Глава 6

Решение нелинейных уравнений

Итерационные методы вычисления изолированного (отделенного от других) корня z уравнения $f(x) = 0$, как правило, требуют указания какой-либо области D, содержащей этот единственный корень, и алгоритма нахождения очередного приближения x_{n+1} по уже имеющимся x_n, ..., x_{n-k}.

Широко используемые способы отделения корней — графический и табличный — базируются на свойствах гладкости функции; в случае, когда $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени n, существуют аналитические подходы.

Если $f(x)$ — непрерывная, то вещественный корень z принадлежит любому отрезку, на концах которого эта функция имеет значения разных знаков. Деля отрезок пополам, получаем универсальный метод вычисления корня (метод бисекции). Этот подход не требует знания хорошего начального приближения. Если оно имеется, то для гладких функций используют более эффективные методы.

Пусть отыскивается единственный на отрезке $[a, b]$ корень z уравнения $f(x) = 0$ в предположении непрерывности функции $f(x)$. Если в его окрестности функция представляется в виде $f(x) = (x - z)^p g(x)$, где p — натуральное число, а $g(x)$ — ограниченная функция такая, что $g(z) \neq 0$, то число p называют *кратностью* корня. Если $p = 1$, то корень называют *простым.* При нечетном p функция $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$, т. е. $f(a)f(b) < 0$, а при четном p — нет.

Итерационный метод решения порождает последовательность приближений x_n, которая сходится к корню: $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - z| = 0$. Величину $e_n = |x_n - z|$ называют *абсолютной ошибкой* на n-й итерации. Итерационный метод имеет *порядок* m (или *скорость сходимости* m), если m — наибольшее положительное число, для которого существует такая конечная постоянная $q > 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{e_{n+1}}{e_n^m} \leqslant q < \infty.$$

Постоянную q называют *константой асимптотической ошибки*, ее обычно оценивают через производные функции $f(x)$ в точке $x = z$. При $m = 1\,(q \in (0, 1))$ сходимость называют *линейной* (иногда говорят, что в этом случае метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой q), при $1 < m < 2$ — *сверхлинейной*, при $m = 2$ — *квадратичной* и т. д. Из сходимости с порядком $m > 1$ следует оценка $e_{n+1} \leqslant q_n e_n$, $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. При этом $e_{n+1} \leqslant e_0 \prod\limits_{i=0}^{n} q_i$. Иногда скорость сходимости может замедляться при приближении к искомому решению, что соответствует $q_n \to 1$, но $e_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким свойством обладают методы с *полиномиальной* скоростью сходимости $e_n \leqslant e_0(1+\alpha n e_0^l)^{-1/l}$.

Данная оценка верна, например, если $e_{n+1} \leqslant (1-\alpha e_n^l)e_n$ с некоторыми $l \geqslant 1$ и $0 < \alpha \leqslant e_0^{-l}$. Для методов с полиномиальной скоростью сходимости число итераций n, необходимое для достижения ошибки порядка ε имеет асимптотику $n \approx \varepsilon^{-l}$, что существенно ограничивает их применение для расчетов с высокой точностью.

Особое внимание в теории решения нелинейных уравнений уделяется методам со сверхлинейной скоростью сходимости. При практических расчетах традиционно применяют методы с квадратичной сходимостью, так как итерационные процессы более высокого порядка ($m > 2$) обычно требуют серьезного увеличения вычислительных затрат.

6.1. Метод простой итерации и смежные вопросы

Исходное уравнение $f(x) = 0$ часто заменяют эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$. Эту замену можно сделать, положив, например,

$$\varphi(x) = x + \psi(x)f(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Метод простой итерации. Выберем некоторое начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ к корню z, дальнейшие приближения будем вычислять по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Известно, что последовательность x_n сходится к z, если отображение $y = \varphi(x)$ является *сжимающим (сжимающим экспоненциально)*, т. е. при некотором $0 \leqslant q < 1$ выполнено условие

$$\rho\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) \leqslant q\, \rho\left(x_1, x_2\right),$$

