## Содержание



# 1 Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Тогда на любом интервале $(-l,+l)$ функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье по соответствующей интервалу тригонометрической системе

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos(\frac{k\pi x}{l}) + b_k \sin(\frac{k\pi x}{l})). \qquad ((TS))$$

Здесь $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{l})dx$, $b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\sin(\frac{k\pi x}{l})dx$, $k = 1, 2, \ldots$. Не вдаваясь в строгие обоснования, выясним, во что перейдет ряд $(TS)$ при переходе к пределу при $l \to +\infty$.

1. Если функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, то интеграл $\int\limits_{-l}^{+l} f(x)dx$ как функция переменной $l$ ограничен:$|\int\limits_{-l}^{+l} f(x)dx| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \ \forall l \geq 0$. Следовательно, в этом случае $a_0 = a_0(l)$ стремится к нулю при $l \to +\infty$. Естественно предположить, что и в случае функций $f(x)$ из более общего класса

нежели абсолютно интегрируемые на всей числовой прямой, предельное соотношение $\lim\limits_{l\to+\infty} a_0(l) = 0$ также имеет место.

2. Сумму слагаемых с косинусами в разложении $(TS)$ запишем в равносильном виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right)dt\right)\cos\left(y_k x\right)\cdot\Delta_{y_k}, \quad ((CS))$$

где $y_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\Delta_{y_k} = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}$. Предположим теперь, что существует следующий предел:

$$a(y) = \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\cos(yt)dt. \quad ((A))$$

Тогда при достаточно больших $l$ можем записать приближенные равенства

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right)dt \approx a(y_k),\ \ k = 1, 2, \ldots. \quad ((CS'))$$

Подставляя их в формулу $(CS)$, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a(y_k)\cos(y_k x)\cdot\Delta_{y_k}. \quad ((CS'))$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)dy$ по положительной полуоси. Узлами этой интегральной суммы служат числа $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, расстояние между соседними узлами $\Delta_{y_k} = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}$ при $l \to +\infty$ стремится к нулю. В качестве предельного значения интегральной суммы $(CS')$ при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)dy$, если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси. Вэтом случае имеем $\lim\limits_{l\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)dy$.

3. Аналогично преобразуется сумма слагаемых с синусами в разложении $(TS)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)dt\right)\sin(y_k x)\cdot\Delta_{y_k}, \quad ((SS))$$

где, как и раньше, $y_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\Delta_{y_k} = \frac{\pi}{l} = y_{k+1} - y_k$. Предполагая, что существует конечный предел

$$b(y) = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\sin(yt)dt, \qquad ((B))$$

записываем при достаточно больших $l$ последовательность приближенных равенств

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{+l} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)dt \approx b(y_k),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Подставляя их в формулу $(SS)$, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} b(y_k)\sin(y_k x)\cdot\Delta_{y_k}. \qquad ((SS'))$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)dy$ по положительной полуоси. Узлами этой интегральной суммы служат числа $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, расстояние между соседними узлами $\Delta_{y_k} = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}$ стремится к нулю при $l \to +\infty$. В качестве предельного значения интегральной суммы $(SS')$ при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)dy$, если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси. Вэтом случае имеем $\lim\limits_{l\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)dy$.

В результате проведенных нами неформальных рассуждений приходим к заключению, что сумма тригонометрического ряда в пределе при $l \to +\infty$ переходит в интеграл вида $\int\limits_0^{+\infty} (a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx))dy$, где функции $a(y)$ и $b(y)$ определяются равенствами $(A)$ и $(B)$. В частности, $a(y)$ и $b(y)$ зависят от исходной функции $f(x)$. Для того чтобы эту зависимость подчеркнуть, иногда пишут $a = a_f(y)$ и $b = b_f(y)$.

**Определение**

Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} (a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx))dy, \tag{(AB)}$$

если только он существует, называется интегралом Фурье для исходной функции $f(x)$.

Выясним, для каких именно функций интеграл Фурье существует.

# 2 Интегралы Фурье абсолютно интегрируемых функций

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$. Тогда соответствующие ей пределы $(A)$ и $(B)$ заведомо существуют и обозначаются следующим образом

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt, \tag{(A')}$$

$$b(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt. \tag{(B')}$$

При этом функции $a(f;y)$ и $b(f;y)$ определены на всей числовой прямой и ограничены на своей области определения: $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}}|a(f;y)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$,

$\sup\limits_{y\in\mathbb{R}}|b(f;y)| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$. Более того для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ интегралы $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны по переменной $y$ и, как следует из теоремы Римана об осцилляции, удовлетворяют следующим предельным соотношениям на бесконечности: $\lim\limits_{y\to\pm\infty} a(f;y)=0$, $\lim\limits_{y\to\pm\infty} b(f;y)=0$. Если же функция $f(x)$ не является абсолютно интегрируемой, то сделанные утверждения о свойствах функций $a(f;y)$ и $b(f;y)$, вообще говоря, неверны.

