Аналоговая электроника и техника измерений.

Основы общей теории фильтров.

Активные фильтры.

Оптимальная и согласованная фильтрация.

Электрические фильтры

Электрический фильтр – это четырехполюсник, устанавливаемый между источником энергии или информационного сигнала и приемником (нагрузкой), предназначенный для беспрепятственного, или с малым затуханием, пропускания токов или сигналов одних частот и задержки или пропускания с большим затуханием токов или сигналов других частот.

- - фильтр нижних частот, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_{\mathrm{C}}$,
- - фильтр верхних частот, полоса пропускания $\omega_{\mathrm{C}} \leq \omega \leq \infty$,
- - полосовой фильтр, полоса пропускания $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, где $\omega_1 < \omega_2$,
- - режекторный фильтр, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$, где $\omega_1 < \omega_2$.

Частоты, ограничивающие область прозрачности называются **частотами среза**.

Электрические фильтры

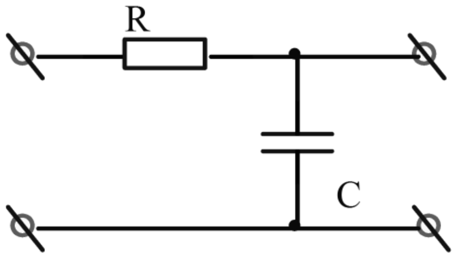
Пассивные фильтры – в полосе пропускания имеют коэффициент передачи не более 1. Пассивные фильтры построены на базе пассивных компонентов (R, L и C).

Активные фильтры – в полосе пропускания могут иметь коэффициент передачи более 1. Активные фильтры строятся на базе усилительных устройств (транзисторы и ОУ).

Передаточная функция реализуемых фильтров имеет *дробно-рациональный вид*.

Порядок фильтра – степень полинома в знаменателе передаточной функции. Порядок фильтра определяет наклон характеристики в области задерживания.

Пассивный фильтр первого порядка



Проведем рассмотрение на примерах ФНЧ.

Передаточная функция для RC фильтра:

$$W(s) = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{{}^{1}/_{RC}}{s + {}^{1}/_{RC}} = \frac{\omega_p}{s + \omega_p}, \qquad \omega_p = \frac{1}{RC}$$

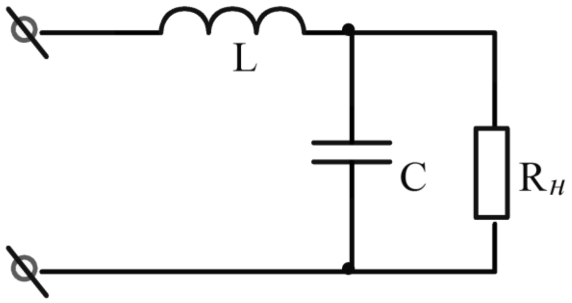
При больших значениях переменной s, соотношение определит наклон АЧХ в области задерживания в 20дБ/декаду. Если такого наклона не достаточно, для улучшения качества фильтрации, можно установить несколько RC фильтров последовательно:

$$W(s) = \frac{\prod \omega_{pi}}{\prod (s + \omega_{pi})}$$

Для этого фильтра полюса вещественные.

Пассивный фильтр второго порядка

Передаточная функция LC фильтра нижних частот:



$$W(s)=\frac{\dfrac{R_{\text{н}}}{1+sR_{\text{н}}C}}{sL+\dfrac{R_{\text{н}}}{1+sR_{\text{н}}C}}=\frac{{}^{1}/_{LC}}{s^2+s\dfrac{\sqrt{L/C}}{R_{\text{н}}\sqrt{LC}}+{}^{1}/_{LC}}=\frac{{\omega_0}^2}{s^2+s\dfrac{\omega_0}{Q_f}+{\omega_0}^2}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\qquad \frac{\sqrt{L/C}}{R_{\text{н}}}=\frac{\rho}{R_{\text{н}}}=\frac{\rho}{{\rho^2}/{r_{\text{э}}}}=\frac{r_{\text{э}}}{\rho}=\frac{1}{Q_f},\qquad s_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q_f}\pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4{Q_f}^2}}$$

ω_0 - частота, а Q_f - добротность сопряженной пары полюсов. Полюса этого фильтра являются комплексно-сопряженными при $Q_f > 0{,}5$. Наклон частотной характеристики для этого фильтра соответственно 40 дБ/декаду.

Фильтры высоких порядков.

Учтем, что полюса передаточной функции могут быть комплексными, а в этом случае удобнее использовать в разложении множители второго порядка. Тогда для ФНЧ:

$$W(s) = \frac{1}{\prod_i (1 + a_i s + b_i s^2)}$$

a_i и b_i положительные коэффициенты, их величины определяются критериями формирования АЧХ и ФЧХ. **Порядок фильтра определяется порядком полинома в знаменателе передаточной функции.** Если порядок фильтра нечетный, то $b_1 = 0$.

Добротность пары полюсов определяется соотношением $Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i}$, а частота среза $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{b_i}}$.

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. ФВЧ.

Для перехода к ФВЧ следует произвести замену в выражении для передаточной функции $\frac{s}{\omega_p} \rightarrow \frac{\omega_p}{s}$. Тогда общий вид передаточной функции для ФВЧ:

$$W(s) = \frac{1}{\prod_i (1 + \frac{a_i}{s} + \frac{b_i}{s^2})}$$

Для фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q_f} + {\omega_p}^2}$$

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. ПФ.

Для перехода к ПФ $\frac{s}{\omega_p} \to \frac{s^2+\omega_p^2}{s\cdot\Delta\omega_p}$, здесь $\Delta\omega_p = \omega_{\text{верх}} - \omega_{\text{нижн}}$ и $\omega_p = \sqrt{\omega_{\text{верх}}\omega_{\text{нижн}}}$. При таком преобразовании порядок удваивается.

Для полосового фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s\,\frac{\omega_p}{Q_f}}{s^2 + s\,\frac{\omega_p}{Q_f} + {\omega_p}^2}$$

Переход от ФНЧ к другим типам фильтров. РФ.

Для перехода к РФ (полосно-подавляющему фильтру) $\frac{s}{\omega_p} \rightarrow \frac{s \cdot \Delta\omega_p}{s^2 + \omega_p^2}$, здесь $\Delta\omega_p = \omega_{\text{верх}} - \omega_{\text{нижн}}$ и $\omega_p = \sqrt{\omega_{\text{верх}} \omega_{\text{нижн}}}$. Порядок фильтра также удваивается.

Для режекторного фильтра второго порядка:

$$W(s) = \frac{s^2 + {\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + {\omega_p}^2}$$

Универсальный фильтр.

Из выше изложенного видно, что можно построить универсальный фильтр, передаточная функция которого, в общем виде, будет выглядеть как:

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i s + b_i s^2)}{\prod_{i=1}^{m}(1 + a_i s + b_i s^2)}$$

При этом $n \leq m$.

Фильтры также можно делать перестраиваемыми, если есть возможность менять номиналы элементов.

Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя основаны на полиномах Баттерворта, Чебышева и Бесселя соответственно. Общий вид передаточной функции для этих фильтров соответствует полученной ранее (будем рассматривать фильтры также на примере ФНЧ):

$$W(s) = \frac{K}{Q(s)}$$

Где $Q(s)$ – полином требуемого типа. **Степень этого полинома определяет порядок фильтра**. Коэффициенты полинома для каждого типа фильтров различаются, из-за чего эти фильтры различаются по наклону и поведению АЧХ в полосах пропускания и задерживания. Фильтр Баттерворта отличается максимальной гладкостью характеристики в полосе пропускания, фильтр Чебышева крутизной спада характеристики на частоте среза, а фильтр Бесселя одинаковым фазовым сдвигом в полосе пропускания.

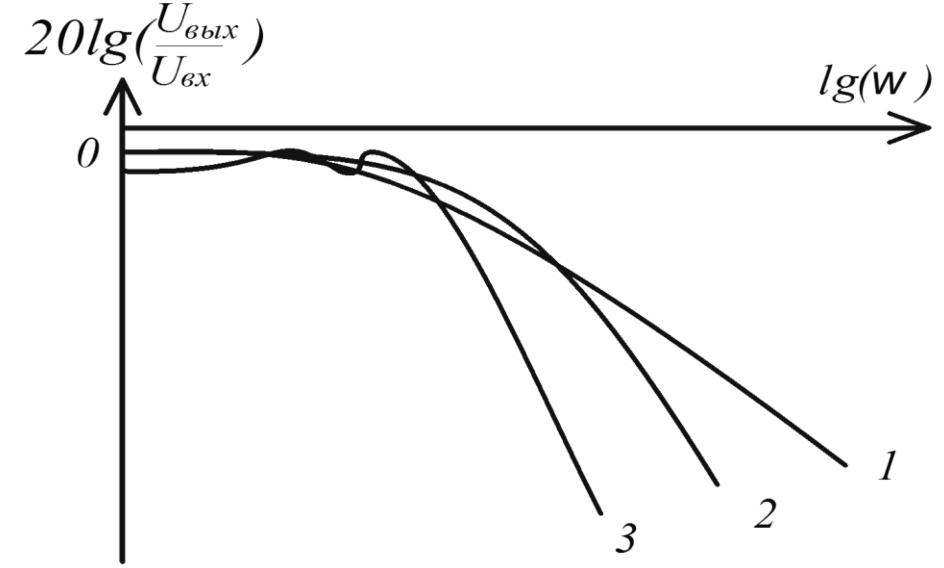
Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

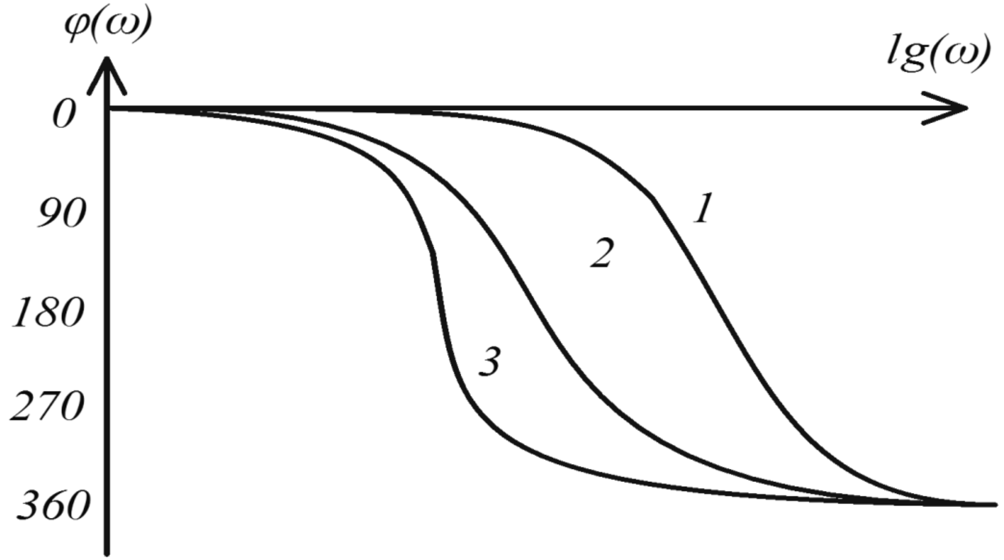
АЧХ, ФЧХ фильтров четвертого порядка.

1 - фильтр Бесселя,

2 - фильтр Баттерворта,

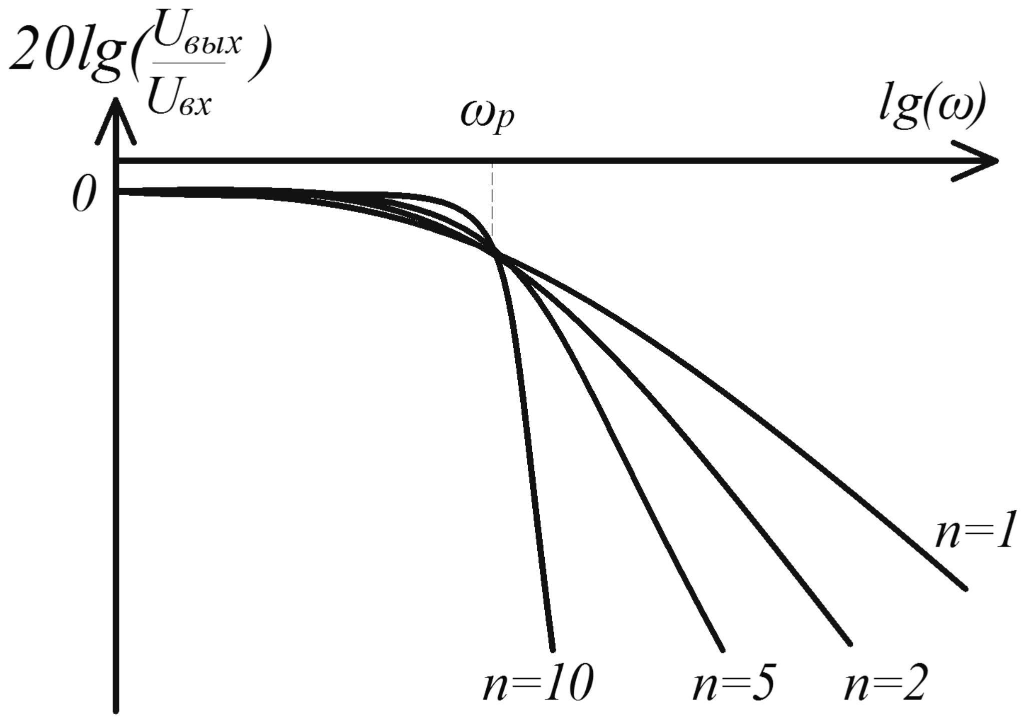
3 - фильтр Чебышева.





Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

АЧХ фильтра Баттерворта в зависимости от порядка



Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя

Передаточную характеристика фильтра определяют по таблице. Функции даны в нормированном виде. Для перехода в последствии к реальным значениям потребуются операции преобразования частот и масштабирования. Пересчет частоты осуществляется с помощью замены $s = \frac{s}{\omega_p}$, где ω_p - частота среза.

Нормированные передаточные характеристики для фильтров			
Баттерворта	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(s^2+s\sqrt{2}+1)}$	$\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$
Чебышева(1)	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{0{,}5}{(s^2+s\sqrt{2}+1)}$	$\frac{0{,}25}{(s+0{,}298)(s^2+0{,}298s+0{,}839)}$
Бесселя	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(\frac{1}{3}s^2+s+1)}$	$\frac{15}{(s+2{,}322)(s^2+3{,}678s+6{,}459)}$

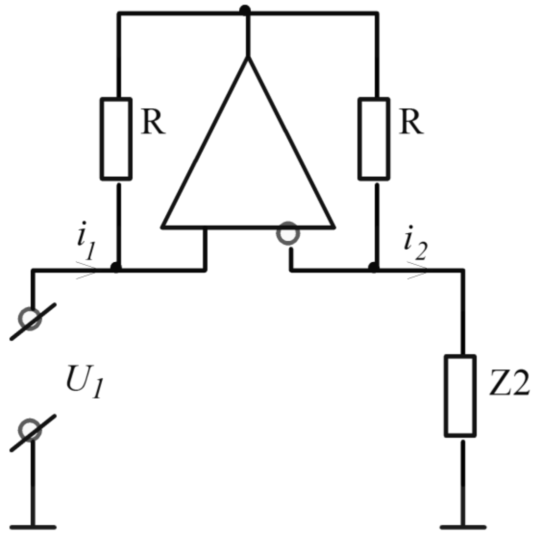
(1) Для этого типа фильтра Чебышева пульсации в полосе пропускания 3дБ

Построение фильтров на базе ОУ

Прежде чем изучать схемы фильтров, рассмотрим работу преобразователя сопротивления и гиратора. Эти устройства позволяют понять возможности построения высоко добротных фильтров без использования индуктивных элементов цепи.

Преобразователь отрицательного сопротивления

$$i_1 = -i_2$$



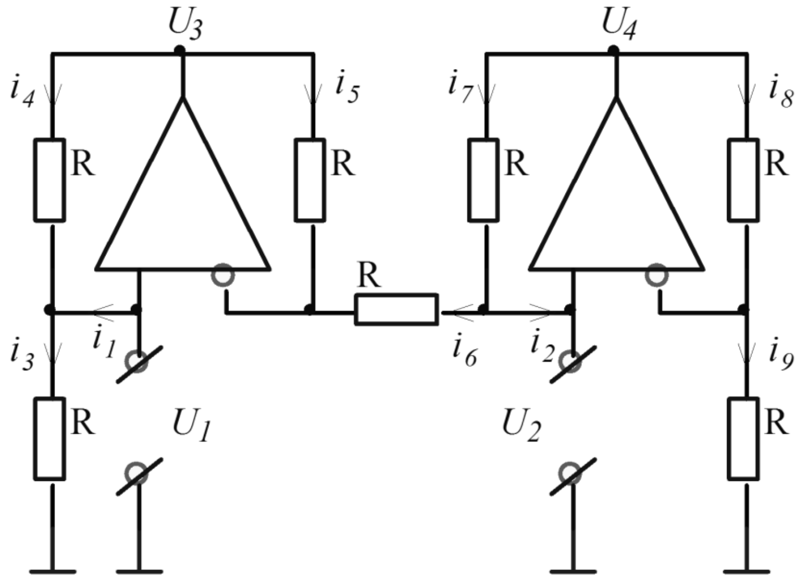
Напряжения на входах ОУ равны, тогда:

$$\frac{U_1}{i_1} = -Z_2$$

Цепь будет устойчива если внутреннее сопротивление внешней части будет меньше чем Z_2.

Гиратор

Схема преобразования полного сопротивления. Используя первое правило Кирхгофа, запишем для узловых точек схемы:



$$i_4 - i_3 + i_1 = \frac{U_3 - U_1}{R} - \frac{U_1}{R} + i_1 = 0$$

$$i_5 + i_6 = \frac{U_3 - U_1}{R} + \frac{U_2 - U_1}{R} = 0$$

$$i_7 - i_6 - i_2 = \frac{U_4 - U_2}{R} - \frac{U_2 - U_1}{R} - i_2 = 0$$

$$i_8 - i_9 = \frac{U_4 - U_2}{R} - \frac{U_2}{R} = 0$$

Исключив из уравнений U_3 и U_4, получим $\frac{U_2}{R} = i_1$, $\frac{U_1}{R} = i_2$, следовательно если подключить к клеммам U_1 сопротивление Z_1, то для выхода $Z_2 = \frac{U_2}{i_2} = \frac{i_1 R^2}{U_1} = \frac{R^2}{Z_1}$.

Пусть $Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$ тогда $Z_2 = j\omega C R^2 = j\omega L_э$.

Активные фильтры

Активными фильтрами называются фильтры построенные на основе операционных усилителей. Активные фильтры могут иметь в полосе пропускания коэффициент передачи больше 1.

ω_p – частота среза фильтра,

K – максимальная величина коэффициента передачи в полосе пропускания фильтра,

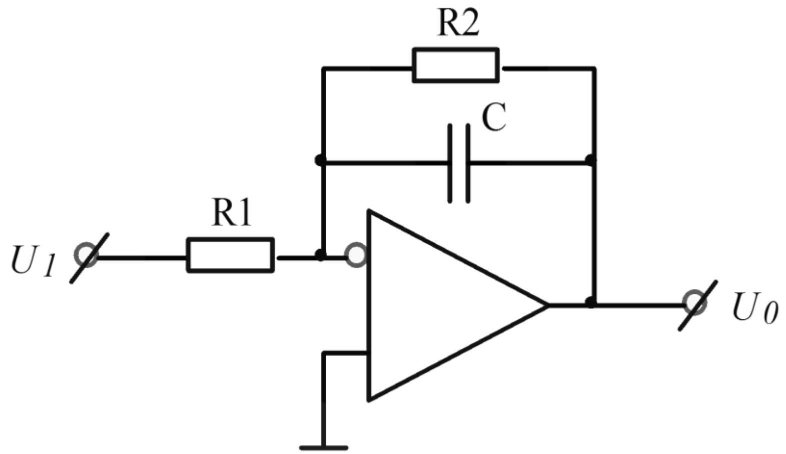
Q_f - добротность фильтра

Фильтры первого порядка

ФНЧ

$$W(s) = -K\frac{\omega_p}{s+\omega_p}$$

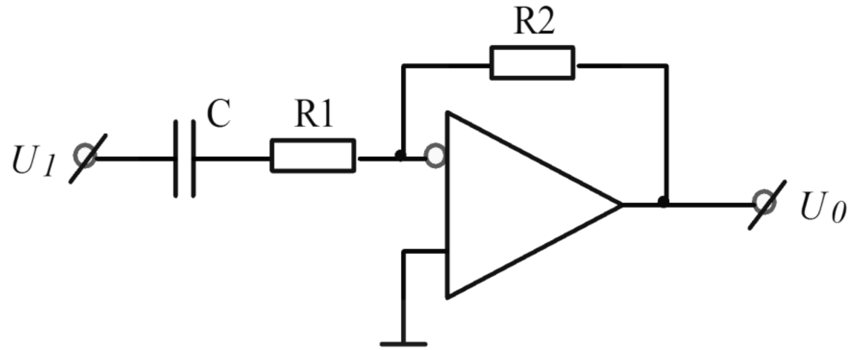
$$\omega_p = \frac{1}{R_2 C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$



