Тема : Интерполяция функций

$\mathbf{3^0}$. Достаточное условие интерполяции функции обобщенным полиномом. Переход к системе линейных уравнений с матрицей Грама. Пример дискретной ортогональной системы функций на отрезке с равномерной сеткой. $\mathbf{4^0}$. Условие интерполяции функции алгебраическим полиномом. Интерполянт как линейная комбинация базисных полиномов Лагранжа. Интерполяционная формула Лагранжа, полином Лагранжа. Свойства лагранжевой интерполяции. $\mathbf{5^0}$. Теорема о погрешности интерполяционной формулы Лагранжа. $\mathbf{6^0}$. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа в случае равномерной сетки узлов. $\mathbf{7^0}$. Компактное представление интерполяционного полинома Лагранжа.

3^0. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система из непрерывных функций

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_N(x).$$

Рассмотрим их линейную комбинацию

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} u_k \varphi_k(x).$$

Любую линейную комбинацию такого вида называют часто **обобщенным полиномом**.

Для того чтобы обобщенный полином $f_N(x)$ выступал в качестве интерполянта функции $f(x)$, достаточно потребовать выполнения условий

$$f_N(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Эти же условия записываются в виде следующей СЛАУ относительно неизвестных весов u_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, интерполянта:

$$\begin{cases} u_0\varphi_0(x_0) + u_1\varphi_1(x_0) + \ldots + u_N\varphi_N(x_0) = f_0, \\ u_0\varphi_0(x_1) + u_1\varphi_1(x_1) + \ldots + u_N\varphi_N(x_1) = f_1, \\ u_0\varphi_0(x_2) + u_1\varphi_1(x_2) + \ldots + u_N\varphi_N(x_2) = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_0\varphi_0(x_N) + u_1\varphi_1(x_N) + \ldots + u_N\varphi_N(x_N) = f_N. \end{cases}$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ этой системы линейных алгебраических уравнений размера $(\boldsymbol{N}+1)\times(\boldsymbol{N}+1)$ записывается в виде

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_N(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_N(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_N) & \varphi_1(x_N) & \varphi_2(x_N) & \cdots & \varphi_N(x_N) \end{pmatrix}.$$

Если $\overrightarrow{u}_N =\uparrow (u_0,\ldots,u_N)$ и $\overrightarrow{f}_N =\uparrow (f_0,\ldots,f_N)$, то система принимает следующий векторный вид:

$$\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{N}} = \overrightarrow{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{N}}.$$

Решение этой системы при любой правой части $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{N}}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

Иногда вместо системы $\boldsymbol{A}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{N}} = \overrightarrow{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{N}}$ удобнее решать сопряженную ей систему линейных уравнений $C\overrightarrow{u}_N = A^*\overrightarrow{f}_N$. Здесь A^* — это транспонированная к матрице A и $C = A^*A$. При этом

$$C = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_N) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_N) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_N,\varphi_0) & (\varphi_N,\varphi_1) & (\varphi_N,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix}.$$

Здесь (φ_k, φ_j) — это специальное скалярное произведение в пространстве сеточных функций, задаваемое равенством

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{m=0}^{N} \varphi_k(x_m)\varphi_j(x_m).$$

Матрица $C = A^*A$ — это матрица Грама системы $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ в соответствующем скалярном произведении.

Если система сеточных функций

$$\begin{cases} \big(\varphi_0(x_0), \varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \ldots, \varphi_0(x_N)\big), \\ \\ \big(\varphi_1(x_0), \varphi_1(x_1), \varphi_1(x_2), \ldots, \varphi_1(x_N)\big), \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \big(\varphi_N(x_0), \varphi_N(x_1), \varphi_N(x_2), \ldots, \varphi_N(x_N)\big) \end{cases}$$

линейно независима, то соответствующая ей матрица Грама невырождена. Верно и обратное.

