Проверить, что $S_5(f)$ точна на многочленах пятой степени $\int\limits_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5)$, но найдется многочлен степени 6, на котором она не точна.

4.3. Квадратурные формулы Гаусса

Рассмотрим следующую задачу: при заданном числе узлов n построить для вычисления интегралов вида $I(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx$ квадратурную формулу

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \tag{4.1}$$

точную для многочленов максимально высокой степени. Весовая функция $p(x)$ предполагается почти всюду положительной.

В этой постановке имеется $2n$ свободных параметров (узлы x_i и коэффициенты c_i неизвестны), поэтому можно попытаться построить квадратуру, точную для многочленов степени $2n-1$. Несложно убедиться в том, что не существует квадратуры с n узлами, точной для всех многочленов степени $2n$. Действительно, возьмем $P_{2n}(x) = (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$. Тогда $0 = S_n(P_{2n}) \neq I(P_{2n}) > 0$.

Важную роль при построении *квадратурных формул Гаусса* (4.1) играют ортогональные многочлены на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x) > 0$ почти всюду. Они могут быть получены, например, в результате стандартной процедуры ортогонализации, примененной к системе $\{1, x, \ldots, x^k, \ldots\}$, при скалярном произведении

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\,.$$

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется система ортогональных многочленов с весом $p(x)$

$$1, \psi_1(x), \psi_2(x), \ \ldots\ , \psi_k(x), \ldots\,.$$

Тогда многочлен k-й степени $\psi_k(x)$ ортогонален произвольному многочлену $P_l(x)$ при $l = 0, \ldots, k-1$. Действительно, многочлен $P_l(x)$ представим в виде $P_l(x) = \sum\limits_{j=0}^{l} c_j \psi_j(x)$, и при $k \neq l$ имеют место равенства

$$\int\limits_a^b p(x)\psi_k(x)\psi_l(x)\,dx = 0\,.$$

На практике наиболее употребительны следующие ортогональные многочлены:

Лежандра ($[-1,1]$, $p(x) \equiv 1$),

Чебышёва первого рода $\left([-1,1],\ p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,

Лагерра $([0,\infty),\ p(x)=\mathrm{e}^{-x})$,

Эрмита $\left((-\infty,\infty),\ p(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\right)$.

Здесь в скобках указаны промежуток интегрирования и весовая функция.

При построении квадратурных формул Гаусса базовым является следующее утверждение:

Теорема. *Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — нули ортогонального на $[a,b]$ с весом $p(x)$ многочлена $\psi_n(x)$ степени n и (4.1) — квадратура, точная для многочленов степени $n-1$. Тогда квадратура (4.1) точна для многочленов степени $2n-1$.*

На основании этого утверждения процесс построения квадратуры может быть разбит на два последовательных этапа: — нахождение нулей ортогонального многочлена; — нахождение весов методом неопределенных коэффициентов.

Приведем оценку погрешности формул Гаусса

$$R_n=\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\int\limits_a^b p(x)\,\frac{\psi_n^2(x)}{(2n)!}\,dx\,,$$

которая для отрезка $[-1,1]$ и веса $p(x)\equiv 1$ имеет вид

$$R_n=\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)}\,.$$

4.42. Методом ортогонализации построить несколько первых многочленов Лежандра со старшим коэффициентом 1, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(x)\equiv 1$.

Ответ: $\psi_0=1,\quad \psi_1=x,\quad \psi_2=x^2-\frac{1}{3}\,,\quad \psi_3=x^3-\frac{3}{5}\,x,\ \ldots\,.$

4.43. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a,b]$.

$\lhd$ Если $\psi_n(x)$ имеет на $[a,b]$ только $r<n$ нулей нечетной кратности, то многочлен

$$Q_{n+r}(x)=\psi_n(x)\prod_{l=1}^{r}(x-x_l)$$

не меняет знака на этом отрезке. Следовательно, интеграл $\int\limits_a^b p(x)Q_{n+r}(x)\,dx$ отличен от нуля, что противоречит свойству ортогональности $\psi_n(x)$ любому многочлену низшей степени. $\rhd$

4.44. Построить квадратуру Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла: 1) $I(f) = \int\limits_0^1 x f(x)\,dx$; 2) $I(f) = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,dx$.

Ответ: 1) $\frac{1}{2}\, f\left(\frac{2}{3}\right)$; 2) $(e-1)\, f\left(\frac{1}{e-1}\right)$.

4.45. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла: 1) $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx$; 2) $I(f) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x)\,dx$.