либо *слабо сжимающим (сжимающим полиномиально)*, т. е. при некоторых $\alpha > 0, l \geqslant 1$ выполнено условие

$$\rho\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) \leqslant \frac{\rho\left(x_1, x_2\right)}{\left(1 + \alpha\rho^l\left(x_1, x_2\right)\right)^{1/l}}.$$

Здесь $\rho\left(x_1, x_2\right)$ — расстояние между точками x_1 и x_2. Сходимость последовательности x_n гарантируется, если оценка сжатия выполняется либо для всех точек $x_{1,2} \in \mathbf{R}^1$, либо для точек $x_{1,2} \in [a,b]$ при условии, что $\varphi(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.

Метод секущих. Пусть x_{n-1} и x_n — последовательные приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ прямой, проходящей через точки $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$. В качестве следующего приближения к корню возьмем точку пересечения этой прямой с осью абсцисс. Расчетная формула принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n).$$

Метод хорд. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Идея метода (его еще называют методом *ложного положения*) состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Метод хорд требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца x_0 выбирают конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}\, f(x_n).$$

Метод парабол. Пусть x_{n-2}, x_{n-1} и x_n — три последовательных приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ параболой, проходящей через точки $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$. В качестве следующего приближения к корню возьмем ближайшую к x_n точку пересечения параболы с осью абсцисс. Этот подход исключительно эффективен для нахождения корней многочлена как с действительными, так и с комплексными коэффициентами.

При нахождении кратных корней ($p > 1$) для большинства алгоритмов характерно замедление скорости сходимости.

Методы решения систем нелинейных уравнений. Рассмотрим некоторые из этих методов. Будем считать, что заданная система

$$\begin{cases} f_1(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ f_2(x^1, x^2, ..., x^m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x^1, x^2, ..., x^m) = 0 \end{cases}$$

записывается в операторной форме как $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^m)^T$. Тогда для решения задачи можно пытаться построить некоторое сжимающее отображение $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ и применить *метод простой итерации* $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)$. В многомерном случае также возможна следующая модификация метода:

$$\begin{cases} x^1_{n+1} = g_1(x^1_n, x^2_n, ..., x^m_n), \\ x^2_{n+1} = g_2(x^1_{n+1}, x^2_n, ..., x^m_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^m_{n+1} = g_m(x^1_{n+1}, ..., x^{m-1}_{n+1}, x^m_n). \end{cases}$$

Оператор $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ можно взять, например, в виде $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \tau\mathbf{F}(\mathbf{x})$, τ — параметр. Это соответствует обобщению метода простой итерации для систем линейных уравнений $\dfrac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = 0$ на случай нелинейных задач.

Если из функции $\mathbf{F}$ удается выделить некоторую главную линейную часть, т. е. получить представление $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{H}(\mathbf{x})$, то можно использовать *метод Пикара* $\mathbf{B}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_n) = 0$ или его модификацию

$$\mathbf{B}\,\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = 0.$$

Обобщением метода Гаусса—Зейделя и метода Якоби на нелинейный случай является *метод покоординатного спуска*: компоненты очередного приближения $\mathbf{x}_{n+1}$ определяются при решении одномерных нелинейных уравнений следующих систем соответственно:

$$\begin{cases} f_1(x_{n+1}^1, x_n^2, \ldots, x_n^m) = 0, \\ f_2(x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \ldots, x_n^m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \ldots, x_{n+1}^m) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(x_{n+1}^1, x_n^2, \ldots, x_n^m) = 0, \\ f_2(x_n^1, x_{n+1}^2, \ldots, x_n^m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_n^1, \ldots, x_n^{m-1}, x_{n+1}^m) = 0. \end{cases}$$

Иногда нахождение корней системы уравнений удобно свести к нахождению минимума некоторого функционала $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, например $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$. Напомним, что таким же образом строились методы решения линейных систем. Для минимизации $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ можно рассмотреть следующий нестационарный процесс, который называют *методом установления*:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{x}(t) + \operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

При $\operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \neq 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \left(\operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = -\Big(\operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\Big) < 0\ ,$$

т. е. вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ значение $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ не возрастает.

