Несобственные интегралы

1 | Определение несобственного интеграла: интеграл по неограниченному интервалу, интеграл от неограниченной функции. Несобственные интегралы с двумя особыми пределами интегрирования. Интегрирование степенных особенностей.
2 | Свойства операции несобственного интегрирования. Примеры вычисления несобственных интегралов.
3 | Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признак совместной сходимости. Следствие. Функции сравнения, сравнения со степенными функциями. Примеры
4 | Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Лемма о сходимости абсолютно сходящихся интегралов. Условно сходящиеся несобственные интегралы.
5 | Признаки Дирихле и Абеля. Примеры.

Пункт 1.

Определение. *Для любой функции $f(x)$, заданной на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируемой по Риману на любом конечном отрезке вида $[a,\eta]$, предел интеграла*

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$$

при $\eta \to +\infty$, если только он существует, называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a,+\infty)$.

Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a,+\infty)$ существует, то его обозначают как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и называют также несобственным интегралом от a до $+\infty$.

Таким образом, по определению имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^\eta f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, а функция $f(x)$ — интегрируемой по $[a,+\infty)$ в несобственном смысле.

Если же предел (1) не существует или бесконечен, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся.*

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a,b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке вида $[a,\eta] \subset [a,b)$. Если функция $f(x)$ неограниченная на $[a,b]$, то предел ее первообразной*

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx \quad \text{при} \quad \eta \to b-0,$$

если только он существует, называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$.

Таким образом, по определению имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Если предел (2) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, а функция $f(x)$ — интегрируемой по $[a,b]$ в несобственном смысле.

Если же предел (2) не существует или бесконечен, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется расходящимся.

Определенные выше несобственные интегралы называют также *интегралами с особыми пределами* (верхними или нижними). Рассматриваются также интегралы, у которых и верхний, и нижний пределы интегрирования являются особыми.

В этом случае предполагается, что подынтегральная функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном интервале (a,b) и при этом интегрируема на любом отрезке вида $[\xi,\eta]$, вложенном в (a,b). Несобственный интеграл при этом определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — внутренняя точка из (a,b).

В правой части последнего равенства складываются несобственные интегралы, имеющие каждый ровно по одному особому пределу. При этом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся в том и только том случае, если сходятся оба интеграла $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$. Если же хотя бы один из них расходится, то и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется расходящимся.

Пункт 2.

2^0. Многие из свойств определенного интеграла Римана распространяются и на несобственные интегралы. В частности, операция несобственного интегрирования *линейна, аддитивна и монотонна*, для несобственных интегралов справедливы *формула замены переменной* интегрирования и *формула интегрирования по частям*. В качестве

Теорема (формула Ньютона — Лейбница+). *Пусть функция $f(x)$, $x \in [a,b)$, на любом отрезке $[a,\eta] \subset [a,b)$ интегрируема по Риману и при этом имеет здесь первообразную $F(x)$.*

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} F(\eta) - F(a). \qquad (\mathrm{NL}')$$

Формулу (NL') надо понимать следующим образом: если несобственный интеграл слева существует, то и предел справа первообразной $F(\eta)$ при $\eta \to b-0$ также существует. При этом имеет место формула (NL').

В частности, в формуле (NL') допускается равенство $b = +\infty$.

Пример. *Вычислить несобственный интеграл*

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Рассматриваемый несобственный интеграл I имеет два особых предела интегрирования: верхний и нижний. Для того чтобы вычислить I, сделаем замену переменной интегрирования

$$x = \sin t, \quad -\pi/2 \leqslant t \leqslant +\pi/2.$$

Тогда получим

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dt = \pi.$$

Здесь учтено, что $\cos t \geqslant 0$ при $-\pi/2 \leqslant t \leqslant +\pi/2$.

Пункт 3.

3^0. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$ (конечном или бесконечном) и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\eta]\subset[a,b)$. Если $f(x)$ к тому же неотрицательна, то интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(\eta)=\int_a^{\eta} f(x)\,dx, \quad \eta\in[a,b],$$

является *монотонно возрастающей на промежутке* $[a,b)$ функцией и по этой причине существует предел $\Phi(\eta)$ при $\eta\to+\infty$ (конечный или бесконечный).

