Тема : Дискретное преобразование Фурье

$\mathbf{1^0}$. Аналог разложения в ряд Фурье функции, известной лишь в конечном числе узлов. $\mathbf{2^0}$. Система для коэффициентов разложения в покомпонентном и матричном виде, ее симметризация. $\mathbf{3^0}$. Лемма об ортогональности базисных функций в дискретном скалярном произведении. Определение прямого и обратного дискретного преобразования Фурье. $\mathbf{4^0}$. Расчетные формулы для быстрого преобразования Фурье. Подсчет и сравнение количества арифметических операций. $\mathbf{5^0}$. Задача тригонометрической интерполяции и ее чувствительность к погрешностям в исходных данных.

1^0. В приложениях широко используются различные варианты важной операции математического анализа — преобразования Фурье функций непрерывного аргумента. Не менее часто применяется представление непрерывных и периодических функций в виде сходящихся тригонометрических рядов.

Как известно, всякая непрерывно дифференцируемая периодическая с периодом 1

функция $f = f(x)$ представима сходящимся рядом Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{i2\pi kx}. \qquad (FS)$$

Символ i в степени экспоненты — это, как обычно, мнимая единица.

Коэффициенты разложения (FS) вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_k = \int\limits_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}dx, \qquad (CF)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Однако, функция $f = f(x)$ зачастую бывает известна лишь в конечном числе точек отрезка $[0, 1]$. В этом случае нет возможности вычислить последовательность интегралов $(\boldsymbol{CF})$ точно и вместо формул $(\boldsymbol{FS})$ и $(\boldsymbol{CF})$ предлагается использовать некоторый их аналог.

Предполагаем далее, что значения $\boldsymbol{f = f(x)}$ известны в равноотстоящих узлах

$$\boldsymbol{x_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1.}$$

В этом случае аналогом разложения в ряд Фурье ($\boldsymbol{FS}$) служат следующие равенства:

$$\boldsymbol{f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi k \frac{j}{N} i}, \qquad 0 \le j < N.} \qquad (\boldsymbol{SDF})$$

Отметим, что разложение ($\boldsymbol{SDF}$) справедливо тогда и только тогда, когда тригонометрический полином

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i2\pi kx} \qquad (TP_N)$$

интерполирует функцию $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ по ее значениям в узлах x_j, $0 \leq j < N$. Возникает вопрос о том, как найти коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, этого интерполяционного полинома, или, что то же самое, коэффициенты разложения (SDF).

2^0. Сформулируем возникшую вспомогательную задачу о коэффициентах разложения (SDF).

Задача (DDF). *Найти по известным значениям функции в узлах*

$$f_j = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

коэффициенты $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ *разложения в сумму* (SDF).

Введем следующие необходимые для решения задачи (**DDF**) обозначения:

$$\varphi_k(x) \equiv e^{i2\pi kx}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Сопутствующий задаче тригонометрический полином имеет вид линейной комбинации

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k(x).$$

Условия ($\boldsymbol{SDF}$) при этом записываются в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ в следующем покомпонентном виде:

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0)a_0 + \varphi_1(x_0)a_1 + \ldots + \varphi_{N-1}(x_0)a_{N-1} = f_0, \\ \varphi_0(x_1)a_0 + \varphi_1(x_1)a_1 + \ldots + \varphi_{N-1}(x_1)a_{N-1} = f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_0(x_{N-1})a_0 + \varphi_1(x_{N-1})a_1 + \\ +\varphi_2(x_{N-1})a_2 + \ldots + \varphi_{N-1}(x_{N-1})a_{N-1} = f_{N-1}. \end{cases}$$

В матричной формулировке эта система принимает следующий вид:

$$P\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}. \qquad (SDF')$$

Квадратная матрица P в этой записи задается равенством

$$P = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_{N-1}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_{N-1}(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_{N-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_{N-1}) & \varphi_1(x_{N-1}) & \cdots & \varphi_{N-1}(x_{N-1}) \end{bmatrix},$$

вектор-столбец неизвестных $\overrightarrow{a}$ покомпонентно записывается следующим образом

$$\overrightarrow{a} =\uparrow (a_0, a_1, a_2, \ldots a_{N-1}),$$

а вектор-столбец правой части имеет вид

$$\overrightarrow{f} =\uparrow (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}).$$

Вместе с матрицей P с комплексными элементами рассмотрим ей сопряженную P^*, которая получается транспонированием P и взятием сопряженных к ее элементам комплексных чисел. Умножив систему $(\boldsymbol{SDF'})$ слева на $\boldsymbol{P^*}$, получим

$$\boldsymbol{P^*P\overrightarrow{a} = P^*\overrightarrow{f}}. \qquad (\boldsymbol{SDF''})$$

