信号与系统

周期

连续正弦函数	$Acos(\omega t + \phi)$	
离散正弦函数	$Acos(\Omega_0 n + \phi)$	
离散正弦函数周期	$N = \dfrac{2\pi m}{\Omega_0}$	

离散

阶跃函数	$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$	running sum
冲激函数	$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$	first difference

连续

阶跃函数	$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$	积分
脉冲函数	$\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$	一阶导数

第一章、连续信号分析

1.1、冲激函数

1.1.1、正交函数

正交：

如有定义在 (t_1, t_2) 区间的两个函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$，若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2(2)dt = 0$$

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。

正交函数集：

如有 n 个函数 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，... ，$\varphi_n(t)$ 构成一个函数集，当这些函数在区间 (t_1, t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = 0, \qquad \text{当 } i \neq j$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = K_i \neq 0, \qquad \text{当 } i = j$$

则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。

在区间 (t_1, t_2) 内相互正交的 n 个函数构成正交信号空间。

完备正交函数集：

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ 之外，不存在函数 $\phi(t)$ $(0 < \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t)dt < \infty)$ 满足等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\varphi_i(t)dt = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

1.1.2、冲激信号的定义

选择一类性能良好的函数 $\varphi(t)$，称为检验函数 （它相当于定义域），

一个广义函数 $g(t)$ 是对检验函数空间中每个函数 $\varphi(t)$ 赋予一个数值 N 的映射，

该数与广义函数 $g(t)$ 和检验函数 $\varphi(t)$ 有关，记作 $N[g(t),\varphi(t)]$。

通常广义函数 $g(t)$ 可写为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt = N[g(t),\varphi(t)]$$

冲激函数定义：

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

冲激函数的广义函数定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

单位阶跃函数的广义函数理论定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)dt$$

冲激偶：

$\delta(t)$ 的一阶导数 $\delta'(t)$ 称为冲激偶。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)dt = 0$$

冲激函数的导数和积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t)\varphi(t)dt = ?$$

利用分部积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t)\varphi(t)dt = \delta(t)\varphi(t)\,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi^{'}(t)dt$$

$$= -\varphi^{'}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{''}(t)\varphi(t)dt = \delta^{'}(t)\varphi(t)\,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t)\varphi^{'}(t)dt$$

$$= 0 - (\delta(t)\varphi^{'}(t)\,|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi^{''}(t)dt)$$

$$= \varphi^{''}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{n}(t)\varphi(t)dt = (-1)^{n}\varphi^{n}(0)$$

1.1.3、冲激函数的性质

1. 与普通函数的乘积

从定义出发推导——>

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t)x(t)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)[x(t)\varphi(t)]dt=x(0)\varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t)x(0)]\varphi(t)dt=x(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=x(0)\varphi(0)$$

所以，$$\delta(t)x(t)=\delta(t)x(0)$$

乘积的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(0)\delta(t)dt=x(0)$$

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)\delta^{'}(t)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{'}(t)[x(t)\varphi(t)]dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)[x(t)\varphi(t)]^{'}dt$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)[x^{'}(t)\varphi(t)+x(t)\varphi^{'}(t)]dt$$

$$=-x^{'}(0)\varphi(0)-x(0)\varphi^{'}(0)$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}[x(0)\delta^{'}(t)-x^{'}(0)\delta(t)]\varphi(t)dt=-x(0)\varphi^{'}(0)-x^{'}(0)\varphi(0)$$

1 和 2 广义函数相等，

则：$$x(t)\delta^{'}(t)=x(0)\delta^{'}(t)-x^{'}(0)\delta(t)$$

移位性质：

已知： $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

那么， $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = ?$$

result:

换元法，令 $x = t - t_0$，

则， $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)X(x+t_0)dx$$

$$= X(0+t_0) = X(t_0)$$

一阶：

已知: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t)X(t)dt = (-1)X^{'}(0)$$

那么， $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t-t_0)X(t)dt = ?$$

则， $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(t-t_0)X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{'}(x)X(x+t_0)dx$$

$$= -X^{'}(t_0)$$

推广， $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{n}(t-t_0)x(t)dt = (-1)^n x^n(t_0)$$

尺度变换：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\varphi(t)dt = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

即，

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta^n(at) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{a^n}\delta^n(t)$$

1.2 系统

1.2.1、系统的定义

1.2.2、系统的分类

1.2.3、系统的表示

几何形式-框图

代数形式-线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

齐次解：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k t}{dt} = 0$$

该齐次微分方程的解就是齐次解。

初始松弛：

即对于 $t <= t_0$，若输入 $x(t) = 0$，都假设 $t <= t_0$，输出 $y(t) = 0$。

因此，对于 $t > t_0$ 的响应可以用初始条件：

$$y(t_0) = \frac{dy(t0)}{dt} = \frac{d^{'}y(t_0)}{dt'} = \ldots\ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

来计算。

求齐次解： $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0$

猜想解的形式： $y_h(t) = Ae^{st}$

解： $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A s^k e^{st} = 0$$

消去 Ae^{st}，则： $\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$ N roots S_i， $i = 1,2,3...N$

齐次方程可以求得：$S_1, S_2, S_3, , , S_N$。

但是 $A_1, A_2, A_3, , , A_N$ 不确定，

所以我们相当于还要再解一个 N 元一次方程，来确定待定系数 A_k。

所以需要 N 个初始条件

[扩展] 线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

齐次方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^k[n-k] = 0$$ 齐次方程的解为齐次解。

1.2.4、系统的性质

线性

$$x_1(t) -> y_1(t)$$

$$x_2(t) -> y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) -> ay_1(t) + by_2(t)$$

积分电路是线性的。$y(t) = ax(t) + b$ 属于增量线性（不完全线性），平方电路不是线性。

时不变性

假设：输入为 x(t)， 输出为 y(t)。

当输出为 $x(t - t_0)$ 时，输出为 $y_2(t)$。

如果 $y_2(t) == y(t - t_0)$，则系统是时不变的。

EX1: $y(t) = sinx(t)$ 时不变。

EX2: $y(t) = tx(t)$ 时变。

无记忆系统

$$h[n] = x[n] * R[n]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x[\tau]R[n-\tau]d\tau$$

