Содержание

1 Комплекснозначная форма тригонометрических рядов Фурье. Частичные суммы. Стандартная тригонометрическая система в комплексной форме

Вместо тригонометрической системы

$$1, \cos(\frac{\pi x}{l}), \sin(\frac{\pi x}{l}), \cos(\frac{2\pi x}{l}), \sin(\frac{2\pi x}{l}), \ldots, \cos(\frac{k\pi x}{l}), \sin(\frac{k\pi x}{l}), \ldots \qquad ((T_l))$$

часто рассматривают систему комплекснозначных функций $\varphi_v(x) = e^{i\frac{v\pi x}{l}}$, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Множество $\{\varphi_v(x) | v \in \mathbb{Z}\}$ также называют тригонометрической системой так как любая из функций $\varphi_v(x)$ представима линейной комбинацией функций из (T_l): $e^{i\frac{v\pi x}{l}} = \cos(\frac{v\pi x}{l}) + i\sin(\frac{v\pi x}{l})$.

Определение

Комплекснозначные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, называются ортогональными на Δ, если произведение $\varphi(x) \cdot \overline{\psi}(x)$ интегрируемо на Δ и при этом справедливо равенство $\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\overline{\psi}(x)dx = 0$.

Пример ортогональных комплекснозначных функций дают функции $\varphi_{v_1}(x)$ и $\varphi_{v_2}(x)$ при $v_1 \neq v_2$. Эти функции ортогональны на отрезке $[-l, +l]$: $\int\limits_{-l}^{+l} \varphi_{v_1}(x)\overline{\varphi_{v_2}}(x)dx = \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{v_1\pi x}{l}} e^{-i\frac{v_2\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{(v_1-v_2)\pi x}{l}} dx = 0$. Кроме того справедливы равенства $\int\limits_{-l}^{+l} |\varphi_v(x)|^2 dx = \int\limits_{-l}^{+l} \overline{\varphi_v}(x)dx = \int\limits_{-l}^{+l} e^{i\frac{v\pi x}{l}} e^{-i\frac{v\pi x}{l}} dx = 2l$.

Пусть есть функция $f(x)$ периодическая с периодом $2l$ и такая, что $\int\limits_{-l}^{+l} |f(x)|^2 dx < +\infty$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{L}_2(-l, +l)$. Для любой функции $f(x)$ из $\widetilde{L}_2(-l, +l)$ произведение $f(x)e^{-i\xi x}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, является абсолютно интегрируемой на $[-l, +l]$ функцией.

Определение

Комплексные числа $c_v = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)e^{-i\frac{v\pi x}{l}}dx$, $v = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ образуют последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Для того чтобы подчеркнуть, что c_v — это коэффициенты Фурье именно функции $f(x)$, пишут $c_v = c_v(f)$.

Воспользуемся равенствами $c_v = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)(\cos(\frac{v\pi x}{l}) - i\sin(\frac{v\pi x}{l}))dx$, где $v = \pm1, \pm2, \ldots$. Тогда получим следующие соотношения: $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Здесь $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{l})dx$, $b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\sin(\frac{k\pi x}{l})dx$, $k = 1, 2, \ldots$, т.е. a_0, a_k, b_k — это коэффициенты Фурье по стандартной тригонометрической системе.

Определение

Выражение $\sum\limits_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{i\frac{v\pi x}{l}}$, где $c_v = c_v(f)$ для $v = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.

Частичной суммой ряда Фурье в комплексной форме называется следующая функция

$$T_n(f; x) = \sum_{v=-n}^{+n} c_v e^{i\frac{v\pi x}{l}}. \qquad ((T_C))$$

Ряд Фурье называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Предел этой последовательности называется суммой ряда Фурье.

Факт соответствия между функцией $f(x)$ и рядом Фурье с коэффициентами $c_v = c_v(f)$ в записи отражается следующим образом: $f(x) \sim \sum\limits_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{i\frac{v\pi x}{l}}$.

Частичная сумма $T_n(f; x)$ ряда Фурье в комплексной форме допускает однозначное выражение через коэффициенты Фурье a_k, b_k функции f по стандартной тригонометрической системе. Имеем из определения $T_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \sum\limits_{k=1}^{+n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+n}(a_k \cos(\frac{k\pi x}{l}) +$

$b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right))$. Таким образом, $T_n(f;x)$ — это n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе (T_l).

