Аналоговая электроника и техника измерений.

Электрические цепи переменного синусоидального тока.

Переменные величины

Переменной величиной является величина изменяющаяся во времени. Процессы являются ***периодическими***, если мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени.

$$F(t) = F(t + T)$$

наименьший промежуток времени, через который эти величины повторяются, называются ***периодом Т***. Величина, обратная периоду называется ***частотой***:

$$f = \frac{1}{T},$$

Частный случай – синусоидальная величина.

Синусоидальные величины тока и напряжения.

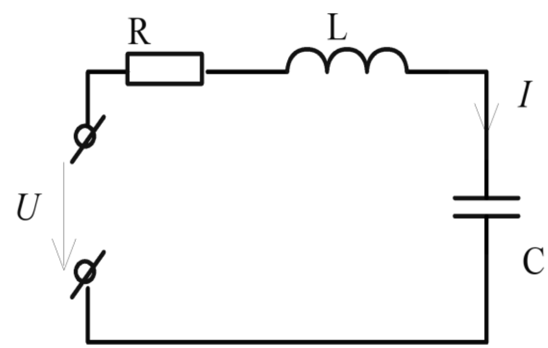
$$u(t) = U_m \cdot \sin\left(\omega t + \psi_{\mathrm{u}}\right),$$
$$i(t) = I_m \cdot \sin\left(\omega t + \psi_{\mathrm{i}}\right)$$

- $u(t), i(t)$ – мгновенные значения напряжений и токов,
- $U_m, \;\; I_m$ – амплитудные значения,
- $\omega = 2\pi f$ – угловая или циклическая частота,
- $\omega t + \psi_{\mathrm{u}}$ и $\omega t + \psi_{\mathrm{i}}$ - фазы синусоид,
- $\psi_{\mathrm{u}}, \psi_{\mathrm{i}}$ – начальные фазы напряжения и тока.

Уравнение цепи

Уравнение описывающее работу электрической цепи на переменном токе, составленное согласно второму правилу Кирхгофа будет иметь следующий общий вид:

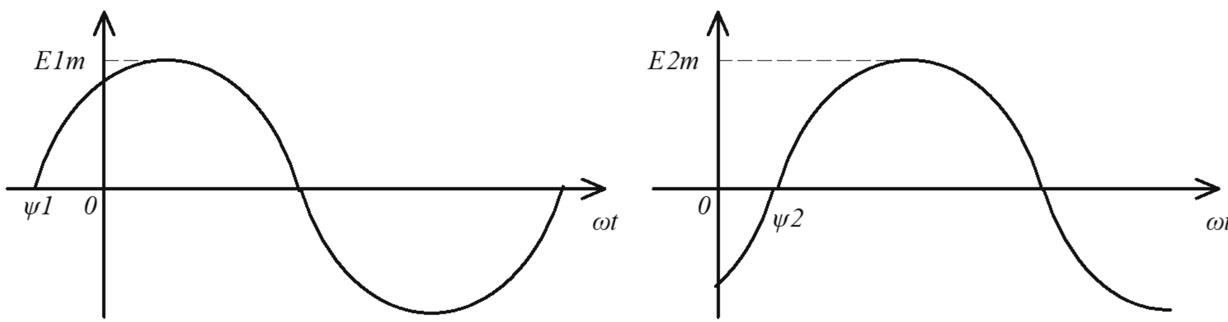
$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$



Дальнейшая задача - определить способ решения этого и подобных уравнений.

Тригонометрическая форма описания электрических величин.

$e_1(t) = E_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_1)$, $\quad e_2(t) = E_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_2)$



$\psi_1 > 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $\psi_2 < 0.$

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их фазовых углов, равную разности начальных фаз, называют **углом сдвига фаз**.

$$(\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2.$$

Комплексное представление синусоидальных величин.