Переход к системе линейных уравнений с матрицей Грама особенно удобен в случае ортогональных сеточных функций, то есть таких, что выполняются равенства

$$(\varphi_k, \varphi_j) = 0 \qquad \text{при} \qquad k \neq j.$$

Если при этом $(\varphi_k, \varphi_k) \neq 0$, то матрица Грама становится диагональной с ненулевыми элементами на диагонали. При $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, имеем $\vec{u}_N = A^* \vec{f}_N$.

На отрезке $[0, 1]$ с равномерной сеткой узлов

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$$

ортогональную систему образуют, например, сеточные функции

$$e^{i2\pi k x_j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Убедитесь в этом в качестве упражнения.

4^0. Пусть $u_k(x)$ совпадает со степенной функцией x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. Тогда обобщенный полином

$$\sum_{k=0}^{N} a_k u_k(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

является обычным алгебраическим полиномом степени не выше N.

В этом случае система линейных уравнений для нахождения весов a_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_N x_0^N = f_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_N x_1^N = f_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_N x_2^N = f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \ldots + a_N x_N^N = f_N. \end{cases} \qquad (L_f)$$

Определитель этой системы известен как определитель Вандермонда и вычисляется по формуле

$$\det A = \prod_{0 \le j < i \le N}^{N} (x_i - x_j).$$

Этот определитель отличен от нуля тогда и только тогда, когда среди узлов x_k нет совпадающих друг с другом.

Для равномерной сетки узлов решение системы для коэффициентов линейной комбинации существует и единственно. Однако в этом случае при больших значениях N матрица $A \equiv A_N$ системы плохо обусловлена.

Если $\vec{u}_N =\uparrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N)$ — это решение системы (L_f), то соответствующий ему интерполянт $L_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ допускает эквивалентное задание в виде

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k \varphi_k^N(x).$$

Здесь функция $\varphi_k^N(x)$ — это базисный полином степени N, значения которого в узлах интерполяции задаются равенствами

$$\varphi_k^N(x_m) = 0 \quad \text{при} \quad m \neq k, \qquad \varphi_k^N(x_k) = 1.$$

Таким образом, лишь узел x_k интерполяции не является корнем полинома $\varphi_k^N(x)$.

Следовательно, полином $\varphi_k^N(x)$ имеет вид следующего произведения:

$$D_k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_N).$$

Коэффициент D_k в этом представлении найдем из условия $\varphi_k^N(x_k)=1.$

Подставляя сюда явное выражение полинома $\varphi_k^N(x)$ в виде произведения мономов, получаем следующее представление множителя D_k через узлы интерполяции:

$$\frac{1}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_N)}.$$

Найденный полином $\varphi_k^N(x)$, записанный в виде дробного отношения

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_N)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_N)},$$

называется базисным полиномом Лагранжа.

Числитель в записи этого полинома — это произведение разностей между x и всеми узлами, кроме k-го. А знаменатель — это произведение разностей между k-м узлом и всеми остальными узлами интерполяции.

Определение. *Полином* $L_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} f_k \varphi_k^N(x)$ *степени* N *называется интерполяционным полиномом Лагранжа для функции* $f(x)$.

Приближенное равенство $f(x) \approx L_N(x)$ — это интерполяционная формула Лагранжа.

Заметим, что интерполяционный полином $L_N(x)$ зависит не только от x, но и от узлов

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\},$$

а также от значений f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, функции в этих узлах. Для того чтобы отразить эту зависимость, иногда используют запись

$$L_N(x) \equiv L_N\big(x, \{x_k\}, \{f_k\}\big).$$

В частности, если функция $f(x)$ — это полином $P_m(x)$ степени $m \le N$, то соответствующий ей полином Лагранжа совпадает с f, то есть

$$L_N(x, \{x_k\}, \{f_k\}) = P_m(x).$$

Иными словами, интерполяционная формула Лагранжа с $N+1$ узлом интерполяции точна на любом полиноме вплоть до степени N.

