

Тема : Размерность и базисы линейного пространства

1⁰. Определение линейно зависимых и линейно независимых систем элементов векторного пространства. Эквивалентные системы векторов. Число элементов в линейно независимых эквивалентных системах. Максимальные системы векторов. Их эквивалентность. 2⁰. Размерность линейного пространства. Примеры. 3⁰. Базис линейного конечномерного пространства. Теорема о разложении по базису. Теорема о дополнении до базиса. Следствия. 4⁰. Координаты вектора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому, ее свойства. 5⁰. Изоморфизм линейных пространств. Инвариантность размерности при изоморфизме. Теорема об изоморфности векторных пространств одинаковой размерности.

1⁰. Пусть X — это линейное пространство над полем K .

Определение. Векторы v_1, v_2, \dots, v_n из X называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная их линейная комбинация, равная нулю:

$$\exists \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset K : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0,$$

причем $\lambda_j \neq 0$ по крайней мере для одного индекса j .

Любое множество векторов, включающее в себя вектор нуль из пространства X , является линейно зависимым.

Множество векторов, в котором хотя бы два вектора совпадают друг с другом, является линейно зависимым. Например, если $v_1 = v_2$, то соответствующая нетривиальная линейная комбинация имеет вид

$$v_1 - v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n = 0.$$

Определение. Векторы v_1, v_2, \dots, v_n из X называются линейно независимыми, если не существует ни одной равной нулю нетривиальной линейной комбинации этих векторов, то есть

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Множество, состоящее из единственного не равного нулю вектора из пространства X , является линейно независимым.

Теорема. Ненулевые векторы v_1, v_2, \dots, v_n из X , $n \geq 2$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда какой-либо один из них можно представить в виде линейной комбинации всех остальных:

$$\exists j : \quad v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \\ + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n.$$

Если некоторое подмножество системы векторов v_1, v_2, \dots, v_n из X линейно зависимо,

то и все множество векторов v_1, v_2, \dots, v_n линейно зависимо. Если система векторов v_1, v_2, \dots, v_n из X линейно независима, то и любое его подмножество также линейно независимо.

Все утверждения теоремы легко доказать, пользуясь определением линейной независимости. Прodelайте это в качестве упражнения.

Теорема ($s \leq t$). Если каждый из векторов v_1, v_2, \dots, v_s линейно независимой системы является линейной комбинацией некоторых других векторов f_1, f_2, \dots, f_t , то число s векторов в первой из них не может быть больше числа t векторов во второй, $s \leq t$.

Иными словами, если векторы v_1, v_2, \dots, v_s линейно независимы и при этом

$$\{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subset \text{span} \{f_1, f_2, \dots, f_t\},$$

то справедливо неравенство $s \leq t$. Таким образом, в линейной оболочке любого множества из t векторов пространства X не может существовать $(t + 1)$ -го линейно независимого вектора.

На линейном пространстве X вводится отношение эквивалентности. Именно, два множества векторов считаются *эквивалентными* друг другу, если каждый вектор одной си-

системы является линейной комбинацией векторов второй из них.

Из этого определения и теоремы ($s \leq t$) следует, что *любые две эквивалентные системы линейно независимых векторов пространства X содержат одинаковое число элементов.*

Отметим, что эквивалентные линейно зависимые системы могут содержать разное

число векторов. Если есть две эквивалентные системы векторов, то обе они могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми. Может также оказаться, что одна из этих систем линейно зависимая, а другая — нет.

Определение. *Линейно независимая система векторов пространства X называется максимальной, если при добавлении к ней любого ненулевого вектора из X она становится линейно зависимой.*

Лемма. Любые две максимальные системы векторного пространства эквивалентны друг другу.

Доказательство. Рассмотрим две максимальные системы, задаваемые равенствами

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \quad \text{и} \quad F = \{f_1, f_2, \dots, f_t\}.$$

Взяв элемент v_1 из V , добавим его к множеству F . В результате получим линейно зависимую систему. Следовательно, существует

равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов вида

$$\mu v_1 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_t f_t = 0.$$

Среди коэффициентов этой линейной комбинации по крайней мере один не равен нулю. Заметим, что в качестве такого ненулевого коэффициента можем взять μ . В самом

деле, если предположить, что $\mu = 0$, то получим равенство

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_t f_t = 0,$$

в котором какой-то коэффициент λ_j обязательно не равен нулю: по условию комбинация нетривиальна. Полученное равенство противоречит условию линейной независимости векторов множества F . Таким обра-

