Тема : Кватернионы

$\mathbf{1^0}$. Определение кватерниона, кватернионные единицы. $\mathbf{2^0}$. Сложение и умножение кватернионов, некоммутативность умножения. $\mathbf{3^0}$. Сопряженные кватернионы, модуль кватерниона. Группа единичных кватернионов. $\mathbf{4^0}$. Скалярная и векторная часть кватерниона. Скалярное и векторное произведение в пространстве кватернионов–векторов. $\mathbf{5^0}$. Вращения трехмерного пространства в терминах кватернионов модуля один. Отображение множества единичных кватернионов на группу матриц вращений трехмерного пространства. $\mathbf{6^0}$. Связь произведения матриц вращения с произведением соответствующих кватернионов.

1^0. Естественным расширением поля вещественных чисел, при котором удается сохранить все свойства введенных в $\mathbb{R}$ арифметических операций сложения и умножения, служит поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbf{dim}\,\mathbb{R} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{dim}\,\mathbb{C} = \mathbf{2}.$$

Расширением же поля $\mathbb{C}$ являются *кватернионы*. Множество всех кватернионов обозначается как $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{H}, \qquad \mathbf{dim}\,\mathbb{C} = \mathbf{2}, \qquad \mathbf{dim}\,\mathbb{H} = \mathbf{4}.$$

На множестве $\mathbb{H}$ вводятся операции сложения и умножения. При этом почти все привычные свойства этих операций удается сохранить. Исключением является коммутативность умножения, на множестве кватернионов $\mathbb{H}$ это свойство не выполняется.

Кроме того в $\mathbb{H}$ вводится операция умножения на вещественные числа, причем $\mathbb{H}$ в результате становится четырехмерным векторным пространством.

Другие существующие обобщения понятия числа, так называемые *гиперкомплексные числа*, приводят к структурам, в которых не выполняются не только коммутативность умножения, но и его ассоциативность, а также появляются нетривиальные делители нуля. Делители нуля — это такие элементы a и b, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ и при этом $a \cdot b = 0$.

Пример множества с умножением, в котором имеются делители нуля, дает пространство $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения. Векторное произведение не коммутативно, не ассоциативно и при этом существуют нетривиальные векторы из $\mathbb{R}^3$, векторное произведение которых равно нулю.

Определение. *Кватернионом называется запись следующего вида:*

$$g = t + xi + yj + zk, \quad \text{где} \quad t, x, y, z \in \mathbb{R},$$

а i, j, k — это базисные кватернионы, называемые кватернионными единицами.

При записи кватернионов используются следующие соглашения:

а) коэффициенты $\boldsymbol{x, y, z}$, равные единице, не пишутся;

б) коэффициенты $\boldsymbol{t, x, y, z}$, среди которых есть нули, приводят к суммам с меньшим числом слагаемых:

$$\mathbf{1} + \mathbf{0}\boldsymbol{i} + \mathbf{0}\boldsymbol{j} + \mathbf{0}\boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{0} + \boldsymbol{i} + \mathbf{0}\boldsymbol{j} + \mathbf{0}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \mathbf{0}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}, \qquad \mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{i} + \mathbf{0}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k},$$

и так далее. Кватернионы вида $t + 0i + 0j + 0k$ отождествляются с вещественными числами.

2^0. Для любых двух кватернионов определены их сумма и произведение.

Определение. *Суммой кватернионов*

$$g = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k \ \text{ и } \ h = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

называется кватернион следующего вида:

$$f = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k.$$

Для обозначения суммы кватернионов используется обычный символ $f = g + h$.

Для того чтобы определить произведение кватернионов, используется следующая таблица умножения:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{1}\cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} & \mathbf{1}\cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} & \mathbf{1}\cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} & \mathbf{1}\cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{i}\cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}\cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{k} & \\
\boldsymbol{i}\cdot \boldsymbol{i} = -\mathbf{1} & \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{j} = -\mathbf{1} & \boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{k} = -\mathbf{1} & \\
\boldsymbol{i}\cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} & \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} & \\
\boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i}\cdot \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}. &
\end{array}$$

Если записать кватернионные единицы в виде циклической последовательности

$$i \quad j \quad k \quad i \quad j \quad k \ldots i \quad j \quad k,$$

то произведение двух последовательных единиц в этой записи равно кватернионной единице, сразу за ними следующей.