当前时刻的输入只取决于当前时刻的输出。

所以 当 τ == n 时，R[0] 有值；但是 τ != n 时， R[0] 为 0。该系统为无记忆系统。符合上述条件的函数就是单位冲激函数。

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

可逆性

$$x * R_1$$

$$(x * R_1) * R_2 = x * (R_1 * R_2) = x$$

即 $R_1 * R_2 = \delta(t)$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$ 累加器

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$ 差分方程

累加器的单位脉冲响应： $h[n] = u[n]$

差分方程的冲激响应： $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

卷积 $u[n]$：

$$y[n] = x[n] * u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]u[n-k]$$ 当 n > k 时，$u[n-k]$ 为 1，

于是$y[n]$就是对$x[n]$求和。

稳定性

因果性

1.3、连续信号的表示

1.3.2、信号的能量和功率

信号的能量

$$E\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

j

信号的功率

$$P\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$

$$P\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}|x[n]|^2$$

1.4、连续信号的卷积

1.4.1、连续信号卷积的定义

连续信号：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

扩展：离散信号：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

1.4.2、连续信号卷积的性质

卷积的代数性质

1. 交换律

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

2. 分配律

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

3. 结合律

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

函数与冲激函数的卷积

$$x(t) * \delta(t) = ?$$

解：利用卷积的交换律：$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = ?$$

解：

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) * x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(q)x(t - t_0 - q)dq$$

$$= x(t - t_0)$$

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=?$$

解：
$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-t_1)\delta(t-t_2-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(q)\delta(t-t_2-t_1-q)dq$$

$$=\delta(t-t_1-t_2)$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_2)*x(t-t_1)$$

解：
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-t_1)x(t-t_2-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(q)x(t-t_1-t_2-q)dq$$

$$=x(t-t_1-t_2)$$

与阶跃函数的卷积

首先：$u^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(q)dq = tu(t)$

$$u(t) * u(t) = \delta(t) * u^{-1}(t) = u^{-1}(t) = tu(t)$$

$$u(t) * \varphi(t) = \delta(t) * \varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t)$$

$$u(t - t_0) * \varphi(t) = \delta(t - t_0) * \varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t - t_0)$$

卷积的微分与积分

$$x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(q)dq$$

若，　$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

则，　$x^{(1)}(t) = ???$

$$x^{(1)}(t) = [x_1(t) * x_2(t)]'$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\frac{d}{dt}x_2(t-\tau)d\tau$$

$$= x_1(t) * x_2^{(1)}(t)$$

同理，$x^{(1)}(t) = x_1^{(1)}(t) * x_2(t)$

$$x^{(-1)}(t) = ???$$

解：
$$x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} [x_1(t) * x_2(t)] dq$$
$$= \int_{-\infty}^{t} [\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(q-\tau) d\tau] dq$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) [\int_{-\infty}^{t} x_2(q-\tau) dq] d\tau$$

$$x_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(q) dq$$

其他推导：

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = x_1^{(1)}(t) * x_2^{(-1)}(t)$$

$$x^{(i)}(t) = x_1^{(j)}(t) * x_2^{(i-j)}(t)$$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = x^{'}(t) * h^{-1}(t) = x^{-1}(t) * h^{'}(t)$$

1.5、连续信号在系统中的响应

1.5.1、冲激响应和阶跃响应

单位阶跃响应：$s[n]$ 或 $s(t)$ 是当输入为 $x[n]=u[n]$ 或 $x(t)=u(t)$ 的系统输出响应。

阶跃响应：单位阶跃序列与单位脉冲响应的卷积。

$$s[n]=u[n]*h[n]$$

输入为：$h[n]$

累加器的单位脉冲响应：$u[n]$

所以 $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$

$$h[n]=s[n]-s[n-1]$$

一个系统的单位阶跃响应：是它脉冲函数的求和函数。

连续系统中：

$$s(t)=u(t)*h(t)$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$h(t)=ds(t)/dt=s^{'}(t)$$

1.5.2、自由响应和强迫响应

1.5.3、全响应

操作性定义：

$$x(t) * u(t)$$

$$x(t) * u(t) * u_1(t)$$

$$x(t) * u(t) * u_1(t) = x(t)$$

所以：

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

所以：$\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)d\tau = \delta(t)$

即， $u_1(t) = \delta'(t)$

1.6、连续信号的频域分析

1.6.1、傅立叶级数的导出

$\phi_k(t) = e^{S_k t}$ S_k 复数

$\phi_k[n] = {Z_k}^n$ Z_k 复数

傅立叶分析：

C-T： $S_k = jw_k$ $\phi_k(t) = e^{jw_k t}$

D-T： $|Z_k| = 1$ $\phi_k[n] = e^{j\Omega_k n}$

$\phi_k(t) = e^{jw_k t}$

$e^{jw_k t} --> H(w_k)e^{jw_k t}$

周期信号的傅立叶级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jw_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

傅立叶级数的另一个形式：

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jw_k t} + a_{-k} e^{-jw_k t}]$$

因为： $a_k = A_k e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$

第一种表示方式：

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{jw_k t + j\theta_k} + A_{-k} e^{-(jw_k t + j\theta_k)}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k cos(w_k t + \theta)$$

第二种表示方式：

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(B_k + jC_k)e^{jw_k t} + (B_k - jC_k)e^{-jw_k t}]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k(e^{jw_k t} + e^{-jw_k t}) + jC_k(e^{jw_k t} - e^{-jw_k t})]$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} [A_k cos(w_k t) + jC_k jsin(w_k t)]$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} [A_k cos(w_k t) - C_k sin(w_k t)]$$

Over

确定 a_k

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jw_k t}$$

目标是求 a_k，所以

$$x(t)e^{-jw_n t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jw_k t} e^{-jw_n t}$$

左右求周期 T 内积分：

$$\int_0^T x(t)e^{-jw_n t} = \int_0^T \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jw_k t} e^{-jw_n t} dt$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jw_n t} dt = \int_0^T dt a_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(w_k - w_n)t} dt$$

当 k== n 时，$a_k \int_0^T dt$

当 k != n 时，$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(w_k - w_n)t} dt$

$$\int_0^T e^{j(w_k - w_n)t} dt = \int_0^T [cos(w_k - w_n)t + jsin(w_k - w_n)t] dt$$

正余弦函数一个周期内积分都为 0 。

最后：$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jw_k t} dt$

非对称性周期性方波

对称性周期性方波

1.6.2、傅立叶分析的导出

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jw_k t}dt$$

设 $X(w) = \int_0^{T_0} x(t)e^{-jw_k t}dt$

则 $X(w) = T_0 a_k$

那么 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jw_k t} = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jw_k t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jw_k t}w$