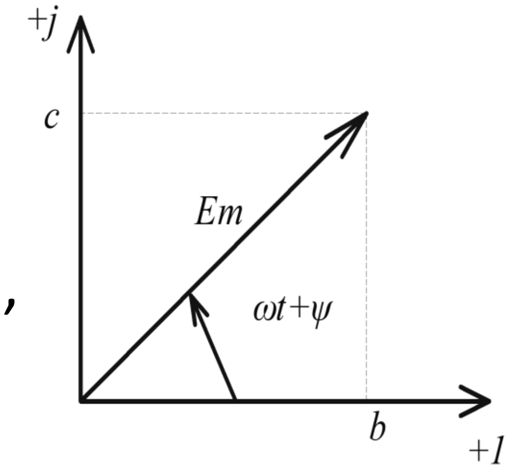
Каждая комплексная величина может быть записана в разных формах:

показательной $\alpha e^{j\psi}$,

тригонометрической $\alpha \cdot cos\psi + j\alpha \cdot sin\psi$,

алгебраической $b + jc$.

Здесь $\alpha = \sqrt{b^2 + c^2}$, а $\psi = arctg\frac{c}{b}$.



Графически синусоидальная величина может быть представлена вращающимся с частотой ω вектором, с начальной фазой ψ , и длиной вектора равной амплитуде синусоиды.

Следует обратить внимание, что в связи с тем что символ i в электротехнике «занят» током, принято мнимую единицу обозначать как $j = \sqrt{-1}$.

Комплексная амплитуда периодической величины

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e) = E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m \cdot e^{j\psi_e} \cdot e^{j\omega t}$$

Обозначим $E_m e^{j\psi_e} = \dot{E}_m$, эта величина называется **комплексной амплитудой**.

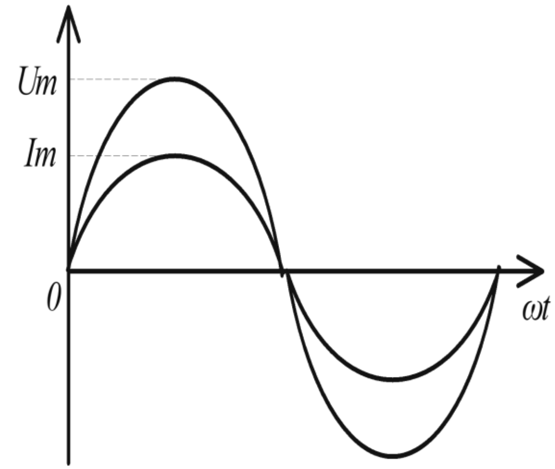
$$e(t) = \dot{E}_m \cdot e^{j\omega t}$$

Умножение вектора на оператор поворота $e^{\pm j\alpha}$ *есть его поворот относительно первоначального положения на угол* $\pm\,\alpha$ *соответственно.*

Параметр $e^{j\omega t}$является оператором поворота на угол ωt на комплексной плоскости относительно начального положения. В рассматриваемых нами цепях, частота происходящих процессов не изменяется, оператор поворота будет одинаковым для всех периодических величин.

Работа элемента в цепи синусоидального тока. Резистор.

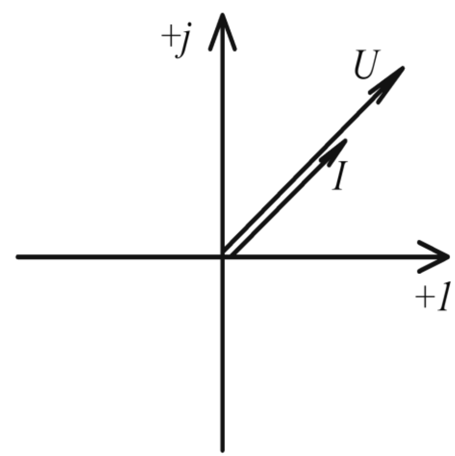
Закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения:



$$u_R(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi) =$$
$$I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t + \psi) = R \cdot i(t),$$

