Вопрос №1
Пределы числовых последовательностей

Определение предела числовой последовательности

Определение. Вещественное число x называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если выполняется следующее условие: для любого интервала (a, b) такого, что $x \in (a, b)$ существует номер N, обладающий тем свойством, что $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in (a, b)$.

Используя понятие окрестности точки, определение предела можно дать так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall O(x)\ \exists N\ :\ \forall n \geq N\ x_n \in O(x)$.

Помимо конечных пределов рассматриваются также бесконечные пределы, определяемые следующим отношениями:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M\ \exists N\ :\ \forall n \geq N\ x_n > M, \tag{$-\infty$}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M\ \exists N\ :\ \forall n \geq N\ x_n < M. \tag{$-\infty$}$$

где $+\infty$ и $-\infty$ - правая и левая бесконечно удаленные точки числовой прямой.

Свойства предела

1 Если предел последовательности существует, то он единственен.

Определение. Расширенной числовой прямой называется множество $\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty \cup (-\infty, +\infty) \cup +\infty\}$. При этом окрестностью точки $\{-\infty\}$ называется любой интервал вида $(-\infty, a)$, а окрестностью точки $\{+\infty\}$ любой интервал вида $(b, +\infty)$.

Доказательство единственности основано на следующем свойстве.

Лемма (об отделимости). Если $x \in \bar{\mathbb{R}}$ и $y \in \bar{\mathbb{R}}$, $x \neq y$, то существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $x < y$. Если $x = -\infty$ и $y = +\infty$, то возьмем $O(x) = (-\infty, a_1)$ и $O(y) = (a_2, +\infty)$, где $a_1 < a_2$. Из определения интервала следует, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Пусть числа x и y конечны. Тогда по лемме о плотности существует конечная десятичная дробь a, лежащая между x и y: $x < a < y$. В этом случае возьмем $O(x) = (-\infty, a)$, $O(y) = (a, +\infty)$, тогда $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Пусть числа $x = -\infty$ и y конечны. Возьмем $a = \underline{(y)_0} - 1$ и $b = \overline{(y)_0} + 1$. Тогда $(a, b) = O(y)$. Взяв в этом случае $O(x) = (-\infty, a)$, получаем $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Аналогично рассматривается случай, когда x конечно, а $y = +\infty$.

Теорема (о единственности предела). Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два разных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, $x \neq y$. По лемме об отделимости существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Из условия, что x и y - пределы, получаем $\exists N_1 \colon \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in O(x)$, $\exists N_2 \colon \forall n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in O(y)$. Возьмем $n = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $x_n \in O(x)$ и $x_n \in O(y)$. Следовательно, $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Это противоречит выбору окрестностей.

2 Любая стационарная последовательность имеет предел: $\forall n x_n = C \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

3 Для любого вещественного числа x справедливы предельные равенства
$$\lim_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} \overline{(x)_n} = x. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем первое из равенств 1. Пусть (a, b) - произвольная конечная окрестность вещественного числа x, то есть $a < x < b$. Тогда $\exists N \colon \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N}$. Следовательно, в соответствии со свойствами десятичных приближений справедливы неравенства $a \leq \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N} \leq x < b$, $\forall n \geq N \Rightarrow \underline{(x)_N} \leq \underline{(x)_n} \leq x$. Таким образом, для любого $n \geq N$ имеем неравенства $a < \underline{(x)_n} < b$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{(x)_n} = x$. Второе из равенств 1 доказывается аналогично. В частности, для $x = 0$ имеем $\overline{(x)_n} = 10^{-n}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$.

4 Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

5 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to-\infty} n = -\infty$.

