Глава 7

Элементы теории разностных схем

На первых этапах практического решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных применялись методы, в которых приближенное решение строилось в виде некоторой аналитической формулы. В настоящее время наибольшее распространение получили сеточные, вариационно- и проекционно-разностные методы, позволяющие получать либо приближенные значения решения на некотором множестве точек, либо приближенное разложение решения по некоторой системе базисных функций.

В главе излагаются базовые понятия общей теории численного решения дифференциальных уравнений. Рассматриваются различные способы перехода от дифференциальных задач к разностным и некоторые точные алгоритмы решения полученных уравнений.

7.1. Основные определения

Постановки задач. Пусть в области D с границей Γ задана дифференциальная задача

$$L\,u = f \quad \text{в} \quad D \tag{7.1}$$

с граничным условием

$$l\,u = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma\,. \tag{7.2}$$

Здесь L и l — дифференциальные операторы; f и φ — заданные элементы, u — искомый элемент некоторых линейных нормированных пространств F, Φ и U соответственно.

Если одной из переменных является время t, то наиболее часто рассматривают области вида

$$D(t, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) \times [t_0, T]\,,$$

где t — время, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — совокупность пространственных координат. Это означает, что решение ищется в пространственной области $d(\mathbf{x})$ на отрезке времени $[t_0, T]$. В этом случае условия, заданные при $t = t_0$, называют *начальными*, а условия, заданные на границе $\Gamma(\mathbf{x})$ области $d(\mathbf{x})$, — *граничными* или *краевыми*.

Задачу только с начальными условиями называют *задачей Коши*. Задачу с начальными и граничными условиями называют *смешанной краевой задачей*.

Для решения дифференциальных задач часто используют разностный метод.

Разностный метод. Для его применения определяют некоторую *сетку* — конечное множество точек (узлов) $\overline{D}_h = D_h \bigcup \Gamma_h$, принадлежащее области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$. Как правило, $\Gamma_h \subset \Gamma$. Будем рассматривать только сетки, узлами которых являются все точки пересечения заданных наборов параллельных прямых (плоскостей), причем по каждой переменной выбирается свой, как правило, постоянный шаг. Сетки по времени и пространству обычно определяют независимо. Сеточный параметр h является, в общем случае, вектором, компоненты которого состоят из шагов сетки по каждой переменной. Для изучения свойств разностных схем вводится понятие величины шага сетки, в качестве которого принимается какая-либо *сеточная норма* вектора h, например,

$$||h||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i \quad \text{или} \quad ||h||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \right)^{1/2},$$

где n — число независимых переменных в дифференциальной задаче. Чтобы избежать новых и ненужных обозначений, в приводимых ниже оценках под h понимается величина шага сетки.

Если $X \subset Y$ и функция v определена на множестве Y, то ее *следом* на множестве X называют функцию, определенную на X и совпадающую там с v. Если функция v определена на некотором множестве Y, содержащем Y_h, то ее след на Y_h будем обозначать $(v)_h$. Часто пространства F_h, $\varPhi_h$ и U_h определяют как пространства следов функций из F, $\varPhi$ и U на D_h, Γ_h и $\overline{D}_h$ соответственно. При этом задаются *согласованные* нормы пространств, т. е. для достаточно гладких функций $v \in U$ выполняется соотношение

$$\lim_{h \to 0} \| (v)_h \|_{U_h} = \| v \|_U .$$

Все производные, входящие в уравнение и краевые условия, заменяют *разностными аппроксимациями*. При записи этих аппроксимаций в каждом внутреннем узле сетки берут одно и то же количество соседних узлов, образующих строго определенную конфигурацию, называемую *шаблоном*. В результате дифференциальные операторы L и l заменяются разностными L_h и l_h.

Для нахождения приближенного решения задачи (7.1), (7.2) определим *разностную схему* — семейство разностных задач, зависящих от параметра h:

$$L_h u_h = f_h \quad \text{в} \quad D_h , \tag{7.3}$$

$$l_h u_h = \varphi_h \quad \text{на} \quad \Gamma_h . \tag{7.4}$$

Решение разностной схемы u_h, называемое *разностным*, принимается в качестве приближенного решения дифференциальной задачи.

Аппроксимация. Говорят, что разностная схема (7.3), (7.4) *аппроксимирует* с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (7.1), (7.2), если для любых достаточно гладких функций u, f, φ из соответствующих пространств существуют такие постоянные h_0, c_1, p_1, c_2 и p_2, что для всех $h \leqslant h_0$ выполняются неравенства

$$\|L_h(u)_h - (Lu)_h\|_{F_h} + \|(f)_h - f_h\|_{F_h} \leqslant c_1 h^{p_1},$$

$$\|l_h(u)_h - (lu)_h\|_{\varPhi_h} + \|(\varphi)_h - \varphi_h\|_{\varPhi_h} \leqslant c_2 h^{p_2},$$

причем c_1, p_1, c_2 и p_2 не зависят от h.

Выражения, стоящие под знаком норм, называют *погрешностями аппроксимации.*

Оператор L_h из (7.3) *локально аппроксимирует* в точке x_i дифференциальный оператор L из (7.1), если для достаточно гладкой функции $u \in U$ существуют такие положительные постоянные h_0, c и p, не зависящие от h, что при всех $h \leqslant h_0$ справедливо неравенство

$$\left| (L_h(u)_h - (Lu)_h)\big|_{x=x_i} \right| \leqslant c\, h^p \,.$$

Число p при этом называют *порядком* аппроксимации. Аналогично определяют порядок локальной аппроксимации оператора l_h.

Также используется понятие аппроксимации на решении, позволяющее строить схемы более высокого порядка точности на фиксированном шаблоне. Говорят, что разностная схема (7.3), (7.4) *аппроксимирует на решении* u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (7.1), (7.2), если существуют такие постоянные h_0, c_1, p_1, c_2 и p_2, что для всех $h \leqslant h_0$ выполняются неравенства

$$\|L_h(u)_h - f_h\|_{F_h} \leqslant c_1 h^{p_1}, \quad \|l_h(u)_h - \varphi_h\|_{\varPhi_h} \leqslant c_2 h^{p_2},$$

причем c_1, p_1, c_2 и p_2 не зависят от h. Предполагается, что при этом выполнены условия нормировки

$$\lim_{h\to 0} \| f_h \|_{F_h} = \| f \|_F \,, \quad \lim_{h\to 0} \| \varphi_h \|_{\Phi_h} = \| \varphi \|_\Phi \,.$$

Порядки аппроксимаций обычно оценивают с помощью разложения в ряды Тейлора. Порядок аппроксимации разностной схемы может быть разным по разным переменным. Если погрешность аппроксимации стремится к нулю при любом законе стремления шагов по различным переменным к нулю, то такую аппроксимацию называют *безусловной.* Если же погрешность аппроксимации стремится к нулю при одних законах убывания шагов и не стремится к нулю при других, то аппроксимацию называют *условной.*

Устойчивость. Разностная схема (7.3), (7.4) *устойчива*, если решение системы разностных уравнений существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных f_h, φ_h, причем эта зависимость равномерна относительно величины шага сетки. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют не зависящие от h величины h_0 и $\delta = \delta(\varepsilon)$ такие, что для произвольных функций $u_h^{(i)}$, $i = 1, 2$, являющихся решениями (7.3), (7.4), из неравенств $h \leqslant h_0$, $\left\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\right\|_{F_h} \leqslant \delta$, $\left\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\right\|_{\varPhi_h} \leqslant \delta$ следует, что $\left\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\right\|_{U_h} \leqslant \varepsilon$.

Линейная схема устойчива, если

$$\left\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\right\|_{U_h} \leqslant c_1 \left\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\right\|_{F_h} + c_2 \left\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\right\|_{\varPhi_h} ,$$

где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от $h \leqslant h_0$. Это означает, что ε и δ здесь связаны линейно.

Устойчивость называют *безусловной*, если указанные неравенства выполняются при произвольном соотношении шагов по различным переменным. Если же для выполнения неравенств шаги должны удовлетворять дополнительным соотношениям, то устойчивость называют *условной*.

Непрерывную зависимость по f_h (равномерную относительно h) называют устойчивостью *по правой части*, а непрерывную зависимость по φ_h — устойчивостью *по граничным условиям*. Если рассматривается смешанная краевая задача, то устойчивость по граничному условию при $t = t_0$ называют устойчивостью *по начальным данным*.

