Определенный интеграл

(все рассматриваемые промежутки числовой оси по умолчанию конечные и непустые)

Разбиения промежутка: узлы разбиения, сетка, с-ва разбиений

Разбиение промежутка Δ - любое конечное мн-во попарно непересекающихся промежутков Δ1, Δ2, Δ3...ΔN , дающих в объединении Δ .

T(Δ) - некоторое разбиение Δ

Нумерация разбиений идёт слева направо относительно их положения на числовой оси.

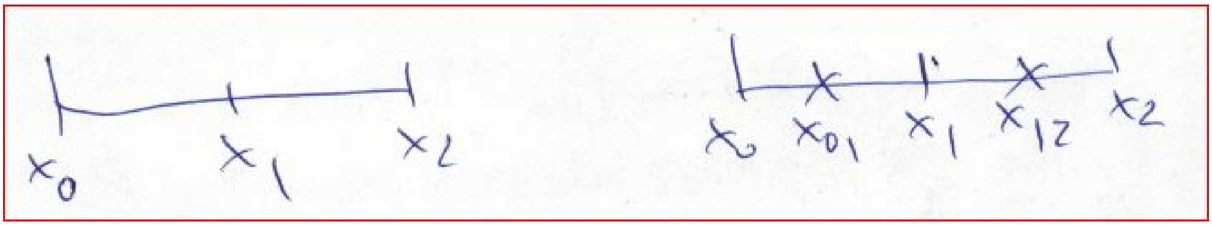
Узлы разбиения T(Δ) - набор точек x1, x2, x3…, xN на промежутке числовой оси.

Сетка - совокупность узлов разбиения

Введем понятие **продолжения** разбиения.

Разбиение T’(Δ) называют продолжением разбиения T(Δ), если любой промежуток разбиения T’(Δ) содержится в одном из промежутков разбиения T(Δ).

T(Δ) T’(Δ)



С-ва разбиений:
Если T’ - продолжение T, а T - продолжение T’’, то T’ - продолжение T’’

Лемма. Для любых двух разбиений промежутка Δ существует третье разбиение Δ, которое является продолжением каждого из двух данных разбиений.

Д-во:

Док-во. Пусть $\tau'(\Delta) = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_n\}$ и $\tau''(\Delta) = \{\Delta''_1, \dots, \Delta''_N\}$. Рассмотрим множество

$$\{\Delta'_i \cap \Delta''_j : i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, N;\ \Delta'_i \cap \Delta''_j \neq \varnothing\}$$

Пересечение $\Delta'_i \cap \Delta''_j$ двух промежутков (непустое) — это снова промежуток числовой оси. Таким образом, рассматриваемое мн-во пересечений — это разбиение $\tau(\Delta)$. #

Интегральные суммы Дарбу и Римана

Пусть на Δ задана функция f(x). Плюс есть разбиение T(Δ) = {Δ1, Δ2, …,Δn}.

Тогда обозначим m_i = inf f(x), при x ε Δi

M_i = sup f(x), при x ε Δi

Длину промежутка Δi обозначим как $|\Delta_i|$

Нижней интегральной суммой Дарбу называется $\sum_{i=1}^{n} m_i * |\Delta_i|$

Верхней - $\sum_{i=1}^{n} M_i * |\Delta_i|$

Теперь введем еще обозначения:

Обозначим $\underline{s}(f;T) = \sum_{i=1}^{N} m_i|\Delta_i|$ и $\overline{S} = \sum_{i=1}^{N} M_i|\Delta_i|$

$S(f;T)$

При этом справедлива оценка:

$$\overline{\overline{S}}(f;\tau) \le \underline{\underline{S}}(f;\tau)$$

Лемма. Если разбиение T(Δ) является продолжением разбиения T'(Δ), то справедливы оценки:

$$\overline{\overline{S}}(f;\tau') \geq \overline{\overline{S}}(f,\tau)\ ;\ \underline{\underline{S}}(f;\tau') \le \underline{\underline{S}}(f;\tau).$$

Д-во:

<u>Док-во</u>. Разбиение $\tau'(\Delta)$, продолжающее $\tau(\Delta)$, можно получить из $\tau(\Delta)$ за конечное число шагов, на каждом из которых ровно один из рассматриваемых промежутков делится на два непересекающихся промежутка.