Множество функций e^{ivx}, где v принимает всевозможные целые значения, называется стандартной тригонометрической системой в комплексной форме.

2 Интегральные представления частичных сумм. Ядра Дирихле. Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядер Дирихле

Функция $f(x)$, принадлежащая пространству $\widetilde{L}_2(-\pi,+\pi)$, периодична с периодом 2π и удовлетворяет условию $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$. Для любой такой функции справедливы следующие равенства: $T_n(f;x) = \sum\limits_{v=-n}^{+n} c_v e^{ivx}$, где $c_v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)e^{-iv\xi}d\xi$. Подставляя эти интегральные представления коэффициентов c_v в частичную сумму $T_n(f;x)$, преобразуем ее к эквивалентному виду:

$$T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \sum_{v=-n}^{+n} e^{iv(x-\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)D_n(\xi-x)d\xi. \quad ((TD_n))$$

Здесь ядро $D_n(\xi-x)$ интегрального оператора в правой части определяется равенством $D_n(\xi-x) = \sum\limits_{v=-1}^{+n} e^{iv(x-\xi)}$.

Определение

Функция $D_n(x) = \sum\limits_{v=-1}^{+n} e^{ivx}$ называется ядром Дирихле порядка n.

Из этого определения следует равенство $D_n(x) = 1+2\sum\limits_{v=1}^{+n} \cos(vx)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Таким образом, ядро Дирихле $D_n(x)$ — это четная 2π-периодическая функция и при этом $D_n(0) = 1+2n$, $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(x)dx = 1$.

Заметим, что $\sum\limits_{v=-n}^{+n} e^{ivx}$ — это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{ix}$ и начальным членом e^{-inx}. Следовательно, по известной для суммы геометрической прогрессии формуле ядро Дирихле представимо в виде $D_n(x) = \frac{e^{-inx}-e^{inx+ix}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$. Запишем равенство (TD_n) эквивалентном виде $T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{+\pi-x} f(\xi+x)D_n(\xi)d\xi$. Подынтегральная функция здесь периодична с периодом 2π. Следовательно, интеграл справа можно заменить на интеграл по любому промежутку длины 2π и, в частности, имеет место равенство $T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi+x)D_n(\xi)d\xi$. Разбивая интеграл справа в сумму двух: от $-\pi$ до нуля и от нуля до $+\pi$, заменяя затем в первом из этих слагаемых переменную ξ на $-\xi$ и пользуясь затем четностью ядра Дирихле, приходим к равенству $T_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x-\xi)+f(\xi+x))D_n(\xi)d\xi$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма (равномерная ограниченность интегралов от ядер Дирихле)

Существует такая конечная постоянная C, что при всех натуральных n, $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$|\int\limits_{\xi}^{\eta} D_n(x)dx| \le 2\pi C \ \forall \xi, \eta \in (0,\pi).$$

3 Носитель функции, финитные функции, ступенчатые функции. Теорема об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций финитными ступенчатыми функциями

Функции, абсолютно интегрируемые на промежутке числовой прямой, часто аппроксимируют более простыми объектами (например, тригонометрическими многочленами). Прежде чем сформулировать результаты, относящиеся к такого рода аппроксимациям, введем необходимые понятия и дадим соответствующие определения.

Определение

Для функции $f = f(x)$, $x \in D_f$, замыкание множества точек x из D_f, в которых функция $f = f(x)$ не обращается в нуль, называется носителем функции f. Для обозначения носителя произвольной функции f используется специальный символ $\operatorname{supp} f$.

Определение

Определенная на всей числовой прямой функция $f = f(x)$ называется финитной, если ее носитель является ограниченным множеством.

Таким образом, функция $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, финитна тогда и только тогда, когда она равна нулю вне некоторого отрезка числовой прямой.

Определение

Заданная на промежутке Δ функция $f = f(x)$ называется ступенчатой, если существует разбиение промежутка Δ на конечное число таких промежутков, на каждом из которых функция $f = f(x)$ постоянна.