Определение. *Произведением кватернионов*

$$g = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k \quad \textit{и} \quad h = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

называется кватернион следующего вида:

$$f = (t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) +$$

$$+ (t_1 x_2 + x_1 t_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) i +$$

$$+ (t_1 y_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2) j +$$

$$+ (t_1 z_2 + z_1 t_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2) k.$$

Для обозначения произведения кватернионов используется обычный символ $f = g \cdot h$.

В частности, если $\boldsymbol{h}$ совпадает с веществен-ным числом $\boldsymbol{\lambda}$, то для произведения $\boldsymbol{f = g \cdot \lambda}$ получается формула

$$\boldsymbol{g \cdot \lambda = (\lambda t_1) + (\lambda x_1)i + (\lambda y_1)j + (\lambda z_1)k = \lambda \cdot g}.$$

В результате $\mathbb{H}$, снабженное сложением двух кватернионов и умножением кватерниона на вещественное число, становится четырехмер-ным векторным пространством.

Кватернионные единицы $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образуют в этом векторном пространстве базис. В частности, $\mathbb{H}$ как векторное пространство изоморфно $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4, \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}\boldsymbol{k} \Leftrightarrow \boldsymbol{g} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}.$$

Однако между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{R}^4$ имеются и существенные отличия: в $\mathbb{H}$ определена дополнительная операция умножения:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) \\ (t_1 x_2 + x_1 t_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ (t_1 y_2 + y_1 t_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2) \\ (t_1 z_2 + z_1 t_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{bmatrix}.$$

Введенные на множестве $\mathbb{H}$ операции обладают следующими свойствами:

1. $g + h = h + g$, (коммутативность сложения),

2. $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$, (ассоциативность умножения),

3. $(g + h) + f = g + (h + f)$, (ассоциативность сложения),

4. $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$, (дистрибутивность),

5. $(g + h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$, (дистрибутивность).

При этом операция умножения кватернионов некоммутативна: например,

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i}.$$

$\mathbf{3^0}$. На пространстве кватернионов $\mathbb{H}$ вводится еще одна операция — сопряжение. Эта операция аналогична взятию сопряженного комплексного числа.

Определение. *Сопряженным к кватерниону*

$$g = t + xi + yj + zk,$$

называется следующий кватернион:

$$\bar{g} = t - xi - yj - zk.$$

Произведение кватерниона на сопряженный ему — это неотрицательное вещественное число — квадрат нормы вектора $\uparrow (t, x, y, z)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$g\bar{g} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Это свойство позволяет определить модуль кватерниона

$$g = t + xi + yj + zk$$

как следующий квадратный корень:

$$|g| = \sqrt{g\bar{g}} = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Введенное определение модуля кватерниона не противоречит ни определению модуля вещественного числа, ни определению модуля комплексного числа.

Лемма. *Для любых кватернионов* g *и* h *из пространства* $\mathbb{H}$ *справедливы равенства*

a) $|g \cdot h| = |g| \cdot |h|$, b) $\overline{gh} = \bar{h} \cdot \bar{g}$, c) $\bar{\bar{g}} = g$.

Кроме этих трех свойств установим еще одно: для любого ненулевого кватерниона g

из пространства $\mathbb{H}$ существует единственный обратный ему кватернион g^{-1}, обладающий тем свойством, что

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1.$$

Указанный обратный кватернион g^{-1} задается равенством

$$g^{-1} = \frac{1}{|g|^2}\bar{g}, \qquad g \neq 0.$$

Лемма. *Кватернионы, модуль которых равен единице, образуют группу* $\mathbb{H}_1$ *по умножению:*

$$\mathbb{H}_1 = \{g \in \mathbb{H} \mid |g| = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 1\}.$$

Для того чтобы доказать эту лемму, требуется проверить, что произведение любых двух кватернионов единичного модуля — это снова кватернион единичного модуля. Проведите эту проверку самостоятельно.

Кватернионные единицы $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ принадлежат группе $\mathbb{H}_{\mathbf{1}}$. Отметим еще, что в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ множество $\mathbb{H}_{\mathbf{1}}$ представляет собой единичную сферу.

$4^{\mathbf{0}}$. Для любого кватерниона вводятся понятия его скалярной и векторной частей.

Определение. *Скалярной частью кватерниона* $g = t + xi + yj + zk$ *называется вещественное число* t.

Определение. *Векторной частью кватерниона* $g = t + xi + yj + zk$ *называется кватернион* $u = xi + yj + zk$.

Скалярную часть кватерниона g находим по формуле $t = \frac{1}{2}(g + \bar{g})$. Векторная же часть кватерниона g получается следующим образом: $u = \frac{1}{2}(g - \bar{g})$.

