Теорема Ляпунова

Рассмотрим автономную систему ОДУ

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad t > 0, \tag{$*$}$$

где $f(0) = 0$ и $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$. Очевидно, что тождественно нулевое решение $\varphi(t) \equiv 0$ является решением данного уравнения, далее будет его обозначать 0-решение. Теорема Ляпунова позволяет исследовать устойчивость 0-решения. Введем понятие функции Ляпунова
Определение: Функция $H(y)$ определенная в некотором шаре $||y|| < r$ называется функцией Ляпунова если:
1) $H(y) > 0, \quad y \neq 0$ и $H(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$.
2) $H(y) \in C^1(||y|| < r)$.
3) $\langle \nabla H(y(t)), f(y(t)) \rangle < 0$.
3^0) $\langle \nabla H(y(t)), f(y(t)) \rangle \leq 0$.
3^-) $\langle \nabla H(y(t)), f(y(t)) \rangle > 0$.
Выбор между условиями 3), 3^0), 3^-) обусловлен следующими теоремами
Теорема Ляпунова об устойчивости Если существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 1,2,3, тогда 0-решение системы (*) устойчиво.
Теорема Ляпунова об ассимптотической устойчивости Если существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 1,2,3^0, тогда 0-решение системы (*) ассимптотически устойчиво.
Теорема Ляпунова о неустойчивости Если существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 1,2,3^-, тогда 0-решение системы (*) неустойчиво.
Отметим, что данные теоремы носят достаточный характер, то есть если не получается построить функцию Ляпунова, тогда нету гарантии поведения 0-решения. Зачаствую в задачах, функция Ляпунова для систем 2x2 ищется в виде

$$H(x, y) = ax^{2n} + by^{2m}$$

или

$$\tilde{H}(x, y) = x^{2n} + by^{2m}$$

Для 3x3 соответственно 3 слагаемых. Параметры n, m, a, b ищутся из условия типа 3.
Вопрос 1 Какой смысл несет в себе 3 условие, то есть скалярное произведение?
Рассмотрим ряд примеров
Пример 1.
Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Требуется исследовать устойчивость 0-решения. Построим для этого функцию Ляпунова (хотя могли бы использовать и спектральный критерий). Будем искать нашу функцию в виде:

$$H(x,y) = x^2 + by^2,$$

такая функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1,2 в любом шаре. Выбор степеней зачастую исходит из соображений "смешанных слагаемых" в скалярном произведении. Наше скалярное произведение равно

$$\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = 2xy - 2bxy.$$

В качестве b выбираем 1 и тогда скалярное произведение равно 0 и по теореме Ляпунова об устойчивости - 0-решение устойчиво, но не ассмиптотически.

Пример 2.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$$

Требуется исследовать устойчивость 0-решения. Построим для этого функцию Ляпунова. Будем искать нашу функцию в виде:

$$H(x,y) = x^2 + by^4,$$

такая функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1,2 в любом шаре. Наше скалярное произведение равно

$$\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = 4xy^3 - 2x^6 - 4bx - 4by^6 + 4by^8.$$

В качестве b выбираем 1 и тогда скалярное произведение будет меньше 0, но при условии, что шар, в котором мы определяем функцию, будет иметь радиус не больше 1 $(y^6 > y^8)$

$$\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = 4xy^3 - 2x^6 - 4bxy^3 - 4by^6 + 4by^8 = -2x^6 - 4y^6 + 4y^8 < 0.$$

по теореме Ляпунова об ассимптотической устойчивости - 0-решение ассмиптотически устойчиво.

Пример 3.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y^3 \end{cases}$$

Требуется исследовать устойчивость 0-решения. Построим для этого функцию Ляпунова. Будем искать нашу функцию в виде:

$$H(x,y) = x^2 + by^2,$$

такая функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1,2 в любом шаре. Наше скалярное произведение равно

$$\langle \nabla H(x,y), f(x,y)\rangle = 2x^4 - 2xy + 2bxy + 2by^4.$$

В качестве b выбираем 1 и тогда скалярное произведение больше 0. Тогда по теореме Ляпунова о неустойчивости, 0-решение не устойчиво.

Введение в ТФКП. Комплексная плоскоть

Данный раздел будет про геометрию и базовые операции анализа для комплексных чисел. Вспомним, что всякое $z \in \mathbb{C}$ может быть представлено в 2 основных формах: $z = x + iy$ и $z = |z|e^{i\arg(z)}$.
Основные арифметические операции определяются с помощью привычных операций со “скобками” и соотношением $i^2 = -1$:
1. $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$.
2. $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 * \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}$.
5. $\bar{z} = x - iy$.
6. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Приведем ряд определений знакомых из анализа, но примененные к комплексной плоскости.
Неравенство треугольника $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Доказывается по определению.
Окрестность точки Окрестностью (ε-окрестностью) точки z_0 называется множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$ (Шар с центром в z_0 радиуса ε).
Окрестность бесконечно удаленной точки (бесконечности) Множество точек из расширенной комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > M$ (Внешность шара с центром в 0 радиуса M).
На семинарах мы продолжим изучение ТФКП.