Запись через комплексные амплитуды:

$$\dot{I} \cdot e^{j\omega t} \cdot R = \dot{U} \cdot e^{j\omega t},$$

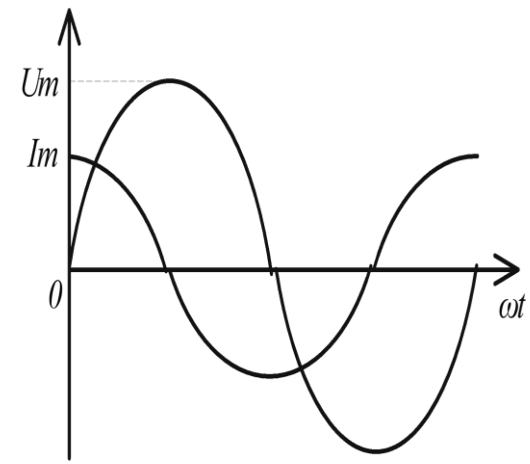


$$\dot{I} \cdot R = \dot{U}$$

закон Ома в символической форме.

Работа элемента в цепи синусоидального тока. Конденсатор.

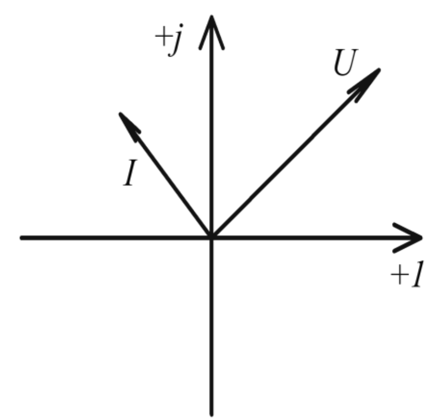
Ток в конденсаторе через приложенное к нему напряжение:



$$u_c(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$

$$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt} = \omega C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \ ,$$

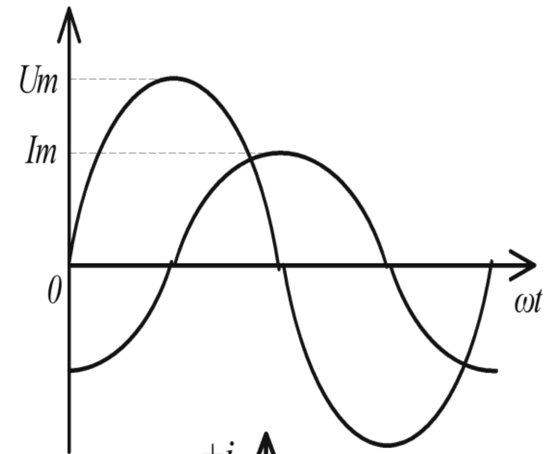
Из полученного соотношения видно что фаза тока в конденсаторе «опережает» фазу напряжения на $\frac{\pi}{2}$. Если использовать экспоненциальную форму записи, то:



$$\dot{I} \cdot e^{j\omega t} = j\omega C \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\dot{I} = j\omega C \cdot \dot{U}$$

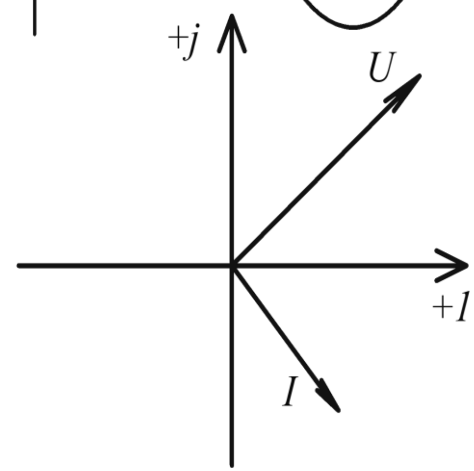
Работа элемента в цепи синусоидального тока. Катушка индуктивности.



Запишем напряжение на индуктивности через ток:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Фаза тока в индуктивности «отстает» от фазы напряжения на $\frac{\pi}{2}$.



В экспоненциальной форме:

$$\dot{U} \cdot e^{j\omega t} = j\omega L \cdot \dot{I} \cdot e^{j\omega t}$$

Сравнивая формулы связи токов и напряжений записанные в тригонометрической и экспоненциальной формах, можно заметить что, умножение на величину равную $\pm j$ эквивалентно повороту вектора на $\pm\frac{\pi}{2}$.

