Вопрос №1
Числовые последовательности и их пределы

Определение числовой последовательности

Если любому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}$.

Каждое вещественное число a_n называется элементом последовательности $\{a_n\}$, а натуральное n номером элемента a_n.

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел бесконечно и поэтому любая числовая последовательность всегда имеет бесконечное число элементов. Числовые элементы a_n последовательности могут как совпадать друг с другом, так и различаться.

Стационарные и ограниченные последовательности

Если существует такое натуральное N_0, что для всех $n \geq N_0$ элементы a_n совпадают друг с другом, т.е. $a_n = a_{N_0}$, то последовательность называется стационарной.

Пример. Для любой десятичной дроби ее нижние десятичные приближения образуют числовую последовательность, элементы которой - это рациональные числа. Аналогично, верхние десятичные приближения это тоже числовая последовательность.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется ограниченной сверху, если существует такое натуральное число M, что для всех $n \geq M$ имеет место неравенство $x_n \leq M$. Если же существует такое натуральное число m, что для всех $n \geq m$ имеет место неравенство $x_n > m$, то последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется ограниченной снизу. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел, ограниченная как сверху так и снизу, называется ограниченной. Если существует такое вещественное число M, что для всех $n > 1$ имеет место неравенство $|x - n| \leq M$, то последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.

Например, последовательность $\{x_n\}$ с элементами $x_n = (-1)^n$ это ограниченная последовательность.

Для любого вещественного числа последовательность его нижних десятичных приближений ограничена сверху, в то время как последовательность его же верхних десятичных приближений ограничена снизу. Это утверждение сразу следует из леммы о десятичных приближениях.

Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется монотонно возрастающей, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$. Если же для любого номера n справедливо $x_n > x_{n+1}$, то $\{x_n\}$ - монотонно убывающая.

Пример 1. Пусть $x_n = n$. Тогда $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Пример 2. Если $x_n = n$, то $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Пример3. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не монотонная.

Пример 4. Для любого вещественного числа x последовательность его нижних десятичных приближений монотонно возрастает, оставаясь ограниченной сверху.

Пример 5. Последовательность верхних десятичных приближений вещественного числа монотонно убывает, оставаясь ограниченной снизу.

Теорема (о стационарности). Если монотонная последовательность целых чисел ограничена, то она стационарна.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ целых чисел монотонно возрастает и ограничена сверху, $x_n \in \mathbb{Z}$. Докажем, что $\{x_n\}$ стационарна. Предположим противное. Тогда существует номер n_1 такой что $x_{n_1} > x_1$, затем существует номер n_2 такой что $x_{n_2} > x_{n_1}$, и так далее. Таким образом, имеется последовательность x_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, обладающая свойствами $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow x_{n_k} \in \mathbb{Z}$ и $x_{n_k} > x_{n_{k-1}}$, причем $x_{n_0} = x_1$. По условию x_{n_k} целое, поэтому $x_{n_k} > x_{n_{k-1}} \Rightarrow x_{n_k} \geq x_{n_{k-1}+1}$. Последовательно применяя это неравенство для номеров n_k, $n_k = 1, \cdots, n-1$, получаем оценку снизу $x_{n_k} \geq x_{1+k}$, $k = 1, 2, \ldots$. По условию существует такое целое число M, что $x_{n_k} \leq M$. Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, получаем $x_{1+k} \leq M$, или $k \leq M - x_1$, где $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что натуральное число $M - x_1$ должно быть больше любого другого натурального числа k, что противоречит бесконечности множества натуральных чисел.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется строго монотонно возрастающей, если для любого номера n справедливо строгое неравенство $x_n < x_{n+1}$. Если же для любого номера n $x_n > x_{n+1}$, то $\{x_n\}$ строго монотонно убывающая.

Как следует из теоремы о стационарности, любая строго монотонная последовательность целых чисел не ограничена.