Произведение $\boldsymbol{P^*P \equiv \Gamma = (\gamma_{jk})}$ представляет собой матрицу Грама для функций

$$\boldsymbol{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{N-1}}.$$

В поэлементном виде матрица $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{P}^*\boldsymbol{P}$ записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_{\mathbf{0}}, \varphi_{\mathbf{0}}) & (\varphi_{\mathbf{1}}, \varphi_{\mathbf{0}}) & \cdots & (\varphi_{\boldsymbol{N-1}}, \varphi_{\mathbf{0}}) \\ \\ (\varphi_{\mathbf{0}}, \varphi_{\mathbf{1}}) & (\varphi_{\mathbf{1}}, \varphi_{\mathbf{1}}) & \cdots & (\varphi_{\boldsymbol{N-1}}, \varphi_{\mathbf{1}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_{\mathbf{0}}, \varphi_{\boldsymbol{N-1}}) & (\varphi_{\mathbf{1}}, \varphi_{\boldsymbol{N-1}}) & \cdots & (\varphi_{\boldsymbol{N-1}}, \varphi_{\boldsymbol{N-1}}) \end{pmatrix}.$$

Символ $(\varphi_{\boldsymbol{k}}, \varphi_{\boldsymbol{j}})$ здесь обозначает следующее скалярное произведение:

$$(\gamma_{jk}) = (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(x_i)\overline{\varphi_j(x_i)}.$$

Сосчитаем элементы γ_{jk} точно.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$(\varphi_k, \varphi_j) = N\delta_k^j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ N, & j = k, \end{cases}$$

где $0 \leq k < N$, $0 \leq j < N$.

Доказательство. Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}} \equiv \exp\{\frac{2\pi i}{N}\}$.
Тогда

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_k(x_l)\overline{\varphi_j(x_l)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \omega^{kl}\omega^{-jl} = \sum_{l=0}^{N-1} \left[\omega^{(k-j)}\right]^l.$$

Если $k = j$, то $\omega^{(k-j)} = \omega^0 = 1$.

Следовательно, справедливо равенство

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \sum_{l=0}^{N-1} (1) = N.$$

Если же $k \neq j$, то комплексное число $q = \omega^{k-j}$ не равно 1.

Поэтому справедливы равенства

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{N-1} q^l = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{1 - \omega^{(k-j)N}}{1 - q}.$$

Воспользуемся здесь соотношением

$$\omega^N = \left(e^{\frac{2\pi}{N}i}\right)^N = e^{2\pi i} = 1$$

и в результате получим

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \frac{1 - (\omega^N)^{(k-j)}}{1-q} = \frac{1-1}{1-q} = 0.$$

Таким образом, функции $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_{N-1}$ ортогональны на конечном множестве точек $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{N-1}$. $\square$

Матрица Грама Γ ортогональных на конечном множестве точек x_0, x_1, …, x_{N-1} функций φ_0, φ_1, …, φ_{N-1} диагональна и имеет вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \end{bmatrix}; \qquad \det \Gamma = N^N.$$

Система ($\boldsymbol{SDF''}$) при этом записывается в виде следующих равенств

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-\frac{2\pi kl}{N}i}, \qquad 0 \le k < N.}$$

Воспользовавшись обозначением $\boldsymbol{\omega = e^{\frac{2\pi}{N}i}}$ перепишем эти равенства в виде

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l \omega^{-kl}, \qquad 0 \le k < N.}$$

Вместе с системой (SDF'') получаем следующий "парный" вариант задачи о дискретизации преобразования Фурье:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{kj}, \qquad 0 \le j < N, \qquad (IDF)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \omega^{-kl}, \qquad 0 \le k < N. \qquad (DDF)$$

Операцию преобразования по формулам (DDF)

заданного вектора

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f_N}} = (\boldsymbol{f_0}, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_{N-1}})$$

в итоговый вектор коэффициентов

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a_N}} = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{N-1}})$$

называют *прямым дискретным преобразованием Фурье*.

Операцию же по формулам ($\boldsymbol{IDF}$), переводящую вектор коэффициентов $\overrightarrow{\boldsymbol{a_N}}$ в вектор узловых значений $\overrightarrow{f_N}$, называют *обратным дискретным преобразованием Фурье*.

3^0. Предположим, что $\omega = e^{\frac{2\pi}{N}i}$ и все комплексные величины

$$\omega^{-kj}, \quad \text{где} \quad 0 \le k \le N-1,\ 0 \le j \le N-1,$$

вычислены заранее. Тогда легко найти и сопряженные к ω^{-kj} числа ω^{kj}.

При этом чтобы вычислить по формулам ($\boldsymbol{DDF}$) все компоненты вектора

$$(\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_{N-1}}) \equiv \overrightarrow{\boldsymbol{a_N}}$$

требуется выполнить $\boldsymbol{N^2}$ элементарных операций, состоящих в перемножении двух комплексных чисел с последующим сложением с предыдущим сохраненным результатом.

