Espacios vectoriales

Recordemos qué es un **cuerpo**.

$\mathbb{K}$ es un cuerpo si posee dos operaciones $+$ y $\cdot$ con las propiedades:

	$+$	$\cdot$
asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
conmutativa	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
elemento neutro	$a+0=a=0+a$	$a.1=a=1.a$
elemento inverso	$a+(-a)=0$	si $a\neq 0$, $a.a^{-1}=1$
distributiva	$a.(b+c)=a.b+a.c$	

para todo $a,b,c\in\mathbb{K}$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos. $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo

En esta materia trabajaremos con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definimos la clase pasada vectores en $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$, que podemos llamar $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ que son n-uplas de elementos en $\mathbb{K}$.

Para simplificar usemos $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ en los ejemplos que siguen:

$$\mathbb{R}^n = \{ (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R} \}$$

Sabemos además sumar vectores entre sí y multiplicar un vector por un **escalar** (que es un elemento del cuerpo $\mathbb{R}$), es decir, tenemos las operaciones:

$$+_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v, w \longrightarrow v+w$$

$$(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \longrightarrow (v_1+w_1, \dots, v_n+w_n)$$

$$\cdot_{\mathbb{R},\mathbb{R}^n} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$a, v \longrightarrow a \cdot v$$

$$a, (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow (av_1, \dots, av_n)$$

A esta operación se la llama acción del cuerpo $\mathbb{R}$ en el espacio $\mathbb{R}^n$ o **producto por un escalar**. Ojo! No es un producto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Además, podemos ver que se satisfacen las propiedades:

1. Asociatividad de la suma.

$$u+(v+w) = (u+v)+w$$

2. Conmutatividad de la suma.

3. Elemento neutro de la suma.

4. Inverso para la suma.

5. Compatibilidad del producto por un escalar con el producto en $\mathbb{R}$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(\overbrace{b}^{\in \mathbb{R}} \cdot \overbrace{v}^{\in \mathbb{R}^n})}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\overbrace{(a \cdot b)}^{\in \mathbb{R}}}_{\text{este producto es en } \mathbb{R}} \cdot \overbrace{v}^{\in \mathbb{R}^n}$$

6. Elemento neutro de la multiplicación por escalar:

$1 \in \mathbb{R}$ hace que $1 \cdot v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

7. Distributiva de la multiplicación por escalar respecto de la suma de vectores

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v \quad \forall a \in \mathbb{R},\ u, v \in \mathbb{R}^n$$

8. Distributiva de la multiplicación por escalar resp de suma de escalares

$$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ y } v \in \mathbb{R}^n.$$

Todo lo que dijimos vale si tomamos un cuerpo $\mathbb{K}$ como escalares y $\mathbb{K}^n$ como vectores con $+$ y $\cdot$ tradicionales.

También valen las propiedades si tomamos un cuerpo $\mathbb{K}$ como escalares y $\mathbb{K}^{n \times m}$ como el conjunto de matrices de $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ con las operaciones habituales de suma de matrices y producto por un escalar.

Estos dos espacios $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^{n \times m}$ con el cuerpo $\mathbb{K}$ y la $+$ y $\cdot$ correspondiente son ambos ejemplos de **espacios vectoriales**.

Definición: Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (también llamado $\mathbb{K}$-e.v.) es un conjunto V y dos operaciones

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

que satisfacen los axiomas 1 a 8 descriptos anteriormente en el ejemplo (ver pág 18 del apunte).

Ejemplos: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo.

1) $\mathbb{K}^n$ con $n \geq 1$ con $+$ y $\cdot$ habitual es un e.v.

2) $\mathbb{K}^{n \times m}$, $n, m \geq 1$ con $+$ y $\cdot$ habitual es un e.v.

3) $\mathbb{K}[x]$ = cjto de polinomios con coef en $\mathbb{K}$ con $+$ y $\cdot$ habituales (¿cuáles serán?) es un e.v.

Ver más ej en el apunte.

Subespacios

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ que vimos es un e.v. con $+$ y $\cdot$ habituales.

Ahora tomamos

$$S = \{ (v_1, v_2, 0) : v_1, v_2 \in \mathbb{R} \}$$

S es un subconjunto de $V = \mathbb{R}^3$.