ФВЧ

$$W(s) = -K\frac{s}{s+\omega_p}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_1 C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$



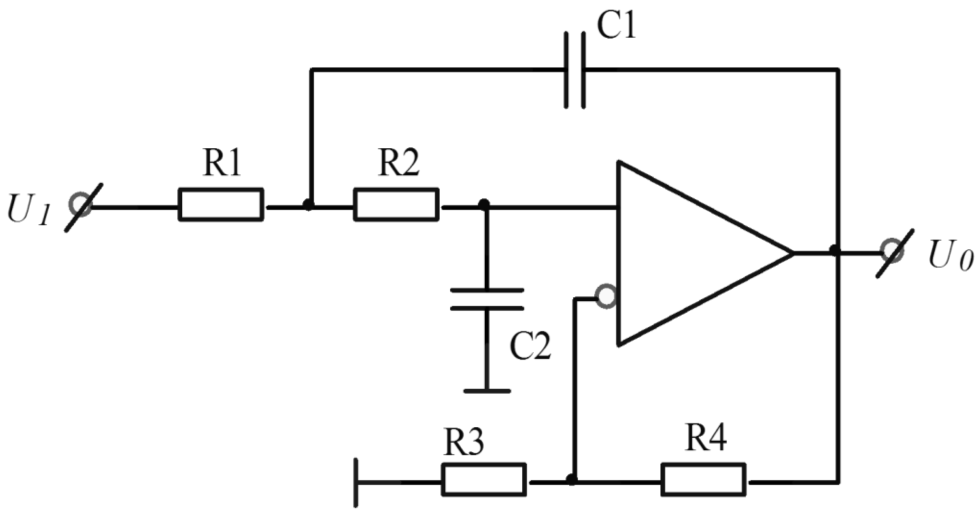
Фильтры второго порядка

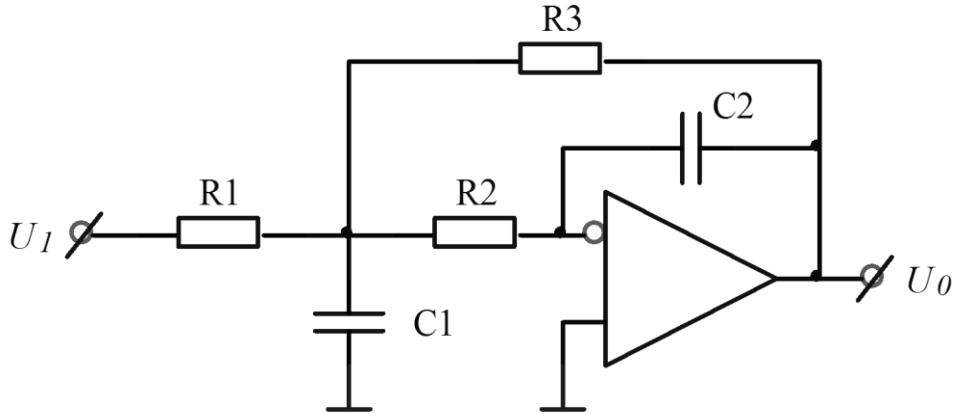
ФНЧ

$$W(s) = K\frac{{\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$Q_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}} + \sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}} - \frac{R_4}{R_3}\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}}$$



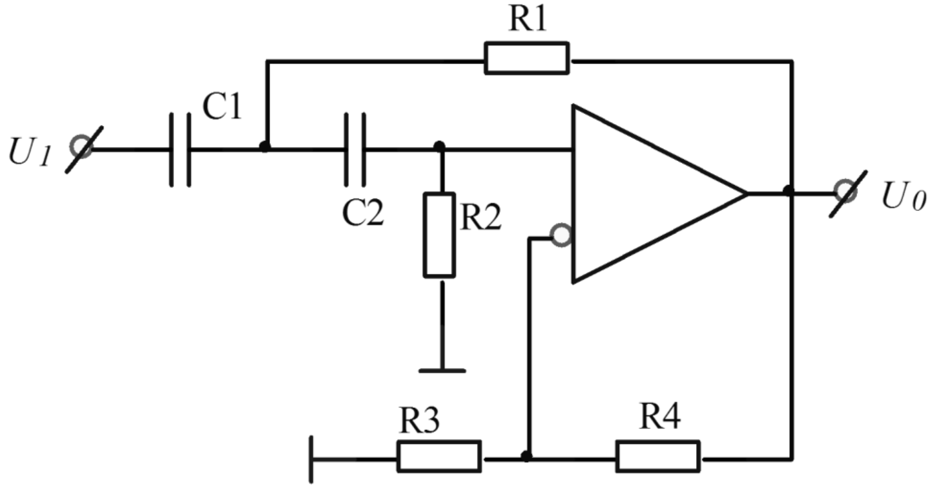


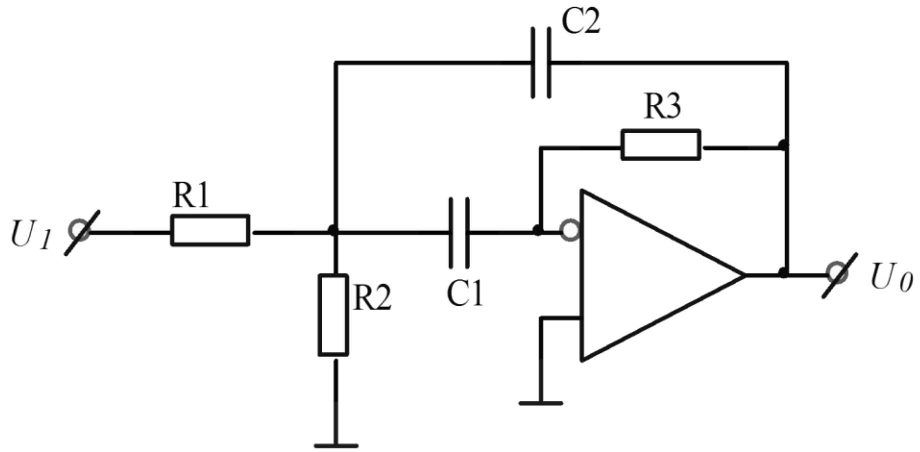
Фильтры второго порядка

ФВЧ

$$W(s) = K\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_p}{Q_f}s+{\omega_p}^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad K = 1+\frac{R_4}{R_3}$$