5^0. Погрешность интерполяции полиномом Лагранжа произвольной непрерывной функции оценивается следующим образом.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет на отрезке* $[a,b]$ *все производные до порядка* $(N+1)$ *включительно, причем производная* $f^{(N+1)}(x)$

ограничена на $[a, b]$. *Тогда погрешность интерполяции* $R_N(x) \equiv f(x) - L_N(x)$ *представима в следующем виде:*

$$R_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{N} (x - x_j) \cdot f^{(N+1)}(\xi). \quad (E_R)$$

Здесь ξ — *это некоторая точка из* $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем точку x из отрезка $[a, b]$ и рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(t)$ другой переменной t также из $[a, b]$. Функцию $\psi(t)$ зададим как следующую разность:

$$f(t) - L_N(t) - R_N(x)\frac{(t - x_0)(t - x_1)\ldots(t - x_N)}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_N)}.$$

Функция $\psi(t)$ имеет все производные до порядка $(N + 1)$ включительно.

Кроме того на отрезке $[a, b]$ у функции $\psi(t)$ имеется по крайней мере $(N + 2)$ нуля: это узлы $t = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$, а также точка $t = x$ (в силу определения остаточного члена $R_N(x) \equiv f(x) - L_N(x)\big)$.

Известно, что между любыми двумя нулями непрерывно дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль ее производной. Следовательно, на отрезке $[a, b]$ есть как минимум $(N + 1)$ нуль функции $\psi'(t)$.

Далее, производная $\psi'(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и у нее есть $(N+1)$ нуль на этом отрезке. Следовательно, производная $\psi''(t)$ имеет на $[a, b]$ по меньшей мере N нулей. Применяя аналогичные рассуждения к последующим производным

$$\psi'''(t), \quad \psi^{(4)}(t), \quad \ldots, \quad \psi^{(N)}(t),$$

получим в итоге, что у производной $\psi^{(N)}(t)$ имеется на $[a, b]$ хотя бы один нуль. Пусть этот нуль совпадает с точкой $t = \xi$.

Это означает, что имеет место равенство

$$\psi^{(N+1)}(\xi) = 0, \quad \text{где} \quad \xi \in [a, b].$$

Вычислим теперь $(N+1)$-ую производную от $\psi(t)$, пользуясь определением этой функции. Тогда получим

$$\psi^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) -$$

$$-R_N(x)\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}\Big[\frac{(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_N)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)}\Big].$$

Таким образом, производная $\psi^{(N+1)}(t)$ представлена как разность

$$f^{(N+1)}(t) - R_N(x)\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}\left[\frac{(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_N)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)}\right].$$

Имеем далее

$$\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}\Big[(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_N)\Big] = (N+1)!.$$

Полагая в полученном представлении для производной $\psi^{(N+1)}(t)$ значение $t = \xi$, получаем следующее равенство:

$$0 = \psi^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - \\ - \frac{(N+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)} R_N(x).$$

Выражая из этого равенства погрешность $R_N(x)$, получаем ее представление в виде

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi).$$

Это и есть искомое представление остатка.

$\square$

6^0. Оценим погрешность интерполяционной формулы Лагранжа с равноотстоящими узлами.

Теорема. *Погрешность интерполяции произвольной* $(N+1)$ *раз непрерывно дифференцируемой функции* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *полиномом Лагранжа с равномерной сеткой узлов*

$$x_k = a + k\tau, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N; \; \tau = \frac{b-a}{N},$$

допускает следующую оценку:

$$|f(x) - L_N(x)| \le \frac{\tau^{N+1}}{N+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(N+1)}(x)|. \quad (E_R{}')$$

Доказательство. В силу теоремы об оценке погрешности интерполяционной формулы Лагранжа с произвольными узлами имеем для остатка $R_N(x) \equiv f(x) - L_N(x)$ следующее представление:

$$R_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N} (x - x_j) \cdot f^{(N+1)}(\xi). \quad (E_R)$$

Здесь ξ — некоторая точка из $[a, b]$.