Теорема (об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций)

Пусть функция $f = f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что ее носитель вложен в замыкание $\overline{\Delta}$ и при этом

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon.$$

Доказательство

Для заданного числа $\varepsilon > 0$ всегда найдется ограниченное измеримое множество g_ε, $g_\varepsilon \subset \Delta$, на котором функция $f = f(x)$ интегрируема по Риману и при этом $\int\limits_{\Delta} |f(x)| dx - \int\limits_{g_\varepsilon} |f(x)| dx = \int\limits_{\Delta \setminus g_\varepsilon} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Множество

g_ε называется измеримым, если $\int\limits_{g_\varepsilon} dx = \int\limits_{g_\varepsilon} \chi_\varepsilon(x)dx < +\infty$, где $\chi_\varepsilon(x)$ — это характеристическая функция (индикатор) множества g_ε, равная единице во всех точках этого множества и нулю во всех остальных точках. Обозначим произведение $f(x)\cdot\chi_\varepsilon(x)$ через $f_\varepsilon(x)$. Тогда $f_\varepsilon(x)$ совпадает с $f(x)$ при $x \in g_\varepsilon$ и $f_\varepsilon(x)$ равна нулю при $x \notin g_\varepsilon$. Следовательно, справедлива оценка $\int\limits_{\Delta} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx = \int\limits_{\Delta\setminus g_\varepsilon} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Функция $f_\varepsilon(x)$ финитна и поэтому ее носитель содержится в некотором отрезке $[a,b] \subset \overline{\Delta}$.

На отрезке $[a,b]$ функция $f_\varepsilon(x)$ интегрируема по Риману: она интегрируема по Риману как на g_ε так и на $[a,b]\setminus g_\varepsilon$. Следовательно, существует такое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на меньшие промежутки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$, что выполняются соотношения $0 \le \int\limits_a^b f_\varepsilon(x)dx - s(f_\varepsilon,\tau) < \frac{\varepsilon}{2}$. Здесь $s(f_\varepsilon,\tau)$ — это нижняя сумма Дарбу для функции $f_\varepsilon(x)$, т.е. $s(f_\varepsilon,\tau) = \sum\limits_{j=1}^{N} m_j|\Delta_j|$, где $m_j = \inf\{f_\varepsilon(x)|x \in \Delta_j\}$.

Искомую ступенчатую функцию $\varphi(x)$ построим, положив ее равной m_j на каждом промежутке Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, и равной нулю вне отрезка $[a,b]$. Построенная функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\varphi(x) \le f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

2. $\int\limits_{\Delta} \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx = s(\varphi_\varepsilon,\tau)$. Следовательно, справедливы соотношения $0 \le \int\limits_{\Delta} |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|dx = \int\limits_{\Delta}(f_\varepsilon(x) - \varphi(x))dx = \int\limits_{\Delta} f_\varepsilon(x)dx - \int\limits_{\Delta} \varphi(x)dx = \int\limits_{\Delta} f_\varepsilon(x)dx - s(f_\varepsilon,\tau) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далее имеем $\int\limits_{\Delta} |f(x)-\varphi(x)|dx \le \int\limits_{\Delta} |f(x)-f_\varepsilon(x)|dx + \int\limits_{\Delta} |f_\varepsilon(x)-\varphi(x)|dx$. Каждое из слагаемых в правой части полученного неравенства не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, интеграл в левой части меньше ε: $\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|dx \le \varepsilon$. Это означает, что финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем требованиям заключения теоремы, т.е. функция $\varphi(x)$ — искомая. $\Box$

Отметим, что в доказанной теореме об аппроксимации промежуток интегрирования Δ может быть как конечным так и бесконечным. В частности, можно взять Δ равным полупрямой или вообще всей числовой прямой.

4 Теорема о непрерывности первообразной абсолютно интегрируемой функции

Теорема (о первообразной абсолютно интегрируемой функции)

Пусть функция $f = f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда ее первообразная $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, где $a \in \Delta$, непрерывна на замыкании этого промежутка.

Доказательство

По теореме об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такая финитная ступенчатая функция $\varphi_\varepsilon(x)$, что $\int\limits_\Delta |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}$. Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ имеет непрерывную на $\overline{\Delta}$ первообразную $\Phi_\varepsilon(x) = \int\limits_a^x \varphi_\varepsilon(t)dt$, где $a \in \Delta$. При этом справедлива оценка $|F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| = |\int\limits_a^x (f(t) - \varphi_\varepsilon(t))dt| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех x из $\overline{\Delta}$.

