Тема : Аффинные преобразования евклидовых пространств

1$^{\mathbf{0}}$. Определение аффинного пространства и эталонного афинного пространства. **2**$^{\mathbf{0}}$. Аффинная система координат, координатный изоморфизм в эталонное пространство. Изоморфизм аффинных пространств одинаковой размерности. **3**$^{\mathbf{0}}$. Связь аффинных координат точки в двух разных аффинных координатных системах. **4**$^{\mathbf{0}}$. Определение аффинного преобразования и его общий вид в произвольном базисе аффинного пространства. Примеры. **5**$^{\mathbf{0}}$. Свойства аффинных преобразований. Группа $\mathbb{A}^{\boldsymbol{n}}$. Подгруппа собственных преобразований. **6**$^{\mathbf{0}}$. Плоскости и прямые в аффинном пространстве. Параллельные плоскости. Критерий аффинного преобразования. Лемма о геометрических свойствах аффинного преобразования. **7**$^{\mathbf{0}}$. Метрика аффинного пространства в случае, когда ассоциированное с ним векторное пространство евклидово. Теорема об основном свойстве аффинного преобразования.

1^0. Пусть $\mathbb{A}$ — это аффинное пространство, связанное с конечномерным векторным пространством $\boldsymbol{X}$, $\dim \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}$. По определению, это означает, что любым двум точкам $\dot{\boldsymbol{A}}$ и $\dot{\boldsymbol{B}}$ из $\mathbb{A}$ сопоставляется вектор из $\boldsymbol{X}$ с началом в точке $\dot{\boldsymbol{A}}$ и концом в точке $\dot{\boldsymbol{B}}$, то есть вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. При этом выполняются следующие две аксиомы:

$\boldsymbol{i}$) для $\forall\, \dot{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{A}$ и $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$ существует единственная точка $\dot{\boldsymbol{B}}$ из $\mathbb{A}$ такая, что $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{a}$;

$ii)$ для любых трех точек $\dot{\boldsymbol{A}}$, $\dot{\boldsymbol{B}}$, $\dot{\boldsymbol{C}}$ из $\mathbb{A}$ выполняется *равенство треугольника*:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = \mathbf{0}.$$

В частности, взяв в равенстве треугольника $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\boldsymbol{C}}$, получим соотношение $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}} = \mathbf{0}$. Если же взять $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{C}}$, то получим

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}.$$

Размерность аффинного пространства $\mathbb{A}$ по определению полагается равной размерности связанного с ним векторного пространства $\boldsymbol{X}$, то есть

$$\dim \mathbb{A} = \dim \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}.$$

Векторное пространство $\boldsymbol{X}$ называют также *ассоциированным с аффинным пространством* $\mathbb{A}$.

В качестве важного примера рассмотрим *эталонное аффинное пространство* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Обозначение здесь применяется то же самое, что и для вещественного координатного пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

В случае, если эти две структуры все таки требуется разделить в проводимых построениях, будем применять для них обозначения $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$ и $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{век}}$ соответственно.

Точками эталонного аффинного пространства $\mathbb{R}^{n}_{\text{афф}}$ условимся называть вектор-столбцы следующего вида:

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x^j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ассоциированное с аффинным пространством $\mathbb{R}^{n}_{\text{афф}}$ векторное пространство X совпадает с вещественным координатным про-

странством $\mathbb{R}^n_{\text{век}}$, образуемого вектор-столб-
цами следующего вида:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a^j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Взяв в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ произвольную пару точек

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

сопоставим ей следующий вектор из ассоциированного линейного пространства:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{век}}.$$

Пользуясь этим соглашением, проверим справедливость аксиомы i) аффинного пространства. Пусть

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{афф}} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{век}}.$$

Тогда точка $\dot{B} = \begin{pmatrix} x^1 + a^1 \\ x^2 + a^2 \\ \vdots \\ x^n + a^n \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ и при этом $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Точка $\dot{B}$ с указанным свойством единственна в пространстве $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$.