Другой возможный нестационарный процесс, решение которого также устанавливается в точке минимума, имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \operatorname{grad}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0,\ \ \gamma > 0.$$

В данном случае вдоль траектории не возрастает значение функционала $\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$. При численной реализации операторы производных заменяют соответствующими разностными аналогами.

6.1. Пусть уравнение $f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$ имеет корень z, для его вычисления применяется метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную в открытой окрестности z и $|\varphi'(z)| \leqslant q < 1$. Доказать, что метод сходится к z при выборе начального приближения x_0 из некоторой окрестности корня.

$\lhd$ Функция $\varphi'(x)$ непрерывна и $|\varphi'(z)| < 1$, следовательно, $|\varphi'(x)| < 1$ в некоторой окрестности $Q_\delta = [z-\delta, z+\delta]$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in Q_\delta$. По теореме Лагранжа имеем $\varphi(x_0) = \varphi(z) + \varphi'(\xi)(x_0 - z)$, где точка $\xi \in Q_\delta$. Так как $z = \varphi(z)$, то $|\varphi(x_0) - z| = |\varphi'(\xi)(x_0 - z)| < |x_0 - z|$, т. е. функция φ отображает отрезок Q_δ в себя. Далее, так как

$$x_{n+1} - z = \varphi(x_n) - \varphi(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

то по теореме Лагранжа для каждого n существует такое ξ_n, что

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(\xi_n).$$

Последовательно применяя указанную теорему, получаем

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(\xi_n) = (x_{n-1} - z)\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1}) = \ldots$$
$$\ldots = (x_0 - z)\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1})\ldots\varphi'(\xi_0),$$

где $\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_0 \in Q_\delta$. Так как $|\varphi'(\xi_i)| \leqslant q$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$, то

$$|x_{n+1} - z| \leqslant |x_0 - z|\, q^{n+1}.$$

При $q < 1$ правая часть этого неравенства стремится к нулю, т. е. последовательность x_n сходится к корню z. $\triangleright$

6.2. Дополнительно к условиям 6.1 потребуем $\varphi'(z) = 0$, непрерывность и ограниченность $\varphi''(x)$. Доказать, что для метода $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ в окрестности корня z верна квадратичная оценка сходимости

$$|z - x_{n+1}| \leqslant C(z - x_n)^2.$$

$\triangleleft$ Оценим (см. решение 6.1) скорость сходимости метода для $x_n \in Q_\delta$:

$$x_{n+1} - z = \varphi\,(x_n) - \varphi\,(z) = \varphi(z + (x_n - z)) - \varphi\,(z) =$$
$$= \varphi\,(z) + (x_n - z)\varphi'(z) + \frac{1}{2}\,(x_n - z)^2\,\varphi''(\xi_n) - \varphi\,(z) =$$
$$= \frac{\varphi''(\xi_n)}{2}\,(x_n - z)^2\,,\ \xi_n \in [x_n,\, z]. \qquad \triangleright$$

6.3. Пусть на некотором отрезке $Q_\delta = [a - \delta, a + \delta]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant q|x' - x''|$ с константой $q < 1$ и в точке a выполняется неравенство $|a - \varphi(a)| \leqslant (1 - q)\delta$. Показать, что на отрезке Q_δ уравнение $f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$ имеет единственный корень z и последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится к корню z для произвольного $x_0 \in Q_\delta$.

$\triangleleft$ Пусть $x_0 \in Q_\delta$, т. е. $|a - x_0| \leqslant \delta$. Тогда

$$|\varphi(x_0) - a| = |\varphi(x_0) - \varphi(a) + \varphi(a) - a| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x_0) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - a| \leqslant q|x_0 - a| + (1 - q)\delta \leqslant \delta.$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ отображает Q_δ в себя и является, по условию Липшица, сжимающей с константой q. Применяя принцип сжимающих отображений, завершаем решение. $\triangleright$

6.4. Пусть функция $f'(y)$ непрерывна и $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(y)}\right| \leqslant \varepsilon$ для всех $y \in [x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$. Доказать, что для некоторого $z \in [x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$ справедливо равенство $f(z) = 0$.

