Тема : Разностный метод. Основные понятия теории разностных схем

$\mathbf{1^0}$. Модельная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке. Разбиение отрезка, узлы, сетка, шаг сетки. Пространства сеточных функций, нормы в этих пространствах. $\mathbf{2^0}$. Разностные операторы, примеры. Модельная разностная схема. Аппроксимация разностным оператором дифференциального, порядок аппроксимации. $\mathbf{3^0}$. Модельная разностная задача в виде, удобном для реализации решения методом прогонки. Достаточное условие применимости метода прогонки. $\mathbf{4^0}$. Аппроксимация разностной схемой дифференциальной задачи. $\mathbf{5^0}$. Понятие устойчивости разностной схемы. Теорема об устойчивости модельной разностной схемы. $\mathbf{6^0}$. Сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи. Порядок точности разностной схемы. Основная теорема сходимости.

1^0. На отрезке $[0,1]$ числовой оси рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x), \ \ 0 \le x \le 1, \\ u(0) = q_0, \quad\quad u(1) = q_1. \end{cases} \qquad (BVP)$$

Здесь функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы, причем $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, а q_0 и q_1 — известные постоянные.

Если функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат пространству $C^{(2)}[0,1]$, то задача (BVP) имеет единственное решение класса $C^{(4)}[0,1]$.

Для численного решения задачи (BVP) используем **разностный метод**.

Начнем с задания на $[0,1]$ конечного множества равноотстоящих точек $\omega_h = \{x_j\}_{j=0}^{N}$, где

$$x_0 = 0 < x_1 = h < \ldots < x_j = jh < \ldots < x_N = 1.$$

Здесь N — натуральное число, $Nh = 1$, $N \geq 2$.

Множество ω_h называется **сеткой**, а параметр h — **шагом** сетки.

Пусть $\omega'_h = \omega_h \setminus \{x_0, x_N\}$ — множество внутренних узлов сетки ω_h; а $\omega^*_h = \{x_0, x_N\}$ — множество ее граничных узлов. Ясно, что

$$\omega_h = \omega'_h \cup \omega^*_h, \qquad \omega'_h \cap \omega^*_h = \emptyset.$$

Функция с областью определения ω_h называется **сеточной**. Значение непрерывной функции $y = y(x)$ в узле x_j принято обозначать как y_j, то есть $y_j = y(x_j)$.

Если есть функция $q(x)$ непрерывной переменной x из $[0, 1]$, то $q(x)$ естественным образом порождает сеточную функцию:

$$q_j = q(x_j) \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Множества сеточных функций, определенных на сетках ω_h, ω'_h и ω^*_h условимся обозначать как $\mathbb{Y}_h$, $\mathbb{Y}'_h$ и $\mathbb{Y}^*_h$ соответственно.

Все эти три множества являются линейными пространствами. Зададим в этих линейных пространствах следующие нормы

$$\|y\|_h = \max_{0\le j\le N} |y_j|, \quad \|y\|'_h = \max_{1\le j\le N-1} |y_j|,$$

$$\|y\|^*_h = \max\{|y_0|, |y_1|\}.$$

2^0. Оператор $L^h y$, сопоставляющий каждой непрерывной функции $y = y(x)$ какую-нибудь сеточную функцию из $\mathbb{Y}'_h$ (или из $\mathbb{Y}^*_h$), назовем **разностным**.

Приведем примеры разностных операторов.

1. $(L^h y)_j = y_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1;$

2. $(L^h y)_j = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1;$

3. $(l^h y)_j = y_j, \quad$ где $\quad j = 0 \quad$ или $\quad j = N$.

Рассмотрим дифференциальный оператор в левой части исходного уравнения:

$$Lu = u'' + p(x)u' - q(x)u.$$

Вместе с этим оператором рассмотрим также граничный оператор $lu = \big((lu)_0, (lu)_1\big)$, задающий в (BVP) граничные условия

$$(lu)_0 = u(0), \qquad (lu)_1 = u(1).$$

Тогда краевая задача (BVP) запишется в сокращенном виде следующим образом:

$$\begin{cases} Lu = f(x), \\ lu = q, \quad \text{где} \quad q = (q_0, q_1). \end{cases}$$

Аппроксимируем эту дифференциальную краевую задачу некоторой **разностной**, в которой искомой является функция, заданная на сетке ω_h, вложенной в отрезок $[0, 1]$.