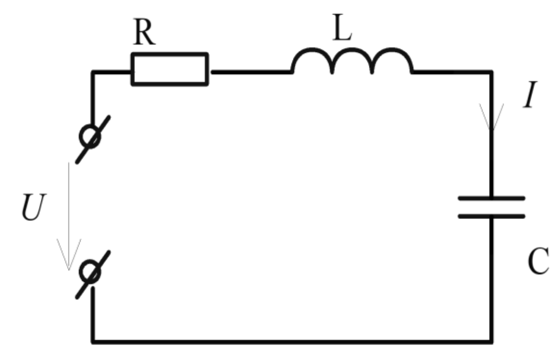
Реактивное сопротивление.

Введем следующие обозначения: $X_c = \frac{1}{j\omega C}$ и $X_L = j\omega L$

$$\dot{I} = \frac{1}{X_C} \cdot \dot{U}\,, \qquad \dot{U} = X_L \cdot \dot{I}$$

Величины X_L и X_c – называются индуктивное и емкостное реактивные сопротивления соответственно.

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (R + j(X_L - X_C)),$$



$$\dot{U} = \dot{I} \cdot Z$$

Z - импеданс цепи.

Импеданс и комплексная проводимость

Z - импеданс цепи (комплексное сопротивление), комплексная проводимость, величина обратная импедансу:

$$\boldsymbol{Y = \frac{1}{Z}}, \qquad |\mathrm{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \qquad \varphi = arctg\frac{X}{R}$$

$$\boldsymbol{Z = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot e^{j\varphi} = |\mathrm{Z}|cos\varphi + j|\mathrm{Z}|sin\varphi}$$

$$\boldsymbol{Y = G + jB = \frac{1}{R+jX} = \frac{1}{\sqrt{R^2+X^2}} \cdot e^{-j\varphi} = \frac{cos\varphi}{|\mathrm{Z}|} - j\frac{sin\varphi}{|\mathrm{Z}|}},$$

Анализ электрических цепей переменного однофазного синусоидального тока

Метод анализа электрических цепей, с использованием понятий комплексных амплитуд и импедансов (или комплексных проводимостей) называется **символическим методом.**

Правила Кирхгофа, записанные в символической форме:

$$\sum \dot{I} = 0, \quad \sum \dot{\mathrm{E}} = \sum \dot{I} \cdot Z,$$

Мощность в цепях переменного синусоидального тока.

Мгновенная мощность

$$s(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{u}}) \ \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{i}})$$

Для резистора (начальный угол равен нулю) мгновенная мощность:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2\omega t = R \cdot I_m^2 \cdot \sin^2\omega t$$

Для вычисления средней мощности возьмем интеграл:

$$P(T) = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot I_m^2 \cdot \sin^2\omega t dt = R \cdot I_m^2 \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 - cos2\omega t}{2} dt = \frac{R \cdot I_m^2}{2}$$

Среднеквадратичное значение

Учитывая что, $i(t) = I_m \cdot \sin\omega t$, введем обозначение:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Эту величину называют действующим (среднеквадратичным или эффективным) значением. С учетом этого, средняя мощность выделяющаяся в резисторе:

$$P_{\text{ср}} = R \cdot I_{rms}^2$$

Реактивная мощность

Для индуктивности и конденсатора мгновенная мощность:

$$u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \cos \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

Интеграл по периоду от этого соотношения равен нулю, мощность называется реактивной, реактивный элемент половину периода накапливает энергию, а вторую половину отдает.

$$Q_L = ui = \omega L \frac{{I_m}^2}{2}, \qquad Q_C = ui = \omega C \frac{{U_m}^2}{2}$$

Для цепи содержащей *R* , *L* и *C*:

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cdot \sin\omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)\, dt = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot cos\varphi$$

$$Q(T) = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot sin\varphi$$

Полная и комплексная мощность.