# 3 Локально интегрируемые функции. Интеграл в смысле главного значения. Пример

Интеграл Фурье существует для функций из более широкого класса нежели абсолютно интегрируемые.

### Определение

Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале числовой прямой. Для любой локально интегрируемой функции $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$, предел $\lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l}\varphi(x)dx$, если он существует, называется интегралом от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\varphi(x)$ в смысле главного значения. При этом применяется следующее обозначение: $\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_{-l}^{+l}\varphi(x)dx$. Этот же предел иногда называют интегралом в смысле Коши. Таким образом, формулы $(A')$ и $(B')$ в случае локально интегрируемой функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, принимают следующий вид:

$$a(f;y) = \mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt, \qquad ((A''))$$

$$b(f;y) = \mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt. \qquad ((B''))$$

Символ V. P. перед интегралом часто не пишут, что как правило не приводит к недоразумениям.

*Пример.* Для локально суммируемой функции $f(x) = \frac{\sin(\delta x)}{x}$, где $\delta > 0$, найти соответствующие ей интегралы в смысле главного значения $a(f; y)$ и $b(f; y)$.

*Решение.* Рассматриваемая функция $f(x)$ является четной: $f(-x) = f(x)$. Следовательно, для любого вещественного $y$ произведение $f(x) \cdot \sin(yx)$ — это нечетная функция, интеграл от которой по любому симметричному интервалу $(-l, +l)$ обязательно равен нулю. Это означает, что функция $b(f; y)$ тождественно равна нулю. Далее из четности произведения $f(x) \cdot \cos(yx)$ по переменной $x$ и определения $(A'')$ имеем $a(f; y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\delta x)}{x} \cos(yx) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((\delta+y)x)}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((\delta-y)x)}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\delta + y) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\delta - y)$. Здесь $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ при $x \neq 0$ и $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Таким образом, функция $a(f; y)$ равна единице при $|y| < \delta$ и равна нулю при $|y| > \delta$. Кроме того $a(f; -\delta) = a(f; +\delta) = \frac{1}{2}$. $\Box$

Отметим, что полученная в предыдущем примере функция $a(f; y)$ разрывна по $y$. Это ни- чему не противоречит: функция $f(x) = \frac{\sin(\delta x)}{x}$ локально суммируема, но не является абсолютно интегрируемой на числовой прямой.

# 4 Признак Дини сходимости интеграла Фурье. Представление функции интегралом Фурье

Установим некоторые условия, достаточные для сходимости соответствующего функции $f(x)$ интеграла Фурье. Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Тогда $a(f; y)$ и $b(f; y)$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и вопрос о сходимости интеграла Фурье $\int\limits_0^{+\infty} (a(f; y) \cos(yx) + b(f; y) \sin(yx)) dy$ сводится к вопросу о существовании предела функции

$$t_\eta(f; x) = \int\limits_0^{\eta} (a(f; y) \cos(yx) + b(f; y) \sin(yx)) dy \text{ при } \eta \to +\infty. \qquad ((T))$$

Подставляя в равенство $(T)$ формулы $a(f;y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt$, $b(f;y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt$, получим следующее представление:

$$t_\eta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\eta dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))dt. \qquad ((T'))$$

Для внутреннего интеграла здесь справедлива оценка $|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))dt|\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$. Выполнение этого условия позволяет поменять в формуле $(T')$ порядок интегрирования и получить равенство $t_\eta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\int\limits_0^\eta\cos(y(x-t))dy)dt$. Внутренний интеграл по $dy$ здесь вычисляется явно: $\int\limits_0^\eta\cos(y(x-t))dy=\frac{\sin(\eta(x-t))}{x-t}$. Подставляя это равенство в предыдущее и делая замену переменной интегрирования $t=x+\xi$, получаем $t_\eta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi$. Воспользовавшись вэтом равенстве четностью функции $\frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}$ по переменной $\xi$, получаем представление

$$t\eta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\xi}\sin(\eta\xi)d\xi. \qquad ((T''))$$

**Определение**

Функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, удовлетворяет в точке $x_0$ односторонним условиям Дини, если

1. вэтой точке существуют оба односторонних предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$;
2. функции $F_+(\xi)=\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi}$ и $F_-(\xi)=\frac{f(x_0-\xi)-f(x_0-0)}{\xi}$ абсолютно интегрируемы на некотором интервале вида $(0,\delta)$, где $\delta>0$.