Пусть есть две числовых последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Если для любого k существует такой номер $n = n_k$, что $y_k = x_{n_k}$, и при этом последовательность номеров $\{n_k\}$ строго возрастающая, то $\{y_k\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Для обозначения подпоследовательности применяется двухуровневый индекс: $\{x_{n_k}\}$.

Следствие (теоремы о стационарности). Если монотонно возрастающая последовательность целых чисел не является стационарной, то у нее найдется строго возрастающая подпоследовательность.

Определение предела числовой последовательности, определение окрестности числа

Определение. Вещественное число x называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если выполняется следующее условие: для любого интервала (a, b) такого что x принадлежит (a, b) существует номер N, обладающий тем свойством, что $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (a, b)$.

Отметим, что номер N, начиная с которого все члены x_n последовательности попадают в интервал (a, b), существенно от этого интервала зависит.

Тот факт, что x является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается в следующем виде: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, или $(x_n \to x$ при $n \to \infty$. В этом случае говорят также, что x_n **сходится** к x.

Определение. Любой интервал (a, b), содержащий x, называется **окрестностью** числа x и обозначается через $O(x)$.

Используя понятие окрестности точки, определение предела можно дать следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall O(x) \exists N \colon \forall n \geq N - x_n \in O(x)$.

Единственность предела

Определение. Расширенной числовой прямой называется множество $\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty \cup (-\infty, +\infty) \cup +\infty\}$. При этом окрестностью точки $\{-\infty\}$ называется любой интервал вида $(-\infty, a)$, а окрестностью точки $\{+\infty\}$ любой интервал вида $(b, +\infty)$.

Следующее определение предела является корректным: если предел последовательности существует, то он единственен.

Доказательство единственности основано на следующем свойстве.

Лемма (об отделимости). Если $x \in \bar{\mathbb{R}}$ и $y \in \bar{\mathbb{R}}$, $x \neq y$, то существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $x < y$. Если $x = -\infty$ и $y = +\infty$, то возьмем $O(x) = (-\infty, a_1)$ и $O(y) = (a_2, +\infty)$, где $a_1 < a_2$. Из определения интервала следует, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Пусть числа x и y конечны. Тогда по лемме о плотности существует конечная десятичная дробь a, лежащая между x и y: $x < a < y$. В этом случае возьмем $O(x) = (-\infty, a)$, $O(y) = (a, +\infty)$, тогда $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Пусть числа $x = -\infty$ и y конечны. Возьмем $a = \underline{(y)_0} - 1$ и $b = \overline{(y)_0} + 1$. Тогда $(a, b) = O(y)$. Взяв в этом случае $O(x) = (-\infty, a)$, получаем $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Аналогично рассматривается случай, когда x конечно, а $y = +\infty$.

Теорема (о единственности предела). Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два разных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, $x \neq y$. По лемме об отделимости существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Из условия, что x и y - пределы, получаем $\exists N_1\colon \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in O(x)$, $\exists N_2\colon \forall n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in O(y)$. Возьмем $n = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $x_n \in O(x)$ и $x_n \in O(y)$. Следовательно, $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Это противоречит выбору окрестностей.

Пределы монотонных последовательностей:

Ограниченная монотонная последовательность целых чисел является стационарной и поэтому заведомо имеет конечный предел.

Лемма. Пусть последовательность десятичных дробей, J имеющих после запятой ровно k цифр, монотонна и ограничена. Тогда эта последовательность стационарна и имеет конечный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ последовательность k-значных десятичных дробей. Тогда последовательность $y_n = x_n \cdot 10^k$, $n = 1, 2, \ldots$ состоит из целых чисел. Если при этом $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то и $\{y_n\}$ также монотонна и ограничена. $\{y_n\}$ стационарна и, следовательно, существует ее конечный предел $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Но в таком случае последовательность $x_n = y_n \cdot 10^{-k}$, $n = 1, 2, \ldots$ также стационарна и сходится к числу $y \cdot 10^{-k}$.