6 Последовательность $x_n = (-1)^n \cdot n$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Доказательство. Предположим противное, то есть что существует вещественное число x такое что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Полагаем

$a = \underline{(x)_0} - 1$, $b = \overline{(x)_0} + 1$, $N = \max\{|a|, |b|\}$. Здесь N - натуральное. Интервал (a, b) представляет собой окрестность $O(x)$, причем вне этой окрестности лежит любое число x_n с номером $n \geq N$: если n нечетное, то $x_n \leq a$, если же n четное, $n > N$, то $x_n \geq b$. Это противоречит определению предела. Аналогично рассматривается предположение, что $x = +\infty$ и $x = -\infty$.

Примеры нахождения

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)-n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 5.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} = 0.$

Неравенство Бернулли

Теорема. Если $x > -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$ для всех натуральных $n \geq 1$.

Доказательство. Индукцией по n. При $n = 1$, оно верно, пусть при $n = n$ тоже верно, то при $n = n + 1$: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) \geq (1 + nx) + x = 1 + (n + 1)x$.

Второй замечательный предел

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (или $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$).

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая последовательности: $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$; $n \in \mathbb{N}$. По формуле бинома Ньютона: $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \cdot b^n$; $n \in \mathbb{N}$. Полагая $a = 1$; $b = \frac{1}{n}$, получим:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n}^n = \tag{2}$$

С увеличением n число положительных слагаемых в правой части равенства 2 увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $(1-\frac{1}{n}),(1-\frac{2}{n}),\ldots,$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\};\ n\in\mathbb{N}$ – возрастающая, при этом

$$(1+\frac{1}{n})^n\geq 2,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства на единицу, правая часть увеличится, получим неравенство $(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$. Усилим полученное неравенство, заменим $3,4,5,\ldots,$ стоящие в знаменателях дробей, числом 2: $(1+\frac{1}{n})^n<1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}})$. Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot(1-\frac{1}{2^n})<2$. Поэтому

$$(1+\frac{1}{n})^n<1+2=3. \tag{4}$$

Итак, последовательность ограничена сверху, при этом $\forall n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства 3 и 4: $2\geq(1+\frac{1}{n})^n<3$.

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса (критерий сходимости последовательности) последовательность $x_n=(1+\frac{1}{n})^n,\ n\in\mathbb{N}$ монотонно возрастает и ограничена, значит имеет предел, обозначаемый буквой e. Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

Число Эйлера

Рассмотрим выражение $(1+\frac{1}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}$. Взяв n неограниченно возрастающих значений и вычисляя соответствующие значения степени $(1+\frac{1}{n})^n$, получим следующую таблицу:

n	1	2	10	100	1000	10000	$\ldots$
$(1+\frac{1}{n})^n$	2	$2,25$	$2,594$	$2,705$	$2,717$	$2,718$	$\ldots$

Можно заметить, что при увеличении n значение степени стремится к какому-то пределу, приближенно равному $2,718$. Докажем это.

Теорема. Последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ $(n=1,2,\ldots)$ стремится к конечному пределу, заключенному между 2 и 3.

Доказательство. Пользуясь биномом Ньютона будем иметь: $(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(\frac{1}{n})+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(\frac{1}{n})^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot(\frac{1}{n})^n$ или

$$(1+\frac{1}{n})^n=2+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{2\cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}). \tag{5}$$

При $n > 1$ все слагаемые в формуле 5 положительны, причем с возрастанием показателя n увеличивается число слагаемых и каждое соответствующее слагаемое становится больше.

Следовательно, последовательность $(1 + \frac{1}{n})^n$, начиная с наименьшего значения, равного 2, растет вместе с показателем n. С другой стороны очевидно, что каждое слагаемое в правой части формулы 5 увеличится, если все множители знаменателей заменить на двойки, а каждую из скобок заменить единицей. Поэтому: $(1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$. В силу известной формулы для суммы арифметической прогрессии имеем: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$. Отсюда: $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

Таким образом, члены последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$ при неограниченном возрастании n постоянно возрастают, оставаясь больше 2, но меньше 3.

Итак, $e = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Приближенно значение этого числа есть: $e \approx 2,718281828459045$.