Взяв любые две точки x и x_0 из $\overline{\Delta}$ и пользуясь неравенством треугольника, получим далее $|F(x) - F(x_0)| \le |F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| + |\Phi_\varepsilon(x_0) - F(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$. Функция $\Phi_\varepsilon(x)$ непрерывна в точке x_0 и поэтому существует такое $\delta > 0$, что $\forall x \in O_\delta(x_0) \subset \overline{\Delta} \Rightarrow |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, для всех точек x из пересечения $O_\delta(x_0) \subset \overline{\Delta}$ справедлива оценка $|F(x) - F(x_0)| \le \varepsilon$. По определению, это означает что функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

5 Теорема Римана об осцилляции

Коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемых функций обладают важными асимптотическими свойствами.

Теорема (Римана об осцилляции)

Пусть функция $f = f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int\limits_{\Delta} f(x)e^{i\lambda x}dx = 0. \qquad ((F_\lambda))$$

Доказательство

Пусть $\Delta = [\xi, \eta]$. Тогда $|\int\limits_{\Delta} e^{i\lambda x}dx| = |\int\limits_{\xi}^{\eta} e^{i\lambda x}dx| = |\frac{e^{i\lambda\eta}-e^{i\lambda\xi}}{i\lambda}| \leq \frac{2}{|\lambda|} \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Таким образом, равенство (F_λ) справедливо для характеристической функции $\chi_\Delta(x)$ промежутка Δ. Далее, любая финитная ступенчатая функция представляет собой линейную комбинацию характеристических функций конечного числа ограниченных промежутков. Следовательно, равенство (F_λ) верно для произвольной финитной ступенчатой функции $f(x)$.

Возьмем положительное число $\varepsilon > 0$. Тогда по теореме об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций существует такая финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$, что

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ((1))$$

Пользуясь неравенством треугольника, оценкой $|e^{i\lambda x}| \leq 1$ и свойствами интеграла, имеем далее

$$|\int\limits_{\Delta} f(x)e^{i\lambda x}dx| \leq \int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|dx + |\int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}dx|. \qquad ((2))$$

Функция $\varphi(x)$ в соответствии с выбором финитная и ступенчатая. Как уже установлено, для любой такой функции выполнено равенство $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}dx = 0$. Следовательно, найдется такое положительное число $\lambda_\varepsilon > 0$, что для любого λ, $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$, справедлива оценка $|\int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}dx| < \frac{\varepsilon}{2}$. Подставляя это неравенство и оценку (1) в соотношение (2), получим при $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$ следующее неравенство: $|\int\limits_{\Delta} f(x)e^{i\lambda x}dx| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}dx| \leq \varepsilon$. По определению предела и в силу произвольности ε это означает справедливость искомого соотношения (F_λ). $\square$

6 Теорема о стремлении к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Рассмотрим последовательность ее коэффициентов Фурье $c_v(f) = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} f(x)e^{-i\frac{2v\pi x}{|\Delta|}}dx$, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если промежуток Δ совпадает с интервалом $(a, a+2l)$, то длина $|\Delta| = 2l$ и коэффициенты Фурье представимы в виде $c_v(f) = \frac{1}{2l}\int\limits_{a}^{a+2l} f(x)e^{-i\frac{v\pi x}{x}}dx$, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Теорема (о стремлении к нулю коэффициентов Фурье)

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ числовой прямой. Тогда справедливы предельные соотношения

$$\lim_{v\to+\infty} c_v(f) = 0, \ \lim_{v\to-\infty} c_v(f) = 0. \qquad ((L_0))$$

Доказательство

Равенства (L_0) сразу получаются из теоремы Римана об осцилляции, если в формуле (F_λ) взять промежуток Δ совпадающим с интервалом $(a, a+2l)$ и $\lambda = \frac{\pi v}{l}$. $\square$

Следствие

Пусть $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — это коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе, т.е. $a_k(f) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$, $k = 1, 2, \ldots$, $b_k(f) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{+l} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда справедливы предельные соотношения

$$\lim_{k\to+\infty} a_k(f) = \lim_{k\to+\infty} b_k(f) = 0. \qquad ((L'_0))$$

7 Лемма о связи коэффициентов Фурье непрерывной периодической функции и ее первой производной

Исследуем взаимосвязь дифференциальных свойств абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ и порядка убывания к нулю коэффициентов Фурье $a_k(f)$ и $b_k(f)$ этой функции при $k \to +\infty$. Будем предполагать при этом, что промежуток Δ совпадает с интервалом $(-\pi, +\pi)$ и $l = 2\pi$. Установим сначала как связаны между собой коэффициенты Фурье самой функции и ее первой производной.