Сходимость. Решение u_h разностной схемы (7.3), (7.4) *сходится* к решению u дифференциальной задачи (7.1), (7.2), если существуют такие постоянные h_0, c и p, что для всех $h \leqslant h_0$ выполнено неравенство

$$\|(u)_h - u_h\|_{U_h} \leqslant c\, h^p,$$

причем c и p не зависят от h. Число p называют *порядком* сходимости разностной схемы; при этом говорят, что разностное решение u_h имеет порядок точности p.

Теорема Филиппова (о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *операторы L, l и L_h, l_h — линейные;*

2) *решение u дифференциальной задачи* (7.1), (7.2) *существует и единственно;*

3) *разностная схема* (7.3), (7.4) *аппроксимирует дифференциальную задачу* (7.1), (7.2) *с порядком p;*

4) *разностная схема* (7.3), (7.4) *устойчива.*

Тогда решение разностной схемы u_h сходится к решению u дифференциальной задачи с порядком не ниже p.

◁ Операторы L и L_h линейные, поэтому

$$L_h(u_h - (u)_h) = L_h u_h - L_h(u)_h =$$
$$= f_h - L_h(u)_h \pm (Lu)_h = ((Lu)_h - L_h(u)_h) + (f_h - (f)_h)\,.$$

Отсюда имеем уравнение

$$L_h(u_h - (u)_h) = ((Lu)_h - L_h(u)_h) + (f_h - (f)_h)\,.$$

Аналогично для краевых условий находим

$$l_h(u_h - (u)_h) = ((lu)_h - l_h(u)_h) + (\varphi_h - (\varphi)_h)\,.$$

Решение разностной задачи устойчиво, поэтому по определению для линейных задач получаем

$$\|u_h - (u)_h\|_{U_h} \leqslant c_1(\|(Lu)_h - L_h(u)_h\|_{F_h} + \|f_h - (f)_h\|_{F_h}) +$$
$$+ c_2(\|(lu)_h - l_h(u)_h\|_{\Phi_h} + \|\varphi_h - (\varphi)_h\|_{\Phi_h}) \leqslant ch^p\,.$$

Это неравенство означает сходимость с порядком p. Теорема доказана. ▷

Если порядок аппроксимации на решении выше p, то для получения более точной оценки доказательство теоремы можно модифицировать. Для этого в первой системе равенств доказательства не следует добавлять $\pm(Lu)_h$, а применить сразу оценку устойчивости к величине $f_h - L_h(u)_h$ из определения аппроксимации на решении. Аналогичное следует проделать и для краевых условий.

Для многомерных задач порядок аппроксимации по разным переменным может быть неодинаковым, поэтому порядки сходимости по разным переменным также могут быть различными. Если аппроксимация и (или) устойчивость разностной схемы условные, то сходимость имеет место только при тех соотношениях между шагами сетки по разным переменным, при которых выполнены условия аппроксимации и (или) устойчивости. В классе задач с решениями конечной гладкости требование устойчивости является необходимым условием сходимости.

7.2. Методы построения разностных схем

Метод неопределенных коэффициентов. Пусть имеется некоторый шаблон (несколько расположенных группой узлов сетки) и требуется найти разностный оператор L_h, локально аппроксимирующий дифференциальный оператор L в узле x_i. В этом случае в выражении $\left(L_h(u)_h - (Lu)_h \right)\big|_{x=x_i}$ оператор L_h берут с неопределенными коэффициентами. Для нахождения искомых коэффициентов с помощью формулы Тейлора строят разложения в точке x_i для всех значений функции $u(x)$, входящих в выражение $L_h(u)_h$ и группируют множители при $u(x_i), u'(x_i), u''(x_i), \ldots$. Далее, последовательно обнуляя найденные множители, приходят к системе линейных алгебраических уравнений, решая которую находят коэффициенты разностной схемы. Порядок аппроксимации и главный член погрешности определяется после подстановки найденных коэффициентов в первый ненулевой множитель при соответствующей производной функции $u(x)$ в точке x_i.

Рассмотрим пример. Пусть для задачи

$$L\,u \equiv u'' = f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,,\ u(0) = u(1) = 0$$

на равномерной сетке $\overline{D}_h = \{x_i = i\,h,\ i = 0, \ldots, N,\ N\,h = 1\}$ требуется построить схему методом неопределенных коэффициентов на трехточечном шаблоне.

Будем строить оператор L_h в виде

$$(L_h u_h)_i = \frac{a\,u_{i+1} + b\,u_i + c\,u_{i-1}}{h^2}\,.$$

Запишем разложения по формуле Тейлора для достаточно гладкой функции $u(x)$ в точке $x = x_i$:

$$u(x_i \pm h) = u(x_i) \pm h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,u''(x_i) \pm \frac{h^3}{3!}\,u'''(x_i) +$$

$$+ \frac{h^4}{4!}\,u^{(4)}(x_i) \pm \frac{h^5}{5!}\,u^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{6!}\,u^{(6)}(\xi_i^{\pm}).$$

Подставим полученные выражения в формулу для $L_h(u)_h$ и сгруппируем множители при одинаковых производных $u(x)$ (или, что то же самое, — степенях h)

$$L_h(u)_h \,|_{x=x_i} = \frac{1}{h^2}\Big[(a+b+c)u(x_i) + h(a-c)u'(x_i) + \\ + \frac{h^2}{2!}(a+c)u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}(a-c)u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}(a+c)u^{(4)}(x_i) + \\ + \frac{h^5}{5!}(a-c)u^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{6!}\left(a\,u^{(6)}(\xi_i^+) + c\,u^{(6)}(\xi_i^-)\right)\Big].$$

По определению локальной аппроксимации

$$L_h(u)_h \,|_{x=x_i} = u''(x_i) + O(h^p), \quad p > 0,$$

откуда имеем систему уравнений

$$a+b+c=0, \quad a-c=0, \quad \frac{a+c}{2} = 1,$$

решая которую, получим

$$L_h(u)_h \,|_{x=x_i} \equiv \frac{u(x_{i+1}) - 2\,u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12}\,u^{(4)}(x_i) + O(h^4),$$

т.е. L_h локально аппроксимирует оператор второй производной L в точке $x = x_i$ со вторым порядком.

Запишем разностный аналог рассматриваемой задачи:

$$\frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i\,, \quad 0 < i < N\,, \quad u_0 = u_N = 0.$$

Отметим, что здесь u_i — приближение к решению $u(x_i)$.

Интегро-интерполяционный метод. В качестве примера опишем применение этого метода к построению разностной схемы на равномерной сетке $\overline{D}_h = \{x_i = i\,h,\ i = 0,\ldots,N;\ \ N\,h = 1\}$ для задачи

$$L\,u \equiv -u'' + p(x)\,u = f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 \leqslant p(x) \leqslant p_1\,,$$
$$u'(0) = \alpha_1 u(0) + \beta_1\,, \quad u(1) = 0\,.$$

Введем обозначение $\omega(x) = u'(x)$ и перепишем исходное уравнение в виде $\omega'(x) = p(x)\,u(x) - f(x)$. Проинтегрируем в пределах от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$ $(x_{i\pm1/2} = x_i \pm h/2)$:

$$\omega(x_{i+1/2}) - \omega(x_{i-1/2}) = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [p(x)\,u(x) - f(x)]\,dx\,.$$

Полученное равенство служит основой для построения разностных схем. Заменим интеграл в правой части, например, по квадратурной формуле прямоугольников

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + O((b-a)^3).$$

Разделив обе части на h, получим:

$$\frac{\omega(x_{i+1/2}) - \omega(x_{i-1/2})}{h} = p(x_i)u(x_i) - f(x_i) + O(h^2).$$

Так как $u'(x) = \omega(x)$, то на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = h\,\omega(x_{i+1/2}) + O(h^3).$$

Аналогичное выражение

$$u(x_i) - u(x_{i-1}) = h\,\omega(x_{i-1/2}) + O(h^3)$$

справедливо на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому дискретный аналог исходного уравнения принимает вид

$$-\,\frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{h^2} + p_i u_i = f_i\,, \quad 0 < i < N\,,$$

где u_i обозначает приближение к точному решению $u(x_i)$, в то время как $p_i = p(x_i)$ и $f_i = f(x_i)$ — значения известных функций в узлах сетки.

