1 Partial orders, examples of partial orders. Least/greatest, minimal/maximal elements in partial orders, upper/lower boundary, supremum/infimum of a set. Posets and losets

Определение

Бинарное отношение $r \subseteq A^2$ называется отношением **частичного порядка**, или просто **частичным порядком**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Другими словами, оно должно удовлетворять следующим свойствам:

1. **рефлексивность**: $\forall a \in A\ (a, a) \in r$
2. **антисимметричность**: $\forall a, b \in A\ (a, b) \in r, (b, a) \in r \Rightarrow a = b$
3. **транзитивность**: $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in r,\ (b, c) \in r \Rightarrow (a, c) \in r$

Для обозначения отношения частичного порядка обычно используются следующие символы: $\leq, \subseteq, \preceq, \sqsubseteq, \ldots$. Если такой символ используется в качестве r, то вместо $(a, b) \in \leq$ можно использовать более общие обозначения $a \leq b$ и называть $\leq$ просто частичным порядком.

Важный частный случай частичного порядка, также называемый линейным порядком..

Определение

Частичный порядок $\leq$ на множестве A называется **линейным порядком**, если выполняется следующее свойство:

$$\forall a, b \in A\ (a, b) \in r \text{ или } (b, a) \in r$$

Примеры частичных порядков

Пример 1

Обычное отношение $\leq$ на действительных числах $\mathbb{R}$ является линейным порядком.

Пример 2

Пусть A - множество. Тогда бинарное отношение $\subseteq_A$ на множестве $\mathcal{P}(A)$ будет частичным порядком, но не линейным в общем случае.

Пример 3

Определим отношение делимости $|$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ как:

$$n|m \Leftrightarrow n \text{ делит } m$$

Тогда $|$ является частичным порядком на $\mathbb{N}$.

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in X$ называется

- **наибольшим** в X, тогда и только тогда, когда для любого $b \in X$ верно, что $a \geqslant b$
- **наименьшим** в X, тогда и только тогда, когда для любого $b \in X$ верно, что $b \geqslant a$

Замечание

Наибольший элемент может не существовать. пример: рассмотрим натуральные числа $\mathbb{N}$. Не существует наибольшего элемента из $\mathbb{N}$. Кроме того, не существует наименьшего элемента из множества всех целых чисел.

Предложение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Тогда, если наименьший элемент из X существует, то он единственен. То же верно и для наибольшего элемента.

Доказательство

Пусть $a_1, a_2 \in X$ - два наименьших элемента из X. Тогда по определению $a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_1$. Отношение частичного порядка антисимметрично, поэтому $a_1 = a_2$.

- Если существует наименьший элемент из X, то он обозначается как $\min(X)$
- Если существует наибольший элемент из X, то он обозначается как $\max(X)$

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in X$ называется

- **минимальным** из X, тогда и только тогда, когда $\forall b \in X (b \leq a \Rightarrow b = a)$
- **максимальным** из X, тогда и только тогда, когда $\forall b \in X (a \leq b \Rightarrow b = a)$

Замечание

Минимальный/максимальный элемент может не существовать, и даже если он существует, он может не быть единственным.

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент $a \in A$ называется

- **верхней границей** X из A, тогда и только тогда, когда для любых $b \in X$, $b \leq a$
- **нижней границей** X из A, тогда и только тогда, когда для любых $b \in X$, $a \leq b$

Введем следующие обозначения:

- $X \uparrow A \rightleftharpoons \{b | b \in A, b$ - верхняя граница X из $A\}$ - множество всех верхних границ X из A

- $X \downarrow A \rightleftharpoons \{b | b \in A, b$ - нижняя граница X из $A\}$ - множество всех нижних границ X из A,

Отметим, что множества $X \uparrow A$ и $X \downarrow A$ всегда существуют, но могут быть пустыми.

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A, $X \subseteq A$. Элемент a называется

- точной верхней границей или **супремум** X из A, тогда и только тогда, когда $a = \min(X \uparrow A)$

- точной нижней границей или **инфимум** X из A, тогда и только тогда, когда $a = \max(X \downarrow A)$

Отметим, что супремум и инфимум не всегда существуют. Если супремум существует, он единственен. То же верно и для инфимума. Теперь введём следующие обозначения

- $\sup_A(X)$ - супремум множества X из A, если он существует

- $\inf_A(X)$ - инфимум множества X из A, если он существует

Если из контекста понятно, какой A имеется в виду, можно просто писать $\sup(X)$ и $\inf(X)$ вместо $\sup_A(X)$ и $\inf_A(X)$.

Примеры верхних и нижних граней

Пример 1

Пусть $\leq$ - обычный линейный порядок на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Рассмотрим множество $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $X \downarrow \mathbb{R} = \{a | a \in \mathbb{R}, a \leq 0\}$, и $\inf_{\mathbb{R}}(X) = \max(X \downarrow \mathbb{R}) = 0$.

