Тема : Тригонометрические ряды Фурье

$\mathbf{8^0}$. Лемма о связи коэффициентов Фурье непрерывной периодической функции и ее первой производной. $\mathbf{9^0}$. Обобщение формулы Ньютона — Лейбница. Теорема о связи коэффициентов Фурье кусочно непрерывной функции и ее кусочно непрерывной производной. $\mathbf{10^0}$. Теорема об асимптотике коэффициентов Фурье функции, имеющей кусочно непрерывную и абсолютно интегрируемую производную. Следствие об асимптотике коэффициентов Фурье дважды дифференцируемых функций. $\mathbf{11^0}$. Признак Липшица сходимости тригонометрических рядов.

8^0. Исследуем взаимосвязь дифференциальных свойств абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ и порядка убывания к нулю коэффициентов Фурье $a_k(f)$ и $b_k(f)$ этой функции при $k \to +\infty$.

Будем предполагать при этом, что промежуток Δ совпадает с интервалом $(-\pi, \pi)$ и $l = \pi$.

Установим сначала, как связаны между собой коэффициенты Фурье самой функции и ее первой производной.

Лемма. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(+\pi)$ *и при этом на интервале* $(-\pi, \pi)$ *существует ее непрерывная и абсолютно интегрируемая первая производная* $f'(x)$. *Тогда справедливы равенства*

$$c_\nu(f) = \frac{1}{i\nu} c_\nu(f'), \qquad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (\mathrm{CF}_{ff'})$$

Доказательство. Подставим равенство

$$e^{-i\nu x} = \frac{1}{-i\nu}\frac{d}{dx}(e^{-i\nu x}), \qquad \nu \neq 0,$$

в определение коэффициента Фурье функции $f(x)$. Тогда получим

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-i\nu x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{-i2\nu\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \frac{d}{dx}(e^{-i\nu x})\, dx.$$

Продолжим это равенство, применив к последнему интегралу формулу интегрирования по частям. В результате получим

$$c_\nu(f) = \frac{1}{-i2\nu\pi} \left[f(x) e^{-i\nu x} \Big|_{-\pi}^{+\pi} - \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x) e^{-i\nu x}\, dx \right].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю в силу совпадения значений функции $f(x)$ на концах промежутка интегрирования:

$$f(x)e^{-i\nu x}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = f(\pi)e^{-i\nu\pi} - f(-\pi)e^{i\nu\pi} =$$

$$= e^{-i\nu\pi}[f(\pi) - f(-\pi)e^{i2\nu\pi}] =$$

$$= e^{-i\nu\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Таким образом, коэффициент Фурье $c_\nu(f)$

представлен в следующем виде:

$$c_\nu(f) = \frac{1}{i2\nu\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)e^{-i\nu x}\,dx = \frac{1}{i\nu}c_\nu(f').$$

Это и есть искомое равенство $(\mathbf{CF}_{ff'})$. $\square$

9^0. Далее нам понадобится аналог формулы Ньютона — Лейбница для несобственных интегралов.

Лемма (обобщенная формула Ньютона — Лейбница). *Пусть функция* $f(x)$ *имеет на интервале* (a, b) *непрерывную производную* $f'(x)$, *причем интеграл* $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$ *сходится. Тогда функция* $f(x)$ *имеет при* $x \to a+0$ *и при* $x \to b-0$ *конечные односторонние пределы и при этом справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b-0) - f(a+0). \qquad (\mathrm{NL}')$$

Доказательство. Равенство $(\mathbf{NL'})$ получается из соотношения

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} f'(x)\,dx = f(\eta) - f(\xi), \qquad (\mathbf{NL})$$

выполненного в силу обычной формулы Ньютона — Лейбница для всех таких точек ξ, η, что $a < \xi \leqslant \eta < b$. Нужно лишь перейти к пределу в равенстве $(\mathbf{NL})$ сначала при $\xi \to a + 0$, а затем при $\eta \to b - 0$. $\square$

Теорема (о коэффициентах Фурье кусочно непрерывной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *периодична с периодом* 2π; $x_0 = -\pi$, $x_N = +\pi$ *и при этом имеется такое разбиение*

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N$$

отрезка $[-\pi, \pi]$, *что на каждом подынтервале* (x_{j-1}, x_j) *существует непрерывная производная* $f'(x)$. *Если при этом производная* $f'(x)$

абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и ее производной связаны между собой соотношениями

$$c_\nu(f) = \frac{1}{i\nu} c_\nu(f') + \frac{1}{i2\pi\nu} \sum_{j=1}^{N-1} [f]_{x_j} e^{-i\nu x_j}. \quad (\mathrm{CF'}_{ff'})$$

