Вопрос №1
Пределы функций одной переменной

Предел функции в точке (по Гейне)

Определение. Пусть имеется числовая функция $f(x)$, $x \in X$. Тогда число $c \in \mathbb{R}$ называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\{x_n\}$ такого, что $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, числовая последовательность $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ сходится к c: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции в точке

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, где x_0 - предельная точка области определения D_f функции f, если $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Определение. Если же $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \to x_0$.

Примеры:

1. $f(x) = x^2$ - бесконечно малая при $x \to 0$
2. $f(x) = x^{-a}$, где $a > 0$ - бесконечно большая при $x \to 0$.

Предел функции в точке (по Коши)

Определение. Пусть $c \in \mathbb{R}$, а x_0 - предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$. Тогда $c = \lim\limits_{x\to x_0} \ (x \in X) \Leftrightarrow \{\forall O(c)\ \exists O(x_0)\ :\ \forall x \in O(x_0) \cap x_1,\ x \neq x_0\ \Rightarrow f(x) \in O(c)\}$.

Критерии существования предела функции, критерий Коши

Теорема 1. Пусть x_0 - предельная точка множества X, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \{\forall \{x_n\}\ :\ x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0\ \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\}$.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ Следует из определения функции по Гейне.

2. $\Leftarrow$ Покажем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n))$ не зависит от выбора $\{x_n\}$, удовлетворяет условиям $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

   Пусть $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ - две любые числовые последовательности с указанным свойством. Построим новую последовательность $\{x_n\}$, положив $x_{2k-1} = x'_k$ и $x_{2k} = x''_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

   По условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n))$. Но $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ - подпоследовательности $\{x_n\}$. По известным свойствам предела имеем: $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(f(x'_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x''_n))$. Воспользовавшись определением предела функции по Гейне, приходим к заключению, что этот общий (один и тот же) для всех последовательностей предела и является пределом $f(x)$ при $x \to x_0$.

Теорема (критерий Коши). $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \overset{=A\neq\infty}{f(x)} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0\ \exists O(x_0) : \forall x, x' \in O(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\}$.

Замечание. Условие существования предела называют условием Коши.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap X \ \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow |f(x) \underset{x,x'\in O(x_0)}{-} f(x')| \leq |f(x) - A| + |A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   По условию $f(x)$ в окрестности $O(x_0)$ удовлетворяет условию Коши. Пусть $\{x_n\}$: $\forall n$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тогда $\exists N : \forall n, m \geq N$ $x_n \in O(x_0)$ и $x_m \in O(x_0)$.

2. $\Leftarrow$ По условию Коши имеем теперь: $\forall n, m \geq N$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что числовая последовательность $y_n = f(x_n)$ является фундаментальной. В силу полноты $\mathbb{R}$ эта фундаментальная последовательность обязана иметь конечный вещественный предел $A = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n))$.

   По доказанной теореме 1 заключаем, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Определение непрерывной в точке функции

Функция $f(x)$, $x \in D_f$, называется непрерывной в предельной точке $x_0 \in D_f$, если существует предел $f(x)$ в точке x_0 и этот предел равен $f(x_0)$: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{x \to x0} f(x)$.

Заметим, что область определения D_f разбивается на два непересекающихся подмножества: первое из них образует все предельные точки множества D_f, а второе состоит из изолированных точек множества D_f. В любой изолированной точке из D_f функция $f(x)$ считается непрерывной (по определению).

Вопрос №2
Комплексные числа

Определение комплексных чисел.

Определение. Число $z = a + bi$, где a, b - действительные числа, называется комплексным числом. При этом действительное число a называется действительной частью числа $z = a + bi$ и обозначается $a = \Re z$; действительное число b называется мнимой частью числа $z = a + bi$ и обозначается $b = \Im z$.

Определение. Число $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Замечание 1. Любое действительное число a является и комплексным, т.к. $a = a + 0 \cdot i$.

Замечание 2. Запись комплексного числа в виде $z = a+bi$ называют алгебраической формой комплексного числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Каждому комплексному числу $a + bi$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна действительной части комплексного числа, а ордината – мнимой части. Каждой точке $M(a, b)$ координатной плоскости поставим в соответствие комплексное число $a + bi$. Установленное соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность интерпретировать (истолковывать) комплексные числа как точки некоторой плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, так как на ней расположены точки, соответствующие действительным числам. Ось ординат - мнимая ось, на ней лежат мнимые числа.

$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ - геометрическая форма комплексного числа.

Модуль и аргументы комплексного числа

Определение. Модулем комплексного числа называется длина вектора, соответствующего этому числу. Для модуля числа z используется обозначение $|z|$.

По теореме Пифагора для модуля комплексного числа $z = a+bi$ легко получается следующая формула: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Для действительного числа $z = a + 0i$ модуль совпадает с абсолютной величиной числа: $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Сопряженные числа имеют одинаковые модули.

Произведение сопряженных чисел равно квадрату их модуля: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

Модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке. $\phi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Для обозначения аргументов комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$ или $arg(a + bi)$.

Заданными модулем и аргументом комплексное число определяется однозначно. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $-1 + i$ являются следующие углы: $\phi = \frac{3\pi}{4}$, $\phi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$, $\phi = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$.

Различные формы записи комплексных чисел

Запись комплексного числа z в виде $z = a+bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = a + bi$ выражаются через его модуль $|z| = \rho$ и аргумент ϕ. Здесь ρ - модуль комплексного числа, а ϕ - аргумент.

$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ - тригонометрическая форма записи.

Запись комплексного числа в виде $z = \rho e^{i\phi}$ называется показательной формой записи. Здесь ρ - модуль комплексного числа, а ϕ - его аргумент.

Операции над комплексными числами

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ определяются следующими правилами:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.
- $z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$.
- $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$. т.е. при сложении, вычитании и умножении скобки раскрываются по обычным правилам, учитывается условие $i^2 = -1$ и приводятся подобные.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. При делении необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные.

Свойства операций над комплексными числами

- Переместительное свойство сложения: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Сочетательное свойство сложения: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется разностью чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.
- Переместительное свойство умножения: $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$.
- Сочетательное свойство умножения: $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z\_3)$.
- Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0 + 0i$ и z_2 существует число z такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется частным комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$. Деление на комплексное число $0+0i$, которое называется нулем, невозможно.
- Распределительное свойство: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Формула Эйлера

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ - формула Эйлера.

Так как комплексное число z можно записать в виде $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, его можно представить в виде $z = \rho e^{i\phi}$, так как $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.