当 T 无穷大时，w 无穷小， 则 $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jw_k t}dw$

复指数信号

$$e^{jwt}$$

$$z = e^{jw}$$

欧拉关系

$$e^{ix} = cosx + isinx$$

$$e^{jwt} = cos(wt) + jsin(wt)$$

$$e^{-jwt} = cos(wt) - jsin(wt)$$

$$cos(wt) = \frac{1}{2}(e^{jwt} + e^{-jwt})$$

$$sin(wt) = \frac{1}{2j}(e^{jwt} - e^{-jwt})$$

1.6.3、傅立叶变换定义

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}\,dt = F[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{jwt}\,dw = F^{-1}[F(w)]$$

信号的能量谱和功率谱

一、能量谱

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)^2dt$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(w)e^{jwt}dw]dt$$

交换积分次序：

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(w)[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{jwt}dt]dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(w)X(-w)dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(w)|^2dw$$

上述等式为：帕斯瓦尔方程\能量等式

二、 功率谱

$$P=\lim_{T->\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$$

信号的幅度谱和相位谱

周期信号

$$f(t) = c_0 + c_1 cos(w_1 t + \varphi_1) + c_2 cos(2w_1 t + \varphi_2)$$

傅立叶级数展开：

$$cos(w_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}[e^{j(w_0 t+\varphi_0)+e^{-j(w_0 t+\varphi_0)}}] = \frac{1}{2}e^{\varphi_0}[e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}]$$

所以

$$f(t) = c_0 + \frac{c_1}{2}e^{jw_1 t}e^{j\varphi} + \frac{c_1}{2}e^{-jw_1 t}e^{j\varphi} + \frac{c_2}{2}e^{j2w_1 t}e^{j\varphi_2} + \frac{c_2}{2}e^{-j2w_1 t}e^{j\varphi_2}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jnw_0 t}e^{j\varphi_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jnw_0 t}$$

由 $w = nw_0$ 为横坐标，$|F_n|$为纵坐标 构成幅度谱($|F_n| = |a_n|$)

由 $w = nw_0$ 为横坐标，φ_n 为纵坐标 构成相位谱

1.6.4、常见信号的傅立叶变换

$$g_\tau(t) \qquad <----->$$

$$X(w) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jwt}dt$$

$$= [-\frac{1}{jw}e^{-jwt}]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{e^{jw\frac{\tau}{2}} - e^{-jw\frac{\tau}{2}}}{jw} \qquad sin(\frac{w\tau}{2}) = \frac{e^{j\frac{w\tau}{2}} - e^{-j\frac{w\tau}{2}}}{2j}$$

$$= 2\frac{sin(\frac{w\tau}{2})}{w}$$

$$= \tau\frac{sin(\frac{w\tau}{2})}{\frac{w\tau}{2}}$$

$$= \tau Sa(\frac{w\tau}{2})$$

$u(t)$ <----->

推导： $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)$

$$X(w) = \pi\delta(w) + j(-\frac{1}{w})$$

$e^{-at}u(t)$ <----->

推导：

$$X(jw) = T_0 a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jw_k t} dt \quad \text{分析公式}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-jw_k t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+jw_k)t} dt$$

$$= (-\frac{1}{a + jw_k} e^{-(a+jw_k)t})_0^{+\infty}$$

$$= 0 - (-\frac{1}{a + jw_k} e^0)$$

$$= \frac{1}{a + jw_k}$$

双边指数函数

$$e^{-a|t|}, a > 0 \quad <-----> \ ?$$

傅立叶变换：

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-jwt}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-jwt}dt$$

$$= (-\frac{1}{jw+a}e^{(-jw-a)t})\,|_{0}^{+\infty} + (\frac{1}{a-jw}e^{(a-jw)t})\,|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{jw+a} + \frac{1}{a-jw}$$

$$= \frac{2a}{a^2-(jw)^2} \qquad\qquad j^2 = -1$$

$$= \frac{2a}{a^2+w^2}$$

冲激函数

$$\delta(t) <-----> ?$$

推导：

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-jwt} dt$$

$$= e^0 = 1$$

冲激函数的定义： $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$

推广 $\delta^n(t) <-----> ?$

根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^n(0)$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(t) e^{-jwt} dt$$

$$= (-1)^n (-jw)^n e^0$$

$$= (jw)^n$$

直流信号

$$1 <-----> ?$$

双边指数函数 $$e^{-|a|t} <-----> \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$X(w) = \lim_{a->0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+w^2} dw = \lim_{a->0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(\frac{w}{a})^2} d(\frac{w}{a}) = \lim_{a->0} 2arctan(\frac{w}{a})|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

所以, $$1 <-----> 2\pi\delta(w)$$

正余弦函数的傅立叶变换

余弦函数

$$cos(wt) <-----> ????$$

$$cos(w_0t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})$$

直流信号：$$1 <-----> 2\pi\delta(w)$$

利用频移性质：$$e^{jw_0t} <-----> 2\pi\delta(w - w_0)$$

$$e^{-jw_0t} <-----> 2\pi\delta(w + w_0)$$

所以：$$cos(w_0t) <-----> \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)$$

正弦函数

$$sin(w_0t) <-----> ????$$

$$sin(w_0t) = \frac{1}{2j}(e^{jw_0t} - e^{-jw_0t})$$

同理：$$sin(w_0t) <-----> \frac{1}{2j}[2\pi\delta(w - w_0) - 2\pi\delta(w + w_0)]$$

即 $$sin(w_0t) <-----> j\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$$

1.6.5、周期信号的傅立叶变换

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 是基波角频率， F_n 是傅立叶系数

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jwt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$X(w) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(w - n\Omega)$$

1.6.6、傅立叶变换的性质

时移性

若 $x(t) <--> X(jw),$

则 $x(t-t_0) <--> ?$

综合公式： $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(w)e^{jw_kt}dw$ 根据傅立叶级数推出的

那么， $x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(w)e^{jw_k(t-t_0)}dw$

$x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-jw_kt_0}X(w))e^{jw_kt}dw$