Проверим еще, что и аксиома ii) также выполняется. Пусть выбраны три точки

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{C} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}.$$

Тогда в соответствии с принятым правилом образования векторов получим

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} y^1 - x^1 \\ y^2 - x^2 \\ \vdots \\ y^n - x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^1 - y^1 \\ z^2 - y^2 \\ \vdots \\ z^n - y^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z^1 - x^1 \\ z^2 - x^2 \\ \vdots \\ z^n - x^n \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}.$$

Таким образом, равенство треугольника также выполнено и, следовательно, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$ с введенной выше структурой представляет собой аффинное пространство.

Размерность этого аффинного пространства совпадает с размерностью ассоциированного с ним линейного пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{век}}$, то есть

$$\mathbf{dim}\,\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}} = \boldsymbol{n}.$$

2^0. Пусть $\mathbb{A}$ — это произвольное аффинное пространство, с которым ассоциированно линейное пространство X над полем вещественных чисел,

$$\dim X = n < \infty.$$

Выберем в пространстве X произвольный базис

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Определение. *Аффинной системой координат в пространстве* $\mathbb{A}$ *называется совокупность, состоящая из фиксированной точки* $\dot{O}$, *лежащей в* $\mathbb{A}$, *и векторов* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *выбранного базиса.*

Для обозначения указанной в предыдущем определении аффинной системы координат используется символ

$$\dot{O}e_1e_2\ldots e_n.$$

Пользуясь аксиомой i) аффинного пространства, каждый из векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выбранного базиса возможно отложить от начальной точки $\dot{O}$ координатной системы. Действуя таким образом, получаем графическую визуализацию понятия аффинной системы коородинат.

Получаемая при этом картина во многом схожа с привычным нам изображением декартовой системы координат. Однако имеются и существенные отличия: в произвольном аффинном пространстве отсутствует понятие угла между векторами.

Взяв произвольную точку $\dot{A}$ из пространства $\mathbb{A}$, образуем вектор с началом в точке $\dot{O}$ координатной системы и концом в $\dot{A}$. Этот вектор $\overrightarrow{\dot{O}\dot{A}}$ называется *радиус-вектором точки* $\dot{A}$ в выбранной аффинной системе координат.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ принадлежит линейному пространству X и, следовательно, допускает однозначное представление в виде линейной комбинации базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\overrightarrow{OA} = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \cdots + a^n e_n.$$

Скаляры $a^1, a^2, \ldots, a^n$ в этом разложении — это вещественные числа.

Говорят, что вектор $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ из $\mathbb{R}^n$ задает *координаты точки* $\dot{A}$ *в системе* $\dot{O}e_1 \ldots e_n$.

Рассмотрим отображение $I_c : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}^n_{\text{афф}}$, определяемое следующим соотношением:

$$I_c : \dot{A} \in \mathbb{A} \mapsto \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{афф}},$$

где вектор $\vec{a} =\uparrow (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ задает *координаты точки* $\dot{A}$ *в системе* $\dot{O}e_1 \ldots e_n$.

Определенное указанным образом отображение I_c взаимно однозначно отображает аффинное пространство $\mathbb{A}$ на эталонное аффинное пространство $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ и называется *координатным изоморфизмом*.

Теорема (об изоморфизме). *Любые два аффинных пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.*

3^0. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ взяты две системы координат:

$\dot{O}e_1e_2\dots e_n$–"старая"; $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\dots\tilde{e}_n$–и "новая".

Возьмем произвольную точку $\dot{M}$ из $\mathbb{A}$ и установим связь координат этой точки в выбранных координатных системах.