Для аппроксимации краевого условия третьего рода проинтегрируем исходное уравнение от 0 до $\frac{h}{2}$:

$$u'\left(\frac{h}{2}\right) - u'(0) = \int\limits_0^{h/2} [p(x)\,u(x) - f(x)]\,dx\,.$$

Далее опять воспользуемся формулой прямоугольников для интеграла и заменим $u'(0)$ на $\alpha_1 u(0) + \beta_1$, а $u'\left(\frac{h}{2}\right)$ на $\dfrac{u(h) - u(0)}{h} + O(h^2)$. В результате получим

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} - \alpha_1 u_0 - \beta_1 + O(h^2) = \frac{h}{2}\left[p\left(\frac{h}{4}\right)\,u\left(\frac{h}{4}\right) - f\left(\frac{h}{4}\right)\right] + O(h^3)\,.$$

Левая часть равенства содержит слагаемое $O(h^2)$, поэтому в его правой части значения функций в точке $x = \frac{h}{4}$ можно заменить их значениями в точке $x = 0$, сохранив тот же порядок аппроксимации $O(h^2)$. В результате получим

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha_1 u_0 + \beta_1 + \frac{h}{2}\left(p(0)u_0 - f(0)\right)\,.$$

Окончательная разностная схема имеет вид

$$-\,\frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{h^2} + p_i u_i = f_i,\ 0 < i < N,\ \frac{u_1 - u_0}{h} = \overline{\alpha}_1 u_0 + \overline{\beta}_1,\ u_N = 0,$$

где новые коэффициенты принимают значения $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1 + \dfrac{h\,p(0)}{2}$, $\overline{\beta}_1 = \beta_1 - \dfrac{h\,f(0)}{2}$.

Интегральное тождество Марчука. Для задачи

$$L\,u \equiv -(k(x)\,u')' + p(x)\,u = f(x), \quad 0 < x < 1,\ u(0) = u(1) = 0,$$

у которой переменные коэффициенты удовлетворяют условиям $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1$, $0 \leqslant p(x) \leqslant p_1$, и $k(x), p(x), f(x)$ могут иметь конечное число разрывов первого рода, построение разностной схемы основывается на интегральном тождестве, которому удовлетворяет решение исходной задачи

$$-\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}}+\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}+\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}[p(x)\,u-f(x)]dx=$$

$$=-\frac{1}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x}[p(\xi)\,u(\xi)-f(\xi)]d\xi+$$

$$+\frac{1}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}[p(\xi)\,u(\xi)-f(\xi)]d\xi.$$

Докажем это тождество. Введем обозначение $\omega(x)=k(x)\,u'(x)$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$\omega'(x)=p(x)\,u(x)-f(x).$$

Проинтегрируем уравнение от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$ ($x_{i\pm1/2}=x_i\pm h/2$)

$$\omega(x_{i+1/2})-\omega(x_{i-1/2})=\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}[p(x)\,u(x)-f(x)]\,dx.$$

Для нахождения $\omega(x_{i\pm1/2})$ поступим следующим образом. Проинтегрируем уравнение для $\omega'(x)$ от $x_{i-1/2}$ до x

$$k(x)u'(x)=\omega(x_{i-1/2})+\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}[p(\xi)\,u(\xi)-f(\xi)]\,d\xi.$$

Разделим это выражение на $k(x)$ и проинтегрируем от x_{i-1} до x_i. В результате получим

$$u(x_i)-u(x_{i-1})=\omega(x_{i-1/2})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}[p(\xi)\,u(\xi)-f(\xi)]\,d\xi.$$

Отсюда находим явное выражение для

$$\omega(x_{i-1/2})=\frac{1}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}\left\{u(x_i)-u(x_{i-1})-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}[p(\xi)\,u(\xi)-f(\xi)]\,d\xi\right\}.$$

Аналогичное выражение для $\omega(x_{i+1/2})$ найдем, заменив в полученной формуле индекс i на $i+1$. Теперь, используя $\omega(x_{i\pm1/2})$, приходим к искомому интегральному тождеству.

Рассмотрим следующий пример. Пусть коэффициенты в исходном уравнении имеют вид

$$k(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\,,\\ 2 & \text{при}\quad \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad p(x)\equiv 0.$$

Запишем интегральное тождество Марчука:

$$-\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}}+\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}-\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x}f(\xi)d\xi-\frac{1}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x}f(\xi)d\xi.$$

Предположим (для удобства), что точка $x=\frac{1}{2}$ — узел сетки при любом h, т. е. $h=\frac{1}{N}$, $N=2K$. При этом $i=\frac{N}{2}$ — соответствующее значение индекса i. Вычислим величины

$$t_i=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}=\begin{cases} h & \text{при} \quad 0\leqslant i<\frac{N}{2}\,, \\ \frac{h}{2} & \text{при} \quad \frac{N}{2}\leqslant i<N. \end{cases}$$

Заменим по формуле прямоугольников интеграл в левой части тождества

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx\approx h\,f(x_i)\equiv h\,f_i.$$

Теперь рассмотрим выражения в правой части тождества. Одно из них, например,

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x}f(\xi)d\xi,$$

применяя квадратурную формулу прямоугольников, запишем в виде

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x}f(\xi)d\xi=\frac{h}{k(x_{i+1/2})}\int\limits_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}}f(\xi)d\xi+O(h^3)=O(h^3).$$

Множитель при рассматриваемом интеграле в тождестве равен $O(h^{-1})$, поэтому все выражение для гладких функций имеет порядок $O(h^2)$ и его можно отбросить. Аналогично можно поступить и с другим выражением в правой части равенства.

Окончательный результат можно записать так:

$$-\ \frac{a_iu_{i+1}-b_iu_i+c_iu_{i-1}}{h^2}=f_i,\quad 0<i<N\,, u_0=u_N=0,$$

где коэффициенты определяются по следующим формулам:

$$b_i=a_i+c_i,$$

$$a_i=c_i=1 \quad \text{при} \quad 1\leqslant i<\frac{N}{2}\,,$$

$$a_i=c_i=2 \quad \text{при} \quad \frac{N}{2}<i<N,$$

$$a_i=2, c_i=1 \quad \text{при} \quad i=\frac{N}{2}\,.$$

Метод Ритца. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения $Lu = f$ в гильбертовом пространстве U, учитывающем краевые условия. Пусть оператор L является самосопряженным и положительно определенным относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, т. е. $\forall u, v \in U$

$$(Lu, v) = (u, Lv) \text{ и } (Lv, v) \geqslant \delta(v, v),\ \delta > 0.$$

Тогда решение исходной задачи сводят к поиску элемента $u \in U$, минимизирующего функционал

$$J(v) = (Lv, v) - 2\,(f, v) \equiv a(v, v) - 2(f, v),$$

где $a(u, v)$ — билинейная форма, как правило, получаемая в результате интегрирования по частям с учетом краевых условий выражения (Lu, v) для $u, v \in U$.

Чтобы определить приближения к элементу u, строят последовательность конечномерных подпространств $U_h \subset U$ с известными базисами $\{\varphi_j^h, j = 0, 1, \ldots, N\}$ и в каждом U_h находят элемент $u_h = \sum\limits_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j^h$, минимизирующий $J(v)$. Из условий минимума функционала $J(v)$ на элементе $u_h \in U_h$ имеем

$$\frac{\partial J(u_h)}{\partial \alpha_i} = 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

откуда следует система линейных алгебраических уравнений $A\alpha = \mathbf{b}$ для определения вектора коэффициентов α, где $a_{ij} = a\left(\varphi_j^h, \varphi_i^h\right)$, $b_i = \left(f, \varphi_i^h\right)$, $i, j = 0, 1, \ldots, N$. Если последовательность U_h полна в U (т. е. $\forall v \in U$ существует последовательность $\{v_h \in U_h\}$ такая, что $\|v - v_h\|_U \to 0$ при $h \to 0$), то $\lim\limits_{h\to 0} \|u - u_h\|_U = 0$.

В качестве базисных элементов φ_j^h в простейшем случае используются кусочно-линейные функции. Например, для произвольной сетки $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ эти функции имеют вид

$$\varphi_0^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \quad 0 & \text{при} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_N; \end{cases}$$

$$\varphi_N^h(x) = \begin{cases} \quad 0 & \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_{N-1}, \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & \text{при} \quad x_{N-1} \leqslant x \leqslant x_N; \end{cases}$$

$$\varphi_j^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{при} \quad x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j\,, \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{при} \quad x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}\,, \\ \quad 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

для $j = 1, \ldots, N-1$. Если меры носителей базисных функций много меньше меры исходной области (как в рассмотренном случае), то метод Ритца часто называют *методом конечных элементов*.

Воспользуемся методом Ритца для решения дифференциального уравнения

$$L\,u \equiv -(k(x)\,u')' + p(x)\,u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

с краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$ и коэффициентами $k(x) = 1 + x,\ p(x) = 1$.