Полная мощность:

$$S(T) = I_{rms} \cdot U_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Комплексная мощность:

$$\overline{S} = \dot{U} \ \cdot e^{j\psi_U} \cdot \dot{I} \cdot e^{-j\psi_I} = \dot{U}\ \dot{I} \cdot e^{j\varphi}$$
$$= \dot{U}\ \dot{I} \cdot cos\varphi + j\dot{U} \cdot \dot{I} \cdot sin\varphi = P + jQ$$

$$P = Re(\overline{S})\ ,\ Q = Im\left(\overline{S}\right), \qquad \overline{S} = I_{rms}^2(R + jX)$$

Баланс мощностей

Баланс соблюдается для всех типов мощности:

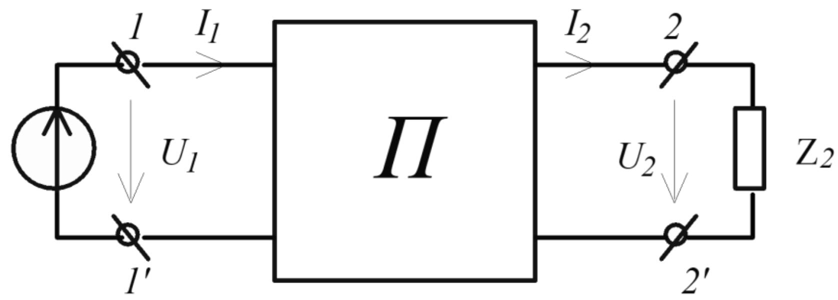
$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot cos\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot cos\varphi_k + j\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I_k^2 + j\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot I_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \cdot I_k \cdot e^{j\varphi_k} = \sum_{k=1}^{n} (R_k + jX_k) \cdot I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot I_k^2$$

Коэффициент передачи и сопротивления четырехполюсников.



Нагрузка, коэффициент передачи, входное и характеристическое сопротивления четырехполюсника.

$$\mathrm{Z}_{\text{н}} = \frac{\dot{\mathrm{U}}_2}{\dot{\mathrm{I}}_2} \qquad K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \qquad Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$$

Пассивные электрические фильтры

Электрический фильтр – это четырехполюсник, устанавливаемый между источником энергии или информационного сигнала и приемником сигнала (нагрузкой), предназначенный для беспрепятственного, или с малым затуханием, пропускания токов или сигналов одних частот и задержки или пропускания с большим затуханием токов или сигналов других частот.

- \- фильтр нижних частот, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_{\mathrm{C}}$,
- \- фильтр верхних частот, полоса пропускания $\omega_{\mathrm{C}} \leq \omega \leq \infty$,
- \- полосовой фильтр, полоса пропускания $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, где $\omega_1 < \omega_2$,
- \- режекторный фильтр, полоса пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_1$ и $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$, где $\omega_1 < \omega_2$.

Частоты, ограничивающие область прозрачности называются **частотами среза**.

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики

Комплексный коэффициент передачи:

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

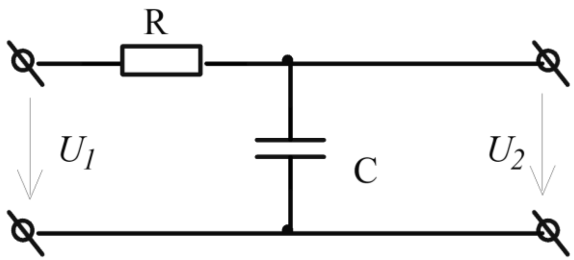
Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ - $H(\omega)$) – зависимость модуля коэффициента передачи четырехполюсника от частоты. Функция $\varphi(\omega)$ - зависимость фазы - **фазо-частотная характеристика** (ФЧХ).

Для наглядности характеристики изображают в логарифмическом масштабе. Для характеристик частота изображается в логарифмическом масштабе ($\lg\omega$) , фаза в линейном масштабе (в градусах), а модуль коэффициента передачи (единица измерения - децибел), показывается как:

$$20\lg\big(H(\omega)\big)$$

Бел - логарифм отношения энергетических величин: $\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, децибел *1дБ=0,1Б*. Для децибела $10\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$. Для напряжения (или тока): $10\lg\left(\frac{{U_1}^2}{{U_2}^2}\right) = 20\lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$