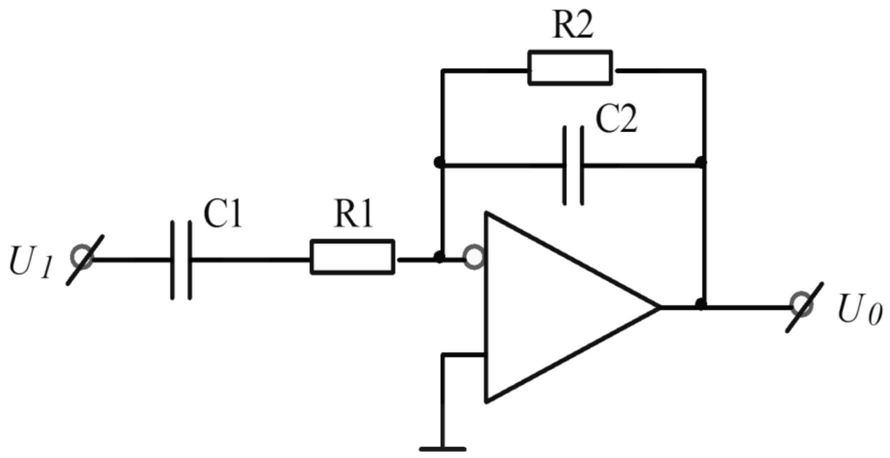




Фильтры второго порядка

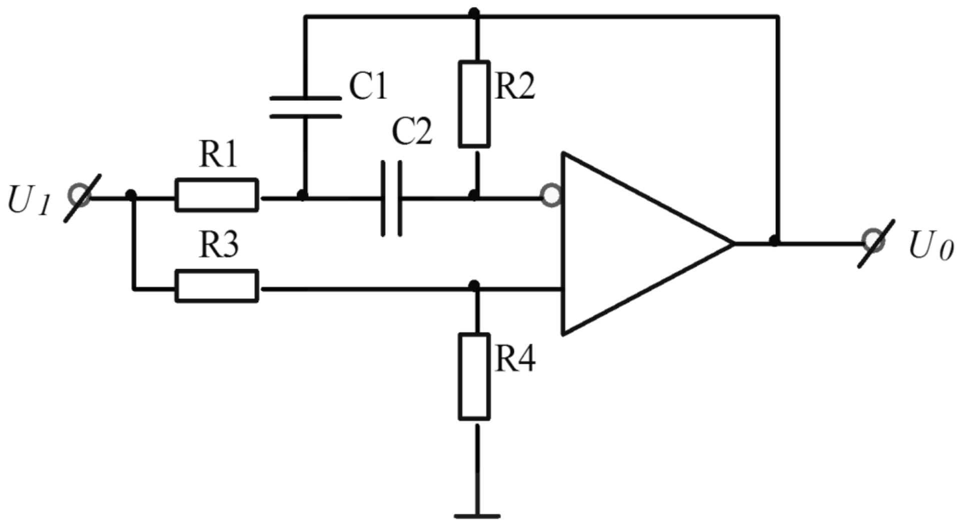
Полосовой Фильтр

$$W(s) = -K\frac{\frac{\omega_p}{Q_f}s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$



Режекторный Фильтр

$$W(s) = K\frac{s^2 + {\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$



Фазовые фильтры

В отличии от других фильтров коэффициент передачи ФФ постоянен, а фаза изменяется в зависимости от частоты. ФФ предназначены для фазовой коррекции и задержки сигналов. При переходе к передаточной функции ФФ в числителе записывается полином сопряженный с полиномом знаменателя:

$$W(s) = \frac{\prod_i (1 - a_i s + b_i s^2)}{\prod_i (1 + a_i s + b_i s^2)}$$

При замене $s = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{\prod_i \sqrt{(1 - b_i\omega^2)^2 + a_i{}^2\omega^2}\, e^{-j\propto}}{\prod_i \sqrt{(1 - b_i\omega^2)^2 + a_i{}^2\omega^2}\, e^{j\propto}} = 1 \cdot e^{-j\varphi}, \qquad \varphi = -2\sum_i arctg\frac{a_i\omega}{1 - b_i\omega^2}$$

Групповое время задержки фильтра: $T_g = \frac{d\varphi}{d\omega} = 2\sum_i \frac{a_i(1-b_i\omega^2)}{1+\omega^2(a_i{}^2-2b_i)+b_i{}^2\omega^4}$,

на частоте среза $T_g(\omega_p) = \frac{1}{\sqrt{2}} T_g(\omega = 0)$

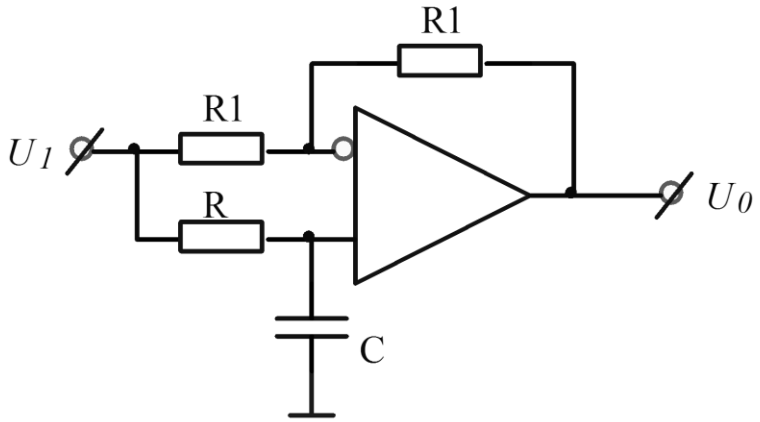
Фазовые фильтры первого и второго порядка

Фильтр первого порядка

$$W(s) = \frac{s - \omega_p}{s + \omega_p}$$

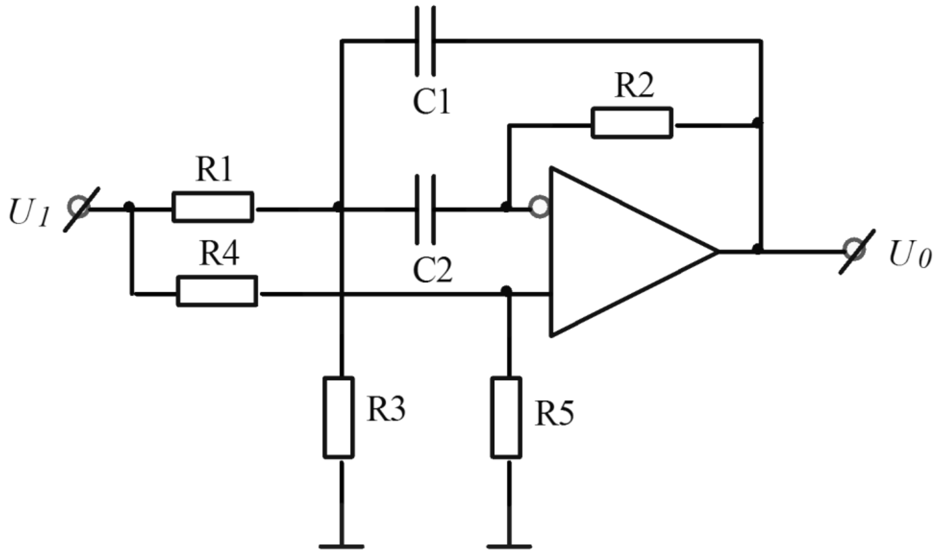
$$\omega_p = \frac{1}{RC}, \qquad \varphi = -2arctg(\omega RC),$$