С этой целью сначала сконструируем на сетке ω_h разностную краевую задачу (или разностную схему) для (BVP).

Затем убедимся, что эта схема хорошо аппроксимирует исходную задачу. Это означает, что функция из $\mathbb{Y}_h$, являющаяся решением разностной схемы, при $h \to 0$ сходится в узлах сетки к значениям $y(jh)$ решения исходной задачи. Отметим, что $h \to 0$ тогда и только тогда, когда число узлов сетки неограниченно возрастает.

Конструировать разностную схему нужно с

таким расчетом, чтобы для ее решения можно было применить эффективный на практике численный метод.

Используем следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2}+p_j\dfrac{u_{j+1}-u_j}{2h}-q_ju_j=f_j, \\ j=1,2,\ldots,N-1, \\ u_0=q_0, \quad u_N=q_1. \end{cases} \tag{DO_h}$$

Здесь $p_j=p(x_j)$, $q_j=q(x_j)$, $f_j=f(x_j)$.

Искомая сеточная функция $(\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}})$ принадлежит пространству $\mathbb{Y}_{\boldsymbol{h}}'$. В системе линейных уравнений $(\boldsymbol{DO_h})$ относительно значений $(\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}})$ разностный оператор приближает исходный дифференциальный оператор второго порядка.

Если $\boldsymbol{u(x)}$ принадлежит пространству $\boldsymbol{C^{(4)}[0,1]}$, то $\boldsymbol{Lu(x)}$ — это функция класса $\boldsymbol{C^{(2)}[0,1]}$. Следовательно, определена сеточная функция

$$(L^h u)_j \equiv \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{u_{j+1} - u_j}{2h} - q_j u_j$$

из $\mathbb{Y}_h{}'$. При этом выполняется оценка

$$\|Lu - L^h u\|_h' \leq C(u)h^2, \qquad (O_2)$$

где $C(u)$ — некоторая конечная постоянная. Константа $C(u)$ в оценке (O_2) не зависит от h, но может зависеть от коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения.

Определение (порядка аппроксимации). *Разностный оператор $L^h u$ аппроксимирует дифференциальный оператор Lu в сеточной норме $\|\cdot\|'_h$ с порядком $k > 0$ относительно шага h, если для любой достаточно гладкой функции $u = u(x)$ существует постоянная $C(u)$, с которой при всех достаточно малых h выполняется следующая оценка:*

$$\|Lu - L^h u\|'_h \leq C(u)h^k.$$

Отметим, что шаг h сетки по определению не превосходит $1/2$, а постоянная $C(u)$ не зависит от h.

Из оценки (O_2) и определения порядка аппроксимации следует, что разностный оператор (DO_h) аппроксимирует исходный дифференциальный Lu со вторым порядком точности.

3^0. Вернемся к разностной схеме (DO_h) и перепишем ее в эквивалентном виде

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = f_j, \\ j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ y_0 = q_0, \quad y_N = q_1. \end{cases} \qquad (TD_N)$$

Здесь $y_j \equiv u_j$, а коэффициенты A_j, B_j, C_j вычисляются по формулам

$$A_j = \frac{1}{h^2} - \frac{p_j}{2h}, \qquad B_j = \frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{2h}, \qquad C_j = \frac{2}{h^2} + q_j.$$

Для решения разностной схемы (TD_N), являющейся системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений $(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})$, эффективно применяется **метод прогонки**. Матрица системы (TD_N) — трехдиагональная.

Достаточные условия для реализации метода прогонки в случае трехдиагональной системы записываются в виде неравенств

$$|C_j| \geq |A_j| + |B_j| \geq |A_j| > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Подставляя сюда явные выражения коэффициентов, получаем

$$\left|2 + q_j h^2\right| \geq \left|1 - \frac{p_j h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p_j h}{2}\right|.$$

Выясним, для каких шагов h это неравенство выполнено. По условию $p_j > 0$. Если при этом $\frac{p_j h}{2} \le 1$, то есть $h \le \frac{2}{p_j}$, то справедливо равенство

$$\left|1 - \frac{p_j h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p_j h}{2}\right| = 2.$$

Условие $h \le \frac{2}{p_j}$ заведомо выполнено, если шаг сетки h положителен и $h \le \frac{2}{\|p\|_C}$, где

$$\|p\|_C = \max_{x \in [0,1]} |p(x)| > 0.$$

По условию $q_j = q(x_j) \geq 0$. Поэтому

$$|2 + q_j h^2| = 2 + q_j h^2 > 2 \geq |A_j| + |B_j|$$

при $j = 1, 2, \ldots, N-1$.

