Аналоговая электроника и техника измерений.

Преобразование Лапласа.
Применение спектральных и операторных методов анализа электрических цепей.

Преобразование Лапласа

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Расширим область аргументов на верхнюю комплексную полуплоскость: $s = \sigma + j\omega$

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}dt = F(\sigma + j\omega)$$

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)e^{st}ds$$

Свойства изображений

Переменная s называется оператором Лапласа. Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{+\infty} f_k(t) e^{-st} dt = \sum_{k=1}^{n} F_k(s)$$

$$Af(t) \doteqdot A \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = AF(s)$$

Предельные соотношения:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \qquad f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Теоремы подобия и смещения.

Теорема подобия (масштаба). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Теорема смещения (запаздывания). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то:

Для оригиналов: $f(t-\tau) \doteqdot e^{-s\tau} F(s)$

Для изображений: $F(s-\lambda) \doteqdot e^{\lambda t} f(t)$

Изображение производной.

$$\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t) = e^{-st} f(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) de^{-st} =$$

$$= 0 - f(0) + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Операция дифференцирования, при нулевых начальных условиях, в области изображений вырождается в произведение изображения функции на оператор.
Изображение второй производной:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \doteqdot s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Изображение интеграла.

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{t} f(t)dt\right]e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{t} f(t)dt\right]de^{-st} = \frac{F(s)}{s} + \frac{f(0)}{s}$$

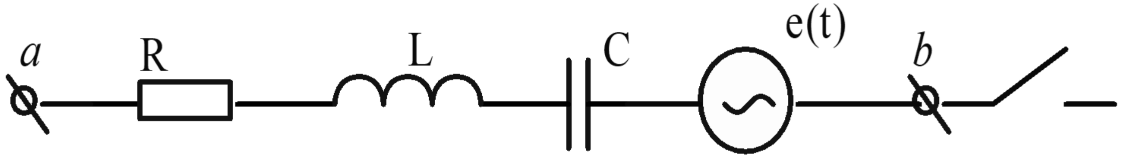
Интегрирование, при нулевых начальных условиях, в области изображений вырождается в деление изображения функции на оператор.

Из последних двух свойств хорошо видно основное назначение преобразования Лапласа: преобразование дифференциальных уравнений в алгебраические степенные уравнения.

Операторный метод анализа переходных процессов в электрических цепях.

Пусть имеется участок цепи охваченный переходным процессом. Для такого участка можно записать по второму правилу Кирхгофа:

$$u_{ab} = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt - e(t)$$

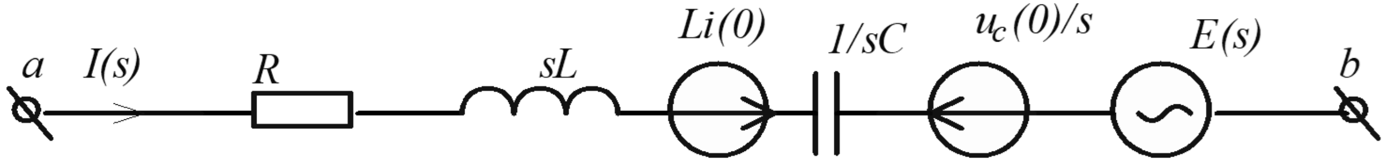


Применим к уравнению преобразование Лапласа, с учетом свойств преобразования производных и интегралов, рассмотренных выше:

$$U_{ab}(s) = I(s)\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{s} - E(s)$$

Закон Ома в операторной форме

По полученному уравнению построим электрическую схему:



$$U_{ab}(s) = I(s)\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{s} - E(s)$$

Выражение выше называется ***законом Ома для участка цепи в операторной форме***, а схема – ***схемой замещения в операторном виде***.

Изображение тока для такой цепи:

$$I(s) = \frac{U_{ab}(s) + Li(0) - \dfrac{u_C(0)}{s} + E(s)}{Z(s)}$$

Здесь $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ - операторное сопротивление участка цепи.

