Примечание

Лектор - Васкевич Владимир Леонтьевич

Семинаристка - Рудомётова Анна Сергеевна

22.10.19 - лекция

Понятие предела функции в точке позволяет ввести класс непрерывности функции

O $f(x)$ с обл. опред $D(f)$ называется непрерывной в предельной точке $x_0 \in {Df}$, если $\exist \lim_{x->x_0}{f(x)} = f(x_0)$

Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 => x_0 - точка непрерывности, иначе x_0 - точка разрыва

Например, для $f(x) = 1/x$, $x_0 = 0$ - точка разрыва

O Если x_0 - точка разрыва $f(x)$ и при этом $\exist \lim$ (конечный), то x_0 - точка устранения разрыва. Если же $\exist f(x_0 - 0) \not = {f(x_0 + 0)}$, то x_0 - точка разрыва первого рода.

- $sign(x)$: $x_0 = 0$ - разрыв первого рода
- $|sign(x)|$: $x_0 = 0$ - устранимый разрыв

O *непрерывности функции (похоже на определение предела функции по Гейне)*. Функцмя $f(x)$

Если точка x_0 изолирована, то сходящаяся к ней последовательность стационарна

O ($\epsilon-\delta$): $f(x)$, опред. в $O(x_0)$ называется непрерывной в этой точке x_0, если: $\forall \epsilon > 0, \exist \delta > 0: \forall x, |x - x_0| < \delta \rArr |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

T

1. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $|f(x)|$ также непрерывна в точке x_0
2. Если $f(x) \And g(x)$ непрерывны в точке x_0, то $f(x) \plusmn g(x)$, $f(x)*g(x)$ также непрерывны в точке x_0 (и $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \not= 0$)
3. Если $f(x) \And g(x)$ непрерывны в точке x_0, то сложная функция $f(g(x))$ также непрерывна в точке x_0

Если $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0 $<=> \exist f(x_0+0) \And f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (аналогично и для непрерывности слева для $f(x_0 - 0)$)

T Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \rArr$ образ этого отрезка при отображении $f:[a,b] -> \R$ является замкнутым и ограниченым множеством $$ f([a,b]) = {y \in \R | \exist x \in [a, b], y = f(x)} $$ *Доказательство:* $x_0 \in [a,b], \exist .O(x_0): |f(x) - f(x_{...})| < 1$ ...

Следствие: $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$, достигает на этом отрезке своего набольшего и наименьшего значений: $$ \exists x_1,x_2 : \begin{cases} \sup(f([a,b])) = f(x_1) \ \inf(f([a,b])) = f(x_2) \end{cases} $$

$\Delta = [\alpha, \beta] \in \R$ - обладает свойством транзитивности **(?)**: $a \in \Delta, b \in \Delta, a < b \rArr [a, b] \in \Delta$. $[a, b]$ - промежуток числовой оси.

T: Если f(x) непрерывна на некотором промежутке Δ и принимает на нём значения $A, B: A < B$, то $\forall y=f(x) \in \Delta: A < y < B$

22.10.26 - лекция

Асимптоматические отношения функций

O-большое

Для функций $f(x)$ и $g(x)$, определённых на множестве $X \in D(f)$ $f(x)$ называется "О-большое от g(x) при $x \rarr x_0$", если $$ \exist const C > 0 \And O(x_0) (окрестность):\newline |f(x)| \le C|g(x)|\newline \forall x \in O(x_0) \And X, x \not= x_0 $$ Символически это отношение записывается как $f(x) = O(g(x))$ при $x \rarr x_0$

Запись $f(x) = O_{2_нижних_подчёркивания}(1)$ означает, что $f(x)$ ограничена в некоторой точке x_0 (далее будет обозначаться как $O_{_\ _}$). Примеры:

1. $sin(x) = O_{_\ _}$ при $x \rarr 0$
2. $sin(x) = O_{_\ _}$ при $x \rarr +\infin$
3. $sin^2(x) = O(sin(x))$ при $x \rarr +\infin$

Отношение О-большое транзитивно ($x \rarr x_0: f(x) = O(g(x)) \And g(x) = O(h(x)) \rArr f(x) = O(h(x))$)

Т сложения. $x \rarr x_0: f(x) = O(h(x)) \And g(x) = O(h(x)) \rArr f(x)+g(x) = O(h(x))$

Функции одного порядка

$f(x)$ и $g(x)$ называются функциями одного порядка, если $x \rarr x_0: f(x) = O(g(x)) \And g(x) = O(f(x))$. $f(x)$ и $g(x)$ также могут называться подобными.

Обозначается такое отношение в виде равно, в котором линии вогнуты внутрь.

Отношение подобия рефлексивно, симметрично и транзитивно => *оно эквивалентно*

Т. $$ \lim_{x \rarr x_0}{\frac{|f(x)|}{|g(x)|}} = k $$

1. $0 < k < +\infin \rArr$ $f(x)$ и $g(x)$ подобны
2. $k = 0 \rArr g(x) = O(f(x))$
3. $k = +\infin \rArr f(x) = O(g(x))$

Примеры:

1. $sin(x)$ подобны x при $x \rarr 0$
2. $sin(3x)$ подобны x при $x \rarr 0$
3. $2x^2 + x + 3$ подобны x^2 при $x \rarr +\infin$

Если $f(x) \equiv g(x)$ и $f(x)$ и $g(x)$ - БМФ, то $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые одного порядка

о-малое

Для функций $f(x)$ и $g(x)$, определённых на множестве $X \in D(f)$ $f(x)$ называется "о-малое от g(x) при $x \rarr x_0$", если: $$ \exist O(x_0)\newline |f(x)| \le \alpha(x)|g(x)|\newline \forall x \in O(x_0) \And X, x \not= x_0 $$ Где $\alpha(x)$ - бесконечно малое при $x \rarr x_0$

Символически о-малое записывается с двумя подчёркиваниями сверху (здесь этот факт будет игнорироваться)

Запись $f(x) = o(1)$ означает, что $f(x)$ является БМФ при $x \rarr x_0$

Примеры:

1. $sin(x) = o(1): x \rarr 0$

2. $sin(x) = o(x^{1/3}): x \rarr 0$
3. $x^2 = o(x): x \rarr 0$
4. $x = o(x^2): x \rarr +\infin$

$$ \lim_{x \rarr x_0}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 0 \rArr f(x) = o(g(x)) $$

Л $$ x \rarr x_0: f(x) = O(g(x)) \And g(x) = o(h(x)) \rArr f(x) = o(h(x)) $$

Следствие.

1. Транзитивность о-малого
2. Теорема сложения, как и для О-большого
3. $x \rarr x_0: f(x) = O(h(x)) \And g(x) = o(h(x)) \rArr f(x)*g(x) = o(h^2(x))$

Эквивалентные функции

$f(x)$ эквивалентна $g(x)$, если $f(x) - g(x) = o(g(x)): x \rarr x_0$

Символически эквивалентность обозначается тильдой (здесь будет $\equiv$).

Эквивалентность симметрична, транзитивна *и рефлексивна (кто бы мог подумать...)* (доказывается из определния эквивалентности и о-малого и неравенства треугольника)

Если $f(x)$ и $g(x)$ эквивалетны, то они называются **асимптотически равными**

$f(x) = g(x) + o(g(x))$ - **асимптотическое равенство**

Л. $$ x \rarr x_0: \forall x \in X, x \not= x_0 \newline \exist \lim_{x \rarr x_0}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1 \rArr f(x) \equiv g(x) $$ (Доказывается через подстановку формулы из определения эквивалентности и о-малого)

Некоторые эквивалентные функции

Посмотреть потом где-нибудь про асимптоматическое расхождение функции по степени х (примеры идут по втором столбце в таблице выше

Асимптота

$f(x)$ определена при $x > a$, тогда прямая l на графике O_{xy} называется **асимптотой графика функции** $f(x): x \rarr +\infin$, если расстояние $\rho(x, l)$ от точки графика $(x, f(x))$ до прямой l удовлетворяет асимптоматическому равенству $\rho(x, l) = o(1): x \rarr +\infin$

График функции $y = f(x)$ имеет асимптоту при $x \rarr +\infin \hArr \exist k, b: f(x) = kx + b + o(1)$

Из этой теоремы следует, что $\frac{f(x)}{x} = k + o(1) \And b = f(x) - kx + o(2)$. Следовательно: $$ k = \lim_{x \rarr +\infin}{\frac{f(x)}{x}} \And b = \lim_{x \rarr +\infin}{(f(x) - k)} $$

При $x \rarr -\infin$ асимптота определяется и ищется аналогично

22.11.02 - лекция 9. "Производные и дифференциалы функции одной переменной"

Разностное отношение и производная

О. Для любой точки x из $D(f): x \not= x_0$ частное $$ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} $$ Называется разностным отношением функции f в точке x_0

О. Если существует предел разностного отношения при $\Delta \rarr 0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0

Обозначается $f'(x_0)$ либо $\frac{df}{dx}(x_0)$

Если есть только односторонние пределы, то они называются левым и правым (*Где какой, надеюсь, понятно*). Обозначаются $f_-'(x_0)$ и $f_+'(x_0)$

О. f называется дифференцируемой в точке x_0, если $x_0 \in D(f) \And \exist f'(x_0)$

О. Операция нахождения производной называется дифференцированием, а оператор дифференцирования обозначается как $\frac{d}{dx}:y \rarr y'$. $\frac{d}{dx} \equiv D$

Некоторые производные

Самые элментарные я писать не стал $$ (a^x)' = a^x\ln a $$ $$ (\log_{a} x)' = \frac{\log_{a} e}{x} $$ $$ (\tg x)' = \frac{1}{\cos^2x} $$ $$ (\ctg x)' = \frac{-1}{\sin^2x} $$

Линейное приближение функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она представима в таком виде: $$ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) $$ Где $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 и равна нулю. Из этого следует, что допустима записб в виде такого асимптоматического равенства: $$ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) $$

Дописать про А-большое (upd.: перечитал и не совсем понял, зачем оно мне нужно, но да ладно)

Л. $$ \exist A \in \R: f(x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x) \newline \rArr \exist f'(x_0) = A $$

Критерий дифференцируемости

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполняется следующее асимптоматическое равенство $$ \exist A: f(x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x) $$

Дифференциал

Линейная функция $\Delta x \rarr f'(x_0)\Delta x$ называется дифференциалом f в точке x_0 и обозначается как $df(x_0)$

Уравнение касательной

Следует из определения производной

Из уравнения касательно получаем, что: $$ f'(x_0) = \tg \alpha = k $$ Где k - коэффициента наклона угла касательной по отношению к абсциссе, а α - угол наклона

Оператор дифференцирования

Т о свойствах

1. Сумма и разность производных
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Дифференцирование сложной функции

$$ y = f(g(x)) \newline y' = f'(g(x))g'(x) $$ Другой вариант записи $$ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg}\frac{dg}{dx} $$ Из этого свойства выводится формула $(x^a)' = ax^{a-1}$ (через представление $x^a = e^{a\ln x}$)

Гиперболические синус и косинус

Синус: $\sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. $(\sh x)' = \sh x$ Синус: $\ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. $(\ch x)' = \ch x$

Другие сложные функции

$$ (u^v)' = (e^{v \ln u})' = (e^{v \ln u})(v \ln u)' = u^v(v'\ln u + \frac{vu'}{u}) \newline \rArr (x^x)' = x^x(1 + \ln x) $$

Производная обратной функции

Если производная обратной к $y = f(x)$ функции $x = g(y)$ не равна 0, то получаем: $$ y_0 = f(x_0): f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} $$

22.11.09 - лекция 9 - "Производные и дифференциалы функции одной перменной"

Множественные производные

Производная второго порядка - производная от производной $$ f''(x) = (f'(x))' = \frac{d^2y}{dx^2}(x) $$ Производная n-го порядка определяется индуктивно $$ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}(x) $$

Производная выского порядка от суммы равна сумме производных выского порядка *(Как с обычными производными)*

Формула Лейбница

Т. Для любых двух функций $u = u(x)$ и $v = v (x)$, имеющих в точке x_0 все производные до порядка n включительно, их произведение также имеет производную порядка n, вычисляемую по формуле: $$ (uv)^{(n)} = \sum^n_{k=0} C^k_n u^{(k)} v^{(n-k)} $$ **Доказывается через индукцию и правило биноминальных коэффициентов** $C^k_n + C^{k+1}*n = C^k*{n+1}$

Теорема Ферма (*Не великая*)

Если $\exist f'(x_0) = 0$, то x_0 - точка экстремума. **При условии, что это внутренняя точка области определения**

Доказывается через левую и правую производные на коерстности внутри данной окрестности и отношение этих производныех к нулю при вычитании из производной нулевой точки

Теорема Ролля

Если функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) и при этом $f(a) = f(b) \rArr \exist \xi \in (a, b): f'(\xi) = 0$

Доказывается через теорему Вейрштрасса и Ферма

Л. Если производная на всём интервале равна нулю, то на данном отрезке функция тождественно постоянна

Теорема Лагранжа

Если функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) и при этом $f(a) = f(b)$ $$ \rArr \exist \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} $$ **Доказывается через теорему Ролля**

Следствия:

1. Если функция непрерывна в $O(x_0)$ и дифференцируема в $.O(x_0)$ $$ \rArr \forall x \in .O(x_0): \exist \xi \in (x,x_0) + (x_0,x): f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) $$
2. В другом виде описанное выше следствие можно записать так $$ \rArr \forall x \in .O(x_0): \exist \theta \in (0,1): f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x $$

Кусочно-дифференцируемая функция

Функция называется кусочно-дифференциремой на отрезке, если имеет конечную производную во всех точках этого отрезка за исключением некоторого возможного конечного множества точек.

Кусочно-дифференцируемая функция будет тождественно постоянно, если во всех точках кроме некоторого возможного конечного множества её производная равна нулю.

Теорема Коши

Если функции $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) и при этом $g(x) \not= 0$ $$ \rArr \exist \xi \in (a,b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} $$

Полином Тейлора

$$ P_n(x) = \sum^n_{k=0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k $$ Полином Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0

Полином Тейлора обладает следующими интерполяционными свойствами: $$ \forall k \in \N \And k <= n: P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) $$

Погрешность приближения: $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, а $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$ - формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом $r_n(x)$

Также остаточный член может записываться в форме Лагранжа: $$ f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)} \xi}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} $$

Формула Маклорена

Это полином Тейлора с $X_0 = 0$: $$ f(x) = \sum^n_{k=0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) $$ *Здесь формула также записана с остаточным членом*

22.11.16 - лекция

22.11.23 - лекция

Линейное пространство - множество векторов (векторное пространство). Определение будет дано далее.

Основные аксиомы векторного пространства подразделяются на 3 группы.

Группа условий A для множества векторов: На произведении множеств XxX задана операция, записываемая как сложение. При этом множество X, снабжённое этой операцией, образует Абелеву группу:

- Коммутативность
- Ассоциативность
- Нейтральный элемент (нулевой вектор)
- Существование обратного вектора, такого что $x + (-x) = \vec{0}$

Умножение вектора на скаляр обладает группой свойств B:

- Унитарность ($1 * x = x$)
- Ассоциативность ($(ab)\vec{x} = a*(b*\vec{x})$)

Группа свойств C связана с дистрибутивностью между сложением векторов и умножением вектора на скаляр

Линейное пространство

О. Множество векторов X с введёнными на нём операциями сложения и умножения на скаляр из поля K, удовлетворяющее всем группам условий, называется линейным пространством над полем K.

Линейная комбинация

О. Для любого конечного набора векторов из линейного пространства и скаляров из поля определена сумма: $$ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^n{\lambda_j x_j} $$ Которая также является вектором из этого линейного пространства. Называется такая сумма линейной комбинацией векторов с коэффициентами.

Линейная оболочка

О. это множество всевозможных линейных комбинаций. Обозначается как $$ (в действительности уголки более тупые). Альтернтаивное обозначение: $ = span{x_j \in M | j \in I}$

Матрица

О. Матрицей над полем K называется прямоугольная таблица, составленная из элементов K и содержащая m строк одинаковой длины n. ($A_{mn} = (a_{i,j})_{mn}$). Элементы матрицы называются коэффициентами.