Возьмем пространство функций

$$U = \left\{ u(x)\ :\ \int_0^1 \left[\left(u'(x)\right)^2 + u^2(x) \right]\, dx < \infty,\ u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

со скалярным произведением $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\, dx$ и поставим в соответствие исходной дифференциальной задаче с краевыми условиями задачу минимизации на пространстве U функционала

$$J(v) = \int_0^1 \left[k(x) \left(v'(x)\right)^2 + p(x)v^2(x) - 2f(x)v(x) \right] dx \equiv a(v, v) - 2(f, v).$$

Определим последовательность конечномерных подпространств $U_h \subset U$ как последовательность линейных оболочек

$$\mathrm{span}\{\varphi_1^h(x), \varphi_2^h(x), \ldots, \varphi_{N-1}^h(x)\}$$

полных наборов кусочно-линейных базисных функций $\varphi_j^h(x) \in U$ на равномерной сетке $(x_{j+1} - x_j = h,\ N\, h = 1)$, и будем искать приближенное решение u_h в виде

$$u_h = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \varphi_j^h.$$

В силу краевых условий $u_h(0) = u_h(1) = 0$ (так как $u_h \in U_h \subset U$) функции φ_0^h и φ_N^h в представлении u_h отсутствуют; поэтому формально можно считать, что соответствующие коэффициенты α_0 и α_N равны нулю.

Найдем выражения для матричных элементов a_{ij} системы $A\alpha = \mathbf{b}$:

$$a_{ij} = a\left(\varphi_j^h, \varphi_i^h\right) = \int_0^1 \left[k(x)(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)' + p(x)\, \varphi_j^h \varphi_i^h \right] dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Так как при $i = 1, 2, \ldots, N-1$

$$(\varphi_i^h)' = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{при} \quad x_{i-1} < x < x_i, \\ -\dfrac{1}{h} & \text{при} \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{при } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

в результате непосредственных вычислений имеем

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{1}{h}\left[1 + \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right] + \dfrac{h}{6} & \text{при} \quad j = i - 1, \\ \dfrac{2}{h}\left[1 + x_i\right] + \dfrac{2h}{3} & \text{при} \quad j = i, \\ -\dfrac{1}{h}\left[1 + \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}\right] + \dfrac{h}{6} & \text{при} \quad j = i + 1, \\ 0 & \text{при остальных } j. \end{cases}$$

Для компонент вектора правой части получим

$$b_i = \left(f, \varphi_i^h\right) = \int\limits_0^1 f\,\varphi_i^h dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\,\varphi_i^h dx \approx f(x_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^h dx = h\,f_i.$$

Разделив обе части уравнения на h, окончательно имеем

$$-\,\frac{a_i\alpha_{i+1} - b_i\alpha_i + c_i\alpha_{i-1}}{h^2} + \frac{\alpha_{i+1} + 4\,\alpha_i + \alpha_{i-1}}{6} = f_i, \quad 0 < i < N,$$

где коэффициенты определяются формулами

$$c_i = 1 + \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\,, \quad a_i = 1 + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\,, \quad b_i = a_i + c_i.$$

Для корректного замыкания системы в ней следует положить, как отмечено выше, $\alpha_0 = \alpha_N = 0$.

Метод Галеркина. В отличие от метода Ритца метод Галеркина не требует самосопряженности и положительной определенности оператора L из задачи $Lu = f,\ u \in U$.

Для нахождения приближенного решения в каждом из конечномерных подпространств U_h отыскивают элемент u_h такой, что для любого $v \in U_h$ справедливо равенство $(Lu_h - f, v) = 0$, которое обычно записывают в более удобной, следующей из интегрирования по частям, форме $a(u_h, v) = (f, v)$. Соответствующие коэффициенты α_j разложения u_h по базису подпространства U_h определяют в результате решения системы уравнений, имеющей тот же вид, что и в методе Ритца. Однако обосновать сходимость метода Галеркина удается для более широкого класса задач.

Рассмотрим применение метода Галеркина для несамосопряженной задачи

$$L\,u \equiv -u'' + r(x)\,u' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

с коэффициентом $r(x) = 3\,x^2$. Определим пространства U, U_h и скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, как в примере на метод Ритца. Решение будем искать в виде

$$u_h = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \varphi_j^h,$$

где неизвестные коэффициенты α_j найдем из системы линейных алгебраических уравнений $A\alpha = \mathbf{b}$, в которой

$$a_{ij} = a\left(\varphi_j^h, \varphi_i^h\right), \quad b_i = \left(f, \varphi_i^h\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Вычислим матричные элементы:

$$a_{ij} = a\left(\varphi_j^h, \varphi_i^h\right) = \int\limits_0^1 \left[(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)' + r(x)\,(\varphi_j^h)'\varphi_i^h\right] dx.$$

Первое слагаемое в этой формуле имеет вид

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)'dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{h} & \text{при} \quad j = i-1, \\ \dfrac{2}{h} & \text{при} \quad j = i, \\ -\dfrac{1}{h} & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad |j-i| > 1. \end{cases}$$

Для второго слагаемого в результате несложных вычислений получаем

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} 3\,x^2(\varphi_j^h)'\,\varphi_i^h dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\,[2\,x_{i-1}^2 + (x_{i-1}+x_i)^2] & \text{при} \quad j = i-1, \\ \qquad h\,x_i & \text{при} \quad j = i, \\ \dfrac{1}{4}\,[2\,x_{i+1}^2 + (x_{i+1}+x_i)^2] & \text{при} \quad j = i+1, \\ \qquad 0 & \text{при} \quad |j-i| > 1. \end{cases}$$

Определив f_i, как в предыдущем примере, запишем окончательный результат в виде

$$-\,\frac{\alpha_{i+1} - 2\,\alpha_i + \alpha_{i-1}}{h^2} + \frac{a_i\alpha_{i+1} + b_i\alpha_i + c_i\alpha_{i-1}}{h} = f_i\,, \quad 0 < i < N,$$

$$\alpha_0 = \alpha_N = 0,$$

где коэффициенты определяют по формулам

$$c_i = -\,\frac{1}{4}\,[2\,x_{i-1}^2 + (x_{i-1}+x_i)^2]\,,$$

$$b_i = h\,x_i, \quad a_i = \frac{1}{4}\,[2\,x_{i+1}^2 + (x_{i+1}+x_i)^2]\,.$$

В случае постоянного коэффициента $r(x) \equiv r$ при производной u' в исходном уравнении, второе слагаемое в левой части линейной системы имеет вид $r\,\dfrac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}{2h}$.

Метод аппроксимации функционала. В этом методе минимизируемый функционал $J(v)$ заменяют приближенным функционалом $J_h(\varphi)$. Пусть на отрезке $[a,b]$ введена сетка $x_i, i = 0, 1, \ldots, N$. Тогда производные в функционале заменяем конечными разностями, а интегралы — квадратурами. Например, используя составную формулу прямоугольников,

$$\text{интеграл} \quad \int\limits_a^b (\varphi')^2\,dx \quad \text{заменяем на} \quad \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right)^2 h.$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации приближенного функционала $J_h(\varphi)$. Разностная схема получается приравниванием к нулю величин $\dfrac{\partial J_h}{\partial \varphi_i}$, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Краевая задача с достаточно гладким решением $u(x)$

$$L\,u \equiv -(k(x)\,u')' + p(x)\,u = f(x),\ 0 < x < 1,$$
$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1,\ 0 \leqslant p(x) \leqslant p_1,\ u(0) = u(1) = 0,$$

эквивалентна задаче отыскания точки минимума $u \in U$ квадратичного функционала

$$J(v) = \int\limits_0^1 \left[k(x)\,(v')^2 + p(x)\,v^2\right] dx - 2\int\limits_0^1 f(x)\,v\,dx.$$

Введем, как и выше, равномерную сетку и на ней аппроксимируем $J(v)$, предварительно записав его в виде

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,(v')^2\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(p(x)\,v^2 - 2\,f(x)\,v)dx.$$

Далее аппроксимируем интегралы по формулам прямоугольников и трапеций соответственно

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,(v')^2\,dx = k(x_{i-1/2})\left(\frac{v(x_i)-v(x_{i-1})}{h}\right)^2 h + O(h^3),$$
$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(p(x)\,v^2 - 2\,f(x)\,v)dx =$$
$$= \frac{h}{2}\left[(p(x_{i-1})v^2(x_{i-1}) - 2f(x_{i-1})v(x_{i-1})) + (p(x_i)v^2(x_i) - 2f(x_i)v(x_i))\right] + O(h^3).$$

Таким образом, вместо $J(v)$ получаем функционал $J_h(\varphi)$:

$$J_h(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} k(x_{i-1/2})\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1}(p_i\varphi_i^2 - 2\,f_i\varphi_i)\,h,$$