Обратный переход от изображений к оригиналам

Оригинал	A	$e^{-\alpha t}$	$sin\omega t$	$cos\omega t$	$\frac{1}{\alpha}(1\text{-}e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{b-\alpha}(e^{-\alpha t}\text{-}e^{-bt})$	
Изображение	$\frac{A}{s}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+b)}$	

Формула разложения

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \qquad F(s) = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{1}{s - s_k} \qquad A_k = \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)}$$

s_k - корни полинома $F_2(s)$

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{1}{s - s_k} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} A_k e^{s_k t}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)} \cdot e^{s_k t}$$

Порядок действий при решении задач операторным методом:

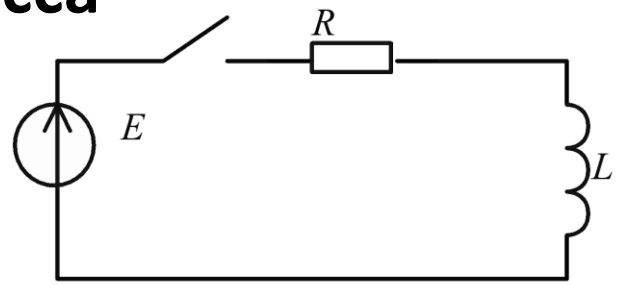
1. Определение независимых начальных условий путем расчета режима работы цепи до момента коммутации.

2. Составление *операторной* ***схемы замещения после момента коммутации***. Запись уравнений по правилам Кирхгофа или другим методам расчета линейных цепей в операторной форме.

3. Решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин.

4. Определение оригиналов (с помощью формулы разложения или таблиц соответствия оригиналов и изображений) по найденным изображениям.

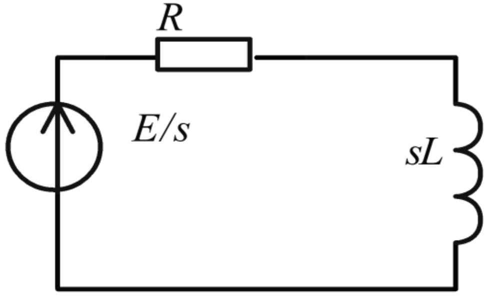
Пример расчета переходного процесса операторным методом.



Определить ток индуктивности. Ключ замыкается.

В начальный момент ток в цепи был равен нулю.

Составим операторную схему замещения для цепи после момента коммутации.



Запишем выражение по второму правилу Кирхгофа:

$$I(s)(R + sL) = \frac{E}{s}$$

Выразим ток

$$I(s) = \frac{E/_{L}}{s(R/_{L} + s)}$$

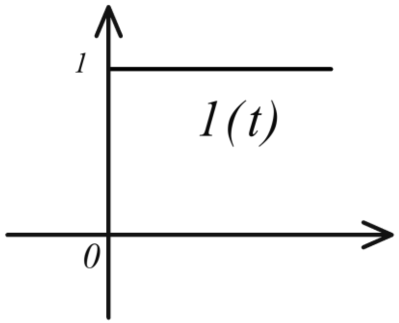
Выполним обратное преобразование используя таблицу изображений:

$$I(s) \doteqdot i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Импульсные функции. Функция Хэвисайта.

Функция Хэвисайта (единичная ступенчатая функция):

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$



Изображение по Лапласу:

$$1(t) \doteqdot \int_0^\infty 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

При смещении относительно нулевого момента, изображение определяется по теореме смещения оригинала:

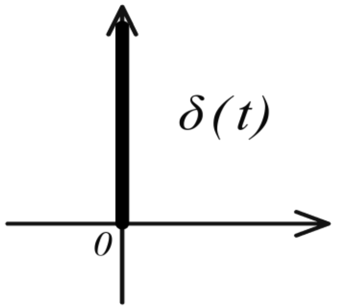
$$1(t-\tau) \doteqdot \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

Применение функции Хэвисайта: описание коммутации в цепи без применения ключа, представление сигналов как суммы элементарных воздействий (ступенек) и т.д.

Импульсные функции. Функция Дирака.