$x(t-t_0) <--> e^{-jw_kt_0}X(jw)$

共轭性

$X(w)=Re\{X(w)\}+jIm\{X(w)\}$

$=|X(w)|e^{j\sphericalangle X(w)}$

频率：w

1. $X(w)$ 与 $X(-w)$ 共轭。

2. 实部\幅度 是频率的偶函数。

$Re\{X(w)\}=Re\{X(-w)\}$

$|X(w)|=|X(-w)|$

3. 虚部\相角 是频率的奇函数。

$Im\{X(w)\}=-Im\{X(-w)\}$

$\measuredangle X(w) = -\measuredangle X(-w)$

Time and frequency scaling

$x(t) <----> X(w)$

$x(at) <---->$

傅立叶变换的定义： $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jw_k t}dt$

则， $x(at) <----> \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-jw_k t}dt$

使用换元法：$\tau = at$。则 $\frac{d\tau}{dt} = a,$

注意: 当 a > 0 时，t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$，那么 τ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$。

当 a < 0 时，t 从 $-\infty$ 从 $+\infty$，那么 τ 从 $+\infty$ 到 $-\infty$。

1. a > 0时，$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-jw_k\frac{\tau}{a}}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{w_k}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a}X(\frac{w_k}{a})$
2. a < 0时：
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-jw_k\frac{\tau}{a}}dt = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\frac{w_k}{a}\tau}d\tau = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{w_k}{a}\tau}d\tau$

$$= -\frac{1}{a}X(\frac{w_k}{a})$$

所以：

$$x(at) <----> \frac{1}{|a|}X(\frac{w_k}{a})$$

对称性

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jw_k t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jw_k t}dw$$

综合公式 $-->$ $x(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{jw_k t}dt$

$$x(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-jw_k t}dt$$

所以：

$$2\pi x(-w) <-----> X(t)$$

频移

$x(t) <-----> X(w)$

？ $<-----> X(w + w_0)$

傅立叶分析：$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jw_k t}dt$

$$X(w + w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(w+w_0)t}dt$$

$$X(w + w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)e^{-jw_0 t})e^{-jwt}dt$$

所以：$x(t)e^{-jw_0 t} <-----> X(w + w_0)$

时域卷积

若 $$x_1(t) <-----> X_1(w)$$

$$x_2(t) <-----> X_2(w)$$

则 $$x_1(t) * x_2(t) <-----> \ ?$$

卷积：$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

则 $x_1(t) * x_2(t)$ 的傅立叶变换为：

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) * x_2(t)]e^{-jw_k t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau]e^{-jw_k t}dt$$

交换积分次序 $= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau)e^{-jw_k t}dt]x_1(\tau)d\tau$

内部积分使用时移性质： $= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_2(w)e^{-jw_k \tau}]x_1(\tau)d\tau$

$$= X_2(w)\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)e^{-jw_k \tau}d\tau$$

$$= X_2(w)X_1(w) = X_1(w)X_2(w)$$

频域卷积

$$x_1(t) < -----> X_1(w)$$

$$x_2(t) < -----> X_2(w)$$

$$? \quad < -----> X_1(w) * X_2(w)$$

卷积定理：

$$X_1(w) * X_2(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\tau)X_2(w-\tau)d\tau$$

傅立叶逆变换为：

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [X_1(w) * X_2(w)]e^{jwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\tau)X_2(w-\tau)d\tau]e^{jwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} X_2(w-\tau)e^{jwt}dw]X_1(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [2\pi x_2(t)e^{j\tau t}]X_1(\tau)d\tau \\
&= x_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\tau)e^{j\tau t}d\tau \\
&= 2\pi x_1(t)x_2(t)
\end{aligned}$$

时域微分

$$x(t) <-----> X(w)$$

$$x^n(t) <-----> ?$$

$$x^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) * \delta(t) = [x(t) * \delta(t)]'$$

$$= x(t) * \delta^{(1)}(t)$$

使用时域卷积定理： 时域卷积 == 频域相乘

而：

$$\delta^{(1)}(t) <-----> jw$$

所以： $x^{(1)}(t) <-----> jwX(w)$

推广： $x^{(n)}(t) <-----> (jw)^n X(w)$

$$x(t) <-----> X(w)$$

$$x^{(-1)}(t) <-----> ???$$

$$x^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * \delta(t)$$

$$= x(t) * \delta^{(-1)}(t) = x(t) * u(t)$$

根据时域卷积定理：

$$x^{(-1)}(t) <-----> X(w)[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}]$$

$$\pi X(0)\delta(w) + \frac{1}{jw}X(w)$$

频域微分

1.6.7、信号的取样

取样脉冲序列： $s(t)$

取样信号：$f_s(t)=f(t)s(t)$

$$\mathscr{F}[s(t)]=\mathscr{F}[\delta_{Ts}(t)]=\mathscr{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)]$$

一般周期信号的傅立叶变换：$\mathscr{F}[f_{Ts}(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(w-n\Omega)$

根据 傅立叶系数的推导： $F_n=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$

$$\mathscr{F}[f_{Ts}(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt]\delta(w-n\Omega)$$

利用冲激函数的积分性质：（此处求得是周期冲激信号的傅立叶变换

$$\mathscr{F}[f_{Ts}(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jn\Omega t}dt]\delta(w-n\Omega)$$

$$=w_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(0)\delta(w-n\Omega)$$

$$=w_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-n\Omega)$$

$f_s(t)$ 的频谱函数

$$F_s(jw)=\frac{1}{2\pi}F(jw)*w_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(jw)*\delta(w-nw_s)$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[j(w-nw_s)]$$

$w_c > w_m, 2w_c < w_s, w_s > 2w_m$. *************

矩形脉冲取样：

非周期矩形脉冲 $g_\tau(t) <-----> \tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

周期信号傅立叶变换 $g_{Ts}(t) <-----> 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(w - n\Omega)$

周期矩形脉冲信号： $F_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} [\frac{1}{-jn\Omega} e^{-jn\Omega t}]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{\tau}{T_s} Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})$$

所以 $\mathscr{F}[g_{Ts}(t)] = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{nw_s\tau}{2}) \delta(w - nw_s)$

$$\mathscr{F}[f_{Ts}(t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\tau}{T_s} F(w) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{nw_s\tau}{2}) \delta(w - nw_s)$$