где $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ — произвольная сеточная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi_0 = \varphi_N = 0$. Приравнивая к нулю первые производные

$$\frac{\partial J_h(\varphi)}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

получаем искомую разностную схему:

$$-\frac{1}{h}\left(k(x_{i+1/2})\,\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h} - k(x_{i-1/2})\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right) + p_i\varphi_i = f_i,$$
$$0 < i < N,\ \varphi_0 = \varphi_N = 0.$$

Метод сумматорного тождества. Аналогично методу аппроксимации функционала, интегральное тождество $(Lu - f, v) = 0$ для любого $v \in U$ заменяют сумматорным тождеством $(L_h\varphi_h - f_h, v_h) = 0$ для любого $v_h \in U_h$. Так как в конечномерном пространстве размерности $N+1$ векторы $\mathbf{e}_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$ образуют базис (k-я компонента вектора $\mathbf{e}_k$ равна единице, остальные — нулю), то разностная схема получается из системы уравнений

$$(L_h\varphi_h - f_h, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Например, для задачи

$$\begin{gathered} L\,u \equiv -(k(x)u')' + p(x)\,u = f(x), 0 < x < 1, \\ 0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, 0 \leqslant p(x) \leqslant p_1, \\ k(0)\,u'(0) = \alpha_1 u(0) + \beta_1, -k(1)\,u'(1) = \alpha_2 u(1) + \beta_2, \end{gathered}$$

справедливо интегральное тождество

$$I(u,v) \equiv \int\limits_0^1 (k\,u'v' + p\,u\,v - f\,v)\,dx + (\alpha_1 u(0) + \beta_1)v(0) + (\alpha_2 u(1) + \beta_2)v(1) = 0,$$

где $v = v(x)$ — произвольная непрерывная на $[0,1]$ функция, имеющая квадратично-интегрируемую первую производную.

Для построения разностной схемы на равномерной сетке аппроксимируем интегральное тождество сумматорным тождеством для сеточных функций, например,

$$\begin{gathered} I_h(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{N} k(x_{i-1/2}) \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right) \left(\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h}\right) h + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (p_i\varphi_i - f_i)\psi_i\, h + (\overline{\alpha}_1\varphi_0 + \overline{\beta}_1)\psi_0 + (\overline{\alpha}_2\varphi_N + \overline{\beta}_2)\psi_N, \end{gathered}$$

где $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N)$ — произвольная сеточная функция. Коэффициенты $\overline{\alpha}_k$ и $\overline{\beta}_k\,(k=1,2)$ связаны с исходными коэффициентами следующими соотношениями:

$$\overline{\alpha}_1 = \alpha_1 + p_0\,\frac{h}{2}\,, \overline{\beta}_1 = \beta_1 - f_0\,\frac{h}{2}\,,$$

$$\overline{\alpha}_2 = \alpha_2 + p_N\,\frac{h}{2}\,, \overline{\beta}_2 = \beta_2 - f_N\,\frac{h}{2}\,.$$

Форма дополнительных слагаемых зависит от выбора квадратурной формулы для аппроксимации интеграла $\int\limits_0^1 (p\,u - f)\,v\,dx$. В данном случае мы воспользовались составной формулой трапеций, т. е.

$$\begin{gathered} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (p\,u - f)\,v\,dx = \frac{h}{2}\,[(p(x_{i-1})u(x_{i-1}) - \\ - f(x_{i-1}))\,v(x_{i-1}) + (p(x_i)u(x_i) - f(x_i))\,v(x_i)] + O(h^3). \end{gathered}$$

Суммируя по всем $i = 1, \ldots, N$, получаем вторую сумму в $I_h(\varphi,\psi)$, а оставшиеся слагаемые $\frac{h}{2}\,[(p_0\varphi_0 - f_0)\,\psi_0 + (p_N\varphi_N - f_N)\,\psi_N]$ изменят значения α_k и $\beta_k\,(k=1,2)$. Например, при $i=0$ имеем

$$(\alpha_1\varphi_0 + \beta_1)\psi_0 + \frac{h}{2}\,(p_0\varphi_0 - f_0)\,\psi_0 = (\overline{\alpha}_1\varphi_0 + \overline{\beta}_1)\psi_0\,.$$

Полагая теперь $\psi = \mathbf{e}_k$, т. е. $\psi_i = \delta_i^k (0<k<N)$, и учитывая, что

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} = \begin{cases} -\dfrac{1}{h} & \text{при} \quad i=k+1, \\ \dfrac{1}{h} & \text{при} \quad i=k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

при $i=k(0<k<N)$ получаем

$$-\frac{1}{h}\left(k(x_{i+1/2})\,\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h} - k(x_{i-1/2})\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}\right) + p_i\varphi_i = f_i.$$

Далее, если $\psi_i = \delta_i^0$, то имеем

$$k(x_{1/2})\,\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = \overline{\alpha}_1\varphi_0 + \overline{\beta}_1;$$

аналогично при $\psi_i = \delta_i^N$ находим

$$-k(x_{N-1/2})\,\frac{\varphi_N - \varphi_{N-1}}{h} = \overline{\alpha}_2\varphi_N + \overline{\beta}_2.$$

Последние три выражения приводят к системе из $N+1$ уравнения с $N+1$ неизвестным $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, т. е. искомая разностная схема построена.

Метод построения точных разностных схем. Разностную схему называют *точной*, если ее решение совпадает с решением дифференциального уравнения в узлах сетки. На примере уравнения второго порядка

$$-(k(x)u')' = f(x),\, 0<x<1,\, 0<k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \quad u(0)=u(1)=0$$

рассмотрим метод построения точной разностной схемы на равномерной сетке. Воспользуемся тем же подходом, что и в методе интегрального тождества Марчука. Проинтегрируем исходное уравнение по отрезку $[x_i, x]$ и результат разделим на $k(x)$. Имеем

$$u'(x) = \frac{k(x_i)u'(x_i)}{k(x)} - \frac{1}{k(x)}\int_{x_i}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Проинтегрировав последнее равенство по отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ и умножив результаты соответственно на величины $\frac{1}{h}a_i$, $\frac{1}{h}a_{i+1}$, где $a_i = \left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}$, получаем

$$a_i\,\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h} = k(x_i)u'(x_i) - \frac{a_i}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x} f(\xi)d\xi,$$

$$a_{i+1}\,\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h} = k(x_i)u'(x_i) - \frac{a_{i+1}}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int_{x_i}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Исключая $k(x_i)u'(x_i)$, имеем точную схему

$$-\frac{a_{i+1}(u_{i+1}-u_i)-a_i(u_i-u_{i-1})}{h^2}=f_i,$$

где

$$f_i=\frac{1}{h^2}\left(a_{i+1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x}f(\xi)d\xi+a_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x}^{x_i}f(\xi)d\xi\right),$$

а коэффициенты a_i определены выше.

На практике реальная точность схемы определятся точностью вычисления интегралов в полученных формулах.

В случае $k(x)\equiv 1$ коэффициенты $a_i=1$ при всех i, а выражения для f_i принимают вид

$$f_i=\frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x}f(\xi)d\xi dx+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{x}^{x_i}f(\xi)d\xi dx\right).$$

7.1. Справедливы ли следующие равенства:

1) $$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+2h)+u(x)}{2}-2u(x)+\dfrac{u(x)+u(x-2h)}{2}}{h^2},$$

2) $$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+2h)+u(x)}{2}-\dfrac{u(x)+u(x-2h)}{2}}{2h},$$

если $u(x)\in C^{(4)}$?

Ответ: 1) нет; 2) да.

В задачах 7.2–7.7 следует обращать внимание на области определения искомого решения разностного уравнения и его правой части. В некоторых случаях более высокий порядок аппроксимации схемы может быть достигнут в результате выбора смещенных сеток ih и $ih\pm\frac{h}{2}$, $i=0,1,\ldots$.

7.2. Рассмотрим дифференциальную задачу

$$u'+a(x)u(x)=f(x),\quad x\in[0,1],\quad u(0)=0;\quad a(x),\ f(x)\in C^{(4)}[0,1].$$

Считая, что функции u_i и f_i определены в узлах $x_i=ih$, $h=\frac{1}{N}$, $i=0,\ldots,N$, найти порядок аппроксимации на решении разностной схемы:

1) $\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+a_iu_i=f_i$, $0\leqslant i\leqslant N-1$, $\quad u_0=0$;

2) $\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+a_iu_i=f_i$, $1\leqslant i\leqslant N-1$, $\quad u_0=0, u_1=hf_0$,

где $a_i=a(x_i)$, $f_i=f(x_i)$.