Для множества всевозможных матриц одного размера вводятся следующие операции:

- Сумма матриц - матрица с коэффициентами из суммы коэффициентов складываемых матриц.
- Произвдение матрицы на скаляр - матрица с коэффициентами, равными соответствующим коэффициентам исходной матрицы, умноженным на скаляр.

нетрудно заметить, что выполняются все 3 группы условий => матрицы над полем K - линейное пространство

О. Если $m = n$, то матрицу называют квадратной. Если при этом все элементы, кроме, возможно, главной диагонали, равным нулю, матрица называется диагональной и кроме обычной записи имеет такую: $D = diag{d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}}$

О. Если у диагональной матрицы все элементы диагонали равны единицам, то матрица единичная. Обозначается букваой E либо I

О. Линейное пространство квадратных матриц размера $n*n$ над полем K обозначается $M_n(K)$ и для любых двух матриц из него определена операция умножения.

Умножение матриц

Каждый коэффициент будет ровняться сумме произведений всех элементов ряда одной матрицы на столбец другой: $$ C = AB \newline c_{ij} = \sum_{k=1}^n{a_{ik}b_{kj}}, \forall i, j \in [1, n-1] $$

Умножение матриц **НЕ КОММУТАТИВНО**, хотя и ассоциативно.

Умножение матрицы на единичную матрицу даёт исходную матрицу (*конкретно в этом случае коммутативность работает, лол*)

22.11.30 - лекция

Линейно зависимые векторы

О. Это векторы, для которых существует равная нулю линейная комбинация при условии, что хотя бы один из скаляров не равен нулю

- Комбинация с нулевым вектором
- Комбинация с обратными или одинаковыми векторами

О. Если условие линейной зависимости не выполняется, то вектора будут линейно независимыми.

Т. Векторы линейно зависимы $\hArr$ какой-либо один из векторов можно представить как линейную комбинацию всех остальных векторов.

Если подмножество векторов линейно зависимо, то и всё множество будет линейно зависимо. Независимым будет множество, если независимы все его подмножества.

Т. Если каждый вектор множества является линейной комбинацией некоторых векторов из другого множества, то первое множество не может быть больше второго.

О. Линейно независимая система называется максимальной, если при добавлении к ней любого ненулевого вектора она становится зависимой.

Эквивалентность множеств векторов

О. Множества векторов эквивалентны, если каждый вектор каждого из множеств является линейной комбинацией векторов другого множества.

Размерность линейного пространства

Для любого линейного пространства возможна одна из двух ситуаций:

1. В пространстве существуют линейно независимые комбинации векторов любой длины. В таком случае говорят, что пространство бесконечномерно и пишут $\dim X = +\inf$
2. В пространстве есть линейно зависимые комбинации векторов длиной до некоторого очень большого натурального числа. Тогда говорят, что пространство конечномерно и пишут $\dim X < +\inf$

В линейной алгебре работают с конечномерными пространствами. Далее везде будут подразумеваться именно они.

Базис

О. Если в линейном пространстве любая максимальная независимая система состоит из n векторов, то такое пространство называют n-мерным, а n - размерностью. Записывают как $\dim X = n$

О. Любая максимальная система линейного пространства называется базисом этого пространства.

Любой вектор линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации его базиса, при том единственной. (*Следует из определения максимальной линейно независимой системы, а единственность - из определения независимой системы самой по себе*)

Т. Любую систему меньше базиса можно дополнить до него.

Координаты

О. Координатой вектора называется сумма всех его скалярных коэффициентов при разложении на базис (*Также могут называть корданатами и все отедельные скаляры при элементах базиса*)

Матрица перехода

О. Векторы из одного базиса можно получить через линейную комбинацию другого базиса. Если расположить слагаемые этого другого базиса с их коэффициентами в виде матрицы, где сумма каждого ряда - скалярная координата линейной комбинации для получения элемента первого базиса, то мы получим матрицу перехода от одного базиса, к другому.

О. X, Y - изоморфные пространства над общим полем, если существует биективное отображение $f: X \mapsto Y$, такое, что $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ либо просто $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ (*условно это свойство можно назвать дистрибутивностью*). f в таком случае называется изоморфизмом.

- По определнию для изоморфизма всегда будет обратная функция.
- Базис, проведённый через изоморфизм, станет базисом пространства, в которое отображает этот изоморфизм
- *Ну это уже максимально очевидно, но да ладно.* Размерности изоморфных пространств совпадают.

Т. Конечномерные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.

22.12.01 - семинар

Определитель матрицы

Общее правило нахождения определителя таково: складываем для любой строки или столбца произведение $a_{ij}A_{ij} = a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} - минор элемента a_{ij}, равный определителю матрицы, из которой изъяты i-я строка и j-ый столбец.

A_{ij} называется алгебраическим дополнением к a_{ij}

Определитель верхнетреугольной матрицы

О. Верхнетреугольная матрица - матрица, в которой ниже главной диагонали все элементы равны нулю. Её определитель равен произведению главной диагонали.

Решение "квадратной системы уравнений" матричным методом (метод Крамера)

Применимо только для линейных уравнений

Если мы возьмём все коэффициенты при переменных и расположим их в матрице A по соответствующим столбцам, то:

- Если $\det A \not = 0 \rArr$ существует единственное решение.
- Представляем значения уравнений как матрицу из одного столбца и подставляем его на место столбцов, соответствующих переменным.
- Значение определителя такой матрицы, поделённое на $\det A$ и будет значением данной переменной.

22.12.07 - лекция

Вещественное евклидово пространство

О. Так называется X, если:

- конечномерное линейной пространство над полем $\R$
- задаёт скалярное произведение любых двух своих элементов

Опреация скалярного произведения x на y обозначается как (x,y):

- $(x,x) > 0$
- $(0, 0) = (0, x) = (x, 0) = 0$
- $(x,y) = (y,x)$
- Линейно по каждому из своих аргументов ($(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(x, z)$ *и со вторым аргументом можно также*)

О. Норма вектора - это его длина: $||v|| = \sqrt{(v,v)}$

О. Расстояние между векторами: $||u - v|| = \sqrt{(u - v, u - v)}$

Скалярное произведение n-мерных векторов - это сумма произведения векторов, полученных при разложении x и y по базису.

Неравенство Коши-Буняковского

Т. $|(u, v)| \le ||u|| * ||v||$

С. "Неравенство треугольника" $||u + v|| \le ||u|| + ||v||$

Из теореме Коши-Буняковского также следует, что $-1 \le \frac{(u,v)}{||u|| * ||v||} \le 1$

И отсюда определяется угол между векторами $\phi = \arccos(\frac{(u,v)}{||u|| * ||v||})$

О. Если угол между векторами прямой, то векторы оротогональны друг другу. **Нулевой вектор ортогонален любому вектору**

Т. "Пифагора" Если все векторы в некотором множестве попарно ортогональны, то справедливо следующее равенство: $$ ||\sum_{i=1}^n{v_i}||^2 = \sum_{i=1}^n{(||v_i||^2)} $$ *Доказывается через определение скалярного произведения и нормы*

О. Базис евклидова пространства называется ортогональным, если скалярное произвдение любых двух его различных векторов равно нулю. Если при этом длина любого вектора равна 1, то базис называется **ортонормированным** (*то есть если скалярное произведение на самого себя равно 1*)

Т. Любые ненулевые взаимноортогональные векторы линейно независимы

О. В евклидовом пространстве оболочка $span{e}$ называется прямой, а e - направляющим вектором

О. Если вектор e - единичный, то $(v, e)e$ - проекция v на прямую $span{e}$

Прямые с направляющими из базиса - это оси координат.

О. Ортогональное дополнение к ненулевому вектору - это множество всех векторов, ортогональных к данному. Обозначается $X_1^\perp$

Дальше идёт какой-то слишком жуткий мрак про ортогонализацию...

22.12.08 - семинар

Минор и ранг матрицы

Минор матрицы - определитель, полученный произвольным выбором из матрицы одинаового количества столбцов и строк.

Главный минор мы получим, если будем брать столбцы и строки с левого верхнего угла.

Ранг матрицы k-го порядка - это:

- максимальный ненулевой минор.
- максимальное число линейно независимых столбцов или строк (**Не может быть больше минимального из количеств стлбцов и строк** (*Что следует из первого определения*))

Методы нахождения ранга:

- количество единиц в матрице, полученное после всех возможных линейных преобразований
- колиечство ненулевых элементов в последнем столбце после преобразований, благодаря которым ниже главной диагонали остались только нули
- Метод Гаусса (*обобщённый вид методов выше*) - рангом будет колиечство строк с ненулевыми элементами, которое после всех возможных преобразований
- Также можно просто считать миноры от самых малых к самым большим

Важно! В преобразованиях Гаусса мы не можем линейно комбинировать столбцы, только строки

СЛАУ

СЛАУ - система алгебраических линейных уравнений может быть выражена в виде матрицы из коэффициентов при переменных + столбец со свободными членами.

- Если все свободные члены = 0, то СЛАУ называется однородной, иначе - неоднородной
- Если СЛАУ не имеет решений => СЛАУ несовместная
- Имеет решения => СЛАУ совместная
    - Решение одно => СЛАУ определённая
    - Бесконечное множество решений => СЛАУ неопределённая

ФСР (фундаментальная система решений)

О. Это любая совокупность линейно независимых решений. Существует у однородных СЛАУ. Практически, это набор некоторыех матриц, помноженных на константы, дающий итоговые значения для переменных уравнения.

Теорема Кронекера-Капелли

Т. СЛАУ совместима (то есть имеет решения) тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.

Основная (A) - коэффициенты. Расиширенная ($\tilde{A}$) - с добавлением столбца свободных членов

Общее решение и ФСР для однородных СЛАУ

С. из теоремы Кронекера-Капелли Если в однородной матрице $rang < n$ (кол-во переменных, то система совместима и неопределенённа, а значит имеет множество решений), то матрица имеет ФСР из $n - r$ линейно независимых решений.

Общее решение такой СЛАУ находится через выбор базисных переменных по рангу матрицы и разделение её на базисную и другую часть (Данное действие аналогично перекидыванию переменных в уравнениях). Предварительно будет крайне желательно базисную часть свести к единичкам преобразованиями Гаусса.

ФСР можно будет найти, если записать на месте свободных переменных единичную матрицу, а потом из неё значения подставить в базисную часть. Сумма наборов получившихся значений, помноженная на константы и будет ФСР.

Общее решение для неоднородной системы

Решением будет сумма векторов ФСР однодродной системы с константами + частное решение неоднородной системы

22.12.14 - лекция

Определитель матрицы (теория)

О. Определение вводится индуктивно из универсального метода подсчёта через алгебраическое дополнение. (см. в конспекте семинара)

Свойства матрицы (*рядами будут обозначаться сразу столбцы и строки*):

1. Транспонирование матрицы не влияет на определитель
2. Определитель матрицы меняет знак при перестановки рядов
3. Коэффициент при ряде можно вынести из-под определителя
4. Если ряд равен нулям, то определитель равен нулю
5. Если ряды матрицы пропорциональны (линейная комбинация с некоторым k даёт нуль), то определитель равен нулю
6. Линейная комбинация рядов не влияет на значение определителя

Перестановки (*хз, зачем это тут, но пусть будет*)

Изменение позиции двух элементов в перестановке называется транспозицией (*лол*)

О. Перестановка называется чётной, если она получена из главной перестановки чётным числом транспозиций. Обычно число транспозиций, дающее вектор $\vec{g}$ обозначается как $t(\vec{g})$

Ещё одно определение определителя

Из понятий перестановок можно вывести следующее определение:

О. Определитель матрицы $n*n$ ($T = n!$) - $\det A = \sum_{j=1}^T((-1)^{t(j)}a_{1,1j}a_{2,2j}...a_{3,nj})$

ИМХО: определение с семинара, на которое есть ссылка в начале этой лекции куда приятнее, хотя это и более фундаментально

Ещё рах про минор

Просто обозначу, что говорили тут о нём, ничего нового не было (Всё важное тут и по ссылке в начале этой лекции)

О. Диагональная матрица - все элементы за исключением главной диагонали равны нулю. Ограничений на элементы главной диагонали не накладывается

О. Единичная матрица - матрица, в которой главная диагональ равна единицам, а все прочие элементы - нулям

Теорема об ортогональности строк адъюнктам

Т. *осмыслить и дописать*

Определитель умноженных матрц

$\det AB = \det A * \det B$

Ещё раз про метод Крамер

Смотри тут

Доказывается при помощи метода поиска определителя через алгебраические дополнения

Ещё о СЛАУ

Основной материал

Тривиальное решение - $X = (0)$. Гарантированно есть у однородных СЛАУ

Ещё раз о ранге

Ну и снова туда же

Полученные из матрицы $n*m$ миноры называются порождёнными определеителями

Ещё раз теорема КрОнекера-КАпелли

ТЫК

22.12.15 - семинар

Очевидно, но достаточно полезно:

Если не дополненная матрица имеет максимально возможный ранг, то и у дополненно матрицы ранг будет такой же

22.12.21 - лекция

Аффинные пространства

О. Это непустое множество A над векторным пространством X точек в n-мерном (**конечномерном**) пространстве. Любым двум точкам $\dot{A}, \dot{B}$ сопоставляется вектор из X, связывающий эти точки.

Аксиомы аффинного пространства:

1. $\forall\dot{A} \in A \space \forall\vec{\alpha} \in X: !\exist\dot{B} \in A : \vec{AB} = \alpha$
2. $\forall\dot{A}\dot{B}\dot{C} \in A : \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \rArr \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$

$\dim A = \dim X$

Аффинная система координат

О. Аффинная система координат в пространстве A называется совокупность из фиксированной точки $\dot{O}$ и базиса линейного пространства X. Записывается как $O_{e_1,e_2,...,e_n}$

Для произвольной точки $\dot{A}$ вектор $\vec{OA}$ будет радиус-вектором этой точки. В таком случае $\vec{OA}$ представим в виде линейной комбинации $\vec{OA} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i e_i)$. Вектор скаляров $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ называют координатами точки $\dot{A}$ в системе $O_{e_1,e_2,...,e_n}$

Т. Любые 2 аффинных пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу

Преобразование аффинного пространства

О. Аффинное преобразование - преобразование аффинного пространства в себя, заданное формулой $\vec{y} = C\vec{x} + \vec{b}$, где C - невырожденная матрица $n*n$, векторы $\vec{x}, \vec{y}$ - координаты точек

Т. "Общего вида аффинного преобразования". Изменение системы координат аффинного пространства аффинное преобразование имеет другое представление, но остаётся справедливым. При этом определитель матрицы C никак не зависит от выбранной системы координат, то есть является **инвариантом**

Свойства аффинных преобразований пространства

1. Любое аффинное преобзование является однозначно обратимым: $y = Cs + b \hArr x = C^{-1}y - C^{-1}b$
2. Последовательгность нескольких аффинных преобразований также является аффинным преобразованием и называется композицией
3. Произведение аффинных преобразований ассоциативно

4. Тождественное преобразование точки саму в себя также является аффинным. С единичной матрицей C и $b = \vec{0}$

Собственное аффинное преобразование

О. Преобразование матрицы в себя, где $\det C > 0$ называется собственным

"Геометрические" свойства аффинного пространства

A - аффинное пространство, с которым ассоциировано векторное пространство X. $Y \subset X$

Плоскость

О. Плоскость - это подмножество точек P аффинного пространства, заданное равенством: $P = \dot{M} + Y = {\dot{N} \in A | \dot{N} = \dot{M} + y, y \in Y}$

$\dim P = m = \dim Y \le n$

- Y - направляющая P
- $\dot{M}$ - точка, лежащая в P
- $m = 0 \rArr P$ - это точка
- $m = 1 \rArr P$ - это прямая
- $m = n-1 \rArr P$ - это гиперплоскость

Т. Всякая плоскость в аффинном пространстве сама является аффинным пространством с ассоциированным вектором-направляющим

О. Любые две плоскости аффинного пространства в направлении одного и того же линейного пространства параллельны

Т. Взаимнооднозначное преобразование аффинного пространства в себя, при котором всякая прямая отображается в прямую того же пространства, является аффинным преобразованием

Л. При аффинном преобразовании сохраняются все параллельности и пересечения пространств и прямых

Т. "Основное свойство аффинного преобразования". Аффинное преобразование евклидова пространства сохраняет отношение длин направленных отрезков, лежащих на одной прямой аффинного пространства.