Лемма. Пусть имеется последовательность $\{x_n\}$ десятичных дробей, среди которых нет периодических с периодом 9. Тогда из серии неравенств $x_n \le x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ следует, что при всех k, $k = 0, 1, 2, \dots$ и при всех n, $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$(x_n)_k \le (x_{n+1})_k. \tag{1}$$

Доказательство. Зафиксируем номер n и докажем справедливость неравенства 1 индукцией по индексу k. Пусть десятичные дроби x_n и x_{n+1} заданы равенствами $x_n = +P_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, $x_{n+1} = +P_1, \beta_1\beta_2 \dots \beta_n \dots$. Тогда $P_0 \le P_1$ (в противном случае $P_0 > P_1$ и так как x_{n+1} не является периодической десятичной дробью с периодом 9, то имеет место неравенство $x_n > x_{n+1}$, что противоречит условию леммы. Учитывая, что $(x_n)_0 = P_0$ и $(x_{n+1})_0 = P_1$, получаем оценку 1 при $k = 0$ то есть базис индукции: $(x_n)_0 \le (x_{n+1})_0$. Предположим теперь, что $(x_n)_k \le (x_{n+1})_k$ для некоторого k, тогда с необходимостью имеют место неравенства $\alpha_1 \le \beta_1$, $\alpha_2 \le \beta_2$, …, $\alpha_k \le \beta_k$. Предположим противное, тогда найдется такой минимальный номер $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, что $\alpha_j > \beta_j$. Это означает, что выполняется соотношение $x_n > x_{n+1}$, но это противоречит условию леммы. Далее имеем $\alpha_{k+1} \le \beta_{k+1}$ (в случае $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$ выполняется соотношение $x_n > x_{n+1}$, что противоречит условию леммы). Совокупность неравенств $P_0 \le P_1$, $\alpha_1 \le \beta_1$, $\alpha_{k+1} \le \beta_{k+1}$ обеспечивает выполнение для индекса $k+1$ искомой оценки: $(x_n)_{k+1} \le (x_{n+1})_{k+1}$. По принципу математической индукции оценка 1 справедлива для всех n и k.

Теорема Вейерштрасса (о монотонной последовательности). Если монотонная последовательность вещественных чисел ограничена, то она имеет конечный предел.

Доказательство. Пусть есть ограниченная монотонная последовательность $\{x_n\}$. Будем предполагать, что для любого n число x_n представлено бесконечной десятичной дробью, которая не является периодической с периодом 9. Тогда по предыдущей лемме в силу монотонного возрастания $\{x_n\}$ для любого k, $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательность k-значных десятичных дробей $y_n = (x_n)_k$, $n = 1, 2, \dots$ также монотонно возрастает и ограничена. Далее, применяя к последовательности $y_n = (x_n)_k$, $n = 1, 2, \dots$ лемму о монотонной и ограниченной последовательности десятичных дробей с одинаковым числом цифр после запятой, заключаем, что $\{y_n\}$ стационарная, т.е. для фиксированного k, $k = 0, 1, 2, \dots$ существует номер N_k такой что при всех $n \ge N_k$ имеет место равенство $(x_n)_k = +P_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$, где $P_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ от номера n не зависят. Кроме того существует номер N_{k+1} такой что для всех $n \ge N_{k+1}$ справедливо равенство

$(x_n)_{k+1} = +p_l, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k\beta_{k+1}$. Из определения операций $(\cdot)_k$ и $(\cdot)_{k+1}$ следуют равенства $P_0 = P_1$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_k = \beta_k$, ... Таким образом, для любого $n \geq N_{k+1}$ имеем представление $(x_n)_{k+1} = +P_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k\beta_{k+1}$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $N_{k+1} \geq N_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Далее, определив цифру α_{k+1} соотношением $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$, получаем в итоге последовательность $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots\} = \{\alpha_j\}$. Рассмотрим теперь порождаемую этой цифровой последовательностью бесконечную десятичную дробь $x = P_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j\alpha_{j+1} \ldots$. Построенное таким образом число x обладает следующим свойством:

$$(x_n)_k \leq x, k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, получим по теореме о предельном переходе в неравенствах следующую оценку:

$$\lim_{k \to +\infty} (x_n)_k = x_n \leq x. \tag{3}$$

Кроме того нам понадобятся следующие полученные в процессе построения числа x равенства:

$$(x_n)_k = (x)_k, \forall n \geq N_k. \tag{4}$$

Докажем теперь, что $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Возьмем произвольную конечную окрестность $O(x)$ точки x т.е. интервал $O(x) = (a, b)$. Из неравенства 3 и условия, что $x < b$ получаем $x_n \leq x < b \Rightarrow x_n < b$. Далее из условия, что $a < x$ следует существование номера k_0 такого что

$$\overline{(a)_{k_0}} < (x)_{k_0}. \tag{5}$$

При этом для всех $n \geq N_{k_0} \equiv N_0$ имеем равенство $(x_n)_{k_0} = (x)_{k_0}$. Подставляя его в 5 и учитывая 2, получаем для всех $n \geq N_0$ следующие соотношения: $\overline{(a)_{k_0}} < (x_n)_{k_0} \leq x_n$. Учитывая еще, что верхнее десятичное приближение всегда не меньше самого числа, для номеров $n \geq N_0$ имеем $a \leq \overline{(a)_{k_0}} < (x_n)_{k_0} \leq x_n$. Таким образом, для всех $n \geq N_0$ число x_n попадает в интервал (a, b): $a < x_n < b$. Это означает, в силу произвольности окрестности $O(x) = (a, b)$ точки x, что существует конечный предел $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

Пределы верхних и нижних десятичных приближений числа

1. Любая стационарная последовательность имеет предел: $\forall n x_n = C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

2. Для любого вещественного числа x справедливы предельные равенства
$$\lim_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} \overline{(x)_n} = x. \tag{6}$$

   Доказательство. Докажем первое из равенств 6. Пусть (a, b) - произвольная конечная окрестность вещественного числа x, то есть $a < x < b$. Тогда $\exists N\colon \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N}$. Следовательно, в соответствии со свойствами десятичных приближений справедливы неравенства $a \le \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N} \le x < b$, $\forall n \ge N \Rightarrow \underline{(x)_N} \le \underline{(x)_n} \le x$. Таким образом, для любого $n \ge N$ имеем неравенства $a < \underline{(x)_n} < b$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x$. Второе из равенств 6 доказывается аналогично. В частности, для $x = 0$ имеем $\overline{(x)_n} = 10^{-n}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$.

3. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to-\infty} n = -\infty$.

5. Последовательность $x_n = (-1)^n \cdot n$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

   Доказательство. Предположим противное, то есть что существует вещественное число x такое что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Полагаем $a = \underline{(x)_0} - 1$, $b = \overline{(x)_0} + 1$, $N = \max\{|a|, |b|\}$. Здесь N - натуральное. Интервал (a, b) представляет собой окрестность $O(x)$, причем вне этой окрестности лежит любое число x_n с номером $n \ge N$: если n нечетное, то $x_n \le a$, если же n четное, $n > N$, то $x_n \ge b$. Это противоречит определению предела. Аналогично рассматривается предположение, что $x = +\infty$ и $x = -\infty$.

Вопрос №2
Линейные пространства

Максимальные системы векторов

Линейно-независимая система векторов из X называется максимальной, если при добавлении к ней любого элемента ненулевого вектора из X она становится линейно-зависимой.

Если имеется две максимальные линейно-независимые системы векторов, то в каждой - одинаковое число элементов.

Доказательство. Системы эквивалентны, потому что по определению максимальной системы каждый вектор из первой представим линейной комбинацией векторов второй. И обратно. В обе стороны $s \leq t, t \leq s \Rightarrow t = s$.