Лемма

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, +\pi]$, $f(-\pi) = f(+\pi)$ и при этом на интервале $(-\pi, +\pi)$ существует ее непрерывная и абсолютно интегрируемая первая производная $f'(x)$. Тогда справедливы равенства

$$c_v(f) = \frac{1}{iv} c_v(f'),\ v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \qquad ((CF_{ff'}))$$

Доказательство

Подставим равенство $e^{-ivx} = \frac{1}{-iv}\frac{d}{dx}(e^{-ivx})$, $v \neq 0$ в определение коэффициента Фурье функции $f(x)$. Тогда получим $c_v(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-ivx}dx = \frac{1}{-i2v\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\frac{d}{dx}(e^{-ivx})dx$. Продолжим это равенство, применив к последнему интегралу формулу интегрирования по частям. В результате получим $c_v(f) = \frac{1}{i2v\pi}[f(x)e^{-ivx}\,|_{-\pi}^{+\pi} - \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)e^{-ivx}dx]$. Первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю в силу совпадения значений функции $f(x)$ на концах промежутка интегрирования: $f(x)e^{-ivx}\,|_{-\pi}^{+\pi} = f(\pi)e^{-iv\pi} - f(-\pi)e^{iv\pi} = e^{-iv\pi}[f(\pi) - f(-\pi)e^{i2v\pi}] = e^{-iv\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$. Таким образом, коэффициент Фурье $c_v(f)$ представлен в следующем виде: $c_v(f) = \frac{1}{i2v\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)e^{-iv\pi}dx = \frac{1}{iv}c_v(f')$. Это и есть искомое равенство $(CF_{ff'})$. $\square$

8 Обобщение формулы Ньютона Лейбница. Теорема о связи коэффициентов Фурье кусочно непрерывной функции и ее кусочно непрерывной производной

Далее нам понадобится аналог формулы Ньютона Лейбница для несобственных интегралов.

Лемма (обобщенная формула Ньютона Лейбница)

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$, причем интеграл $\int\limits_a^b f'(x)dx$ сходится. Тогда функция $f(x)$ имеет при $x \to a+0$ и при $x \to b-0$ конечные односторонние пределы и при этом справедлива формула

$$\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b-0) - f(a+0). \qquad ((NL'))$$

Доказательство

Равенство (NL') получается из соотношения

$$\int\limits_\xi^\eta f'(x)dx = f(\eta) - f(\xi), \qquad ((NL))$$

выполненного в силу обычной формулы Ньютона Лейбница для всех таких точек ξ, η, что $a < \xi \le \eta < b$. Нужно лишь перейти к пределу в равенстве (NL) сначала при $\xi \to a+0$, а затем при $\eta \to b-0$. $\square$

Теорема (о коэффициентах Фурье кусочно непрерывной функции)

Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π, $x_0 = -\pi$, $x_N = +\pi$ и при этом имеется такое разбиение $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N$ отрезка $[-\pi, +\pi]$, что на каждом подынтервале (x_{j-1}, x_j) существует непрерывная производная $f'(x)$. Если при этом производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\pi, +\pi)$, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и ее производной связаны между собой соотношениями

$$c_v(f) = \frac{1}{iv} c_v(f') + \frac{1}{i2\pi v} \sum_{j=1}^{N-1} [f]_{x_j} e^{-ivx_j}. \qquad ((CF'_{ff'}))$$

Здесь через $[f]_{x_j}$ обозначен скачок функции $f(x)$ в точке x_j, т.е. $[f]_{x_j} = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$.