Таким образом, если шаг h сетки удовлетворяет условию $h \cdot \|p\|_C \leq 2$, где $\|p\|_C > 0$, то разностная схема (TD_N) имеет единственное решение $(y_0, y_1, \ldots, y_N)$ из $\mathbb{Y}_h$, для нахождения которого заведомо применим метод прогонки.

4^0. На сетке ω_h решение $u = u(x)$ дифференциальной задачи (BVP) удовлетворяет разностным уравнениям (TD_N) не точно, а лишь с некоторым возмущением:

$$L^h u = f + \varphi \quad \text{на сетке} \quad \omega'_h,$$

где возмущающая сеточная функция $\varphi \neq 0$.

Сеточная функция $\varphi = L^h u - f$ называется **невязкой** разностной схемы на решении $u = u(x)$ дифференциальной задачи.

Определение (аппроксимации на решении). *Разностная схема* ***аппроксимирует*** *дифференциальную задачу на ее решении* $u = u(x)$, *если существует такое число* $k > 0$, *что норма невязки удовлетворяет следующим асимптотическим соотношениям:*

$$\|\varphi\|_h = \|L^h u - f\|_h = O(h^k).$$

При этом число k *называется* ***порядком*** *аппроксимации.*

Данное определение носит общий характер, однако всегда предполагается, что операторы (Lu, lu) в краевой задаче (BVP) и соответствующие им разностные приближения $(L^h u, l^h u)$ **линейны**.

Разностная схема (TD_N) аппроксимирует задачу (BVP) на ее решении со вторым порядком точности относительно h.

В самом деле, для решения $u = u(x)$ справедливо поточечное равенство $Lu = f$ и поэтому

$$\varphi = L^h u - f = L^h u - Lu \quad \text{на сетке} \quad \omega'_h.$$

В силу оценки (O_2) имеем далее

$$\|\varphi\|'_h = \|L^h u - Lu\|'_h = O(h^2),$$

что и требуется для аппроксимации со вторым порядком.

Отметим, что в рассматриваемом случае разностные краевые условия $(y_0 = q_0, y_1 = q_1)$ точно аппроксимируют исходные краевые условия $(u_0 = q_0, u_1 = q_1)$ в задаче (BVP).

5^0. Важным внутренним свойством разностной схемы является ее **устойчивость** (или неустойчивость). Это свойство никак не связано с исходной дифференциальной задачей, для решения которой строится разностная схема.

Определение (устойчивости разностной схемы). *Разностная схема* ***устойчива***, *если существует порог* $h_0 > 0$ *такой, что для каждого* $h = 1/N \leq h_0$ *и для любых двух сеточных функций* ζ *из пространства* $\mathbb{Y}'_h$ *и* η *из другого пространства* $\mathbb{Y}^*_h$ *возмущенная разностная задача*

$$L^h z = \zeta, \quad l^h z = \eta$$

имеет единственное решение z из простран-ства $\mathbb{Y}_h$, для которого справедливы оценки

$$\|z\|_h \le C_1 \|\zeta\|'_h + C_2 \|\eta\|^*_h. \qquad (S + C)$$

Здесь постоянные C_1 и C_2 не зависят ни от $h \le h_0$, ни от сеточных функций ζ, η.

Устойчивая разностная схема, в частности, непрерывно зависит от погрешностей округ-ления, которые часто удобно трактовать как аддитивные добавки в виде некоторых сеточных функций ζ, η (небольших искажений) в правые части уравнений разностной схемы.

При этом погрешность решения разностной схемы в силу ее линейности совпадает с решением однотипной разностной задачи вида $L^h z = \zeta$, $l^h z = \eta$.

Если нормы $\|\zeta\|'_h$ и $\|\eta\|^*_h$ малы, то в силу характеризующей устойчивость схемы оценки $(S+C)$ норма сеточной функции z (погрешности) также будет мала.