Если аффинные координаты точки $\dot{M}$ в старой системе $\dot{O}e_1e_2\dots e_n$ — это вещественные числа $x^1, x^2, \dots, x^n$, то радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$

этой точки представим как следующая линейная комбинация:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = [e_1 e_2 \ldots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Аналогично, если аффинные координаты точки $\dot{M}$ в новой системе $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$ — это вещественные числа $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n$, то ее радиус-вектор $\overrightarrow{\tilde{O}M}$ представим как следующая линейная комбинация:

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix}.$$

Любые два базиса ассоциированного линейного пространства X связаны между собой соотношениями вида

$$[\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n] = [e_1 e_2 \dots e_n] \cdot C, \qquad (B \mapsto \tilde{B})$$

где C — это квадратная матрица размера $n \times n$, называемая *матрицей перехода* от старого базиса B к новому $\tilde{B}$.

Столбцы матрицы перехода C представляют собой координаты новых базисных векторов $\tilde{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в разложении по старому базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Отметим, что матрица C тогда и только тогда является матрицей перехода от одного базиса к другому, когда C обратима.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны между собой:*

$\otimes$ *Квадратная матрица C обратима.*

$\otimes$ *Столбцы квадратной матрицы C линейно независимы.*

$\otimes$ *Строки квадратной матрицы* $\boldsymbol{C}$ *линейно независимы.*

$\otimes$ *Определитель матрицы* $\boldsymbol{C}$ *ненулевой.*

Взяв произвольный вектор $\boldsymbol{e}$ из линейного пространства $\boldsymbol{X}$, разложим его по векторам нового базиса $(\tilde{B})$:

$$e = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \ldots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix}.$$

Подставляя сюда выражение $(B \mapsto \tilde{B})$ векторов нового базиса $(\tilde{B})$ через старый (B) с помощью матрицы перехода C, приходим к разложению вектора e по векторам старого базиса (B):

$$e = [e_1 e_2 \dots e_n] \cdot C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j.$$

Учитывая, что любой вектор раскладывается по векторам базиса (B) единственно возможным образом, заключаем из последнего равенства, что координаты вектора e в разных базисах линейного пространства связа-

ны между собой следующими соотношения-
ми:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}.$$

Здесь C, как и прежде, матрица перехода от базиса (B) к базису $(\tilde{B})$.

Получим аналогичные соотношения для аффинных координат произвольной точки $\dot{M}$ из пространства $\mathbb{A}$. С этой целью воспользуемся разложениями

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix},$$

а также разложением радиус-вектора $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ точки $\dot{\tilde{O}}$ по старому базису (B):

$$\overrightarrow{O\dot{\tilde{O}}} = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j.$$

Здесь $(b^1, b^2, \dots, b^n)$ — аффинные координаты точки $\dot{\tilde{O}}$ в старой системе координат.

Подставим представленные выше разложения векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{\tilde{O}M}$ и $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ в равенство треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\tilde{O}M} + \overrightarrow{O\tilde{O}}$. Тогда получим

$$[e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = [e_1 e_2 \dots e_n] \cdot C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} +$$

$$+ [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_n] \left\{ C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \right\}.$$

Пользуясь однозначностью разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису (B), получаем следующие соотношения между аффинными координатами точки $\dot{M}$ в разных аффинных системах координат:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}. \qquad (OB \mapsto \tilde{O}\tilde{B})$$

Здесь C, как и прежде, обозначает матрицу перехода от базиса (B) к базису $(\tilde{B})$.

Если точки $\dot{O}$ и $\dot{\tilde{O}}$ совпадают, то координаты радиус- вектора $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ нулевые:

$$b^1 = b^2 = \cdots = b^n = 0.$$

Формулы перехода $OB \mapsto \tilde{O}\tilde{B}$ в этом случае совпадают с формулами $(B \mapsto \tilde{B})$.

Если базисы (B) и $\tilde{B}$ совпадают, то матрица перехода C является единичной, $C = E$.

4^0. Пусть точкам $\dot{M}$ и $\dot{N}$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ соответствуют радиус-векторы

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = [e_1 e_2 \ldots e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{ON} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = [e_1 e_2 \ldots e_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

и при этом их координаты связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(Aff)}$$

Здесь C — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} = \uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$.