Доказательство

Применим на промежутке (x_{j-1}, x_j) обобщенную формулу Ньютона Лейбница к произведению функций $f(x)e^{-ivx}$. Тогда получим $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x)e^{-ivx})' dx = f(x_j - 0)e^{ivx_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{ivx_{j-1}}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Суммируя эти равенства по всем j, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x)e^{-ivx})' dx = \sum_{j=1}^{N} [f(x_j - 0)e^{-ivx_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-ivx_{j-1}}]. \quad ((3))$$

Преобразуем поочередно суммы в левой и правой частях этого равенства. Для суммы слева имеем $\sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x)e^{-ivx})' dx = \int\limits_{x_0}^{x_N} (f(x)e^{-ivx})' dx = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)e^{-ivx} dx - iv \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-ivx} dx = 2\pi[c_v(f') - ivc_v(f)]$. Сумму в правой части равенства (3), т.е. величину $S_r = \sum\limits_{j=1}^{N} [f(x_j - 0)e^{-ivx_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-ivx_{j-1}}]$ разобьем на сумму четырех слагаемых, выделив в отдельную группу слагаемые, соответствующие индексам $j = 1$ и $j = N$. В результате получим $S_r = \sum\limits_{j=2}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-ivx_j} - \sum\limits_{j=2}^{N-1} f(x_{j-1} + 0)e^{-ivx_{j-1}} + \underbrace{[f(x_1 - 0)e^{-ivx_1} - f(x_0 + 0)e^{iv\pi}]}\, j = 1 + \underbrace{[f(x_N - 0)e^{-iv\pi} - f(x_{N-1} + 0)e^{-ivx_{N-1}}]}\, j = N$, имеем $S_r = \sum\limits_{j=1}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-ivx_j} - \sum\limits_{j=2}^{N} f(x_{j-1} + 0)e^{-ivx_{j-1}} + f(\pi - 0)e^{-iv\pi} - f(-\pi + 0)e^{iv\pi}$. По условию v — целое число, а функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π. В частности, $f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$. Следовательно, справедливы равенства $f(\pi-0)e^{-iv\pi}-f(-\pi+0)e^{iv\pi}=[f(\pi-0)-f(-\pi+0)e^{i2v\pi}]e^{-iv\pi}=[f(\pi-0)-f(-\pi+0)](-1)^v=0$. Таким образом, сумма в правой части равенства (3) преобразована к виду $S_r=\sum\limits_{j=1}^{N}[f(x_j-0)e^{-ivx_j}-f(x_{j-1}+0)e^{-ivx_{j-1}}]=\sum\limits_{j=1}^{N-1}f(x_j-0)e^{-ivx_j}-\sum\limits_{j=2}^{N}f(x_{j-1}+0)e^{-ivx_{j-1}}$. Переходя во второй сумме справа к новому индексу суммирования $j-1$, имеем далее $S_r=\sum\limits_{j=1}^{N-1}f(x_j-0)e^{-ivx_j}-\sum\limits_{j=1}^{N-1}f(x_j+0)e^{-ivx_j}=-\sum\limits_{j=1}^{N-1}[f(x_j+0)-f(x_j-0)]e^{-ivx_j}$.

Подставляя в равенство (3) найденные выражения его левой и правой частей, приходим к соотношению $2\pi[c_v(f')-ivc_v(f)]=-\sum\limits_{j=1}^{N-1}[f(x_j+0)-f(x_j-0)]e^{-ivx_j}$. Выражая из этого равенства коэффициенты Фурье $c_v(f)$ приходим к искомой формуле $(CF'_{ff'})$. $\square$

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна всюду, то формула $(CF'_{ff'})$ совпадает с формулой $(CF_{ff'})$.

9 Теорема об асимптотике коэффициентов Фурье функции, имеющей кусочно непрерывную и абсолютно интегрируемую производную. Следствие об асимптотике коэффициентов Фурье дважды дифференцируемых функций

В математическом анализе часто используется понятие кусочно непрерывных производных первого, второго и более высоких порядков.

Определение

Функция $f=f(x)$, $x\in(a,b)$, имеет на интервале (a,b) кусочно непрерывную производную, если существует конечное разбиение интервала (a,b) на такие промежутки, что в каждом из них функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Любая кусочно постоянная функция является кусочно непрерывной на любом интервале и имеет кусочно непрерывную производную.