Здесь через $[f]_{x_j}$ обозначен скачок функции $f(x)$ в точке x_j, т.е.

$$[f]_{x_j} = f(x_j + 0) - f(x_j - 0).$$

Доказательство. Применим на промежутке (x_{j-1}, x_j) обобщенную формулу Ньютона — Лейбница к произведению функций $f(x)e^{-i\nu x}$. Тогда получим

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x)e^{-i\nu x})'\,dx =$$

$$= f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}},$$

$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Суммируя эти равенства по всем j, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(f(x)e^{-i\nu x}\right)' dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}}\right]. \tag{3}$$

Преобразуем поочередно суммы в левой и правой частях этого равенства.

Для суммы слева имеем

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(f(x)e^{-i\nu x}\right)' dx = \int\limits_{x_0}^{x_N} \left(f(x)e^{-i\nu x}\right)' dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)e^{-i\nu x}\, dx - i\nu \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-i\nu x}\, dx =$$

$$= 2\pi[c_\nu(f') - i\nu c_\nu(f)].$$

Сумму в правой части равенства (3), т.е. величину

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left[f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}} \right],$$

разобьем на сумму четырех слагаемых, выделив в отдельную группу слагаемые, соответствующие индексам $j = 1$ и $j = N$.

В результате получим

$$S_N = \sum_{j=2}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - \sum_{j=2}^{N-1} f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}}$$

$$+ \underbrace{\left[f(x_1 - 0)e^{-i\nu x_1} - f(x_0 + 0)e^{-i\nu x_0}\right]}_{j=1} +$$

$$+ \underbrace{\left[f(x_N - 0)e^{-i\nu x_N} - f(x_{N-1} + 0)e^{-i\nu x_{N-1}}\right]}_{j=N}.$$

Подставляя сюда значения $x_0 = -\pi$ и $x_N = +\pi$, а также группируя однотипные слагаемые, получаем

$$S_N = \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - \sum_{j=2}^{N} f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}}$$

$$+ f(\pi - 0)e^{-i\nu\pi} - f(-\pi + 0)e^{i\nu\pi}.$$

По условию ν — целое число, а функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π. В частности, $f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$.

Следовательно, справедливы равенства

$$f(\pi - 0)e^{-i\nu\pi} - f(-\pi + 0)e^{i\nu\pi} =$$

$$= e^{-i\nu\pi}\Big[f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)e^{i2\nu\pi}\Big] =$$

$$= (-1)^{\nu}\Big[f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)\Big] = 0.$$

Таким образом, сумма в правой части равенства (3) преобразована к виду

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left[f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - \sum_{j=2}^{N} f(x_{j-1} + 0)e^{-i\nu x_{j-1}}.$$

Переходя во второй сумме справа к новому индексу суммирования $j-1$, имеем далее

$$S_N = \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j - 0)e^{-i\nu x_j} - \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j + 0)e^{-i\nu x_j}$$

$$= -\sum_{j=1}^{N-1} \big[f(x_j + 0) - f(x_j - 0)\big]e^{-i\nu x_j}.$$

Подставляя в равенство (3) найденные выражения его левой и правой частей, приходим к соотношению

$$2\pi[c_\nu(f') - i\nu c_\nu(f)] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N-1}\left[f(x_j+0) - f(x_j-0)\right]e^{-i\nu x_j}.$$

Выражая из этого равенства коэффициенты Фурье $c_\nu(f)$, приходим к искомой формуле $(\mathrm{CF}'_{ff'})$. $\square$

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна всюду, то формула $(\mathbf{CF'}_{ff'})$ совпадает с формулой $(\mathbf{CF}_{ff'})$.

10^0. В математическом анализе часто используется понятие кусочно непрерывных производных первого, второго и более высоких порядков.

Определение. *Функция* $f(x)$, $x \in (a, b)$, *имеет на интервале* (a, b) *кусочно непрерывную производную, если существует конечное разбиение интервала* (a, b) *на такие промежутки, что в каждом из них функция* $f(x)$ *имеет непрерывную производную.*

Любая кусочно постоянная функция является кусочно непрерывной на любом интервале и имеет кусочно непрерывную производную.