Для заданной точки x из промежутка $[a, b)$ найдем узел x_k — ближайший к x узел слева. Полагая $\alpha = \{\frac{x - x_k}{\tau}\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, получаем представление

$$x = x_k + \alpha \cdot \tau, \qquad 0 \le \alpha \le 1; \qquad k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Пусть далее $a = 0$ и $b = 1$. Тогда

$$x - x_m = k\tau + \alpha\tau - m\tau = (k + \alpha - m)\tau.$$

Следовательно,

$$\prod_{m=0}^{N}(x-x_m)=\tau^{N+1}\prod_{m=0}^{N}(k+\alpha-m).$$

Допустимые значения k здесь — это числа $0, 1, 2, \ldots, N-1$. Учитывая это, получаем для любого α, $0 \le \alpha \le 1$:

$$\left|\prod_{m=0}^{N}(k+\alpha-m)\right|=$$

$$=(k+\alpha)(k+\alpha-1)\ldots\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(N-k-\alpha).$$

Индукцией по N доказывается, что для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$ справедливо неравенство

$$|\prod_{m=0}^{N}(k+\alpha-m)| \le N!.$$

Учитывая эту оценку и пользуясь представлением (E_R) остатка $R_N(x)$, получаем

$$|R_N(x)| \le \frac{\tau^{N+1}}{N+1}|f^{(N+1)}(\xi)|,$$

где $\xi \in [a, b]$. Из этого неравенства следует требуемая оценка (${E_R}'$). $\square$

7^0. В процессе вывода оценки погрешности ($E_R{}'$) рассматривался полином

$$\Pi_{N+1}(x) = \prod_{j=0}^{N} (x - x_j) =$$

$$= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_N).$$

С использованием этого обозначения интерполяционный полином Лагранжа записывается более компактно:

$$L_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\Pi_{N+1}(x)}{(x - x_j)\Pi_{N+1}{}'(x_j)} f_j.$$

Тема : Интерполяция функций (продолжение)

$\mathbf{1^0}$. Определение конечных разностей. Связь с производными функции. Конечные разности от полиномов. $\mathbf{2^0}$. Определение разделенных разностей. Симметричность разделенной разности. Связь разделенных и конечных разностей функции в случае равномерной сетки узлов. $\mathbf{3^0}$. Интерполяционный полином в форме Ньютона. Определение и свойства. $\mathbf{4^0}$. Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов. Представление остаточного члена. $\mathbf{5^0}$. Обусловленность задачи интерполяции. Постоянные Лебега, функции Лебега.

1^0. Пусть на числовой прямой заданы точки $x_k = x_0 + kh$, где k — целое; $h > 0$, причем в узлах x_k известны значения $f(x_k) = f_k$ непрерывной функции $f = f(x)$.

Определение. *Величина*

$$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k)$$

называется ***конечной разностью первого порядка*** *функции f в точке x_k, взятой с шагом h.*

Определение. *Величина*

$$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k =$$

$$= (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}$$

называется ***конечной разностью второго порядка*** функции f в точке x_k.

Определение. *Равенство*

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k,$$

где $n \geq 1$ *и* $\Delta^0 f_k = f_k$, *определяет конечную разность порядка* n *функции* f *в точке* x_k.

Лемма (о связи конечных разностей и производных). *Пусть функция* $f = f(x)$ *принадлежит классу* $C^{(n)}[x_k, x_{k+n}]$. *Тогда найдется точка* η *из* (x_k, x_{k+n}) *такая, что*

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\eta).$$

Доказательство. При $n = 1$ искомая формула принимает вид $\Delta f_k = hf'(\eta)$. По определению

$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k)$. Используя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$f(x_k + h) - f(x_k) = f'(\eta)h,$$

то есть искомую формулу.