Таким образом, любой кватернион представляет собой сумму своих скалярной и векторной частей: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}$.

Кватернионы с нулевой скалярной частью, то есть вида $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}\boldsymbol{k}$, называют также *векторами*. Иногда вектор–кватернион будем обозначать символом $\vec{\boldsymbol{u}}$.

Критерием того, что кватернион $\boldsymbol{g}$ является вектором, служит равенство $\bar{\boldsymbol{g}} = -\boldsymbol{g}$.

Кватернионы–векторы образуют в совокупности трехмерное линейное пространство, обозначаемое как $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$:

$$\mathbb{H}_{\mathbf{0}} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H} \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} + \boldsymbol{zk}\} \sim \mathbb{R}^{\mathbf{3}}.$$

Пространство $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$ изоморфно координатному пространству $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. В частности, любой вектор из $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ можно рассматривать как кватернион из $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$.

Кватернионные единицы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образуют в линейном пространстве $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$ базис. По определению полагается, что этот базис *ортонормирован и положительно ориентирован*.

Указанное предположение о базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ позволяет ввести в $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$ скалярное произведение: для любых двух векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из пространства $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$, задаваемых равенствами

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{k},$$

их скалярное произведение $\langle u, v\rangle$ вычисляется по формуле

$$\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Все свойства скалярного произведения при таком его определении выполняются. Проверьте это самостоятельно.

Для любых двух векторов u и v из пространства $\mathbb{H}_0$, задаваемых равенствами

$$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \qquad v = x_2 i + y_2 j + z_2 k,$$

определяется также их *векторное произведение*:

$$u \times v =$$

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k.$$

Формулу для векторного произведения легче запомнить, если использовать следующее “правило определителя”:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \boldsymbol{z_2} \end{vmatrix}.$$

В частности, векторные произведения базисных единиц $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ задаются равенствами

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Таким образом, для любых двух векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из пространства $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$ определены три разных их произведения: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ (как двух кватернионов из $\mathbb{H}$), $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ — скалярное произведение этих векторов, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ — их же векторное произведение. Оказывается, что все эти три произведения связаны между собой следующим равенством:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}. \tag{PPP}$$

Правило $(\mathbf{PPP})$ трех произведений проверяется прямой подстановкой в него определений всех участвующих в формуле произведений.

Равенство $(\mathbf{PPP})$ позволяет сформулировать следующий критерий принадлежности произведения $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ двух векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из пространства $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}$ этому же пространству:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \text{ ортогонален } \boldsymbol{v}.$$

5^0. Любому кватерниону g из пространства $\mathbb{H}_1$ сопоставляют матрицу $Q = (q_{ij})$ размера 3×3 с вещественными коэффициентами q_{ij}:

$$g \in \mathbb{H}_1 \quad \mapsto \quad Q \in M_3(\mathbb{R}).$$

Приведем формулу, позволяющую однозначно построить матрицу $Q = (q_{ij})$ по известному кватерниону $g = s + ai + bj + ck$, где $|g| = 1$.

Условимся обозначать эту матрицу $\boldsymbol{Q}$ символом $\boldsymbol{T(g)}$, подчеркивая тем самым ее однозначную зависимость от исходного кватерниона $\boldsymbol{g}$. Имеют место равенства

$$\boldsymbol{Q = T(g) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}},$$

где вещественные коэффициенты $\boldsymbol{q_{ij}}$ следующим образом зависят от кватерниона $\boldsymbol{g}$:

$$q_{11} = s^2 + a^2 - b^2 - c^2, \qquad q_{12} = 2ab - 2sc,$$

$$q_{13} = 2ac - 2sb, \qquad q_{21} = 2ab + 2sc,$$

$$q_{22} = s^2 - a^2 + b^2 - c^2, \qquad q_{23} = 2bc - 2sa,$$

$$q_{31} = 2ac - 2sb, \qquad q_{32} = 2bc + 2sa,$$

$$q_{33} = s^2 - a^2 - b^2 + c^2.$$

Поясним, какие именно соображения приводят к указанному выше однозначному соответствию кватерниона $g = s + ai + bj + ck$, где $|g| = 1$, и матрицы Q.