Теорема (о порядке стремления к нулю коэффициентов Фурье). *Пусть функция* $f(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, *имеет на интервале* $(-\pi, \pi)$ *кусочно непрерывную и абсолютно интегрируемую производную.*

Тогда справедливы асимптотические соотношения

$$c_\nu(f) = O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \textit{при} \quad \nu \to \pm\infty. \qquad (\mathbf{CF_0})$$

Если $f(x)$ *к тому же непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и* $f(\pi) = f(-\pi)$, *то справедлива более сильная асимптотическая формула*

$$c_\nu(f) = o\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{при} \quad \nu \to \pm\infty. \qquad (\mathbf{CF}'_0)$$

Доказательство. Продолжим $f(x)$ с интервала $(-\pi, \pi)$ на всю числовую прямую периодически с помощью следующего равенства:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Определенная таким образом функция удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы о коэффициентах Фурье кусочно непрерывной функции и поэтому к ней применима формула $(\mathbf{CF'}_{ff'})$, т.е.

$$c_\nu(f) = \frac{1}{i\nu} c_\nu(f') + \frac{1}{i2\pi\nu} \sum_{j=1}^{N-1} [f]_{x_j} e^{-i\nu x_j}. \qquad (4)$$

На интервале $(-\pi, \pi)$ производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема и по теореме Римана об осцилляции ее коэффициенты Фурье $c_\nu(f')$ стремятся к нулю при $\nu \to \infty$.

В частности, последовательность коэффициентов $c_\nu(f')$ ограничена. Учитывая это и пользуясь формулой (4), заключаем, что существует такая постоянная K, что

$$|c_\nu(f)| \leqslant \frac{K}{|\nu|} \qquad \forall\, \nu \neq 0.$$

Таким образом, асимптотическое равенство ($\mathbf{CF_0}$) выполнено.

Если же $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то все величины $[f]_{x_j}$, $j = 1, \dots, N$, в правой части формулы (4) равны нулю и эта формула принимает вид

$$c_\nu(f) = \frac{1}{i\nu} c_\nu(f'). \tag{5}$$

Но по теореме Римана об осцилляции коэффициенты $c_\nu(f')$ стремятся к нулю при $\nu \to \infty$. Из этого замечания и равенства (5) следует искомое равенство (CF'_0). $\square$

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[-\pi, \pi]$ *и при этом* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Если на интервале* $(-\pi, \pi)$ *существует кусочно непрерывная и абсолютно интегрируемая производная второго порядка* $f''(x)$, *то производная первого порядка* $f'(x)$ *непрерывна на от-*

резке $[-\pi, \pi]$. *Если при этом* $f'(-\pi) = f'(\pi)$, *то коэффициенты Фурье* $c_\nu(f)$ *подчинены следующей асимптотической формуле*

$$c_\nu(f) = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \quad \text{\textit{при}} \quad \nu \to \pm\infty. \qquad (\mathrm{CF}_1)$$

11^0. Сформулируем ряд достаточных признаков сходимости тригонометрического ряда к значению соответствующей ему функции в заданной точке промежутка числовой прямой.

Признаки формулируются с использованием тех или иных терминов, характеризующих гладкость разлагаемой в ряд Фурье функции.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 из интервала (a, b). Если для некоторого положительного $\alpha > 0$ существуют такие постоянные L и $\delta > 0$, что*

$$|f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \leqslant L|\xi|^{\alpha} \qquad \forall\, \xi \in (-\delta, \delta), \quad \text{(LC)}$$

то функция $f(x)$, как говорят, удовлетворяет условию Липшица порядка α.

Если в точке $\boldsymbol{x_0}$ функция $\boldsymbol{f(x)}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\boldsymbol{\alpha > 0}$, то она непрерывна в этой точке.

Обратное неверно: существуют непрерывные функции, которые не удовлетворяют условию Липшица (**LC**) ни при каком $\boldsymbol{\alpha > 0}$.

Теорема (признак сходимости Липшица). *Пусть* $f(x)$ *— периодическая с периодом* 2π *функция, абсолютно интегрируемая на интервале* $(-\pi, \pi)$.

Если в какой-либо точке x_0 *из интервала* $(-\pi, \pi)$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, *то ее ряд Фурье в точке* x_0 *сходится к значению* $f(x_0)$.

Доказательство. Частичная сумма $T_n(f;x_0)$ соответствующего функции $f(x)$ тригонометрического ряда Фурье, как установлено ранее, представима в виде

$$T_n(f;x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x_0) D_n(\xi)\, d\xi. \qquad (6)$$

Здесь $D_n(\xi)$ — это ядро Дирихле, определяемое соотношением

$$D_n(\xi) = \frac{\sin{(n+1/2)\xi}}{\sin{(\xi/2)}}.$$

Ядро $D_n(\xi)$, как было доказано, обладает следующим свойством

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = 1.$$

Домножая обе части этого равенства на $f(x_0)$ и вычитая результат из равенства (6), приходим к соотношению

$$T_n(f;x_0) - f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x_0+\xi) - f(x_0)\Big] D_n(\xi)\,d\xi. \quad (7)$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (LC), в котором $0 < \delta < \pi$. Следовательно, частное

$$F(\xi) = \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{\sin(\xi/2)}$$

при всех ξ: $-\delta < \xi < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$|F(\xi)| \leqslant \frac{|f(x_0 + \xi) - f(x_0)|}{|\sin(\xi/2)|} \leqslant \frac{L|\xi|^\alpha}{|\sin(\xi/2)|}.$$