23.02.01 - лекция

Кватернионы

$\dim \mathbb{H} = 4$ - $\mathbb{H}$ - кватернионы. Являются расширением комплексных чисел C

$g = t + xi + yj +zk \space : \space t, x, y, z \in \R$. Коэффициенты i, j, k - **кватернионные единицы** или **базисные кватернионы** (*являются мнимыми*)

Операции над кватернионами

Для кватернионов вводятся операции сложения и умножения. При этом почти все свойства этих операций сохраняются также, как и у $\R$, кроме коммутативности умножения. Для него есть особое правило.

Сложение осуществляется по тем же правилам, что и для комплексных чисел.

Также для $\mathbb{H}$ вводится умножение на $\R$, за счёт которого мы получаем четырёхмерное векторное пространство (*фактически, это операция умножения на скаляр*)

- Перемножение единицы с любым элементом кватерниона даёт тот же элемент (*конкретно тут коммутативность работает*)
- Умножение кватернионной единицы на саму себя даёт -1
- Для последующих операций удобно представить замкнутое кольцо кватернионных единиц: $..., i, j, k, i, j, k, ...$
    - Умножение идущих слева направао единиц даёт следующую кватернионную единицу ($ij = k$, $jk = i$, $ki = j$)
    - Умножение единиц, идущих справа налево даёт идущую перед ними единицу со знаком минус ($ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$)
- **За счёт этих правил можно вывести формулу умножения кватернионов, получаемую классическим раскрытием скобок при умножении**

Простраство кватернионов с введёнными на нём операциями сложения, векторного умножения и умножения на скаляр обладает некоторвми свойствами векторного пространства:

1. Коммутативность сложения
2. Ассоциативность умножения и сложения
3. Дистрибутивность обоих видов

При этом умножение для квантернионов не коммутативно! (*это следует из разных результатов умножения кватернионных единиц слева направо и справа налево*)

Сопряжённые кватернионов

$g = t + xi + yj + zk \rArr \vec{g} = t - xi - yj - zk$

$g\overline{g} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$

Отсюда мы можем определить модуль кватерниона: $|g| = \sqrt{g\overline{g}}$

Л.

1. $|gh| = |g||h|$
2. $\overline{gh} = \overline{g}\overline{h}$
3. $\overline{\overline{g}} = g$

Л. $\forall g \in \mathbb{H} : \exist! g^{-1} : gg^{-1} = g^{-1}g = 1$. Так как операция деления для кватернионов не определена, выводится это число следующим способом: $g \not ={0} \rArr g^{-1} = \frac{1}{g} = \frac{\overline{g}}{g\overline{g}} = \frac{1}{|g|^2}\overline{g}$

Кватернионы с модулем равным 1 образуют замкнутую относительно умножения группу $\mathbb{H}_1$

Состав кватерниона

О. Для кватерниона $g = t + xi + yj +zk$:

- t - скалярная часть. $t = \frac{g + \overline{g}}{2}$
- кватернион $u = xi + yj +zk$ - векторная часть. $u = \frac{g - \overline{g}}{2}$

О. Кватернион без скалярной части является вектором и называется вектор-кватернион. Вектор-кватернион удовлетворяет равенству $-g = \overline{g}$

Векторное, скалярное и обычное произведение для кватернионов

Вектор-кватернионы образуют линейное пространство $\mathbb{H}_0$, изоморфное пространству $\R^3$

Для этого пространства по классическим правилам определены скалярное произведение и векторное (через определитель матрицы).

Два вида произведений векторов связаны с произведением кватернионов (*коими вектор-кватернионы всё также являются*) следующим равенством: $uv = -(u,v) + u \times v$

$\rArr u,v \in \mathbb{H}_0 \hArr (u,v) = 0$

Вращение при помощи кватернионов

Для любого кватерниона g из группы $\mathbb{H}_1$ можно составить особую матрицу $Q = T(g)$, *элементы которой считаются по столь непонятному закону, что приведу я их тут только в качестве скриншота*

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ!

Возможно матрица Q находится умножением вектор-кватерниона на сопряжённый?

$$q_{11} = s^2 + a^2 - b^2 - c^2, \quad q_{12} = 2ab - 2sc,$$

$$q_{13} = 2ac - 2sb, \quad q_{21} = 2ab + 2sc,$$

$$q_{22} = s^2 - a^2 + b^2 - c^2, \quad q_{23} = 2bc - 2sa,$$

$$q_{31} = 2ac - 2sb, \quad q_{32} = 2bc + 2sa,$$

$$q_{33} = s^2 - a^2 - b^2 + c^2.$$

Достаточно легко запомнить значения этих коэффициентов по следующим правилам:

1. Работая с кватернионом $g = s + ai + bj + ck$, дадим множителям при кватернионных единицах коэффициенты от 1 до 3
2. Если задаётся элемент на главной диагонали, то он будет равняться сумме квадратов s и того, коэффициента, которому соответствует номер строки/столбца, остальные 2 квадрата будут со знаком минус
3. Для прочих элементов q_{ij} ответом будет 2 умножить на коэффициенты с номерами i, j минус, $2s$ умноженное на третий коэффициент

О. Особенностью этих матриц является то, что при умножении на произвольный вектор-кватернион они дают вектор-кватернион такой же длины. При этом определитель этих матриц также = 1. Такие матрицы относительно матричного умножения образуют группу матриц вращения, которая обозначается $SO(3)$.

Т. Геометрически, умножение точки из $\R^3$ на матрицу $Q = T(g)$, где $g = s + \vec{a}$ - кватернион с ненулевым кватернион-вектором $\vec{a}$ - означает вращение этой точки относительно прямой, проходящей через начало координат с направляющей $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} : |\vec{n}| = 1$. Угло вращения ω зависит от кватерниона следующим образом: $s = \cos{\frac{\omega}{2}}$

При этом кватернион вращения g можно представить как $g = \cos{\frac{\omega}{2}} + \vec{n}\sin{\frac{\omega}{2}}$

Л. "Об умножении матриц вращения" $Q_1 Q_2 = T(g_1) T(g_2) = T(g_1 g_2)$

Путём не очень сложных, но долгих преобразований мы можем прийти к выражению:

- $g_1 = s_1 + \vec{a_1}$
- $g_2 = s_2 + \vec{a_2}$
- $\rArr g_1 g_2 = (s_1 s_2 - (\vec{a_1}, \vec{a_2})) + (s_1 \vec{a_2} + s_2 \vec{a_1} + \vec{a_1} \times \vec{a_2})$

- $\rArr$
  - $\vec{n} = s_1 \vec{a_2} + s_2 \vec{a_1} + \vec{a_1} \times \vec{a_2}$
  - $\cos{\frac{\omega}{2}} = s_1 s_2 - (\vec{a_1}, \vec{a_2})$

23.02.03 - семинар

Линейные операторы

Отображение одного линейного пространства в другое называется линейным оператором, если оно аддитивно и однородно:

1. $a(X + Y) = aX + aY$
2. $\lambda(aX) = a(\lambda X)$

Ядро линейного оператора (*далее* **ЛО**): $\ker A = { x \in X | a(x) = 0 }$

Образ ЛО: $Im \space A { y \in X | a(x) = y }$

Размерность образа - ранг ЛО

Размерность ядра - дефект ЛО

Т. Сумма ядра и дефекта равна размерность всего лин. пространства.

Т. Обратный ЛО существует $\hArr$ дефект ЛО = 0

Если для пространства X мы возьмём базис $E = (e_1, ..., e_n)$, то ЛО a можно сопоставить матрицу $A = (ae_1, ..., ae_n)$

Зная матрицу отображения, можно вычислить ранг и дефект.

Дефект равен размерности ФСР из матрицу, которая представляется в виде однородной СЛАУ. Вычислив ядро, мы должны найти линейно независимые столбцы матрицы в количестве (столбцы_матрицы - размерность_ядра) - это и будет базис образа

Ранг находится при помощи алгоритма Чуркина:

- Дописываем над матрицей A единичную матрицу E и преобразованиями столбцов получаем новую матрицу. $E \rarr B$, $A \rarr C$. C должна быть ступенчатой
- Ненулевые столбцы матрицы B - векторы базиса ядра
- Ненулевые столбцы матрицы C - векторы базиса образа

При переходе от одного базиса к другому матрицу отображения в новом базисе можно найти по формуле $A' = B^{-1}AB$, где:

- A - исходная матрица
- B - матрица перехода

Если ЛО отображает один вектор в другой, то матрицу можно вычислить следующим образом:

- V - исходные векторы, расположенные по столбцам
- U - полученные векторы

- A - матрица отображения a

$AV = U \rArr AVV^{-1} = UV^{-1} \rArr A = UV^{-1}$

23.02.06 - лекция

Первообразная

О. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке δ, если $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x); x \in \delta$

Л. $\forall C - const : (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

О. Если $F(x)$ дифференцируется не на всём промежутке δ, но количество точек без производной конечно, то при $F'(x) = f(x)$ $F(x)$ всё также будет первообразной. *Лемма выше также справедлива и для кусочно-дифференцируемой первообразной*

О. Любая первообразная функции $f(x)$ также называется неопределённым интегралом и обозначается $\int{f(x)dx}$:

- $\int$ - знак интеграла
- $f(x)dx$ - подынтегральное выражение
- $f(x)$ - подынтегральная функция

Взятие неопределённого интеграла от функции - интегрирование функции

Свойства неопределённых интегралов

1. $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
2. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$
3. Интеграл суммы = сумма интегралов
4. Наружу можно выносить свободный коэффиуиент (однородность)

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^a dx = \frac{1}{a + 1}x^{a+1} + C$; $a \not = -1$
    1. При $a = -1$: $\int \frac{1}{x}dx = \ln |x| + C$
3. $\int \frac{1}{1 + x^2}dx = \arctg |x| + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$; $a > 0, a \not = 1$
    1. $\rArr \int e^x dx = e^x$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2x} = \tg x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2x} = -\ctg x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \plusmn 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \plusmn 1}| + C$

Интегрирование по частям

Если функция $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемые на промежутке δ, тогда если произведение $f'(x)g(x)$ имеет на этом промежутке первообразную, то и функция $f(x)g'(x)$ также имеет первообразную и при этом: $$ \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx $$ Или иной вариант записи: $$ \int udv = uv - \int vdu $$

Вычисления интеграла через замену переменной интегрирования

Пусть функции $f(y)$ и $\phi(x)$ определены на некотором промежутке. $\phi(x)$ дифференцируема и при этом имеет смысл выражение $f(\phi(x))$, тогда произведение $f(\phi(x))\phi'(x)$ имеет в качестве первообразной $F(\phi(x))$, где $F(y)$ - первообразная для $f(y)$: $$ \int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(y)dy $$

Интегрирование рациональных дробей

$R(x) = \frac{Q_m(x)}{Q_n(x)}$. Если $m < n \rArr$ дробь правильная.

Л. О разложении полиномов на множители. Любой полином $P_n(x)$ представим в виде $(x - a)^k$ и $((x - \alpha)^2 + \beta^2)^k \space : \space \beta > 0$. При этом сумма степеней всех сомножителей в этом полиноме равна его степени n

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, мы интегрируем сумму её целой и дробной части (дробная часть имеет $m-n$ слагаемых). Для интегрирования правильных дробей существуют следующие формулы:

- $\int \frac{A}{(x - a)^k} =$
  - $\frac{A}{(x - a)^k}$ при $K > 1$
  - $A \ln|x - a|$ при $k = 1$
- $\int \frac{A}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^k} = $ лин. комбинация простых дробей того же вида и, возможно, функции $\ln ((x - \alpha)^2 + \beta^2)$ или $\arctg \frac{x - \alpha}{\beta}$

Разбиения

В этой теме далее везде пойдёт речь о конечных и непустых промежутки

О. Разбиение промежутка - это множество попарно не пересекающихся не пустых промежутков, которые в объединении дают исходный промежуток. Обозначается $\tau(\Delta)$

Продолжение разбиения - это новое разбиение относительно старого, если любой мелкий промежуток новго разбиения содержится в некотором промежутке старого разбиения.

Переход от некоторого разбиения к его продолжению называется измельчением сетки узлов.

Л. Для любых двух разбиений одного и того же отрезка существует третье разбиение, которое является продолжением двух данных. *Доказывается через множество непустых объекдинений двух данных разбиение, которое, в свою очередь, также будет разбиением*

Суммы Дарбу

Возьмём некоторую функцию $f(x)$, определённую на промежутке Δ, а также разбиение $\tau(\Delta)$. Условимся обозначать:

- $m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$

- $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$
- $|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$ - длина промежутка. Иногда также обозначается Δx_i и называется приращением переменной на промежутке

С этими обозначениями мы можем определить 2 линейные комбинации:

- $s(f, \tau) = \sum_{i = 1}^N m_i |\Delta_i|$
- $S(f, \tau) = \sum_{i = 1}^N M_i |\Delta_i|$

Эти комбинации называются нижней и верхней интегральной суммой Дарбу соответственно

$s(f, \tau) \le S(f, \tau)$

Л. о поведении сумм Дарбу при измельчении. Пусть $\tau(\Delta)$ - продолжение разбиения $\tau'(\Delta)$. Тогда $s(f, \tau') \le s(f, \tau) \le S(f, \tau) \le S(f, \tau')$. *Доказывает через разбиение какого-то из промежутков пополам и факт того, что для каждого из этих новых промежутков m будет >= исходному, а M - <= исходному*

Л. Для данного промежутка Δ и функции $f(x)$ и произвольных разбиений любая нижняя интегральная сумма Дарбу будет меньше любой верхней. *Доказывается через лемму об общем продолжении двух разбиений и лемму о поведении интегральных сумм при измельчении разбиения*

23.02.09 - семинар

Собственные вектора ЛО

О. Собственный вектор $\vec{v}$ линейного оператора (с.в.)

О. Собственное значение λ линейного оператора (с.з.)

Найти с.з. можно через уравнение с матрицей отображения: $det(A - \lambda E) = 0$

Далее для поиска с.в. используем $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$det(A - \lambda E)$ можно представить в виде следующего многочлена: $(-\lambda)^{n} + (-\lambda)^{n-1}c_1 + ... + (-\lambda)^{n-k}c_k + ... + c_n$, где c_i - сумма всех главных миноров i-го порядка **изначальной матрицы A**. Кратность некоторых корней может быть > 1. Это называется алгебраической кратностью. Геометрической кратностью будет размерность полученного с.в.

Также собственные вектора можно получить методом Чуркина, если в качестве нижней матрицы использовать $A - \lambda E$

С.з. и с.в. не зависят от базиса

Если матрицу из с.в. умножить на матрицу отображения, то мы получим диагональную матрицу, где на диагонали будут располагаться все с.з. Этот процесс называется диагонализация. Она возможна только в случае, когда для кратность алгебраическая и геометрическая равны.

Спектр матрицы - множество с.з.

Если мы работаем с полем комплексных чисел, то для $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \hArr v_1 = \overline{v_2}$

23.02.15 - лекция

Интегральная сумма Римана

О. Для данных $f(x), x \in \Delta, \tau(\Delta)$ линейная комбинация $\sigma(f, \tau) = \sum_{i=1}^N(f(\xi_i)|\Delta_i|) : \forall \xi_i \in \Delta_i$ - интегральная сумма Римана функции f. Также обозначается как $\sigma(f; \tau, \xi) : \xi = {\xi_i | \xi_i \in \Delta_i}$

Из определения сумм Дарбу и Римана следует, что:

- $s(f, \tau) \le \sigma(f; \tau, \xi) \le S(f, \tau)$
- $s(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f; \tau, \xi)$
- $S(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f; \tau, \xi)$

Интегралы Дарбу и Римана

О.