Таким образом, *несобственный интеграл от неотрицательной функции* $f(x)$ *сходится тогда и только тогда когда соответствующая ей первообразная* $\Phi(\eta)$ *ограничена на промежутке определения* $f(x)$.

Теорема (признак совместной сходимости). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и неотрицательны на промежутке* $[a,b)$ *и при этом*

$$f(x)=O(g(x)) \quad \text{при} \quad x\to b-0. \qquad (3)$$

Тогда, если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *также сходится. Если же интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Условие (3) означает, что существуют такие постоянная $M>0$ и точка c из $[a,b)$, что имеет место оценка

$$f(x)\leqslant Mg(x) \qquad \forall x\in(c,b).$$

Поэтому и в силу неотрицательности функции $f(x)$ для любого числа η из интервала (c,b) справедливо неравенство

$$0\leqslant\int_c^{\eta} f(x)\,dx\leqslant M\int_c^{\eta} g(x)\,dx.$$

Переходя здесь к пределу при $\eta\to b-0$ и учитывая, что интегралы от a до b и от c до b сходятся или расходятся одновременно, получаем оба утверждения теоремы. □

Следствие. *Если неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на $[a,b)$, имеют при $x \to b-0$ одинаковый порядок, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

В частности, это справедливо для функций, эквивалентных при $x \to b-0$.

При исследовании сходимости несобственных интегралов от $f(x)$ функция $g(x)$ в последних теореме и следствии называется *функцией сравнения*. В качестве функций сравнения часто выбираются функции, имеющие степенной порядок роста (или убывания):

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad b = +\infty; \quad \alpha > 0,$$

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \text{при} \quad b \neq +\infty; \quad \alpha \geqslant 0.$$

Следствие. *Пусть неотрицательная функция $f(x)$, непрерывная на $[a,+\infty)$, где $a > 0$, имеет при $x \to +\infty$ одинаковый порядок с функцией $g(x) = 1/x^\alpha$, то есть*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ и } g(x) = O(f(x)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Следствие. *Пусть неотрицательная функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b)$, где $0 < a < b < +\infty$, имеет при $x \to b-0$ одинаковый порядок с функцией*

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}.$$

Тогда при $\alpha < 1$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а при $\alpha \geqslant 1$ этот же интеграл расходится.

Пример. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\,dx.$$

Решение. Подынтегральная функция здесь определена и неотрицательна на положительной полуоси. Оба предела интегрирования у интеграла I особые. Представим I в виде суммы двух интегралов, каждый из которых имеет ровно один особый предел интегрирования:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\ln^\alpha(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\,dx + \\ + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\,dx. \qquad (4)$$

Сравним неотрицательную подынтегральную функцию $f(x)$ со степенной.

Имеем при $x \to +0$:

$$\ln(1+\operatorname{sh} x) \sim \operatorname{sh} x,$$

$$f(x) \sim \frac{(\operatorname{sh} x)^\alpha}{x^{1/4}(\sqrt{1+\sqrt{x}+x^{1/4}})} \sim \frac{x^\alpha}{x^{1/4}} \sim \frac{1}{x^{1/4-\alpha}}.$$

Следовательно, при условии, что $1/4 - \alpha < 1$ интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, а при $1/4 - \alpha \geqslant 1$ расходится.

Таким образом, необходимое и достаточное условие сходимости первого несобственного интеграла в правой части равенства (4) записывается как неравенство $\alpha > -3/4$.

При $x \to +\infty$ проведем следующие сравнения:

$$\ln(1+\operatorname{sh} x) \sim \left(x + \ln(e^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x})\right) \sim x,$$

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}} \sim \frac{x^\alpha}{2\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x^{1/2-\alpha}}.$$

Следовательно, при условии, что

$$1/2 - \alpha > 1$$

интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а при $1/2 - \alpha \leqslant 1$ он же расходится.

Таким образом, оба несобственных интеграла в правой части формулы (4) сходятся тогда и только тогда когда числовой параметр α лежит в интервале

$$-3/4 < \alpha < -1/2.$$

Это и есть критерий сходимости несобственного интеграла I. □

Пункт 4.