Постоянные C_1 и C_2 в оценке $(S+C)$ не зависят от шага сетки h. Это означает, что чувствительность устойчивой разностной схемы к погрешности округлений не увеличивается при измельчении сетки.

Теорема. *Разностная схема* (TD_N), *задаваемая соотношениями*

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = f_j, \\ j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ y_0 = q_0, \quad y_N = q_1, \end{cases} \qquad (TD_N)$$

устойчива.

Доказательство. Справедливость теоремы установим для простейшего случая, когда коэффициент $p(x)$ уравнения тождественно равен нулю.

Уравнения разностной схемы (TD_N) при этом имеют единственное решение для каждого шага $h = 1/N \leq 1/2$. Этот факт устанавливается методом прогонки.

Взяв сеточные функции $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1})$ из $\mathbb{Y}_h{}'$ и $\eta = (\eta_0, \eta_1)$ из $\mathbb{Y}^*_{h'}$, заметим, что аналог разностной схемы (TD_N), имеющий вид

$$\begin{cases} A_j z_{j-1} - C_j z_j + B_j z_{j+1} = \zeta_j, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, N-1, \\ z_0 = \eta_0, \quad z_N = \eta_1, \end{cases} \qquad (TD'_N)$$

также имеет единственное решение — сеточную функцию $z = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}, z_N)$.

В силу линейности схемы справедливо разложение $z = \lambda + \mu$, где сеточные функции λ и μ

из пространства $\mathbb{Y}_h$ выбраны таким образом, что λ является решением системы (TD'_N) при $\eta_0 = \eta_1 = 0$, а μ — это решение (TD'_N) при условии, что $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_{N-1} = 0$.

С учетом равенства $p(x) \equiv 0$ разностная задача для сеточной функции λ принимает вид

$$\begin{cases} \lambda_{j-1} - (2 + h^2 q_j)\lambda_j + \lambda_{j+1} = h^2 \zeta_j, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, N-1, \\ \lambda_0 = 0, \qquad \lambda_N = 0. \end{cases}$$

Для решения $\boldsymbol{\lambda}$ этой задачи, используя условие $q_0 \geq 0$, получаем следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_h = \max_{0 \leq j \leq N} |\lambda_j| \leq N^2 \max_{1 \leq j \leq N-1} |h^2 \zeta_j| =$$

$$= N^2 h^2 \max_{1 \leq j \leq N-1} |\zeta_j| = \max_{1 \leq j \leq N-1} |\zeta_j| = \|\zeta\|_h'.$$

Аналогично, для функции μ из $\mathbb{Y}_h$ имеем

$$\begin{cases} \mu_{j-1} - (2 + h^2 q_j)\mu_j + \mu_{j+1} = 0, \\ j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \mu_0 = \eta_0, \quad \mu_N = \eta_N. \end{cases}$$

При этом справедливы оценки

$$\|\mu\|_h = \max_{0 \le j \le N} |\mu_j| \leqslant \max\{|\eta_0|, |\eta_N|\} = \|\eta\|_h^*.$$

Далее норму $z = \lambda + \mu$ оценим по формуле

$$\|z\|_h \le \|\lambda\|_h + \|\mu\|_h \le \|\zeta\|'_h + \|\eta\|^*_h.$$

Таким образом, оценка $(S + C)$ выполнена с постоянными $C_1 = C_2 = 1$.

Аналогичное неравенство имеет место и в случае, когда $p(x)$ не равна тождественно нулю. В этом случае постоянные C_1 и C_2 будут несколько другие. $\square$

6^0. Исследуем вопрос сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи.

Определение. *Решение y из $\mathbb{Y}_h$ разностной схемы (TD_N) сходится к решению $u = u(x)$ исходной краевой задачи (BVP) при измельчении сетки (то есть при $h \to 0$), если*

$$\|y - u\|_h \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Если решение разностной схемы сходится к решению исходной краевой задачи и при этом существует $k > 0$, для которого

$$\|y - u\|_h = O(h^k) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

то параметр k называют **порядком точности** разностной схемы.

Данное определение носит общий характер, то есть его можно применить не только к разностной схеме (TD_N), но и к любой другой, а в качестве дифференциальной задачи (BVP) также может фигурировать какая-нибудь другая дифференциальная задача.

