Vectores:

Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es una sucesión de n números reales.

Ejemplos: $v = (-1, 0, \pi) \in \mathbb{R}^3$

$w = (3, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$.

Un vector $v \in \mathbb{C}^n$ es una sucesión de n números complejos.

Ejemplos: $v = (1+i, 2, 3-i, 0) \in \mathbb{C}^3$

$w = (1, 2+\sqrt{2}\, i) \in \mathbb{C}^2$.

En general, cuando describamos resultados que valen tanto para $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$ usaremos $\mathbb{K}$ para representar cualquiera de los dos cuerpos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Matrices: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ puede ser pensada como m filas de vectores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que A tiene m filas y n columnas de coeficientes en $\mathbb{R}$.

Ej: $A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad \sqrt{2} \quad 3} \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad \pi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\begin{array}{l} \to v_1 \in \mathbb{R}^3 \\ \to v_2 \in \mathbb{R}^3 \end{array}$

tiene 2 filas y 3 columnas

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tiene m filas de vectores en $\mathbb{C}^n$.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 4 & -i \\ 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$ $\begin{array}{l} \to v_1 \in \mathbb{C}^2 \\ \to v_2 \in \mathbb{C}^2 \\ \to v_3 \in \mathbb{C}^2 \\ \to v_4 \in \mathbb{C}^2 \end{array}$

tiene 4 filas y 2 columnas.

Sistemas lineales:

Ejemplo:

$$\text{I} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Matricialmente se escribe

$$(\mathrm{II}) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 1}}$$

Una solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ (que a veces escribimos en forma horizontal como vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) es una solución si satisface las dos ecuaciones del sistema (I) o equivalentemente si satisface la ecuación matricial (II).

Por ejemplo $(2/3, 1/3)$ es una solución ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{1}{3} \\ 1\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero ¿es la única? ¿hay otras?

Para resolver un sistema lineal para empezar usamos eliminación Gaussiana.

Construimos la **matriz ampliada**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ y "**triangulamos**"

usando las operaciones de filas "permitidas" que no modifican el conjunto de soluciones. Estas son:

- sumarle o restarle a una fila un múltiplo de otra
- intercambiar dos filas
- multiplicar una filas por un

escalar distinto de cero.

Para nuestro ejemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 - F_1 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{3}F_2 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

Hasta aquí logramos "escalonar" la matriz en donde la cantidad de ceros iniciales de cada fila es mayor que la de la fila anterior.

Podemos seguir operando para intentar poner ceros ahora encima de cada primer elemento no nulo de cada fila.

O directamente ya hacemos "sustitución para atrás".

De la 2da fila:

$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1/3 \Rightarrow x_2 = 1/3$.

De la 1ra fila:

$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 2 \cdot 1/3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2/3$

Luego, vemos que $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ es la única solución del sistema I.

¿Que la solución sea un vector en $\mathbb{R}^2$ es casualidad?

¿Nos podría haber dado un vector en $\mathbb{C}^2 - \mathbb{R}^2$? RTA: NO

¡Analizar porqué!

Un ejemplo en $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ i x_1 - (1+i)x_2 = -1-i \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & -(1+i) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{2\times 1}}.$$

Resolvemos con eliminación Gaussiana.

Hacemos operaciones de fila a la **matriz ampliada**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ i & -1-i & -1-i \end{array}\right) \underset{F_2 - iF_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \underline{i-1} & \underline{-1-i} \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{c.A.} \\ -1-i+2i = i-1 \end{array} \right\}$$

Hacemos sustitución hacia atrás.

De la 2da. ec: $(i-1)x_2 = -1-i$

Para despejar y, multiplicamos

conjugado!

por $\dfrac{\overline{i-1}}{|i-1|^2}$ que es el inverso multiplicativo de $(i-1)$

módulo!

$$\Rightarrow \quad x_2 = (-1-i)\frac{(-i-1)}{2} = \frac{i+1+i^2+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$\Rightarrow x_2 = i$, entonces de la 1ra ec.

$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2i$

Luego, obtuvimos que el sistema tiene única solución $(x_1, x_2) = (2i, i)$.

En este caso la solución está en $\mathbb{C}^2$. ¿Podría haber quedado en $\mathbb{R}^2$?

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:

$$(I)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $\left.\begin{matrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \\ b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K} \end{matrix}\right\}$ son los coeficientes

$x_1, \ldots, x_n$ son las incógnitas.

Una solución $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (un vector de n elementos, cada uno un número en $\mathbb{K}$) es una solución del sistema (I) si el mismo vector $(x_1, \ldots, x_n)$ satisface cada una de las m ecuaciones.

Matricialmente, el sistema (I) se escribe así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{es una matriz}\\ \text{de } m\times n \text{ con}\\ \text{coeficientes en } \mathbb{K}\\ \left(\text{está en } \mathbb{K}^{m\times n}\right)}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{un vector}\\ \text{vertical}\\ \text{incógnita}\\ \text{en } \mathbb{K}^{n\times 1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\text{un vector}\\ \text{vertical}\\ \text{de coeficientes}\\ \text{dados}\\ \text{en } \mathbb{K}^{m\times 1}}}$$

Se escribe resumido:

$$A\,x = b$$

Algunas definiciones

1) El sistema (I) se dice **homogéneo** si $(b_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0)$

2) Dado un sistema como (I)

se llama **sistema homogéneo asociado** a (I) al sistema que tiene mismos coeficientes a_{ij} pero se reemplazan los b_i's con ceros. Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

tiene como sistema homogéneo asociado a:

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 & \rightarrow \text{Acá ya había un cero, lo dejo} \\ x_1 + x_2 = 0 & \rightarrow \text{Acá no había cero, pongo un cero} \end{cases}$

3) Una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ se dice escalonada si cada fila i, F_i, con $i \geq 2$ tiene más ceros iniciales que

la fila $i-1$, salvo que ambas filas sean de todos ceros.