- $\underline{J}(f) = \sup_{\tau} s(f, \tau)$ - нижний интеграл Дарбу
- $\overline{J}(f) = \inf_{\tau} S(f, \tau)$ - верхний интеграл Дарбу

В лекции даётся не самое понятное опредление "пробегания" одного разбиения по другому. Вот моя интерпретация: **Записи $\sup_{\tau}$ и $\inf_{\tau}$ означают, что мы пробегаемся по всем возможным разбиениям в рамках Δ**

$\underline{J}(f) \le \overline{J}(f)$

Данные интегралы никак не зависят от исходного разбиения, только от функции.

Если верхний и нижний интегралы Дарбу конечны и равны, то функция, дающая их, называется интегрируемой по Риману на заданном промежутке. $J = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ - интеграл Римана от функции f на промежутке Δ. Также обозначается как $\int_{\Delta} f(x)dx$

Для ступенчатой функции $f(x) = C_i : \forall x \in \Delta_i$: $\int_{\Delta} f(x)dx = \sum_i^N (C_i \Delta_i)$

Т. Если функция интегрируема по Риману на промежутке числовой оси, то она ограничена на этом промежутке. (*Доказывается от противного: если функция будет неограничена сверху или снизу, то её сумммы Дарбу и, как следствие, интегралы Дарбу не будут сходиться*).

Ограниченность функции на отрезке - необходимое, но недостаточное условие интегрируемости этой функции.

Достаточные условия интегрируемости по Риману

Т. "Критерий Римана" Функция интегрируема на некотором промежутке $\hArr \forall \epsilon > 0 : \exist \tau_{\epsilon}(\Delta) : S(f, \tau_{\epsilon}) - s(f, \tau_{\epsilon}) < \epsilon$.

- *В одну сторону доказывается через Лемму о поведении верхней и нижней сумм Дарбу при измельчении на двух взятых изначально разбиениях, каждое взятое изначально разбиение будет отличаться от интеграла Римана на $\frac{\epsilon}{2}$, тогда при измельчении вместе они будет ещё ближе к $J(f)$, за счёт чего и получаем искомую оценку.*
- *В обрутную сторону доказывается через определение нижнего и верхнего интеграла Дарбу, которые всегда будут $\ge$ и $\le$ любых нижней и верхней суммы Дарбу соответственно. Переходя к пределу для $\epsilon \rarr 0$ получаем конечность верхнего и нижнего интеграла Дарбу, и их содимость в одной точке*

Колебание функции

О. Колебание функции $f(x)$ на промежутке $g \subset Df$ - это разность $\omega(f, g) = \sup_{x \in g} f(x) - \inf_{x \in g} f(x)$.

- Любая ограниченная функция имеет конечное неотрицательное колебание
- $\forall x,y \in g : |f(x) - f(y)| \le \omega(f, g)$

Через колебания можно представить разность верхней и нижней суммы Дарбу: $S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_i^N((M_i - m_i)|\Delta_i|) = \sum_i^N(\omega(f, \Delta_i)|\Delta_i|)$

Через этот переход можно сформулировать **критерий Римана** следующим образом: Функция интегрируема на некотором промежутке $\hArr \forall \epsilon > 0 : \exist \tau_{\epsilon}(\Delta) : \sum_i^N(\omega(f, \Delta_i)|\Delta_i|) < \epsilon$. *Доказательство аналогично критерию Римана за счёт факта того, что мы просто заменили разность интегральных сумм на колебания*

Следствие критерия Римана

Л. О последовательности разбиений Функция интегрируема на некотором промежутке $\hArr \exist { \tau_k(\Delta) }*{k=1}^{\infty}: \lim*{k \rarr +\infty} (S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)) = 0$ и при этом: $$ \int_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k \rarr +\infty} S(f, \tau_k) = \lim_{k \rarr +\infty} s(f, \tau_k) $$

Мелкость сетки

О. Максимальный шаг сетки называют её мелкостью и обозначают $|\tau| = \max_i^N |\Delta_i|$

Т. О пределе суммм Дарбу Если к множеству из Леммы о последовательности разбиений добавить условие: $|\tau_k| \rarr 0$, то будет выполняться равенство (*уже писал его выше, но `Ctr+C`, `Ctr+V` ничего не стоит XD*): $$ \int_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k \rarr +\infty} S(f, \tau_k) = \lim_{k \rarr +\infty} s(f, \tau_k) $$

Доказательство слишком страшное, чтобы когда-либо его вспоминать, озвучивать и тем более записывать

23.02.16 - семинар

Жорданова форма

Жорданова нормальная форма линейного оператора - матрица блочно-диагонального вида, состоящая из расположенных на главной диагонали Жордановых клеток $J_{k_i}(\lambda_i)$ - матриц, где на главной диагонали находится λ_i, а диагональ сразу над главной - единицы. Всё остальное - нули. Размерность матрицы - k_i

Для данной λ^* можно посчитать следующие параметры:

- m_j - кол-во Жордановых клеток размерности j. $m_j = r_{j-1} + 2r_j + r_{j+1}$
- r_k - ранги миноров размера $n - k$ матрицы $A - \lambda E$ (то есть $r_0 = rang A$)

Жорданов базис

Жорданов базис $X = W_1 + W_2 + ... W_n$. $\dim W_i = m_i$. $\sum m_i = n$

Алгоритм построения:

1. Для каждого λ определим алгебраическую кратность k и геометрическую кратность r
   1. $r = k \rArr \lambda$ соответствует k Жордановых клеток 1*1
2. $r < k \rArr$ находим собственные вектора v, а далее $n - k$ присоединённых векторов u через формулу $\det(A - \lambda E)u = v$. (**Система неоднородная, поэтому особое внимание надо уделять наличию или отсутствию совместности по Кронекеру-Капелли**)

23.02.22 - лекция

LEQ-критерий интегрируемости

Функция $f(x)$ интегрируема $\hArr$ на промежутке $\Delta \subset Df$ найдится хотя бы одна последовательность $\tau_k(\Delta)$, что при $\lim_{k \rarr \infty} |\tau_k| = 0$ (Будет исчезающей) и выполняется следующее предельное равенство $\lim_{k \rarr \infty} (S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k)) = 0$ (*у меня стойкое ощущение, что это то же самое, что было выше...*)

При выполнении всех этих условий интеграл также можно записать в виде $\int_{\Delta} f(x)dx = \lim_{k \rarr \infty} \sigma(f; \tau_k, \xi)$

Интегрирование на промежутках, связанных между собой каким-либо образом

Л. Если $f(x)$ интегрируема по Риману на промежутке $\Delta \rArr$ она будет интегрируема и на любом промежутке $\Delta' \subset \Delta$. *Доказывается через тот факт, что любое колебание меньшего промежутка будет $\le$ колебанию большего промежутка, а значит и разность сумм Дарбу для меньшего промежутка будет $\le$, что в пределе нам даёт 0, а это уже отсылает к предельному критерию Римана*

Л. Если $f(x)$ интегрируема на смежных и, возможно, пересекающихся промежутках Δ' и Δ'', то она будет интегрируема и на $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ (*Для нетривиальных случаев (тривиальными мы считаем $\Delta = \Delta'$ или $\Delta = \Delta''$) доказывается через взятие разности множеств $\Delta''' = \Delta'' \ \Delta'$ и удовлетворение критерия Римана для Δ''' и Δ', из чего через сумму пределов следует и удовлетворение для всего Δ*)

Свойства определённого интеграла

1. Пусть функция $f(x)$ интегируема на Δ, тогда функция $|f|(x)$ также будет интегрируема на этом промежутке. *Доказывается через факт того, что колебание модуля $\le$ колебанию исходной функции, из чего следует удовлетворению критерию Римана*
2. Если функция $f(x)$ интегируема на Δ и при этом $\forall x \in \Delta : |f(x)| \ge C > 0 \rArr \frac{1}{f}$ - тоже интегрируемая функция. *Доказывается через оценку $\omega(\frac{1}{f}, \delta) \le \frac{1}{C^2}\omega(f, \delta)$, из которой следует удовлетворение критерия Римана и для функции $\frac{1}{f}$*
3. Если функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на Δ, то их сумма, разность и произведение также будут интегрируемы на этом промежутке (*Все эти 3 пункта доказываются достаточно похоже: берём $\Delta' \subset \Delta$ и, переходя к колебаниям функций, сводим всё к оценке с теоремой о двух полицейских? где снизу будет 0, а сверху колебания исходных функций*)
4. Если функция $f(x)$ ограничена на интервале (a, b) и при этом интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, вложенном в $(a, b) \rArr$ функция интегрируема на (a, b) (*Доказывается через взятие такого разбиения τ, что его крайние отрезки $\Delta_0 = (a, \alpha), \Delta_{N+1} = (\beta, b)$ и проверку далее критерия Римана через колебания, которые у крайних отрезков будет не превышать $2M$*)

Лемма об интегрировании функции на отрезках

Функции, интегрируемые по Риману на Δ, образуют бесконечномерное векторное пространство.

Л. Любая непрерывная на отрезке функция будет на нём интегрируема (*Доказывается достаточно тривиально через определение колебания для отрезка и нахождение бесконечно мелкого разбиения этого отрезка, а затем - выражение через колебания разности сумм Дарбу для этого разбиения*)

С. 1 Любая непрерывная и ограниченная на интервале функция будет на нём интегрируема

С. 2 Если функция ограничена и кусочно непрерывна на конечном промежутке, то она интегрируема на этом промежутке

Продолжение свойств интегралов

5. Если $f(x) \not = 0$ лишь в конечном числе точек из Δ, то $\int_{\Delta} f(x)dx = 0$
6. Если $f(x)$ ступенчата, то есть $\exist \tau(\Delta) : \forall x \in \Delta_i : f(x) = C_i$. Тогда $\int_{\Delta} f(x)dx = \sum_{i=1}^N C_i \Delta_i$

Линейная комбинация интегралов

Т. Линейная комбинация интегрируемых функций всё также будет интегрируема, причём: $$ \int_{\Delta} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_{\Delta} f(x)dx + \mu \int_{\Delta} g(x)dx $$ *Доказывается через линейность интегральной суммы Римана*

С. 1 Если на данном промежутке изменить значение функции в конечном числе точек, то интеграл останется неизменным. (*Доказывается через введение дополнительной функции $g(x) \not = 0$ только в точках, где значение исходной функции было изменено (там $g(x)$ равна величине изменения), таким образом, благодаря линейной комбинации и свойству 5 вычисляем, что интеграл остался прежним*)

С. 2 Интегралы функции на промежутках $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ будут одинаковы. Поэтому, независимо от типа промежутка записываются интегралы следующим образом: $\int^b_a f(x)dx$

Аддитивность интегралов

Т. Если промежутки $\Delta, \Delta', \Delta''$ связаны соотношениями $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, $\Delta' \cap \Delta'' = \empty$ и функция $f(x)$ интегрируема на Δ, то $\int_{\Delta} f(x)dx = \int_{\Delta'} f(x)dx + \int_{\Delta''} f(x)dx$

Монотонность интеграла

Т. Если функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на Δ и $\forall x \in \Delta : f(x) \le g(x) \rArr \int_{\Delta} f(x)dx \le \int_{\Delta} g(x)dx$ (*Доказывается практически полностью через опеределение суммы Римана для бесконечно малых разбиений*)

С. 1 Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на промежутке $\Delta \rArr \int_{\Delta} f(x)dx \ge 0$

С. 2 Если $f(x)$ интегрируема на $\Delta \rArr |\int_{\Delta} f(x)dx| \le \int_{\Delta} |f(x)|dx$

С. 2 Если $f(x)$ интегрируема на Δ и $\exist m, M : \forall x \in \Delta : m \le f(x) \le M \rArr m|\Delta| \le \int_{\Delta} f(x)dx \le M|\Delta|$

Интегральная теорема о среднем

Т. Пусть функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на Δ, функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ - неотрицательна. Тогда $\exist \xi \in \Delta : \int_{\Delta} f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_{\Delta} g(x)dx$ (*Доказывается через поиск $m = \inf, M = \sup$ для $f(x)$ и неравенство $m \le \frac{\int_{\Delta} f(x)g(x)dx}{\int_{\Delta} g(x)dx} \le M$, из монотонности $f(x)$ следует то, что $\exist \xi \in [m, M]$, которая удовлетворяет условию теоремы*)

Как называть интегралы

Интегралом от $f(x)$ по dx от a до b называется интеграл вида: $$ \int_a^b f(x)dx = \int_{[a, b]} f(x)dx $$

Если интегрирование ведётся от большей точки к меньшей, то перед интегралом отрезка будет минус: $$ \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx = - \int_{[a, b]} f(x)dx $$

О. Интегралы вида $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^a f(x)dx$ называются интегралами по ориентированным промежуткам. На них распространяются основные свойства определённого интеграла:

1. Линейная комбинация
2. Если $f(x)$ интегрируема на $\Delta \rArr \forall a,b,c \in \Delta : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (сходно с аддитивностью интегралов)
3. Теорема о среднем

23.03.01 - лекция

О.

Для интегрируемой на Δ функции $f(x)$ и точки $c \in \Delta$ существуют интегралы с переменным верхним ($F(x) = \int_c^x f(t)dt$) и нижним ($Φ(x) = \int_x^c f(t)dt$) пределом, которые связаны следующим отношением: $$ F(x) = \int_c^x f(t)dt = - \int_x^c f(t)dt = - Φ(x) $$

Т. О приращении интеграла. Для функции, интегрируемой на Δ с интегралом с верхним пределом $F(x) = \int_c^x f(t)dt$: $$ \forall x_1, x_2 \in \Delta : |F(x_2) - F(x_1)| \le ||f|| \space |x_2 - x_1| $$ где $||f|| = \sup_{x \in \Delta} |f(x)|$. *Доказывается через сложение интегралов F-ок и их аддитивность на непересекающихся промежутках*

Альтернативная форма записи: $$ \forall \Delta' \subset \Delta : \int_{\Delta'} f(x)dx \le ||f|| \space |\Delta'| $$

С. Если функция интегрируема на некотором промежутке, то интеграл с переменным верхним пределом на этом промежутке будет непрерывной функцией.

Дифференцирование интеграла

Т. Если функция интегрируема на Δ и непрерывно в точке $x_0 \in \Delta$, то интеграл с верхним пределом $F(x)$ имеет в точке x_0 производную и при этом $F'(x_0) = f(x_0)$ (*Доказательство выводится из определения производной и критерия интегрируемости*)

С. 1 Обозначенная выше $F(x)$ является первообразной для $f(x)$

С. 2 Любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную

С. 3 Для непрерывной функции операция интегрирования будет обратной для операции дифференцирования (*нафига это писать, если пункт выше говорит фактически то же самое*). Если мы берём интеграл с переменным нижним пределом, то его дифференцирование даст нам функцию со знаком минус.

Формула Ньютона-Лейбница

Т. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет первообразную $F(x)$, тогда: $$ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b $$ *Доказывается через взятие бесконечно мелкого разбиения отрезка $[a, b]$, и стремление интегральныъ суммм Римана к интегралу. Если при этом в $[a, b]$ есть конечное количество не дифференцируемых для $F(x)$ точек либо таких, в которых $F'(x) \not = f(x)$, то на итоговую формулу это никак не повлияет из-за возможности разбить отрезок на такие участки, которые пропускают эти точки, но при этом дают нам полный интеграл за счёт аддитивности интегралов*

С. 1 Если функция интегрируема на $[a, b]$ и имеет там первообразную, то $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$

С. 2 Если функция интегрируема на $[a, b]$ и имеет там первообразную, то $\exist \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$ *Для доказательство дополнительно нужно теорему Лагранжа о среднем применить к $F(b) - F(a)$*

Интегрирование по частям с использованием формулы Ньютона-Лейбница

Для непрерывных и кусочно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $u(x), v(x)$, производные которых интегрируемы на том же отрезке, справедлива следующая формула: $$ \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx $$ *Для доказательства достаточно заметить, что для $f(x) = u(x)v(x)$ мы имеем первообразную $F(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$, а затем посчитать интеграл на отрезке $[a,b]$ по формуле Ньютона-Лейбница*

Через метод интегрирования по частям можно выключить остаточный член для формулы Тейлора: $$ r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt $$ *Доказывается индукцией для всей формулы полинома Тейлора... ОЧЕНЬ СТРАШНОЙ ИНДУКЦИЕЙ. Ну либо можно просто сказать, что интеграл, представленный в виде интегральной суммы Римана как раз и репрезентует недостающую для точного значения часть за счёт промежутка интегрирования от x_0 до x*

Ладно. Теперь ещё добавлю про индукцию: при $n = 0$ формула сводится к тривиальному Ньютону-Лейбницу. При больших значениях нам необходимо проинтегрировать по частям формулу $\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x f^{(n)}(x - t)^{n-1}dt$. Производим замену пемернной интегрирования на $(x - t)^{n-1}$, после чего проводим интегрирование по частям. Часть, раскрытая по формуле в выражение с $|_{x_0}^x$ даст нам очередной член ряда Тейлора, а вторая часть сформирует формулу остаточного интегрального члена

Несобственные интегралы

О. Для $f(x)$, определённой на $[a, +\infty)$ и интегрируемой на $[a, \beta]$, предел интеграла $Φ(\beta) = \int_a^{\beta} f(x)dx$ при $\beta \rarr +\infty$, если только такой предел существует, называется несобственным интегралом от $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$. Обозначается достаточно логично: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $$ \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \rarr +\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx $$

Если такой интеграл существует и конечен, то он называется сходящимся, а $f(x)$ - интегрируемой по $[a, +\infty)$ в несобственном смысле. Если же предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл нахывается расходящимся.