¿Es un espacio vectorial con misma $+$ y $\cdot$?

Para empezar tendríamos que ver si

$$+ : S \times S \longrightarrow S$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$$

es decir, si $+$ y $\cdot$ son cerradas por S. Les dejo que vean que es así. Para seguir, ¿se satisfacen los axiomas 1 a 8 ?

Repasando estas condiciones vemos que

1), 2), 5), 6), 7) y 8) valen.

Para 3) vemos que $(0,0,0) \in S$

y este era el neutro de la suma.

Para 4) vemos que $(-v_1, -v_2, 0)$

es inverso para la suma de

$(v_1, v_2, 0)$.

Notar que podemos probar que

$$(-1) \cdot v = -v$$ (*) Para quien le interese: abajo mostramos esto.

y esto nos permite probar que si

$v \in S$ y el producto por escalar

es cerrado en $S \Rightarrow -v \in S$.

En general se tiene que:

Si $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v., S

es un **subespacio de V** si

1) $+ : S \times S \to S$

La operación suma es cerrada por S.

2) $\cdot : \mathbb{K} \times S \to S$

La acción del cuerpo en S es cerrada por S.

3) $0 \in S$.

Solo para interesados en detalles:

(*) Para ver que $(-1) \cdot v = -v$ primero vemos que

1o $\quad 0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

y esto es porque $(0+0) \cdot v = 0 \cdot v$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 \cdot v$

Sumo $-0 \cdot v$ (opuesto de $0 \cdot v$)

a ambos lados y tenemos $0 \cdot v = 0$

2. Vemos que

$$v + (-1)\cdot v = 1\cdot v + (-1)\cdot v = (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v = 0$$

y usando que el opuesto es único tenemos que $(-1)\cdot v = -v$ el opuesto de v.

<u>Ejercicio:</u> Determinar si

$$S = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Veamos eso:

- Si $(v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \in S$

es decir $2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0$

$2w_1 + 3w_2 + w_3 = 0$

suma: $(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \in S$?

tengo que ver si

$$2(v_1 + w_1) + 3(v_2 + w_2) + v_3 + w_3$$

es igual a 0.

Pero

$$2(v_1+w_1)+3(v_2+w_2)+v_3+w_3$$

$$= 2v_1+2w_1+3v_2+3w_2+v_3+w_3$$

$$= \underbrace{2v_1+3v_2+v_3}_{=0}+\underbrace{2w_1+3w_2+w_3}_{=0}=0.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2, v_3) \in S$

$$\Downarrow$$

$$2v_1+3v_2+v_3=0$$

$$a \cdot (v_1, v_2, v_3) = (av_1, av_2, av_3) \in S?$$

Hacemos

$$2(av_1)+3(av_2)+av_3$$

$$= a\underbrace{(2v_1+3v_2+v_3)}_{=0}=0.$$

- $(0,0,0) \in S$? Sí, porque

$$2 \cdot 0+3 \cdot 0+0=0.$$

Luego es un subespacio.

Generadores: Dado V un $\mathbb{K}$ e.v.

Definimos para $v \in V$

$$S = \langle v \rangle = \{ a \cdot v , \quad a \in \mathbb{K} \}$$

es un subespacio y se lo llama

subespacio generado por v.

A **v se lo llama generador de S.**

Ej en $\mathbb{R}^3$

$$\langle (1,2,-6) \rangle = \{ a(1,2,-6), \quad a \in \mathbb{R} \}$$

Por ej si $a=-2$ $\quad (-2,-4,12) \in \langle (1,2,-6) \rangle$

Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, una **combinación lineal** de $v_1, \dots, v_n$ es un elemento

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n \in V$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

Se define el **subespacio generado por $v_1, \dots, v_n$**

$$S = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \}$$

al conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1 \dots v_n$.

A $\{v_1, \dots, v_n\}$ se lo llama **sistema de generadores** para S.

Ej:

- En $\mathbb{R}^2$, $\langle (1,0), (0,1) \rangle$

$$= \{ a \cdot (1,0) + b(0,1) : a, b \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (a,b) : a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

$\{(1,0),(0,1)\}$ es un sist. de gen. de $\mathbb{R}^2$

- En $\mathbb{R}^3$,

$$S = \langle (1,2,-8), (0,1,-3) \rangle$$
$$= \{ a(1,2,-8) + b(0,1,-3) : a,b \in \mathbb{R} \}$$

¿ $(1,3,0) \in S$?