Вводя обозначения

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix},$$

запишем соотношения $(\mathbf{Aff})$ в укороченном векторном виде

$$\boldsymbol{y = Cx + b} \quad \Leftrightarrow \quad (\dot{\boldsymbol{M}} \mapsto \dot{\boldsymbol{N}}). \tag{$\mathbf{Aff'}$}$$

Определение. *Преобразование аффинного пространства $\mathbb{A}$ в себя, задаваемое формулой*

$$y = Cx + b \quad \Leftrightarrow \quad (\dot{M} \mapsto \dot{N}),$$

где C — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} =\uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$, называется аффинным.

Отметим, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в формуле $(\mathbf{Aff'})$ представляют собой координаты точек $\dot{\boldsymbol{M}}$ и $\dot{\boldsymbol{N}}$ в наперед выбранной аффинной системе координат $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}\ldots\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$.

Возникает вопрос: останется ли это преобразование $\dot{\boldsymbol{M}} \mapsto \dot{\boldsymbol{N}}$ аффинным, если изначально выбрать в $\mathbb{A}$ какую-либо другую аффинную систему координат $\dot{\tilde{\boldsymbol{O}}}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}}\ldots\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$?

Теорема (общий вид аффинного преобразования). *Преобразование* $(\mathbf{Aff}')$ *аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя в любой аффинной системе координат* $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$ *записывается в следующем виде:*

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b}, \qquad (\mathbf{Aff}'')$$

где $\tilde{C}$ — *это квадратная невырожденная матрица размера* $n \times n$, $\det \tilde{C} = \det C \neq 0$, *а вектор-столбец* $\tilde{b}$ *принадлежит* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{A}$ рассмотрим две системы координат:

$\dot{O}e_1e_2\ldots e_n$—“старую”; $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$—и “новую”.

Векторы новой системы связаны с векторами старой линейными соотношениями вида

$$[\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n] = [e_1e_2\ldots e_n]\cdot T. \qquad (B \mapsto \tilde{B})$$

Здесь T — квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det T \neq 0$. Пусть радиус-вектор $\overrightarrow{O\mathring{O}}$ точки $\mathring{O}$ раскладывается в сумму

$$\overrightarrow{O\mathring{O}} = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

Тогда старые координаты x точки $\dot{M}$ связаны с ее новыми координатами $\tilde{x}$ следующими соотношениями:

$$x = T\tilde{x} + a, \tag{$\dot{M}$}$$

где $a =\uparrow (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Аналогичные равенства имеют место и для координат точки $\dot{N}$:

$$y = T\tilde{y} + a. \tag{$\dot{N}$}$$

Учитывая, что $y = Cx + b$ и подставляя сюда разложения ($\dot{M}$) и ($\dot{N}$), получаем

$$T\tilde{y} + a = C(T\tilde{x} + a) + b \;\Leftrightarrow\; T\tilde{y} = CT\tilde{x} + Ca - a + b.$$

Умножая обе части полученного векторного равенства слева на матрицу T^{-1}, получаем

$$\tilde{y} = T^{-1}CT\tilde{x} + T^{-1}(Ca - a + b).$$

Вводя обозначения

$$\tilde{C} = T^{-1}CT \quad \text{и} \quad \tilde{b} = T^{-1}(Ca - a + b),$$

получаем окончательно $\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b}$. Кроме того имеем равенства

$$\det \tilde{C} = (\det T^{-1}) \det C (\det T) = \det C.$$

Как видно из полученных формул, матрицы C и $\tilde{C}$ в общем случае друг с другом не совпадают, то есть представление аффинного преобразования зависит от выбранной координатной системы. При этом определитель матрицы в формуле общего вида аффинного преобразования от базиса никак не зависит, то есть этот определитель является инвариантом. $\square$

5^0. Сформулируем некоторые наиболее важные свойства множества аффинных преобразований пространства.

