Тема : Преобразование Фурье

$\mathbf{1^0}$. Образы и прообразы Фурье. $\mathbf{2^0}$. Свойства преобразования Фурье. $\mathbf{3^0}$. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Примеры. $\mathbf{4^0}$. Образ Фурье производной и производная образа Фурье. Следствия. $\mathbf{5^0}$. Пространство $\boldsymbol{S}$ быстроубывающих функций. Равенство Парсеваля.

3^0. Сосчитаем преобразования Фурье от двух модельных функций.

Пример. *Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции* $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Решение. Из определения имеем

$$F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos yx \, dx,$$

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin yx \, dx.$$

Применяя к интегралу $F_c[f]$ формулу интегрирования по частям, получаем равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos yx \, dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} \cos yx \Big|_{x=0}^{x=+\infty} -$$

$$-y\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin yx \, dx.$$

Это же равенство записывается в следующем виде:

$$\boldsymbol{F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_S[f]}.$$

Применив формулу интегрирования по частям к интегралу $\boldsymbol{F_S[f]}$, получим следующее равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin yx\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\sin yx\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \\ + y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos yx\,dx.$$

В операторных обозначениях это соотношение принимает вид

$$F_s[f] = yF_c[f].$$

Подставляя это равенство в уже полученное соотношение $F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_s[f]$, находим

$$F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - yF_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - y^2 F_c[f].$$

Следовательно, искомые преобразования имеют вид

$$F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}, \qquad F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{1+y^2}. \qquad \square$$

Пример. *Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$, где x изменяется вдоль всей числовой оси.*

Решение. Функция $f(x)$ четная и, следовательно,

$$F[f] = F_C[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos yx \, dx.$$

Обозначив интеграл в правой части через $g(y)$, продифференцируем его по переменной y. Тогда получим

$$g'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin yx\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}}) \sin yx\, dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, приходим к соотношению

$$g'(y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin yx \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos yx\, dx,$$

или, что эквивалентно: $g'(y) = -yg(y)$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $g(y)$.

Для того чтобы найти функцию $g(y)$, т.е решить полученное уравнение, перепишем его в следующем виде:

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = -y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}(\ln g(y)) = -\frac{d}{dy}(\frac{y^2}{2}).$$

Перенося все слагаемые в левую часть, получаем

$$\frac{d}{dy}\left[\ln g(y) + \frac{y^2}{2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln g(y) + \frac{y^2}{2} = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Выражая отсюда функцию $g(y)$, получаем формулу общего решения рассматриваемого дифференциального уравнения:

$$g(y) = C_1 e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Постоянную C_1 в этом равенстве находим из условия

$$C_1 = g(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, искомый образ Фурье задается равенством

$$\widehat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}. \qquad \square$$

Пользуясь последним равенством и свойством ($\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}$) преобразования Фурье, для любой положительной постоянной α получаем следующие соотношения

$$F[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\alpha})^2},$$

$$F^{-1}[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\alpha})^2}.$$

4^0. Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также имеет здесь же кусочно непрерывную первую производную $f'(x)$, которая абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда имеют место следующие предельные соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0. \qquad (\mathbf{F}_\pm)$$

Оба эти равенства получаются с помощью предельного перехода по переменной $x \to \pm\infty$ в представлении

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt, \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Возможность такого предельного перехода вытекает из условия абсолютной интегрируемости кусочно непрерывной производной

$f'(x)$ на всей числовой прямой:

$$|\int\limits_a^x f'(t)\,dt| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,dt < +\infty.$$

Равенство же предельных значений $f(x)$ на бесконечности нулю получается из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Теорема (образ Фурье производной). *Пусть вещественная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой прямой, а также имеет здесь же кусочно непрерывную первую производную $f'(x)$, которая абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.*

Тогда для образа и прообраза Фурье производной f' справедливы формулы

$$F[f'] = i\xi \widehat{f}(\xi) \quad \text{и} \quad F^{-1}[f'] = -i\xi \widetilde{f}(\xi).$$

Доказательство. Используя определение образа Фурье и формулу интегрирования по частям, получаем равенство

$$\boldsymbol{F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x}\, dx =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} -}$$

$$\boldsymbol{- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx.}$$

Из формул ($\mathbf{F}_{\pm}$) следует, что

$$f(x)e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[f(x)e^{-i\xi x}] - \lim_{x\to-\infty}[f(x)e^{-i\xi x}] = 0.$$