зом, $\mu \neq 0$ и имеет место равенство

$$v_1 = -(\mu^{-1}\lambda_1)f_1 - (\mu^{-1}\lambda_2)f_2 - \cdots - (\mu^{-1}\lambda_t)f_t.$$

Это означает, что вектор v_1 принадлежит линейной оболочке множества F . Аналогично устанавливается, что любой вектор v_j из V также принадлежит $\text{span } F$. Следовательно, справедливо вложение

$$\text{span } \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subset \text{span } \{f_1, f_2, \dots, f_t\}.$$

Обратное вложение

$$\text{span} \{f_1, f_2, \dots, f_t\} \subset \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$$

устанавливается аналогично.

Таким образом, линейные оболочки множеств V и F совпадают друг с другом, то есть эти два максимальных множества векторного пространства друг другу эквивалентны. □

В частности, как это следует из леммы ($s \leq t$), любые две максимальные системы векторов

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \quad \text{и} \quad F = \{f_1, f_2, \dots, f_t\},$$

линейного пространства, будучи эквивалентными, состоят из одинакового числа элементов: $s = t$.

2⁰. Пусть X — это линейное пространство над полем K . Тогда мыслимы следующие две взаимоисключающие возможности:

1) В пространстве X существуют линейно независимые системы векторов с *любым наперед заданным числом элементов*;

2) Все достаточно большие системы векторов в X линейно зависимы, то есть существует такое натуральное число N , что любое подмножество $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subset X$ состоит из линейно зависимых векторов.

В первом из этих случаев говорят, что *линейное пространство X бесконечномерно*, используя для обозначения этого факта следующую запись: $\dim X = +\infty$.

В противном случае пишут $\dim X < +\infty$, и говорят при этом, что *линейное пространство X конечномерно*.

Всюду далее мы будем рассматривать именно конечномерные векторные пространства,

имея в виду, что в линейной алгебре имеют дело исключительно с ними.

Если конечномерное линейное пространство X не является нульмерным, $X \neq \{0\}$, то в нем *существует по крайней мере одна максимальная система*.

В самом деле, если $v_1 \neq 0$ — это любой ненулевой вектор из X , то одноэлементное мно-

жество $\{v_1\}$ линейно независимо. Далее, найдем какой-нибудь вектор $v_2 \in X$, линейно независимый с предыдущим вектором v_1 .

Может оказаться, что $v_2 \in X$ с указанным свойством не существует. Тогда искомая максимальная система в X состоит ровно из одного элемента, то есть совпадает с множеством $\{v_1\}$.

В противном случае рассмотрим множество $\{v_1, v_2\}$ из двух линейно независимых векторов и найдем какой-нибудь вектор $v_3 \in X$, линейно независимый с $\{v_1, v_2\}$.

Если вектор $v_3 \in X$ с указанным свойством не существует, то искомая максимальная система в X — это множество $\{v_1, v_2\}$.

В противном случае следует рассмотреть линейно независимое множество $\{v_1, v_2, v_3\}$ и

по индукции продолжить затем построение максимальной системы.

Следует отметить, что в силу определения конечномерного пространства указанный процесс построения максимального множества обязательно завершится через конечное число шагов. Его итогом как раз и станет некоторая максимальная система векторов в пространстве X .

Определение. *Линейное пространство X , в котором любая максимальная система состоит в точности из n векторов, называется n -мерным. При этом n называют размерностью пространства X и пишут $\dim X = n$.*

По уже доказанному любая максимальная система векторов из заданного конечномерного пространства состоит из одного и того же числа элементов. Таким образом, данное

выше определение размерности пространства корректно.

Единственный пример линейного пространства, в котором нет ни одной максимальной системы векторов, это множество $X = \{0\}$, состоящее из единственного нулевого элемента. Как уже отмечалось, в этом случае пространство называют нульмерным, то есть полагают $\dim X = 0$.

Данное определение размерности пространства хорошо согласуется с уже известной нам терминологией: числовую прямую называют одномерным вещественным пространством, плоскость — двумерным, а физическое пространство \mathbb{R}^3 — трехмерным.

Вещественное пространство \mathbb{R}^n имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Максимальную систему

в \mathbb{R}^n образуют следующие векторы:

$$(1, 0, 0, \dots, 0), \quad (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Здесь единица из поля \mathbb{R} занимает поочередно все возможные координатные позиции.