Возьмем произвольный кватернион-вектор

$$\vec{x} = xi + yj + zk \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

и рассмотрим произведение $\vec{x'} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$. Справедливы следующие равенства:

$$\overline{\vec{x'}} = \overline{g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}} = \bar{\bar{g}} \cdot \bar{\vec{x}} \cdot \bar{g} = g \cdot (-\vec{x}) \cdot \bar{g} = -g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g} = -\vec{x'}.$$

Следовательно, преобразованный кватернион $\vec{x'} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$ также принадлежит пространству $\mathbb{H}_0$, то есть имеет вид вектора

$$\vec{x'} = x'i + y'j + z'k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Преобразование $\vec{x'} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$ пространства $\mathbb{R}^3$ в себя является линейным:

$$g \cdot (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \cdot \bar{g} = \lambda (g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}) + \mu (g \cdot \vec{y} \cdot \bar{g}).$$

Следовательно, его можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходному кватерниону g из пространства $\mathbb{H}_1$ соответствует линейное отображение $\vec{x'} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$ координатного пространства $\mathbb{R}^3$ в себя. Матрица Q этого линейного отображения совпадает с определенной выше матрицей $T(g)$.

Исследуем свойства матрицы $Q = T(g)$ подробнее.

Пусть $\vec{x'} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$, где $|g| = |\bar{g}| = 1$. Тогда имеем равенства

$$|\vec{x'}| = |g| \cdot |\vec{x}| \cdot |\bar{g}| = |\vec{x}|.$$

Следовательно, линейное преобразование

$$\vec{x'} = Q\vec{x}$$

переводит вектор $\vec{x}$ в вектор той же длины.

Покажем, что матрица $Q = T(g)$ имеет единичный определитель. Из определения этой матрицы получается следующее соотношение:

$$\boldsymbol{Q^*Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Здесь $\boldsymbol{Q^*}$ — это матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{Q}$. Следовательно, справедливо равенство

$$\boldsymbol{\det(Q^*) \det Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^6}.$$

Но, как известно, $\det(Q^*) = \det Q$ и поэтому

$$\det Q = (s^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Знак $+$ при извлечении квадратного корня выбран опять из-за свойств матрицы Q.

По условию $|g| = 1$, то есть $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Таким образом, определитель матрицы Q равен единице.

Определение. *Множество матриц* $\boldsymbol{Q}$ *с единичным определителем и таких, что преобразование* $\vec{\boldsymbol{x}'} = \boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{x}}$ *сохраняет длину вектора* $\vec{\boldsymbol{x}}$, *образуют группу относительно матричного умножения. Эта группа называется группой матриц вращения и обозначается символом* $\boldsymbol{SO(3)}$.

Группе $\boldsymbol{SO(3)}$ принадлежит, например, единичная матрица.

6^0. Установим, что геометрически действие матрицы $Q = T(g)$, $g \neq \pm 1$, на векторы из $\mathbb{R}^3$ сводится к вращению всего трехмерного пространства вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Вращение при этом происходит на угол ω, лежащий в интервале $0 < \omega < 2\pi$.

Теорема. *Геометрически умножение точки $\uparrow (x, y, z)$ слева на матрицу $Q = T(g)$, где кватернион $g = s + \vec{a}$ имеет ненулевую векторную* часть $\vec{a} = ai + bj + ck \neq 0$, означает вращение этой точки вокруг проходящей через начало координат прямой с направляющим единичным вектором

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}, \qquad |\vec{n}| = 1.$$

Угол ω, на который поворачивается точка $\uparrow(x, y, z)$ при вращении вокруг оси, определяется из тригонометрического уравнения

$$s = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad 0 < \frac{\omega}{2} < \pi.$$

Доказательство. Пусть кватернион

$$\boldsymbol{g = s + ai + bj + ck}$$

имеет единичную длину $|\boldsymbol{g}| = \mathbf{1}$, то есть принадлежит пространству $\mathbb{H}_{\mathbf{1}}$. Обозначим его векторную часть как $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{ai + bj + ck}$, тогда

$$\boldsymbol{g = s + \vec{a}}.$$

Если, в частности, $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{g} = \pm\mathbf{1}$, а матрица $\boldsymbol{Q}$ при этом единичная: $\boldsymbol{Q = T(\pm 1) = E}$. Таким образом, в этом вырожденном случае линейное преобразование $T(g)$ тождественно переводит $\mathbb{R}^3$ в себя.