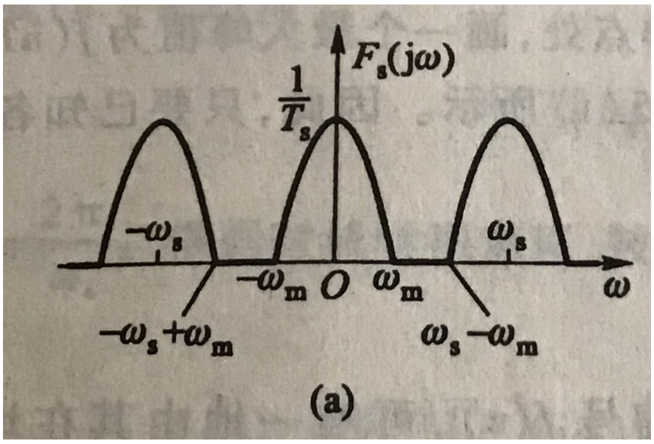
$$= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{nw_s\tau}{2}) [F(w) * \delta(w - nw_s)]$$

利用冲激函数卷积性质： $F(w) * \delta(w - nw_s) = F(w - nw_s)$

所以 $\mathscr{F}[f_{Ts}(t)] = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{nw_s\tau}{2}) F(w - nw_s)$

时域取样定理

冲激取样 $\mathscr{F}[f_{Ts}(t)] = \dfrac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} F(w - nw_s)$



由于我们要还原 $f(t)$，所以可以选择先求 $F(w)$。

求 $F(w)$：$F(w) = T_s\mathscr{F}[f_{Ts}(t)]g_{w_m}(w)$ （T_s 消除 $\mathscr{F}[f_{Ts}(t)]$的 $\dfrac{1}{T_s}$

根据 $g_\tau(t) <-----> \tau Sa(\dfrac{w\tau}{2})$

再由傅立叶变换的对称性质：$\dfrac{1}{2\pi}\tau Sa(\dfrac{\tau t}{2}) <-----> g_\tau(w)$

则 $$Sa(\frac{\tau t}{2}) <-----> T_s g_\tau(t)$$

我们还可以利用时域卷积定理

则：$$f(t) = f_{Ts}(t) * Sa(\frac{\tau t}{2})$$

$$f_s(t) = f(t)s(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) * Sa(\frac{w_s t}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)Sa[\frac{w_s}{2}(t - nT_s)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)Sa(\frac{w_s t}{2} - n\pi)$$

时域取样定理

一个频谱在区间 $(-w_m, w_m)$ 以外为零的频带有限信号 $f(t)$，可唯一地由其在均匀间隔 $T_s(T_s < \frac{1}{2f_m})$ 上的样点值 $f(nT_s)$确定。

注意：

1. $f(t)$必须是带限信号，其频谱函数在 $|w| > w_m$各处为零。
2. 取样频率不能太低，必须满足 $f_s > 2f_m$ （即 $w_s > 2w_m$），或者说取样间隔不能太长，必须满足 $T_s < \frac{1}{2f_m}$，否则将会发生混叠。

为什么 $w_s > 2w_m$ 呢？ 因为周期取样时，频率为 w_m 的整数。

奈奎斯特频率： 最低允许取样频率 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特频率。

奈奎斯特间隔： 最大允许取样间隔 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特间隔。

1.6.8、对连续信号进行频域分析

$$y(t) = h(t) * f(t)$$ 零状态响应

假设输入：$f(t) = e^{jwt}$

则 $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{jw(t-\tau)} d\tau$$

即 $$y(t) = e^{jwt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau$$

$$= e^{jwt} H(w)$$

根据傅立叶逆变换：$f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{jwt} dw$

则 $$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(w) F(w) e^{jwt} dw$$

得出时域卷积定理：$Y(w) = H(w) F(w)$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{F(w)}$$

1.7、连续信号的复频域分析

1.7.1、拉普拉斯变换

定义法

回顾傅立叶变换：傅立叶变换是将信号用基础信号的线形组合来表示。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}dw$$ 信号分解为复指数信号的线性表示

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-jwt}dt$$ 表示复指数信号相关的振幅

复指数信号是线性时不变系统的特征函数。

回顾冲激响应：

冲激响应 $R(t)$ 的傅立叶变换为 $H(w)$。

根据傅立叶变换的卷积性质和信号的响应的性质，

当输入信号为 e^{jwt} 时，它的响应可用 $H(w)e^{jwt}$ 表示。$(R(t) < --- > H(w))$

我们对傅立叶变换进行推广。

当输入信号为 e^{st} 时，它的响应为 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

$$e^{st} -- > R(t) * e^{st} < --- > H(s)e^{st}$$

则， $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

我们定义：$\mathscr{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$ 为 $x(t)$ 的拉普拉斯变换。

$s = \sigma + jw$，由此我们可以发现：当 $\sigma = 0$ 时，$x(t)$ 的傅立叶变换为它的拉普拉斯变换相等。

一个记号上的问题：

以前 $x(t) < - - - > X(w)$。为了与拉普拉斯变换相统一。

现在 $x(t) < - - - > X(jw)$ 。

$$L(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-st}dt$$

我们可以将 $x(t)$ 的拉普拉斯变换看作 $x(t)$ 变换后的傅立叶变换。

推论法

频域法分析时： $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt$

存在局限，因为我们的积分函数必须收敛。

解决的方法是引入衰减因子 $e^{-\sigma t}$，使 $t \to \pm \infty$时，信号幅度趋于 0。

即 $\mathscr{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt$

在双边拉普拉斯变换中：

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

双边 $F_b(s)$，单边 $F(s)$

即，默认 $s = \sigma + jw$。发现自变量为复数，所以又称复频域分析。

$$(ds = jdw)$$

逆变换推导：

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + jw)e^{jwt}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + jw)e^{(\sigma+jw)t}dw$$

替换为复频域

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\frac{ds}{j}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