Функция Дирака

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t) = \begin{cases} +\infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0; \end{cases}$$



Изображение по Лапласу:

$$\delta(t) \doteqdot \int_0^\infty \frac{d1(t)}{dt} e^{-st} dt = 1$$

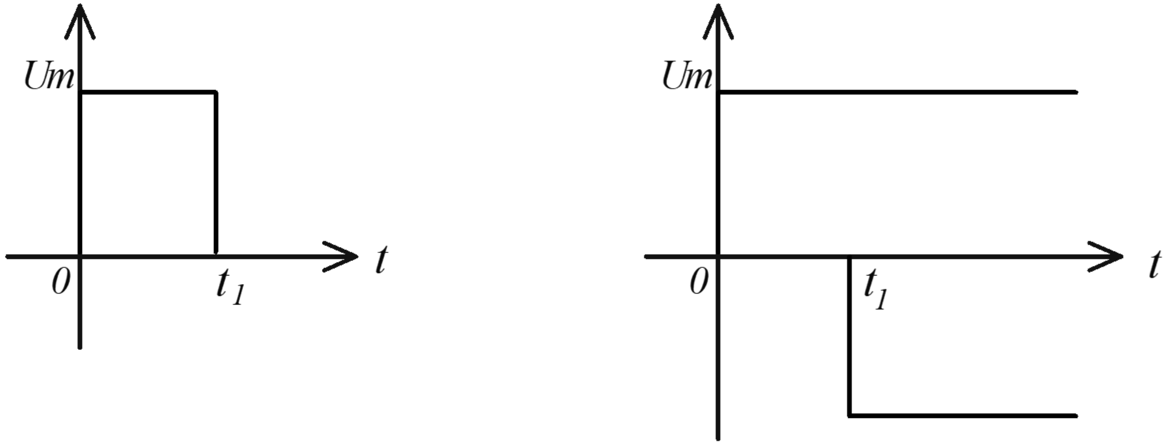
При смещении относительно нулевого момента, изображение определяется по теореме смещения оригинала:

$$\delta(t-\tau) \doteqdot e^{-s\tau}$$

Пример. Применение функции Хевисайта.

Изображение прямоугольного импульса при помощи функции Хевисайта

$$f(t) = U_m[1(t) - 1(t - t_1)] \doteqdot U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s}$$

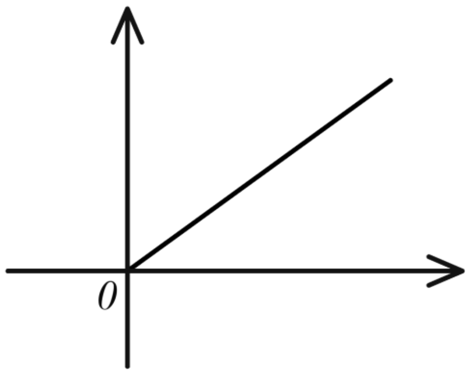


Отсюда видно, что последовательность прямоугольных импульсов (цифровой сигнал) всегда можно представить как сумму ступенчатых функций.

Стандартные воздействия

Функция линейного наклона:

$$\int_{-\infty}^{t} 1(t)dt = t \cdot 1(t) = \begin{cases} t, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$



Продолжая интегрировать полеченную функцию далее получим виды стандартных воздействий:

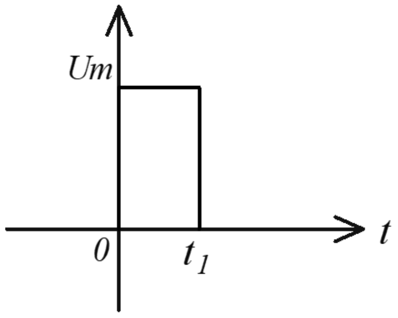
$$\frac{t^2}{2} \cdot 1(t), \qquad \frac{t^3}{6} \cdot 1(t), \qquad \ldots$$

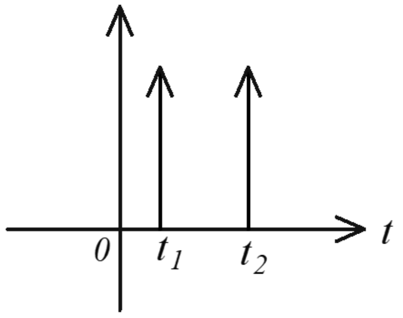
Аппроксимируя анализируемые сигналы с помощью стандартных воздействий, можно упростить работу по получению изображений реальных сигналов.