Пусть теперь $\vec{a} \neq 0$. Тогда определен следующий единичный вектор:

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}, \qquad |\vec{n}| = 1.$$

При этом справедливы равенства

$$g = s + \vec{a} = s + |\vec{a}| \cdot \vec{n} \;\Rightarrow\; s^2 + |\vec{a}|^2 = |g|^2 = 1.$$

Следовательно, существует такой угол ω, что $0 < \omega < 2\pi$ и при этом

$$s = \cos\frac{\omega}{2} \;\Rightarrow\; |\vec{a}| = \sin\frac{\omega}{2}.$$

Таким образом, имеем равенство

$$g = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2} \cdot \vec{n},$$

где вектор $\vec{n}$ принадлежит пространству $\mathbb{H}_0$, $|\vec{n}| = 1$ и $0 < \omega < 2\pi$.

С помощью полученного разложения кватерниона g докажем, что вектор $\vec{n}$ при домножении слева на матрицу Q остается на месте, то есть что имеет место равенство

$$Q\vec{n} = \vec{n}. \tag{Qn}$$

Дополним вектор $\vec{n}$ двумя векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ таким образом, чтобы тройка $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ представляла собой ортонормированный и положительно ориентированный базис трехмерного пространства $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. Тогда будут справедливы следующие равенства:

$$\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \mathbf{0},$$

$$\vec{n} \times \vec{u} = \vec{v}, \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}, \qquad \vec{v} \times \vec{n} = \vec{u}.$$

Пользуясь ими, а также правилом трех произведений

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \vec{x} \times \vec{y},$$

получаем следующие соотношения для кватернионов-векторов $\vec{n}, \vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = -1, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = -1, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = -1,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{n}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{n}, \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{u} = -\vec{n} \cdot \vec{v}.$$

Таким образом, если записать кватернионы $\vec{n}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ в виде циклической последовательности символов

$$\vec{n} \quad \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{n} \quad \vec{u} \quad \vec{v} \ldots \vec{n} \quad \vec{u} \quad \vec{v},$$

то произведение $(\cdot)$ двух последовательных элементов в этой записи равно элементу, сразу за ними следующему.

С учетом этого получаем для кватерниона

$$\boldsymbol{g} = \cos\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}} + \sin\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}, \qquad |\boldsymbol{g}| = \mathbf{1}$$

следующее перестановочное соотношение:

$$\boldsymbol{g} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \cos\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} - \sin\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}} = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{g}.$$

Далее имеем

$$g \cdot \vec{n} \cdot \bar{g} = \vec{n} \cdot (g \cdot \bar{g}) = \vec{n}|g|^2 = \vec{n}.$$

Учитывая, что матрица Q по определению действует на любой вектор $\vec{x}$ по формуле $Q\vec{x} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$, заключаем, что $Q\vec{n} = \vec{n}$. Таким образом, равенство $(\mathbf{Qn})$ доказано.

Заметим, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ из рассматриваемого базиса ортогональны вектору $\vec{n}$, то есть лежат в плоскости, ортогональной вектору $\vec{n}$. Найдем образы этих двух ортогональных друг другу векторов при линейном преобразовании $Q\vec{x} = g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$.

Имеем в соответствии с полученным разложением кватерниона g:

$$g \cdot \vec{u} = [\cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{u} = (\cos\frac{\omega}{2})\vec{u} + (\sin\frac{\omega}{2})\vec{v}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{Q\vec{u} = (g\cdot\vec{u})\cdot\bar{g} = [\cos\frac{\omega}{2}\vec{u} + \sin\frac{\omega}{2}\vec{v}]\cdot[\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\vec{n}].}$$

Раскрывая скобки и пользуясь правилами перемножения базисных векторов $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{n} = -\vec{v}}$ и $\boldsymbol{\vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{u}}$, получаем далее

$$\boldsymbol{Q\vec{u} = (\cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2})\vec{u} + (2\cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2})\vec{v},}$$

$$\boldsymbol{Q\vec{u} = (\cos\omega)\vec{u} + (\sin\omega)\vec{v} = (\cos\omega\ \ \sin\omega)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.}$$

Аналогично вычисляется образ вектора $\vec{v}$ при отображении Q:

$$Q\vec{v} = (-\sin\omega)\vec{u} + (\cos\omega)\vec{v} = (-\sin\omega \;\; \cos\omega)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного преобразования $g \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}$ в ортонормированном базисе $\vec{n}, \vec{u}, \vec{v}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы вращения равен единице и при умножении на нее слева любого вектора $\vec{x}$ длина этого вектора не меняется. По определению это означает, что полученная матрица принадлежит группе $SO(3)$. $\square$

Известно, что любая матрица Q из группы $SO(3)$ задает вращение всего пространства вокруг некоторого единичного вектора

$\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, на некоторый угол ω из интервала $0 < \omega < 2\pi$. Взяв теперь кватернион

$$g = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2} \cdot \vec{n}, \qquad |g| = 1,$$

заключаем, что $Q = T(g)$. Это означает, что рассматриваемое нами отображение $g \mapsto T(g)$ переводит пространство $\mathbb{H}_1$ на все множество $SO(3)$.