Теорема (о порядке стремления к нулю коэффициентов Фурье)

Пусть функция $f(x)$, $x \in (-\pi, +\pi)$, имеет на интервале $(-\pi, +\pi)$ кусочно непрерывную и абсолютно интегрируемую производную. Тогда справедливы асимптотические соотношения

$$c_v(f) = O(\frac{1}{v}) \text{ при } v \to \pm\infty. \qquad ((CF_0))$$

Если $f(x)$ к тому же непрерывна на отрезке $[-\pi, +\pi]$ и $f(\pi) = f(-\pi)$, то справедлива более сильная асимптотическая формула

$$c_v(f) = o(\frac{1}{v}) \text{ при } v \to \pm\infty. \qquad ((CF'_0))$$

Доказательство

Продолжим $f(x)$ с интервала $(-\pi, +\pi)$ на всю числовую прямую периодически с помощью следующего равенства: $f(x+2\pi) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Определенная таким образом функция удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы о коэффициентах Фурье кусочно непрерывной функции и поэтому к ней применима формула $(CF'_{ff'})$, т.е.

$$c_v(f) = \frac{1}{iv}c_v(f') + \frac{1}{i2\pi v}\sum_{j=1}^{N-1}[f]_{x_j}e^{-ivx_j}. \qquad ((4))$$

На интервале $(-\pi, +\pi)$ производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема и по теореме Римана об осцилляции ее коэффициенты Фурье $c_v(f')$ стремятся к нулю при $v \to \infty$. В частности, последовательность коэффициентов $c_v(f')$ ограничена. Учитывая это и пользуясь формулой (4), заключаем, что существует такая постоянная K, что $|c_v(f)| \leq \frac{K}{|v|}$ $\forall v \neq 0$. Таким образом, асимптотическое равенство (CF_0) выполнено.

Если же $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, +\pi]$, то все величины $[f]_{x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, в правой части формулы (4) равны нулю и эта формула принимает вид

$$c_v(f) = \frac{1}{iv}c_v(f'). \qquad ((5))$$

Но по теореме Римана об осцилляции коэффициенты $c_v(f')$ стремятся к нулю при $v \to \infty$. Из этого замечания и равенства (5) следует искомое асимптотическое равенство (CF'_0). $\square$

Следствие

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, +\pi]$ и при этом $f(-\pi) = f(+\pi)$. Если на интервале $(-\pi, +\pi)$ существует кусочно непрерывная и абсолютно интегрируемая производная второго порядка $f''(x)$, то производная первого порядка $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, +\pi]$. Если при этом $f'(-\pi) = f'(+\pi)$, то коэффициенты Фурье $c_v(f)$ подчинены следующей асимптотической формуле

$$c_v(f) = O(\frac{1}{v^2}) \text{ при } v \to \pm\infty. \qquad ((CF_1))$$

10 Признак Липшица сходимости тригонометрических рядов

Сформулируем ряд достаточных признаков сходимости тригонометрического ряда к значению соответствующей ему функции в заданной точке промежутка числовой прямой. Признаки формулируются с использованием тех или иных терминов, характеризующих гладкость разлагаемой в ряд Фурье функции.

Определение (условие Липшица)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 из интервала (a, b). Если для некоторого положительного $\alpha > 0$ существуют такие постоянные L и $\delta > 0$, что

$$|f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \leq L|\xi|^\alpha \ \forall \xi \in (-\delta, +\delta), \qquad ((LC))$$

то функция $f(x)$, как говорят, удовлетворяет условию Липшица порядка α.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то она непрерывна вэтой точке. Обратное неверно: существуют непрерывные функции, которые не удовлетворяют условию Липшица (LC) ни при каком $\alpha > 0$.

Теорема (признак сходимости Липшица)

Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, абсолютно интегрируемая на интервале $(-\pi, +\pi)$. Если в какой-либо точке x_0 из интервала $(-\pi, +\pi)$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье в точке x_0 сходится к значению $f(x_0)$.