Размерность линейного пространства

Пусть X - линейное пространство над полем k. Возможны два случая:

1. В пространстве X существуют независимые системы векторов с любым наперед заданным числом элементов. Пространство бесконечномерно, $\dim X = +\infty$
2. Все системы векторов в X линейно зависимы (или $\exists N \colon \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \in X$ - линейно зависимы)

Определение. Линейное пространство X, в котором существует n линейно независимых векторов, но любая система из $n+1$ векторов линейно зависима, называется n-мерным. $\dim X = n$.

Пространство $X = \{0\}$ считается нульмерным. Прямая ($\mathbb{R}$) – одномерное пространство, плоскость ($\mathbb{R}^2$) – двумерное, $\mathbb{R}^3$ – трехмерное.

Примеры:

1. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$ имеет размерность n.
2. Пространство квадратных матриц размера $n \times n$ имеет размерность n^2 (если расположить элементы в линейном порядке, получим, что их n^2 штук. Т.е. получится вектор длины n^2)
3. Пространство $C[a, b]$ - бесконечномерное.

4. Пространство P^n многочленов степени, меньшей n, от одной переменной имеет размерность n. Линейно независимыми векторами являются мономы: $1, t, t^2, t^3$.

Базис линейного конечномерного пространства

Определение. Пусть X - линейное пространство, $\dim X = n$. Любая система из n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in X$ называется базисом пространства X. Базис нульмерного пространства – пустое множество.

Теорема о свойствах базиса. Следствия

Пусть X - линейное пространство над полем k с базисом $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Тогда

I каждый вектор v из X можно представить единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство. Возьмем базис и дополнительный вектор v из X. В этом множестве $n+1$ элементов и по определению $\dim X$ - это линейно зависимая система векторов, или $\exists a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in k\colon av + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = 0$ (существует такой набор коэффициентов, при которых система сводится в ноль). Из неравенства нулю следует наличие обратного элемента, поэтому v представим в виде $v = -a^{-1}a_1e_1 - a^{-1}a_2e_2 - \ldots - a^{-1}a_ne_n$. То есть вектор представлен в виде линейной комбинации базиса.

Докажем, что такое представление единственное. Пусть $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n$. $v = f_1e_1 + f_2e_2 + \ldots + f_ne_n$. Тогда $(b_1 - f_1)e_1 + (b_2 - f_2)e_2 + \ldots + (b_n - f_n)e_n = 0$. Так как базис линейно независим, такое возможно, только если все коэффициенты равны 0. Это означает, что разложения одинаковы.

II любую систему из $s \leq n$ линейно независимых векторов пространства X можно дополнить до базиса.

Доказательство. Пусть $1 \leq s \leq n$ и имеется система $f_1, f_2, \ldots, f^s$ линейно независимых векторов из X. Рассмотрим следующее множество из $s + n$ элементов:

$$f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{7}$$

Преобразуем это множество следующим образом: если вектор e_n линейно выражается через предыдущие векторы цепочки, то исключим его из нашего множества, иначе оставим и перейдем к e_{n-1}. Если выражается – снова убираем и так далее до e_1.

Получили такое множество:

$$f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{it}. \text{ (всего } t+s\text{)}. \tag{8}$$

Предположим, что имеется такая нетривиальная (содержащая ненулевые элементы) линейная комбинация векторов, что $a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + b_1 e_{i1} + \ldots + b_{it} e_{it} = 0$. Среди b найдётся хотя бы один ненулевой элемент (иначе в силу линейно независимости f получим что все a равны 0, что будет противоречить нетривиальности комбинации).

Таким образом, множество номеров $\{j\colon b_j \neq 0\} \neq \emptyset$. Возьмем такой максимальный номер k. Тогда элемент b_k будет иметь обратный $\Rightarrow$ значит мы можем выразить $e_k = -b^{-1k} a_1 f_1 + \ldots + b^{-1k} a_s f_s + \ldots$. Получается, что система линейно зависима, это противоречит ее построению. Следовательно, не существует нетривиальных линейных комбинаций $f_1, \ldots, f_s, e_{i1}, \ldots, e_{it}$: из них можно составить ноль. Выходит, эта система линейно независима.