Пример 2

Пусть $\leq$ - линейный порядок на $\mathbb{R}$. Рассмотрим множества $X = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ и $Y = \{a | a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1\}$. Тогда

- $X \uparrow \mathbb{R} = \{a | a \in \mathbb{R}, a \geq 1\}$
- $X \uparrow Y = \emptyset$

следовательно,

- $\sup_{\mathbb{R}}(X) = 1$
- $\sup_Y(X)$ не существует и $X \subseteq Y$

Лемма (о $\sup$ и $\inf$)

Пусть $\leq$ - частичный порядок на A, $X \subseteq A$. Тогда

- если существует $a = \max(X)$, то $\sup_A(X) = a$
- если существует $b = \min(X)$, то $\inf_A(X) = b$

Доказательство

Докажем первое утверждение. Пусть $a = \max(X)$. Это означает, что $\forall c \in X$ верно, что $c \leq a$, т.е. $a \in (X \uparrow A)$. Предположим, что $a \neq b = \sup_A(X) = \min(X \uparrow A)$. Тогда $b < a$. Так как b - верхняя граница X, $a \leq b$ - противоречие. Второе утверждение доказывается аналогично.

Определение

Пусть $\leq$ - частичный порядок на множестве A. Тогда пара $(A, \leq)$ называется **частично упорядоченным множеством**, сокращённо **чум**.

Определение

Пусть $\mathcal{A}(A, \leq)$ - чум. Если $\leq$ - линейный порядок на A, то $\mathcal{A}$ называется **линейно упорядоченным множеством**, сокращённо **лум**.

2 Redexes, normal form of a λ-term. Church-Rosser theorem (without proof)

Определение

λ-терм t находится в **нормальной форме**, если он не содержит подтерма s, такого, что существует некоторый α-эквивалентный к s терм s', образующий β или η редекс в t.

Дальнейшая редукция терма в нормальной форме невозможна, поскольку он не имеет редексов.

Примеры нормальных форм

- $I = \lambda x.x$ находится в нормальной форме
- $(f(tsr))$ находится в нормальной форме
- $(f((\lambda x.(gxh))sr))$ не находится в нормальной форме, потому что он имеет редекс $(\lambda x.(gxh))s$

Теорема (Черча-Россера)

Дан некоторый λ-терм t, если для каких-либо термов s' и s'' верно, что $t \Rightarrow s'$ и $t \Rightarrow s''$, то существует такой λ-терм q, что $s' \Rightarrow q$ и $s'' \Rightarrow q$.

Теорема Чёрча-Россера говорит нам, что порядок, в котором мы применяем редукции к терму, в некотором смысле, не имеет значения: из любого множества промежуточных λ-термов в процессе переписывания можно получить точно такой же терм.

3 Homomorphisms, epimorphisms and isomorphisms of structures

Определение

Пусть $\mathcal{M}_1 = (M_1, \sigma), \mathcal{M}_2 = (M_2, \sigma)$ - две структуры сигнатуры $\sigma = (P, F)$, и $\phi : M_1 \to M_2$ - всюду определенное отображение из носителя $\mathcal{M}_1$ в носитель $\mathcal{M}_2$. Тогда ϕ называется **гомоморфизмом**, тогда и только тогда, когда

- $f^{\mathcal{M}_2}(\phi(\bar{a})) = \phi(f^{\mathcal{M}_1}(\bar{a}))$ для любого $f^n \in F$ и для любого кортежа $\bar{a} \in M_1^n$
- $\bar{a} \in p^{\mathcal{M}_1} \Rightarrow \phi(\bar{a}) \in p^{\mathcal{M}_2}$ для любого $p^n \in P$ и для любого кортежа $\bar{a} \in M_1^n$

Если ϕ сюръективно, то ϕ называется **сюръективным гомоморфизмом** или **эпиморфизмом**. Если ϕ биективно, и

- $\bar{a} \in p^{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow \phi(\bar{a}) \in p^{\mathcal{M}_2}$ для любого предиката $p^n \in P$ и для любого кортежа $\bar{a} \in M_1^n$

то ϕ называется **изоморфизмом** и обозначается следующим образом: $\phi : \mathcal{M}_1 \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}_2$.

Определение

Две структуры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называются **изоморфными**, тогда и только тогда, когда между ними существует изоморфизм $f : \mathcal{M}_1 \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}_2$. Обозначается следующим образом: $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$.
Изоморфизм структуры $\mathcal{M}$ на себя $f : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}$ называется **автоморфизмом**.

Лемма

Для любых структур $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ сигнатуры σ:

1. если $f : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{N}$, то $f^{-1} : \mathcal{N} \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}$
2. если $f : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{N}$ и $g : \mathcal{N} \overset{\cong}{\to} \mathcal{K}$, то $f \circ g : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{K}$
3. $id_M : \mathcal{M} \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}$

Доказательство

По определению.

Пример гомоморфизма

Гомоморфизм кольца целых чисел

Рассмотрим структуру $\mathbb{Z} = (Z, \sigma_{\mathbb{Z}})$ - кольцо целых чисел, где $\sigma_{\mathbb{Z}} = \{+^2, \cdot^2, 0, 1\}$. Пусть $0 < n \in \omega$ - некоторое положительное натуральное число. Определим отображение $f : Z \to Z_n$ следующим образом:

$$f : Z \ni k \to [k]_{\sim_n} \in Z_n$$

Тогда f является гомоморфизмом.

Автоморфизм групп подстановок

Пусть $f \in S(A)$ - некоторая биекция множества A на A. Определим отображение $in_f : S(A) \to S(A)$ следующим образом: для любой $g \in S(A)$ возьмём

$$in_f(g) \rightleftharpoons f \circ g \circ f^{-1}$$

Тогда in_f является автоморфизмом группы $S(A)$ (так называемым **внутренним** автоморфизмом).