Тема: Ряды Фурье

1°. Периодические функции и гармонический анализ. 2°. Ортогональные и ортонормированные системы функций. 3° Ряды Фурье по ортогональным системам функций. 4°. Определение тригоном. ряда Фурье.

$\boxed{1^\circ}$ Гармонический анализ – раздел математ., изучающий свойства периодических функций.

- Простейшая периодическая функция – синусоида: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, где t – это вещественная независимая переменная, A – амплитуда, ω – частота, α – фаза.

- Итак Синусоида удовл. следующему условию периодичности:

$$y(t+T) = y(t) \quad \forall t \in R, \text{ где } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ – период ф-ции } y = y(t)$$

- Область определения – вся числовая ось (ибо можем продолжить функцию из условия)

- Линейная комбинация любых двух периодических ф-ций с одинаковым периодом T – это также период. ф-ция с тем же периодом

⇓ складываем синусоиды

т.е. лин. комбинация: $\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$ с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$

⇓

пол-ть $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, 2 \ldots$ – является в пространстве всевозможных период. ф-ций с $T = \frac{2\pi}{\omega}$

⇓

- Любую достаточно гладкую ф-цию $\varphi(t)$ с условием периодичности $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ $\forall t \in R$

можно ⇓ разложить

$$\underbrace{A_0}_{\text{константа}} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \text{ где } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

⇓

Каждое сложное колебание $\varphi(t)$ разлагается на отдельные гармонические колебания вида $y_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$

- Гармонический анализ – процесс разложения колебания в ряд по ее гармоникам

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

$$\sin(k\omega t + \alpha_k) = \sin\alpha_k \cos(k\omega t) + \cos\alpha_k \sin(k\omega t)$$

, где $a_0 = A_0$, $a_k = A_k \sin\alpha_k$, $b_k = A_k \cos\alpha_k$, $k = 1, 2 \ldots$

$\Downarrow$ Замена $x = \omega t$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$ – тригонометрический ряд с периодом $T = 2\pi$

• Пос-ть функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots \cos kx, \sin kx \ldots,$$

по которой ведется разложение тригоном. ряда наз-ся тригоном. системой и является простым примером ортогональных систем ф-ций.

$\boxed{2^\circ}$ **Опр.** Любой функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

где a_k – числа, наз-ся рядом по системе функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x) \ldots$; также коэффициентами ряда.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x)$ разложена в ряд функций

Опр. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, наз-ся ортогональными на Δ, если их произведение интегрируемо на Δ и при этом справедливо равенство

$$\int_\Delta \psi(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Опр. Последовательность ф-ций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$$

наз-ся ортогональной на промежутке Δ, если все эти ф-ции определены на Δ, все произведения вида $\varphi_n(x)\varphi_m(x)$ интегрируемы на Δ и при этом справедливы равенства

$$\int_\Delta \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m$$

(попарно ортогональны)

Лемма.

Тригонометрическая система ф-ций
$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots$
ортогональна на интервале $(-\pi, \pi)$

Д-во: Используя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\,dx = 0$$

$\Downarrow$ проинтегрируем по $(-\pi, \pi)$

$$/\ 2\sin nx \cos mx = \sin(n+m)x + \sin(n-m)x\ /$$

$\Downarrow$ Тогда для любых натуральных m и n получим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n-m)x\,dx = 0$$

Значит ф-ция $\sin \cancel{m}x$ и $\cos mx$ ортогональны на интервале $(-\pi, \pi)$

Поочередно проинтегрировав по ~~отрезку~~ интервалу $(-\pi, \pi)$ обе части тригоном. равенств

$$2\cos nx \cdot \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x$$

$$2\sin nx \cdot \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x$$

$\Downarrow$

$\forall n$ и $\forall m$, при $n \neq m$, гармоники ортогональны друг другу #

Следствие

Тригонометрическая система
$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots$
ортогональна на любом промежутке длины 2π

Опр

Посл-ть ф-ций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определенных на промежутке Δ, наз-ся ортонормированной на Δ, если эта система ортогональна на Δ и при этом справедливы равенства

$$\int_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \quad, n = 1, 2, \ldots \quad \text{— условие (нормировка)}$$

$\boxed{3^0}$ $\rceil$ функция $f(x)$ разложена в ряд по ортогональной системе на промежутке Δ системе ф-ций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x) \dots$, т.е. имеет место равенство:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x \in \Delta$$

$\Downarrow$ умножаем на $\varphi_n(x)$, интегрируем на Δ

$$\int_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = \int_\Delta \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)\varphi_n(x)\right)dx$$

$\Downarrow$

$$\int_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_\Delta a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x)dx\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_\Delta \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \underbrace{\delta^n_k}_{\text{символ Кронекера}} \int_\Delta |\varphi_k|^2 dx \Rightarrow \int_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx = a_n \int_\Delta |\varphi_n|^2 dx$$

• Предположим еще, что среди функций системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x) \dots$ нет тождественно нулевых:

$$\int_\Delta |\varphi_n|^2 dx \neq 0, \quad n = 1, 2 \dots$$

и

$$a_n = \frac{\int_\Delta f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_\Delta |\varphi_n|^2 dx}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ — коэффициенты Фурье}$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)$ — ряд Фурье $f(x)$ по ортогональной системе $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$

• Всегда можно найти коэффициенты, но
1) может расходится ряд Фурье в некоторых точках
2) если сходится, то его сумма не обязательно совпадает с $f(x)$ $\Rightarrow$ используют знак эквивалентности

$\boxed{4^0}$ $\rceil$ $f(x)$ определена на конечном интервале (a, b) и при этом

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \qquad (\mathrm{I}_1)$$

Совокупность всех функций $f(x)$ удовлетвор. условию (L_1), образуют линейное пр-во, которое обозначается как $L(a,b)$ $\Rightarrow$ для любой функции $f(x)$ из пр-ва $L(a,b)$ определены её коэфф. Фурье по ортогональной ~~...~~ на (a,b) тригоном. системе

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l},\ k=1,2\ldots$$

где $l=\frac{b-a}{2}$

$\Downarrow$ обычно записывают так

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\,dx;\quad a_k=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad k=1,2,\ldots$$

Пример:

$$f(x)=\operatorname{sign}(x),\ \text{где } x\in(-1,+1)$$

Имеем: $a=-1,\ b=1,\ l=\frac{b-a}{2}=1$

Ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x)$$

Коэффициенты:

$$a_0=\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\operatorname{sign}(x)\,dx=0$$

$$a_k=\int_{-1}^{+1}f(x)\cos k\pi x\,dx=\int_{-1}^{+1}\operatorname{sign}x\cos k\pi x\,dx=0$$

$$b_k=\int_{-1}^{+1}f(x)\sin k\pi x\,dx=2\int_0^1\sin k\pi x\,dx=\frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]$$

Значит: $b_{2k}=0$ и $b_{2k+1}=\frac{4}{(2k+1)\pi}$ и

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi x,\quad x\in(-1,+1)$$