Далее, при $|\xi| < \pi$ справедливо неравенство $|\sin(\xi/2)| \geqslant |\xi|/\pi$. Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, получаем

$$|F(\xi)| \leqslant \pi L|\xi|^{\alpha-1}. \tag{8}$$

Возьмем произвольное положительное число h: $0 < h < \delta$ и разобьем интеграл в правой части равенства (7) на сумму трех: по интервалу $(-\pi, -h)$, затем по интервалу $(-h, h)$ и, наконец, по интервалу (h, π).

Слагаемое с интегралом по интервалу $(-h, h)$ оценим с помощью оценки (8) следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{h} F(\xi)\sin{(n+1/2)\xi}\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{2}\int\limits_{-h}^{h} |\xi|^{\alpha-1}\,d\xi = L\int\limits_{0}^{h} \xi^{\alpha-1}\,d\xi = \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}.$$

Используя эту оценку и равенство (7), получаем

$$\Bigl|T_n(f;x_0)-f(x_0)\Bigr| \leqslant \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}+ \\ +\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-h} F(\xi)\sin(n+1/2)\xi\,d\xi\right|+ \\ +\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{h}^{\pi} F(\xi)\sin(n+1/2)\xi\,d\xi\right|. \quad (9)$$

Функция $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на интервалах $(-\pi,-h)$ и (h,π) для любого положительного $h < \delta$. Таким образом, к ней применима теорема Римана об осцилляции. В соответствии с этой теоремой имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-h} F(\xi)\sin{(n+1/2)\xi}\,d\xi = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{h}^{\pi} F(\xi)\sin{(n+1/2)\xi}\,d\xi = 0.$$

Используем эти равенства и перейдем к верхнему пределу в оценке (9). Тогда получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|T_n(f;x_0) - f(x_0)\right| \leqslant \frac{L}{\alpha}h^{\alpha}.$$

Переходя здесь к пределу по $h \to +0$ и учитывая, что верхний предел в левой части этого неравенства неотрицателен, заключаем, что предел последовательности частичных сумм $T_n(f;x_0)$ при $n \to +\infty$ существует и равен $f(x_0)$. $\square$

Таким образом, тригонометрические ряды Фурье пригодны для аппроксимации значений в точке функций, удовлетворяющих условию Липшица. Однако практически проверять выполнение условия $(\mathbf{LC})$ не всегда удобно. В связи с этим полезно использовать достаточно просто проверяемое условие дифференцируемости функции в точке, гарантирующее справедливость оценки $(\mathbf{LC})$.

Лемма. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$.*

Доказательство. Пусть существует производная $f'(x_0) = a$. Тогда найдется такое положительное число δ, что

$$a - 1 < \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi} < a + 1, \tag{10}$$

где $\xi \neq 0$ и $-\delta < \xi < \delta$. Полагая постоянную $L = \max\{|a-1|, |a+1|\}$, получаем из (10) следующую оценку

$$|f(x_0+\xi) - f(x_0)| \leqslant L|\xi|.$$

Это означает по определению, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1. $\square$

Обратное лемме утверждение неверно: функция $f(x) = |x|$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, но не имеет производной в нуле.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом 2π и абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi, \pi)$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке тригонометрический ряд Фурье для $f(x)$ сходится к предельному значению, равному $f(x_0)$.*

Тема : Интеграл Фурье

$\mathbf{1^0}$. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. $\mathbf{2^0}$. Интегралы Фурье абсолютно интегрируемых функций. $\mathbf{3^0}$. Локально интегрируемые функции. Интеграл в смысле главного значения. Пример. $\mathbf{4^0}$. Признак Дини сходимости интеграла Фурье. Представление функций интегралом Фурье. $\mathbf{5^0}$. Комплексная форма интеграла Фурье.

1^0. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Тогда на любом интервале $(-l, l)$ функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье по соответствующей интервалу тригонометрической системе

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right). \qquad \text{(TS)}$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \;\; a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Не вдаваясь в строгие обоснования, выяснимим, во что перейдет ряд (TS) при переходе к пределу при $l \to +\infty$.