При $n = 2$, взяв $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$, получим

$$\Delta^2 f_k = \varphi(x_k + h) - \varphi(x_k).$$

Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную первого порядка и по той же формуле конечных приращений получаем

$$\varphi(x_k + h) - \varphi(x_k) = \varphi'(\xi) \cdot h, \qquad \xi \in (x_k, x_k + 2).$$

При этом

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi + h) - f'(\xi) = f''(\eta) \cdot h,$$

где $\eta \in (\xi, \xi + h) \subset (x_k, x_{k+2})$. Таким образом, имеем

$$\Delta^2 f_k = f''(\eta) \cdot h^2,$$

где $\eta \in (x_k, x_{k+2})$. Искомая формула доказана при $n = 2$.

Для $n > 2$ доказательство проводится аналогично. $\square$

Следствие. *Конечная разность порядка n алгебраического полинома степени n тождественно постоянна, т.е. не зависит от k.*

Следствие. *Конечная разность порядка* $> l$ *алгебраического полинома степени* l *равна нулю:* $\Delta^m(x^l)_k = 0$ *для* $m > l$ *и любого* k.

Одно из практических применений леммы о связи конечных разностей и производных — это приближенная формула для оценки остатка интерполяционной формулы Лагранжа, при условии, что h — достаточно мало, а интерполяция происходит на отрезке (x_0, x_{n+1}), где $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$. Такой нестрогой оценкой пользуются, если в распоряжении имеются лишь табличные значения $(n+1)$ раз дифференцируемой функции.

2^0. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ — произвольные попарно различные точки (узлы) на числовой прямой, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Отметим, что порядок расположения этих узлов на $\mathbb{R}$ может быть любым.

Определение. *Разделенными разностями* ***нулевого порядка*** *функции f называются числа $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_k)$, $\ldots$.*

Определение. *Величина*

$$f(x_0;x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

называется разделенной разностью ***первого порядка*** *функции f.*

В соответствии с определением имеем

$$f(x_0;x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = f(x_1;x_0),$$

то есть $f(x_0;x_1)$ — это **симметрическая** функция своих аргументов.

Определение. *Разделенной разностью порядка n, $n > 1$, называется отношение вида*

$$\frac{f(x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n) - f(x_0;x_1;x_2;\ldots;x_{n-1})}{x_n - x_0},$$

обозначаемое как $f(x_0;x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

В отношении, определяющем разделенную разность порядка n функции f, стоят ее разделенные разности порядка $(n-1)$.

Лемма. *Разделенная разность* $f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ *порядка* n *представима в виде следующей комбинации значений функции в узлах:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (F)$$

Доказательство. При $n = 1$ формула (F) принимает вид

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0},$$

то есть справедлива в силу определения.

При $n = 2$ имеем из определения:

$$f(x_0; x_1; x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

то есть искомая формула справедлива.

Для произвольного $n > 2$ лемма доказывается по индукции. $\square$

Таким образом, разделенная разность — это

симметрическая функция своих переменных.

Значения разделенной разности порядка n не зависит от того, как изначально были занумерованы узлы, по которым она строится.

Всего имеется $(n+1)!$ различных вариантов нумерации узлов целыми числами от 0 до n.

Лемма (связь разделенных и конечных разностей). *Пусть* $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *то есть узлы расположены с постоянным шагом* h. *Тогда*

$$f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}.$$

Следствие. *Пусть отрезок* $[\alpha, \beta]$ *содержит узлы* x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n. *Тогда найдется такое число* $\eta \in (\alpha, \beta)$, *что*

$$f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n) = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}.$$

Следствие. *Разделенная разность порядка n от алгебраического полинома степени n принимает постоянное значение, не зависящее от выбора узлов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Разделенные разности порядков $> n$ от алгебраического полинома степени n равны нулю.*

3^0. Пусть x_0, x_1, x_2, ..., x_n — произвольные попарно различные точки ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) на числовой прямой. Рассматривая их как узлы, построим разделенные разности $f(x_0), f(x_0; x_1), f(x_0; x_1; x_2), \ldots, f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Определение. *Полином $N_n(x)$ степени n, задаваемый равенством*

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + \\ + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n),$$

называется ***полиномом Ньютона*** *с узлами* x_0, x_1, x_2, …, x_n.