1.7.2、单边拉普拉斯变换

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[f(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}f(t)e^{st}ds,\ \ t>0$$

$$=0,\quad t<0$$

积分下限取 0^-，是考虑到之后会使用的奇异函数。

收敛域：

$Re[s]$： s 的收敛域。

例如： $Re[s]=\sigma>\tau$

1.7.3、常见信号的单边拉式变换

求复指数函数的单边拉普拉斯变换

$$f(t) = e^{s_0 t}u(t)$$

根据拉普拉斯变换定义：

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{s_0 t}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s-s_0)t}dt, \quad Re[s] > Re[s_0]$$

$$= \frac{1}{s - s_0}, \quad Re[s] > Re[s_0]$$

当 $s_0 = \pm a_0$，a_0 为实数时，

$$e^{a_0 t}u(t) < - - - - - > \frac{1}{s - a_0}, Re[s] > a_0$$

$$e^{-a_0 t}u(t) < - - - - - > \frac{1}{s + a_0}, Re[s] > -a_0$$

当 $s_0 = \pm j\beta$ 时，

$$e^{j\beta}u(t) < - - - - - > \frac{1}{s - j\beta}, Re[s] > 0$$

$$e^{-j\beta}u(t) < - - - - - > \frac{1}{s + j\beta}, Re[s] > 0$$

当 $s_0 = 0$ 时，

$$u(t) < - - - - - > \frac{1}{s}, Re[s] > 0$$

求 t 的象函数

$$f(t) = tu(t)$$

$$F(t) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} te^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} t[-\frac{1}{s}e^{-st}]'dt$$

$$= [-\frac{1}{s}te^{-st}]|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} (-\frac{1}{s}e^{-st})dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s^2}, \quad Re[s] > 0$$

求 $cos(w_0t)$ 的单边拉式变换

$$f(t) = cos(w_0t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t})$$

根据复指数信号的单边拉式变换：

即， $e^{\pm j\beta t} <-----> \frac{1}{s \mp j\beta}, Re[s] > 0$

所以： $cos(w_0t) <-----> \frac{1}{2}(\frac{1}{s - jw_0} + \frac{1}{s + jw_0}), Re[s] > 0$

$$cos(w_0t) <-----> \frac{s}{s^2 + w_0^2}, Re[s] > 0$$

求 $sin(w_0t)$ 的单边拉式变换

$$f(t) = sin(w_0t)u(t) = \frac{1}{2j}(e^{jw_0t} - e^{-jw_0t})u(t)$$

根据复指数信号的单边拉式变换：

$$e^{\pm jw_0t} <-----> \frac{1}{s \mp jw_0}, Re[s] > 0$$

则， $sin(w_0t) <-----> \frac{1}{2j}(\frac{1}{s - jw_0} - \frac{1}{s + jw_0}), Re[s] > 0$

即， $sin(w_0t) <-----> \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}, Re[s] > 0$

1.7.4、拉普拉斯变换性质

一、线性

$$f_1(t) <-----> F_1(s), Re[s] > \sigma_1$$

$$f_2(t) <-----> F_2(s), Re[s] > \sigma_2$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) <-----> a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s), Re[s] > max(\sigma_1, \sigma_2)$$

二、尺度变换

$$f(t) <-----> F(s), Re[s] > \sigma_0$$

$$f(at) <-----> ???$$

根据单边拉式变换定义：

$$\mathscr{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(at)e^{-st}dt$$

换元法：$q = at$，则 $dq = adt$。

$a > 0$ 时，$\mathscr{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(q)e^{-s\frac{q}{a}}\frac{1}{a}dq$

$$= \frac{1}{a}\int_{0^-}^{+\infty} f(q)e^{-\frac{s}{a}q}dq = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}), Re[s] > a\sigma_0$$

$a < 0$ 时，$\mathscr{L}[f(at)] = -\int_{0^-}^{+\infty} f(q)e^{-\frac{s}{a}q}\frac{1}{a}dq$

$= -\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ 但是函数不收敛

三、时移性质

$$f(t) <-----> F(s)$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) <-----> ??? \qquad (t_0 > 0$$

为什么要 乘 $u(t-t_0)$，画图可获得答案。

乘 $u(t)$，则原函数的形状会变化，生成了新函数，不能叫做时移。

况且，原函数本身就是$f(t)u(t)$，而不是$f(t)$。

为什么 $t_0 > 0$，原因同上。

根据单边拉式变换定义：

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_{t_0^-}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$$

使用换元法：$q = t - t_0$，则 $dq = dt$。

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_{t_0^-}^{+\infty} f(q)e^{-s(q+t_0)}dq$$

那么问题来了 $\int_{t_0^-}^{+\infty} f(q)e^{-s(q+t_0)}dq == \int_{0^-}^{+\infty} f(q)e^{-s(q+t_0)}dq$ 吗?

答案是相等，因为 q 的定义就是$(t_0, +\infty)$。

所以时移后的单边拉式变换为： $e^{-st_0}F(s)$

四、复频移性质

$$f(t) <-----> F(s), Re[s] > \sigma_0$$

$$??? <-----> F(s \pm s_0)$$

根据单边拉普拉斯逆变换定义：

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, Re[s] > \sigma_0$$

$$F(s - s_a) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-(s-s_a)t}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{s_a t}e^{-st}dt, Re[s] > \sigma_0 + \sigma_a$$

五、时域微分性质

$$f(t) <-----> F(s), Re[s] > \sigma_0$$

$$\mathscr{L}[f^{(1)}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}df(t)$$

分部积分：

$$\mathscr{L}[f^{(1)}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}df(t) = [e^{-st}f(t)]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} [-se^{-st}f(t)]dt$$

$$= -f(0^-) + sF(s) = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathscr{L}[f^{(2)}(t)] = s\mathscr{L}[f^{(1)}(t)] - f^{(1)}(0^-) = s[sF(s) - f(0^-)] - f^{(1)}(0^-)$$

$$= s^2F(s) - sf(0^-) - f^{(1)}(0^-)$$

六、时域积分定理

$$f(t) <-----> F(s)$$

$$f^{(-1)}(t) <-----> ???$$

$$(f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

根据拉普拉斯变换的定义:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}[f^{(-1)}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f^{(-1)}(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{t} f(x)dx]e^{-st}dt$$

如果$f(t)$ 是因果信号，则:

$$\mathscr{L}[f^{(-1)}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} [\int_{0^-}^{t} f(x)dx]e^{-st}dt$$

分部积分: $[uv]^{'} = u^{'}v + uv^{'}$

$$\int [uv]^{'} = \int u^{'}v + \int uv^{'}$$

设 $u = \int_{0^-}^{t} f(x)dx, \quad dv = e^{-st}dt$

则 $u^{'} = f(t)dt, v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

那么, $\mathscr{L}[f^{(-1)}(t)] = uv|_{0^-}^{+\infty} - \int vdu$

$$= \frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-) - (-\frac{1}{s}F(s)) = \frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-) + \frac{1}{s}F(s)$$

七、卷积定理

因果函数：

$$f_1(t) <-----> F_1(s), Re[s] > \sigma_1$$

$$f_2(t) <-----> F_2(s), Re[s] > \sigma_2$$

则 $f_1(t) * f_2(t) <-----> ???$

根据卷积定理：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{0^-}^{+\infty} f_1(\tau)u(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau$$