$$T_g = \frac{2RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

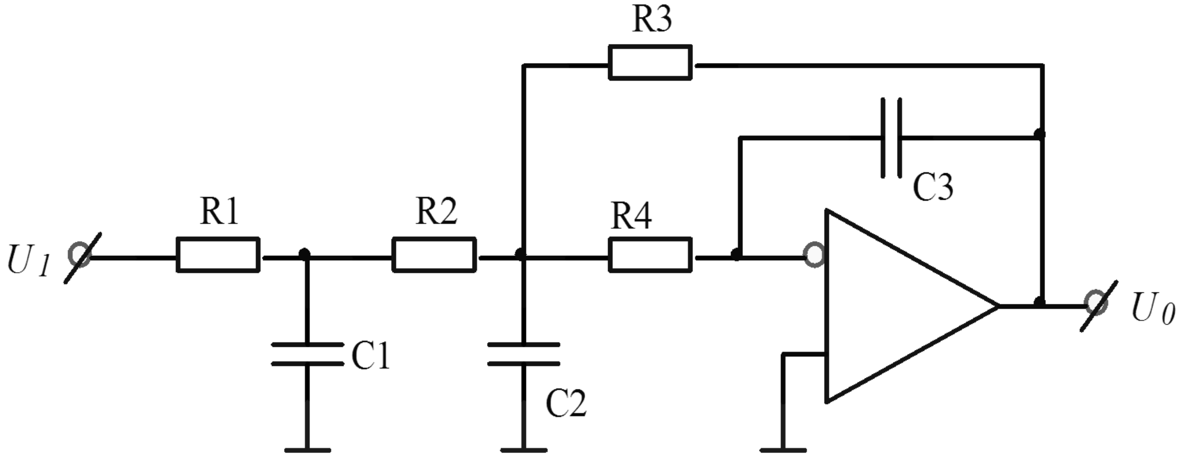


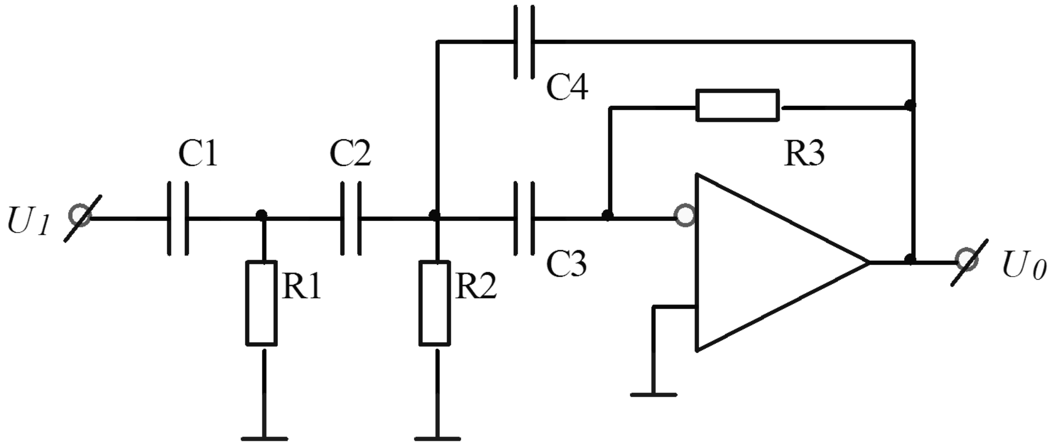
Фильтр второго порядка

$$W(s) = K\frac{s^2 - \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f}s + {\omega_p}^2}$$



Фильтры третьего порядка





Пример построения передаточной функции активного фильтра

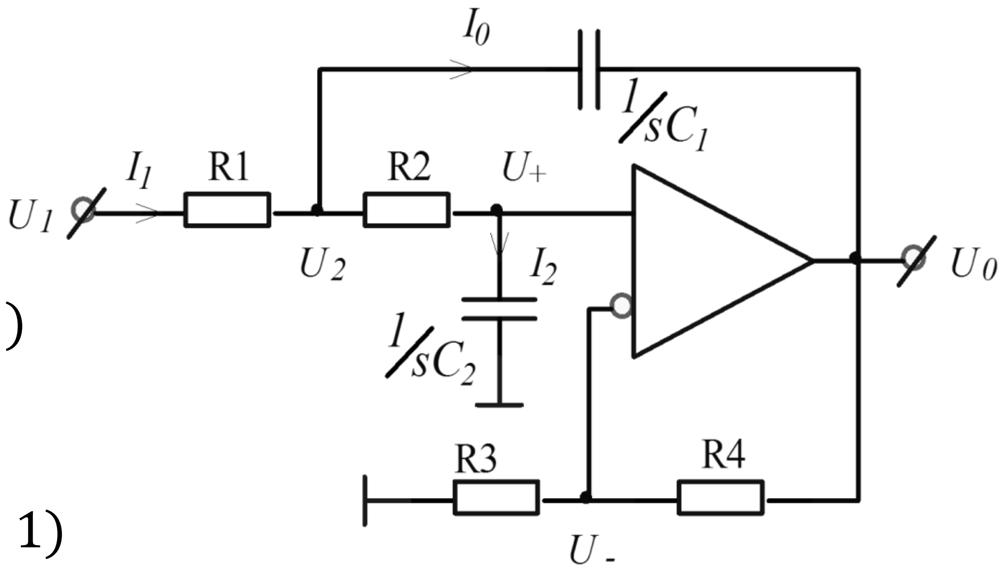
Передаточная функция ФНЧ 2-го порядка. Представив цепь в операторном виде, расставим токи ветвей и напряжения в узловых точках и запишем операторные токи и величину напряжения в узле:

$$U_+(s) = U_-(s) = U_0(s)\frac{R_3}{R_3+R_4}\ ,\qquad I_2(s) = sC_2U_+(s) = sC_2U_0(s)\frac{R_3}{R_3+R_4}$$

$$U_2(s) = U_+(s) + I_2(s)R_2 = U_0(s)\frac{R_3}{R_3+R_4}(1+sR_2C_2)$$

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)-U_2(s)}{R_1} = \frac{U_1(s)}{R_1} - U_0(s)\frac{R_3}{R_1(R_3+R_4)}(1+sR_2C_2)$$