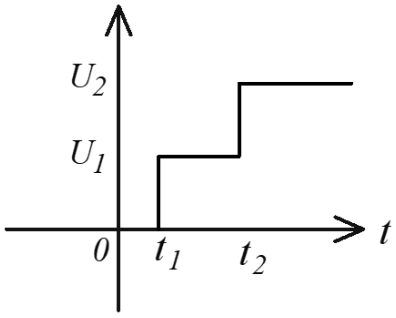
Применение функции Дирака.

1. Описание короткого импульса

$$f(t) \approx t_1 \cdot U_m\,\delta\left(\frac{t_1}{2}\right)$$







2. Производная функции с разрывами первого рода

$$f'(t) = U_1\delta(t - t_1) + (U_2 - U_1)\delta(t - t_2)$$

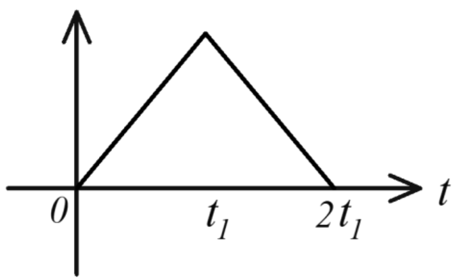
$$\int_{-\infty}^{t} f'(t)dt = U_1 1(t - t_1) + (U_2 - U_1)1(t - t_2)$$

Т.е. при анализе ступенчатых сигналов появляется возможность упрощения работы по получению изображений.

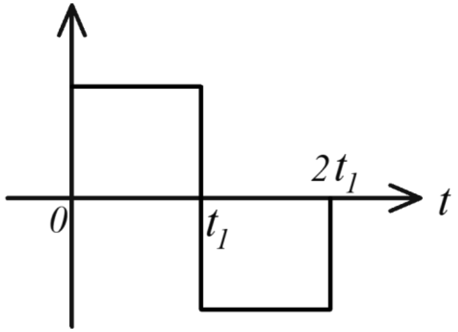
Кусочно-линейное воздействие.

Треугольный импульс

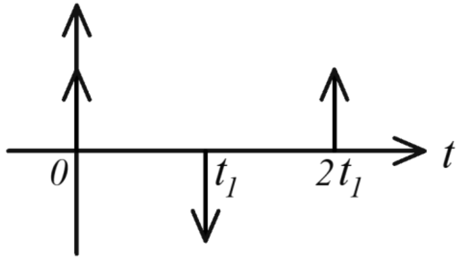
$$f(t) = U_m\left[1(t)\frac{t}{t_1} - 2\cdot 1(t-t_1)\frac{t-t_1}{t_1} + 1(t-2t_1)\frac{t-2t_1}{t_1}\right]$$



Получить изображение напрямую сложно, но если взять две производные и воспользоваться свойством интегрирования оригинала (интегрирование в операторном методе это просто деление на оператор):



$$F(s) = \frac{1}{s^2}L\{f''(t)\} = \frac{U_m}{s^2 t_1}\left(1 - 2e^{-st_1} + e^{-2st_1}\right)$$



В общем случае кусочно-линейного импульса:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}L\left\{\sum A_k\delta(t-t_k)\right\}$$

Изображение по Лапласу для периодической функции.

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{T} f(\tau + nT)e^{-s(\tau+nT)}d\tau$$

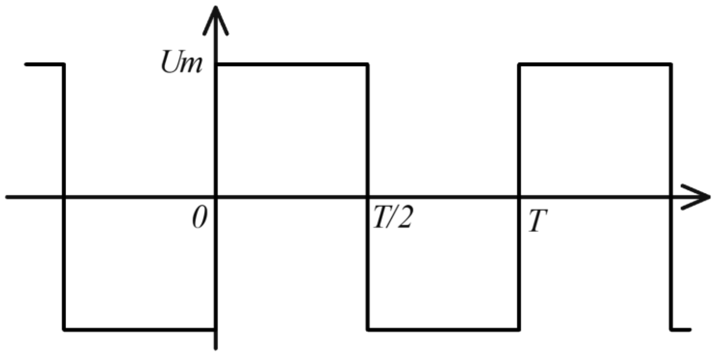
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_{0}^{T} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_{0}^{T} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

$F_1(s)$ - изображение одного периода функции

Пример.