根据单边拉式变换定义：

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} [\int_{0^-}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau]e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f_1(\tau)[\int_{0^-}^{+\infty} f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt]d\tau$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f_1(\tau)F_2(s)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= F_2(s)F_1(s)$$

八、 复频域卷积定理

$$f_1(t) <-----> F_1(s), Re[s] > \sigma_1$$

$$f_2(t) <-----> F_2(s), Re[s] > \sigma_2$$

$$??? <-----> F_1(s) * F_2(s)$$

单边拉普拉斯逆变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

则,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}[\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\tau)F_2(s-\tau)d\tau]e^{st}ds$$

变换积分顺序:

$$= \int_{c-j\infty}^{c+j\infty}[\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(s-\tau)e^{st}ds]F_1(\tau)d\tau$$

$$= \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f_2(t)e^{s\tau}F_1(\tau)d\tau = f_2(t)\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\tau)e^{s\tau}d\tau$$

则,

$$f(t)\frac{1}{2\pi j} = f_1(t)f_2(t)$$

即:

$$2\pi j f_1(t)f_2(t) <-----> F_1(s) * F_2(s), Re[s] > \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 < c < Re[s] - \sigma_2$$

第二章、离散信号分析

离散信号的时域变换：

2.1 单位序列和单位阶跃响应

单位序列： $f(k)\delta(k-i)=f(i)\delta(k-i)$

单位阶跃函数： $$u(k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\delta(k-j)$$

2.2 离散信号的卷积

2.2.1 卷积和

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)\delta(k-i)$$

系统的单位序列响应为 $h(k)$。

那么系统对 $f(i)\delta(k-i)$ 的响应为 $f(i)h(k-i)$。

则 $$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)h(k-i)$$

卷积和定义：

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i)f_2(k-i)$$

2.2.2 卷积和的性质

交换律：

$$f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k)$$

分配律：

$$f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)] = f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k)$$

结合律：

$$f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)] = [f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k)$$

$$f(k) * \delta(k) = f(k)$$

$$f(k) * \delta(k - k_1) = f(k - k_1)$$

$$u(k) * u(k) = (k+1)u(k) \quad \text{注意：} u(t) * u(t) = t u(t)$$

$$u(k) * \varphi(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)$$

2.3 序列的傅立叶分析

周期序列

$$f_N(k) = f_N(k + lN),\ l\text{ 为任意整数}$$

2.3.1 周期序列的离散傅立叶级数(DFS)

$$f_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn\Omega k} = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$$

注：$e^{jn\frac{2\pi}{N}k} = e^{j(n+lN)\frac{2\pi}{N}k}$

那么 C_n 如何求呢?

参考连续周期信号傅立叶级数的求法：

$$f_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn\Omega k}$$

$$f_N(k)e^{-jm\Omega k} = e^{-jm\Omega k}\sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn\Omega k}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jm\Omega k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jm\Omega k}\sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{jn\Omega k}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jm\Omega k} = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(n-m)\Omega k}$$

当 $n == m$ 时，

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jm\Omega k} = C_m N$$

即， $C_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jm\Omega k}$

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jn\Omega k} = \frac{1}{N}F_N(k)$$

$F_N(k)$ 称为离散傅立叶系数

则， $f_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(k)e^{jn\Omega k}$ 周期序列离散傅立叶级数

其中： $F_N(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jn\Omega k}$

表示方式

离散傅立叶系数：

$$DFS[f_N(k)] = F_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)W^{nk}$$

离散傅立叶变换展开式：

$$IDFS[F_N(k)] = f_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)W^{-nk}$$

2.3.2 非周期序列的离散时间傅立叶变换(DTFT)

周期离散信号傅立叶级数：

$$f_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)e^{jn\Omega k}$$

傅立叶系数：

$$F_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k)e^{-jn\Omega k}$$

当 $N->\infty$时，此时周期不再为 $(0,N)$，而是 $(-\infty, +\infty)$。

$$F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-jn\Omega k}$$

我们取自变量为 $e^{-jn\Omega}$，即为 $e^{-j\theta}$ $(N->\infty)$

那么：

$$F(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-j\theta k} = |F(e^{j\theta})|e^{j\varphi(\theta)}$$

$|F(e^{j\theta})|$ 称为幅频特性， $e^{j\varphi(\theta)}$ 称为相频特性

当 $n->n\frac{2\pi}{N}$ 时， 周期也从 $N->2\pi$。即 θ 周期 $(-\pi,\pi)$。

求离散傅立叶逆变换：

$$f_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_N(n)e^{jn\Omega k} \qquad \text{离散傅立叶级数}$$

$N->\infty$ 时，

$$f(k) = \frac{d\theta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(n)e^{j\theta k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(n)e^{j\theta k}d\theta$$

2.4 离散傅立叶变换及其性质

2.4.1 离散傅立叶变换 (DFT) 处理有限长序列

有限长序列的长度为 N,

则 $f(k)$ 的离散傅立叶变换和其逆变换的定义分别为:

$$F(n) = DFT[f(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum k \ = 0^{N-1} f(k)W^{kn} . (0 \le n \le N-1)$$

$$f(k) = IDFT[F(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)W^{-kn} . (0 \le k \le N-1)$$

发现这里我们并没有代入上一节的非周期信号的离散傅立叶变换,

因为非周期信号的离散傅立叶变换是连续的。

而我们要使用计算机进行操作。

所以将离散周期信号的傅立叶级数 $f_N(k)$的频率函数 $F_N(n)$ 的主值序列定义为 $f(k)$ 的傅立叶变换。

2.4.2 离散傅立叶变换的性质

$$f(k) <---> F(n)$$

$$F(n) = DFT[f(k)]$$

$$f(k) = IDFT[F(n)]$$

一、 线形

若

$$f_1(k) <---> F_1(n)$$

$$f_2(k) <---> F_2(n)$$

则：

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) <---> a_1 F_1(n) + a_2 F_2(n)$$