Vemos si existen $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a(1,2,-8) + b(0,1,-3) = (1,3,0)$$

es decir debería ser

$$\left.\begin{aligned} a\cdot 1 + b\cdot 0 &= 1 \\ a\cdot 2 + b\cdot 1 &= 3 \\ a\cdot(-8) + b(-3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Esto es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas

Lo escribimos matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -8 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y triangulamos}$$

$$\underset{\substack{F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 + 8F_1 \to F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 + 3F_2 \\ \to F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Esto nos dice que el sistema no tiene soluc

luego no existen a, b buscados, es decir $(1,3,0) \notin \langle (1,2,-6), (0,1,-3) \rangle$

Sistemas lineales y subespacios

Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax=0$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, el conjunto S de soluciones, es decir

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ ceros}} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo: (observar que es el mismo ej de antes con v_1, v_2, v_3)

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$$

¿Cuál es la matriz A en este caso?

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{1\times 3}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

¿Cómo podemos encontrar un sistema de generadores de S?

Vemos que al tener una sola ecuación podemos escribir una variable en función de las otras dos:

$$x_3 = -2x_1 - 3x_2$$

$$S = \{(x_1, x_2, -2x_1 - 3x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\underbrace{=}_{\text{separo } x_1\text{'s de } x_2\text{'s}} \{(x_1, 0, -2x_1) + (0, x_2, -3x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$= \{ x_1 \cdot (1,0,-2) + x_2 (0,1,-3),$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (1,0,-2), (0,1,-3) \rangle .$

¿Como veo si $(1,2,-8) \in S$?

Dos formas:

1) La más fácil: usando las ecuaciones. Verifico si $(1,2,-8)$ satisface las ecuaciones que caracterizan a $S = \{ (x_1 x_2 x_3) : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \}$

En este caso, debemos ver si

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + -8$ es cero

Vemos que sí y entonces concluimos que $(1,2,-8) \in S$.

2) Más cuentosa: usando los

generadores. Verifico si existen

$a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1,2,-8) = a.(1,0,-2)+b.(0,1,-3)$$

Les dejo ver que funciona con

$a=1,\ b=2.$

Notar en este caso que

$$S = \langle (1,0,-2), (0,1,-3), (1,2,-8) \rangle$$

$$= \langle (1,0,-2), (0,1,-3) \rangle.$$

$\{(1,0,-2),(0,1,-3),(1,2,-8)\}$ es un sist de gen para S

$\{(1,0,-2)(0,1,-3)\}$ también es un sist de gen para S.

Siempre puedo sacar del conjunto de generadores a un vector que se escribe como combinación lineal de los otros generadores y seguir generando el mismo subespacio.

¿Qué pasa si ahora queremos hacer lo contrario? Es decir, dado un sistema de generadores en $\mathbb{R}^n$, ¿podremos encontrar un sistema de ecuaciones lineales que describan el mismo subespacio que generan los vectores dados?

La respuesta es que sí!

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^4$.

$$S = \langle (-2,1,1,3), (0,0,1,2) \rangle$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ si existen $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(-2,1,1,3) + b(0,0,1,2)$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Es decir buscamos $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ tales q el sistema <u>no</u> homógeneo tenga solución a, b

Planteamos la matiz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{array}\right)$$

triangulamos y vemos cómo deben ser los $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ para que sea un sistema compatible.

$F_1 \leftrightarrow F_2$

2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & 2 & x_4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_4-3F_1 \to F_4}}{\overset{\substack{F_2+2F_1\to F_2 \\ F_3-F_1\to F_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 2 & x_4-3x_2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 0 & x_4-3x_2-2(x_3-x_2) \end{array}\right)$$

$F_4 - 2F_3$

$$\underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 0 & -x_2-2x_3+x_4 \end{array}\right)$$

Para que haya solución
vemos que estos dos
ecuaciones deben ser 0.

Esto me dice que

$$S = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4) : x_1 + 2x_2 = 0 \wedge -x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$