Ответ: 1) $\frac{1}{3}\left(f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$; 2) $f\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\right)$.

4.46. Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Ответ: $\frac{5}{9}\, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\, f(0) + \frac{5}{9}\, f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

4.47. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

$\lhd$ Рассмотрим многочлен степени $k = 2n-2$ вида $P_k(x) = \left(\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (x-x_i)\right)^2$.

Для интеграла от этого многочлена формула Гаусса дает точный результат

$$\int\limits_a^b p(x) P_k(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} c_j P_k(x_j) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_j P_k(x_j) + c_k P_k(x_k).$$

Так как справедливо $P_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$, то имеет место равенство

$$c_k = \frac{\int\limits_a^b p(x) P_k(x)\,dx}{P_k(x_k)} > 0. \qquad \rhd$$

4.48. Пусть весовая функция $p(x)$ четная относительно середины отрезка интегрирования — точки $\frac{a+b}{2}$. Доказать, что узлы квадратуры Гаусса для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_a^b p(x) f(x)\,dx$ расположены симметрично относительно $\frac{a+b}{2}$, а соответствующие симметричным узлам коэффициенты квадратуры равны.

Ответ: симметрия узлов квадратуры следует из решения 4.70, а равенство коэффициентов — следствие симметрии узлов (см. 4.3).

4.49. Пусть $R_n(f)$ — погрешность для функции $f(x) = x^{2n}$ квадратурной формулы Гаусса с n узлами для отрезка $[-1, 1]$ и весовой функции $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Вычислить $R_n(f)$ и показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{2n-1}|R_n(f)| = \pi$.

4.50. Пусть $R_n(f)$ — погрешность для функции $f(x) = x^{2n}$ квадратурной формулы Гаусса с n узлами для отрезка $[-1, 1]$ и весовой функции $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Вычислить $R_n(f)$ и показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{2n}|R_n(f)| = \pi$.

4.51. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Доказать, что для формул Гаусса $|R_n(f)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание. Квадратурная формула и вычисляемый по ней интеграл определяют линейные функционалы на пространстве непрерывных функций. Поэтому здесь применима теорема Банаха о сходимости последовательности линейных операторов (необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение следующих двух требований: 1) сходимость на множестве элементов, всюду плотном в пространстве, где определены операторы; 2) ограниченность в совокупности норм операторов.)

Для квадратур Гаусса положительность коэффициентов гарантирует выполнение второго требования. Проверить, что оценка погрешности дает сходимость по n для произвольного алгебраического многочлена, откуда следует выполнение первого требования.

4.52. Построить составную квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами на каждом отрезке разбиения для вычисления интеграла $I(f) = \int\limits_a^b \mathrm{e}^{\alpha x} f(x)dx$, где $\mathrm{e}^{\alpha x}$ — весовая функция. Оценить погрешность построенной формулы.

4.53. Доказать, что не существует квадратур $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ с n узлами, точных для всех тригонометрических полиномов степени n с весовой функцией $p(x) \equiv 1$.

4.54. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла $I(f)$: 1) $\int\limits_0^1 x^2 f(x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 |x| f(x)dx$.

4.55. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $I(f)$: 1) $\int\limits_{-1}^1 |x| f(x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 x^4 f(x)dx$.

4.56. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int\limits_0^1 p(x) f(x)dx$, $p(x)$ — весовая функция:

1) $p(x) = x$; 2) $p(x) = \sin(\pi x)$; 3) $p(x) = \mathrm{e}^x$; 4) $p(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$; 5) $p(x) = 1 - x$; 6) $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

4.57. Показать, что квадратурная формула

$$S_3(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) f(x) dx$ точна для всех алгебраических многочленов пятой степени.

4.58. Показать, что квадратурная формула

$$S_3(f) = \frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ точна для всех алгебраических многочленов пятой степени.

4.59. Построить квадратуру Гаусса с четырьмя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Ответ: $-x_{-1} = x_1 = \sqrt{\dfrac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \quad c_{-1} = c_1 = \dfrac{18 + \sqrt{30}}{36},$

$$-x_{-2} = x_2 = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}, \quad c_{-2} = c_2 = \frac{18 - \sqrt{30}}{36}.$$

4.60. На интервале $(-\infty, \infty)$ найти ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \exp(-x^2)$.

Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}\,x$.

4.61. На отрезке $[-1, 1]$ найти ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x$.

4.62. На отрезке $[-1, 1]$ найти ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}\,x$.