Таким образом, формула для $F[f']$ упрощается и принимает вид

$$F[f'] = i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = i\xi F[f].$$

Формула для прообраза $F^{-1}[f']$ выводится аналогично. $\square$

Следствие. *Пусть функции* f, f', $\dots$, $f^{(n)}$ *непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой прямой. Тогда для* $k = 1, \dots, n$ *справедливы представления*

$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k F[f] \quad \text{и} \quad F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k F^{-1}[f].$$

Докажите это следствие самостоятельно индукцией по k.

В частности, для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям предыдущего следствия, справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty.$$

Если при этом функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, то ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени переменной ξ.

Теорема (производная образа Фурье). *Пусть вещественные функции* $f(x)$ *и* $xf(x)$ *абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция* $\widehat{f}(\xi)$ *всюду непрерывно дифференцируема и при этом справедлива формула*

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = -iF[xf(x)].$$

Отметим, что образ Фурье $F[xf(x)]$ существует в силу абсолютной интегрируемости на всей числовой прямой функции $xf(x)$. При этом равенство для производной образа Фурье $\widehat{f}(\xi)$ получается дифференцированием по переменной ξ обеих частей формулы

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Следствие. *Пусть функции* $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ *абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда функция* $\widehat{f}(\xi)$ *имеет на всей числовой прямой непрерывные производные до порядка* n *включительно и при этом справедливы формулы*

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = (-i)^k F[x^k f(x)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите это следствие самостоятельно индукцией по k.

5^0. Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и при этом как она сама так и ее производные любого порядка стремятся к нулю быстрее любой степени $1/x$, т.е. для любого $k = 0, 1, \dots$ и при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы асимптотические равенства

$$f^{(k)}(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty.$$

Множество всех функций $f(x)$, обладающих указанными свойствами, принято обозначать как S.

Множество S, снабженное естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число, является линейным пространством. Размерность этого пространства бесконечна.

Любая функция $f(x)$ из S абсолютно интегрируема на всей числовой прямой и поэтому для нее определен образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$. Оказывается, что этот образ Фурье также принадлежит пространству S.

Теорема (образ Фурье пространства S). *Для любой функции $f(x)$ из S ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ также принадлежит S.*

Верно и обратное утверждение: для любой функции $\widehat{f}(\xi)$ из S существует функция $f(x)$ из S, образ Фурье которой совпадает с $\widehat{f}(\xi)$.

Таким образом, оператор Фурье F отображает пространство S на себя. Аналогичное утверждение справедливо и для обратного преобразования Фурье.

Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из S произведение $f(x)\bar{g}(x)$, где $\bar{g}(x)$ обозначает комплексносопряженную функцию, также принадлежит пространству S.

В частности, это произведение абсолютно интегрируемо на всей числовой прямой и по этой причине определен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)\,dx = (f,g).$$

Задаваемая этим равенством операция (f, g) называется скалярным произведением в пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R})$.

Заметим теперь, что образы Фурье $\widehat{f}(\xi)$ и $\widehat{g}(\xi)$ являются элементами пространства S и по этой причине определено их скалярное произведение $(\widehat{f}, \widehat{g})$.

Оказывается, что это скалярное произведение образов Фурье совпадает со скалярным произведением (f, g) исходных функций.

Докажем это. Имеем по определению

$$\bar{\widehat{g}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x) e^{i\xi x}\, dx = \widetilde{\bar{g}}(\xi).$$

Учитывая это, а также пользуясь равенством

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

и определением скалярного произведения в L_2, получаем далее

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \right) \overline{\widetilde{g}}(\xi)\, d\xi.$$

В интеграле справа поменяем порядок интегрирования, что возможно в силу принад-лежности функций f и $\widetilde{\overline{g}}$ пространству S:

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\overline{g}}(\xi) e^{-i\xi x}\, d\xi \Big)\, dx.$$

Под интегралом в круглых скобках стоит образ Фурье функции $\widetilde{\overline{g}}(\xi) = \overline{\widehat{g}}(\xi)$, который в силу формулы обращения совпадает с $\bar{g}(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\bar{g}}(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{\widehat{g}}(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi=\bar{g}(x).$$

Подставляя это равенство в найденное выше представление скалярного произведения $(\widehat{f},\widehat{g})$, получаем равенство

$$(\widehat{f},\widehat{g})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar{g}(x)\,dx=(f,g)\qquad\forall\,f,g\in S.$$

Эта формула, называемая *равенством Парсеваля*, справедлива для сомножителей f и g из гораздо более широкого класса нежели пространство S.