Доказательство

Для частичной суммы $T_n(f; x_0)$ соответствующего функции $f(x)$ тригонометрического ряда Фурье ранее получено представление в виде

$$T_n(f; x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi + x_0) D_n(\xi) d\xi. \tag{(6)}$$

Здесь $D_n(\xi)$ — это ядро Дирихле, определяемое соотношением $D_n(\xi) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\xi)}{\sin(\frac{\xi}{2})}$. Ядро $D_n(\xi)$, как было доказано, обладает следующим свойством $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} D_n(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} D_n(\xi) d\xi = 1$. Домножая обе части этого равенства на $f(x_0)$ и вычитая результат из равенства (6), приходим к соотношению

$$T_n(f; x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} [f(x_0 + \xi) - f(x_0)] D_n(\xi) d\xi. \tag{(7)}$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (LC), в котором $0 < \delta < \pi$. Следовательно, частное $F(\xi) = \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{\sin(\frac{\xi}{2})}$ при всех $\xi\colon -\delta < \xi < +\delta$ удовлетворяет неравенству $|F(\xi)| \le \frac{|f(x_0+\xi)-f(x_0)|}{|\sin(\frac{\xi}{2})|} \le \frac{L|\xi|^\alpha}{|\sin(\frac{\xi}{2})|}$. Далее, при $|\xi| < \pi$ справедливо неравенство $|\sin(\frac{\xi}{2})| \ge \frac{|\xi|}{\pi}$. Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, получаем

$$|F(\xi)| \le \pi L |\xi|^{\alpha - 1}. \tag{(8)}$$

Возьмем произвольное положительное число $h\colon 0 < h < \delta$ и разобьем интеграл в правой части равенства (7) на сумму трех: по интервалу $(-\pi, -h)$, затем по интервалу $(-h, +h)$ и, наконец, по интервалу $(+h, +\pi)$.

Слагаемое с интегралом по интервалу $(-h,+h)$ оценим с помощью оценки (8) следующим образом: $|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{+h}F(\xi)\sin((n+\frac{1}{2})\xi)d\xi| \le \frac{L}{2}\int\limits_{-h}^{+h}|\xi|^{\alpha-1}d\xi = L\int\limits_{0}^{h}\xi^{\alpha-1}d\xi = \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}$. Используя эту оценку и равенство (7), получаем

$$|T_n(f;x_0)-f(x_0)| \le \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}+|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-h}F(\xi)\sin((n+\frac{1}{2})\xi)d\xi|+|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+h}^{+\pi}F(\xi)\sin((n+\frac{1}{2})\xi)d\xi|. \tag{(9)}$$

Функция $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на интервалах $(-\pi,-h)$ и $(+h,+\pi)$ для любого положительного $h<\delta$. Таким образом, к функции $F(\xi)$ применима теорема Римана об осцилляции. В соответствии с этой теоремой имеем $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-h}F(\xi)\sin((n+\frac{1}{2})\xi)d\xi=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+h}^{+\pi}F(\xi)\sin((n+\frac{1}{2})\xi)d\xi=0$. Используем эти равенства и перейдем к пределу по $n\to+\infty$ в оценке (9). Тогда получим $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}|T_n(f;x_0)-f(x_0)| \le \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}$. Переходя здесь к пределу по $h\to+0$ и учитывая, что верхний предел в левой части этого неравенства неотрицателен, заключаем, что предел последовательности частичных сумм $T_n(f;x_0)$ при $n\to+\infty$ существует и равен $f(x_0)$. $\square$

Таким образом, тригонометрические ряды Фурье пригодны для аппроксимации значений в точке функций, удовлетворяющих условию Липшица. Однако практически проверять выполнение условия (LC) не всегда удобно. В связи с этим полезно использовать достаточно просто проверяемое условие дифференцируемости функции в точке, гарантирующее справедливость оценки (LC).

Лемма

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha=1$.

Доказательство

Пусть существует производная $f'(x_0)=a$. Тогда найдется такое положительное число δ, что

$$a-1 < \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0)}{\xi} < a+1, \tag{(10)}$$

где $\xi \neq 0$ и $-\delta < \xi < +\delta$. Полагая постоянную $L = \max\{|a-1|, |a+1|\}$, получаем из (10) следующую оценку $|f(x_0+\xi) - f(x_0)| \leq L|\xi|$. Это означает по определению, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1. $\square$

Следствие

Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом 2π и абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi, +\pi)$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то вэтой точке ее тригонометрический ряд Фурье сходится к значению $f(x_0)$.