1 Исчисление высказываний

1.1 Определение секвенции

Определение

Теперь расширим алфавит логики высказываний, добавив в него символ $\vdash$ и запятую: $\mathcal{A}_{PC} = \mathcal{A}_{prop} \cup \{\vdash, ,\}$. Полученный алфавит $\mathcal{A}_{PC}$ - это алфавит исчисления высказываний.

Определение

Секвенция логики высказываний - это слово алфавита $\mathcal{A}_{PC}$ вида $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \phi_0$ где ϕ_i - формулы для всех $0 \leq i \leq n$, при $n \geq 0$.

Основные виды Секвенций

Существуют следующие типы секвенций:

- $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \phi_0$ - общая секвенция
- $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \perp$ - секвенция, выражающая несовместность формул $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$
- $\vdash \phi_0$ - секвенция, выражающая истинность ϕ_0

1.2 Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний

Аксиомы

1) $\phi \vdash \phi$ 2) $\vdash \top$

Правила вывода

1) $\frac{\Gamma\vdash\phi\ \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}$ (введение $\wedge$)
2) $\frac{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\wedge$)
3) $\frac{\Gamma\vdash(\phi\wedge\psi)}{\Gamma\vdash\psi}$ (исключение $\wedge$)
4) $\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}$ (введение $\vee$)
5) $\frac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}$ (введение $\vee$)
6) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\chi\ \Gamma,\psi\vdash\chi\ \Gamma\vdash(\phi\vee\psi)}{\Gamma\vdash\chi}$ (исключение $\vee$)
7) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\perp}{\Gamma\vdash\neg\phi}$ (введение $\neg$)
8) $\frac{\Gamma,\neg\phi\vdash\perp}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\neg$)
9) $\frac{\Gamma\vdash\phi\ \Gamma\vdash(\phi\to\psi)}{\Gamma\vdash\psi}$ (исключение $\to$)
10) $\frac{\Gamma,\phi\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\phi\to\psi)}$ (введение $\to$)
11) $\frac{\Gamma\vdash\phi,\ \Gamma\vdash\neg\phi}{\Gamma\vdash\perp}$ (введение $\perp$)
12) $\frac{\Gamma\vdash\perp}{\Gamma\vdash\phi}$ (исключение $\perp$)
13) $\frac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma,\psi\vdash\phi}$ (расширение)
14) $\frac{\Gamma_1,\phi,\psi,\Gamma_2\vdash\chi}{\Gamma_1,\psi,\phi,\Gamma_2\vdash\chi}$ (перестановка)

Здесь ϕ, ψ, χ - формулы, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ - последовательности формул.

1.3 Линейное доказательство

Введем следующие обозначения: A_{PC} - множество всех аксиом и R_{PC} - множество всех правил вывода исчисления высказываний.

Определение

Линейное доказательство (или **линейный вывод**) из множества секвенций H в исчислении высказываний - это последовательность секвенций $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ такая, что каждая секвенция s_i:

- аксиома исчисления высказываний, т.е. $s_i \in A_{PC}$
- или $s_i \in H$
- или получена из некоторых секвенций $s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$, по одному из правил вывода, т.е.

$$\frac{s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_k}}{s_i} \in R_{PC}$$

Множество H называется множеством **предпосылок** или **предположений**, и если не указано, то будем считать, что $H = \emptyset$.

1.4 Выводимые секвенции

Определение

Секвенция s называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в исчислении высказываний из множества секвенций H, тогда и только тогда, когда существует линейное доказательство $(s_1, \ldots, s_n)$ из множества предпосылок H, такое, что $s = s_n$. Обозначается следующим образом:

$$H \rhd s$$

Если $H = \emptyset$, то можно писать просто $\rhd s$.

Определение

Формула ϕ называется **выводимой** (или **доказуемой**, **допустимой**) в исчислении высказываний, тогда и только тогда, когда секвенция $\vdash \phi$ может быть выведена из пустого множества предпосылок, т.е. $\rhd \vdash \phi$. Обозначается как $\rhd\phi$.

1.5 Дерево секвенций

Определение

Теперь по индукции определим **дерево секвенций** T, его высоту $h(T)$, корень $r(T)$ и множество листьев $l(T)$.