Точнее, равенство Парсеваля имеет место для любых двух функций из пространства L_2, т.е. таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx < +\infty.$$

Обоснование этого факта гораздо более трудоемкое занятие нежели вывод равенства Парсеваля для элементов из S.

Тема : Теорема Котельникова

$\mathbf{1^0}$. Аналоговые сигналы, отсчеты, дискретизация и интерполяция сигнала. Потеря информации. $\mathbf{2^0}$. Пространства $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Преобразование Фурье и равенство Планшереля. Функции ограниченного спектра. Ширина спектра. $\mathbf{3^0}$. Теорема Котельникова для функций из $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$. Ряд Котельникова. Период и частота дискретизации. $\mathbf{4^0}$. Неулучшаемость условия на период $\boldsymbol{T}$ отсчетов: пример.

1^0. Математически заданный аналоговый сигнал принято отождествлять с некоторой непрерывной функцией $x = x(t)$ вещественной переменной t. Переменная t при этом представляет собой время, измеряемое в процессе распространения исходного сигнала. Удобно предполагать, что функция $x(t)$ изначально задана на всей числовой оси, причем во время, когда сигнал отсутствует, эта функция равна нулю.

Пусть измерение распространяющегося аналогового сигнала происходит в равноотстоящие моменты времени

$$t_k = k \cdot \Delta t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \qquad \Delta t > 0.$$

В результате получается некоторая новая числовая последовательность $\{x(t_k)\}$, элементы которой принято называть *отсчетами*.

Замена функции $x(t)$ последовательностью ее отсчетов называется *дискретизацией сигнала*.

Процесс восстановления непрерывного сигнала $x = x(t)$ по известной последовательности его отсчетов $\{x(t_k)\}$ называется *интерполяцией*.

Имеется много возможностей интерполировать сигнал по известной системе отсчетов, т.е. множество правил вида

$$\{x(t_k) \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \rightarrowtail x_* = x_*(t) \in C(\mathbb{R}).$$

Восстановленная по такого рода правилу функция $x_*(t)$ в общем случае с исходной функцией $x(t)$ не совпадает. Таким образом, возникает разница между $x(t)$ и $x_*(t)$, о которой принято говорить как о *потере информации*, или же о погрешности интерполяции.

В связи с процессом “сигнал–дискретизация–интерполяция–новый сигнал” приходится решать вопрос о выборе таких шага дискретизации Δt и последующего способа интерполяции, при котором потеря информации оказывается наименьшей.

Вариант согласованных между собой дискретизации и интерполяции, при которых для достаточно широкого класса сигналов потери информации вообще не происходит, дает теорема Котельникова.

2^0. Теорема Котельникова, известная также как теорема отсчетов, или теорема Котельникова — Найквиста, дает достаточные условия, при выполнении которых потери информации в результате дискретизации сигнала и последующей его специальной интерполяции, вообще не происходит.

Определение. *Абсолютно интегрируемые на числовой прямой функции образуют в совокупности линейное пространство, обозначаемое как* $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$.

Функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$.

Если $f(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, то ее L_1-*норма* определяется равенством

$$\|f\|_{L_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt.$$

Эта же норма обозначается также несколько иным символом $\|f \mid L_1\|$.

Определение. *Пусть функция* $f(t)$ *интегрируема с квадратом на числовой прямой, т.е*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt < +\infty.$$

Тогда говорят, что $f(t)$ *принадлежит пространству* $L_2(\mathbb{R})$.

Любая финитная кусочно непрерывная функция принадлежит как $L_1(\mathbb{R})$ так и $L_2(\mathbb{R})$.