Изображение периодической функции

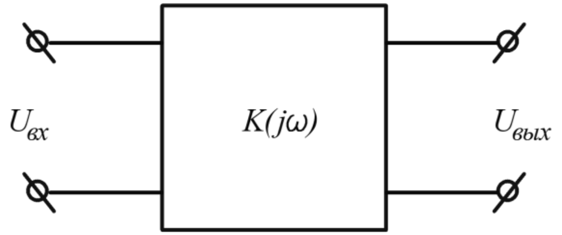
$$f(\tau) = U_m\left[1(\tau) - 2\cdot 1\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + 1(\tau - T)\right]$$



$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = \frac{U_m}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}\left[1(\tau) - 2\cdot 1\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + 1(\tau - T)\right]d\tau =$$

$$= \frac{U_m}{1-e^{-sT}}\cdot\frac{1 - 2\cdot e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{s}$$

Передаточная функция цепи.



Наиболее часто электрическая цепь при анализе представлена в виде четырехполюсника.

В общем случае работа четырехполюсника будет описана дифференциальным уравнением следующего вида:

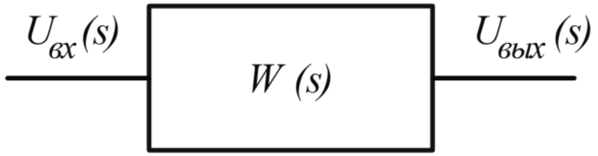
$$a_n \frac{d^n U_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 U_{\text{вых}} = b_m \frac{d^m U_{\text{вх}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 U_{\text{вх}}$$

Преобразуем уравнение с помощью интеграла Лапласа считая начальные условия нулевыми:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) U_{\text{вых}}(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0) U_{\text{вх}}(s)$$

Передаточная функция динамического звена определяется как отношение изображений (по Лапласу) выходного напряжения к входному:

$$\frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = W(s)$$



Свойства передаточной функции

- В физически реализуемых системах всегда $m \leq n$.
- Корни полинома в числителе называются нулями передаточной функции, корни полинома в знаменателе соответственно полюсами передаточной функции.
- При формальной замене $s = j\omega$ получается комплексная передаточная функция описывающая одновременно амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики системы (АФЧХ или ЧПФ – частотная передаточная функция цепи).

$$W(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \sqrt{Re(W)^2 + Im(W)^2} \cdot e^{jarctg\frac{Im(W)}{Re(W)}}$$

$A(\omega)$ - АЧХ, $\varphi(\omega)$ - ФЧХ

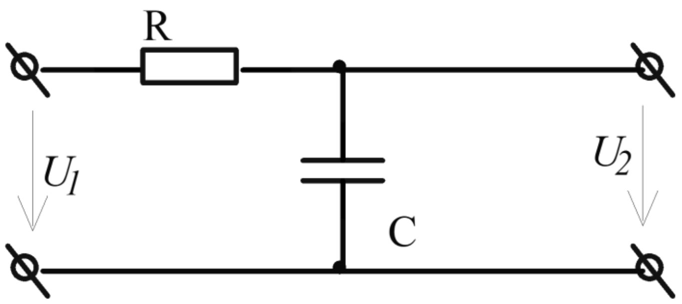
- При известном изображении входного сигнала и передаточной функции, определяется выходной сигнал (реакция на входное воздействие)

$$U_2(t) = L^{-1}\{W(s)U_1(s)\}$$

Построение передаточной функции.

