6.2. Метод Ньютона. Итерации высшего порядка

Метод Ньютона. В случае одного уравнения формула *метода Ньютона* имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Метод состоит в замене дуги кривой $y = f(x)$ касательной к ней в процессе каждой итерации. Это видно из уравнения касательной, проведенной в точке $(x_n, f(x_n))$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

из которого следует формула итерационного процесса, если положить $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

Метод Ньютона соответствует методу простой итерации $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{\tau_n} + f(x_n) = 0$ с оптимальным, в некотором смысле, переменным параметром τ_n. Действительно, пусть z — изолированный простой (т. е. $f'(z) \neq 0$) корень, пусть также z и все x_n принадлежат некоторому отрезку $[a, b]$. Тогда

$$z - x_{n+1} = z - x_n + \tau_n f(x_n) - \tau_n f(z) = (1 - \tau_n f'(\xi_n))(z - x_n),$$

следовательно, при $\tau_n = \dfrac{1}{f'(\xi_n)}$ метод сходится за одну итерацию. Точка ξ_n неизвестна, поэтому на текущем шаге выбираем $\tau_n = \dfrac{1}{f'(x_n)}$, при этом верна оценка

$$|z - x_{n+1}| \leqslant \max_{\xi\in[a,b]} |1 - \tau_n f'(\xi)|\,|z - x_n|.$$

Рассмотрим случай системы m нелинейных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\,,$$

где $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m)^T$, $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_m)^T$. Будем предполагать отображение $\mathbf{F} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности решения $\mathbf{z}$, так что

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right], \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m\,.$$

В предположении обратимости этого оператора метод Ньютона можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n).$$

Введем обозначение: $\Omega_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < a\}$, где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^m$. Пусть при некоторых $a, a_1, a_2 \,:\, 0 < a,\ 0 < a_1, a_2 < \infty$, выполнены следующие условия:

1) $\|(\mathbf{F}'(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant a_1\|\mathbf{y}\|$ при $\mathbf{x} \in \Omega_a$ и $\forall\, \mathbf{y}$;

2) $\|\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{F}'(\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\| \leqslant a_2\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2$ при $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \Omega_a$.

Обозначим также $c = a_1 a_2$, $b = \min(a, c^{-1})$.

Теорема. *При условиях* 1, 2 *и* $\mathbf{x}_0 \in \Omega_b$ *метод Ньютона сходится с оценкой погрешности*

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\| \leqslant c^{-1} \left(c\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\|\right)^{2^n},$$

т. е. квадратично.

Условия теоремы гарантируют, что корень $\mathbf{z}$ простой. В случае двукратного корня ($p = 2$) метод Ньютона сходится линейно; скорость сходимости замедляется при повышении кратности.

Интерполяционные методы построения итераций высшего порядка. Пусть $x_n, ..., x_{n-m+1}$ — набор из m приближений к корню z функции $f(x)$. Тогда в качестве очередного приближения x_{n+1} целесообразно выбрать ближайший к x_n нуль интерполяционного многочлена $L_m(x)$, построенного по узлам $x_n, ..., x_{n-m+1}$. Это требует нахождения корней многочлена $L_m(x)$. Как следствие, широкое применение имеют только алгоритмы при $m = 2, 3$, т. е. метод секущих и метод парабол.

Чтобы избежать проблем, связанных с решением алгебраического уравнения $L_m(x) = 0$, естественно интерполировать обратную к $y = f(x)$ функцию $x = F(y)$ по узлам $y_{n-i} = f(x_{n-i})$, $i = 0, ..., m-1$, и в качестве очередного приближения взять значение полученного интерполяционного многочлена в нуле. Линейная обратная интерполяция ($m = 2$) соответствует методу секущих, но уже при $m = 3$ прямая и обратная интерполяция приводят к различным алгоритмам.

Метод Чебышёва. Пусть z — простой корень уравнения $f(x) = 0$ и $F(y)$ — обратная к $f(x)$ функция. Тогда $x \equiv F(f(x))$ и $z = F(0)$. Разложим $F(0)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки y

$$F(0) = F(y) + \sum_{k=1}^{m} F^{(k)}(y)\, \frac{(-y)^k}{k!} + \ldots .$$

Приблизим значение $F(0)$ значением частичной суммы в точке $y = f(x)$

$$z = F(0) \approx \varphi_m(x) = x + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k F^{(k)}(f(x))\, \frac{(f(x))^k}{k!},$$

что соответствует замене функции F многочленом φ_m, производные которого совпадают с соответствующими производными F в точке $y = f(x)$. Итерационный метод вида $x_{n+1} = \varphi_m(x_n)$ имеет порядок сходимости $m+1$.