4.63. На полуинтервале $[0, \infty)$ найти ортогональный многочлен $\psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \exp(-x)$.

Ответ: $\psi_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$.

4.64. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_0^{\pi} \sin(x)\, f(x)\, dx$.

Ответ: $S_2(f) = f\left(\dfrac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 8}}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 8}}{2}\right)$.

4.65. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-x)\, f(x)\, dx$.

Ответ: $S_2(f) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\, f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, f(2+\sqrt{2})$.

4.66. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_0^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)\, dx$.

Ответ: $S_2(f) = \frac{1}{24}\left[f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}\right)\right]$.

4.67. Доказать, что ни с каким весом $p(x) > 0$ многочлены $\{x^m\}_{m=0}^{\infty}$ не могут быть ортогональны на $[0,1]$.

4.68. Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется система ортогональных многочленов $\{\psi_n(x)\}$ с весом $p(x)$ и старшим коэффициентом, равным единице. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int\limits_a^b p(x) P_n^2(x)\, dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$.

◁ Пусть $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Тогда $P_n(x) = \psi_n(x) + r_{n-1}(x)$, и из ортогональности $\psi_n(x)$ любому многочлену низшей степени следует

$$\|P_n(x)\|^2 = \|\psi_n(x)\|^2 + \|r_{n-1}(x)\|^2 . \qquad \triangleright$$

4.69. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения

$$\psi_n(x) = (x - b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n \psi_{n-2}(x)$$

с коэффициентами $b_n = \dfrac{(x\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}$ и $c_n = \dfrac{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}{(\psi_{n-2}, \psi_{n-2})} > 0$.

◁ Представим многочлен $x\psi_{n-1}$ в виде $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \psi_k$, где коэффициенты α_j определяются из условий ортогональности

$$(x\psi_{n-1}, \psi_j) = \alpha_j(\psi_j, \psi_j), \; j = 0, \ldots, n .$$

При $j < n-2$ имеем

$$(x\psi_{n-1}, \psi_j) = (\psi_{n-1}, x\psi_j) = (\psi_{n-1}, Q_{j+1}(x)) = 0\,,$$

т. е. все $\alpha_j = 0$ при $j < n-2$ (здесь $Q_{j+1}(x) = x\psi_j$ — многочлен степени $j+1$). Таким образом,

$$x\psi_{n-1} = \alpha_n\psi_n + \alpha_{n-1}\psi_{n-1} + \alpha_{n-2}\psi_{n-2}\,,$$

при этом в силу равенства коэффициентов при старшей степени x, $\alpha_n = 1$. Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = (x - \alpha_{n-1})\psi_{n-1} - \alpha_{n-2}\psi_{n-2}, \quad b_n \equiv \alpha_{n-1}, \quad c_n \equiv \alpha_{n-2}\,.$$

Умножая скалярно равенство на ψ_{n-1}, получаем $b_n = \dfrac{(x\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}$. Умножая скалярно равенство на ψ_{n-2}, с учетом $(x\psi_{n-1}, \psi_{n-2}) = (\psi_{n-1}, \psi_{n-1})$, находим $c_n = \dfrac{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}{(\psi_{n-2}, \psi_{n-2})} > 0\,.$ ▷

4.70. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$.

Указание. $\psi_0(x) = 1$, $\psi_1(x) = x$. Продолжить решение по индукции, используя рекуррентное соотношение из 4.69 и доказав, что $b_n \equiv 0$.

4.71. Пусть задан отрезок $[a, b]$. Доказать, что при $b > a \geqslant 0$ все коэффициенты ортогонального многочлена отличны от нуля.

◁ Все корни x_k многочлена $\psi_n(x)$ положительны, а его коэффициенты выражаются через величины $B_j = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^j$ (см. 4.25). Доказательство также можно построить на основе теоремы Виета. ▷

4.72. Доказать, что нули ортогональных многочленов с фиксированным на отрезке $[a, b]$ весом $p(x) > 0$ перемежаются, т. е.

$$a < x_1^{(n)} < x_1^{(n-1)} < \ldots < x_{n-1}^{(n-1)} < x_n^{(n)} < b.$$

◁ Подставим $x = x_i^{(n)}$ в рекуррентное соотношение (см. 4.69)

$$\psi_{n+1} = (x - \alpha_n)\psi_n - \alpha_{n-1}\psi_{n-1}\,.$$

Учитывая, что здесь $\alpha_{n-1} > 0$, имеем

$$\psi_{n+1}\left(x_i^{(n)}\right) + \alpha_{n-1}\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right) = 0\,.$$