Пусть на каком-либо из указанных шагов измельчения исходного разбиения $T(\Delta)$ промежуток Δ_i разделен на два непересекающихся промежутка Δ_{i1} и Δ_{i2}. Введем обозначение

m_i = inf f(x), где x ε Δ_i

m_{i1} = inf f(x), где x ε Δ_{i1}

m_{i2} = inf f(x), где x ε Δ_{i2}

Тогда $\Delta_{i1} \subset \Delta_i \Rightarrow m_{i1} \geq m_i$

$\Delta_{i2} \subset \Delta_i \Rightarrow m_{i2} \geq m_i$

А значит, $m_{i1} * |\Delta_{i1}| \geq m_i * |\Delta_{i1}|$

$m_{i2} * |\Delta_{i2}| \geq m_i * |\Delta_{i2}|$

Если сложим эти неравенства, то получим

$$m_{i1} * |\Delta_{i1}| + m_{i2} * |\Delta_{i2}| \geq m_i * (|\Delta_{i1}| + |\Delta_{i2}|)$$

То бишь,

$$m_{i1} * |\Delta_{i1}| + m_{i2} * |\Delta_{i2}| \geq m_i * |\Delta_i|$$

Из этого можно сделать вывод, что при делении промежутка разбиения на два непересекающихся промежутка, **нижняя сумма Дарбу** может только увеличиться.

Что доказывает первую из оценок:

$$\boxed{\bar{\bar{s}}(f;\tau') \geq \bar{\bar{s}}(f,\tau).}$$

Вторая доказывается также.

M_i = sup f(x), где x ε Δ_i

M_{i1} = sup f(x), где x ε Δ_{i1}

M_{i2} = sup f(x), где x ε Δ_{i2}

Тогда $\Delta_{i1} \subset \Delta_i \Rightarrow M_{i1} \leq M_i$

$\Delta_{i2} \subset \Delta_i \Rightarrow M_{i2} \leq M_i$

А значит, $M_{i1} * |\Delta_{i1}| \leq M_i * |\Delta_{i1}|$

$M_{i2} * |\Delta_{i2}| \leq M_i * |\Delta_{i2}|$

Если сложим эти неравенства, то получим

$$M_{i1} * |\Delta_{i1}| + M_{i2} * |\Delta_{i2}| \leq M_i * (|\Delta_{i1}| + |\Delta_{i2}|)$$

То бишь,

$$M_{i1} * |\Delta_{i1}| + M_{i2} * |\Delta_{i2}| \leq M_i * |\Delta_i|$$

Что доказывает вторую оценку:

$$\boxed{\underline{\underline{S}}(f;\tau') \leq \underline{\underline{S}}(f;\tau)}$$

Лемма. Для любой функции f(x), где x ε Δ, и любых двух разбиений T'(Δ) и T"(Δ) справедливо неравенство:

$$\boxed{\overline{\overline{S}}(f;\tau') \leq \underline{\underline{S}}(f;\tau'').}$$

Д-во.
Для разбиений T'(Δ) и T"(Δ) найдем третье - T(Δ), которое будет **продолжением** как для T'(Δ), так и для T"(Δ). Тогда будут справедливы следующие н-ва:

$$\boxed{\overline{\overline{S}}(f;\tau') \leq \overline{\overline{S}}(f;\tau); \quad \underline{\underline{S}}(f;\tau) \leq \underline{\underline{S}}(f;\tau'').}$$

Зная, что нижняя сумма Дарбу от одной и той же функции и на одном том же разбиении $\leq$ верхней, связываем эти два н-ва в одно большое:

$$\boxed{\overline{\overline{S}}(f;\tau') \leq \overline{\overline{S}}(f;\tau) \leq \underline{\underline{S}}(f;\tau) \leq \underline{\underline{S}}(f;\tau'').}$$

Из которого следует справедливость леммы.