$\triangleleft$ По теореме Лагранжа имеем $f(x_n + t) = f(x_n) + f'(y)t$, отсюда следует $\dfrac{f(x_n + t)}{f'(y)} = \dfrac{f(x_n)}{f'(y)} + t$. Выражение в правой части равенства неотрицательно при $t = \varepsilon$ и неположительно при $t = -\varepsilon$. Из условия следует, что производная функции не меняет знака при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, поэтому приходим к выводу, что если оба значения $f(x_n - \varepsilon)$ и $f(x_n + \varepsilon)$ отличны от нуля, то они имеют разные знаки.

Установленный факт лежит в основе точки зрения, согласно которой в качестве критерия остановки итерационного метода для нахождения простых корней условие $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \leqslant \varepsilon$ предпочтительнее, чем условие $|f(x_n)| \leqslant \varepsilon$. $\triangleright$

6.5. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a, b]$, причем функция $f(x)$ дифференцируема, а производная $f'(x)$ знакопостоянна на этом отрезке. Построить равносильное уравнение вида $x = \varphi(x)$, для которого на $[a, b]$ выполнено условие $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$.

$\triangleleft$ Для определенности будем считать, что $f'(x) > 0$. Пусть $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Заменим исходное уравнение $f(x) = 0$ равносильным

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = x - \lambda f(x), \quad \lambda > 0.$$

Подберем параметр λ так, чтобы на $[a, b]$ выполнялось неравенство

$$0 \leqslant \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leqslant q < 1.$$

При $\lambda = \frac{1}{M}$ получаем $q = 1 - \frac{m}{M} < 1$. $\triangleright$

6.6. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации.

$\triangleleft$ Табличным способом выделим отрезки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-3,\, -2]$, $[-1,\, 0]$, $[0,\, 1]$, для каждого из которых построим свой итерационный процесс.

Так как на $[-3,\, -2]$ имеем $x \neq 0$, то исходное уравнение можно разделить на x^2. В результате получаем равносильное уравнение

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} - 3.$$

Итерационный процесс для нахождения первого корня: $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2} - 3$. Сходимость имеет место для всех начальных приближений x_0 из этого отрезка, так как для $x \in [-3,\, -2]$ имеет место оценка

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left|-\,\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{1}{4} < 1, \quad \varphi(x) \in [-3,\, -2].$$

Для двух других отрезков исходное уравнение представим следующим образом $x^2\,(\,x + 3\,) - 1 = 0$, при этом $x + 3 \neq 0$. Если $x_0 \in [-1, 0]$, то определим итерационный процесс в виде $x_{n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{x_n+3}}$; если $x_0 \in [0,1]$, то в виде $x_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_n+3}}$. Можно показать, что в процессе итераций соответствующие отрезки отображаются в себя, поэтому (см. 6.1) сходимость построенных итерационных процессов следует из оценки

$$|\,\varphi'(x)\,| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right|^3 < 1. \qquad \triangleright$$

6.7. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3+1}{20}$ сходится.

$\triangleleft$ Решаем уравнение $x^3 - 20x + 1 = 0$, имеющее три различных вещественных корня: $z_1 < z_2 < z_3$. В зависимости от выбора начального приближения x_0 итерационный процесс либо расходится, либо сойдется к одному из корней z_i, $i = 1, 2, 3$.

Запишем формулу итерационного процесса в виде

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^3 - 20x_n + 1}{20},$$

или, что тоже самое, — в эквивалентной форме:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n - z_1)(x_n - z_2)(x_n - z_3)}{20}.$$

Отсюда имеем, что при $x_n < z_1$ справедливо $x_{n+1} - x_n < 0$, и последовательность x_n монотонно убывает. Это означает расходимость итерационного процесса при $x_0 < z_1$, так как $x_n < x_0 < z_i$, $i = 1, 2, 3$. Аналогично показывается, что при $z_3 < x_0$ выполняются неравенства $z_i < x_n < x_{n+1}$, и метод расходится.