$$U_{\text{вх}}(t) = i_C R + U_{\text{вых}}(t)$$

$$i_C = C\frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt}$$



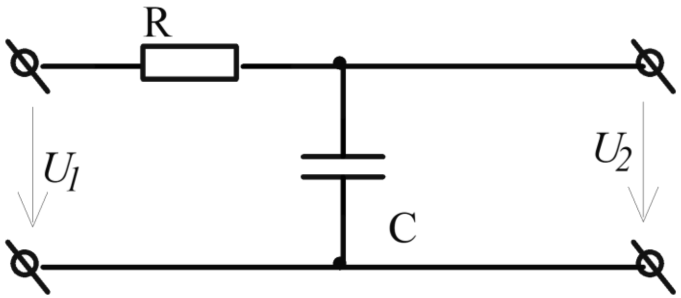
$$U_{\text{вх}}(s) = RI(s) + U_{\text{вых}}(s) = (RCs+1)U_{\text{вых}}(s)$$

$$I(s) = sCU_{\text{вых}}(s)$$

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{1}{sRC+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

Частотная функция.

Построение частотно-передаточной функции



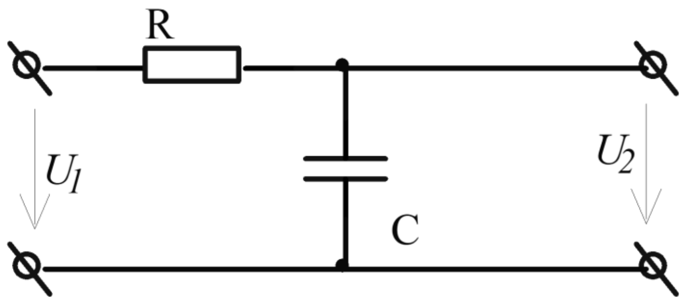
$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

Для получения ЧПФ выполним замену $s = j\omega$ и преобразуем:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-jarctg(\omega RC)}$$

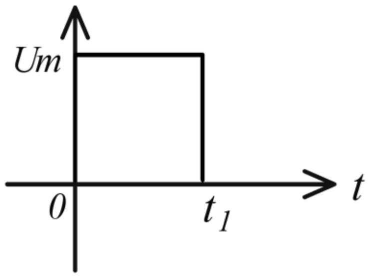
Реакция цепи на импульсное воздействие. Операторный метод.

Передаточная функция звена:



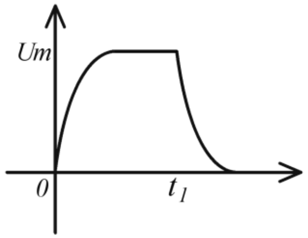
$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Воздействие – прямоугольный импульс:



$$U_1(s) = U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s}$$

Реакция:



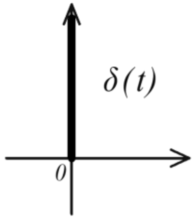
$$U_2(t) = L^{-1}\{W(s)U_1(s)\} = L^{-1}\left\{U_m \frac{1}{RC} \frac{1 - e^{-st_1}}{s(s + \frac{1}{RC})}\right\}$$

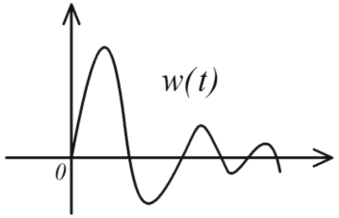
$$= U_m\left[1(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - 1(t - t_1)\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right)\right]$$

Получение временной и переходной характеристик.

Временная или импульсная характеристика цепи - реакция на входной сигнал в виде $\delta(t)$.

$$L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s)$$



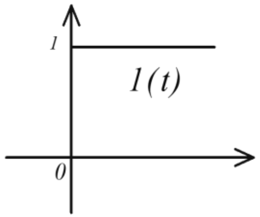


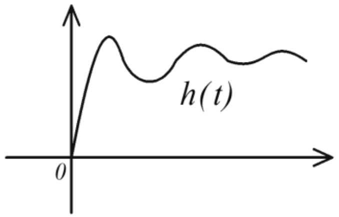
Передаточная функция это изображение по Лапласу временной характеристики цепи.