Теорема (основная теорема теории разностных схем). *Пусть разностная схема аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на ее решении с порядком $k > 0$ относительно h. Пусть при этом разностная схема устойчива. Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с тем же порядком k.*

Определение аппроксимации, устойчивости

и сходимости решения разностной схемы вместе с основной теоремой о сходимости кратко формулируют в виде тезиса: **“аппроксимация плюс устойчивость есть сходимость”**.

Разделение трудного вопроса о сходимости на две самостоятельные части (проверка аппроксимации и исследование устойчивости) является общепринятым приемом.

Конкретная разностная схема (TD_N) **аппроксимирует** краевую задачу (BVP) со вторым относительно h порядком. Кроме того эта схема устойчива.

По основной теореме заключаем, что эта разностная схема сходится при измельчении сетки к решению $u = u(x)$ задачи (BVP). Эта сходимость имеет второй порядком точности относительно h, то есть

$$\|y - u\|_h = O(h^2) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Другими словами, разностная схема (TD_N) имеет второй порядок точности. Схемы первого порядка точности — слабосходящиеся. Например, метод Эйлера для решения задачи Коши — процесс не сойдется за разумное время.

Тема : Метод Ритца. Метод Галеркина.

Метод конечных элементов

$\mathbf{1^0}$. Вариационная постановка краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке. $\mathbf{2^0}$. Формулировка метода Ритца. $\mathbf{3^0}$. Расчетные формулы метода Ритца. $\mathbf{4^0}$. Проекционная постановка краевой задачи. Сопутствующие интегральные тождества. $\mathbf{5^0}$. Метод Галёркина. Специфика матриц сопутствующих систем линейных уравнений. $\mathbf{6^0}$. Метод конечных элементов как разновидность проекционных методов. Реализация в одномерном случае.

1^0. Вместе с разностным методом решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений широко используют проекционные методы Ритца и Галеркина, а также их современные модифицированные варианты, объединяемые названиями "метод конечных элементов" и "проекционно-сеточные методы".

Пусть на конечном отрезке числовой оси задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \qquad a \le x \le b. \qquad (DE_s)$$

Функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ здесь известны, а функция $u = u(x)$ — искомая, ее требуется найти. При этом выполнены неравенства

$$p(x) \ge p_0 > 0, \qquad q(x) \ge 0 \qquad \text{для} \qquad a \le x \le b.$$

Предполагается также, что $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$

достаточно гладкие для выполнения с ними всех требуемых аналитических операций.

К уравнению ($\boldsymbol{DE_s}$) добавляются краевые условия первого рода на краях отрезка $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:

$$\boldsymbol{u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b.} \tag{BC}$$

Отметим, что численно решить краевую задачу ($\boldsymbol{DE_s}$)-($\boldsymbol{BC}$) труднее, чем задачу Коши для того же уравнения.

Вместе с краевой задачей (DE_s)-(BC) рассмотрим тесно с ней связанную **вариационную** задачу на отыскание минимума следующего функционала

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p(x)(w')^2 + q(x)w^2\right]dx - \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Точнее, среди всевозможных функций $w = w(x)$ из класса $C^{(1)}[a,b]$, удовлетворяющих краевым условиям (BC), то есть таких, что

$$\boldsymbol{w(a) = u_a, \quad w(b) = u_b,}$$

требуется найти ту, которая доставляет минимум на указанном классе функционалу $\boldsymbol{J(w)}$:

$$\boldsymbol{w_0 = \arg\min_{w} J(w).} \tag{VP}$$

Оказывается, что решение $\boldsymbol{w_0 = w_0(x)}$ этой экстремальной задачи существует и единственно в классе функций

$$\{w(x) \mid w(x) \in C^{(1)}[a, b], \quad w(a) = u_a, \quad w(b) = u_b\}.$$

Это решение w_0, как доказывается в вариационном исчислении, совпадает с единственным же решением $u(x)$ дифференциальной краевой задачи (DE_s)-(BC), то есть

$$w_0(x) = u(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Это замечательное обстоятельство позволяет искать функцию $u(x)$ как решение вариационной задачи (VP), что в ряде случаев может оказаться эффективнее любого другого подхода.