Точки $x_0 = z_1$, $x_0 = z_2$ и $x_0 = z_3$ являются неподвижными, а отображение $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3+1}{20}$ монотонно. Отсюда следует, что для $z_1 < x_0 < z_2$ имеем $z_1 < x_n < x_{n+1} < z_2$. Таким образом, последовательность x_n монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, итерационный процесс сходится к точке z_2. Аналогично доказывается, что для $z_2 < x_0 < z_3$ имеем $z_2 < x_{n+1} < x_n < z_3$, т. е. метод сходится к точке z_2. $\triangleright$

6.8. Оценить скорость сходимости итерационного процесса $x_{n+1} = x_n - x_n^3 + x_n^4$ к корню $z = 0$ при малых x_0.

6.9. Пусть z — простой корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода хорд в его окрестности.

$\triangleleft$ Представим сходящийся метод хорд как частный случай метода простой итерации:

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}\,(x - x_0).$$

Вблизи простого корня z уравнения $f(x) = 0$ имеем

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(z) + \frac{1}{2}\,(x_n - z)^2\,\varphi''(\xi), \quad \xi \in [x_n, z],$$

где

$$\varphi'(z) = 1 + \frac{f'(z)}{f(x_0)}\,(z - x_0) =$$

$$= \frac{f(z) - f'(z)(z - x_0) + \dfrac{f''(\eta)}{2}\,(z - x_0)^2 + f'(z)(z - x_0)}{f(x_0)} =$$

$$= \frac{(z - x_0)^2}{2}\,\frac{f''(\eta)}{f(x_0)} = \frac{(z - x_0)^2}{2}\,\frac{f''(\eta)}{f(z) + f'(\xi)(z - x_0)}\,, \quad \eta, \xi \in [x_0, z].$$

Если начальное приближение x_0 взять в окрестности корня, для которой справедливо $|\varphi'(z)| \leqslant q < 1$, то, учитывая 6.1, приходим к выводу, что метод хорд для x_1 из достаточно малой окрестности $[z - \delta, z + \delta]$ имеет линейную скорость сходимости. ▷

6.10. Пусть z — простой корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода секущих в его окрестности.

◁ Преобразуем расчетную формулу метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\,f(x_n)$$

к виду

$$x_{n+1} - z = x_n - z - \frac{((x_n - z) - (x_{n-1} - z))f(z + (x_n - z))}{f(z + (x_n - z)) - f(z + (x_{n-1} - z))}\,.$$

Разложим $f(z + (x_n - z))$ и $f(z + (x_{n-1} - z))$ в ряды Тейлора в точке z и подставим в последнюю формулу, учитывая, что $f(z) = 0$. Имеем

$$x_{n+1} - z = x_n - z - \frac{(x_n - z)f'(z) + 0,5(x_n - z)^2\,f''(z) + \ldots}{f'(z) + 0,5((x_n - z) + (x_{n-1} - z))f''(z) + \ldots} =$$

$$= (x_n - z)\left(1 - \frac{1 + 0,5(x_n - z)\,\dfrac{f''(z)}{f'(z)} + \ldots}{1 + 0,5(x_n - z)\,\dfrac{f''(z)}{f'(z)} + 0,5(x_{n-1} - z)\,\dfrac{f''(z)}{f'(z)} + \ldots}\right) =$$

$$= 0,5(x_n - z)\,(x_{n-1} - z)\,\frac{f''(z)}{f'(z)} + O((x_n - z)^3).$$

Опустив члены более высокого порядка малости, для ошибки получаем уравнение

$$x_{n+1} - z = C\,(x_n - z)\,(x_{n-1} - z), \quad C = \frac{1}{2}\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\,,\ f'(z) \neq 0.$$