Пусть на Δ задана функция f(x). Плюс есть разбиение T(Δ) = {Δ1, Δ2, …,Δn}.

Тогда сумма $\sigma(f;T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * |\Delta_i|$,

где $\xi_i \in \Delta_i$,

называется **интегральной суммой Римана** функции f .

Еще обозначается как:

$\sigma(f;T;\xi)$, где $\xi = \{\xi_1 , \xi_2 ,\ldots, \xi_n\}$

Справедливы следующие неравенства:

$$\overline{S}(f;T) \le \sigma(f;T;\xi) \le \underline{S}(f;T).$$

При любом выборе точек $\xi_i \in \Delta_i$

И также:

$$\overline{S}(f;T) = \inf_{\xi} \sigma(f;T;\xi);$$

$$\underline{S}(f;T) = \sup_{\xi} \sigma(f;T;\xi).$$

Определение интеграла Римана

Как уже отмечалось, для любых двух разбиений числовой оси справедливо:

$$\overline{S}(f;T') \le \underline{S}(f;T'').$$

Фиксируя разбиение T” и заставляя пробегать T’ все допустимые для разбиений значения, получаем оценку:

$$\sup_{T} \bar{\bar{s}}(f;T) \leq \underline{\underline{S}}(f;T'').$$

В свою очередь, заставляя пробегать также T’, получаем оценку:

$$\sup_{T} \bar{\bar{s}}(f;T) \leq \inf_{T} \underline{\underline{S}}(f;T).$$

Опр.

$$\underline{J}(f) = \sup_{T} \bar{\bar{s}}(f;T)$$

- нижний интеграл Дарбу

$$\overline{J}(f) = \inf_{T} \underline{\underline{S}}(f;T)$$

- верхний интеграл Дарбу

От функции f по промежутку Δ.

Для любой функции $f(x),\ x \in \Delta$ справедливо н-во:

$$\underline{J}(f) \leq \overline{J}(f).$$

Опр. Если интегралы Дарбу конечны и равны между собой, то функция f называется интегрируемой по Риману на промежутке Δ. А число

$$J(f) \equiv \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

- интегралом Римана.

Для интеграла Римана исп. обозначение $\int\limits_{\Delta} f(x)dx$.

Из опр. интеграла Римана $\Rightarrow$ справедливость неравенств:

$$s(f;T) \le \int\limits_{\Delta} f(x)dx \le S(f;T), \ \forall T(\Delta).$$

Пример: интеграл ступенчатой функции

Функция $f(x),\ x \in \Delta$ называется ступенчатой, если $\exists$ разбиение $T(\Delta) = \{\Delta 1, \Delta 2, \ldots, \Delta n\}$ такое, что

$f(x) = c_i$, при $\forall x \in \Delta_i$.

Ступенчатая функция $f(x)$ интегрируема на Δ и при этом

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i * |\Delta_i|$$

Теорема об ограниченности интегрируемой по Риману функции

Если функция f интегрируема по Риману на промежутке Δ, то f ограничена на этом промежутке.

Д-во.

Допустим, что некоторая функция $f(x),\ x \in \Delta$ интегрируема по Риману Δ и при этом неограничена сверху. Тогда $sup\, f(x) = +\infty ,\ x \in \Delta$.
Теперь возьмем некоторое разбиение $T(\Delta) = \{\Delta 1, \Delta 2, \ldots, \Delta n\}$. Из предположения следует, что $\exists\, \Delta_i$ на котором f(x) неограничена сверху и $|\Delta_i| > 0$.
Следовательно, верхняя интегральная сумма Дарбу будет также неограничена, что противоречит условию интегрируемости по Риману. Несоответствие при неограниченности снизу доказывается также.