Пространство \mathbb{P}_n полиномов от независимой переменной t , степень которых не превосходит $n - 1$, имеет размерность $\dim \mathbb{P}_n = n$. Мак-

симальную систему в \mathbb{P}_n образуют мономы

$$1, \quad t, \quad t^2, \quad t^3, \quad \dots, \quad t^{n-1}.$$

Пространство $C(a, b)$ функций, непрерывных на интервале (a, b) , бесконечномерно и по этой причине в линейной алгебре не рассматривается.

Линейное пространство $M_n(K)$ квадратных матриц размера $n \times n$ над полем K имеет размерность $\dim M_n(K) = n^2$.

В этом можно убедиться, расположив элементы произвольной матрицы из $M_n(K)$ в одну строку: сначала элементы первой строки, затем элементы второй и так до элементов последней строки включительно. В результате получим вектор-строку длины n^2 .

Таким образом, линейное пространство $M_n(K)$ и координатное пространство K^{n^2} находятся во взаимно однозначном соответствии и по этой причине размерности участников этого соответствия обязаны совпадать, то есть

$$\dim M_n(K) = \dim K^{n^2} = n^2.$$

3⁰. В любом конечномерном линейном пространстве X , $\dim X = n$, важную роль играют максимальные системы его векторов.

Определение. Любая система из n линейно независимых векторов пространства X , где $n = \dim X$, называется базисом этого пространства.

Удобно считать, что базис нульмерного пространства — это пустое множество. Существование же базиса в конечномерном линейном пространстве X , размерность которого $\dim X \geq 1$, следует из существования в

нем по меньшей мере одной максимальной системы и из самого определения размерности.

Теорема (о разложении по базису). Пусть в линейном пространстве X над полем K задан базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Тогда каждый вектор из X можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2, \dots, e_n .

Доказательство. Пусть v — произвольный вектор из X . Добавив его к исходному базису, рассмотрим множество

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, v\}.$$

В нем $n + 1$ элемент и по определению размерности $\dim X$ это множество должно быть линейно зависимым, то есть существует равная нулю нетривиальная линейная комбина-

ция элементов этого множества:

$$\exists \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n : \quad \mu v + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Заметим, что в этом равенстве $\mu \neq 0$ (в противном случае имеем соотношение

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

из которого в силу линейной независимости векторов e_1, e_2, \dots, e_n следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Это означает, что рассматриваемая линейная комбинация тривиальна, что противоречит ее выбору).

Таким образом, $\mu \neq 0$ и, следовательно, имеет место равенство

$$v = -(\mu^{-1}\lambda_1)e_1 - (\mu^{-1}\lambda_2)e_2 - \dots - (\mu^{-1}\lambda_n)e_n.$$

Это и есть искомое разложение исходного вектора v по векторам базиса $B = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Докажем теперь, что разложение произвольного вектора v из X по заданному базису единственно. Пусть

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

и одновременно справедливо другое представление

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n.$$

Тогда, учитывая, что $v + (-v) = 0$, и подставляя в это равенство оба предыдущих разложения, получим

$$(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + (\lambda_2 - \mu_2)e_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0.$$

Коэффициенты этой равной нулю линейной комбинации векторов базиса должны быть нулевыми:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0.$$

Это и означает, что разложение вектора v по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ единственно. \square

Теорема (о дополнении до базиса). В линейном пространстве X над полем K любую систему из s линейно независимых векторов, $1 \leq s < n$, можно дополнить до базиса пространства X .

Доказательство. Пусть $1 \leq s < n$ и имеется система $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ линейно независимых век-

торов из X . Рассмотрим следующее объединение этой системы с каким-либо базисом пространства X :

$$\{f_1, f_2, \dots, f_s, e_1, e_2, \dots, e_n\}. \quad (\text{I})$$

В этом множестве всего $s + n$ элементов. Преобразуем его следующим образом.

Если последний вектор e_n цепочки (I) линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из (I). В противном

случае оставляем e_n в цепочке и переходим к рассмотрению вектора e_{n-1} .

Если вектор e_{n-1} цепочки линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из (I). Иначе оставляем e_{n-1} в цепочке и переходим к рассмотрению вектора e_{n-2} .

Завершим реконструкцию множества (I), рассмотрев в заключение вектор e_1 . Если вектор e_1 цепочки линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из (I). Иначе оставляем e_1 в цепочке и завершаем процесс.