Отметим, что отображение $T : \mathbb{H}_1 \mapsto SO(3)$ не является взаимнооднозначным: например, $T(g) = T(-g)$ и при этом $g \neq -g$.

Однако же, если кватернион g_1 принадлежит $\mathbb{H}_1$ и при этом $T(g_1) = T(g)$, то с необходимостью выполняется одно из равенств $g_1 = g$ или $g_1 = -g$.

7^0. Произведение матриц вращения можно вычислить опираясь на произведение соответствующих им единичных кватернионов.

Пусть есть две матрицы Q_1 и Q_2 вращения из группы $SO(3)$. Им соответствуют кватернионы g_1 и g_2 единичного модуля, то есть

$$g_j \in \mathbb{H}_j \quad \text{и} \quad Q_j = T(g_j), \quad j = 1, 2.$$

Лемма. *Справедливы следующие равенства:*

$$Q_2 \cdot Q_1 = T(g_2) \cdot T(g_1) = T(g_2 \cdot g_1). \tag{Q}$$

Доказательство. Матрица $T(g_1)$ соответствует линейному преобразованию

$$\vec{x}' = Q_1 \vec{x} = g_1 \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}_1$$

трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Аналогично $T(g_2)$ соответствует преобразованию

$$\vec{x}'' = Q_2 \vec{x}' = g_2 \cdot \vec{x}' \cdot \bar{g}_2.$$

Таким образом, справедливы равенства

$$\vec{x}'' = (Q_2 Q_1)\vec{x} = Q_2 \vec{x}' = g_2 \cdot (g_1 \cdot \vec{x} \cdot \bar{g}_1) \cdot \bar{g}_2.$$

Раскрывая скобки в правой части этого равенства и учитывая, что $\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 = \overline{g_2 \cdot g_1}$, получаем

$$\vec{x}'' = (Q_2 Q_1)\vec{x} = (g_2 \cdot g_1) \cdot \vec{x} \cdot \overline{g_2 \cdot g_1}.$$

Следовательно, произведение $Q_2 Q_1$ матриц вращения порождается кватернионом $g_2 \cdot g_1$

единичного модуля: $Q_2 Q_1 = T(g_2 \cdot g_1)$. Таким образом, равенство (Q) установлено. $\square$

Пусть матрица $T(g_2 \cdot g_1)$ соответствует вращению вокруг оси, с направляющим вектором $\vec{a} \neq 0$ на некоторый угол ω из интервала $0 < \omega < 2\pi$. Тогда

$$g = g_2 \cdot g_1 = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}, \qquad |g| = 1.$$

Пусть также

$$g_1 = \cos\frac{\omega_1}{2} + \sin\frac{\omega_1}{2}\vec{n}_1, \qquad g_2 = \cos\frac{\omega_2}{2} + \sin\frac{\omega_2}{2}\vec{n}_2.$$

Выразим вектор $\vec{a}$ и угол ω в представлении произведения $g = g_2 \cdot g_1$ через параметры предыдущих разложений его сомножителей. Полагая

$$\vec{a_1} = \sin\frac{\omega_1}{2}\vec{n}_1 \quad \text{и} \quad \vec{a_2} = \sin\frac{\omega_2}{2}\vec{n}_2,$$

имеем далее

$$g = g_2 \cdot g_1 = [s_2 + \vec{a}_2] \cdot [s_1 + \vec{a}_1] =$$

$$= s_2 s_1 + s_2 \vec{a}_1 + s_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1.$$

Согласно правилу трех произведений справедливо равенство

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 = -\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle + \vec{a}_2 \times \vec{a}_1.$$

Подставляя его в предыдущее соотношение, находим

$$g = (s_2 s_1 - \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle) + (s_2 \vec{a}_1 + s_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \times \vec{a}_1).$$

Таким образом, преобразование $T(g_2 \cdot g_1)$ производит вращение вокруг оси с направляющим вектором $(s_2 \vec{a}_1 + s_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \times \vec{a}_1)$ на угол ω из интервала $0 < \omega < 2\pi$, определяемый из соотношения

$$\cos \frac{\omega}{2} = s_2 s_1 - \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle.$$