Критерий Римана интегрируемости функций

Если $f(x)$ интегрируема по Риману на Δ $\Leftrightarrow$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau(\Delta): \quad \underline{S}(f;\tau) - \overline{S}(f;\tau) < \varepsilon$$

Д-во($\Rightarrow$):
Согласно определению интеграла Римана имеем:

$$\exists \tau'_\varepsilon(\Delta): \qquad J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{S}(f;\tau'_\varepsilon) \le J(f)$$

$$\exists \tau''_\varepsilon(\Delta): \qquad J(f) \le \underline{S}(f;\tau''_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь $J(f)$ - интеграл Римана

Добавим T_ε, явл. продолжением T''_ε и T'_ε. Тогда:

$$\overline{S}(f;\tau'_\varepsilon) \le \overline{S}(f;\tau_\varepsilon); \qquad \overline{S}(f;\tau_\varepsilon) \le \underline{S}(f;\tau_\varepsilon)$$

$$\underline{S}(f;\tau_\varepsilon) \le \underline{S}(f;\tau''_\varepsilon);$$

Теперь объединим неравенства и получим:

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{S}(f;\tau'_\varepsilon) \le \overline{S}(f;\tau_\varepsilon) \le \underline{S}(f;\tau_\varepsilon) \le$$
$$\le \underline{S}(f;\tau''_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Преобразуем полученное н-во:

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{S}(f;\tau_\varepsilon) \le \underline{S}(f;\tau_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f;\tau_\varepsilon) - \overline{S}(f;\tau_\varepsilon) < \varepsilon,$$

Получается, что для разбиения T_ε условие выполнено, то бишь, в правую сторону доказано.

Теперь в левую.
Пусть выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau(\Delta): \ \underline{\underline{S}}(f;\tau) - \overline{\overline{s}}(f;\tau) < \varepsilon$$

Добавим сюда:

$$\overline{\overline{s}}(f;\tau) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le \underline{\underline{S}}(f;\tau)$$

И немного переделаем последнее неравенство + соединим с первым и получим:

$$\overline{J}(f) - \underline{J}(f) \le \underline{\underline{S}}(f;\tau) - \overline{\overline{s}}(f;\tau) < \varepsilon$$

От этого перейдем к очередному неравенству, добавив 0:

$$0 \le \overline{J}(f) - \underline{J}(f) < \varepsilon$$

Теперь перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим, что:

$$\overline{J}(f) = \underline{J}(f)$$

Из чего следует, что f интегрируется по Риману на Δ.

Колебание функции и критерий интегрируемости по Риману в терминах колебаний. Следствие

Пусть есть $f(x),\ x \in D_f$ и множество $g \subset D_f$. Тогда разность $\sup f(x) - \inf f(x) \equiv w(f;g)\ , x \varepsilon g$ называется **колебанием функции** $f(x)$ на g.

Теорема(Интегрируемости Римана через колебания)

Если $f(x)$ интегрируема по Риману на Δ $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; T(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\} : \sum_{i=1}^{n} w(f, \Delta_i) * |\Delta_i| < \varepsilon$$

Следствие.

Если $f(x)$ интегрируема по Риману на Δ $\Leftrightarrow$ последовательность {T(Δ)} разбиений Δ:

$$\lim_{k\to\infty} [\, \underline{S}(f;T_k) - \overline{\overline{S}}(f;T_k) \,] = 0 \qquad (1)$$

В этом случае:

$$\int_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f;T_k) = \lim_{k\to\infty} \overline{\overline{S}}(f;T_k) \qquad (2)$$

(соре за одну черту снизу, хз как две поставить)

Д-во.

($\Leftarrow$)

Из условия (1) имеем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, T_k(\Delta) :$

$$\underline{\underline{S}}(f;T_k) - \overline{\overline{S}}(f;T_k) < \varepsilon$$

А это - критерий интегрируемости по Риману.