Далее заметим, что ни один из векторов f_j не выражается линейно через предыдущие векторы f_1, f_2, \dots, f_{j-1} в силу линей-

ной независимости этих векторов. Преобразованное таким образом множество будет иметь следующий вид

$$\{f_1, f_2, \dots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}\}. \quad (I')$$

Всего в преобразованном множестве $s + t$ элементов.

Предположим, что какая-то нетривиальная линейная комбинация преобразованного мно-

жества (I') равна нулю:

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = 0.$$

Тогда среди скаляров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ имеется хотя бы один ненулевой (в противном случае имеем равенства

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0,$$

справедливые в виду линейной независимости векторов f_1, f_2, \dots, f_s . Это противоре-

чит предположению, что рассматриваемая линейная комбинация нетривиальна).

Таким образом, множество номеров

$$\{j \mid \beta_j \neq 0\}$$

не пустое. Выберем в нем максимальный номер k . Тогда $\beta_k \neq 0$, а $\beta_{k+1} = \dots = \beta_t = 0$. Равенство нулю рассматриваемой линейной ком-

бинации принимает в этом случае следующий вид:

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \cdots + \beta_k e_{i_k} = 0,$$

где $\beta_k \neq 0$. Из этого равенства последний элемент e_{i_k} линейно выражается через все предыдущие:

$$e_{i_k} = -(\beta_k^{-1} \alpha_1) f_1 - \cdots - (\beta_k^{-1} \alpha_s) f_s - \\ - (\beta_k^{-1} \beta_1) e_{i_1} - \cdots - (\beta_k^{-1} \beta_{k-1}) e_{i_{k-1}}.$$

Но противоречит самому построению системы (I') .

Следовательно, не может существовать никакая нетривиальная линейная комбинация со свойством

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = 0.$$

Таким образом, доказано, что преобразованная система векторов

$$\{f_1, f_2, \dots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}\}$$

линейно независима.

Заметим, что векторы исходной системы (I) линейно выражаются через векторы преобразованной системы (I'), как это следует из определения последней.

Но исходная цепочка (I) включает в себя базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства X .

По векторам этого базиса однозначно раскладывается любой вектор v из X .

Следовательно, любой вектор v из X представим линейной комбинацией векторов из цепочки (I').

По этой причине система векторов (I') не только линейно независима, но и максимальна. Это по определению означает, что векторы

$$\{f_1, f_2, \dots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}\}$$

образуют базис пространства X . В частности, имеет место равенство $s + t = n$. □

В качестве следствия доказанной теоремы отметим, что всякий ненулевой вектор конечномерного пространства X можно включить в базис этого пространства.

Еще одно следствие: если X_1 и X_2 — это линейные подпространства в X и при этом $X_1 \subset X_2$, $X_1 \neq X_2$, то $\dim X_1 < \dim X_2$.

4⁰. Пусть есть базис

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

конечномерного линейного пространства X
над полем K .

По теореме о разложении по базису любой
вектор v из пространства X однозначно пред-
ставим в виде линейной комбинации векто-

ров базиса B , то есть в виде

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \quad (E_v)$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — это скаляры из поля K .

Определение. Скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в разложении (E_v) называются координатами вектора v в базисе B .

Координаты суммы векторов в заданном базисе получаются сложением координат слагаемых. При умножении вектора на скаляр

его координаты также умножаются на тот же самый скаляр.

Пример. В пространстве полиномов \mathbb{P}_n степени $\leq n - 1$ стандартный базис образуют мономы

$$e_0 = 1, \quad e_1 = t, \quad e_2 = t^2, \quad \dots, \quad e_{n-1} = t^{n-1}.$$

В этом базисе координаты полинома

$$f(t) = a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

совпадают с его коэффициентами

$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1).$$

5⁰. Пусть X — конечномерное линейное пространство над полем K и есть два его базиса

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ и } B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}.$$

Каждый из векторов базиса B' однозначно представим в виде некоторой линейной ком-

бинации векторов базиса B , то есть справедливы следующие равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \vdots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array} \right. . \quad (B'B)$$

Из коэффициентов разложений $(B'B)$ составим следующую квадратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}). \quad (\text{MT})$$

Обратите внимание, что координатами вектора e'_j в базисе B служат элементы *столбца с номером j* матрицы A , задаваемой равенством (MT).

Определение. Матрица A , задаваемая равенством (MT), называется матрицей перехода от базиса B к базису B' .