Оказывается, что если натуральное N не является простым, то количество элементарных операций, необходимых для реализации формул (DDF) и (IDF), можно существенно уменьшить, особенно для больших N.

Поясним, как это сделать на примере вычислений по формулам (IDF).

Если рассматривать формулы (DDF), то все аналогично, с той лишь разницей, что вместо ω следует использовать число $\omega^{-1} = \overline{\omega}$.

Разложим N на множители $N = N_1 N_2$, где N_1 и N_2 — натуральные, $N_1 \geq 2$, $N_2 \geq 2$. Таким образом, необходимо, чтобы $N \geq 4$.

Затем индекс j, $0 \leq j < N$, в равенстве (IDF) разделим на N_1 с остатком, получив равенство вида

$$j = j_1 N_1 + j_0, \qquad \text{где} \qquad 0 \le j_0 < N_1.$$

Здесь j_1 — это целая часть отношения j/N_1. Ясно, что $0 \le j_1 < N_2$.

Аналогично, разделив индекс k в правой части равенства (IDF) с остатком на N_2, получим равенство

$$k = k_1 N_2 + k_0, \qquad \text{где} \qquad 0 \le k_0 < N_2,$$

а целая часть k_1 отношения k/N_2 удовлетворяет условию $0 \le k_1 < N_1$.

Равенство $k = k_1 N_2 + k_0$ задает взаимно однозначное отображение между индексами k из отрезка $0 \leqslant k \leqslant N - 1$ и парами индексов (k_0, k_1), где $0 \le k_0 \leqslant N_2 - 1$ и $0 \le k_1 \leqslant N_1 - 1$.

Учитывая это, разобьем сумму по k в формуле (IDF) на повторную сумму по k_0 и k_1:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{kj} = \sum_{k_0=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} a_k \omega^{kj}.$$

Учитывая еще, что

$$kj = k_1 j_1 N + k_1 j_0 N_2 + k_0 j \quad \text{и} \quad \omega^{k_1 j_1 N} = 1,$$

получаем промежуточное равенство

$$\omega^{kj} = \omega^{k_1 j_1 N} \cdot \omega^{k_1 j_0 N_2} \cdot \omega^{k_0 j} = \omega^{k_1 j_0 N_2} \omega^{k_0 j}.$$

Далее, подставляя этот результат в формулу ($\boldsymbol{IDF}$), получаем

$$\boldsymbol{f(x_j) = \sum_{k_0=0}^{N_2-1} \Big(\sum_{k_1=0}^{N_1-1} a_{k_1 N_2 + k_0} \omega^{k_1 j_0 N_2} \Big) \omega^{k_0 j},}$$

$$\boldsymbol{f(x_j) = \sum_{k_0=0}^{N_2-1} \widetilde{a}(k_0, j_0) \omega^{k_0 j}.} \qquad (\boldsymbol{IDF'})$$

Здесь через $\widetilde{a}(k_0, j_0)$ обозначена сумма

$$\widetilde{a}(k_0, j_0) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} a_{k_1 N_2 + k_0} \omega^{k_1 j_0 N_2}. \qquad (IDF'')$$

Для того чтобы найти по этой формуле элемент $\widetilde{a}(k_0, j_0)$ требуется выполнить N_1 умножение пары комплексных чисел с последующим сложением с предыдущим результатом.

В матрице $\widetilde{A} = \big(\widetilde{a}(k_0, j_0)\big)$, где $0 \le k_0 \leqslant N_2 - 1$

и $0 \le j_0 \leqslant N_1 - 1$, содержится $N_2 \times N_1 = N$ комплексных чисел.

Таким образом, для вычисления всех элементов матрицы $\widetilde{A}$ всего требуется выполнить $N \cdot N_1$ элементарных операций.

Вычислив $\widetilde{A}$, подставим результат в равенство (IDF') и выполним еще $N \cdot N_2$ элементарных операций.

Таким образом, общее число необходимых для реализации расчетных формул ($\boldsymbol{IDF}$) элементарных операций при выбранном подходе задается равенством

$$\boldsymbol{N \cdot N_1 + N \cdot N_2 = N(N_1 + N_2) < N \cdot N = N^2} \text{ при } \boldsymbol{N > 4.}$$

Выигрыш в количестве операций достигается при этом благодаря возможности выделить группы однотипных слагаемых $\widetilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{k_0, j_0})$, которые используются для вычисления значений $f(x_j)$ при всех допустимых значениях j, $0 \leq j \leq N-1$. Но сами величины $\widetilde{a}(k_0, j_0)$ при этом вычисляются лишь однажды.

4^0. Описанная только что идея преобразования расчетных формул развита в алгоритмах быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ).