**Теорема (признак Дини сходимости интеграла Фурье)**

Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на числовой прямой и удовлетворяет в точке $x_0$ односторонним условиям Дини. Тогда соответствующий этой функции интеграл Фурье в точке $x_0$ сходится и равен величине

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

**Доказательство**

Воспользуемся равенством $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\eta\xi)}{\xi} d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$ $\forall \eta > 0$ и представим величину $M_f(x_0)$ в следующем виде $M_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{\xi} \sin(\eta\xi) d\xi$. Вычитая это равенство из соотношения $(T'')$ и пользуясь определением функций $F(\pm\xi)$, получаем $T_\eta(f;x_0) - M_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} [F_+(\xi) + F_-(\xi)] \sin(\eta\xi) d\xi =$ $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} F_+(\xi) \sin(\eta\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} F_-(\xi) \sin(\eta\xi) d\xi$. Каждый из двух интегралов по $d\xi$ в правой части этого равенства представим в виде следующей суммы

$$\int\limits_0^{+\infty} F_\pm(\xi) \sin(\eta\xi) d\xi = \int\limits_0^{\delta} F_\pm(\xi) \sin(\eta\xi) d\xi + \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(x_0 \pm \xi)}{\xi} \sin(\eta\xi) d\xi - f(x_0 \pm 0) \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\sin(\eta\xi)}{\xi} d\xi. \tag{$(F_\pm)$}$$

В качестве положительного предела интегрирования $\delta > 0$ здесь возьмем параметр из односторонних условий Дини, которым по условию удовлетворяет функция $f(x)$.

Далее, функции $F_+(\xi) = \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi}$ и $F_-(\xi) = \frac{f(x_0-\xi)-f(x_0-0)}{\xi}$ абсолютно интегрируемы на интервале $(0,\delta)$ и, следовательно, по теореме Римана об осцилляции имеют место предельные равенства $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \int\limits_0^{\delta} F_\pm(\xi) \sin(\eta\xi) d\xi =$ 0. Из условия, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой заключаем, что отношения $\frac{f(x_0+\xi)}{\xi}$ и $\frac{f(x_0-\xi)}{\xi}$ на интервале $(\delta, +\infty)$ также абсолютно интегрируемы: $|\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(x_0\pm\xi)}{\xi} d\xi| \le \frac{1}{\delta} \int\limits_\delta^{+\infty} |f(x_0 \pm \xi)| d\xi <$

$+\infty$. Применяя к этим отношениям теорему Римана об осцилляции, получаем предельные равенства $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x_0\pm\xi)}{\xi}\sin(\eta\xi)d\xi=0$. Для третьего интеграла в разложении $(F_\pm)$ справедливы следующие соотношения: $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin(\eta\xi)}{\xi}d\xi=\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\delta_\eta}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=0$. Последнее равенство справедливо в силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, при $\eta\to+\infty$ существует предел суммы в правой части равенств $(F_\pm)$ и этот предел равен нулю. Следовательно, предел при $\eta\to+\infty$ разности $T_\eta(f;x_0)-M_f(x_0)$ также существует и равен нулю. $\square$

**Следствие**

В условиях предыдущей теоремы справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(y(x_0-t))dt=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

называемое формулой Фурье для функции $f$ в точке $x_0$.

**Доказательство**

Несобственный интеграл в левой части формулы Фурье по определению представляет собой предел при $\eta\to+\infty$ функции $T_\eta(f;x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\eta}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(y(x_0-t))dt$. Но этот же предел, как уже доказано, равен полусумме $M_f(x_0)$. В силу единственности предела записанная выше формула Фурье действительно справедлива. $\square$

В частности, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна всюду на числовой прямой, а также удовлетворяет в точке $x$ односторонним условиям Дини, то имеет место разложение

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(y(x-t))dt\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Это равенство называется представлением функции $f(x)$ интегралом Фурье, или же формулой Фурье для функции $f(x)$.

**Определение**

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ из интервала $(a,b)$. Если для некоторого положительного $\alpha > 0$ существуют такие постоянные $L$ и $\delta > 0$, что

$$|f(x_0+\xi) - f(x_0)| \leq L|\xi|^{\alpha} \ \forall \xi \in (-\delta, +\delta), \qquad ((LC))$$

то функция $f(x)$, как говорят, удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$.