Пусть вектор v из пространства X представлен в виде линейной комбинации векторов базиса B' , то есть в виде

$$v = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \cdots + \lambda'_n e'_n.$$

Подставляя в правую часть разложения векторов e'_j , $j = 1, 2, \dots, n$, по векторам базиса B , получаем равенство

$$\begin{aligned} v = & \lambda'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \\ & + \lambda'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots + \\ & + \lambda'_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Записывая выражение в правой части в виде

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$

и пользуясь однозначностью разложения вектора \mathbf{v} по базису \mathbf{B} , получаем правило преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = a_{11}\lambda'_1 + a_{12}\lambda'_2 + \cdots + a_{1n}\lambda'_n \\ \lambda_2 = a_{21}\lambda'_1 + a_{22}\lambda'_2 + \cdots + a_{2n}\lambda'_n \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \cdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \lambda_n = a_{n1}\lambda'_1 + a_{n2}\lambda'_2 + \cdots + a_{nn}\lambda'_n \end{array} \right. . \quad (\lambda\lambda')$$

Эти же соотношения можем записать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}. \quad (\lambda\lambda')$$

Введем обозначения

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda}' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}).$$

Тогда соотношения $(\lambda\lambda')$ можно записать совсем коротко:

$$\vec{\lambda} = A\vec{\lambda}'.$$

Говорят, что формулы $(\lambda\lambda')$ выражают старые координаты $\vec{\lambda}$ через его же новые координаты при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A .

Базисы B и B' в только что проведенных рассуждениях можно поменять местами. При

этом получим аналогичную систему равенств

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (\lambda' \lambda)$$

Соотношения $(\lambda' \lambda)$ в матричном виде записываются следующим образом:

$$\vec{\lambda}' = A' \vec{\lambda}.$$

Формулы $(\lambda' \lambda)$ выражают новые координаты

ты $\vec{\lambda}'$ через его же старые координаты при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A' .

Заметим, что преобразования $(\lambda' \lambda)$ и $(\lambda \lambda')$ взаимно обратны. Следовательно, для любой пары векторов $\vec{\lambda}'$ и $\vec{\lambda}$ из n -мерного координатного пространства справедливы равенства

$$\vec{\lambda}' = A' \vec{\lambda} = A' A \vec{\lambda}' \quad \Rightarrow \quad A' A = E;$$

$$\vec{\lambda} = A\vec{\lambda}' = AA'\vec{\lambda} \Rightarrow AA' = E.$$

При этом говорят, что и матрицы A и A' также взаимно обратны, то есть удовлетворяют равенствам

$$A'A = AA' = E \Leftrightarrow A' = A^{-1}, A = (A')^{-1}.$$

Теорема (о матрице перехода). Матрица перехода A от базиса B линейного пространства к базису B' этого же пространства обратима. Координаты вектора в новом базисе

B' выражаются через его же координаты в старом базисе по формуле $\vec{\lambda}' = A^{-1}\vec{\lambda}$.

5⁰. Использование координат позволяет свести операции над векторами к действиям со скалярами. Выбор разумной системы координат, то есть базиса, существенно упрощает выкладки.

В частности, координатные системы используются при отождествлении векторных пространств одинаковой размерности.

Определение. *Линейные пространства X и Y над полем K называются изоморфными друг другу, если существует биективное отображение $f : X \mapsto Y$, для которого справедливы равенства*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \quad (\text{L}_f)$$

где α, β — произвольные скаляры из K , а u, v — произвольные векторы из X . Отображение $f : X \mapsto Y$ при этом называют изоморфизмом векторных пространств X и Y .

Равенства (L_f) формулируют также следующим образом: отображение $f : X \mapsto Y$ — это изоморфизм аддитивных групп векторных

пространств X и Y , обладающий дополнительным свойством однородности

$$f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall \alpha \in K, \forall u \in X.$$

Любое отображение $f : X \mapsto Y$ со свойством (L_f) называют линейным отображением над полем K .

По определению, изоморфизм $f : X \mapsto Y$ — это взаимно однозначное отображение. Следовательно, существует обратное к нему отображение $f^{-1} : Y \mapsto X$. Это обратное отображение также является изоморфизмом.

Размерность векторного пространства не меняется при его изоморфном отображении на другое пространство: если $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

— базис пространства X , то его образ

$$f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

при изоморфном отображении $f : X \mapsto Y$ образует базис в пространстве Y . Докажите это самостоятельно.

Говорят также, что размерность векторного пространства — это *инвариант* любого изоморфизма этого пространства.

Таким образом, если векторные пространства X и Y изоморфны, то их размерности совпадают: $\dim X = \dim Y$.

Теорема (об изоморфизме). *Конечномерные векторные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.*