Определение для несобственного интеграла на $(-\infty, b]$ даётся аналогично с переходом к обозначенному выше несобственному интегралу через внесение минуса под интеграл.

О. Если функция определена на $[a, b)$, интегрируема по Риману на любом собственном отрезке этого полуинтвервала и неограничена на $[a, b]$, то: $$ \lim_{\beta \rarr b-0} Φ(x) = \lim_{\beta \rarr b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx $$ будет называться несобственным интегралом $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. В остальном терминологию аналогично интегрированию в несобственном смысле для $[a, +\infty)$

Интеграл по Риману называется **Собственным**

Точки, представляющие собой левый и правый пределы, а также $\plusmn \infty$ называются особыми пределами несобственных интегралов. Возможна ситуация, когда обе точки особые, тогда для особых точек a, b мы получаем выражение: $$ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx $$ где интегралы справа уже представляют обозначенные выше несобственные интегралы. Чтобы сходился такой интеграл, должны сходиться оба интеграла из суммы.

Несмотря на свои особенности, несобственные интегралы также:

- Линейны

- Аддитивны (*что уже даже показывалось выше*)
- Монотонны

Формула Ньютона-Лейбница также почти аналогична, с той лишь разницей, что вместо конкретного $F(b)$ мы должны считать предел для $F(\beta)$

Сравнение несобственных интегралов для установления сходимости

Т. Несобственный интеграл от неотрицательной функции сходится $\hArr$ соответствующая ей первообразная ограничена на промежутке определения.

Т. (Признак совместной сходимости) Если на отрезке $[a, b)$ неотриицательны функции $f(x) = O(g(x))$ при $x \rarr b - 0$, то:

- $\int_a^b g(x)dx$ сходится $\rArr \int_a^b f(x)dx$ сходится
- $\int_a^b f(x)dx$ расходится $\rArr \int_a^b g(x)dx$ расходится

Доказывается через определение О-большого и сравнение интегралов

23.03.02 - семинар

Табличные интегралы

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctg\, x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
16. $\int shx\,dx = chx + C$
17. $\int chx\,dx = shx + C$
18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$
19. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C$

Как интегрировать чуть проще?

Несколько простых методов, помогающих искать интегралы:

1. Разбивать дробь на отдельные (когда в числителе слагаемые)
2. Прибавлять и отнимать одно и то же выражение
3. Домножать на одно и то же выражение числитель и знаменатель

Ещё раз о введении аргумента (метод подстановки)

Для интегрируемой функции $f(x)$ берём значение $u = \phi(x)$ - непрерывно дифф. функцию $$ \int f(x)dx = \int (f(u) du) = \int (f(\phi(x)) \phi'(x) dx) $$ **Важно!** dx мы должны выражать через дифференциалы честным путём через определение дифференциалов

Существует хитрый и не самый простой приём внесения под дифференциал, который во многом похож на замену переменной, но работает быстрее. Суть его в том, что мы подбираем удобное нам выражение для интегрирования (исходя их таблицы интегралов), находим его производную в нашем выражении и вносим под дифференциал его первообразную. Вот простейший пример: $$ \int \frac{xdx}{1 + x^4} = \int \frac{0.5 d(x^2)}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \arctg (x^2) + C $$ **В таблице есть интеграл $\int \frac{d(x)}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$. Значит мы хотим, чтобы интегрирование велось по x^2. У нас есть в числителе x, его первообразная будет $\frac{x^2}{2}$. 0.5 сразу выносим из-под дифференциала, а далее можем спокойно интегрировать по таблице.**

23.03.09 - семинар

Интегрирование по частям

Формулу есть тут

1. Логарифмы, арк-триг. функции, полиномы часто берутся за u
2. Выражения $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $\sin \ln x$, $\cos \ln x$ представляют собой циклический интеграл, решаемый через уравнение. Из записанных выше выражений чаще всего рекомендуется брать за u тригонометрическую функцию

Интегрирование рациональных функций

Теория тут

Ещё раз:

- Если можем выразить целую часть, то делаем это и считаем её интеграл как сумму степенных функций (*гарантированный способ - деление многочленов в столбик*)
- иначе раскладываем методом неопределённых коэффициентов на суммму простых дробей вида:
  - $\frac{A}{(x + p)^k}$
  - и $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$.
  - $k \ge 1$ (в знаменателях у нас есть конкретные или почти конкретные корни). Эти дроби уже куда проще дифференцировать

Метод неопределённых коэффициентов (*для тех, кто не мышь*)

Статья

1. Раскладываем знаменатель на множители, подбирая корни по свободному коэффициенту. В итоге у нас в скобках должны остаться иксы только в 1-й или, если для какого-то из квадртаных уравнений нет решений, во 2-й степени. Должна получиться дробь такого вида $$ \frac{x^2 - 19x + 6}{x^3 (x + 2) (x + 3)^2 (x^2 + 2x + 13)} $$
2. Представляем дробь в виде суммы дробей, записывая у них в числителях неопределённые (пока что) коэффициенты. Для знаменателей с конкретным корнем это будет просто число, для знаменателей, которые разложились только до x^2 - полином вида $Ax + B$
    - Если у множителя степень `n > 1`, выписываем отдельные слагаемые дроби со знаменталями всех степеней `1 <= k <= n`. Представленная выше дробь примет вид: $$ \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x + 2} + \frac{E}{x + 3} + \frac{F}{(x + 3)^2} + \frac{Gx + H}{x^2 + 2x + 13} = \frac{x^2 - 19x + 6}{x^3 (x + 2) (x + 3)^2 (x^2 + 2x + 13)} $$
3. Приводим дроби слева к общему знаменателю, раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые и зачёркиваем знаменатели слева и справа
4. Замечаем, что для одной и той же степени икса мы можем взять слева сумму коэффициентов, а справа - известный нам коэффициент (*если справа или слева коэффициента нет, то он `0` - ваш кэп (если коэффициент есть справа, но отсутствует слева, у вас проблемы)*)
5. Для всех степеней икса выписываем отдельные уравнения и решаем СЛАУ
6. Записываем сумму дробей уже с определёнными коэффициентами и благодаря линейности интегралов, находим интегралы для каждого слагаемого по отдельности
    - Для слагаемых вида $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ мы дополняем знаменатель до полного квадрата с остаточным слагаемым. Далее находим интеграл через переход к переменной $t = \frac{q}{p}$, где q - подквадратный многочлен и p - корень из остаточного слагаемого
7. **PROFIT**

23.03.15 - лекция

Сходимость несобственного интеграла от неотрицательной функции

Начало тут

С.1 Если $f(x)$ и $g(x)$ - функции одного порядка, то их интегралы на $[a, b): x \rarr b - 0$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, тут может идти речь об эквивалентных функциях. В качестве $g(x)$ часто берётся степенная функция.

С.2 Для эквивалентных при $x \rarr +\infty$ фукнций на отрезке $[a, +\infty), a > 0$ для $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$

С.3 Отрезок $[a, b): 0 < a < b < +\infty$; $x \rarr b - 0$. $g(x) = \frac{1}{b - x}^{\alpha}$: интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$

Исследование сходимости через пределы (*будто бы до этого было иначе*)

О. Если $[a, b) \subset Df$ и интегрируема по Риману $\forall \beta : [a, \beta] \subset [a, b)$. Если интеграл |f(x)| сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится (*В лекции это было отдельным определением, лол*). Обратное утверждение несправедливо. *Доказывается через критерий Коши для верхней точки интегрирования*

О. Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ называется условно сходящимся.

Признаки сходимости через разложение функции

Т. Признак Дирхле. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом $[a, \beta]$, а её первообразная $F(x) = \int_a^{\beta} f(x)dx$ ограничена на $[a, +\infty)$, а также есть монотонная функция $g(x) : \lim_{x \rarr +\infty} g(x) = 0$, тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Т. Признак Абеля. Пусть функция $g(x)$ монотонная и ограничена при $x > a$, а функция $f(x)$ интегрируема на любом $[a, \beta]$, причём $\int_a^{+\infty}$ сходится, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ тоже сходится. **Формулировка на "человеческом":** если интеграл на $[a, +\infty)$ сходится, то подынтегральную функцию можно умножить на монотонную и ограниченную функцию, не потеряв сходимости.

Числовые ряды

О. Числовой ряд - сумма любой счётной (*то есть потенциально бесконечной*) последовательности заданных комплексных чисел. Любое z_i число называется общим членом ряда.

О. Сумма n первых чисел числового ряда называется **частичной суммой ряда** ($\sum_{i=1}^n z_i = s_n$)

О. Числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j : u_j = z_{n+j}$ называется n-м остатком ряда $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$

О. Числовой ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, то есть $\exist s_{\infty} = \lim_{n \rarr \infty} s_n = s_{\infty} : |s_{\infty}| < +\infty$. Если же такого предела не существует, ряд будет называться **расходящимся**.

О. Если ряд сходится, то предел его частичных сумм будет называться суммой ряда.

Ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда состоит из сходящейся последовательности вида ${z_1} \cup {z_i - z_{i-1} | i > 1}$ (*все элементы кроме первого представляют собой разницу с предыдущим элементом для исходной последовательности. Также можно отметить, что сумма этой новой последовательности с номером n даст нам элемент исходной последовательности z_n*)

Условие сходимости числового ряда

Т. Если ряд s_{∞} сходится, то $\lim_{k \rarr \infty} z_k = 0$. *Доказывается через переход к пределу для ряда и равенству $z_n = s_n - s_{n-1}$*. **Обратное неверно: стремление z_k к нулю - необходимое, но недостаточное условие сходимости ряда.**

Свойства сходящихся рядов

Т. Об остатках Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой его остаток. *Доказывается через представление суммы ряда через частичную сумму и остаток ряда.*

Т. Для рядов соблюдаются свойства аддитивности и линейности. *Доказывается из теоремы о соответствующих свойствах для пределов.*

Т. Критерий Коши $$ \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \newline \exist N_{\epsilon} \newline \forall n \ge N_{\epsilon} \newline \forall p \in \N \end{cases} \rArr |\sum_{i=n+1}^{n+p}| < \epsilon $$ "*Человеческий*" *вариант:* начиная с некоторого N для любого $n \ge N$ n-остаток ряда любой дляны будет стремиться к нулю. *Доказывается через критерий Коши для последовательностей*

Вещественные неотрицательные ряды

Если вместо комплексных чисел взять ряды с неотрицательными вещественными, то последовательность его частичных сумм будет монотонна, а если вдобавок она будет ограничена $\rArr$ последовательность имеет предел $\rArr$ ряд будет сходящимся.

Т. О признаке сравнения Для ввщественных чисел $a_n \ge 0, b_n \ge 0$ при любом натуральном n при условии $a_n = O(b_n)$. Если ряд b_{∞} сходится, ряд a_{∞} тоже сходится. Если расходится a_{∞}, то расходится и b_{∞}. *Доказывается через свойство линейности или через сопоставление последовательностей и аналогичные их свойства.*

С.1 Если $a_n \tilde b_n$, то их ряды сходятся и расходятся одновременно. *Доказывается через определение эквивалентности и прошлую теорему.*

Т. О совместной сходимости Если $a_n > 0 \And b_n > 0 \And \exist M : \forall n \ge M : \frac{a_{n+1}}{n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то для рядов будут справедливы все утверждения теоремы "О признаке сравнения" (*Что очевидно следует из-за возникающей связи $a_n = O(b_n)$ (если быть точным, то множитель около b_n будет $\frac{a_M}{b_M}$)*)

23.03.13 - семинар

Определённые интегралы

Тут шли разные теоремы, записанне ранее на лекции

Особенное внимание лучше уделить [формуле Ньютона-Лейбница]

Когда интегрируемая функция представляет собой произведение симметрично выржаемых функций (*например x^2 и $\sqrt{1 - x^2}$ - если заменять переменную на $u = x^2$ или $u = 1 - x^2$ или что-то ещё, то мы получим почти идентичное выражение*), то имеет смысл выражать через новую переменную, внесённую под тригонометрическую функцию (*в том же примере выше нам имеет смысл сделать подстановку $x = \sin t$ и считать с ней*). **Используя этот метод, необходимо внимательно следить за сохранением непрерывности функции, соответствии ОДЗ и ООФ**

Пусть у нас будет отрезок $\Delta = [-a, a]$ (симметричный промежуток), то:

- Для $f(x) = f(-x)$ (чётная функция): $\int_{\Delta} f(x) = 2\int_0^a f(x)$
- Для $f(-x) = -f(x)$ (нечётная функция): $\int_{\Delta} f(x) = 0$

23.03.22 - лекция

Исследование рядов на сходимость

Л. Ряд Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}$ при $\beta > 1$ сходится, а иначе - расходится. *Доказательство делает очень больно...*

Признак Коши

Т. Если последовательность нетрицательных ${a_k}$ такова, что для некоторых $0 < q < 1$ номера N справедлива оценка $\forall k \ge N : *k\sqrt{a_k} \le q$, тогда ряд $\sum*{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $\exist k \ge N : _k\sqrt{a_k} \ge 1$, то ряд расходится. *Доказывается через сравнение рядов и очевидный вывод, что $_k\sqrt{a_k} \le q \hArr a_k \le q^k$*

С. Если приведённый выше корень в пределе меньше одного, то ряд будет сходиться, а если больше - расходиться. *Называется это следствие предельным признаком Коши - и не спроста, ведь доказывается оно через определение предела по Коши*. (**Если предел равен одному, мы не можем сказать о ряде ничего конкретного**)

Т. Обобщение предельного признака Коши рассматривает вместо обычного предела верхний - больше различий нет.

Признак Даламбера

Если последовательность нетрицательных ${a_k}$ такова, что для некоторых $0 < q < 1$ номера N справедлива оценка $\forall k \ge N : a_k > 0 \And \frac{a_{k+1}}{a_k} \le q$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же $\exist k \ge N : \frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, то ряд расходится. *Нормальное доказательство овер-перегружено, поэтому я просто отмечу, что при $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q$ каждый следующий элемент последовательности будет меньше предыдущего. Елси учтём, что последовательность положительна, то можем сделать вывод о наличии у неё конечного предела, а значит сходимости. В обратную сторону доказывается по той же логике.*

Ладно, при перечтении доказательства стало чуть понятнее. При удовлетворении условия мы получаем, что все остатки ряда будут представлять собой a_N*q^k, то есть к ним будут применимы признаки сравнения

С. Если определённая в теореме выше дробь для последовательности имеет предел $> 1 \rArr$ последовательность создаёт сходящийся ряд, если предел $< 1 \rArr$ расходящийся. Если предел равен одному, то ничего конкретного про передл сказать нельзя.