Если $N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_m$, где $N_s \geq 2$, то с помощью БПФ дискретное преобразование Фурье выполняется за

$$N \cdot (N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_m)$$

элементарных операций.

Особенно эффективно этот алгоритм работает в случае, когда число N является степенью числа 2, то есть если $N = 2^m$. В этом случае вместо N^2 элементарных операций требуется выполнить лишь $2N\log_2 N$ таких операций.

К примеру, если $N = 1024 = 2^{10}$, то БПФ ускоряет вычисление дискретного преобразования Фурье в $\frac{N}{2}\log_2 N = \frac{1024}{20} = 50$ раз.

Отметим, что и в случае, когда N не является степенью двойки, существует возможность выполнения БПФ за $\boldsymbol{O(N\log_2 N)}$ э лементарных операций.

Внедрение алгоритма БПФ в практику вычислений революционным образом изменило многие области, связанные с обработкой цифровой информации.

Разложение ($\boldsymbol{IDF}$) часто записывают в эквивалентном, но симметричном, виде

$$f(x_j) = \sum_{-\frac{N}{2}<k\le\frac{N}{2}} a_k \exp\{2\pi k x_j i\},$$

которому соответствует интерполяция следующим тригонометрическим полиномом

$$\widetilde{S_N}(x) = \sum_{-\frac{N}{2}<k\le\frac{N}{2}} a_k \exp\{2\pi k x i\}.$$

Здесь коэффициенты a_k по-прежнему задаются формулой

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f(x_l)\omega^{-kl}, \qquad -\frac{N}{2} < k \le \frac{N}{2}.$$

Отметим, что интерполяционные тригонометрические полиномы $S_N(x)$ и $\widetilde{S_N}(x)$, хотя и совпадают в узлах x_j, но при этом существенно разнятся в других, не узловых точках.

Для интерполяции значений $f(x)$ предпочтительней оказывается полином $\widetilde{S_N}(x)$.

5^0. Рассмотрим коротко задачу о погрешности интерполяции функции $f(x)$, заданной в точках

$$0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} \leq 1$$

тригонометрическим полиномом

$$\widetilde{S_N}(x) = \sum_{-\frac{N}{2}<k\leq\frac{N}{2}} a_k \exp\{2\pi kxi\},$$

где

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f(x_l)\omega^{-kl}, \qquad -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}.$$

К этой интерполяционной задаче приводится типичная в радиотехнике задача о тригонометрической интерполяции периодического сигнала.

Если функция $f(x)$ является гладкой и периодической с периодом 1, то есть серьезные основания рассчитывать на выполнение приближенного равенства

$$f(x) \approx \widetilde{S_N}(x)$$

для всех значений x из отрезка $[0, 1]$.

Важен вопрос о чувствительности полинома $\widetilde{S_N}(x)$ к погрешностям в исходных данных.

Пусть известно, что значения $f_j = f(x_j)$ интерполируемой функции задаются с погрешностями ε_j, то есть известен некоторый вектор

$$y^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_{N-1}^*),$$

удовлетворяющий условию

$$|y_j^* - f_j| = \varepsilon_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

причем для каждого допустимого индекса j выполняется оценка

$$|\varepsilon_j| \le \overline{\Delta}(y^*) = \max_{0 \le k \le N-1} |y_k^* - f_k|.$$

Вычисленный по возмущенным узловым значениям y_j^*, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, полином

$$\widetilde{S_N^*}(x) = \sum_{-\frac{N}{2} < k \le \frac{N}{2}} a_k^* \exp\{2\pi kxi\},$$

где

$$a_k^* = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l^* \omega^{-kl}, \qquad -\frac{N}{2} < k \le \frac{N}{2},$$

отклоняется от полинома $\widetilde{S_N}(x)$, то есть содержит некоторую погрешность. Для этой погрешности справедлива оценка

$$\max_{x\in[0,1]} |\widetilde{S_N^*}(x) - \widetilde{S_N}(x)| \le \widetilde{\Lambda_N} \cdot \overline{\Delta}(y^*).$$

Постоянная $\widetilde{\Lambda_N}$ в этой оценке называется *константой Лебега* интерполяционной формулы. При неограниченном увеличении числа узлов N константа Лебега $\widetilde{\Lambda_N}$ также неограниченно возрастает.

Своей минимальной асимптотики при $N \to \infty$ константа $\widetilde{\Lambda_N}$ достигает на равномерном распределении узлов x_j.

При этом для достаточно больших значений N справедливо асимптотическое равенство

$$\widetilde{\Lambda_N} \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{N+1}{2}.$$

Таким образом, при тригонометрической интерполяции выбор в качестве узлов точек

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad 0 \le j < N$$

естествен с точки зрения как простоты вычисления коэффициентов полинома (в этом случае применимо БПФ), так и с точки зрения минимизации влияния на результат ошибок в исходных данных.