Ответ: 1) $O(h)$; 2) $O(h^2)$.

7.3. Рассмотрим дифференциальную задачу

$$u'+a(x)u(x)=f(x), \quad x\in[0,1], \quad u(0)=0; \quad a(x),\, f(x)\in C^{(4)}[0,1].$$

Считая, что функция u_i определена в узлах $x_i=ih$, $h=\frac{1}{N}$, $i=0,\ldots,N$, а функция f_i — в узлах $x_{i+1/2}=\left(i+\frac{1}{2}\right)h$, $i=0,\ldots,N-1$, найти порядок аппроксимации на решении разностной схемы

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+a_i\,\frac{u_{i+1}+u_i}{2}=f_i, \quad u_0=0, i=0,\ldots,N-1,$$

где $a_i=a(x_{i+1/2})$, $f_i=f(x_{i+1/2})$.

Ответ: порядок аппроксимации равен $O(h^2)$; ответ не изменится, если использовать следующие аппроксимации для коэффициента и правой части уравнения: $a_i=\frac{a(x_{i+1})+a(x_i)}{2}$, $f_i=\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}$.

7.4. Для дифференциальной задачи

$$-u''=f(x), \quad x\in[0,1], \quad u(0)=u(1)=0,$$

построить разностную схему второго порядка аппроксимации, которая при каждом h является системой линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей.

Указание. Рассмотреть схему из примера на метод неопределенных коэффициентов, для которой воспользоваться решением 2.86.

7.5. Для дифференциальной задачи

$$-u''=f(x), \quad x\in[0,1],$$
$$u(0)=a, u(1)=b, \quad u\in C^{(4)}[0,1],$$

на трехточечном шаблоне с переменными шагами сетки построить разностные схемы первого и второго порядка аппроксимации на решении.

Ответ: для произвольной неравномерной сетки

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=1, \quad h_i=x_i-x_{i-1}, \quad 1\leqslant i\leqslant N,$$

схема

$$-\frac{2}{h_{i+1}+h_i}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}}-\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right)=f_i, \quad 0<i<N$$

с краевыми условиями $u_0=a$, $u_N=b$ имеет на решении порядок аппроксимации $O(h)$ при $f_i=f(x_i)$ и порядок $O(h^2)$ — при

$$f_i=f(x_i)+\frac{1}{3}\,\frac{h_{i+1}-h_i}{h_{i+1}+h_i}\left(f(x_{i+1})-f(x_{i-1})\right).$$

7.6. Для дифференциальной задачи

$$u'+c\,u=f(x), \quad c=\text{const}, \quad u(0)=a,$$

интегро-интерполяционным методом на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему четвертого порядка аппроксимации.

Ответ: Для приближенного вычисления интеграла по отрезку $[x_{i-1},x_{i+1}]$ использовать формулу Симпсона, а для получения недостающего начального условия $u_1\approx u(h)$ применить формулу Тейлора (необходимые производные при $x=0$ можно получить, дифференцируя уравнение требуемое число раз).

7.7. Для дифференциальной задачи

$$-(k(x)u')'=1, \quad x\in[0,1],$$

$$u(0)=u(1)=0, \quad k(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{при} \quad 0\leqslant x<\frac{1}{4}\,, \\ 1 & \text{при} \quad \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

построить разностную схему с помощью интегрального тождества Марчука, если точка разрыва $k(x)$ является узлом сетки.

7.8. Показать, что для дифференциальной задачи

$$L\,u\equiv-(k(x)u')'+p(x)u=f(x), \quad x\in[0,1], \quad u(0)=u'(1)=0,$$

переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям $0<k_0\leqslant k(x)\leqslant k_1$, $0\leqslant p_0\leqslant p(x)\leqslant p_1$, квадратичная часть $a(v,v)$ функционала $J(v)$ в методе Ритца удовлетворяет оценке снизу

$$a(v,v) = \int\limits_0^1 [k(x)(v'(x))^2 + p(x)v^2(x)]\,dx \geqslant (k_0+p_0)\int\limits_0^1 v^2(x)\,dx \quad \forall v\in U.$$

У к а з а н и е. Вывести неравенство $\int\limits_0^1 v^2(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^1 (v'(x))^2 dx$ для произвольной функции $v(x)\in U$, где

$$U=\left\{u(x)\ :\ \int\limits_0^1 \left[(u'(x))^2+u^2(x)\right]\,dx<\infty,\ u(0)=0\right\}.$$

7.9. Для произвольной функции $v\in U$, где

$$U=\left\{u(x)\ :\ \int\limits_0^1 \left[(u'(x))^2+u^2(x)\right]\,dx<\infty,\ u(0)=u(1)=0\right\}$$

показать справедливость неравенства

$$\int\limits_0^1 v^2(x)dx \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1 (v'(x))^2 dx.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться решением спектральной задачи

$$-w''=\lambda w, \quad w(0)=w(1)=0.$$

7.10. Дана дифференциальная задача

$$\begin{gathered}-u''+c\,u=f(x), \quad x\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0, \quad c=\text{const}.\end{gathered}$$

При каких c для решения этой задачи можно применять метод Ритца?
О т в е т: $c>-\pi^2$.

7.11. Для дифференциальной задачи

$$-u'' + u = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

построить разностную схему методом Ритца, взяв кусочно-линейные функции на равномерной сетке в качестве базисных.

Ответ: Функция $u(x)$ доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \int_0^1 \left((v')^2 + v^2 - 2f(x)v\right) dx$$

на пространстве

$$U = \left\{ u(x) \ : \ \int_0^1 \left[(u'(x))^2 + u^2(x)\right] \, dx < \infty \right\}.$$

7.12. Показать, что для дифференциальной задачи

$$L\,u \equiv -(k(x)u')' + p(x)u = f(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = 0,\ u'(1) + \alpha u(1) = \beta,$$

переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1$, $0 \leqslant p(x) \leqslant p_1$, функционал в методе Ритца имеет вид

$$J(v) = \int_0^1 (k(x)(v'(x))^2 + p(x)v^2(x) - 2f(x)v(x))\, dx +$$
$$+ \alpha k(1)v^2(1) - 2\beta k(1)v(1).$$

Указание. Рассмотреть коэффициент при 2ε в неравенстве $J(u) \leqslant J(u + \varepsilon\, w)$, справедливом при ε любого знака и любом $w \in U$, где

$$U = \left\{ u(x) \ : \ \int_0^1 \left[(u'(x))^2 + u^2(x)\right] \, dx < \infty,\ u(0) = 0 \right\}.$$

7.13. Для дифференциальной задачи

$$-\left(k(x)u'\right)' = 1, \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0, \quad k(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{4}, \\ 2 & \text{при} \quad \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

построить разностную схему методом Ритца, взяв кусочно-линейные функции на равномерной сетке в качестве базисных и считая, что точка разрыва $k(x)$ является узлом сетки.

7.14. Пусть функция $u(x)$ доставляет минимум функционалу

$$J(v) = a(v,v) - 2(f,v) \equiv \int_0^1 \left(k(x)\,(v')^2 + p(x)v^2 - 2f(x)v\right) dx,$$

где переменные коэффициенты удовлетворяют условиям $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1$, $0 \leqslant p(x) \leqslant p_1$, на пространстве

$$U = \left\{ u(x) \ : \ \int\limits_0^1 \left[(u'(x))^2 + u^2(x) \right] \, dx < \infty, \ u(0) = 0 \right\}.$$

Показать справедливость равенства $a(u, v) = (f, v)$ с произвольной функцией $v \in U$.

Если дополнительно функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\left(k(x)\, u'\right)' + p(x)\, u = f(x),$$

т. е. является достаточно гладкой, то краевое условие $u'(1) = 0$ для нее выполняется автоматически (без включения в определение пространства U).

$\lhd$ Если функция u доставляет минимум функционалу $J(v)$ на пространстве U, то для произвольных величин — числа ε и функции $v \in U$ — имеем

$$J(u) \leqslant J(u + \varepsilon v) = J(u) + 2\varepsilon \left[a(u, v) - (f, v) \right] + \varepsilon^2 a(v, v),$$

т. е. $2\varepsilon \left[a(u, v) - (f, v) \right] + \varepsilon^2 a(v, v) \geqslant 0$. В силу произвольности знака ε и положительности величины $a(v, v)$ при $v \neq 0$ (см. 7.8), отсюда следует $a(u, v) = (f, v)$ $\forall v \in U$. Полученное равенство лежит в основе определения *слабого* (или *обобщенного*) *решения* дифференциальной задачи.