Предположим, что скорость сходимости определяется соотношением $x_{n+1}-z=A\,(x_n-z)^m$, в котором значения A и m пока неизвестны. Тогда $x_n-z=A\,(x_{n-1}-z)^m$, откуда $x_{n-1}-z=A^{-1/m}\,(x_n-z)^{1/m}$. Подставим эти соотношения в уравнение для ошибки

$$A(x_n-z)^m=C\,(x_n-z)\,A^{-1/m}\,(x_n-z)^{1/m}.$$

Приравнивая степени и коэффициенты многочленов, получаем два уравнения с двумя неизвестными

$$m=1+\frac{1}{m},\quad 1=C\,A^{-(1+\frac{1}{m})}.$$

Из первого уравнения находим показатель скорости сходимости метода секущих $m=0,5\,(1+\sqrt{5})\approx 1,618$. При этом константа A равна $\left(\frac{1}{2}\,\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\frac{1}{m}}$. ▷

6.11. Доказать, что все корни уравнения

$$f(x)\equiv a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

расположены в кольце $\dfrac{|a_0|}{b+|a_0|}\leqslant|z|\leqslant 1+\dfrac{c}{|a_n|}$, где $c=\max\{|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_{n-1}|\}$, $b=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|\}$.

◁ Для корней $|z|>1$ имеем

$$a_nz^n=-(a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0),\quad |z|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_{n-i}|}{|a_n|}\,\frac{1}{|z|^{i-1}}\leqslant\frac{c}{|a_n|}\,\frac{|z|}{|z|-1}\,,$$

откуда $|z|-1\leqslant\dfrac{c}{|a_n|}$ и $|z|\leqslant 1+\dfrac{c}{|a_n|}$.

Если теперь $|a_0|>0$, то все корни уравнения отличны от нуля. Делая замену $u=\dfrac{1}{z}$, приходим к уравнению $a_0u^n+a_1u^{n-1}+\ldots+a_n=0$. Из предыдущей оценки следует $|u|\leqslant 1+\dfrac{b}{|a_0|}$, или $|z|\geqslant\dfrac{|a_0|}{b+|a_0|}$. ▷

6.12. Доказать, что если при $x=a$ имеют место неравенства $f(a)>0\,, f'(a)>0\,,\ldots\,, f^{(n)}(a)>0$, то уравнение

$$f(x)\equiv a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

не имеет действительных корней, бо́льших a.

Указание. Использовать формулу Тейлора для многочлена $f(x)$ степени n

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\,f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

6.13. Найти границы действительных корней уравнения

$$x^4 - 35\,x^3 + 380\,x^2 - 1350\,x + 1000 = 0\,.$$

У к а з а н и е. Применяя 6.12, получить, что положительные корни расположены на $[0, 74, 22]$, а отрицательных корней нет.

6.14. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ для любого $x_0 \geqslant -2$.

$\lhd$ Пусть $\varphi(x) = \sqrt{x+2}$ и $x_0 \geqslant -2$. Так как $\varphi(x_0) \geqslant 0$, то сходимость метода достаточно доказать для $x_0 \geqslant 0$. Рассмотрим отрезок $Q = [0, 2+x_0]$. Несложно проверить, что $x_0 \in Q$ и $\varphi(x_n) \in Q, \quad |\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x, x_n \in Q$. Следовательно, приближения $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходятся к $x = 2$ — единственной неподвижной точке отображения $\varphi(x)$. $\rhd$

6.15. Доказать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \cos x_n$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

$\lhd$ При любом $x_0 \in \mathbf{R}^1$ имеем $x_1 \in [-1, 1]$. Для этого отрезка выполнены условия сходимости метода простой итерации $x_{n+1} = \cos x_n$. $\rhd$

6.16. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

$\lhd$ Уравнение $x = x^2 - 2x + 2$ имеет два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$. Пусть $\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$, тогда при $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ имеем $\varphi(x) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $|\varphi'(x)| < 1$. Поэтому при $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ приближения сходятся к z_1. Дальнейший анализ проводим аналогично решению 6.7, используя, в частности, эквивалентную запись итерационного метода в виде $x_{n+1} - x_n = (x_n - 2)(x_n - 1)$. $\rhd$

О т в е т: метод сходится к $z_1 = 1$ при $x_0 \in (0, 2)$. Если $x_0 = 0$ или $x_0 = 2$, то метод сходится к $z_2 = 2$. Для остальных начальных приближений метод расходится.