Интегральный признак Коши

Т. Если неотрицательная функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \ge 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится $\hArr$ сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. *Доказывается через критерий сходимости по Риману и тот факт, что интеграл фактически представляет непрерывную сумму всех точек промежутка, а ряд - дискретную сумму.*

Знакочередующиеся ряды

О. Ряды, члены которых поочерёдно то положительны, то отрицательны, называется **знакопеременным** или **знакочередующимся**

Т. (Признак Лейбница) Пусть дана стремящаяся к нулю монотонная последовательность ${a_k}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ будет сходиться. Обозначим через S его сумму, а через s_n - частичную сумму, тогда будет справедлива оценка: $|S - s_n| \le |a_{n+1}|$. *Доказывается невероятно болезненно через критерий Коши.*

Ряды Фурье

О. Гармонический анализ занимается изучением периодических функци вроде этой синусоиды: $$ y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) $$

- A - амплитуда
- ω - частота
- α - фаза
- $T = 2\pi / \omega$ - период функции

ООФ периодических функций - вся числовая прямая.

О. Линейная комбинация периодических функций с одинаковым периодам даёт нам новую периодическую функцию с тем же периодом. При помощи такой суммы (*то есть ряда - не даром же мы это слово учили*) можно представить любую сложную периодическую функцию с тем же периодом. Слагаемые синусоиды называются **гармониками**, а процесс разложения сложной функции на гармоники называется **гармоническим анализом**.

За счёт правила синуса суммы углов и замены $\omega t = x$ мы в итоге получаем следующий тригонометрический ряд: $$ a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) $$

- $a_0 = A_0$
- $a_k = A_k \cos \alpha_k$
- $b_k = A_k \sin \alpha_k$

Ряды по функциям

О. Пусть дано множество функций ${\phi_k(x)}$, имеющих общую непустую область определения, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$ будет называться **рядом по системе функций**. a_k - **коэффициенты ряда**.

Если коэффициенты a_k таковы, что: $$ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \phi_k(x) = f(x) $$ то говорят, что функция $f(x)$ разложена в ряд по системе функций

Ортоганальные функции

О. Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$, определённые на Δ, называются ортоганальными на этом промежутке, если произведение этих функций интегрируемо и $\int_{\Delta} \phi(x)\psi(x)dx = 0$ (*Перпендикулярные функции... До чего мы докатились?! Хм... А ведь из этого определения мы будто бы можем сделать ортоганальными функции над комплексными числами... Звучит не очень законно*).

Последовательность функций будет ортогнальна на Δ, если интеграл произведения любой пары функций из последовательности равен нулю

Л. Тригонометрическая система функций ${1} \cup {\cos kx, \sin kx | k \ge 1}$ ортоганальна на $(-\pi, \pi)$

С. Тригонометрическая система выше будет ортоганальна $\forall \Delta : |\Delta| = 2\pi$

Ортонормированные функции

О. Последовательность функций ${\phi_k(x)}$ называется ортонормированной на Δ, если она ортоганальна на Δ и $\forall k \in \N : \int_{\Delta} (\phi_k(x))^2 dx = 1$. Это условие также называют **нормировкой** или **калибровкой** последовательности

23.03.22 - консультация по КР

Если для матрицы A мы получили матрицу с.в. T и матрицу в Жордановой форме J, то вычисление A^n можно преобразовать к виду $A^n = T J^n T^{-1}$

Поиск с.з. через уровнение $|A - \lambda E| = 0$

Алгебраическая кратность k - степень корня λ

Поиск с.в. для уже известной лямбды через СЛАУ: $(A - \lambda E)v = 0$

Геометрическая кратность r - кол-во базисных векторов внутри v

23.03.29 - лекция

Ряды Фурье

При разложении функции $f(x)$ в ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$ для ортогональной системы ${\phi_n(x)}$ и отсутствии тождественно нулевых функций мы можем вычислить a_k по следующей формуле: $$ a_n = \frac{\int_{\Delta} f(x) \phi_n(x) dx}{\int_{\Delta} (\phi_n(x))^2 dx} $$

Выводится данная формула из предположения, что изначальная функция разложима в функциональный ряд вида: $$ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \phi_k(x) $$

- Домножаем обе части на некоторое $\phi_n(x)$
- Интегрируем обе части по Δ и вносим знак суммы справао под интеграл, а из-под интеграла выносим a_k
- Учитывая, что система ортогональна, то есть разные $\phi_i(x)$, $\phi_j(x)$ дают при умножении под интегралом 0, сводим ряд к одному слагаемому $$ \int_{\Delta} f(x) \phi_n(x) dx = a_n \int_{\Delta} (\phi_n(x))^2dx $$
- Отсюда тривиальным образом получается обозначенная в начале формула

Тригонометрические ряды Фурье

О. Линейное пространство $L_2(a,b)$ - совокупность функций $f(x)$ таких, что: $$ \int_a^b (f(x))^2 dx < +\infty $$

Для этого линейного пространства определено скалярное произведение: $$ (f, g)_2 = \int_a^b f(x) g(x) dx $$

Для этих функций задаётся норма: $$ ||f||_2 = \sqrt{ \int_a^b (f(x))^2 dx } $$

Для функций в этом лин. пространстве определены коэффициенты Фурье: $$ \forall k \ge 1 : l = \frac{b - a}{2} : \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos {\frac{k \pi x}{l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin {\frac{k \pi x}{l}} $$

В таком случае разложение функции $f(x)$ на ряд Фурье обычно записывается так: $$ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos {\frac{k \pi x}{l}} + b_k \sin {\frac{k \pi x}{l}}) \newline a_0 = \frac{1}{l} \int_a^b f(x)dx \newline a_k = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos {\frac{k \pi x}{l}} dx \newline b_k = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin {\frac{k \pi x}{l}} dx $$

Комплекснозначные коэффициенты

Вместо тригонометрических коэффициентов Фурье часто определяют комплекснозначные, каждый из которых представим линейной комбинацией тригонометрических: $$ \forall \nu \in \Z : \phi_{\nu}(x) = e^{i \frac{\nu \pi x}{l}} $$ При этом такой набор коэффициентов также называют тригонометрическим $$ e^{i \frac{\nu \pi x}{l}} = \cos (\frac{\nu \pi x}{l}) + i \sin (\frac{\nu \pi x}{l}) $$

Системы комплекснозначных функций $\phi(x), \psi(x)$ будут оротогональны на Δ, если $\exist \int_{\Delta} \phi(x)\overline{\psi(x)}dx = 0$

Коэффициентами фурье для комплекснозначных систем будут: $$ c_{\nu} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x)e^{-i\frac{\nu \pi x}{l}} dx $$ По равенству для перехода к тригонометрической форме комплексного числа мы можем получить такие же коэффициенты a_0, a_k, b_k. С той лишь разницей, что интегралы считаются по симметричному интервалу $(-l, l)$

О. Из выше введённых обозначений мы можем записать формулу тригонометрического ряда Фурье в комплексной форме: $$ \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} c_{\nu} e^{i \frac{\nu \pi x}{l}} $$ Частичной суммой будет ряд, в котором вместо бесконечностей поставлены $-n$ и n соответственно.

Множество функций $e^{i \nu x} | \nu in \Z$ - стандартная тригонометрическая система в комплексной форме

Линнейное пространство $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$

Любая функция из пространства $\tilde{L}*2(-\pi, \pi)$ по определению периодична с периодом 2π и удовлетворяет условию $\int*{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2dx < +\infty$.

Частичная сумма для такой функции задаётся равенством $$ T_n(f, x_0) = \sum_{\nu = -n}^n c_{\nu}e^{i \nu x_0} $$ где $$ c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i \nu x} dx $$

подставляя представление коэффициентов в частичную сумму, получаем $$ T_n(f, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{\nu = -n}^n e^{i \nu (x_0 - x)} dx $$

О. Введём понятие ядра дирихле порядка n интегрального оператора: $$ D_n(x) = \sum_{\nu = -n}^n e^{i \nu (x)} $$

Тогда запсываться частичная сумма будет немного "*проще*": $$ T_n(f, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x_0 - x) dx $$

Из определения ядра Дирихле (*в частности, его чётности*) следует равенство: $$ \forall x \in \R : D_n(x) = 1 + 2 \sum_{\nu = 1}^n \cos \nu x $$

То есть ядро Дирихле также является чётной 2π-периодической функцией и при этом:

1. $D_n(0) = 1 + 2n$
2. $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(x)dx = 1$
3. D_n - сумма геометрической прогресси с начальным членом e^{-inx} и шагом $q = e^{ix}$

Дальше идёт нечто совсем будто бы оторванное от реальности, так что скип

Л. "Равномерная ограниченность интегралов от ядер Дирихле". $$ \exist C \in \R : \forall n \ge 1 : \forall \alpha, \beta \in (0, \pi) : |\int_{\alpha}^{\beta} D_n(x)dx| \le 2 \pi C $$

Апроскимация абсолютно интегрируемой функции

Функции, абсолютно интегрируемые на числовой прямой, часто аппроксимируют более простыми объектами (например, тригонометрическими полиномами)

О. Носитель функции - множество точек из области определения, в которых функция не обращается в ноль. Образначается $supp x$

О. Если функция определна на всей числовой прямой, а её носитель ограничен, то функция будет называться **финитной** (*то есть только на каком-то отрезке функция не равна нулю*)

О. Функция будет ступенчатой на некотором промежутке, если для него можно подобрать такое разбиение, что на каждом его фрагменте функция будет постоянной

Т. об аппроксимации абсолютно интегрируемой функции Для абсолютно интегрируемой на Δ функции $f(x)$. Для любого $\epsilon > 0$ существует такая финитная ступенчатая функция $\phi(x)$, что её носитель вложен в замыкание $\overline{\Delta}$ и при этом $\int_{\Delta} |f(x) - \phi(x)|dx < \epsilon$. *Доказывается невероятно больно через взятие конечного подмножества g_{ϵ}, принадлежащего Δ, а затем функции $f_{\epsilon}(x)$, которая равна $f(x)$ при $x \in g_{\epsilon}$, иначе - 0, далее через нижние сумму Дарбу для $f_{\epsilon}(x)$ и факт интегрируемости по Риману $f(x)$, из чего уже через неравенство треугольника доказывается положение теоремы*

Первообразная абсолютно интегрируемой функции

Т. О первообразной абсолютно интегрируемой функции. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на Δ, тогда её первообразная $F(x) = \int_a^x f(t)dt | a \in \Delta$ непрерывна на замыкании промежутка Δ. *Доказательство слишком страшное. Отмечу лишь, что в нём используется прошлая теорема и введение функции $Φ(x) = \int_a^x \phi(t)dt$*

Осцилляция по Риману

Т. Римана об осцилляции. Для абсолютно интегрируемой на Δ функции справедливо предельное отношение $\lim_{\lambda \rarr \plusmn \infty} \int_{\Delta} f(x)e^{i \lambda x}dx = 0$. *И вновь доказательство просто безумное. В нём опять используется теорема об аппроксимации*

Т. о стремлении к нулю коэффициентов Фурье Если функция абсолютно интегрируема на Δ, то при стемлении $\nu \rarr \plusmn \infty$ её коэффициенты $c_{\nu}(f)$ будут стремиться к нулю. Также это будет справедливо и для тригонометрических коэффициентов фурье (как $a = b = 0$)

23.03.31 - семинар

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого рода (**по бесконечному отрезку**)

Несобственные интегралы первого рода на $[a, \beta]$ существует, если существует предел $\lim_{\beta \rarr +\infty} \int_a^{\eta} f(x)dx$ при условии интегрируемости на любом конкретном $[a, \beta]$. Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится.

Признаки сравненния **для неотрицательных функций**:

1. $f(x) \le g(x)$:
   1. Сходится интеграл от $g(x) \rArr$ сходится интеграл от $f(x)$
   2. Расходится интеграл от $f(x) \rArr$ расходится интеграл от $g(x)$
2. Если функции эквивалентны, то они сходятся или расходятся одновременно (иногда пишут, что $f(x) = O^*(g(x))$)

$$ \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} $$

- сходится при $\alpha > 1$
- расходится при $\alpha \le 1$

Несобственный интеграл сходится абсолютно $\hArr$ сходится интеграл от модуля.

Несобственные интегралы второго рода (**от неограниченной функции**)

Несобственный интеграл для $[a, b]$ для неопределённой в b функции $f(x)$ существует $\hArr \forall [a, \beta] : \beta \rarr b 😒 функция опр. на $[a, \beta]$ и существует конечный предел $\lim_{\beta \rarr b} \int_a^{\beta} f(x)dx$

$$ \int_a^b \frac{dx}{x^{\alpha}} \newline \int_a^b \frac{dx}{(x - b)^{\alpha}} $$

- сходятся при $\alpha < 1$
- расходятся при $\alpha \ge 1$

Поиск эквивалентного

Обозначенные выше показательные функции вида $\frac{1}{x^{\alpha}}$ и $\frac{1}{(x - b)^{\alpha}}$ удобны для проверки сходимости других функций. Поиск эквивалентной будет осщуествляться методом поиска α через "равенство": $$ \lim_{x \rarr x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = 1 $$ **Дробь вида $\frac{1}{(x - b)^{\alpha}}$ используется для несобственных интегралов второго рода, когда у нас известные особые точки**

Повторим некоторые фишки для поиска пределов

Лопиталя все помнить должны!

Но Лопиталь хорош далеко не всегда. Например, для предела вида $\lim_{x \rarr +\infty} \frac{x - 1}{x + 2}$ получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для разрешения делим числитель и знаменатель на x. Получаем $\lim_{x \rarr +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$, который считается без неопределённостей и даёт 1.

23.04.05 - лекция

Исследуем стремление коэффициентов фурье $a_k, b_k : k \rarr +\infty$. Будем считать $\Delta = (-\pi, \pi), l = \pi$

Л. Для непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции такой, что $f(-\pi) = f(\pi)$, если на интервале $(-\pi, \pi)$ сущетсвует непрерывная и абсолютно интегрируемая первая производная $f'(x)$, тогда $c_{\nu}(f) = \frac{1}{i\nu}c_{\nu}(f')$.

Доказывается через определение комплекснозначных коэффициентов Фурье и интегрирование по частям

Обобщённая формула Ньютона-Лейбница

Л. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) непрерывную производную, причём интеграл $\int_a^b f'(x)dx$ сходится, тогда будут существовать односторонние пределы $f(a + 0)$ и $f(b - 0)$ и будет иметь место формула $\int_a^b f'(x)dx = f(b - 0) - f(a + 0)$. *Доказывается... Ну... Мы просто из классической формулы Ньютона-Лейбница проводим предельный переход*

Т. О коэффициентах Фурье кусочно-непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом $2\pi: x_0 = -\pi, x_N = \pi$ и иметтся такой разбиение, что $\forall 0 < j \le N: (x_{j-1}, x_j)$ существует непрерывная производная $f'(x)$. Если при этом $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$, то коэффициенты Фурье связаны между собой соотношением: $$ c_{\nu}(f) = \frac{1}{i\nu}c_{\nu}(f') + \frac{1}{i 2 \pi \nu} \sum_{j=1}^{N-1} [f]_{x_j}e^{-i \nu x_j} $$ где $[f]_{x_j}$ - скачок функции: $[f]_{x_j} = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$

Слишком часто это тут звучит в последнее время, но доказателсьтво вновь слишком страшное. Ладно... В нём мы опираемся на лемму о связи комплекснозначных коэффициентов Фурье с их производной, а также на понятие суммы интегралов (которая даёт нам интеграл). Затем "просто" раскладываем выражение выше по этим правилам, используем обобщённую формулу Ньютона-Лейбница и находим разные закономерности в рядах, которые позволяют их упросить

Кусочно непрерывные производные

О. Функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) кусочно непрерывную производную, если существует такое разбиение этого интервала, при котором на каждом подинтервале $f'(x)$ будет непрерывна. (*Например, любая кусочна постоянная функция будет кусочно непрерывна на любом интервале и, соответственно, будет иметь кусочно непрерывную производную*)

Т. О порядке стремления к нулю коэффициентов Фурье. Если функция $f(x): x \in (a, b)$ имеет на (a, b) кусочно непрерывную и абсолютно интегрируемую производную, тогда:

1. Справедливы асимптотические соотношения: $\nu \rarr \plusmn \infty: c_{\nu}(f) = O(\frac{1}{\nu})$
   - *Для доказательства определяем $f(x + 2\pi) = f(x)$, а затем, пользуюясь теоремой о коэффициентах Фурье для кусочно непрерывной функции и теоремой Римана об асцилляции замечаем, что $c_{\nu}(f') \rarr 0$, из чего заключаем, что существует такая постоянная K, что $c_{\nu}(f) = \frac{K}{|\nu|}$*
2. Если $f(x)$ к тому же непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то будет справедлива более сильная формула: $\nu \rarr \plusmn \infty: c_{\nu}(f) = o(\frac{1}{\nu})$

- *Также пользуясь теоремой о коэффициентах Фурье для кусочно непрерывной функции и теоремой Римана об асцилляции сначала замечаем, что формула из первой теоремы сводится к $c_{\nu}(f) = \frac{1}{i\nu}c_{\nu}(f')$, а затем из стремления $c_{\nu}(f') \rarr 0$ заключаем справедливость равенства*

С. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и при этом $f(-\pi) = f(\pi)$. Если на интервале $(-\pi, \pi)$ существует кусочно непрерывная и абсолютно интегрируемая производная второго порядка $f''(x)$, то производная первого порядка $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если при этом $f'(-\pi) = f'(\pi) \rArr \nu \rarr \plusmn \infty : c_{\nu}(f) = O(\frac{1}{\nu^2})$

Достаточные признаки сходимости тригонометрического ряда Фурье

Условие Липшеца и теорема (там она в качестве следствия привдеена) описаны тут

*Дальше как дополнение идёт безумное доказательсьтво на 15 слайдов, после которого пространство начинает колебаться как сложный ряд Фурье, так что просто ещё раз скажу, что тут очень многое решает теорема Римана об осцилляции. Надо бы её подучить как-нибудь. (И на экзамене везде имеет смысл пихать, наверное **(Оставить тут пометку, если это реально прокатит)**)*

Л. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в ней она удовлетворяет условию Липшеца порядка $a = 1$ (*Используется как упрощение вместо проверки оригинального Липшеца*).
Доказательство: берём некоторое $\delta: -\delta < \xi < \delta, \xi \not ={0}$. Пусть производная $f'(x_0) = a$, тогда $a - 1 < \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi} < a + 1$. Будем считать $L = max(|a+1|, |a-1|)$, отсюда получаем $|f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \le L|\xi|$

Обратное Лемме утверждение неверно: существуют функции, удовлетворяющие условию Липшеца порядка 1 и не имеющие производной в некоторых точках

С. Пусть функция периодична с периодом 2π и абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi, \pi)$. Если функция также дифференцируема в x_0, то в этой точке тригонометрический ряд Фурье для $f(x)$ будет сходиться к $f(x_0)$

Интеграл Фурье

Пусть функция определена на всех числовой прямой и абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Тогда на любом интервале $(-l, l)$ функцию можно разложить в ряд Фурье, представленный ранее (*Надо лишь для коэффициентов заменить границы интегрирования $a = -l, b = l$*)

При $l \rarr +\infty$ получаем:

- $a_0 \rarr 0$
- слагаемые с a_k: $$ \lim_{l \rarr +\infty} \sum_{k = 1}^{+\infty} a_k \cos (\frac{k \pi x}{l}) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos(yx) dy $$
  - *Примечания*
- слагаемые с b_k: $$ \lim_{l \rarr +\infty} \sum_{k = 1}^{+\infty} b_k \sin (\frac{k \pi x}{l}) = \int_0^{+\infty} b(y)\sin(yx) dy $$ *Последние 2 предела выводятся через определение интеграла как сумму значений функции при бесконечно малом разбиении с дополнительным введением функций:*
- $a_f(y) = \lim_{l \rarr +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t)\cos(yt)dt$
- $b_f(y) = \lim_{l \rarr +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t)\sin(yt)dt$

В результате получаем, что ряд Фурье при $l \rarr +\infty$ переходит в интеграл вида $$ \int_0^{+\infty} (a_f(y)\cos(yx) + b_f(y)\sin(yx)) dy $$ **О.** Такой интеграл называется интегралом Фурье

Вот так будет выглядеть интеграл Фурье с подставленным значениями $a(y)$, $b(y)$: $$ f(x) \equiv \lim_{l \rarr +\infty} \int_0^{+\infty} (\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l (f(t)\cos(yt)dt) \cos(yx) + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l (f(t)\cos(yt)dt) \sin(yx))dy = \newline \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\cos(yt)dt) \cos(yx) + \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\cos(yt)dt) \sin(yx))dy = \newline \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(yt)\cos(yx) + \cos(yt) \sin(yx)]dt = \newline \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_0^{+\infty} dy[\cos(yt)\cos(yx) + \cos(yt) \sin(yx)] = \newline \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_0^{+\infty} \cos(y(x - t)) dy = \newline \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \frac{\sin(\infty (x - t))}{x - t} $$

Если функция абсолютно интегрируема, тогда её предельные коэффициенты Фурье по теореме римана об осцилляции будут сходиться к нулям

23.04.07 - семинар

Ещё о признаках сходимости

Только для несобственных интегралов первого рода (признак Дирихле): интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, если одновременно

1. $g(x)$ монотонно убывает и стремится к нулю
2. Первообразная $F(x)$ ограничена

С.1 Интегралы $\int_a^{+\infty} g(x) \sin x dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) \cos x dx$ сходятся при $\lim_{x \rarr +\infty} g(x) = 0$

С.2 Интегралы $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ и $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ сходятся при $p > 0$

23.04.12 - лекция

Интеграл Фурье

О. Функция локально интегрируема <=> она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале числовой оси. (*Отсюда следует, что любая непрерывная функция локально интегрируема*)

Обозначение вида $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty}$ показывает, что существует предел $\lim_{l \rarr +\infty} \int_{-l}^l$. Часто $V.P.$ опускается без особого вреда смыслу

Условия сходимости интеграла Фурье

Препарация

Сам интеграл Фурье записывается в такой форме: $$ \int_0^{+\infty} (a(y) \cos (yx) + b(y) \sin (yx)) dy $$ Для $f(x)$, определённой и абсолютно интегрируемой на всей числовой прямой, функции $a(f, y)$ и $b(f, y)$ будут непрерывны, тогда вопрос существования интеграла Фурье сводится к существованию предела функции $$ T_{\eta}(f, x) \int_0^{\eta} (a(f, y)\cos(yx) + b(f, y)\sin(yx))dy : \eta \rarr +\infty $$ Подставим сюда формулы:

- $a(f,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt$
- $b(f,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt$

И получаим следующее представление: $$ T_{\eta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x - t)) dt $$

За счёт того, что модуль внутреннего интеграла $\le$ интеграла от модуля f, можем поменять интегралы местами и получить $$ T_{\eta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\int_0^{\eta} \cos(y(x - t)) dy) dt $$ Внутренний интеграл можно вычислить явно $$ \int_0^{\eta} \cos(y(x - t)) dy = \frac{\sin \eta(x - t)}{x - t} $$ Подставляем это вычисление в выражение выше и производим замену $t = x + \xi$: $$ T_{\eta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \xi) \frac{\sin \eta\xi}{\xi} d\xi $$ За счёт чётности функции $\frac{\sin \eta\xi}{\xi}$ можем представить интеграл в следующем виде: $$ T_{\eta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{\xi} \sin (\eta\xi) d\xi $$ *Наконец можем начать искать предел...*

Само условие

О. Функция удовлетворяет односторонним условиям Дини, если:

1. Сущетсвуют её оба односторонних предела
2. На некотором интервале $(0, \delta) : \delta > 0$ абсолютно интегрируемы 2 функции:
   - $F_+(\xi) = \frac{f(x + \xi) - f(x + 0)}{\xi}$
   - $F_-(\xi) = \frac{f(x - \xi) - f(x - 0)}{\xi}$

Т. "Признак Дини сходимости интеграла Фурье" Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой и удовлетворяет в точке x_0 односторонним условиям Дини, тогда соответствующий этой функции нтеграл Фурье будет сходиться и равняться $$ M_f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} $$ *Доказательство невероятно страшное, но хоть что-то о нём попытаюсь сказать: для начал мы переходим к отображению интеграла в виде последней формулы T_{η} и выражаем через неё $M_f(x_0)$. Далее записываем разность $T_{\eta} - M_f(x_0)$, раскладывая её на функции из односторонних условий Дини и каждый из двух интегралов раскладываем ещё на 3, а затем доказываем их сходимость*

С. Таким образом мы теперь можем вычислять интеграл Фурье вида: $$ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos (y(x_0 - t)) dt = M_f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} $$

Условие Липшица

Да-да, ещё раз

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0 из интервала (a, b). Если для некоторого положительного $a > 0$ существуют такие постоянные L и $\delta > 0$, что: $$ \forall \xi \in (-\delta, \delta) : |f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \le L|\xi|^a $$ то тоговорят, что функция удовлетворяет условию Липшица порядка a

Если функция в точке x_0 удовлетворяет условию Липшеца положительного порядка, то она:

1. **Непрерывна в этой точке**
2. **Удовлетворяет в этой точке односторонним условиям Дини**

Обратное утверждение будет неверно

С. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема всюду на числовой прямой и в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица положительного порядка, то её интеграл Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$

Интеграл Фурье в копмлексной форме

Введём следующее обозначение: $$ c(f, y) = \frac{a(f, y) + ib(f, y)}{2} = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt $$ Домножив обе части на e^{iyx} и пользуясь нечётностью суммы $a(f,y) + b(f,y)$, получаем в итоге следующее представление интеграла Фурье: $$ \int_0^{+\infty} (a(f, y)\cos(yx) + b(f, y)\sin(yx)) dy = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} c(f, y) e^{iyx} dy $$ **О.** Интеграл справа будет называться интегралом Фурье в комплексной форме

Т. О представлении функции интегралом Фурье Если функция непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, а также удовлетворяет в каждой точке односторонним условиям Дини, то эта функция представима следующим равенством: $$ f(x) = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt) e^{iyx} dy $$

Из тождества $\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{c}(f, y)e^{-iyx} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} c(f, y)e^{iyx} dy$ получаем ещё одну формулу интеграла Фурье: $$ f(x) = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt} dt) e^{-iyx} dy $$

С. Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы выше и:

1. Чётная $\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} f(t) \cos (yt) dt) \cos(yx) dy$
2. Нечётная $\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} f(t) \sin (yt) dt) \sin(yx) dy$

Преобразования Фурье

О. Для любой локально суммируемой функции $f(x)$, порождаемый ею интеграл:

1. Образ Фурье - $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i \xi x} dx$ (над f слева пишется уголоок. Далее буду обозначать как $\angle f$)
2. Прообраз Фурье - $\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i \xi x} dx$

Образ и прообраз Фурье $\le \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)dx| = \frac{1}{\sqrt{2 \pi}}||f|| L_1$

Если функция интегрирруема абсолютно, то по теореме римана об осцилляции образ и прообраз будут стремиться к нулю при $\xi \rightarrow +\infty$

О. Опреатор, сопоставляющий локально суммируемой функции её образ, называется преобразованием Фурье и обозначается $F[f]$

О. Оторажение функции в её прообраз, будет называться обратным преобразованием Фурье и обозначается $F^{-1}[f]$

1. Оператор преобразования Фурье линеен

2. Для абсолютно интегрируемой $f(x)$ с образом $\angle f(\xi)$ и любых вещественных a и положительных α будут справедливы выражения:
    1. $F[f(x + a)] = e^{i a \xi} \angle f(\xi)$
    2. $F[f(x\alpha)] = \frac{1}{\alpha} \angle f(\frac{\xi}{\alpha})$
    - *Доказываются тривиальным образом через манипуляции над выражением-определением образа и прообраза*
    - **Для обратного преобразования Фурье справедливы те же законы**
3. Если функция непрерывна, абсолютно интегрируема и удовлетворяет условию Дини, то прямое и обратное преобразование будут взаимно обратными операциями (*Такое ощущение, будто они должны быть таковыми всегда*)

Интегралы Фурье о чётных и нечётных функций

Если функция чётная или нечётная, её достаточно задавать лишь при $x > 0$

О. Для любой локально суммируемой на промежутке $(0, +\infty)$ числовой оси функции $f(x)$ интеграл

- $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(yx) dx = F_c[f]$ называется косинус-преобразованием Фурье
- $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(yx) dx = F_s[f]$ называется синус-преобразованием Фурье

Для чётной функции ($f(x) = f(-x)$) справедливы равенства: $$ F[f] = F_c[f] = F^{-1}[f] $$

Если же функция нечётная ($f(x) = -f(-x)$), то имеют место равенства: $$ F[f] = -iF_s{f} = -F^[-1][f] $$

С. Пусть функция непрерывна и абсолютно интегрируема на интервале $(0, +\infty)$, а также удовлетворяет в каждой точке этого интервала условию Дини, тогда имеют место равенства:

1. $F_c[F_c[f]] = f$
2. $F_s[F_s[f]] = f$

23.04.14 - семинар

Числовой ряд - сумма чисел некоторой последовательности

Конечная сумма ряда - ряд конечной длины

Ряд сходится, если конечная сумма при стремлении количества элементов к бесконечности будет иметь конечный предел

Критерий Коши: ряд сходится $\hArr \forall \epsilon > 0 : \exist N(\epsilon) : \forall n > N : \forall p > 0 : |\sum_{k=n}^{n+p}| < \epsilon$

Необходимое условие сходимости ряда: слагаемые ряда при $n \rarr +\infty$ должны стремиться к нулю

Сходимость/расходимость некоторых рядов:

- Геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$, иначе - расходится
- Ряд со слагаемыми $\frac{1}{n^a}$ сходится при $a > 1$, иначе - расходится

Признаки сходимости рядов

Для знакоположительных рядов

1. Если, начиная с некоторого n_0, $a_n \le b_n$:
    - $\sum_{n=n_0} b_n$ сходится $\rArr \sum_{n=n_0} a_n$ сходится
    - $\sum_{n=n_0} a_n$ расходится $\rArr \sum_{n=n_0} b_n$ расходится
2. Если $\lim_{n \rarr +\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0 \rArr$ ряды сходятся или расходятся одновременно
3. Признак Даламбера
    - Если последовательность такова, что следующий член ряда меньше предыдущего, ряд сходится (Деление следующего члена на текущий меньше единицы), иначе - расходится. (Деление следующего члена на текущий больше или равно единице)
4. Признак Коши - вместо дроби для двух членов берётся корень n-ой степени из a_n

У признаков Даламбера и Коши есть предельные версии

Полезный приём при неопределённости $\infty - \infty$ можно домножить на сопряжённое (числитель и знаменатель). *Споряжённое - то же выражение, но с другим знаком. Полезно, например, для выведения квадрата разности*

23.04.19 - лекция

23.04.21 - семинар

Интегральный признак Коши

Иногда ряд сравнивается с интегралом: пусть есть невозрастающая функция $f(x)$, определённая при $x \ge 1$, тогда $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся и расходятся одновременно

Пример: $$ a_n = \frac{1}{n \ln^p n}, n > 1 $$ $$ f(x) = \frac{1}{x \ln^p x} $$ Если $n > 1$, то для функции можно взять значение первого дискретного номера в ряду - 2 $$ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \newline t = \ln x \rArr dt = dx/x \rArr dx = x dt \newline \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^p} $$ Несобственный интеграл первого рода такого вида будет сходиться при $p > 1$, а значит сходиться при таких p будет и ряд.

Признак Лейбница

Если у нас есть знакопеременный ряд с членом: $a_n = (-1)^n b_n$, то ряд членов a_n убывает, если b_n монотонно стремится к нулю. Тогда говорят, что ряд сходится условно. **Очень важно, что мы должны отдельно доказывать монотонность. Не мене важно, что мы выносим только $(-1)^n$, то есть из $(-4)^n$ в b_n всё также останется 4^n**

Признак Раабе

$$ \lim_{n \rarr \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p $$

- $p > 1 \rArr$ ряд сходится
- $p < 1 \rArr$ ряд расходится

Функциональные ряды

Для функциональный рядов $a_n = u_n(x)$, где $u_n(x)$ - некоторая функция.

При разных иксах ряд может сходиться и расходиться.

Область сходимости X - множество всех точек сходимости.