Если функция $u(x)$ — достаточно гладкая, то интегрирование по частям дает

$$0 = a(u, v) - (f, v) = \int\limits_0^1 (k(x) u' v' + p(x) u v - f v)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 v \left[-(k(x) u')' + p(x) u - f \right] \, dx + k(1) u'(1) v(1) = k(1) u'(1) v(1).$$

Из этого равенства, в силу произвольности значения $v(1)$ и положительности $k(x)$, следует $u'(1) = 0$. $\rhd$

7.15. Пусть функция $u(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ является решением дифференциальной задачи

$$-\left(k(x)\, u'\right)' + p(x)\, u = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u'(1) = 0,$$

достаточно гладкие переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1$, $0 \leqslant p(x) \leqslant p_1$. Показать, что $u(x)$ доставляет единственный минимум функционалу $J(v) = a(v, v) - 2(f, v)$ на пространстве

$$U = \left\{ u(x) \ : \ \int\limits_0^1 \left[(u'(x))^2 + u^2(x) \right] \, dx < \infty, \ u(0) = 0 \right\}.$$

$\lhd$ Запишем квадратичный функционал, соответствующий исходной задаче,

$$J(v) = a(v, v) - 2(f, v) \equiv \int\limits_0^1 \Big(k(x) \left(v'\right)^2 + p(x) v^2 - 2 f(x) v \Big)\, dx.$$

Функция $u(x)$ принадлежит U, зафиксируем ее и рассмотрим выражение $a(v-u,v-u)-a(u,u)$ как функционал от $v \in U$. Этот функционал имеет единственную точку минимума $v=u$, так как первое слагаемое неотрицательно и в силу 7.8 обращается в нуль только тогда, когда аргумент равен нулю. При этом второе слагаемое от v не зависит.

Раскрывая скобки, получим

$$a(v-u,v-u)-a(u,u)=a(v,v)-2a(u,v)+a(u,u)-a(u,u)=\\ =a(v,v)-2(f,v)\equiv J(v).$$

Выше было использовано равенство $a(u,v)=(f,v)$ из 7.14. ▷

7.16. В задаче

$$-(k(x)\,u')'+p(x)\,u=f(x),\quad x\in[0,1],\quad u(0)=u'(1)=0,$$

переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям $0<k_0\leqslant k(x)\leqslant k_1$, $0\leqslant p(x)\leqslant p_1$, методом Ритца (конечных элементов) построить аппроксимацию краевого условия $u'(1)=0$, используя кусочно-линейные базисные функции на равномерной сетке.

◁ Запишем квадратичный функционал, соответствующий исходной задаче,

$$J(v)=\int\limits_0^1\Big(k(x)\,(v')^2+p(x)v^2-2f(x)v\Big)\,dx,$$

а приближенное решение будем искать в виде

$$u_h=\sum_{j=1}^N \alpha_j\varphi_j^h(x),\quad N\,h=1.$$

Далее подставим u_h в J и рассмотрим систему

$$\frac{\partial J(u_h)}{\partial\alpha_i}=0\,,\quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

Нас интересует последнее уравнение системы (при $i=N$)

$$a\,\alpha_{N-1}+b\,\alpha_N=c,$$

где

$$a=\int\limits_0^1(k(x)\varphi'_{N-1}\varphi'_N+p(x)\varphi_{N-1}\varphi_N)\,dx,$$

$$b=\int\limits_0^1\Big(k(x)\,(\varphi'_N)^2+p(x)\varphi_N^2\Big)\,dx,\quad c=\int\limits_0^1 f(x)\varphi_N dx.$$

Запишем формулу для $\varphi_N(x)$:

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant x_{N-1}=1-h,\\ \dfrac{x-x_{N-1}}{h} & \text{при}\quad x_{N-1}\leqslant x\leqslant x_N=1.\end{cases}$$

Эта базисная функция отлична от нуля только на отрезке $[1-h,1]$, поэтому область интегрирования сужается, т. е. потребуется только часть функции $\varphi_{N-1}(x)$:

$$\varphi_{N-1}(x)=\frac{1-x}{h}\quad\text{при}\quad 1-h\leqslant x\leqslant 1.$$

В случае постоянных коэффициентов $k(x) \equiv k,\ p(x) \equiv p$ величины a, b, c определяются так:

$$a = -\,\frac{k}{h} + \frac{p\,h}{6}\,, \quad b = \frac{k}{h} + \frac{p\,h}{3}\,, \quad c = \int\limits_{1-h}^{1} f(x)\,\frac{x-1+h}{h}\,dx.$$

Для сравнения приведем аппроксимацию второго порядка, построенную интегро-интерполяционным методом:

$$a_1\,u_{N-1} + b_1\,u_N = c_1,$$

где

$$a_1 = -\,\frac{k}{h}\,, \quad b = \frac{k}{h} + \frac{p\,h}{2}\,, \quad c_1 = \frac{h}{2}\,f_N. \qquad \triangleright$$

7.17. Для дифференциальной задачи

$$-\,(k(x)u')' + p(x)\,u = f(x),\ x \in [0,1],\ u'(0) = u(1) = 0,$$

переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям

$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \quad 0 \leqslant p(x) \leqslant p_1,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом аппроксимации функционала.

7.18. Показать, что решение разностной схемы

$$k(x_i)\,\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{k(x_{i+1}) - k(x_{i-1})}{2h}\,\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0,$$

$$0 < i < N, \quad u_0 = 1, \quad u_N = 0, \quad N\,h = 1,$$

построенной на равномерной сетке ($x_i = ih,\ 0 \leqslant i \leqslant N$), не сходится к решению дифференциальной задачи

$$(k(x)u')' = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0$$

в классе положительных кусочно-постоянных коэффициентов

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{при} \quad 0 < x < \xi, \\ k_2 & \text{при} \quad \xi < x < 1, \end{cases}$$

где ξ — иррациональное число, $\xi = x_n + \theta h,\ 0 < \theta < 1$.

$\triangleleft$ Запишем решение дифференциальной задачи

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \quad \alpha_0 = (\delta + (1-\delta)\xi)^{-1}, \\ \beta_0(1-x) & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1, \quad \beta_0 = \delta\alpha_0,\ \delta = \dfrac{k_1}{k_2}\,. \end{cases}$$

Точное решение разностной задачи имеет вид

$$u_i = \begin{cases} 1 - \alpha x_i & \text{при} \quad 0 \leqslant x_i \leqslant x_n, \\ \beta(1 - x_i) & \text{при} \quad x_{n+1} \leqslant x_i \leqslant 1, \end{cases}$$

где коэффициенты α и β можно получить из уравнений в точках x_n (слева от разрыва) и x_{n+1} (справа от разрыва):

$$\beta\,(1 - x_{n+1}) + \alpha\left[x_n + h\,\frac{5\delta - 1}{3\delta + 1}\right] - 1 = 0,$$

$$\beta\left[(1 - x_{n+1}) + h\,\frac{5 - \delta}{3 + \delta}\right] + \alpha x_n - 1 = 0.$$

Отсюда при $\delta = 5$ имеем $\alpha = 0$, $\beta = (1 - x_{n+1})^{-1}$; при $\delta = \frac{1}{5}$ получаем $\beta = 0, \quad \alpha = x_n^{-1}$. Здесь переход к пределу при $h \to 0$ (т. е. $x_n, x_{n+1} \to \xi$) не приводит к решению дифференциального уравнения.

В остальных случаях удобно представление $\beta = \mu\alpha$, где

$$\alpha = \left(\mu + (1-\mu)x_n + h\,\frac{5\delta - 1}{3\delta + 1} - h\mu\right)^{-1}, \ \mu = \frac{(3+\delta)(5\delta-1)}{(5-\delta)(3\delta+1)}\,.$$

Доопределив сеточную функцию u_i линейно между узлами, получим непрерывную функцию $\tilde{u}(x,h)$, совпадающую с u_i в узлах x_i. Найдем

$$\lim_{h\to 0} \tilde{u}(x,h) = \begin{cases} 1 - \alpha_1 x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \beta_1(1-x) & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

При $h \to 0$ имеем

$$\lim_{h\to 0} \alpha = \alpha_1 = (\mu + (1-\mu)\xi)^{-1}, \quad \lim_{h\to 0} \beta = \beta_1 = \mu\alpha_1.$$

Совпадение коэффициентов α_1 с α_0 и β_1 с β_0 возможно только в случае равенства $\mu = \delta$, эквивалентного уравнению $(\delta - 1)^3 = 0$, т. е. только при $k_1 = k_2$. ▷

7.19. Для дифференциальной задачи

$$-\,(k(x)u')' = 1, \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0, \quad k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{5}\,, \\ \frac{1}{3} & \text{при } \frac{\pi}{5} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно-линейные функции на равномерной сетке в качестве базисных.