Отметим, что вариационная задача (VP) обладает некоторым преимуществом перед дифференциальной постановкой (DE_s)-(BC), а именно: изначально не требуется, чтобы искомая функция $u(x)$ имела **вторые непрерывные производные**, более того, даже ее первые производные могут быть кусочно-непрерывными и при этом значение функционала $J(w)$ все равно будет определено.

Это обстоятельство весьма ценно для реализации многих численных методов.

2^0. Обозначим через $\mathbb{U}$ множество всевозможных функций $u(x)$, на котором минимизируются значения функционала $J(w)$. Это множество $\mathbb{U}$ является линейным пространством. Выберем в нем каким-либо образом линейно независимые элементы (функции)

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \dots, \varphi_N, \quad \varphi_j \in \mathbb{U}. \qquad (B)$$

Будем называть функции $\varphi_j = \varphi_j(x)$ **базисными**.

Образуем линейную оболочку множества ($\boldsymbol{B}$), то есть следующее конечномерное подпространство

$$\mathbb{U}^{\boldsymbol{N}} = \mathbf{span}\,\{\varphi_{\mathbf{0}}, \varphi_{\mathbf{1}}, \varphi_{\mathbf{2}}, \ldots, \varphi_{\boldsymbol{N}}\} \subset \mathbb{U}.$$

По условию

$$\mathbf{dim}\,\mathbb{U}^{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} + \mathbf{1}.$$

Далее, вместо минимизации $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{w})$ на всем пространстве $\mathbb{U}$ условимся искать его минимум на конечномерном подпространстве $\mathbb{U}^{N}$, то есть будем искать такую функцию

$$\left.\begin{array}{l} u_{N}(x) = \sum\limits_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j(x), \\ \text{что} \qquad J(u_N) = \min\limits_{v \in \mathbb{U}^N} J(v). \end{array}\right\} \qquad (VP_N)$$

Имея целью решить задачу (VP_N), изложим более детально требования к базису (B). Точнее предположим, что выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \varphi_0(a) = 1, \\ \varphi_j(a) = 0 \qquad \text{для} \qquad j = 1, 2 \ldots, N, \\ \varphi_N(b) = 1, \\ \varphi_j(b) = 0 \qquad \text{для} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Линейная комбинация $\sum\limits_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j(x)$ при этом удовлетворяет краевым условиям (BC) в том и только том случае, если $\alpha_0 = u_a$ и $\alpha_N = u_b$.

При этом имеем

$$u_N(x) = u_a\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j\varphi_j(x) + u_b\varphi_N(x). \quad (E_W)$$

Определение. *Функция* $u_N(x)$, *полученная по формуле* (E_W) *как решение вариационной задачи* (VP_N), *называется* ***приближением по Ритцу*** *к* $u(x)$.

3^0. Получим расчетные формулы, пригодные к отысканию приближений по Ритцу для искомого решения $u = u(x)$, исходной краевой задачи.

Пусть функция $v = v(x)$ принадлежит подпространству $\mathbb{U}^N$, то есть представима в виде

$$v = u_a\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j\varphi_j(x) + u_b\varphi_N(x).$$

Тогда $J(v) = J\Big(\sum\limits_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j\Big)$ представляет собой функцию переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$ из пространства $\mathbb{R}^{N-1}$.

Необходимым условием экстремума этой функции многих переменных на пространстве $\mathbb{R}^{N-1}$ является обращение в нуль ее производных по указанным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} J\Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j\Big) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

При этом $\alpha_0 = u_a$ и $\alpha_N = u_b$. Запишем указанные равенства в виде линейных уравнений, которым должны удовлетворять искомые переменные $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$.

Имеем:

$$J\left(\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\varphi_j\right) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p(x)\left(\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\varphi_j'\right)^2 + q(x)\left(\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\varphi_j\right)^2\right]dx -$$

$$-\int_a^b f(x)\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\varphi_j(x)dx.$$

Следовательно, справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} J\Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j\Big) =$$

$$\int_a^b \Big[p(x)\Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j'\Big)\varphi_i' + q(x)\Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j\Big)\varphi_i\Big] dx - \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \Big[\int_a^b \Big(p(x)\varphi_j'\varphi_i' + q(x)\varphi_j\varphi_i\Big) dx\Big]\alpha_j - \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, N-1$.