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$$

Переходная характеристика или переходная функция цепи - реакция на $1(t)$.

$$L\{h(t)\} = W(s)L\{1(t)\} = W(s)\frac{1}{s}$$





Временная и переходная характеристики и принцип причинности.

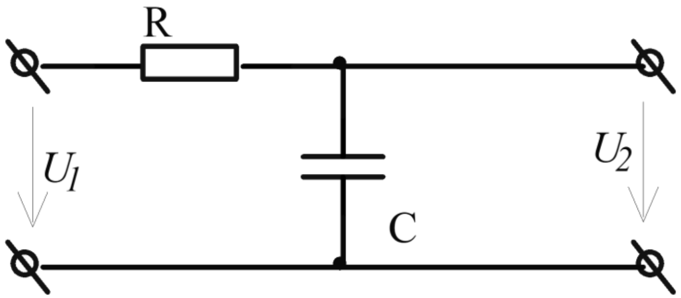
Следует обратить внимание на то, что на вид временной и переходной характеристик звена накладывает ограничение принцип причинности – ***реакция не может появиться раньше воздействия***, следовательно значения характеристик при $t < 0$ должны быть равны нулю.

$$h(t) = h^*(t) \cdot 1(t)$$

$h^*(t)$ - аналитическое продолжение переходной характеристики.

$$w(t) = \frac{d(h^*(t) \cdot 1(t))}{dt} = \frac{dh^*(t)}{dt} \cdot 1(t) + h^*(t) \cdot \delta(t) = w^*(t) \cdot 1(t) + h^*(0_+)\delta(t)$$

Построение временной и переходной характеристик



$$W(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}\right\} = 1(t)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = 1(t)\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Спектр и частотная характеристика

Частотно-передаточная функция получается из передаточной функции.

$$H(j\omega) = \mathrm{W}(\mathrm{s})\big|_{s=j\omega} = \int_{0}^{+\infty} w(t)e^{-j\omega t}dt$$

Учитывая что, при $t < 0$, импульсная характеристика $w(t) = 0$, нижний предел интеграла можно расширить до $-\infty$.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j\omega t}dt = S(j\omega)$$

Частотная характеристика цепи это **спектр импульсной характеристики**.

Спектр и изображение по Лапласу

Из написанного выше видно, что спектр сигнала можно получить из изображения сигнала по Лапласу, заменой $s = j\omega$:

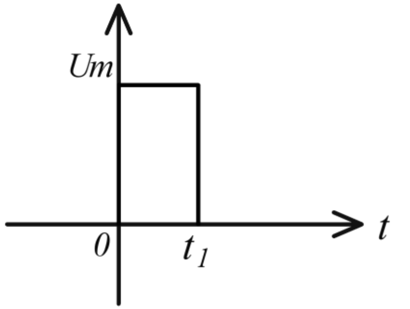
$$S(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

Непрерывный спектр одиночного импульса является огибающей периодической последовательности этих импульсов. Коэффициенты для дискретного разложения (в случае периодической последовательности импульсов) можно определить как:

$$\dot{C}_k = \frac{\omega_0}{2\pi} F(s)|_{s=jk\omega_0}$$

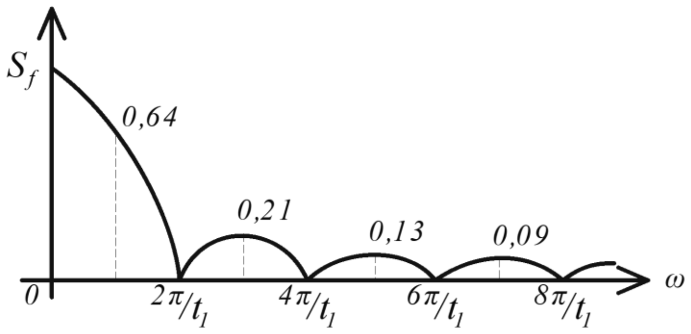
Прямоугольный импульс.