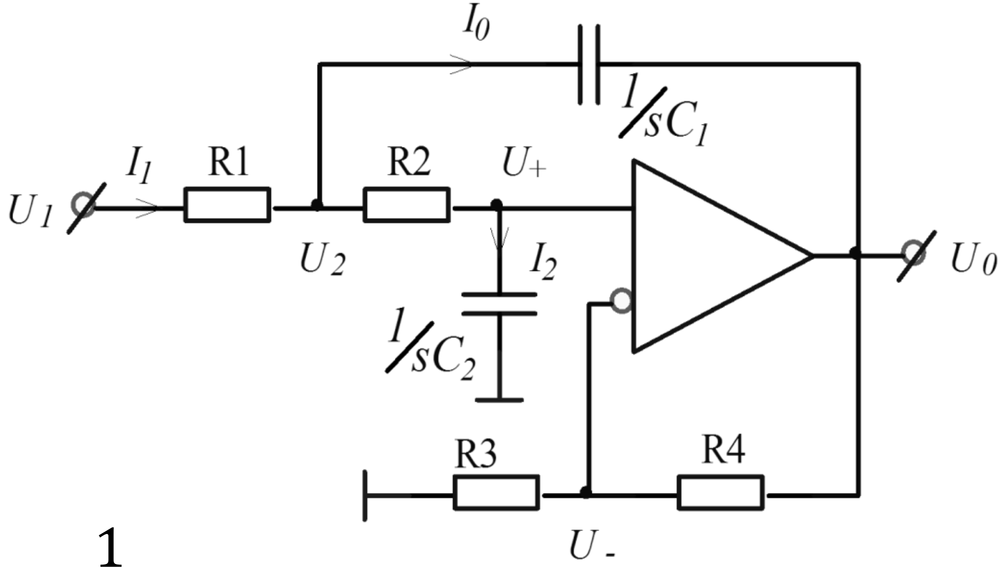
$$I_0(s) = sC_1(U_2(s)-U_0(s)) = sC_1U_0(s)(\frac{R_3}{R_3+R_4}(1+sR_2C_2)-1)$$



Используя первое правило Кирхгофа для узла U_2, запишем: $$I_1(s) = I_0(s) + I_2(s)$$

Пример

Соотношение для передаточной функции:



$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{1 + sR_2C_2 + sR_1C_2 + sR_1C_1((1 + sR_2C_2) - 1 - \frac{R_4}{R_3})}$$

Приводя функцию к стандартному виду получим:

$$W(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} - \frac{R_4}{R_3}\frac{1}{R_2C_2}\right) + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$$

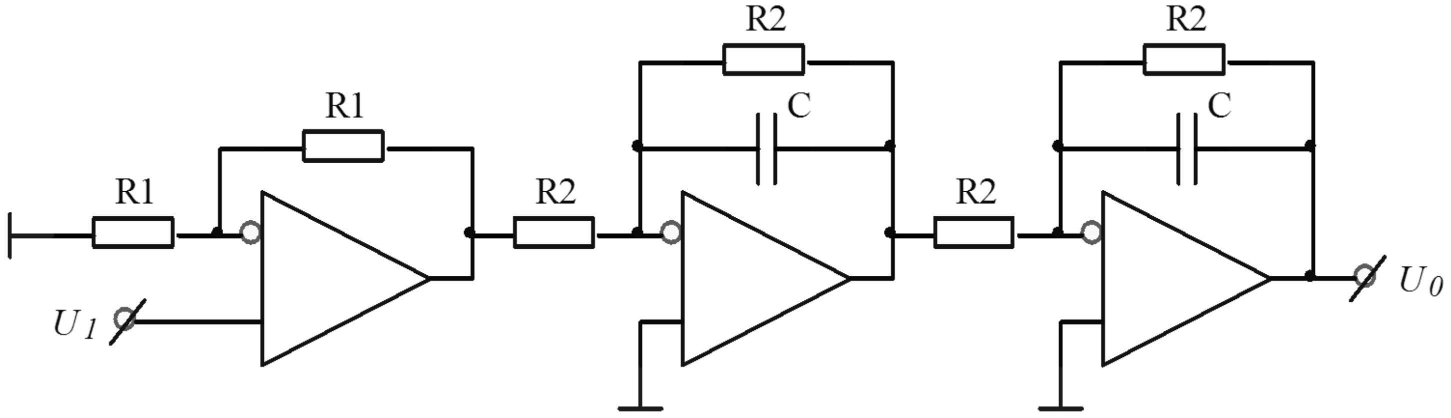
Пример

Переход от передаточной функции к схеме.

$$W(s) = \frac{20000}{s^2 + 200s + 10000}$$

$$W(s) = 2 \cdot \frac{-100}{s+100} \cdot \frac{-100}{s+100}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_2 C} = 100\ \text{рад/с}$$



Условие неискаженной передачи сигнала.

Для линейной системы (форма сигнала неизменна, меняется только амплитуда):

$$u_2\,(t) = K \cdot u_1\,(t - \tau)$$

Здесь τ – время задержки на прохождение сигнала. После преобразования Лапласа:

$$U_2\,(s) = K \cdot U_1\,(s)e^{-s\tau}$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{U_2\,(s)}{U_1\,(s)} = K \cdot e^{-s\tau} \qquad W(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Т.е. условие отсутствия искажений $|W(j\omega)| = const, \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau$ – можно выполнить только в чисто резистивной цепи.

Линейная фильтрация.

Задача фильтрации обеспечение наилучшего отношения сигнал/шум и наилучшая передача формы. Обеспечить оба требования одновременно невозможно.

Рассмотренные ранее фильтры с дробно-рациональной характеристикой – линейные. Линейная фильтрация изменяет форму сигналов. В качестве примера можно вернуться к рассмотрению задачи на прохождение импульса через линейную цепь.

Идеальный фильтр (фильтр с прямоугольной АЧХ) :

- Не учитывает форму импульса (форма может различаться при одинаковой ширине спектра)
- Не учитывает свойств помех.

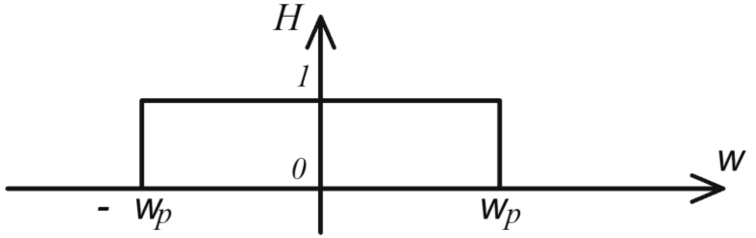
Оптимальный фильтр – выбирается по принципу наилучшей передачи формы сигнала.

Согласованный фильтр определяется по соответствию спектра сигнала и спектральной характеристике фильтра (из соотношения сигнал/шум.

Идеальный фильтр

Спектр идеального ФНЧ:

$$S(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_p, \\ 0, |\omega| > \omega_p; \end{cases}$$



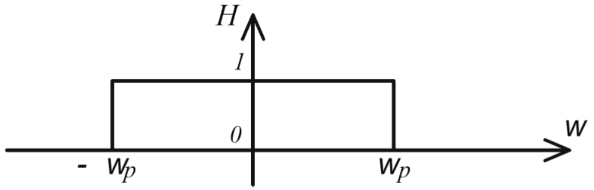
Можно сразу заметить, что характеристики фильтров на основе RC и RLC цепей имеют дробно-рациональный вид, следовательно с помощью таких цепей реализовать идеальный фильтр нельзя.