($\Rightarrow$)

Пусть f(x) интегрируема на Δ. Тогда по критерию Римана для

$$\varepsilon = \frac{1}{k}, \; k = 1, 2, .., \quad \exists \, T_k(\Delta) :$$

$$0 \le \underline{\underline{S}}(f;T_k) - \overline{\overline{S}}(f;T_k) \le \frac{1}{k}$$

Переходя здесь к пределу при k $\to \infty$ получаем условие (1). При этом

$J(f) \equiv \int\limits_{\Delta} f(x)dx$ удовлетворяет соотношениям:

$$0 \le J(f) - \bar{\bar{S}}(f, T_k) \le \underline{\underline{S}}(f, T_k) - \bar{\bar{S}}(f, T_k);$$
$$0 \le \underline{\underline{S}}(f, T_k) - J(f) \le \underline{\underline{S}}(f, T_k) - \bar{\bar{S}}(f, T_k).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при k $\to \infty$ и пользуясь (1), получаем:

$$0 \le \lim_{k\to\infty}\left[J(f) - \bar{\bar{S}}(f, T_k)\right] \le \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left[\underline{\underline{S}}(f, T_k) - \bar{\bar{S}}(f, T_k)\right]}_{=0}$$
$$0 \le \lim_{k\to\infty}\left[\underline{\underline{S}}(f, T_k) - J(f)\right] \le \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left[\underline{\underline{S}}(f, T_k) - \bar{\bar{S}}(f, T_k)\right]}_{=0}$$

Таким образом, равенства (2) действительно имеют место

Теорема об интеграле Римана как пределе сумм Дарбу со стремящейся к нулю мелкостью

Пусть имеется разбиение $T(\Delta) = \{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}$ и $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Тогда величины $h_i = x_i - x_{i-1}$ называются шагами сетки $T(\Delta)$.

Обозначим максимальный из шагов за $|T|$ = max(Δ_i), i = 1, 2.., n.

$|T|$ называют **мелкостью** разбиения $T(\Delta)$

Теорема. Пусть f(x) интегрируется на промежутке $\Delta \subset D_f$. Тогда для любой последовательности разбиений $T_k(\Delta),\ k = 1, 2, ..;$, обладающей свойством $|T_k(\Delta)| \to 0$ при $k \to \infty$ имеют место равенства:

$$\lim_{k\to\infty} \bar{S}(f, T_k) = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f, T_k) = \int_\Delta f(x)dx \quad (3)$$

Д-во:

Пусть $T_k = \{\Delta_1^k, .., \Delta_{n_k}^k\}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} |T_k| = 0$. Для интегрируемой функции f(x), x $\subset$ Δ, введем обозначение:

$$\Lambda_k = \sum_{i=1}^{n_k} \omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k| = \bar{S}(f; T_k) - \underline{S}(f, T_k)$$

Если будет доказано, что $\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda_k = 0$, то бишь, что

$$\lim_{k\to\infty} [\bar{S}(f; T_k) - \underline{S}(f, T_k)] = 0$$

то при предельном переходе по $k \to \infty$ в неравенствах

$$\underline{S}(f; T_k) \le J(f) \le \bar{S}(f; T_k), \quad \forall k.$$

получатся искомые соотношения.

Тогда убедимся в этом.

Из интегрируемости f(x) на Δ следует ее ограниченность на Δ. Т.е. :

$$\exists M : |f(x)| \le M$$

для $\forall x \in \Delta$.

Кроме того, по критерию Римана интегрируемости,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau(\Delta): \ \underline{S}(f;\tau) - \overline{S}(f;\tau) < \varepsilon$$

Пусть разбиение $T_\varepsilon = \{\Delta_1^\varepsilon, .., \ \Delta_{n_\varepsilon}^\varepsilon\}$ - и есть это разбиение для каждого T по критерию.