Если в точке $x_0$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то она непрерывна в этой точке.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x_0$ условию Липшица положительного порядка $\alpha > 0$, то в этой точке $f(x)$ удовлетворяет и односторонним условиям Дини.

**Следствие**

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема всюду на числовой прямой и удовлетворяет в точке $x_0$ условию Липшица положительного порядка, то ее интеграл Фурье вэтой точке сходится к значению $x_0$.

# 5 Комплексная форма интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ локально интегрируема на числовой прямой и при этом существуют соответствующие ей интегралы в смысле главного значения: $a(f;y) = \mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos{(yt)}dt$, $b(f;y) = \mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin{(yt)}dt$. Тогда есть возможность определить следующую комплекснозначную функцию:

$$c(f;y) = \frac{1}{2}(a(f;y) - ib(f;y)) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt. \qquad ((FT))$$

Последнее равенство здесь справедливо в силу линейности операций предельного перехода и интегрирования. Домножая обе части первого из равенств $(FT)$ на функцию $e^{iyx}$ и интегрируя результат по переменной $y$ из интервала $(-\eta, +\eta)$, получаем соотношение $\int\limits_{-\eta}^{+\eta} c(f;y)e^{iyx}dy =$

$\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta}^{+\eta}(a(f;y)-ib(f;y))(\cos(yx)+i\sin(yx))dy$. Раскрывая в выражении под интегралом скобки и учитывая, что в силу четности $a(f;y)$ и нечетности $b(f;y)$ произведения $a(f;y)\cdot\sin(yx)$ и $b(f;y)\cdot\cos(yx)$ представляют собой нечетные функции переменной $y$, запишем последнее равенство в следующем виде: $\int\limits_{-\eta}^{+\eta}c(f;y)e^{iyx}dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-n}^{+n}(a(f;y)\cos(yx)+b(f;y)\sin(yx))dy = \int\limits_{0}^{+\eta}(a(f;y)\cos(yx)+b(f;y)\sin(yx))dy$. Переходя здесь к пределу при $\eta\to+\infty$ и учитывая, что правая часть переходит при этом в интеграл Фурье для функции $f$, заключаем, что этот самый интеграл Фурье представим в виде следующего интеграла в смысле главного значения:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}(a(f;y)\cos(yx)+b(f;y)\sin(yx))dy = \mathrm{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c(f;y)e^{iyx}dy. \quad ((CFT))$$

**Определение**

Интеграл $(CFT)$, в котором функция $c(f;y)$ задается формулой $(FT)$, называется интегралом Фурье в комплексной форме.

**Теорема (представление функции интегралом Фурье)**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда в любой точке $x_0$ числовой прямой выполняется равенство

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}dt)e^{iyx}dy, \qquad ((CFT'))$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

**Доказательство**

Заметим, что правые части формул $(CFT')$ и $(CFT)$ совпадают друг с другом. Это означает, что правая часть доказываемой формулы $(CFT')$

является интегралом Фурье рассматриваемой функции в обычной (вещественной) форме. Но для функций, удовлетворяющих условиям теоремы, интеграл Фурье в любой точке вещественной прямой равен значению порождающей его функции в этой же точке. $\square$

Интеграл в правой части равенства $(CFT')$ называют повторным интегралом Фурье для функции $f$. Представимость функции повторным интегралом Фурье впервые была установлена Коши. Заметим, что функция $c(f;y)$ удовлетворяет для вещественной функции $f$ следующему интегральному тождеству: $\int\limits_{-\eta}^{+\eta} \overline{c}(f;y)e^{-iyx}dy = \int\limits_{-\eta}^{+\eta} s(f;y)e^{iyx}dy$, где $\eta > 0$, а $\overline{c}(f;y)$ обозначает комплексно сопряженную к $c(f;y)$ функцию. Переходя вэтом интегральном тождестве к пределу при $\eta \to +\infty$ и пользуясь формулой $(CFT')$, получаем в пределе еще одно полезное равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt)e^{-iyx}dy. \qquad ((CFT''))$$

Отличие этой формулы от $(CFT')$ в показателях экспонент под интегралами в правой части.

### Следствие

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой прямой, а также удовлетворяет в каждой точке своей области определения условию Дини. Тогда, если $f(x)$ четная, то в любой точке $x$ числовой прямой выполняется равенство $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} (\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos{(yt)}dt)\cos{(xy)}dy$.

Если же $f(x)$ нечетная, то справедлива формула $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} (\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin{(yt)}dt)\sin{(xy)}dy$.