7.20. Для дифференциальной задачи

$$-u'' + a\,u' + p\,u = 1, \quad x \in [0,1],$$
$$a = \text{const},\ p = \text{const} \geqslant 0, \quad u(0) = u(1) = 1,$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно-линейные функции в качестве базисных.

7.21. Для дифференциальной задачи

$$-\,(k(x)u')' + a(x)\,u' + p(x)\,u = f(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

переменные коэффициенты которой удовлетворяют условиям

$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \quad |a(x)| \leqslant a_1, \quad 0 \leqslant p(x) \leqslant p_1,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом сумматорного тождества.

7.22. Привести пример последовательности сеточных функций $\{\varphi_i^h\}, i = 0, 1, \ldots, N, \ N h = 1$ из семейства пространств $\{U_h\}$, которая сходилась бы при $h \to 0$ к некоторой функции $u \in U$, если $\|\varphi^h\| = \left(h \sum\limits_{i=0}^{N} (\varphi_i^h)^2\right)^{1/2}$, и расходилась, если $\|\varphi^h\| = \max\limits_i |\varphi_i^h|$.

О т в е т: $u(x) = 1, \quad \varphi_i^h = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \neq 0, \\ 1 + h^{-1/4} & \text{при} \quad i = 0. \end{cases}$

7.23. Сходится ли последовательность сеточных функций $\{\varphi_i^h\}$, $i = 0, 1, \ldots, N, N h = 1$, в норме $\|\varphi^h\| = \max\limits_i |\varphi_i^h|$ к функции $u(x)$ и с каким порядком, если

$$\varphi_i^h = \frac{1}{2}\left(u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right), \ \varphi_0^h = u(0), \ \varphi_N^h = u(1), \ x_i = ih\,,$$

а $u(x)$ принадлежит одному из пространств $C^{(k)}$, $k \geqslant 0$? Существуют ли функции $u(x)$, к которым $\{\varphi_i^h\}$ сходится с бесконечным порядком?

О т в е т: порядок сходимости равен: $o(1)$ при $u \in C$, $O(h)$ при $u \in C^{(1)}$, $O(h^2)$ при $u \in C^{(k)}, k \geqslant 2$. Если $u(x) = \text{const}$, то порядок сходимости — бесконечный.

7.24. Для дифференциальной задачи

$$- (k(x)u')' = f(x), \quad x \in [0, 1],$$
$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

построить на равномерной сетке схему четвертого порядка аппроксимации, заменяя в точной разностной схеме значения интегралов приближенными.

7.25. (Проекционная теорема в методе Ритца). Пусть u — точка минимума функционала $J(v) = (Lv, v) - 2(v, f) \equiv a(v, v) - 2(v, f)$ на U, U_h — замкнутое подпространство U. Доказать, что:

1) функция $u_h \in U_h$, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$a(u_h, z_h) = (f, z_h) \quad \forall z_h \in U_h\,.$$

В частности, если U_h совпадает с U, то $a(u, z) = (f, z) \ \ \forall z \in U$;

2) точка минимума u_h есть проекция u на U_h по отношению к энергетическому скалярному произведению $a(u, v)$ или, что то же, ошибка $u - u_h$ ортогональна U_h:

$$a(u - u_h, z_h) = 0 \quad \forall z_h \in U_h;$$

3) минимум $J(z_h)$ и минимум $a(u - z_h, u - z_h)$, где z_h пробегает подпространство U_h, достигаются на одной и той же функции u_h, так что

$$a(u - u_h, u - u_h) = \min_{z_h \in U_h} a(u - z_h, u - z_h).$$

$\lhd$ 1) Если u_h минимизирует $J(v)$ на U_h, то для произвольных $\varepsilon \in \mathbf{R}^1$ и $z_h \in U_h$ имеем

$$I(u_h) \leqslant I(u_h + \varepsilon\, z_h) = I(u_h) + 2\varepsilon[a(u_h, z_h) - (f, z_h)] + \varepsilon^2 a(z_h, z_h).$$

Отсюда получаем

$$0 \leqslant 2\varepsilon[a(u_h, z_h) - (f, z_h)] + \varepsilon^2 a(z_h, z_h).$$

Так как ε может иметь любой знак, а второе слагаемое строго положительно, то $a(u_h, z_h) = (f, z_h)$. В частности, если U_h совпадает с U, то имеем $a(u, z) = (f, z) \quad \forall z \in U$.

2) Второе утверждение следует из первого. Вычитая первое из полученных равенств из второго, так как $z_h \in U_h \subset U$, получим

$$a(u - u_h, z_h) = 0 \quad \forall z_h \in U_h.$$

3) Рассмотрим следующее выражение для произвольного z_h:

$$a(u - u_h - z_h, u - u_h - z_h) = a(u - u_h, u - u_h) - 2a(u - u_h, z_h) + a(z_h, z_h).$$

В силу предыдущего утверждения, второе слагаемое равно нулю, а третье неотрицательно, поэтому имеем

$$a(u - u_h, u - u_h) \leqslant a(u - u_h - z_h, u - u_h - z_h) \quad \forall z_h \in U_h.$$

Это неравенство обращается в равенство только при $a(z_h, z_h) = 0$, т. е. при $z_h = 0$, поэтому

$$a(u - u_h, u - u_h) = \min_{z_h \in U_h} a(u - z_h, u - z_h).$$

Существование и единственность $u_h \in U_h$ следует из замкнутости U_h. Если последовательность $v_h^n \in U_h$ фундаментальная, т. е. $a(v_h^n - v_h^m, v_h^n - v_h^m)$ стремится к нулю при $n, m \to \infty$, то существует элемент $v_h \in U_h$, для которого справедливо $a(v_h^n - v_h, v_h^n - v_h) \to 0$ при $n \to \infty$. Это имеет место всегда, если пространство U_h конечномерно. $\rhd$

7.26. Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет условию

$$\|y''\|^2 = \int\limits_0^1 [y''(x)]^2 dx < \infty \quad \text{и} \quad y_I(x) = \sum_{i=0}^{N} y(x_i)\varphi_i(x)$$

— ее линейный интерполянт, построенный на равномерной сетке $x_i = ih,\ 0 \leqslant i \leqslant N,\ Nh = 1$. Доказать справедливость следующих неравенств

$$\|y' - y_I'\| \leqslant \frac{h}{\pi}\, \|y''\|, \quad \|y - y_I\| \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|y''\|.$$

$\lhd$ Рассмотрим какой-либо отрезок длины h, для простоты удобно взять — $[0, h]$. Построим на нем функцию

$$\Delta(x) = y(x) - y_I(x).$$

По предположению о гладкости $y(x)$ функция $\Delta(x)$ имеет конечный интеграл

$$\int_0^h (\Delta'')^2 dx = \int_0^h (y'')^2 dx < \infty,$$

также выполнены равенства $\Delta(0) = \Delta(h) = 0$, поэтому справедливо представление $\Delta(x)$ в виде ряда Фурье

$$\Delta(x) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \sin\frac{\pi l x}{h}\,.$$

В результате непосредственных вычислений имеем

$$\int_0^h [\Delta'(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\pi l}{h}\right)^2 d_l^2, \quad \int_0^h [\Delta''(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\pi l}{h}\right)^4 d_l^2.$$

Так как $l \geqslant 1$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{\pi l}{h}\right)^2 d_l^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi l}{h}\right)^4 d_l^2\,,$$

поэтому, суммируя по l, получаем

$$\int_0^h [\Delta'(x)]^2 dx \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h [\Delta''(x)]^2 dx = \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h [y'']^2 dx\,.$$

Последнее неравенство справедливо на каждом отрезке длины h, потому суммирование по всем i дает

$$\|y' - y_I'\|^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|y''\|^2.$$

Аналогично получаем

$$\int_0^h [\Delta(x)]^2 dx = \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{\infty} d_l^2 \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \|y''\|^2\,, \text{т. е. } \|y - y_I\| \leqslant \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|y''\|. \qquad \triangleright$$

7.3. Методы прогонки и стрельбы. Метод Фурье

Рассмотрим эффективные методы решения разностных уравнений, основанные на специальных свойствах оператора задачи.

Метод прогонки. Пусть требуется найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0\,, \quad & i &= 0\,, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} &= f_i\,, \quad & 1 &\leqslant i \leqslant N-1\,, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N\,, \quad & i &= N\,, \end{aligned} \tag{7.5}$$

или в векторном виде

$$A\,\mathbf{y} = \mathbf{f}\,,$$