Разобьем сумму Λ_k на две части = $\Lambda_k^* + \Lambda_k^{**}$, где

Λ_k^* – это сумма величин $\omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k|$ по всем таким Δ_i^k, которые не содержатся ни в одном из промежутков $\Delta_j^\varepsilon \in \tau_\varepsilon$;

Λ_k^{**} – это сумма величин $\omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k|$ по всем остальным Δ_i^k.

Заметим, что в сумме Λ_k^* содержится не более чем N_ε слагаемых, для каждого из которых справедлива оценка:

$$\omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \leq 2M|\tau_k|.$$

Из чего следует, что:

$$0 \leq \Lambda_k^* \leq 2M|\tau_k| \cdot N_\varepsilon$$

Для Λ_k^{**} справедливо:

$$\Lambda_k^{**} = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \Big(\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} \omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \Big)$$

где вложенная сумма берется по всем промежуткам $\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon$. Если для j таких вложенных промежутков Δ_i^k нет, то внутренняя сумма равна нулю. И:

Если $\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon$, то $\omega(f; \Delta_i^k) \leq \omega(f; \Delta_j^\varepsilon)$.

Таким образом, имеем оценку

$$0 \leq \Lambda_k^{**} \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \omega(f; \Delta_j^\varepsilon) \Big(\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} |\Delta_i^k| \Big).$$

При заданном k промежутки Δ_i^k не пересекаются и поэтому:

$$\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} |\Delta_i^k| \leq |\Delta_j^\varepsilon|. \Rightarrow$$

$$0 \leq \Lambda_k^{**} \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \omega(f; \Delta_j^\varepsilon) |\Delta_j^\varepsilon| =$$

$$= \underset{=}{S}(f; \tau_\varepsilon) - \overset{=}{S}(f; \tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Последнее н-во справедливо в силу выбора разбиения $T_\varepsilon(\Delta)$

Далее имеем:

$$0 \le \Lambda_k = \Lambda_k^{*} + \Lambda_k^{**} \le 2M|\tau_k|\cdot V_\varepsilon + \varepsilon.$$

Следовательно, при $|\tau_k| \to 0$ и ~~имеем~~ справедливо

$$0 \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \Lambda_k \le \overline{\lim}_{k\to\infty} \Lambda_k \le \varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — любое. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$0 = \underline{\lim}_{k\to\infty} \Lambda_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} \Lambda_k = 0$$

Следовательно, существует $\lim_{k\to\infty} \Lambda_k = 0.$

Следствие.

Функция f(x) интегрируется на промежутке $\Delta \subset D_f \Leftrightarrow$

$\exists$ последовательность $T_k(\Delta),\ k = 1, 2, ..;$, с условием $|T_k(\Delta)| \to 0$ при $k \to \infty$ и при этом:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\underline{S}(f,\tau_k) - \overline{S}(f,\tau_k)\right] = 0. \quad (1')$$

В этом случае условие типа (1') выполняется для всех послед. разбиений со свойством, что $|T_k(\Delta)| \to 0$ при $k \to \infty$

Эквивалентность двух определений интеграла Римана

Пусть f(x) интегрируема по Риману и послед. $T_k(\Delta),\ k = 1, 2, ..;$ обладает с-вами $|T_k(\Delta)| \to 0$ при $k \to \infty$

и $\lim\limits_{k\to\infty}[\,\underline{S}(f;T_k) - \overline{\overline{S}}(f;T_k)\,] = 0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\overline{S}}(f;T_k) = \lim_{k\to\infty}\underline{\underline{S}}(f;T_k) = \int_\Delta f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Кроме того, в силу:

$$\overline{\overline{S}}(f;T_k) \le \sigma(f;T_k;\xi) \le \underline{\underline{S}}(f;T_k),$$

Справедливо также предельное равенство:

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(f;T_k;\xi) = \int_\Delta f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Равенства (4) и (5) справедливы для любой послед. $T_k(\Delta),\ k = 1, 2, ..;$, со стремящейся к нулю мелкостью, $|T_k(\Delta)| \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому вместо этих равенств пишут:

$$\lim_{|T|\to 0}\overline{\overline{S}}(f;T) = \lim_{|T|\to 0}\underline{\underline{S}}(f;T) = \int_\Delta f(x)\,dx$$

$$\lim_{|T|\to 0}\sigma(f;T;\xi) = \int_\Delta f(x)\,dx.$$

Приведенные рассуждения таки доказывают эквивалентность двух определений интеграла Римана.