$(\mathbf{AT})_1$: Любое преобразование

$$\dot{M}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \dot{N}(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

задаваемое формулой

$$y = Cx + b, \tag{Aff}$$

где C — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} =\uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$, является взаимно однозначным. Обратное к нему преобразование

$$x = C^{-1}y - C^{-1}b \qquad (\mathbf{Aff}^{-1})$$

также является аффинным.

$(\mathbf{AT})_2$: Последовательное выполнение двух аффинных преобразований

$$\dot{M}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \dot{N}(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \dot{L}(z_1, \ldots, z_n),$$

где $\boldsymbol{y = C_1 x + b_1}$ и $\boldsymbol{z = C_2 y + b_2}$, также является аффинным преобразованием:

$$\boldsymbol{z = C_2(C_1 x + b_1) + b_2 = (C_2 C_1)x + (C_2 b_1 + b_2)}.$$

Это координатное преобразование называется *композицией*, или *произведением*, преобразований $\boldsymbol{y = C_1 x + b_1}$ и $\boldsymbol{z = C_2 y + b_2}$.

$\mathbf{(AT)_3}$: Произведение аффинных преобразований ассоциативно.

$\mathbf{(AT)_4}$: Тождественное преобразование $\dot{\boldsymbol{M}} \mapsto \dot{\boldsymbol{M}}$ является аффинным: ему соответствует матрица $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$ и нулевой вектор $\boldsymbol{b}$.

Свойства $\mathbf{(AT)_1}$–$\mathbf{(AT)_4}$ означают, что все аффинные преобразования пространства образуют группу. Для обозначения этой группы используется символ $\mathbb{A}^{\boldsymbol{n}}$.

Определение. *Преобразование аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя, задаваемое формулой* $\boldsymbol{y = Cx + b}$, *где* $\boldsymbol{C}$ *— это квадратная невырожденная матрица размера* $\boldsymbol{n \times n}$, $\boldsymbol{\det C > 0}$, *называется собственным.*

Композиция (произведение) двух собственных аффинных преобразований — это снова собственное преобразование. Это означает, что собственные преобразования образуют подгруппу в $\mathbb{A}^{n}$.

6^{0}. Пусть $\dot{M}$ — это фиксированная точка аффинного пространства $\mathbb{A}$, с которым ассоциировано векторное пространство X,

$$\dim X = n < +\infty.$$

Пусть кроме того в X выбрано какое-нибудь подпространство Y, $Y \subset X$.

Определение. *Подмножество $\boldsymbol{P}$ точек аффинного пространства $\mathbb{A}$, задаваемое равенством*

$$\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y} = \{\dot{\mathbf{N}} \in \mathbb{A} \mid \dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\},$$

называется плоскостью в $\mathbb{A}$, или аффинным подпространством. При этом размерностью этого аффинного подпространства называется число $\boldsymbol{m} = \dim \boldsymbol{Y} \leqslant \boldsymbol{n}$.

В условиях данного определения говорят также, что плоскость $\boldsymbol{P}$ проходит через точку $\dot{\boldsymbol{M}}$ в направлении подпространства $\boldsymbol{Y}$. Само же подпространство $\boldsymbol{Y}$ называют *направляющим* для плоскости $\boldsymbol{P}$.

Если $\boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{Y} = \mathbf{0}$, то множество $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ — это точка $\dot{\boldsymbol{M}}$. Если $\boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$, то $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ называют гиперплоскостью.

Если же $m = \dim Y = 1$, то множество $P = \dot{M} + Y$ — это прямая.

Пусть $\dot{N}$ принадлежит прямой $P = \dot{M} + Y$, причем $\dot{N} \neq \dot{M}$. Тогда P состоит из точек вида $\dot{M} + \lambda\overrightarrow{MN}$, где λ — вещественный параметр, а вектор $\overrightarrow{MN}$ принадлежит Y. В частности, если $\lambda = 1$, то $\dot{M} + \lambda\overrightarrow{MN} = \dot{N}$. По этой причине говорят, что прямая P проходит через точки $\dot{M}$ и $\dot{N}$.