Если $f(t)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, то ее L_2-*норма* определяется равенством

$$\|f\|_{L_2} = \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \Big)^{1/2}.$$

Для этой же нормы используется обозначение $\|f \mid L_2\|$.

Для любой функции $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$ определено ее преобразование Фурье

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\xi t}\, dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

При этом $F(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и имеет место *формула Планшереля* (*равенство Парсеваля*):

$$\|f(t)\|_{L_2}^2 = \|\widehat{f}(\xi)\|_{L_2}^2 = \|F(\xi)\|_{L_2}^2.$$

Функция $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$ связана со своим преобразованием Фурье такой же формулой обращения, как и в случае абсолютно интегрируемых функций:

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi.$$

Для любой функции $f(t)$ из $L_1(\mathbb{R})$ соответствующее ей преобразование Фурье существует и при этом справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\xi t}\,dt\Big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \|f\|_{L_1}.$$

Множество преобразований Фурье всевозможных функций из $L_1(\mathbb{R})$ условимся обозначать как $A = A(\mathbb{R})$.

Определение. *Если преобразование Фурье функции $f(t)$ из $L_1(\mathbb{R})$ или $L_2(\mathbb{R})$ обращается в нуль вне некоторого промежутка, то есть удовлетворяет условию*

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{для} \quad \forall\, \xi : |\xi| > \omega, \tag{B}$$

то говорят, что функция $f(t)$ имеет ограниченный спектр. При этом наименьшее положительное число ω со свойством (B) называется шириной спектра.

Функции с ограниченным спектром существуют, как показывает следующий ниже пример.

Пусть $T > 0$, $\omega > 0$ и при этом $2T\omega > 1$. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Эта функция всюду непрерывна, причем

$$f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})} = 1.$$

Кроме того $f(t)$ принадлежит линейному пространству $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}\Big)^2 dt =$$

$$= \frac{T}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi < +\infty.$$

Преобразование Фурье рассматриваемой функции $f(t)$ находится в явном виде:

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \begin{cases} T \quad \text{при} \quad |\xi| \leqslant \frac{1}{2T}, \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad |\xi| > \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Таким образом, функция $f(t)$ имеет ограниченный спектр, причем, в силу предположения, что $2T\omega > 1$, ширина $\frac{1}{2T}$ этого спектра строго меньше ω:

$$|\xi| \geqslant \omega > \frac{1}{2T} \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(\xi) = 0.$$

3^0. Основной результат о функциях с ограниченной шириной спектра формулируется следующим образом: сигнал $f(t)$ с ограниченной шириной спектра ω полностью определяется своими значениями, отсчитанными через равные интервалы времени $T = \frac{1}{2\omega}$.

Отметим, что таких значений сигнала бесконечно много и в совокупности они образуют бесконечную в обе стороны последовательность вида $\{f(nT) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Теорема (Котельникова). *Пусть функция* $f(t)$ *принадлежит пересечению* $L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$, *или же пространству* $L_2(\mathbb{R})$, *причем образ Фурье* $\widehat{f}(\xi)$ *обращается в нуль вне отрезка* $[-\omega, +\omega]$ *числовой оси, т.е.* $f(t)$ *имеет конечную ширину* ну спектра. Тогда для любого положительного T, удовлетворяющего условию

$$0 < 2T\omega \leqslant 1, \tag{T}$$

справедливо равенство

$$f(t) = 2T\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\frac{\sin 2\pi\omega(t-nT)}{2\pi\omega(t-nT)}. \tag{NK}$$

Ряд в правой части формулы (NK) сходится *поточечно, если* $\boldsymbol{f(t)}$ *принадлежит пересечению* $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{A}(\mathbb{R})$.

Если же $\boldsymbol{f(t)}$ *принадлежит пространству* $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$, *то ряд* $(\mathbf{NK})$ *сходится по норме* $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть сначала функция $\boldsymbol{f(t)}$ принадлежит $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{A}(\mathbb{R})$. Определим вспомогательную функцию

$$G(\xi) = \begin{cases} F(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{при} \quad |\xi| < \omega, \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad \omega \leqslant |\xi| \leqslant \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Это определение корректно в силу соотношений $0 < 2T\omega \leqslant 1$, справедливых по условию теоремы.