Ej: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ matriz escalonada

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ matriz no escalonada (F_2 y F_3 tienen misma cantidad de ceros iniciales)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ matriz escalonada.

4) Dado un sistema lineal $Ax = b$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ puede pasar:

i) El sistema no tiene solución (se dice **incompatible**: S. I.)

ii) El sistema tiene única solución (se dice **compatible determinado**: S. C. D.)

iii) El sistema tiene infinitas soluciones (se dice **compatible indeterminado**: S. C. I.)

Nota: Un sistema homogéneo siempre tiene $\bar{x} = \bar{0}$ como solución.

¿Cómo podemos saber a partir de la eliminación Gaussiana cómo se clasifica el sistema y quiénes son sus soluciones, si las tiene?

Recordemos qué operaciones elementales no modifican el conjunto solución:

Si $A = \begin{pmatrix} \overline{\quad F_1 \quad} \\ \vdots \\ \overline{\quad F_m \quad} \end{pmatrix}$

1) Intercambiar dos filas $F_i \leftrightarrow F_j$

2) Multiplicar una fila por un múltiplo $k \neq 0$ $\quad kF_i \rightarrow F_i$

$k \in \mathbb{K} - \{0\}$.

3) Reemplazar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo de otra $\quad F_i + kF_j \rightarrow F_i$, $k \in \mathbb{K}$

Nota: Hacer una operación de filas como 1), 2) ó 3) corresponde con multiplicar a la matriz A a izquierda por una matriz E que consiste en hacerle la misma operación 1), 2) ó 3) a la matriz Identidad. A estas matrices E se las llama **matrices elementales**.

Ej: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Entonces $E \cdot A = \tilde{A}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto me dice que si invierto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{\overset{\text{(chequear)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual $A = E^{-1} \cdot \tilde{A}$.

Más en general, dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, hacer la eliminación Gaussiana con operaciones de fila permitidas se puede pensar como una multiplicación a izquierda por tantas matrices elementales como operaciones de fila se hicieron hasta obtener una matriz escalonada. Es decir tendremos:

$$E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \tilde{A}$$

donde cada $E_1, E_2, \dots, E_p$ es una matriz elemental, A es la matriz original y $\tilde{A}$ es la escalonada.

Como cada matriz elemental

resulta inversible (pensar por qué) podemos escribir (OJO con el orden de las inversas!):

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1} \tilde{A}$$

Este tipo de reescrituras de una matriz como producto de otras matrices se lo llama "descomposición" de la matriz A.

En esta descomposición, tendremos en $\tilde{A}$ la información para clasificar el sistema y cuando hubiera solución, construirla.

Retomamos la pregunta anterior:

¿Cómo podemos saber a partir de la eliminación Gaussiana cómo se clasifica el sistema y quiénes son sus soluciones, si las tiene?

Empecemos con ejemplos

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Llegamos a matriz escalonada en donde queda 1 fila no nula en las primeras 2 columnas y el resto de las filas cero en las 3 columnas.

Esto nos dice que tendremos infinitas soluciones, es decir es un sistema compatible indeterminado.

Para calcular las soluciones, de la ecuación que quedó:

$$5x_1 + 3x_2 = 11$$

Despejamos alguna de las variables:

$$x_2 = \frac{11 - 5x_1}{3} = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1$$

Luego las soluciones son:

$$(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \left\{ \left(x_1, \frac{11}{3} - \frac{5}{3}x_1\right) : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 9x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 45 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 9 & 33 \\ 20 & 12 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora está escalonada.

Si miramos la F_2, tenemos

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ lo cual no tiene solución, luego

$$S = \emptyset.$$

3) Clasificar el siguiente sistema y resolver en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11 \\ 15x_1 + 10x_2 = 33 \\ 20x_1 + 12x_2 = 44 \end{cases}$$

3 ecuaciones y 2 incógnitas

Armamos la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 15 & 10 & 33 \\ 20 & 12 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{matriz escalonada}}$$

De la 2da ec. $x_2 = 0$

De la 1ra ec. $5x_1 + 3\underbrace{x_2}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 11$

$\Rightarrow 5x_1 + 3 \cdot 0 = 11$

$\Rightarrow x_1 = \frac{11}{5}$

$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{11}{5}, 0 \right) \right\}$.

En resumen:

Dado un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, si lo escribimos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

con $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \ldots, m$
$j = 1, \ldots, n$

Triangulamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

y obtenemos la matriz escalonada $\tilde{A}$.

1) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene menos de n (número de incógnitas) filas no nulas en las primeras n columnas y el resto de las filas de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ son nulas en las $n+1$ columnas

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). (Ej 1)

2) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene alguna fila que tiene sus primeras n columnas nulas pero en la columna $n+1$ de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ un escalar no nulo, es decir, en $(\tilde{A}|\tilde{b})$ se tiene una fila

$$0 \ldots 0 \mid b \neq 0$$ (Ej 2)

entonces el sistema es incompatible (no tiene solución)

3) Si la matriz escalonada $\tilde{A}$ tiene exactamente n (número de incógnitas) filas no nulas, entonces el sistema es compatible determinado (única solución).

(Ej 3).

Tanto en 1 como en 3, las soluciones ó la solución se construyen a partir de la matriz escalonada $\tilde{A}$ con la sustitución hacia atrás.

Notar que en el caso 3) si al hacer la eliminación de Gauss obtuvimos n filas no nulas, es porque comenzamos con al menos esa cantidad de filas (ecuaciones), es decir $m \geq n$.