Лемма. *Полином Ньютона $N_n(x)$ удовлетворяет условиям*

$$N_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (N)$$

Доказательство. Проверим равенство (N) при $n = 2$. Имеем $N_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2)$. Полагая здесь $x = x_0$ получаем

$$N_2(x_0) = f(x_0).$$

Далее, при $x = x_1$, имеем, пользуясь определением разделенной разности $f(x_0; x_1)$:

$$N_2(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0; x_1) =$$
$$= f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$$

Аналогично, при $x = x_2$, имеем

$$N_2(x_2) = f(x_0) + \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}\Big(f(x_1) - f(x_0)\Big) +$$

$$+ \frac{(x_2 - x_0)}{x_0 - x_1}\frac{(x_2 - x_1)}{x_0 - x_2} f(x_0) +$$

$$+\frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + f(x_2).$$

Здесь мы снова воспользовались представлением (F) разделенной разности $f(x_0; x_1; x_2)$. Как несложно подсчитать, последнее равенство эквивалентно условию, что

$$N_2(x_2) = f(x_2).$$

Для степеней $n > 2$ требуемые равенства доказываются по индукции. $\square$

Таким образом, полином Ньютона $N_n(x)$ является интерполяционным, построенным по системе узлов x_0, x_1, ..., x_n.

Но такой полином единствен и, как установлено ранее, может быть задан как интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$. Следовательно, эти два полинома совпадают:

$$N_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n) \equiv L_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Явная зависимость от узловых значений функции $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, присутствующая в компактной записи полинома Лагранжа $L_n(x)$, оказывается весьма полезной во многих практических задачах. Однако с увеличением степени n полинома приходится строить интерполяционный полином Лагранжа заново.

Интерполяционный полином Ньютона $N_n(x)$ выражается не через значения функции f, а через ее разделенные разности. При увеличении n требуется только добавить к уже построенному полиному Ньютона некоторое количество дополнительных слагаемых. Это удобно на практике.

4^0. Отдельно рассмотрим случай равноотстоящих узлов. Пусть $x_k = x_0 + kh$, $h > 0$,

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогда, учитывая связь разделенной разности с конечной разностью

$$f(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$$

и полагая $q = \frac{x - x_0}{h}$, полином Ньютона можно записать в следующем виде:

$$N_n(x) = N_n(x_0 + qh) =$$

$$= f_0 + q\frac{\Delta f_1}{1!} + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_2}{2!} + q(q-1)(q-2)\frac{\Delta^3 f_3}{3!} +$$

$$+ \ldots + q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_n}{n!}. \; (N')$$

Полином от переменной q в правой части этого равенства называется интерполяционным полиномом Ньютона для интерполяции вперед.

Полином (N') удобно использовать для **интерполяции в начале** таблицы значений функции f и **для экстраполяции** левее точки x_0, то есть при $q < 0$.

Интерполяционный полином с узлами x_0, x_{-1}, x_{-2}, ..., x_{-n}, где $x_{-k} = x_0 - kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, имеет следующий вид

$$N_n(x) = N_n(x_0 + qh) =$$
$$= f_0 + q\frac{\Delta f_{-1}}{1!} + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!} + q(q+1)(q+2)\frac{\Delta^3 f_{-3}}{3!} +$$
$$+ \ldots + q(q+1)\ldots(q+n-1)\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!}. \quad (N'')$$

Полином, задаваемый равенством (N''), называется интерполяционным полиномом для интерполяции назад.

Полином (N'') удобно использовать для **интерполяции в конце** таблицы значений функции f и **для экстраполяции** правее точки x_0, то есть при $q > 0$.

Пусть в таблице значений функции f с шагом h имеется достаточно много узлов с каждой стороны от заданной точки x. Тогда узлы $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ целесообразно выбрать таким образом, чтобы x оказалась возможно ближе к середине минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции.