Сохранение интегрируемости при переходе к меньшему промежутку, а также при объединении промежутков

Пусть f(x) интегрируема на Δ и $\Delta' \subset \Delta$, Δ' - промежуток.
Тогда f(x) интегрируема на Δ'.

Д-во:

T'_k - посл. разбиений Δ' и $|T'_k| \to 0,$ при $k \to \infty$.

Дополним T'_k до разбиения T_k промежутка Δ так, чтобы $|T_k| \le |T'_k|$

Если $|T'_k| \to 0,$ при $k \to \infty$, то и $|T_k| \to 0,$ при $k \to \infty$.

В силу интегрируемости имеем:

$$0 \le \underline{S}(f;T_k) - \overline{S}(f;T_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Но $T'_k \subset T_k$ и поэтому:

$$0 \le \underline{S}(f;T'_k) - \overline{S}(f;T'_k) \le \underline{S}(f;T_k) - \overline{S}(f;T_k).$$

Следовательно:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\underline{S}(f;T'_k) - \overline{S}(f;T'_k)\right] = 0.$$

А значит, f(x) интегрируема на Δ'.

Пусть Δ, Δ', Δ'' - промежутки и $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. Если функция интегрируема на Δ' и Δ'', то и на Δ тоже.

Д-во:

Считаем, что множества не равны между собой, иначе д-во очевидно.

Разность $\Delta''' = \Delta' \setminus \Delta''$ - тоже промежуток, при этом $\Delta = \Delta' \cup \Delta'''$ и $\Delta' \cap \Delta''' = \varnothing$.

Возьмем T'_k - разбиение Δ' и T'''_k - разбиение Δ'''

$|T'_k| \to 0$ и $|T'''_k| \to 0,$ при $k \to \infty$. Тогда

$|T_k| = |T'_k| \cup |T'''_k|$ - разбиение Δ

Причем:

$$|\tau_k| = \max\{|\tau_k'|, |\tau_k''|\} \to 0 \text{ при } k\to\infty,$$

При этом:

$$\underline{\underline{S}}(f,\tau_k) - \overline{\overline{S}}(f,\tau_k) = \left[\underline{\underline{S}}(f,\tau_k') - \overline{\overline{S}}(f,\tau_k')\right] + \left[\underline{\underline{S}}(f,\tau_k'') - \overline{\overline{S}}(f,\tau_k'')\right].$$

По условию, предел правой части равенства = 0(функция интегрируема на Δ' и Δ'' $\Rightarrow$ и на Δ'и Δ''' тоже)

Таким образом:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\underline{\underline{S}}(f,\tau_k) - \overline{\overline{S}}(f,\tau_k)\right] = 0.$$

Что значит, что f(x) интегрируема на Δ

Наследование свойства интегрируемости модулем функции

.

Если f(x) интегрируема на Δ, то и |f(x)| тоже.

Д-во:

[См: $\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big| \le |f(x_1)-f(x_2)| \le$

$\le \omega(f, \Delta')$ для $\forall x_1, x_2 \in \Delta' \subset \Delta$.

$\Rightarrow \omega(|f|; \Delta') \le \omega(f; \Delta')$ для $\forall \Delta' \subset \Delta$.

Пусть $T_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \dots, \Delta_{N_k}^k\}$, $k = 1, 2, \dots$, причем $|T_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$0 \le \sum_{i=1}^{N_k} \omega(|f|; \Delta_i^k)\,|\Delta_i^k| \le \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f, \Delta_i^k)\,|\Delta_i^k| \to 0$$

при $k \to \infty$

Это и означает, что $|f|$ интегрируема на Δ].