Полагая $\frac{1}{x} = \alpha$, будем иметь: $e = \lim\limits_{\alpha \to \infty} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Через e удобно выражать многие пределы. Оно иррационально, служит основанием натурального логарифма.

Натуральный логарифм

Если основание логарифма равно e, то такой логарифм называется натуральным. Записывается он как $\log_e a$ (краткая запись: $\ln(a)$). Функция натурального логарифма монотонно возрастает при $x > 0$.

Выражение логарифма числа x при основании a через натуральный логарифм этого числа: $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$.

Гармонический ряд

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ - гармонический ряд.

Также записывается как: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k}$.

Ряд назван гармоническим, так как складывается из "гармоник": k-я гармоника, извлекаемая из скрипичной струны, – это основной тон, производимый струной длиной $\frac{1}{k}$ от длины исходной струны. Кроме того, каждый член ряда, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов.

Особенностью гармонического ряда является то, что он постепенно расходится.

Скорость стремления к бесконечности последовательности частичных сумм гармонического ряда

Пусть $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$. Имеем для любого $n = 1, 2, \ldots$: $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \; : \; \forall N \; \exists n = N, \; \exists m = 2N = 2n \; : \; |H_n - H_m| \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что последовательность $\{H_n\}$ не удовлетворяет условию Коши. Согласно следствию из теоремы Коши у последовательности $\{H_n\}$ не может существовать конечного предела. Но $\{H_n\}$ монотонно возрастает: $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0 \;\; \Rightarrow H_{n+1} > H_n$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, у нее есть предел. Но так как предел не может быть конечным, то он равен бесконечности: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = +\infty$.

Вопрос №2

Уравнение кривых на плоскости

Уравнением кривой (линии) на координатной плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной кривой и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой кривой.

В общем случае уравнение кривой может быть записано в виде $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$.

Полярная система координат

Определение. Полярная система координат – двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом. Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой декартовой, или прямоугольной, системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Каждая точка в полярной системе координат может быть определена двумя полярными координатами, которые обычно называются ρ (радиальная координата) и ϕ (угловая координата, полярный угол). Координата ρ соответствует расстоянию от точки до центра, или полюса системы координат, а координата ϕ равна углу, отсчитываемому в направлении против часовой стрелки от луча через 0° (иногда называемого полярной осью системы координат). Полярный радиус определен для любой точки плоскости и всегда принимает неотрицательные значения $\rho \geq 0$. Полярный угол ϕ определен для любой точки плоскости, за исключением полюса O, и принимает значения $-\pi < \phi \leq \pi$. Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:

- в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки), если значение угла положительное;

- в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки), если значение угла отрицательное.

Например, точка с координатами $(3, 60^\circ)$ будет выглядеть на графике как точка на луче, который лежит под углом 60° к полярной оси, на расстоянии трёх единиц от полюса. Точка с координатами $(3, -300^\circ)$ будет находиться на том же месте.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Каноническое уравнение прямой на плоскости вида $\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y}$ задает в прямоугольной системе координат Oxy прямую, проходящую через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y)$. Направляющим вектором прямой a, которая проходит через точки M_1 и M_2, является вектор $M_1\vec{M}_2$, он имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Каноническое уравнение прямой a, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (или $\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y-y_2}{y_2-y_1}$).

Параметрические уравнения прямой на плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеют вид $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \lambda \end{cases}$ или $\begin{cases} x = x_2 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda \\ y = y_2 + (y_2 - y_1) \cdot \lambda \end{cases}$.

Угловой коэффициент прямой

Уравнение прямой, разрешенной относительно y, называется уравнением с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

Здесь угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}(\phi)$, где ϕ - угол наклона прямой к оси Ox, а параметр b (равен величине отрезка OB, отсекаемого прямой от оси Oy) сдвиг прямой по оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ и имеющей коэффициент k, находится по формуле: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Если эта прямая параллельна оси Oy, то ее уравнение записывается в виде: $x = x_0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (l, m)$.