Упражнения. 1. Доказать, что если $\dot{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{P}$ и $\dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ принадлежит $\boldsymbol{Y}$.

2. Доказать, что если $\dot{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{P}$, $\dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P}$ и $\dot{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{P}$ то справедливы включения

$$\dot{\boldsymbol{M}} + \overrightarrow{\boldsymbol{NL}} \in \boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{N}} + \overrightarrow{\boldsymbol{ML}} \in \boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{L}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \in \boldsymbol{P}.$$

3. Доказать, что если множество $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{A}$ обладает свойствами 1 и 2, то это множество — плоскость.

Если есть плоскость $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{A}$ с направляющим пространством $\boldsymbol{Y}$, то

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{N}\boldsymbol{L}} \mid \dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P},\ \dot{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{P}\}.$$

Теорема. *Всякая плоскость* $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ *в аффинном пространстве* $\mathbb{A}$ *сама является аффинным пространством с ассоциированным векторным пространством* $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}$.

Определение. *Любые две плоскости аффинного пространства в направлении одного и того же линейного пространства* $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}$ *называются параллельными.*

Параллельные плоскости $\dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ и $\dot{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{Y}$ совпадают тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ принадлежит $\boldsymbol{Y}$.

Упражнение. Доказать, что при аффинном преобразовании $y = Cx + b$, где C — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, всякая прямая аффинного пространства отображается в прямую.

Теорема. *Взаимнооднозначное преобразование аффинного пространства в себя, при котором всякая прямая отображается в прямую того же пространства, является аффинным преобразованием.*

Доказательство этой теоремы не является простым и здесь не приводится.

Лемма. *При аффинном преобразовании параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости. Пересекающиеся плоскости пространства переходят в пересекающиеся. Прямая, пересекающая плоскость, переходит в прямую, пересекающую плоскость.*

$\mathbf{7^0}$. Отдельный интерес представляет случай, когда ассоциированное с аффинным пространством $\mathbb{A}$ векторное пространство $\boldsymbol{X}$ представляет собой евклидово пространство.

В этом случае в пространстве $\mathbb{A}$ появляется метрическая структура: для любых двух точек из $\mathbb{A}$ определено расстояние меду ними. Если $\dot{\boldsymbol{M}}$ и $\dot{\boldsymbol{N}}$ — точки из $\mathbb{A}$, то расстоянием между ними называется вещественное число

$$\rho(\dot{M}, \dot{N}) = \sqrt{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN})} = \|\overrightarrow{MN}\|,$$

где $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN})$ представляет собой скалярное произведение вектора $\overrightarrow{MN}$ на себя в евклидовом пространстве X.

Величина же $\|\overrightarrow{MN}\| = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN})^{1/2}$ называется *нормой вектора* $\overrightarrow{MN}$ в евклидовом пространстве X.

Функция $\rho(\dot{M}, \dot{N})$ обладает следующими важными свойствами:

1). $\rho(\dot{M}, \dot{N}) \geqslant 0$ и при этом $\rho(\dot{M}, \dot{N}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{M} = \dot{N}$;

2). $\rho(\dot{M}, \dot{N}) = \rho(\dot{N}, \dot{M})$ (симметричность);

3). Для любых трех точек $\dot{M}$, $\dot{N}$ и $\dot{L}$ справедливо следующее *неравенство треугольника*:

$$\rho(\dot{M}, \dot{N}) \leqslant \rho(\dot{M}, \dot{L}) + \rho(\dot{L}, \dot{N}).$$

Указанные три свойства означают, что бинарная функция $\rho(\dot{M}, \dot{N})$ задает на прямом произведении $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ метрику.

Отметим, что в случае общего аффинного преобразования расстояние между двумя точками аффинного пространства не сохраняется. Однако всегда справедливо следующее утверждение.

Теорема (основное свойство аффинных преобразований). *Аффинное преобразование евклидова пространства сохраняет отношение длин направленных отрезков, лежащих на одной прямой аффинного пространства.*