Отметим, что так определенная функция $G(\xi)$ на отрезке $-\frac{1}{2T} \leqslant \xi \leqslant +\frac{1}{2T}$ непрерывна.

Продолжим функцию $G(\xi)$ на всю числовую прямую периодически с периодом $\frac{1}{T}$. Получившуюся в результате продолжения функцию разложим в соответствующий периоду $\frac{1}{T}$ комплексный ряд Фурье:

$$G(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n\xi T}.$$

Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$c_n = T \int\limits_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} G(\xi) e^{-i2\pi n\xi T}\, d\xi =$$

$$= T \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi n\xi T}\, d\xi,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Применяя к сигналу $f(t)$ формулу обращения и учитывая, что $\widehat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi| > \omega$, имеем далее

$$f(t) = \int_{-\omega}^{+\omega} \widehat{f}(\xi) e^{-i2\pi\xi t} \, d\xi = \int_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi t} \, d\xi. \quad (1)$$

Полагая здесь $t = nT$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получаем последовательность равенств

$$f(nT) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi nT}\, d\xi = \frac{c_n}{T}. \qquad (2)$$

Подставив в равенство (1) полученное выше разложение функции $G(\xi)$ в ряд Фурье, поменяем затем операции интегрирования и суммирования местами.

Тогда придем к соотношениям

$$f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n\xi T} \Big) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\omega}^{+\omega} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i2\pi(t-nT)\xi} \Big)\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi}\, d\xi. \tag{3}$$

Возможность интегрировать здесь ряд Фурье почленно обеспечивается тем условием, что $f(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Интеграл в правой части равенства (3) считается по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi}\, d\xi = \frac{\sin[2\pi(t-nT)\omega]}{\pi(t-nT)}.$$

Подставляя это представление в формулу (3), получаем далее

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{\sin[2\pi(t - nT)\omega]}{\pi(t - nT)}.$$

Но согласно равенству (2) $c_n = Tf(nT)$. Следовательно, имеем

$$f(t) = 2\omega T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin[2\pi\omega(t - nT)]}{2\pi\omega(t - nT)},$$

т.е. искомое равенство $(\mathbf{NK})$.

Если $f(t)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$, то доказательство равенства $(\mathbf{NK})$ существенно усложняется.

Пусть $f(t)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Тогда равенство $(\mathbf{NK})$ следует понимать как совпадение принадлежащей пространству $L_2(\mathbb{R})$ функции

$$g(t) = 2\omega T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin[2\pi\omega(t - nT)]}{2\pi\omega(t - nT)}$$

в его правой части с другим элементом $f(t)$ из этого же постранства, т.е. как следующее интегральное соотношение:

$$\|f - g\|_{L_2} = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

Отметим, что если $f(t)$ и $g(t)$ равны поточечно, то и как элементы $L_2(\mathbb{R})$ они совпадают. Обратное же, вообще говоря, неверно.

Имея целью установить соотношение $(\mathbf{E})$ для заданной функции $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$, как и в предыдущем случае, введем ее вспомогательный образ

$$G(\xi) = \begin{cases} F(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{при} \quad |\xi| < \omega, \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad \omega \leqslant |\xi| \leqslant \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Эти соотношения корректны в силу справедливых по условию теоремы соотношений $0 < 2T\omega \leqslant 1$.

Заданную на отрезке $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ функцию $G(\xi)$ продолжим периодически с периодом $\frac{1}{T}$ на всю ось. Получившуюся в результате этого продолжения периодическую функцию разложим в ряд Фурье с периодом $\frac{1}{T}$.

Частичная сумма $S_N(\xi)$ ряда Фурье для $G(\xi)$ имеет следующее представление:

$$S_N(\xi) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i2\pi n\xi T}, \quad \text{где} \quad c_n = Tf(nT).$$

Для исходной функции $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$, как и ранее, справедливо интегральное разложение

$$f(t) = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} \widehat{f}(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi = \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi.$$

Следовательно, справедлива формула

$$\| f(t) - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi \|_{L_2} =$$

$$= \| \int\limits_{-\omega}^{+\omega} G(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi \|_{L_2} =$$

$$= \| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_\omega(\xi) [G(\xi) - S_N(\xi)] e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi \|_{L_2}.$$