1) Если функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, то интеграл $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx$ как функция переменной l ограничен:

$$\left|\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \qquad \forall\, l \geqslant 0.$$

Следовательно, в этом случае $a_0 = a_0(l)$ стремится к нулю при $l \to +\infty$.

Естественно предположить, что и в случае функций $f(x)$ из более общего класса нежели абсолютно интегрируемые на всей числовой прямой, предельное соотношение

$$\lim_{l \to +\infty} a_0(l) = 0$$

также имеет место.

2) Сумму слагаемых с косинусами в разло-

жении (TS) запишем в равносильном виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt\right)\cos(y_k x)\cdot\Delta y_k, \quad \text{(CS)}$$

где введены обозначения $y_k = k\pi/l$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}.$$

Предположим теперь, что существует следующий предел:

$$a(y) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos(yt)\, dt. \qquad \text{(A)}$$

Тогда при достаточно больших l можем записать приближенные равенства

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}\, dt \approx a(y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots . \qquad \text{(CS}'\text{)}$$

Подставляя их в формулу (CS), приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a(y_k)\cos(y_k x)\cdot \Delta y_k. \qquad \text{(CS}'\text{)}$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} a(y)\cos(yx)\,dy$$

по положительной полуоси.

Узлами этой интегральной суммы служат числа y_1, $\ldots$, y_k, $\ldots$, а расстояние между соседними узлами $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \pi/l$ при $l \to +\infty$ стремится к нулю.

В качестве предельного значения интегральной суммы (CS') при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} a(y) \cos(yx)\, dy,$$

если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси.

В этом случае имеем

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)\,dy.$$

3) Аналогично преобразуется сумма слагае-

мых с синусами в разложении $(\mathbf{TS})$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt\Bigr)\sin(y_k x)\cdot\Delta y_k, \quad (\mathbf{SS})$$

где, как и раньше, $y_k = k\pi/l$, $k = 1, 2, \ldots$, и

$$\Delta y_k = \frac{\pi}{l} = y_{k+1} - y_k.$$

Предполагая, что существует конечный предел

$$b(y) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin(yt)\, dt, \qquad \text{(B)}$$

записываем при достаточно больших l последовательность приближенных равенств

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}\, dt \approx b(y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Подставляя их в формулу (SS), приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \approx \sum_{k=1}^{+\infty} b(y_k)\sin(y_k x)\cdot\Delta y_k. \qquad (\mathrm{SS}')$$

Выражение в правой части этого приближенного равенства представляет собой интегральную сумму для несобственного интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy$$

по положительной полуоси.

Узлами этой интегральной суммы служат числа y_1, $\ldots$, y_k, $\ldots$, а расстояние между соседними узлами $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \pi/l$ стремится к нулю при $l \to +\infty$.

В качестве предельного значения интегральной суммы (SS') при $l \to +\infty$ естественно рассматривать несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy,$$

если, конечно, существуют как сам предел так и несобственный интеграл по полуоси.

В этом случае имеем

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dy.$$

В результате проведенных нами неформальных рассуждений приходим к заключению, что сумма тригонометрического ряда в пределе при $l \to +\infty$ переходит в интеграл вида

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \big(a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)\big)\,dy,$$

где функции $a(y)$ и $b(y)$ определяются равенствами (A) и (B).

В частности, $a(y)$ и $b(y)$ зависят от исходной функции $f(x)$. Для того чтобы эту зависимость подчеркнуть, иногда пишут $a = a_f(y)$ и $b = b_f(y)$.

Определение. *Несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \big(a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx)\big)\,dy, \tag{AB}$$

если только он существует, называется интегралом Фурье для исходной функции $f(x)$.

Выясним, для каких именно функций $f(x)$ интеграл Фурье (AB) существует.

$\mathbf{2^0}$. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty.$$

Тогда соответствующие ей пределы $(\mathbf{A})$ и $(\mathbf{B})$ заведомо существуют и обозначаются следующим образом:

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad (\mathrm{A}')$$

$$b(f;y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt. \qquad (\mathrm{B}')$$

При этом функции $a(f;y)$ и $b(f;y)$ определены на всей числовой прямой и ограничены на своей области определения:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |a(f;y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt,$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |b(f;y)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Более того для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ интегралы $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны по переменной y и, как следует из теоремы Римана об осцилляции, удовлетворяют следующим предельным соотношениям на бесконечности:

$$\lim_{y\to\pm\infty} a(f;y) = 0, \qquad \lim_{y\to\pm\infty} b(f;y) = 0.$$

Если же функция $f(x)$ не является абсолютно интегрируемой, то сделанные утверждения о свойствах функций $a(f;y)$ и $b(f;y)$, вообще говоря, неверны.