δ^2-процесс Эйткена. Вычислим по имеющемуся приближению x_n значения $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ и $x_{n+2} = \varphi(x_{n+1})$. Так как в малой окрестности простого корня z имеются представления

$$x_{n+1} - z \approx \varphi'(z)(x_n - z), \quad x_{n+2} - z \approx \varphi'(z)(x_{n+1} - z),$$

то из данных соотношений получаем

$$\varphi'(z) \approx \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}, \quad z \approx \frac{x_{n+2}-\varphi'(z)x_{n+1}}{1-\varphi'(z)} \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}.$$

Таким образом, за следующее после x_n приближение разумно принять

$$x_{n+1} = \frac{x_n\varphi(\varphi(x_n)) - \varphi(x_n)\varphi(x_n)}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n} = \varphi(\varphi(x_n)) - \frac{(\varphi(\varphi(x_n)) - \varphi(x_n))^2}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n}.$$

Известно, что если процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ имел линейную скорость сходимости, то данная модификация имеет скорость сходимости более высокого порядка, но возможно, только сверхлинейную. Применение рассмотренной модификации, например, к квадратично сходящейся последовательности формально не приводит к повышению порядка сходимости. Данное преобразование является частным случаем (при $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) метода Стеффенсона—Хаусхолдера—Островского построения итерационной функции φ_3 более высокого порядка по известным φ_1 и φ_2:

$$\varphi_3(x) = \frac{x\varphi_1(\varphi_2(x)) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)}{x - \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_1(\varphi_2(x))}.$$

6.26. Построить итерационный метод Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, где p — положительное вещественное число.

◁ Значение $\sqrt[p]{a}$ является корнем уравнения

$$f(x) \equiv x^p - a = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{px_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}}.$$

Для $p = 2$ получаем $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. ▷

6.27. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ простой корень, причем $f(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

◁ Метод Ньютона имеет вид $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Обозначим через z искомый корень. Тогда z — корень уравнения $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Таким образом, можно рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}, \quad \text{следовательно,} \quad \varphi'(z) = 0.$$

Согласно 6.1, найдется такая окрестность корня Q_δ, что $\varphi(Q_\delta) \subset Q_\delta$. Оценим скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки z

$$x_{n+1} - z = \varphi(x_n) - \varphi(z) = \frac{1}{2}\,(x_n - z)^2\,\varphi''(\xi),\ \xi \in [x_n,\, z].$$

Итак, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости. $\triangleright$

6.28. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z кратности p, причем $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\dfrac{p-1}{p}$.

$\triangleleft$ Поступая так же, как и в случае простого корня 6.27, получим $x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(z) + 0{,}5(x_n - z)^2\,\varphi''(\xi)$, где $\xi \in [x_n,\, z]$. Однако в случае $p > 1$ в выражении

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

при $x = z$ содержится неопределенность «нуль на нуль», так как z — одновременно корень уравнения $f'(x) = 0$. Оценим $\varphi'(x)$.

Функция $f(x)$ в окрестности корня z кратности p ведет себя как $a\,(x - z)^p + o(|x - z|^p)$, где a — ненулевая константа. Тогда в малой окрестности корня

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{a\,(x-z)^p\,ap(p-1)\,(x-z)^{p-2}}{a^2p^2\,(x-z)^{2p-2}} + o(1),$$

$$\varphi'(z) = \frac{p-1}{p} < 1.$$

Отсюда следует, что чем выше кратность корня, тем медленнее сходимость. $\triangleright$

6.29. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z кратности p, причем $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

$\triangleleft$ Требуемую модификацию будем искать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и подберем параметр α так, чтобы имела место квадратичная сходимость. Рассмотрим данную модификацию как специальный случай метода простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x)$, для которого выполнено $z = \varphi(z)$, причем вблизи корня

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha + \alpha\,\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = 1 - \alpha + \alpha\,\frac{p-1}{p} + o(1),$$

$$\varphi'(z) = \frac{p-\alpha}{p}\,.$$

Для обеспечения квадратичной сходимости параметр α надо подобрать таким, чтобы $\varphi'(z) = 0$, что и выполняется при $\alpha = p$. $\triangleright$

6.30. Построить метод Ньютона для вычисления значения a^{-1} так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

$\triangleleft$ Искомое число является корнем уравнения $\dfrac{1}{ax} - 1 = 0$. Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид: $x_{n+1} = 2\,x_n - a\,x_n^2$, или $x_{n+1} = x_n(2 - a\,x_n)$.