RC фильтр. Нахождение комплексного коэффициента передачи



Комплексный коэффициент передачи (сопротивление источника сигнала считаем нулевым, а приемника бесконечным):

$$K = \frac{1/_{j\omega C}}{R + 1/_{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-jarctg(\omega RC)}$$

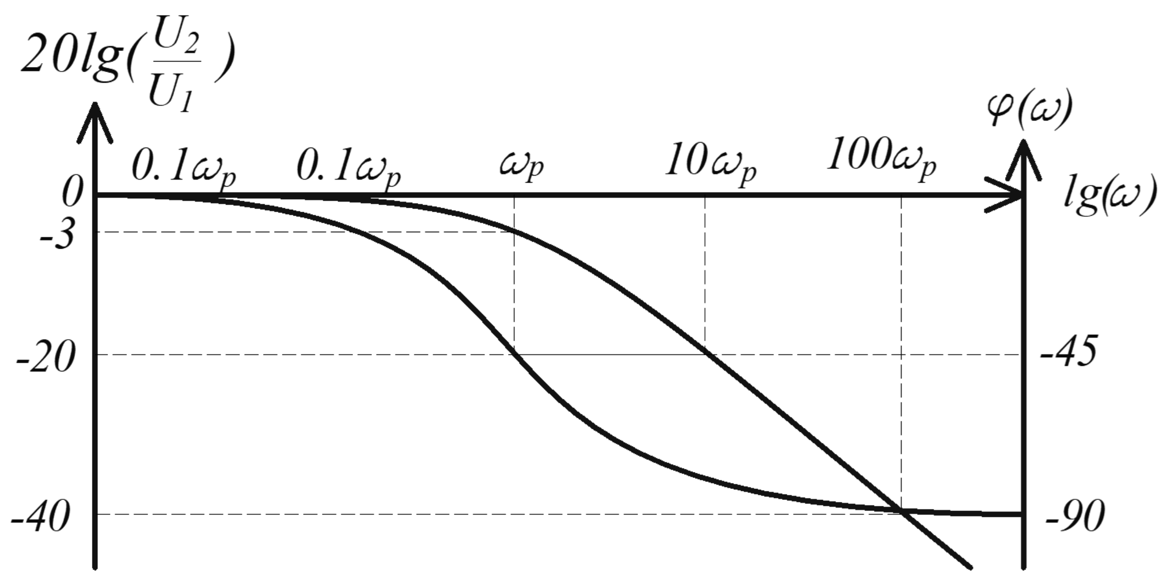
Частота среза этого фильтра (величина выходного сигнала $1/_{\sqrt{2}}$ относительно максимума, -3дБ по логарифмической шкале):

$$\omega_{\,p} = 1/_{RC}$$

RC фильтр. Построение ЛАЧХ и ФЧХ.

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -jarctg(\omega RC)$$



$\omega = 0$	$20\lg\lvert K\rvert = 0$ дБ	$\varphi = 0°$
$\omega = 1/100RC$	$20\lg\lvert K\rvert \approx 0$ дБ	$\varphi = -0{,}6°$
$\omega = 1/10RC$	$20\lg\lvert K\rvert \approx 0$ дБ	$\varphi = -5{,}7°$
$\omega = 0.5/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -0{,}97$ дБ	$\varphi = -26{,}6°$
$\omega = 1/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -3{,}01$ дБ	$\varphi = -45°$
$\omega = 10/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -20{,}04$ дБ	$\varphi = -84{,}3°$
$\omega = 100/RC$	$20\lg\lvert K\rvert = -40{,}0004$ дБ	$\varphi = -89{,}4°$

Цепи с индуктивно связанными элементами.

Если изменение тока в одном из элементов цепи приводит к появлению ЭДС в другом элементе цепи, то эти два элемента индуктивно связаны друг с другом. Возникающая ЭДС называется ЭДС взаимной индукции.

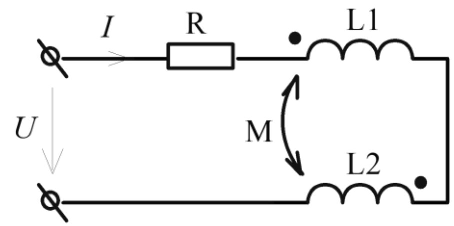
$$k_{\text{св}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

где M – взаимная индуктивность элементов цепи, а L_1 и L_2 - собственные индуктивности этих элементов.

$$e_M = -M\frac{di}{dt}$$

На эффекте взаимоиндукции основан принцип работы трансформатора.