Спектр прямоугольного импульса получим из изображения:

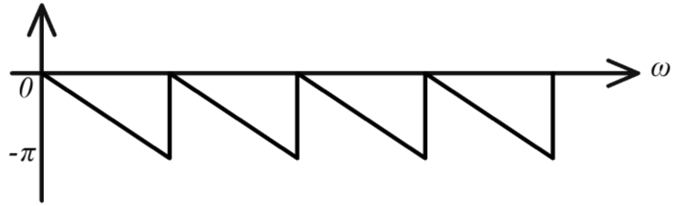


$$U_m \frac{1 - e^{-st_1}}{s}\Big|_{s=j\omega} = U_m \frac{1 - e^{-j\omega t_1}}{j\omega} = \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \left(e^{j\frac{\omega t_1}{2}} + e^{-j\frac{\omega t_1}{2}}\right)$$

$$= \frac{2U_m}{j\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)$$



Амплитудный и фазовый спектры:

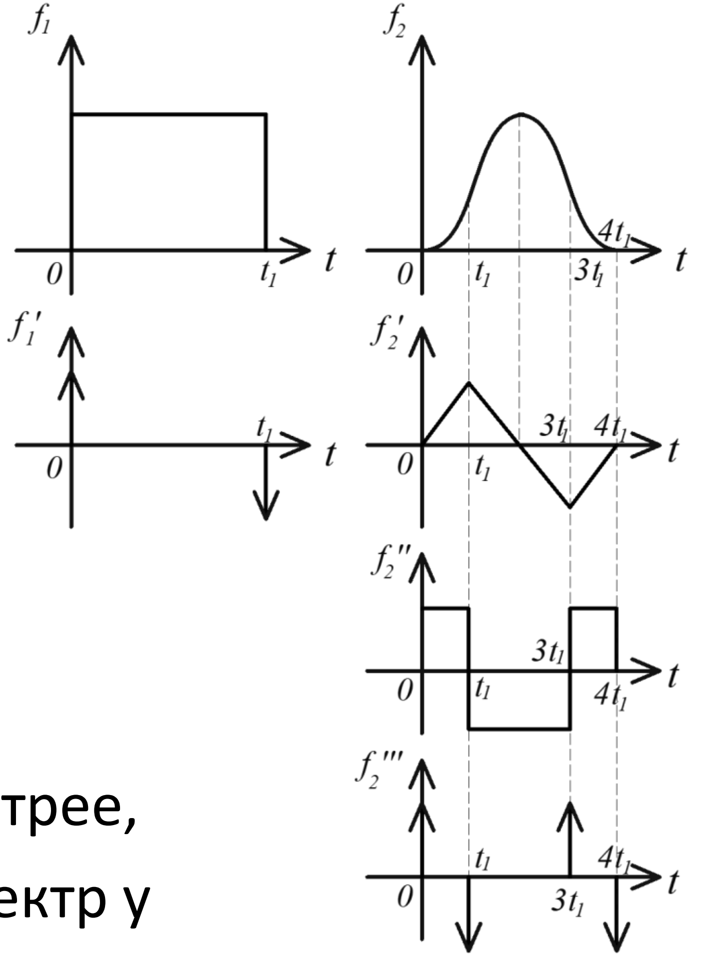


$$A(\omega) = \frac{2U_m}{\omega}\left|sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)\right|, \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\omega t_1}{2} + Arg(\sin(\frac{\omega t_1}{2}))$$

Начальное значение определим из соотношения о синусе малого угла:
$A(0) = U_m t_1 = S_f$

Крутизна сигнала. Влияние на ширину спектра.

Рассмотрим два вида сигналов – прямоугольный импульс и кусочно-параболический импульс, т.е. импульс составлен из трех отрезков квадратичной параболы. Спектры можно найти используя свойство дифференцирования оригинала.



Спектры этих сигналов определяются выражениями:

$$S_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}[\dots], \qquad S_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3}[\dots]$$

Спектр второго сигнала с ростом частоты убывает гораздо быстрее, следовательно его ширина будет меньше. Самый широкий спектр у дельта-функции, самый узкий у синуса. ***Степень гладкости (крутизны) сигнала можно оценить по степени разрывности его производной.***