УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №2

Решение систем нелинейных уравнений

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Ле Чонг Дат
Группа: P3231

2021 г.

1 Задание

Вариант: 16г

- Уравнения и системы задаются пользователем;
- Графики решений нелинейных уравнений;
- Одно уравнение решается разными методами (а,б,в,г) одновременно. Вместе с этим демонстрируется разница в решениях (сравнение методов);
- График решения системы уравнений заданным методом.

  Варианты:

  Решение нелинейных уравнений:

  – а метод деления пополам
  – б метод хорд
  – в метод касательных
  – г метод простой итерации

  Решение систем нелинейных уравнений:

  – 1 метод Ньютона
  – 2 метод простой итерации

2 Описание метода

2.1 Нелинейное уравнение

Пусть дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые значения x, для которых $f(x) = 0$.

Значение x^*, при котором $f(x^*) = 0$, называется корнем (или решением) уравнения.

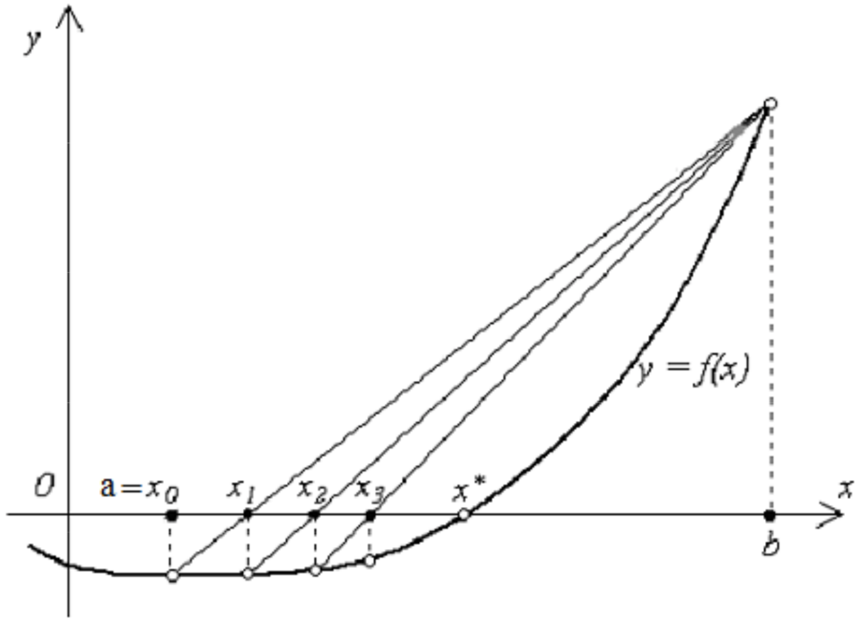
Относительно функции $f(x)$ часто предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

2.1.1 Метод хорд

Метод хорд представляет собой еще одну модификацию метода Ньютона.

Пусть известно, что корень x^* уравнения $f(x) = 0$ находится на отрезке $[a, b]$ и выполняется условие $f(b)f^{''}(b) \geq 0$, тогда $x_0 = a$. Будем проводить из точки $(b, f(b))$ прямые через расположенные на графике функции точки с координатами $(x_n, f(x_n))$.

Абсцисса точки пересечения такой прямой с осью Ox есть очередное приближение x_{n+1}



Прямые на этом рисунке заменяют касательные в методе Ньютона. Эта замена основана на приближенном равенстве

$$f^{'}(x_n) \approx \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}$$

Заменим в расчетной формуле Ньютона производную f '(xn) правой частью приближенного равенства. В результате получим расчетную формулу метода ложного положения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

Погрешность метода Погрешность найденного решения оценивается соотношением:

Сходимость и критерий окончания Метод ложного положения обладает линейной сходимостью. Критерий окончания итераций метода ложного положения: $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

2.1.2 Метод простой итерации

Для применения этого метода исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяют эквивалентным:

$$x = \phi(x)$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ расположен единственный корень. Примем за x_0 любое значение из интервала $[a, b]$. Вычислим значение функции $\phi(x)$ при $x = x_0$ и найдем уточненное значение $x_1 = \phi(x_0)$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню: $x_{n+1} = \phi x_n$

Сходимость Если функция $\phi(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, b]$ и $|\phi^{'}(x)| < 1,\ x \in [a, b]$

то процесс итераций сходится с любой точностью при любом начальном значении x_0 изинтервала $[a, b]$

2.2 Систем нелинейных уравнений

2.2.1 Метод Ньютона

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$F(x) = 0, F(x), x \in R^n$$

и предположим, что существует вектор $X \in R^n$, являющийся решением системы

Будем считать, что $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$, причём $f_i() \in C^1(D)\forall i.$

Разложим $F(x)$ в окрестности точки X:

$F(x) = F(x^0) + F^{'}(x^0)(x - x^0) + o(\| x - x^0 \|)$. Здесь

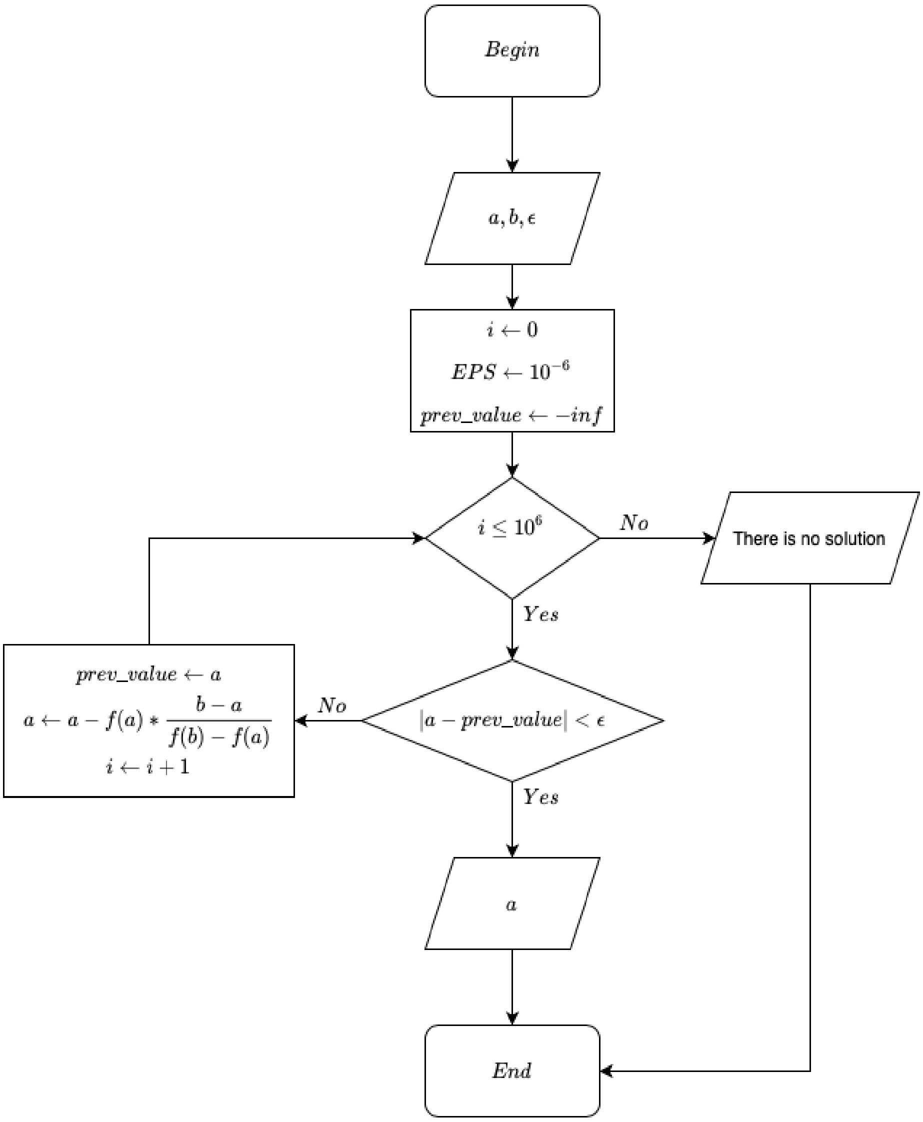
$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

называется матрицей Якоби, а её определитель – якобианом системы (6). Исходное уравнение заменим следующим: $F(x^0) + F(x^0)(x$ - $x^0) = 0$. Считая матрицу Якоби $F(x^0)$ неособой, разрешим это уравнение относительно $x : x = x^0[F(x)]^{-1}F(x^0)$. И вообще положим