При этом наиболее естественно взять интерполяционный полином $N_n(x)$ в виде (N), где x_0 — ближайший к x узел. Затем за x_1 принять ближайший к x узел из расположенных с противоположной от x стороны, то есть если $x_0 < x$, то $x_1 > x$, и так далее.

Следующие узлы назначаются поочередно с разных сторон от x. При таком выборе узлов следующие друг за другом слагаемые в представлении (N) обычно убывают.

Для остаточного члена $R_n(x)$ полинома (N') справедливо представление

$$R_n(x_0 + qh) = h^{n+1} q(q-1)\dots(q-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Здесь $f^{(n+1)}$ — это производная по x порядка $(n+1)$, а ξ — это некоторая точка из минимального отрезка, содержащего узлы x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Аналогично, остаточный член $R_n(x)$ интерполяционного полинома (N'') допускает представление в виде

$$R_n(x_0+qh) = h^{n+1}q(q+1)\ldots(q+n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Здесь $f^{(n+1)}$ — это производная по x порядка $(n+1)$, а ξ — это некоторая точка из минимального отрезка, содержащего узлы x_0, x_{-1}, x_{-2}, $\ldots$, x_{-n}.

5^0. Значения интерполируемой функции, как правило, известны с некоторой погрешностью. При выполнении арифметических операций для отыскания значений интерполянта в нужной точке возникают ошибки округления.

В этой связи приходится выяснять, насколько интерполяционный полином чувствителен к возмущениям значений функции в узлах (ошибки начальных данных) и к ошибкам округления (устойчивость к вычислениям).

Приведем некоторые рассуждения, которые в какой-то мере позволяют ответить на этот вопрос об **обусловленности** задачи интерполяции.

Отображение, сопоставляющее значениям функции в сетке узлов интерполяционный полином, является линейным по отношению к значениям интерполируемой функции.

Для того чтобы учесть погрешность начальных данных, полином Лагранжа представим в следующем виде:

$$\boldsymbol{L_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n \varphi_n^N(x) + \sum_{n=0}^{N} (\delta f_n) \varphi_n^N(x).}$$

Здесь $\varphi_n^N(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ — это базисные полиномы степени N, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_n^N(x_m) = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \qquad \varphi_n^N(x_n) = 1.$$

Слагаемое

$$\Delta_N(x, \delta f) = \sum_{n=0}^{N} (\delta f_n) \varphi_n^N(x)$$

учитывает как влияние погрешностей в начальных данных, так и влияние округлений в процессе вычислений. Справедлива оценка

$$\max_{a \le x \le b} |\Delta_N(x, \delta f)| \le \lambda_N \cdot \delta,$$

где $\delta = \max_n |\delta f_n|$ и

$$\lambda_N = \max_{a \le x \le b} \sum_{n=0}^{N} |\varphi_n^N(x)|.$$

Величина λ_N называется **постоянной Лебега** вычислительного процесса.

Если $L(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} |\varphi_i^N(x)|$, то

$$\lambda_N = \max_{a \le x \le b} L(x).$$

Функция $L(x)$ зависит только от расположения узлов x_0, x_1, x_2, ..., x_n на отрезке $[a, b]$ и называется **функцией Лебега** этого расположения.

Отметим, что реальная погрешность при интерполяции, как правило, существенно меньше, чем это гарантирует оценка

$$\max_{a \le x \le b} |\Delta_N(x, \delta f)| \le \lambda_N \cdot \delta.$$

Тем не менее, улучшить эту оценку нельзя: она достижима.

Для оценки обусловленности интерполяции важны оценки роста последовательности λ_N, $N = 1, 2, 3, \ldots$, при $N \to \infty$.

В случае **равномерной сетки** имеет место эквивалентность $\lambda_N \sim 2^N$. В этом случае уже для небольших N задача интерполяции плохо обусловлена. Для сетки с набором узлов

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2m-1)\pi}{n}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

справедлива эквивалентность $\lambda_N \sim \ln(N)$ при $N \to \infty$ (это чебышевское распределение узлов).