Цепи с индуктивно связанными элементами.



ЭДС самоиндукции в катушках:

$$e_{L1} = -L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = -(\omega L_1 + \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

$$e_{L2} = -L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = -(\omega L_2 + \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

В символическом виде:

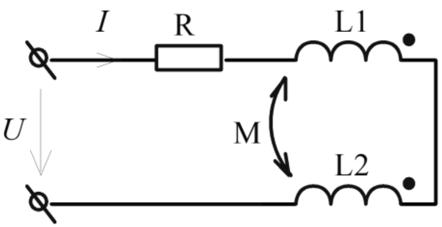
$$\dot{E}_{L1} = -j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} \qquad \dot{E}_{L2} = -j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I}$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$\dot{U} + \dot{E}_{L1} + \dot{E}_{L2} = \dot{U} - j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = \dot{I}R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}$$

Цепи с индуктивно связанными элементами.



ЭДС самоиндукции в катушках:

$$e_{L1} = -L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = -(\omega L_1 - \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

$$e_{L2} = -L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = -(\omega L_2 - \omega M)\, I_m \cdot \cos\omega t$$

В символическом виде:

$$\dot{E}_{L1} = -j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} \qquad \dot{E}_{L2} = -j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}$$

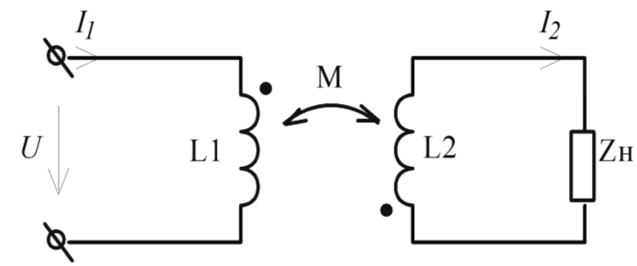
По второму правилу Кирхгофа:

$$\dot{U} + \dot{E}_{L1} + \dot{E}_{L2} = \dot{U} - j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I} = \dot{I}R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}$$

Воздушный трансформатор.

По второму правилу Кирхгофа, для первичного и вторичного контуров (обход по часовой стрелке):



$$\dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_2 j\omega M - \dot{U} = 0$$

$$\dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2 (j\omega L_2 + Z_{\text{н}}) = 0$$

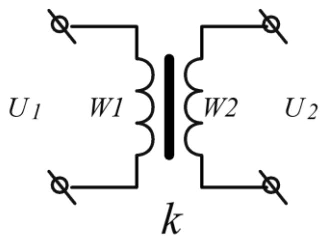
Если $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}}$, то $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}}{j\omega L_1 + \frac{(R_{\text{н}} - j(\omega L_2 + X_{\text{н}}))\omega^2 M^2}{R_{\text{н}}^2 + (\omega L_2 + X_{\text{н}})^2}}$

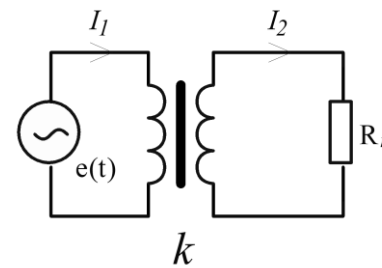
Величина $R_{\text{внос}} = j\omega L_1 + \dfrac{(R_{\text{н}} - j(\omega L_2 + X_{\text{н}}))\omega^2 M^2}{R_{\text{н}}^2 + (\omega L_2 + X_{\text{н}})^2}$, называется вносимым на первичную сторону сопротивлением.

Идеальный трансформатор.

Идеальный трансформатор является линейной моделью, не вносит дополнительного фазового сдвига и коэффициент трансформации зависит только от соотношения витков обмоток.

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{W_2}{W_1}$$





Схемы замещения реальных трансформаторов.