Определим временную характеристику:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} e^{j\omega t} d\omega = \frac{sin\omega_p t}{\pi t}$$

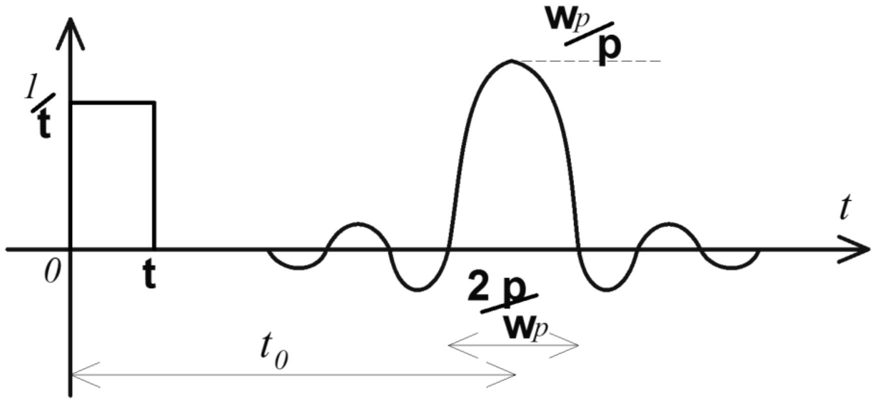
Здесь видно, что в начальный момент времени $w(0) = \frac{\omega_p}{\pi}, w(t < 0) \neq 0$ - реакция появилась раньше воздействия, нарушен принцип причинности следовательно идеальный фильтр физически нереализуем.

Прохождение единичного импульса через идеальный фильтр.



Единичный импульс – спектр равен 1. Тогда:

$$U_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_p}^{\omega_p} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = \frac{sin\omega_p(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$

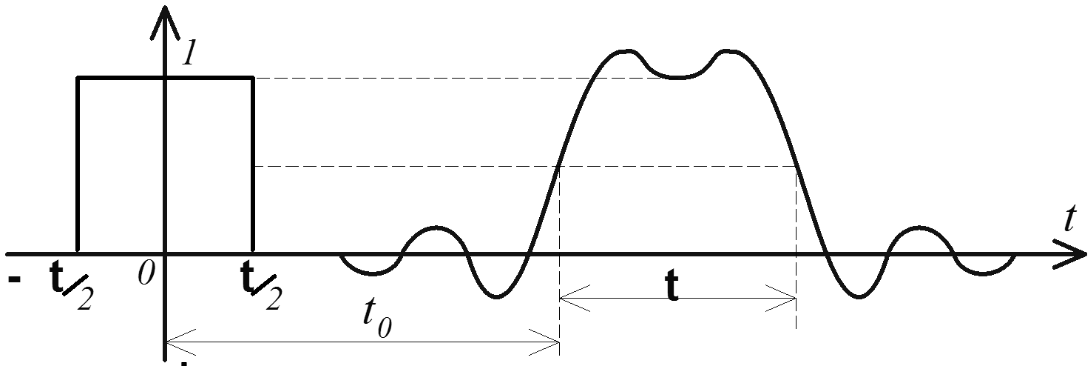


t_0 - время задержки, определяется крутизной спектральной характеристики фильтра $\frac{dS(\omega)}{d\omega}$. Также видно что $U_2(t) \neq 0$ при $t < 0$, что противоречит принципу причинности. Ширина главного лепестка определяется полосой пропускания фильтра. Задержка и ширина уменьшаются с ростом полосы.

Прохождение прямоугольного импульса

Прохождение прямоугольного импульса через идеальный фильтр:

$$U_2(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\omega_p} \frac{sin\omega(t - t_0 + \frac{\tau}{2})}{\omega} d\omega - \int_0^{\omega_p} \frac{sin\omega(t - t_0 - \frac{\tau}{2})}{\omega} d\omega\right\}$$



Задержка и длительности переднего и заднего фронтов уменьшаются с ростом полосы пропускания фильтра. Подобные формы возникают при прохождении сигналов и через реальные фильтры, для получения приемлемого уровня искажений ширину полосы берут $\omega_p = \frac{2}{\boldsymbol{t}}$.

Оптимальный фильтр.

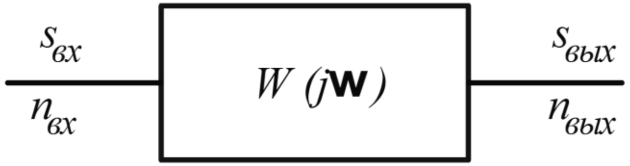
Назначение оптимального фильтра состоит *в наилучшем воспроизведении* неизвестной *формы сигнала*. В идеальном случае, спектральная функция такого фильтра:

$$W_{\text{оф}}(j\omega) = \frac{S_S(\omega)}{S_S(\omega) + S_N(\omega)} e^{j\omega t_0}$$

Здесь $S_S(\omega)$ и $S_N(\omega)$ спектры сигнала и шума (помехи) соответственно. Минимальная ошибка будет обеспечена при минимальном перекрытии спектров сигнала и помехи. Реализуемые фильтры строятся по каскадной технологии с приближением к идеальному. Часто для уменьшения ошибки необходимо применение нелинейной фильтрации. Только в случае когда сигнал и помеха гаусовские, наилучший оптимальный фильтр всегда будет линейным.

Согласованный фильтр.

Согласованная фильтрация – обеспечение максимума отношения сигнал/шум.



Здесь: $W(j\omega) = K_0 e^{j\varphi_k(\omega)}$ $\boldsymbol{S}(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

Тогда:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}K_0 e^{j\varphi_k(\omega)}e^{j\omega t}d\omega = \frac{K_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j(\varphi(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t)}d\omega$$

Максимум сигнала:

$$s_{\text{выхмакс}}(t) = s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{K_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)d\omega \quad \text{т. е.} \qquad \varphi_k(\omega) = -(\varphi(\omega) + \omega t_0)$$

Условие компенсации фаз.

Спектральная функция. Импульсная характеристика.

Отношение сигнал/шум:

$$\frac{s_{\text{вых}}(t)}{n_{\text{вых}}(t)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}(j\omega)\boldsymbol{K}(j\omega)e^{j\omega t_0}d\omega}{\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega}} \leq \sqrt{\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega}{\frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega}}$$

Неравенство обратится в равенство при условии

$$\boldsymbol{K}(j\omega) = A_0\boldsymbol{S}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} = A_0A(\omega)e^{-j(\varphi(\omega)+\omega t_0)}$$

Учитывая что $\boldsymbol{S}^*(\omega) = \boldsymbol{S}(-\omega)$, запишем для импульсной характеристики фильтра:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{K}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{A_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = A_0 s(t-t_0)$$