Пусть утверждение верно для некоторого n. Отсюда и из равенств

$$\operatorname{sign}\psi_{n-1}(b) = 1, \quad \operatorname{sign}\psi_{n-1}(a) = (-1)^{n-1}$$

следует, что

$$\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right) = (-1)^{n-i},$$

а знаки $\operatorname{sign}\psi_{n+1}\left(x_i^{(n)}\right) = -\operatorname{sign}\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right)$ противоположны. Так как

$$\operatorname{sign}\psi_{n+1}(b) = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign}\psi_{n+1}(a) = (-1)^{n+1},$$

то $\psi_{n+1}(x)$ имеет чередующиеся знаки в последовательно расположенных точках $a, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, b$, что и завершает доказательство. ▷

4.73. Доказать, что для многочленов Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

справедливы следующие соотношения:

1) $L_n(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\right)\Bigg|_{t=0}, \; n \geqslant 0;$

2) $(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0, \; n \geqslant 1;$

3) $L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x) = (2n+1)L_n(x), \; n \geqslant 1;$

4) $L'_{n+1}(x) - xL'_n(x) = (n+1)L_n(x), \; n \geqslant 0;$

5) $xL'_n(x) - L'_{n-1}(x) = nL_n(x), \; n \geqslant 1;$

6) $(x^2-1)L'_n(x) = nxL_n(x) - nL_{n-1}(x), \; n \geqslant 1;$

7) $(1-x^2)L''_n(x) - 2xL'_n(x) + n(n+1)L_n(x) = 0, \; n \geqslant 0;$

8) $\int\limits_{-1}^{1} x^k L_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если}\, 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}, & \text{если}\, k = n; \end{cases}$

9) $\int\limits_{-1}^{1} L_k(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если}\, k \neq m, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & \text{если}\, k = m; \end{cases}$

10) Если $L_n(x_k) = 0$, то $\int\limits_{-1}^{1} \frac{L_n(x)}{x-x_k}\,dx = -\frac{2}{(n+1)L_{n+1}(x_k)}, \; n \geqslant 1;$

11) $L_n(x) = 2^{-n}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n x^{n-2k}, \; n \geqslant 0.$

4.74. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — корни многочлена Лежандра $L_n(x)$ и $\gamma_k = \int\limits_{-1}^{1}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\,dx$. Доказать, что если $f(x), g(x)$ — алгебраические многочлены степени $n-1$, то $\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k f(x_k)g(x_k)$.

4.75. Доказать следующие свойства узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса $S_n(f)$ для вычисления интегралов $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$:

1) $L_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $L_n(x)$ — ортогональный многочлен Лежандра степени n;

2) $c_k = -\dfrac{2}{(n+1)L_{n+1}(x_k)L_n'(x_k)}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$;

3) $c_k = \dfrac{2(1-x_k^2)}{n^2(L_{n-1}(x_k))^2}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$;

4) $c_k = \dfrac{2}{nL_{n-1}(x_k)L_n'(x_k)}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$.

4.76. Для вычисления интегралов $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ построить *квадратурную формулу Маркова—Радо*

$$S_n(f) = c_1 f(-1) + \sum_{i=2}^{n} c_i f(x_i),$$

точную для произвольного многочлена степени $2n-2$.

4.77. Для вычисления интегралов $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ построить *квадратурную формулу Маркова—Лобатто*

$$S_n(f) = c_1 f(-1) + \sum_{i=2}^{n-1} c_i f(x_i) + c_n f(1),$$

точную для произвольного многочлена степени $2n-3$.

Указание. Представить исходный интеграл в виде

$$I(f) = \int\limits_{-1}^{1} Q_1(x)dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)-Q_1(x)}{1-x^2}\,p(x)dx,$$

где

$$Q_1(x) = f(-1)\,\frac{1-x}{2} + f(1)\,\frac{1+x}{2}\,,\ p(x) = 1-x^2.$$

Построить квадратурную формулу Гаусса с $n-2$ узлами, соответствующую весовой функции $p(x)$:

$$\int\limits_{-1}^{1} q(x)p(x)dx \approx \sum_{j=2}^{n-1} d_j q(x_j).$$

Показать, что квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \int\limits_{-1}^{1} Q_1(x)dx + \sum_{j=2}^{n-1} d_j\,\frac{f(x_j)-Q_1(x_j)}{1-x_j^2}$$

при $c_j = \dfrac{d_j}{1-x_j^2}$, $j = 2, \ldots, n-1$, является искомой.