Здесь $\chi_\omega(\xi)$ — это единичный импульс, определяемый соотношениями

$$\chi_\omega(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\xi| \leqslant \omega, \\ 0 & \text{при} \quad |\xi| > \omega. \end{cases}$$

Применяя к получившейся норме формулу Планшереля (равенство Парсеваля), получаем сдедующее соотношение:

$$\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi \,\|_{L_2} =$$

$$= \|\chi_\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]\|_{L_2}.$$

Из-за обращения в нуль импульса $\chi_\omega(\xi)$ при

$|\xi| > \omega$, имеем далее

$$\|\chi\omega(\xi)[G(\xi) - S_N(\xi)]\|_{L_2} = \|G(\xi) - S_N(\xi)\|_{L_2[-\omega,\omega]}.$$

Для полученной в итоге нормы в силу условия $0 < 2T\omega \leqslant 1$ выполнена оценка

$$\|G(\xi) - S_N(\xi)\|_{L_2[-\omega,\omega]} \leqslant \|G(\xi) - S_N(\xi)\|_{L_2[-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}]}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|f(t) - \int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi\|_{L_2} \leqslant$$

$$\leqslant \|G(\xi) - S_N(\xi)\|_{L_2[-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}]}.$$

Переходя здесь к пределу при $N \to +\infty$ и учитывая, что $S_N(\xi)$ — это частичная сумма ряда Фурье

$$G(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n\xi T},$$

получаем предельное равенство

$$\lim_{N\to+\infty} \|f(t) - \int_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi\|_{L_2} = 0.$$

Покажем, что это соотношение и есть искомая формула (NK).

Имеем в соответствии с определением частичной суммы:

$$\int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=-N}^{+N} c_n \int\limits_{-\omega}^{+\omega} e^{-i2\pi(t-nT)\xi}\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=-N}^{+N} c_n \frac{\sin[2\pi(t-nT)\omega]}{\pi(t-nT)}.$$

Подставляя сюда равенство

$$c_n = Tf(nT),$$

видим, что интеграл

$$\int\limits_{-\omega}^{+\omega} S_N(\xi) e^{-i2\pi\xi t}\, d\xi$$

представляет собой частичную сумму ряда в правой части формулы (NK). $\square$

Определение. *Ряд в правой части формулы* (NK) *называют рядом Котельникова. Параметр* T *в этом разложении называют периодом дискретизации.*

Величина 2ω *называется частотой Найквиста, или частотой дискретизации.*

Параметры в разложении функции в ряд Котельникова имеют определенный физический смысл:

2ω — это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не допустить потерю информации;

$T = \frac{1}{2\omega}$ — это максимальный период дискретизации, т.е. максимально допустимый промежуток времени между импульсами, при котором информация о сигнале не теряется.

4^0. Отметим, что условие $0 < 2T\omega \leqslant 1$ в теореме Котельникова существенно. Как показывает следующий пример, отказаться от этого условия нельзя.

Пусть $T > 0$, $\omega > 0$ и при этом $2T\omega > 1$. Непрерывная функция

$$f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

как уже отмечалось ранее, принадлежит линейному пространству $L_2(\mathbb{R})$.

Более того, функция $f(t)$ имеет ограниченный спектр, причем, в силу предположения, что $2T\omega > 1$, ширина $\frac{1}{2T}$ этого спектра строго меньше ω:

$$|\xi| \geqslant \omega > \frac{1}{2T} \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Далее имеем следующие равенства:

$$f(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq 0, \\ 1 & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, правая часть $g(t)$ формулы (**NK**) принимает следующий вид

$$2T\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin 2\pi\omega(t - nT)}{2\pi\omega(t - nT)} =$$

$$= 2T\omega \frac{\sin 2\pi\omega t}{2\pi\omega t} = g(t).$$

При этом непрерывные функции $f(t)$ и $g(t)$ в некоторой окрестности нуля отличаются друг от друга:

$$g(0) = 2T\omega > 1 = f(0).$$

Следовательно, $\|f - g\|_{L_2} > 0$ и для рассматриваемой функции $f(t)$ равенство $(\mathbf{NK})$ не выполняется ни поточечно, ни в смысле равенства элементов $L_2(\mathbb{R})$.