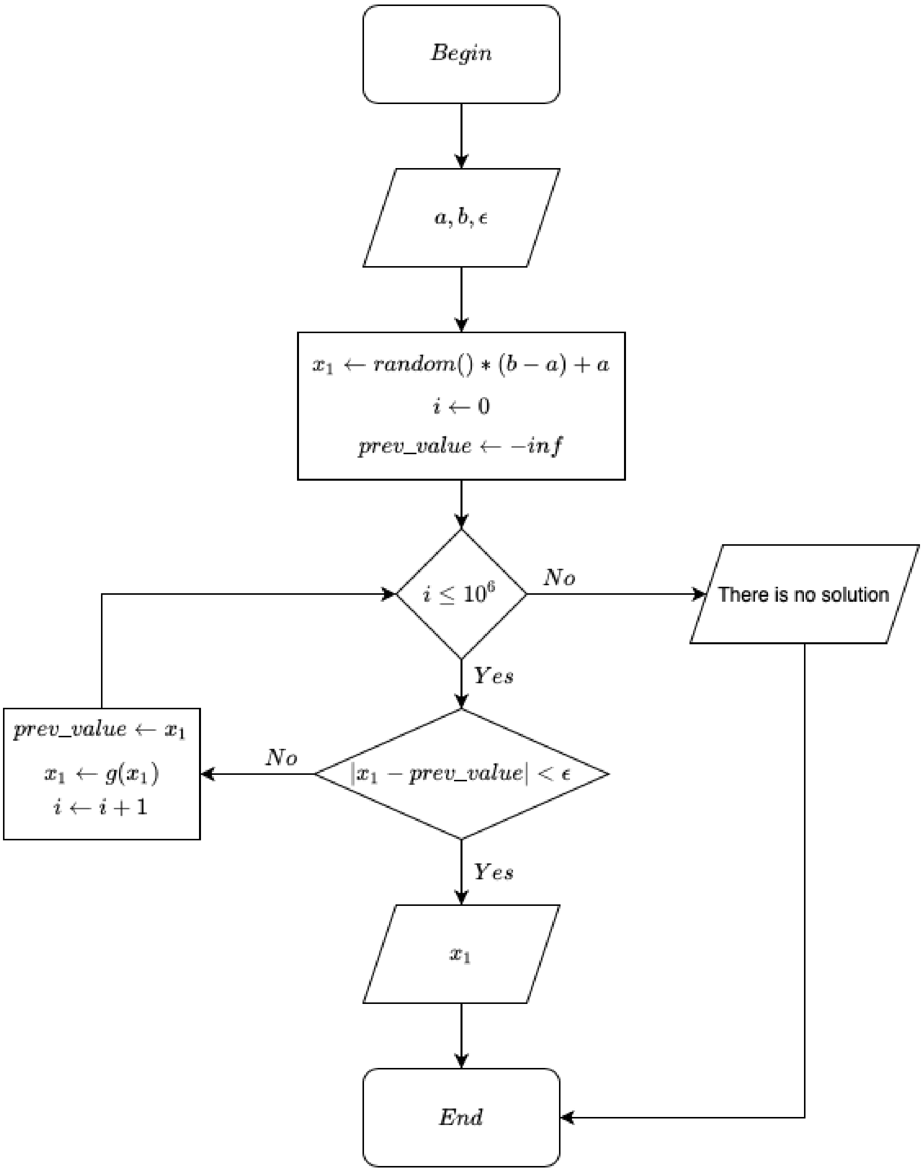
$$x^{k+1} = x^k - [F(x^k)]^{-1}F(x^k).$$