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = \dfrac{2}{a}$, то сходимость к корню не имеет места, так как все x_n равны нулю. Если $x_0 < 0$, то сходимости также не будет, поскольку все x_n останутся отрицательными. Если взять $x_0 > \dfrac{2}{a}$, то также все $x_n < 0$.

Из вида итерационного процесса следует, если $x_n \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right]$, то $x_{n+1} \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right]$, если же $x_n \in \left[\dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right)$, то $x_{n+1} \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right)$. Пусть $x_n \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right]$. Тогда из равенства $x_{n+1} - x_n = x_n(1 - ax_n)$ получаем, что $x_{n+1} > x_n$, а из условия $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$, что $x_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{a}$. Так как итерационный процесс имеет две неподвижные точки 0 и $\dfrac{1}{a}$, то приближения сходятся к $\dfrac{1}{a}$.

Таким образом, сходимость к корню имеет место, если начальное приближение берется из интервала $\left(0, \dfrac{2}{a}\right)$. $\triangleright$

6.31. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости и предложить способ численной оценки величины кратности корня.

$\triangleleft$ Для уравнения $g(x) \equiv \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$ корень z — простой, следовательно, для уравнения $g(x) = 0$ метод Ньютона выглядит так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\left(f'(x_n)\right)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

и имеет квадратичный порядок сходимости.

В окрестности z функция $f(x) \approx a\,(x-z)^p$, поэтому

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \approx \frac{a\,(x-z)^p}{ap\,(x-z)^{p-1}} = \frac{1}{p}\ (x-z).$$

Из двух соседних итераций для x_1 и x_2 имеем систему приближенных уравнений

$$g(x_1) \approx \frac{1}{p}\ (x_1 - z), \quad g(x_2) \approx \frac{1}{p}\ (x_2 - z).$$

Отсюда получаем оценку для кратности p корня z:

$$p \approx \frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)}\,.$$

Такой способ оценивания p можно применять на каждой итерации. ▷

6.32. Для решения уравнения $x^3 - x = 0$ применяют метод Ньютона. При каком начальном приближении он сходится и к какому корню?

Ответ: обозначим области сходимости метода Ньютона

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = \frac{2x^3}{3x^2-1}$$

к корням $z = -1, 0, +1$ через X_-, X_0, X_+ соответственно. Кроме того, определим последовательности точек $\{x_n^\pm\}$ для $n \geqslant 0$ следующими условиями:

$$\varphi(x_{n+1}^\pm) = x_n^\pm, \quad x_0^\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

для элементов которых справедливы неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = x_0^- < x_1^+ < x_2^- < \cdots < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0 < \frac{1}{\sqrt{5}} < \cdots < x_2^+ < x_1^- < x_0^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k}^- = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^+ = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k}^+ = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^- = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$X_- = \left(-\infty, x_0^-\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2k-1}^+, x_{2k}^-\right) \cup \left(x_{2k-1}^-, x_{2(k-1)}^+\right)\right],$$

$$X_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$X_+ = \left(x_0^+, \infty\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2(k-1)}^-, x_{2k-1}^+\right) \cup \left(x_{2k}^+, x_{2k-1}^-\right)\right].$$

Кроме того, если $x_0 = x_n^\pm$, $n \geqslant 0$, то метод не определен, а при $x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ имеем $x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, т. е. метод «зацикливается».

Таким образом, области сходимости к корням $z = \pm 1$ являются объединениями перемежающихся открытых интервалов, разделенных точками зацикливания метода.

6.33. Доказать, что если на отрезке $[a,b]$ функция $f'(x)$ не обращается в нуль, функция $f''(x)$ непрерывна и не меняет знака, кроме того, выполнены условия

$$f(a)f(b) < 0\,, \quad \max\left[\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right] \leqslant b-a\,,$$

то метод Ньютона для решения уравнения $f(x)=0$ сходится при любом $x_0 \in [a,b]$.

6.34. Указать область сходимости метода решения уравнения $x=\frac{1}{a}$, не содержащего операций деления:

$$x_{n+1} = (1+C)\,x_n - a\,C\,x_n^2\,,$$

в зависимости от параметра $C \neq 0$.