6.17. Для уравнения $x = 2^{x-1}$, имеющего два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, рассмотрим метод простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

$\lhd$ Пусть $\varphi(x) = 2^{x-1}$, тогда $\varphi'(x) < 1$ при $x \in (-\infty, x^*)$, где $x^* \in (1, 2)$ — решение уравнения $2^{x-1}\ln 2 = 1$. Функция $\varphi(x)$ отображает промежуток $(-\infty, x^*)$ в себя. Таким образом, при $x_0 \in (-\infty, x^*)$ метод сходится к $z = 1$. При $x_0 < 2$ приближения x_n монотонно убывают и при некотором n попадают в $(-\infty, x^*)$ (ср. с решением 6.14), поэтому сходятся к $z = 1$. При $x_0 > 2$ приближения стремятся к ∞. $\rhd$

6.18. Доказать, что метод простой итерации для решения уравнения $x = \varphi(x)$ сходится при любом начальном приближении:

$$1)\ \varphi(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x + \gamma\,, \qquad \text{где} \quad |\alpha - \beta| < 1\,;$$

$$2)\ \varphi(x) = a\,\mathrm{e}^{-b\,x^2} + c\,, \qquad \text{где} \quad b \geqslant 0\,,\ \ 2a^2 b < \mathrm{e}\,.$$

Указание. 2) Найти максимальное значение $|\varphi'(x)|$, $\varphi(x) = a\,\mathrm{e}^{-b\,x^2} + c$, и убедиться, что оно при указанных условиях меньше 1.

6.19. Уравнение $x + \ln x = 0$, имеющее корень $z \approx 0.6$, предлагается решать одним из следующих методов простой итерации: 1) $x_{n+1} = -\ln x_n$; 2) $x_{n+1} = \mathrm{e}^{-x_n}$; 3) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \mathrm{e}^{-x_n}}{2}$; 4) $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 5\mathrm{e}^{-x_n}}{8}$. Исследовать сходимость этих методов и сравнить их скорости.

6.20. Пусть функция $\varphi'(x)$ непрерывна на отрезке $[z - \delta, z + \delta]$, где z — единственная неподвижная точка для $\varphi(x)$. Может ли метод простой итерации сходиться к z, если $|\varphi'(z)| = 1$? Может ли он расходиться в этом случае?

Указание. Рассмотреть два примера. 1) $\varphi(x) = \sin x$, $z = 0$, $|\varphi'(z)| = 1$, метод сходится с любого начального приближения. 2) $\varphi(x) = x^2 + x$, $z = 0$, $|\varphi'(z)| = 1$, метод расходится, если $x_0 > 0$.

6.21. Показать, что для всякого a существует единственное решение $z(a, \varepsilon)$ уравнения $x + \varepsilon \sin x + a = 0$ при $|\varepsilon| \leqslant 1$.

$\lhd$ Воспользовавшись заменой $y = x + a$, преобразуем уравнение к виду $y + \varepsilon \sin(y - a) = 0$ и обозначим $\varphi(y) = -\varepsilon \sin(y - a)$. Функция $\varphi(y)$ отображает множество $\mathbf{R}^1$ в отрезок $Q_\varepsilon = [-|\varepsilon|, |\varepsilon|]$, поэтому можно считать, что $y \in Q_\varepsilon$. При $|\varepsilon| < 1$ имеем $|\varphi'(y)| \leqslant |\varepsilon| < 1$, поэтому $\varphi(y)$ является сжимающим отображением на отрезке Q_ε, следовательно, имеет единственную неподвижную точку $y^* = z(a, \varepsilon)$.