Но в соответствии с I, любой вектор выражается через базис, а значит и через систему 7. Но все векторы системы 7 линейно выражаются через векторы системы 8.

Таким образом, система 8 максимальна и линейно независима. То есть существует базис.

Следствия:

1. Любой вектор $v \in x$, $v \neq 0$ может быть включён в базис X
2. Пусть X_1, X_2 - подпространства X, $\dim X_1 = M_1$, $\dim X_2 = M_2$, $X_1 \subset X_2$, $X_1 \neq X_2$. Тогда $M_1 < M_2$

Координаты вектора в базисе

Определение. Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ - базис X над полем k. Тогда, по теореме о свойствах базиса, $\forall \vec{v} \in X$ представим в виде $\vec{v} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$, где $\lambda_j \in k$. Скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются координатами вектора v в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. При сложении векторов их координаты складываются. При умножении на скаляр координаты умножаются на скаляр.

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^n$ координаты вектора $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в базисе $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ это вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2. В пространстве P_n, векторами которого являются многочлены из $\mathbb{R}$ степени, меньшей n, базис образуют $e_0 = 1, e_1 = t, \ldots, e_{n-1} = t^{n-1}$. Координаты – коэффициенты перед t.

Матрица перехода от одного базиса к другому и ее свойства

Пусть X - векторное пространство над полем k и имеются 2 его базиса:

B : $e_1, e_2, \ldots, e_n$

B' : $e'_1, e'_2, \ldots, {}'e_n$.

Выразим каждый из векторов базиса B' через базис B:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\
e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\
&\vdots \vdots \vdots \ddots \vdots \\
e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n
\end{aligned}$$

Коэффициенты a_{ij} этих разложений определяют матрицу:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ - матрица перехода от } B \text{ к } B'.$$

Координатами вектора e'_j в базисе B служат элементы столбца с номером j в матрице A.

Пусть вектор $v \in X$ имеет в (B) координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, а в (B') координаты $(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n)$, так что: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = v = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \ldots + \lambda'_n e'_n$.

Подставим выражение ${e'}_j$ через e_j:

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n = {\lambda'}_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\ldots+a_{n1}e_n)+{\lambda'}_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\ldots+a_{n2}e_n)+\ldots+{\lambda'}_1(a_{1n}e_1+$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}{\lambda'}_1\\ {\lambda'}_2\\ \vdots\\ {\lambda'}_n\end{pmatrix}$$

Введём обозначения $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ и $\vec{\lambda'} = \begin{pmatrix}{\lambda'}_1\\ {\lambda'}_2\\ \vdots\\ {\lambda'}_n\end{pmatrix}$, тогда соотношение $(\lambda\lambda')$ перепишется:

$$\vec{\lambda} = A\vec{\lambda'}$$

Выражение координат - линейное преобразование переменных с матрицей A. Преобразования $(\lambda\lambda')$ и $(\lambda'\lambda)$ взаимно обратны. Это означает, что матрица A имеет обратную A', это значит, что она обратима, $\det A \neq 0$, $A' = A^{-1}$, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Система преобразований принимает вид:

$$\vec{\lambda'} = A'\vec{\lambda} \Leftrightarrow \vec{\lambda'} = A^{-1}\vec{\lambda}$$

1. Матрица перехода от одного базиса к другому определяется однозначно.

   Лемма. Пусть A и B - две матрицы размера над полем K. Если для любого столбца $X \in K^n$ выполняется равенство $AX = BX$, тогда $A = B$.

   Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - столбцы матрицы A, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ - столбцы матрицы B, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ - канонический базис пространства столбцов K^n. Подставляем в равенство $AX = BX$ вместо столбца X столбцы канонического базиса. Получаем $\forall k = 1, 2, \ldots, n$

равенство $Ae_k = Be_k$. Легко проверить, что $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ верны равенства $Ae_k = A_k$ и $Be_k = B_k$. Отсюда, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, $A_k = B_k$ а значит и $A = B$.

