БИЛЕТ 10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ-01

(лекция 28)

$\mathbf{1^0}$. Комплекснозначная форма тригонометрических рядов Фурье. Частичные суммы. Стандартная тригонометрическая система в комплексной форме. $\mathbf{2^0}$. Интегральные представления частичных сумм. Ядра Дирихле. Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядер Дирихле. $\mathbf{3^0}$. Носитель функции, финитные функции, ступенчатые функции. Теорема об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций финитными ступенчатыми функциями. $\mathbf{4^0}$. Теорема о непрерывности первообразной абсолютно интегрируемой функции.

Пункт 1.

$\mathbf{1^0}$. Вместо тригонометрической системы

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots. \qquad (\mathrm{T}_l)$$

часто рассматривают систему комплекснозначных функций

$$\varphi_\nu(x) = e^{i\frac{\nu\pi x}{l}}, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Множество $\{\varphi_\nu(x) \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$ также называют тригонометрической системой так как любая из функций $\varphi_\nu(x)$ представима линейной комбинацией функций из (T_l):

$$e^{i\frac{\nu\pi x}{l}} = \cos\frac{\nu\pi x}{l} + i\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

Определение. *Комплекснозначные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, называются ортогональными на Δ, если произведение $\varphi(x)\overline{\psi}(x)$ интегрируемо на Δ и при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = 0.$$

Пример ортогональных комплекснозначных функций дают функции $\varphi_{\nu_1}(x)$ и $\varphi_{\nu_2}(x)$ при $\nu_1 \neq \nu_2$. Эти функции ортогональны на отрезке $[-l, +l]$:

$$\int\limits_{-l}^{+l} \varphi_{\nu_1}(x)\overline{\varphi_{\nu_2}}(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{\nu_1\pi x}{l}} e^{-i\frac{\nu_2\pi x}{l}}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{(\nu_1-\nu_2)\pi x}{l}}\,dx = 0.$$

Определение. *Комплексные числа*

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\nu\pi x}{l}}\,dx, \qquad \nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

образуют последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$.

Для того чтобы подчеркнуть, что c_ν — это коэффициенты Фурье именно функции $f(x)$, пишут $c_\nu = c_\nu(f)$.

Воспользуемся равенствами

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)(\cos\frac{\nu\pi x}{l} - i\sin\frac{\nu\pi x}{l})\,dx,$$

где $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда получим следующие соотношения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. a_0, a_k, b_k — это коэффициенты Фурье по стандартной тригонометрической системе.

Определение. *Выражение*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{l}},$$

где $c_\nu = c_\nu(f)$ для $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.

ЧАСТИЧНАЯ СУММА РЯДА ФУРЬЕ

(в комплексозначной форме)

$$T_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{l}}. \qquad (\mathrm{T}_C)$$

Ряд Фурье называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Предел этой последовательности называется *суммой ряда Фурье*.

Частичная сумма $T_n(f;x)$ ряда Фурье в комплексной форме допускает однозначное выражение через коэффициенты Фурье a_k, b_k функции f по стандартной тригонометрической системе. Имеем из определения

$$T_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+n} (a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}).$$

Таким образом, $T_n(f;x)$ — это n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе (T_l).

Множество функций $e^{i\nu x}$, где ν принимает всевозможные целые значения, называется *стандартной тригонометрической системой в комплексной форме*.

Пункт 2.

2^0. Функция $f(x)$, принадлежащая пространству $\widetilde{L_2}(-\pi,\pi)$, периодична с периодом 2π и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < +\infty.$$

Для любой такой функции справедливы следующие равенства:

$$T_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu e^{i\nu x}, \quad \text{где}$$

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{-i\nu\xi}\,d\xi.$$

Подставляя эти интегральные представления коэффициентов c_ν в частичную сумму $T_n(f;x)$, преобразуем ее к эквивалентному виду:

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sum_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu(x-\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(\xi - x)\,d\xi. \quad (\mathrm{TD}_n)$$

Здесь ядро $D_n(\xi - x)$ интегрального оператора в правой части определяется равенством

$$D_n(\xi - x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu(x-\xi)}.$$

Определение. *Функция* $D_n(x) = \sum\limits_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu x}$ *называется ядром Дирихле порядка* n.

Из этого определения следует равенство

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{+n} \cos \nu x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, ядро Дирихле $D_n(x)$ — это четная 2π–периодическая функция и при этом

$$D_n(0) = 1 + 2n, \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1.$$

Таким образом, ядро Дирихле $D_n(x)$ — это четная 2π—периодическая функция и при этом

$$D_n(0) = 1 + 2n, \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(x)\,dx = 1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu x}$ — это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{ix}$ и начальным членом e^{-inx}.

Следовательно => $$D_n(x) = \frac{e^{-inx} - e^{inx+ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Запишем (TDn):

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\xi + x)D_n(\xi)\,d\xi.$$

Подынтегральная функция здесь периодична с периодом 2π.

Следовательно, интеграл справа можно заменить на интеграл по любому промежутку длины 2π и, в частности, имеет место равенство

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x)D_n(\xi)\,d\xi.$$

=> $$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x-\xi) + f(\xi + x))D_n(\xi)\,d\xi.$$

Лемма (равномерная ограниченность интегралов от ядер Дирихле). *Существует такая конечная постоянная C, что при всех натуральных n, $n = 1, 2, \dots$, имеет место неравенство*

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\eta} D_n(x)\, dx \right| \leqslant 2\pi C \qquad \forall\, \xi, \eta \in (0, \pi).$$

(Без док-ва)

Пункт 3.

Определение. *Для функции $f = f(x)$, $x \in D_f$, замыкание множества точек x из D_f, в которых функция $f = f(x)$ не обращается в нуль, называется носителем функции f.*

Для обозначения носителя произвольной функции f используется специальный символ $\operatorname{supp} f$.

Определение. *Определенная на всей числовой прямой функция $f = f(x)$ называется финитной, если ее носитель является ограниченным множеством.*

Определение. *Заданная на промежутке* Δ *функция* $f = f(x)$ *называется ступенчатой, если существует разбиение промежутка* Δ *на конечное число таких промежутков, на каждом из которых функция* $f = f(x)$ *постоянна.*

Теорема (об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций). *Пусть функция* $f = f(x)$ *абсолютно интегрируема на промежутке* Δ *числовой прямой. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует финитная ступенчатая функция* $\varphi(x)$ *такая, что ее носитель вложен в замыкание* $\overline{\Delta}$ *и при этом*

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Пункт 4.

Теорема (о первообразной абсолютно интегрируемой функции). *Пусть функция* $f = f(x)$ *абсолютно интегрируема на промежутке* Δ *числовой прямой. Тогда ее первообразная*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad a \in \Delta,$$

непрерывна на замыкании этого промежутка.