Пусть теперь $|\varepsilon| = 1$. Тогда для произвольных y_1, y_2 имеем

$$\varphi(y_2) - \varphi(y_1) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi'(t)dt = -\varepsilon \int\limits_{y_1}^{y_2} \cos(t - a)dt.$$

Так как $y_1, y_2 \in Q_\varepsilon$, то $\cos(t - a)$ может обратиться в единицу лишь в конечном числе точек, поэтому

$$\left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \cos(t - a)dt \right| \leqslant q|y_2 - y_1|, \quad q < 1.$$

Таким образом, $|\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| \leqslant q|y_2 - y_1|$, т. е. $\varphi(y)$ задает сжимающее отображение, поэтому имеет единственную неподвижную точку. $\rhd$

6.22. Найти область сходимости метода простой итерации для следующих уравнений: 1)$x = \mathrm{e}^{2x} - 1$; 2)$x = \frac{1}{2} - \ln x$; 3)$x = \mathrm{tg}\, x$.

6.23. Записать расчетные формулы метода парабол и найти корни уравнения $2x + \lg x = -0,5$ с точностью 10^{-2}.

6.24. Пусть z — p-кратный корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода секущих в его окрестности.

6.25. Пусть отображение $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z})$ и непрерывно дифференцируемо в некоторой ее окрестности.

1) Доказать, что если все собственные значения его якобиана $\varphi'(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{z}$ по модулю больше 1, то метод простой итерации не сходится.

2) Известно, что хотя бы одно собственное значение якобиана $\varphi'(\mathbf{z})$ по модулю больше 1. Можно ли утверждать, что для всех приближений $\mathbf{x}_0$, достаточно близких к $\mathbf{z}$, верна оценка $\|\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{x}_0)\| < \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|$?

$\lhd$ 1) Введем обозначение: $A = \varphi'(\mathbf{z})$. Собственные значения матрицы A больше единицы по модулю, поэтому существует A^{-1} со спектральным радиусом $\rho(A^{-1}) < 1$. Известно (см. 5.41), что для любого $\varepsilon > 0$ найдется норма $||\cdot||_*$ такая, что $||A^{-1}||_* \leqslant \rho(A^{-1})+\varepsilon$, следовательно, $||A^{-1}||_* = q < 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Далее, если $||B||_* = \alpha < \dfrac{1}{q}$, то существует $(A + B)^{-1}$ и $||(A + B)^{-1}||_* < \dfrac{q}{1 - \alpha q}$. При достаточно малом α получаем $||(A + B)^{-1}||_* = q_1 < 1$.

Пусть теперь $U(\mathbf{z})$ — такая окрестность $\mathbf{z}$, что $||\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{z})||_* < \alpha$ для $\mathbf{x} \in U(\mathbf{z})$. Допустим, что начальное приближение $\mathbf{x}_0 \in U(\mathbf{z})$, метод сходится и все $\mathbf{x}_n \in U(\mathbf{z})$. Тогда для погрешности $\mathbf{e}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{z}$ имеем $\mathbf{e}_{n+1} = \varphi'(\mathbf{y})\mathbf{e}_n,\ \mathbf{y} \in U(\mathbf{z})$, поэтому для любого n справедливо равенство

$$\mathbf{e}_n = (A + (\varphi'(\mathbf{y}) - \varphi'(\mathbf{z})))^{-1}\mathbf{e}_{n+1},$$

откуда следует, что

$$||\mathbf{e}_n||_* \leqslant q_1||\mathbf{e}_{n+1}||_*.$$

Поэтому $||\mathbf{e}_0||_* \leqslant q_1^n||\mathbf{e}_n||_*$, т. е. в пределе получаем $||\mathbf{e}_0||_* = 0$, что противоречит произвольности выбора начального приближения из окрестности $U(\mathbf{z})$.

2) Приведенная в условии оценка неверна, что следует из разложения функции $\mathbf{z}$ в ряд Тейлора в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{z} + \mathbf{e}_0$:

$$\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x}_0) = \varphi'(\mathbf{z})\mathbf{e}_0 + o(\|\mathbf{e}_0\|),$$

где $\mathbf{e}_0$ имеет достаточно малую норму и пропорционален собственному вектору, отвечающему собственному значению, которое по модулю больше единицы. $\rhd$