3 Flowchart

3.1 Метод хорд



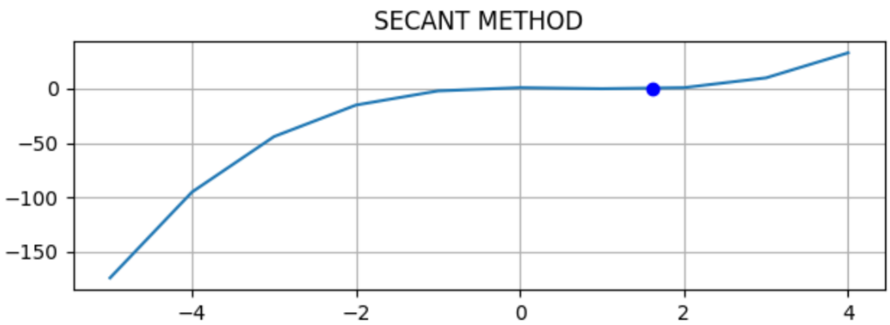
3.2 Метод простой итерации

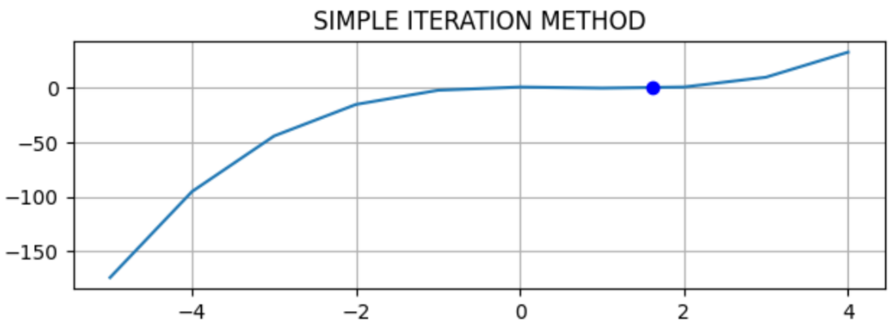


4 Примеры

4.1 Метод хорд и простой итерации

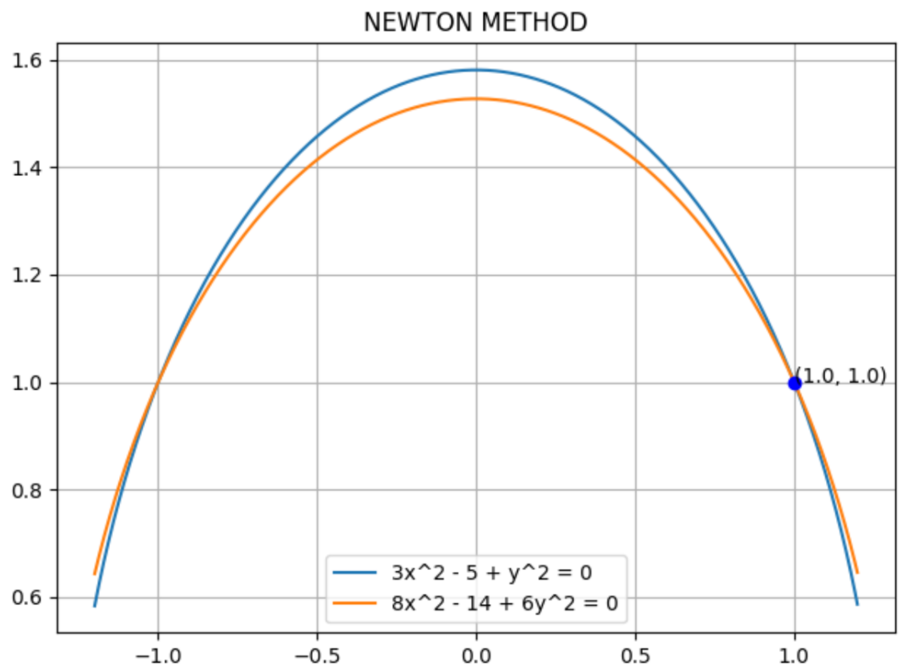
```
> ---------- Welcome to nonlinear world! ----------
> What type of function do you want to do? (Please choose one of the options below).
> 1. Solve a nonlinear equation.
> 2. Solve a system of nonlinear equations
> Enter your option (1 or 2): 1
> Please choose one of the equations below
> 0. x^3 - 2x^2 + 1 = y
> 1. x - 1 - 0.5 * sin(x) = y
> 2. ln(x) + x^3 - x = y
> Enter your choice: 0
> ---------- SECANT METHOD ----------
> Please enter your interval [a, b]: -5 5
> Please enter your epsilon: 0.01
> The solution of this equation is: 1.618034
> ---------- SIMPLE ITERATION METHOD ----------
> Please enter your interval [a, b]: -5 5
> Please enter your epsilon: 0.01
> The solution of this equation is: 1.618034
      Chord  Iteration
0 -5.000000  -3.780886
1  1.960000   3.021702
2  1.925765   2.584392
3  1.896169   2.311983
4  1.870363   2.131977
5  1.847695   2.007526
6  1.827658   1.918410
7  1.809847   1.852817
8  1.793937   1.803477
9  1.779664   1.765715
> Do you want to see more...? (Yes/No)
```





4.2 Метод Ньютона

```
> ---------- Welcome to nonlinear world! ----------
> What type of function do you want to do? (Please choose one of the options below).
> 1. Solve a nonlinear equation.
> 2. Solve a system of nonlinear equations
> Enter your option (1 or 2): 2
> Please choose one of the system of nonlinear equations below:
> 0. System 0
    3 * x^2 - 5 + 2 * y^2 = 0
    8 * x^2 - 14 + 6 * y^2 = 0
> 1. System 1
    x^2 + x - 11 + y^2 = 0
    3 * x^2 + tan(y) - 2 = 0
> 2. System 2
    7 * x^3 - 2 + -6 * y^2 + y = 0
    x^4 - 5 + y^3 = 0
> Enter your variant: 0
> Please enter an initial value of 2 arguments:
> 3 5
The solution of this system of nonlinear equations is: 1.0 1.0
```



5 Вывод

Из протестированных методов метод Ньютона оказался наиболее надежным и способным к решению нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Результаты, полученные с помощью трех приведенных выше методов, показывают, что метод Ньютона является наиболее эффективным методом поиска корней нелинейных уравнений, поскольку он сходится к корням нелинейного уравнения быстрее, чем три других метода. То есть он сходится после нескольких итераций, в отличие от трех других методов, которые сходятся после многих итераций.

Метод хорды лучше использовать, когда мы не знаем диапазон [a, b], в который попадает решение, и наоборот, если мы уже знаем диапазон решения, метод простой итерации будет хорошим методом.