4^0. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет особый верхний предел. Это означает, по определению, что подынтегральная функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, \eta]$, где $\eta < b$, и при этом имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx.$$

Согласно критерию Коши, предел в правой части этого равенства существует тогда и

Лемма (о сходимости). *Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$ и при этом интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$.*

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Пусть отрезок $[a, \eta]$ вложен в промежуток $[a, b)$, $[a, \eta] \subset [a, b)$. По условию функция $f(x)$ интегрируема на $[a, \eta]$. Следовательно, ее модуль $|f(x)|$ — это также интегрируемая на $[a, \eta]$ функция. При этом для любых точек ξ, η из (a, b), $\xi < \eta$, имеет место неравенство

$$\Big|\int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_\xi^\eta |f(x)|\,dx. \qquad (5)$$

только тогда когда для первообразной

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$$

выполняется следующее *условие Коши*:

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists b_\varepsilon \in (a, b)\colon \forall\,\xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \;\Rightarrow\; |\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| < \varepsilon.$$

Это условие на первообразную подынтегральной функции необходимо и достаточно для сходимости интеграла. Его (условие) называют *критерием Коши* сходимости несобственного интеграла.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$. Если интеграл от $|f(x)|$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся.*

Определение. *Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится в то время как интеграл от $|f(x)|$ по $[a, b]$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется условно сходящимся.*

Для первообразной $\Phi(\eta) = \int_a^\eta |f(x)|\,dx$ из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует выполнение условия Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists b_\varepsilon \in (a, b)\colon \forall\,\xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \;\Rightarrow\; |\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| < \varepsilon,$$

или, что то же самое:

$$|\Phi(\eta) - \Phi(\xi)| = \int_\xi^\eta |f(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{6}$$

Для этих же точек ξ и η из интервала (b_ε, b), применяя последовательно оценки (5) и (6), получаем

$$\Big|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_\xi^\eta |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Следовательно, первообразная

$$\Psi(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$$

также удовлетворяет условию Коши. Это значит, что соответствующий $\Psi(\eta)$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ по $[a, b]$, в силу критерия Коши, обязан сходиться. □

Утверждение, обратное лемме о сходимости, несправедливо. В этой связи вводится понятие условно сходящихся интегралов.

Пункт 5.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]$, а ее первообразная $\Phi(\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx$ ограничена на промежутке $[a,+\infty)$. Пусть кроме того есть монотонная функция $g(x)$, стремящаяся к нулю при $x\to+\infty$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.*

Пример. *Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx$ в зависимости от вещественных значений α.*

Решение. Интеграл имеет один особый предел интегрирования в точке $+\infty$. При $\alpha\leqslant 0$ этот интеграл расходится, что следует из оценки

$$\int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx \geqslant \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin x\,dx=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=2$$

и критерия Коши для несобственных интегралов.

Пусть $\alpha>0$. В этом случае применим признак Дирихле. Возьмем

$$f(x)=\sin x \quad \text{и} \quad g(x)=(x+\cos x)^{-\alpha}.$$

Подынтегральная функция представляет собой произведение $f(x)g(x)$.

При этом первообразная $\Phi(\eta)=-\cos\eta$ функции $f(x)=\sin x$ ограничена на полуоси $\eta>0$.

Функция $g(x)=(x+\cos x)^{-\alpha}$ стремится к нулю при $x\to+\infty$ и $g'(x)\leqslant 0$ при $\alpha>0$ и $x>1$.

Теорема (признак Абеля). *Пусть функция $g(x)$ монотонна и ограничена при $x>a$, а функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]$, причем интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ также сходится.*

Иная формулировка признака Абеля: *если интеграл от a до $+\infty$ сходится, то подынтегральную функцию можно умножить на ограниченную и монотонную функцию и интеграл от такого произведения, взятый от a до $+\infty$, также будет сходящимся.*

В соответствии с принципом Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Сходится ли интеграл абсолютно? Имеем эквивалентность

$$\left|\frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\right| \sim \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Согласно лемме о сходимости, исходный интеграл сходится абсолютно тогда и только тогда когда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\,dx < +\infty.$$

Последний интеграл, как уже было доказано, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Таким образом, исходный интеграл сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$. Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то сходимость условная, при $\alpha > 1$ сходимость абсолютная. □