6.35. Рассматривается метод Ньютона вычисления $\sqrt{a}$ при $1 \leqslant a \leqslant 4$, x_0 полагают равным значению многочлена наилучшего равномерного приближения для $\sqrt{a}$ на $[1,4]$: $x_0 = Q_1^0(a) = \frac{17}{24} + \frac{a}{3}$. Доказать справедливость оценки $|x_4 - \sqrt{a}| \leqslant 0,5 \cdot 10^{-25}$.

6.36. Для нахождения $a^{1/3}$ используют итерационный процесс

$$x_{n+1} = A\,x_n + B\,\frac{a}{x_n^2} + C\,\frac{a^2}{x_n^5}\,.$$

Найти значения параметров A, B, C, обеспечивающие максимальный порядок сходимости.

6.37. Записать формулы метода Чебышёва для функции $f(x) = x^p - a$.

$\lhd$ Обратная к f функция имеет вид $F(y) = (a+y)^{1/p}$, а производные F определяются формулой

$$F^{(k)}(y) = x^{1-kp} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{p} - j\right).$$

Таким образом,

$$\varphi_m(x) = x + x \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{a-x^p}{px^p}\right)^k \prod_{j=0}^{k-1} (1-jp).$$

В частности, $\varphi_2(x) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(p - 1 + \frac{a}{x^p}\right)$. При $p=2$ получаем формулу Ньютона—Херона $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ для приближенного вычисления квадратных корней.

Если $p=-1$, то $\varphi_m(x) = x \sum\limits_{k=0}^{m-1} (1-ax)^k$. В этом случае итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi_m(x_n)$ при $|1-ax| < 1$ сходится к решению уравнения $x - \frac{1}{a} = 0$. Данный метод позволяет находить значение $\frac{1}{a}$ с произвольной точностью, не используя операцию деления. $\rhd$

6.38. Показать, что метод вычисления $a^{1/p}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ \ \varphi(x) = x\,\frac{(p-1)x^p + (p+1)a}{(p+1)x^p + (p-1)a}$$

имеет третий порядок.

6.39. Определить порядок сходимости метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)(f(x_n))^2}{2(f'(x_n))^3}\,.$$

Ответ: порядок сходимости $m = 3$.

6.40. Определить порядок сходимости модифицированного метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$.

6.41. Определить порядок сходимости метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)\right)}{f'(x_n)}\,.$$

Ответ: порядок сходимости $m = 3$.

6.42. Для нахождения простого нуля z функции $f(x) \in C^{(4)}$ используют итерационный метод

$$x_{n+1} = 0,5\,(y_{n+1} + v_{n+1})\,,$$

где

$$y_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad v_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\,, \quad g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Доказать, что если метод сходится, то скорость сходимости — кубичная.

6.43. Для нахождения нуля z функции $f(x)$ используют итерационный метод

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad g(x) = x - \frac{(f(x))^2}{f(x + f(x)) - f(x)}\,.$$

Исследовать поведение функции $g(x)$ в окрестности корня z.

6.44. Записать расчетную формулу метода Ньютона для системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} \sin(x+y) - 1,3x = 0,1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^{10} + y^{10} = 1024, \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y = 1. \end{cases}$$

6.45. Указать начальное приближение и оценить число итераций в методе Ньютона, требующихся для достижения точности 10^{-3} при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = 1, \\ xy^3 - y = 4. \end{cases}$$

6.46. Проверить, что $\mathbf{z} = (1,1,1)^T$ — одно из решений системы уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, где $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1x_2^3 + x_2x_3 - x_1^4 - 1 \\ x_2 + x_2^2 + x_3 - 3 \\ x_2x_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

Сходится ли метод Ньютона к $\mathbf{z}$ при достаточно близких начальных приближениях?

6.47. Для решения нелинейной краевой задачи

$$y'' = f(x,y) \quad \text{при} \quad x \in (0,X), \quad y(0) = a, \quad y(X) = b$$

рассматривается система нелинейных алгебраических уравнений с параметром $h = \frac{X}{N}$:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f(x_k, y_k), \; k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = a, \; y_N = b.$$

Здесь y_k — приближения к значениям $y(kh)$. Записать расчетные формулы метода Ньютона для решения приведенной системы. Указать способ их реализации: 1) $f(x,y) = x^2 + y^3$; 2) $f(x,y) = y^2\exp(x)$; 3) $f(x,y) = \cos x \sin y$.