二、对称性

$$f(k) <----> F(n)$$

$$F(k) <----> ???$$

根据定义：

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-jn\Omega k}$$

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{jn\Omega k}$$

$$f(-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{-jn\Omega k}$$

变量替换

$$f(-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{-jn\Omega k}$$

即

$$F(k) <----> Nf(-n)$$

三、时移性质

若

$$f(k) <---> F(n)$$

$$f(k-m)_N G_N(k) <---> ???$$

圆周位移：$f(k-m)_N G_N(k)$

$f(k-m)_N$ 是 有限长序列 $f(k)$ 的周期序列 $f(k-m)_N$。

$G_N(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-N)$

$$DFT[f_N(k-m)G_N(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} f_N(k-m)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

利用NB的换元法：

令 $i = k - m$

则，
$$= \sum_{i=-m}^{N-m-1} f_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}(i+m)n}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \sum_{i=-m}^{N-m-1} f_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}in}$$

由于 $f_N(i)$ 和 $e^{-j\frac{2\pi}{N}in}$ 都是周期为 N 的函数。

所以：

$$\sum_{i=-m}^{N-m-1} f_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}in} = \sum_{i=0}^{N} f_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}in} = F(n)$$

即

$$DFT[f_N(k-m)]G_N(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}F(n) = W^{mn}F(n)$$

四、频移性质

若

$$f(k) <----> F(n)$$

$$??? <----> F_N(n-l)G_N(n)$$

根据离散信号的傅立叶逆变换：

$$IDFT[F_N(n-l)G_N(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}[F_N(n-l)G_N(n)]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F_N(n-l)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

设 $i = n - l$,

则：

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=-l}^{N-l-1}F_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}(i+l)k}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}\frac{1}{N}\sum_{i=-l}^{N-l-1}F_N(i)e^{-j\frac{2\pi}{N}ik}$$

$$= f(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}lk}$$

五、时域循环卷积

若有限长序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的长度分别为 N 和 M，那么

$$f_1(k) * f_2(k) = ???$$

线形卷积：

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_2(m) f_1(k-m)$$

圆周卷积：

$$f(k) = f_1(k) \circledast f_2(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2((k-m))_N G_N(k)$$

根据离散傅立叶变换：

$$F(n) = DFT[f(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} [\sum_{m=0}^{N-1} f_1(m) f_2((k-m))_N G_N(k)] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) [\sum_{k=0}^{N-1} f_2((k-m)) G_N(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}]$$

根据离散信号的时移定理：

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f_1(m) [e^{-j\frac{2\pi}{N}km} F_2(n)]$$

$$= F_1(n) F_2(n)$$

六、频域循环卷积

$$f_1(k) <----> F_1(n)$$

$$f_2(k) <----> F_2(n)$$

$$??? <----> F_1(n) \circledast F_2(n)$$

循环卷积：

$$F_1(n) \circledast F_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_1(m) F_2((k-m))_N G_N(k)$$

$$IDFT[F_1(n) \circledast F_2(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\sum_{m=0}^{N-1} F_1(m) F_2((k-m))_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

应用频移定理：

$$= f_2(k) \sum_{m=0}^{m-1} F_1(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

$$= N f_1(k) f_2(k)$$

2.5 Z 变换

利用周期冲激信号对连续信号进行取样后，可以得到离散时间信号。

2.5.1 Z 变换的产生

定义法：

American

根据离散时间傅立叶变换定义：

即： $$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

则 z^n 的零状态响应为 $z^n * R[n]$。（$R[n]$ 为系统的脉冲响应

即 $$z^n --> \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R[k]z^{n-k}$$

$$z^n --> z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R[k]z^{-k}$$

则 $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R[k]z^{-k}$ （$z = re^{j\Omega}$

即 $$z^n --> H(z)z^n$$

我们将 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R[n]z^{-n}$ 定义为 $H[n]$ **的** z **变换**。

$H[z]$ 即 系统脉冲响应的 z 变换。

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$F(z) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

可以发现，当 $z = e^{j\Omega}$ 时，z 变换还原到傅立叶变换。

根据定义，我们可以发现：

一个离散系统，如果他的脉冲响应是 $R[n]$，那么当输入信号为 $x[n]$ 时。

我们如果要求此刻的零输入响应，

可以在时域上通过： $x[n] * R[n]$ 来求得。但是需要求卷积。

在有了 z 变换之后，我们可以先求得 响应的 z 变换，然后求逆获得零状态响应。

肯定 z 变换有比较简单的性质可以便于我们求解，所以才有了 z 变换，具体性质请跳到 <<z 变换的性质>>这一小节来了解。

从拉普拉斯变换到 Z 变换(推论法):

利用冲激序列 $\delta_T(t)$ 对连续时间信号 $f(t)$ 取样时。

取样信号 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)$

$$\mathscr{L}_b[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt$$

根据冲激函数的性质: $\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$

所以 $\mathscr{L}_b[\delta(t)] = 1$

利用拉普拉斯变换的时移性质:

$$\mathscr{L}_b[\delta(t-kT)] = e^{-skT}\mathscr{L}_b[\delta(t)] = e^{-skT}$$

则 $f_s(t)$ 的双边拉普拉斯变换为:

$$F_s(s) = \mathscr{L}_b[f_s(t)] = \mathscr{L}_b[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\mathscr{L}_b[\delta(t-kT)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-skT} \text{------------------} \quad (1)$$

令 $z = e^{sT}$，则 z 为复变量。

同时将（1）式表示为 z 的函数: $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)z^{-k} \text{----------} \quad (2)$

上式称为 $f(kT)$ 的双边 z 变换。

比较（1）式和（2）式:

可以得到在 $z = e^{sT}$时，$f_s(t)$ 的双边拉普拉斯变换等于 $f(kT)$ 的双边 z 变换。

同时，$z = e^{sT}$，$s = \frac{1}{T}lnz$

2.5.2 Z 变换的定义

如果有离散序列 $f(k)(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$，$z$ 为复变量，则函数

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

称为 $f(k)$ 的**双边 z 变换**。

如果求和只是在 k 的非负值域进行，即

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列 $f(k)$ 的**单边 z 变换**。

将 $f(k)$ 的 z 变换简记为 $\mathscr{Z}[f(k)]$，象函数 $F(z)$ 的逆 z 变换简记为 $\mathscr{Z}^{-1}[F(z)]$。

$f(k)$ 与 $F(z)$ 的关系简记为：

$$f(k) <----> F(z)$$

2.5.3 收敛域

因为 z 是 z 的幂级数，显然仅当该幂级数收敛，z 变换存在。

即，当满足 $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$ 时，z 变换收敛。

反之不收敛。该式是 $f(k)$ 的 z 变换存在的充要条件。

键入文本