- секвенция s является деревом, $h(s) = 0$, $r(T) = s$, $l(T) = \{s\}$
- если $T_1, \ldots, T_n$ - деревья, а s - секвенция, то

  $$T = \frac{T_1 \ \ldots \ T_n}{s}$$

  - является деревом:

  - высоты $h(T) = \max(\{h(T_i) | i \leq n\}) + 1$
  - с корнем $r(T) = s$
  - с листьями $l(T) = \cup\{l(T_i) | i \leq n\}$

переход в дереве секвенций T - 'это поддерево высоты 1, т.е. поддерево в T вида: $\frac{s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_n}{s_0}$

1.6 Дерево вывода

Определение

Дерево секвенций T называется **деревом вывода** секвенции s из множества предпосылок H, тогда и только тогда, когда:

1. $r(T) = s$
2. все секвенции из множества листьев $l(T)$ являются аксиомами исчисления высказываний или элементами H, т.е. $l(T) \subseteq H \cup A_{PC}$
3. все переходы $\frac{s_1 \; s_2 \; \dots \; s_n}{s_0}$ из T являются Правилами вывода исчисления высказываний, т.е.
$$\frac{s_1 \; s_2 \; \dots \; s_n}{s_0} \in R_{PC}$$

1.7 Характеризация вывода

Теорема

Для любого множества секвенций H и секвенции s,
$H \triangleright s \Leftrightarrow$ для s существует дерево вывода из предпосылок H.

Доказательство

$\Rightarrow$.
Пусть для s существует линейное доказательство $(s_1, \dots, s_n)$ из предпосылок H. Индукцией по n докажем, что для s существует дерево вывода. Основание индукции: если $n = 1$, то $s = s_1 \in H \cup A_{PC}$ - аксиома или предпосылка, тогда $T = s$ - дерево вывода для s. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $i < n$, т.е. для секвенций $s_1, \dots, s_{n-1}$ существуют деревья вывода $T_1, \dots, T_{n-1}$ с предпосылками H. По индукции линейного доказательства существуют такие $s_{j_1}, \dots s_{j_k}$, что $j_1, \dots, j_k < n$ и $\frac{s_{j_1} \; \dots \; s_{j_k}}{s_n}$ - правило вывода. Тогда
$$\frac{T_{j_1} \; \dots \; T_{j_k}}{s_n}$$
будет деревом вывода для s_n. Обратное включение. $\Leftarrow$.
Пусть существует дерево вывода T для s с предпосылками H. Индукцией по высоте T докажем, что для любого дерева вывода T с предпосылками H его корень линейно доказуем из H. Основание индукции: если

$h(T) = 0$, то $T = s$, следовательно, $s \in H \cup A_{PC}$ - аксиома или предпосылка, тогда s очевидно доказуем из H. Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех деревьев высоты $< n$, $T = \frac{T_1 \ \dots \ T_n}{S}$ - дерево вывода высоты n. Тогда $h(T_i) < n$ для всех $1 \leq i \leq n$, следовательно, все корни $r(T_i) = s_i$ линейно доказуемы из H. Пусть P_i - линейное доказательство s_i. Последний переход в дереве T выглядит следующим образом: $\frac{s_1 \ \dots \ s_n}{s}$ и происходит по какому-либо правилу вывода. Тогда секвенция $P = P_1 \hat{} P_2 \hat{} \dots \hat{} P_n \hat{} s$ будет линейным доказательством s с предпосылками H. $\square$

1.8 пример

Пример выводимой секвенции

$\rhd \phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi)$.

Доказательство

$$\rhd \phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi): \qquad \cfrac{\cfrac{\phi \vdash \phi}{\phi, \psi \vdash \phi}(13) \quad \cfrac{\frac{\psi \vdash \psi}{\psi, \phi \vdash \psi}(13)}{\phi, \psi \vdash \psi}(14)}{\phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi)}(1)$$

1.9 Допустимые правила вывода

Определение

Правило вывода $\frac{s_1, s_2, \dots, s_n}{s_0}$ называется **допустимый** или **выводимым**, тогда и только тогда, когда $\{s_1, \dots, s_n\} \rhd s_0$. Допустимость (выводимость) правила вывода обозначается следующим образом:

$$\rhd \frac{s_1, s_2, \dots, s_n}{s_0}$$

Лемма

Следующие правила вывода допустимы в исчислении высказываний:

1) если $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$, то $\rhd \frac{\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \chi}{\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \chi}$

2) $\rhd \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ 3) $\rhd \frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \chi}{\Gamma_1, (\phi \wedge \psi), \Gamma_2 \vdash \chi}$ 4) $\rhd \frac{\Gamma_1, (\phi \wedge \psi)}{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma}$

5) $\rhd \frac{\Gamma \vdash (\phi \wedge \neg \phi)}{\Gamma \vdash \bot}$ 6) $\rhd \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg \phi \vdash \bot}$ 7) $\rhd \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \neg \psi \vdash \neg \phi}$

8) $\rhd \frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \neg \psi}{\Gamma, \psi \vdash \phi}$

Доказательство

1. Допустимость следует из правил 11, 12 и следующего вывода:

$$\rhd \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi} : \qquad \frac{\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash (\phi \to \psi)}(10) \quad \Gamma, \phi \vdash \phi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}(9)$$