Точка $M(x, y)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a} = (l, m)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарны. Векторы $\vec{a} = (l, m)$ и $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{6}$$

Полученная система уравнений задает искомую прямую и называется каноническими уравнениями прямой на плоскости.

Уравнения 6 представим в виде $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = t$, где t принимает любые значения $-\infty < t < \infty$.

Следовательно, можем записать $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$, где $-\infty < t < \infty$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть дана некоторая точка M_0 и вектор $\vec{n}$. Проведем через точку M_0 прямую l перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Пусть M - произвольная точка. Точка M лежит на прямой l в том и только в том случае, когда вектор $\vec{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{M_0M}$ равнялось нулю:

$$\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0. \tag{7}$$

Чтобы выразить последнее равенство в координатах, введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть точки M_0 и M имеют координаты (x_0, y_0) и (x, y). Тогда: $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Обозначим координаты нормального вектора $\vec{n}$ через (A, B). Теперь равенство 7 можно записать так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Уравнение 8 есть уравнение прямой l, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = (A, B)$.

Общее уравнение прямой на плоскости

Теорема. Всякое невырожденное уравнение первой степени вида $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ представляет собой уравнение некоторой прямой на плоскости Oxy.

Доказательство.

1. Пусть сначала $B \neq 0$. Тогда уравнение выше можно представить в виде: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Сравнивая это с уравнением $y = kx + b$, мы получим, что это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$ и начальной ординатой $b = -\frac{C}{B}$.

2. Пусть теперь $B = 0$; тогда $A \neq 0$. Имеем $Ax + C = 0$ и $x = -\frac{C}{A}$. Полученное уравнение представляет собой уравнение прямой параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a = -\frac{C}{A}$.

Вычисление угла между прямыми

Рассмотрим две прямые (не параллельные оси Oy), заданные их уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg}(\phi)$ и $y = k'x + b'$, где $k' = \operatorname{tg}(\phi')$. Требуется определить угол θ между ними. Точнее, под углом θ мы будем понимать наименьший угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки, на который вторая прямая повернута относительно первой $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Этот угол θ равен углу ACB треугольника ABC. Далее, из элементарной геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Поэтому $\phi' = \phi + \theta$, или $\theta = \phi' - \phi$. Отсюда на основании известной формулы тригонометрии получаем: $\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\phi' - \phi) = \frac{\operatorname{tg}(\phi') - \operatorname{tg}(\phi)}{1 + \operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\phi')}$. Заменяя $\operatorname{tg}(\phi)$ и $\operatorname{tg}(\phi')$ соответственно на k и k', окончательно получаем: $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{k' - k}{1 + k \cdot k'}$. Эта формула дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые параллельны, то $\phi' = \phi$ и, следовательно: $k = k'$.

Обратно: если выполнено условие $k = k'$, то, учитывая, что ϕ' и ϕ заключаются в пределах от 0 до π, получаем: $\phi' = \phi$, и, следовательно, рассматриваемые прямые или параллельны, или сливаются.

Прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой.

Если прямые перпендикулярны, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно: $\cot(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} = \frac{1 + k \cdot k'}{k' - k} = 0$. Отсюда $1 + kk' = 0$ и $k' = -\frac{1}{k}$. Справедливо и обратное утверждение.

Две прямые на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Вычисление расстояния от данной точки до данной прямой

Если мы определим координаты (x_2, y_2) точки H_1, то искомое расстояние $|M_1 H_1|$ мы сможем вычислить, используя формулу для нахождения расстояния от точки M_1 до точки H_1 по их координатам: $|M_1 H_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где (x_2, y_2) координаты точки H_1, а (x_1, y_1) - координаты точки M_1. Или: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где A и B - коэффициенты из $Ax + By + C = 0$ - обобщенного уравнения прямой.