$$P_k(x) = \alpha_0 X_0(x) + \alpha_1 X_1(x) + \ldots + \alpha_k X_k(x). \quad (E_{X_k})$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ в этом разложении находим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. При этом удобно начать с α_k, затем сосчитать α_{k-1} и так далее до α_0.

Учитывая равенство (E_{X_k}) и пользуясь соотношениями ортогональности (O_{jk}), получаем для всех $k < N$:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) X_N(x) dx = 0, \quad k < N. \qquad (O_k)$$

Полином $X_N(x)$ имеет в комплексной плоскости (N) корней. Предположим, что в интервале $(-1, 1)$ расположены только k из них, где $k < N$. Выделим среди этих k корней только корни нечетной кратности

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m, \qquad \text{где} \qquad m \le k < N.$$

Рассмотрим вспомогательный полином $P_m(x)$, полагая $P_0(x) = 1$, а при $m \geq 1$

$$P_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_m).$$

Произведение $P_m(x) X_N(x)$ — это полином степени $m + N < 2N$, причем на $(-1, 1)$ у полинома $P_m(x) X_N(x)$ могут быть только корни четной кратности. Следовательно, произведение $P_m(x) X_N(x)$ не изменяет знака в интервале $(-1, 1)$. При этом $P_m(x) X_N(x) \not\equiv 0$.

В частности, не равен нулю интеграл

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) X_N(x) dx \neq 0, \qquad m < N,$$

что противоречит условию ортогональности (O_k).

Таким образом, сделанное предположение о корнях полинома неверно, то есть $m = k = N$. Это означает, что $X_N(x)$ имеет все корни в интервале $(-1, 1)$ и при этом эти корни нечетной кратности. $\square$

9^0. Вернемся к интерполяционной формуле (CF_N), то есть к приближенному равенству вида

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j),$$

где

$$c_j = \int\limits_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x)dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

В качестве узлов x_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, N$, в этой формуле выберем корни полинома Лежандра $X_N(x)$.

По доказанной лемме все эти узлы расположены в интервале $(-1, 1)$.

Теорема. *Пусть точки* $x_j \in (-1, 1)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *таковы, что*

$$X_N(x_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где $X_N(x)$ *— это полином Лежандра степени* N. *Тогда квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j) \qquad (G)$$

с узлами в точках x_j и весами c_j, определенными равенствами

$$c_j = \int\limits_{-1}^{1} l_{N-1,j}(x)dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

точна для полиномов степени $2N - 1$.