2. Второе правило называется "правилом сечения":

$$\rhd \frac{\Gamma \vdash \phi \ \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} : \qquad \frac{\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\phi \to \psi)}(10) \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}(9)$$

1.10 Закон исключенного третьего

Лемма

$\rhd \vdash (\phi \vee \neg\phi)$

Вывод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \vdash \neg\phi}{\neg\phi \vdash \phi \vee \neg\phi} \quad \neg(\phi \vee \neg\phi), \neg\phi \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \neg\phi \vdash \bot}}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi}}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi} \quad \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg(\phi \vee \neg\phi)}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \bot}}{\vdash (\phi \vee \neg\phi)}$$

1.11 Квази-вывод

Пусть D_{PC} - множество всех выводимых секвенций, и T_{PC} - множество всех допустимых правил вывода.

Определение

Квази-вывод - это вывод в расширенном исчислении: допускается использование выводимых секвенций D_{PC} вместе с аксиомами A_{PC} и допустимыми (т.е. выводимыми) правилами вывода T_{PC} вместе с основными правилами вывода R_{PC}. Обозначим квази-выводимость секвенции s из предпосылок H следующим образом:

$$H \rhd' s$$

Теорема (о квази-выводе)

Для любого множества секвенций H и секвенции s:
$H \rhd' s \iff H \rhd s$.

Доказательство

Следование $\Leftarrow$ очевидно: если $H \rhd s$, то существует вывод из $A_{PC} \subset D_{PC}$ и $R_{PC} \subset T_{PC}$. Обратное включение, пусть $H \rhd' s$. Тогда существует дерево вывода T секвенции s из предпосылок H. Рассмотрим переходы в дереве T. Пусть $p = \frac{s_1,\ldots,s_n}{s_0}$ - переход в T. Теперь индукцией по числу таких переходов m докажем утверждение, что $p \notin R_{PC}$. Основание индукции: если $m = 0$, то все переходы в T выполняются по правилам из R_{PC}, следовательно, $H \rhd s$. Предположим, что $m > 0$ и утверждение верно для всех $k < m$. Рассмотрим некоторый переход $p \notin R_{PC}$. Так как $\rhd p$ доказуемо, существует дерево вывода T_p для s_0 из предпосылок $(s_1, \ldots, s_n)$. Если мы поместим дерево T_p в T вместо перехода p, мы получим новое дерево квази-вывода T', в котором m меньше на 1, следовательно, по предположению индукции, существует дерево вывода T_0 секвенции s из H.$\square$

1.12 Лемма о подстановке

Обозначение

Пусть v - переменная, ψ - формула. Тогда

1. $(\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi_0)^v_\psi \leftrightharpoons (\phi_1)^v_\psi, \ldots, (\phi_n)^v_\psi \vdash (\phi_0)^v_\psi$
2. если H - множество секвенций, то $(H)^v_\psi \leftrightharpoons \{(s)^v_\psi | s \in H\}$
3. $(\frac{s_1 \ldots s_n}{s_0})^v_\psi \leftrightharpoons \frac{(s_1)^v_\psi \ldots (s_n)^v_\psi}{(s_0)^v_\psi}$

Лемма (о подстановке)

Для любой переменной v и формулы ϕ верно следующее:

1. $(A_{PC})^v_\phi \subseteq A_{PC}$
2. $(R_{PC})^v_\phi \subseteq R_{PC}$

Доказательство

Следует из определений A_{PC} и R_{PC}

1.13 Теорема о подстановке

Теорема (о подстановке)

Пусть H - множество секвенций, s - секвенция. Тогда если $H \rhd s$, то для любой переменной v и формулы ϕ верно, что $(H)^v_\phi \rhd (s)^v_\phi$.

Доказательство

Индукция по длине вывода $H \rhd s$ n. Основание индукции. Пусть $n = 1$, тогда $s \in A_{PC} \cup H$. Но $(s)^v_\phi \in A_{PC} \cup (H)^v_\phi$, так как $(A_{PC})^v_\phi \subseteq A_{PC}$. Шаг индукции. Пусть $p = (s_1, \ldots, s_n)$ - линейный вывод секвенции $s = s_n$ из H. Тогда $s_n \in A_{PC} \cup H$, этот случай аналогичен основанию индукции, или существует правило вывода $\frac{s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}}{s_n} \in R_{PC}$, где $j_i < n$ для всех $i \leq k$, затем, пользуясь тем, что $\frac{(s_{j_1})^v_\phi, \ldots, (s_{j_k})^v_\phi}{(s_n)^v_\phi} \in (R_{PC})^v_\phi \subseteq R_{PC}$. Следовательно $(p)^v_\phi = ((s_1)^v_\phi, \ldots, (s_n)^v_\phi)$ - вывод секвенции $(s)^v_\phi = (s_n)^v_\phi$ из $(H)^v_\phi$.