2. Матрица перехода всегда невырождена (на основании матричного критерия линейной независимости).

3. Матрица перехода от базиса к этому же базису является единичной.

Теорема. Пусть $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ - три базиса произвольного векторного пространства V. Тогда

$$gCh = gCf \cdot fCh \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $x \in V$ - произвольный вектор, X_f, X_g и X_h - столбцы его координат относительно базисов $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ соответственно. Тогда по предыдущей теореме, справедливы равенства: $X_f = fCh \cdot X_h$, $X_g = gCf \cdot X_f$, $X_g = gCh \cdot X_h$.

Подставляя второе из этих равенств в первое, получаем: $X_g = gCf \cdot (fCh \cdot X_h) = (gCf \cdot fCh) \cdot X_h$ откуда следует, что $gCh \cdot X_h = (gCf \cdot fCh) \cdot X_h$.

Так как мы взяли произвольный вектор $x \in V$, то столбец его координат X_h может быть любым столбцом из пространства столбцов K^n. Применяя лемму, получаем равенство $gCh = gCf \cdot fCh$.

Следствие. Матрица перехода является обратимой.

Доказательство. Пусть $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ - произвольные базисы векторного пространства V. По формуле 9 находим: $gCg = gCf \cdot fCg$, где вместо базиса $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ мы взяли базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Из определения матрицы перехода легко заметить, что матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к этому же базису $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ является единичной, т.е. $gCg = E$ и мы имеем: $gCf \cdot fCg = E$. Аналогично получаем $fCg \cdot gCf = fCf = E$. Отсюда следует, что $fCg = gC^{-1}f$, а $gCf = fC^{-1}g$.

Изоморфизм линейных пространств

Определение. Линейные пространства X и Y над полем k называются изоморфными, если существует биективное отображение f: $X \to Y$, для которых справедливо:

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v), \ \forall a, b \in k; \ \forall u, v \in X \tag{L_f}$$

Отображение f при этом называется изоморфизмом векторных пространств X и Y.

Равенство L_f формулируют так: f - это изоморфизм аддитивных групп (значит выполняется $f(a)+f(b) = f(a+b)$) векторных пространств X и Y, обладающий дополнительным свойством $f(av) = af(v)$, $\forall a \in k$, $\forall v \in X$. f - линейное отображение над полем k.

Если изоморфизм, то существует обратное отображение, f^{-1}: $y \to x$ (следует из биективности)

Пусть y - изоморфизм X и Z, f - изоморфизм X и Y, $Z \vec{y} X \vec{f} Y$. Тогда композиция $f \circ y$ - это изоморфизм Y и Z.

Инвариантность размерности при изоморфизме

Размерность векторного пространства является инвариантом изоморфизма: если $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ - базис линейного пространства X, то $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ - это базис линейного пространства Y и обратно. Если X и Y изоморфны, то их размерности совпадают.

Теорема об изоморфности векторных пространств одинаковой размерности

Теорема. Все векторные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.

Доказательство. Пусть X - линейное пространство, $\dim X = n$. Возьмём базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ пространства X. В этом базисе однозначно определены координаты $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ произвольного вектора $x \in X$, $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$.

Рассмотрим отображение f: $x \in X \to (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in k^n$, это отображение биективно (из единственности разложения по базису). При этом, если $y = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n$, то $ax + by = (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \ldots, aa_n + bb_n) = a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. То есть работает правило $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

Таким образом f - это изоморфизм пространства X и координатного пространства k^n.

Следствие. Любое n-мерное линейное пространство X изоморфно k^n.

Соответственно, изоморфизм между двумя векторными пространствами X и Y, если он существует, определён не единственным образом, за исключением двух частных случаев:

a $X = Y = \{0\}$

1. $\dim X = \dim Y = 1$, k - поле из двух элементов.