23.04.26 - лекция

Теорема Котельникова. Продолжение

Измерение сигнала лучше производить не реже чем за $\frac{1}{2\omega}$

Пространство интегрируемых с квадратом на промежутке функций

$\Delta = [\alpha, \beta]$ - некоторый отрезок

Функции, абсолютно интегрируемые на Δ, образуют линейное пространство $L_1(\Delta)$. Функция принадлежит $L_1(\Delta) \hArr \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx < +\infty$ (интеграл сходится)

Написать про нормаль

Написать про пространство $L_2(\Delta)$

Про операции над этим лин. пространством

Скалярное произведение на $L_2(\Delta)$

Для вещественных функци: $$ (f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx $$ Обладает следующими свойствами:

1. $(f, f) > 0$
2. Симметричность
3. $(af, g) = a(f, g)$ (линейность относительно умножения на скаляр)
4. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (линейность относительно сложения)

Для комплекснозначных функций: $$ (f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\overline{g(x)}dx $$ Свойства для такой формы:

1. $(f, f) = \overline{(f, f)}$

В пространстве $L_2(\Delta)$: $f(x) = g(x) \hArr (f - g, f - g) = 0$

Ортогональные и ортонормированные системы

Неравенство Коши-Буняковского для компекснозначных чисел

23.04.26 - семинар

Функциональный ряд равномерно сходится, если он сходится при любых x

Свойства равномерных рядов:

1. Сумма ряда - непрерывная функция
2. Интеграл равномерно сходящегося на $[a,b]$ ряда равен ряду интегралов по $[a, b]$ от функциональных членов
3. Если ряд функциональых элементов сходится, а ряд их производных сходится равномерно, то $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$
4. Если функциональный ряд равномерно сходится и $\forall [\alpha, \beta] \in (a, b)$ и $\exist \lim_{x \rarr a} u_n(x) = A_n$ и ряд $\sum A_n$ сходится, тогда $\lim_{x \rarr a} (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{x \rarr a} u_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$

Признак Вейрштрасса

Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно в области X, если $\forall x \in X : |u_n(x)| \le a_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (называется Мажорантный ряд)

РАБОТАЕТ ТОЛЬКО В ОДНУ СТОРОНУ!!! На основании расхождения ряда мажоранты говорить о расхождении функционального ряда нельзя!

23.04.28 - семинар

Степенные ряды

Член степенного ряда: $a_n = c_n(x - x_0)^n$

Обычно записывается в форме $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$

Всегда сходится при $x = x_0$

Следствие из теоремы Абеля

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ возможны 3 случая:

1. Ряд сходится только в x_0
2. Ряд сходится на всей числовой прямой
3. $\exist R \in \R$ (R - радиус сходимости):
    1. $\forall x : |x - x_0| < R \rArr$ ряд сходится
    2. $\forall x : |x - x_0| > R \rArr$ ряд расходится

Формулы для нахождения радиуса сходимости

Коши-Адомара: (считается всегда) $$ \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \rarr \infty}} (c_n)^{1/n} $$

Вторая формула: $$ R = \lim |\frac{c_n}{c_{n+1}}| $$ (если предел существует)

Сумма некоторых степенных рядов

Степенные ряды на области сходимости сходятся равномерно. За счёт этого можно пользоваться правилами дифференцирования и интегрирования рядов, что в некоторых случаях позволяет куда проще вычислять сумму ряда

- $\sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1 - x}$
- $\sum_{n=1} x^n = \frac{x}{1 - x}$
- $\sum_{n=1} nx^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$
- $\sum_{n=1} n^2x^n = \frac{x + x^2}{(1 - x)^3}$

Ряды Тейлора

ФЛЭЭЭШБЭЭЭК:

Формула Тейлора: $$ f_n(x) = \sum_{k=1}^n (\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k) + r_n(x) $$

Чтобы выразить формулу через ряд, надо доказать бесконечную дифференцируемость функции и сходимость остаточного члена к нулю. После этого можем перейти к ряду вида:

$$ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^n $$

23.05.03 - лекция

Функции многих переменных

О. Функция двух переменных. Аргументы - декартовы пары вещественных чисел. Функция задаётся подмножеством множества вещественных чисел G и некоторым правилом f, согласно которому каждой декартовой паре из G ставится соответствие с вещественным числом $z \in \R$

Множество значение обозначается $f(G)$

О. Функция, задаваемая формулой $z = f(\phi(x, y), \xi(x, y))$ называется сложной функцией или композицией (*а также суперпозицией*). Область определения композиции

Функции множества переменных имеют областью значения пространство $\R^n$

О. Пусть G вложена в $\R^n$ и задано некоторое правило f, которое вектору $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из G ставит в соответствие число $u = f(\vec{x})$, тогда множество чисел $\vec{x} \cup {f(\vec{x})}$ называется функцией множества переменных

Окрестность точки (x_0, y_0) будет представлять собой круг на плоскости.

О. Частной производной называется такая производная, для которой мы фиксируем все координаты кроме одной, по которой проводится дифференцирование. Обозначается как $f'x(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = \lim{h \rarr 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

В общем случае частная производная функции от n переменных будет записываться так: $$ f'*{x_j}(\vec{x}) = \frac{\Delta_j f}{\Delta x_j} \newline \Delta_j f = f(x_1, ..., x*{j-1}, x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n) $$

Таким образом, частная производная для линейной функции будет представлять собой конкретный коэффициент.

Предел функции многих переменных

О. Эпислон окрестность - все точки, расстояние от которых до нулевой точки меньше $\epsilon : \forall \epsilon > 0$. Образуют сферу.

Если модуль разности точек меньше ϵ, то мы получим квадратичную окрестность, которая по мощности всегда больше круговой.

О. При стремлении количества точек в окрестности к бесконечности предельными будут точки, расстояние от которых до нулевой точки стремится к нулю.

О. Предел функции в точке M_0 для множества допустимых точек G из $\R_n$: $a = \lim_{M \rarr M_0} f (M)$, если $\forall \epsilon > 0 : \exist \delta > 0 : \forall M \in .O_{\delta}(M_0) \And G : |f(M) - a | < \epsilon$

23.05.10 - лекция

Ещё раз про [предел функции множества переменных]()

О. по Гейне Число A называется пределом функции $f(M) : M \rarr M_0$, если $\forall {M_k} \in G : k \rarr \infty : M_k \rarr M_0 \rArr f(M_k) \rarr A$

О. Функцию $f(M)$ называют бесконечно большой (величины) при $M \rarr M_0$, если $\forall \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall M \in G \And .O_{\delta}(M_0) : |f(M)| > \epsilon$. Иначе говорят, предел такой функции будет стермиться к $\plusmn \infty$

О. Параметрическая кривая $p = {x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)}$ - множество точек в пространстве $\R^n$, где каждая координата зависит от параметра $t \in \Delta$ - области определения из прямой вещественных чисел.

Если $\Delta = [a, b] \rArr$:

- $A = {x_k(a)}$ - начало кривой
- $B = {x_k(b)}$ - конец кривой

Обозначается такая кривая как AB с вогнутой дугой сверху. Говорят, что она соединяет точки A и B

Отсюда естественным образом вытекает и понятие вектора в пространстве $\R^n$

О. Пусть E - пересечение некоторой кривой с областью определения функции. Если в области E существует предел $f(M)$, то в E будет содержаться предельная точка.

Аналогичным образом вводится понятие предела по направлению, где предельная точка принадлежит лучу (вектору с начальной точкой)

О. Если функция имеет предел в некоторой точке, то и по любому направлению у из этой точки предел будет. **Обратное не верно**

Пример: $$ f(x,y) = \begin{cases} 1, y = x^2 \newline 0, y \not = x^2 \end{cases} $$

О. Число A называется пределеом $f(M)$ при $M \rarr \infty$, если $\forall \epsilon > 0 : \exist \delta > 0 : \forall M \in Df \And .O_{\delta}(\infty) \rArr f(M) \in O_{\epsilon}(A)$

О. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0 \in G$, если $\forall \epsilon : \exist \delta : \forall M \in O_{\delta}(M_0) \And G \rArr f(M) \in O_{\epsilon}(y_0)$ при $y_0 = f(M_0)$

О. M_0 - предельная точка, если выполнены 2 условия:

1. $f(M)$ непрерывна в M_0
2. $\exist \lim_{M \rarr M_0} f(M) = f(M_0)$

Непрерывных функци множества переменных всё также справедливы теоремы о непрерывных линейных операциях

Дифференцирование функции множества переменных

О. Δ для аргументов и значения такой функции определяется тривиально. Δf - полное приращение функции

О. Производной будет отношение $\frac{\Delta f}{\Delta z}$, где $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + f(x_0, y_0)\rho$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Аналогичная штука актуальная для любого кол-ва переменных.

Т. Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она будет непрерывна в окрестности этой точки и иметь все частные производные. *Доказывается через определение Δz*

О. Полный дифференциал в точке $M = {x_0, y_0} : df(x_0, y_0) = dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$. При малых ρ полное приращение совпадает с дифференциалом $\rArr$ дифференциал равен линейной части полного приращения функции.

Т. Если функциях двух переменных имеет частную производную по каждой координате в окрестности точки (x_0, y_0) и при этом эти частные производные непрерывны в этой точке, тогда $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0)

23.05.12 - семинар

Ряды Фурье

$f(x)$ периодическая с периодом $2L$ функция, тогда её можно разложить в ряд Фурье: $$ f(x) \equiv a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}) $$ $$ a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx $$ $$ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx $$ $$ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx $$

Для чётных функций коэффициенты Фурье будут сходиться к следующим: $$ a_0 = \frac{2}{l} \int_{0}^l f(x)dx $$ $$ a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx $$ $$ b_n = 0 $$

Для нечётных получаем $a_0 = a_n = 0$ и: $$ b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx $$

Т. Дирихле о достаточном условии разложимости Если функция на отрехке $[-l, l]$ будет кусочно непрерывна, кусочно монотонна и ограничена, то ряд Фурье:

1. Сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности
2. В точках разрыва будет равняться $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$
3. В граничных точках $= \frac{f(-l + 0) + f(l - 0)}{2}$

23.05.17 - лекция

Ещё раз о дифференцировании функций множества переменных

Записывается Δz как линейная комбинация приращения отдельных скаляров вектора аргументов, умноженных на коэффиценты + значение функции в точке дифференцирования умножить на норму вектора $\Delta \vec{x}$

Дифференцирование сложной функции от двух переменных: пусть дана функция $f(x(t), y(t))$ для $t \in [\alpha, \beta]$. $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

$$ f' = f_x'(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y'(x_0, y_0)y'(t_0) $$

Доказывается через формулу для сложной производной одной переменной

Укороченная формула: $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$

Для вектора $\vec{t}$ определяются частные производные по каждой компоненте вектора $\vec{t}$:

$$ \forall j \le n : \frac{d f}{d t_j} = \frac{df}{dx_i}\frac{dx_i}{d t_j} $$

Касательная к плоскости функции от двух переменных

Функция от двух переменных будет образовывать некоторую область в трёхмерном пространстве. В точке x_0, y_0, z_0 к ней может быть проведена касательная плоскость, если расстояние $\rho(M, l) = o(|MM_0|)$ при $M \rarr M_0$

Т. Если функция множества переменных n имеет в точке x_0 частуные производные $\forall j \le n$, то тогда говорят, что функция дифференцируема в точке x_0

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0): $$ z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y $$

Расстояние от точки до пплоскости: $$ \rho(M, p) = \frac{1}{N}|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y| \newline N = \sqrt{1 + A^2 + B^2} \newline \Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) $$ Когда это значение будет стремиться к нулю, мы можем говорить о том, что плоскость p касательная к f в точке M_0

Есил плоскость является касательной к окрестности точки M_0 с поверхностью S, то функция будет дифференцруема в точке M_0

При этом будет выполняться следующее неравенство: $|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y| \le \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

23.05.24 - лекция

О. Частная производная второго порядка: $\frac{d^2f}{dx^2}$ - тут всё понятно - дважды дифференцируем по указанной переменной. $\frac{d^2f}{dxdy}$ - сначала дифференцируем по x, а потом по y. Определение производных следующих порядков выводится аналогично.

Иногда частные производные существуют, но не все.

О. Когда мы дифференцируем на разных этапах по разным переменным, то такая производная называется смешанной. **Смешанные производные $f^{(2)}xy$ и $f^{(2)}yx$ могут быть не равны, например для функции:** $$ f(x, y) = \begin{cases} 0, x = y = 0 \newline \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \end{cases} $$

Т. Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют смешанные частные производные второго порядка и при этом функция и её производные непрерывны в точке x_0, тогда $f^{(2)}xy = f^{(2)}yx$

Доказывается геометрически через демонстрацию окрестности точки дифференцирования. Тривиально геометричкски катетмаи треугольника определяются Δx и Δy. Далее определим Δy через Δx и наоборот. Затем, определив дэльту иггрик как фи, а дэльту икс как кси, переписываем эти формулы и замечаем, что по теорме Лагранжа (да-да, мы её конечно помним) это и будет производная (ну... наверное)

С. Для функции n переменных, если функция непрерывна и её частные производные порядка m в точке дифференцирования непрерывны, то значение частное производной m порядка не зависит от порядка дифференцирования.

$C^{(m)}(G)$ - множество непрерывно дифференцируемых m раз на открытом множестве точек G. Такое множество образует векторное бесконечномерное пространство.

Частные производные функции многих перменных выражают скорость изменения функции вдоль определённой координатной оси.

Есть также возможность вычислить скорость изменние функции в точке m_0 по некоторому вектору (обычно считают, что его длина равна единице). Тогда для вектора $\vec{l}$ получаем по определнию производной следующую запись: $$ \frac{f(m_0 + h\vec{l}) - f(m_0)}{h} $$ При стремлении $h \rarr 0$. Если такой предел существует то мы получаем производную функции по вектору в точке m_0. Обозначается как $\frac{df}{df}(m_0)$. Полезна эта штука для опредления точек минимума и максимума

В трёхмерном вещественном пространстве возьмём вектор $\vec{l}$ единичной длины, хаданного направляющими косинусами ($\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$)

Т. Если функция дифференцируема в точке m_0, то она имеет производную по вектору $\vec{l}$ и при этом: $$ \frac{df}{df}(m_0) = \frac{df}{dx}\cos \alpha + \frac{df}{dy}\cos \beta + \frac{df}{dz}\cos \gamma $$ *Доказывается тривиальным образом через предельное определение производной*

О. Пусть $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке m_0, тогда вектор $(f'_x(m_0), f'_y(m_0), f'_z(m_0))$ будет называться градиентом в точке m_0. Обозначается $grad f$ либо ∇f (набла f).

Производная функции по единичному вектору направления и градиент связаны следующим соотношением: $$ \frac{df}{df}(m_0) = |\nabla f, \vec{l}| = |\nabla f||\vec{l}|\cos(\angle \nabla f \vec{l}) = |\nabla f|\cos(\angle \nabla f \vec{l}) $$ *В последней записи учмиываем, что вектор $\vec{l}$ единичный*

Из этой записи следует, что максмиальное значение производной будет когда вектор направления и градиент сонаправлены

С. Градиент функции f указывает направления возрастания функции в точке m_0, а его длина равна значению производной.

$$ \nabla = \vec{i}\frac{d}{dx} + \vec{j}\frac{d}{dy} + \vec{k}\frac{d}{dz} $$ **Оператор набла или оператор Гамильтона**

О. Дифференциал высокого порядка от функции в пространстве $\R^n$: $df(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(\vec{x})dx_i$, то есть дифференциалом высокого порядка будетм сумма частных производных, умноженных на частные дифференциалы (вводится такое понятие за счёт линейности дифференциала). *Дальше идёт что-то уж очень страшное с... А, стоп. Ну да, дальше идёт двойное дифференцирование, что достаточно логично, ведь мы говорим о дифференциале второго порядка*

Итоговая формула для второго дифференциала удобно считается через матрицу 2*2: $$ \begin{matrix} \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dxdy} \newline \frac{d^2f}{dydx}, \frac{d^2f}{dy^2} \end{matrix} * \begin{matrix} dx \newline dy \end{matrix} $$ А затем ещё раз умножаем на вектор тот же вектор, но теперь направленный строкой, а не столбцом. В результате получаем матрицу из одной ячейки, сумма которой представляет собой значение дифференциала второго порядка