Suma e intersección de subespacios

Dados dos subespacios S y T de un $\mathbb{K}$-ev.

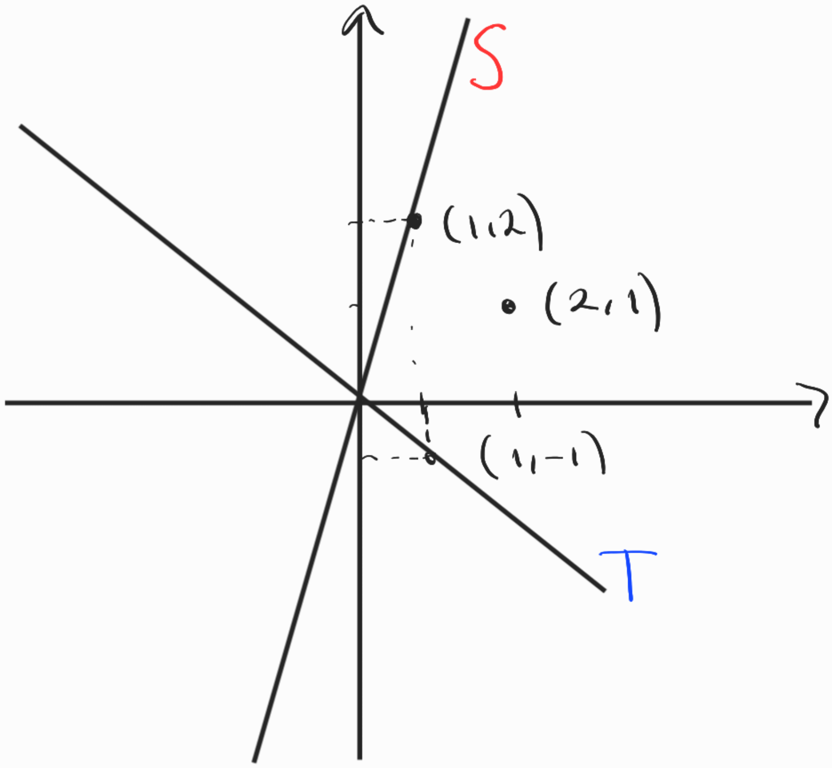
1) **SUMA:**

Se quiere definir un subespacio que contenga tanto a S como a T.

¿Sirve $S \cup T$?

Ej: $S = \langle (1,2) \rangle$

$T = \langle (1,-1) \rangle$



Si hago $S \cup T$ no es subespacio

$(1,2) \in S$

$(1,-1) \in T$

Pero $(1,2)+(1,-1)$

$= (2,1) \notin S \cup T$

Necesitamos que estén al menos las sumas de cosas de S con cosas de T, es decir necesitamos $s+t$, con $s \in S$ $t \in T$

En particular debe estar cualquier vector de la forma

$a(1,2) + b(1,-1)$, es decir

el subespacio que buscamos es

$$S = \langle (1,2), (1,-1) \rangle.$$

¿Es $S = \mathbb{R}^2$? Buscar las ecuaciones de S y convencerse que s

Definimos

$$S+T = \{ s+t, \ s \in S, t \in T \}$$

el subespacio suma (verificar que efectivamente es un subespacio)

Podemos ver que $S+T$ es el subespacio más chico que contiene a S y a T.

Proposición: Dados S y T dos subespacios de un mismo $\mathbb{K}$-ev. V tal que $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ y $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, entonces

$$S+T = \langle s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m \rangle.$$

Ej: En $\mathbb{R}^3$

$$S = \langle (1,2,0) (0,1,1) \rangle$$
$$T = \langle (2,2,1), (1,0,1) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad S+T = \langle (1,2,0) (0,1,1) (2,2,1), (1,0,1) \rangle$$

¿Se puede sacar algún generador?.

Dem Prop: Para probar la igualdad probamos una doble contención.

$\subseteq$: tomamos un vector $v \in S+T$

y queremos ver que $v \in \langle s_1, .., s_n, t_1, .., t_m \rangle$

$v \in S+T \Rightarrow v = s+t$ con $s \in S$
$t \in T$

$s \in S = \langle s_1, .., s_n \rangle \Rightarrow s = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n$

$t \in T = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle \Rightarrow t = b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$

$\Rightarrow s+t = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n + b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$

$\in \langle s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \rangle$

$\supseteq$: tomamos $v \in \langle s_1, .., s_n, t_1, .., t_m \rangle$

y queremos ver que $v \in S+T$

$v \in \langle s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \rangle$

$$\Rightarrow v = \underbrace{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n}_{\in S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle} + \underbrace{b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m}_{\in T = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle}$$

$\Rightarrow v \in S+T$

2) Intersección:

Dados V un $\mathbb{K}$-ev y S y T dos subespacios, buscamos ahora un subespacio que tenga los elementos en común de S y T, esto es

$$S \cap T = \{ v \in V : \; v \in S \text{ y } v \in T \}$$

Ejercicio: Probar que $S \cap T$ es un subespacio.

Ejemplo: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0 \}$

$T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 \}$

$$\Rightarrow S \cap T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \}$$

Vale en general: sea $\mathbb{K}^n$ con S y T subespacios donde

$S = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = 0 \}$,

$T = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : B\bar{x} = 0 \}$ $\Rightarrow$

$$S \cap T = \{ \bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = 0 \wedge B\bar{x} = 0 \}$$

<u>Importante:</u> En $\mathbb{K}^n$:

- Para determinar $S+T$ me conviene tener escritos a S y T con generadores.
- Para determinar $S\cap T$ me conviene tener escritos a S y T con ecuaciones.

3) <u>Inclusión:</u> Dado V un $\mathbb{K}$-ev con S y T subespacios.

$S \subseteq T$ si para todo $v \in S$ se tiene que $v \in T$.

<u>Proposición:</u> Sea $S = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$

$S \subseteq T$ si y solo si $s_i \in T$ para todo $i = 1 \dots, m$.

Dem:

$\Rightarrow)$ $S \subseteq T$, Como $s_i \in S \Rightarrow s_i \in T$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in S$, queremos ver que $v \in T$. Como $v \in S$ y $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ entonces $v = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$.

Como $s_i \in T$ y T es un subespacio

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 s_1 + \dots + a_n s_n}_{= v} \in T$$

Ej: Dados $S = \langle (1,2,0,0)\,(0,1,-1,0) \rangle$ y $T = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$. Determinar si $S \subseteq T$.

Por lo dicho antes, alcanza con ver si cada generador de S está en T.

$(1,2,0,0) \in T$? $\quad 2.1 - 2 - 0 - 0 = 0$ ✓

$(0,1,-1,0) \in T$? $\quad 2.0 - 1 - (-1) - 0 = 0$ ✓

luego $S \subseteq T$.

En general:

En $\mathbb{K}^n$ es más fácil verificar si $S \subseteq T$ cuando S está dado por generadores y T por ecuaciones.

4) **Suma directa:**

Dado V un $\mathbb{K}$-ev y S y T dos subespacios, se dice que S y T están en suma directa si $S \cap T = \{0\}$ y en ese caso a la suma $S+T$ se la simboliza $S \oplus T$.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$, dados

$$S = \langle (1,2,-2)\ (0,1,1) \rangle$$

$$T = \{ (x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0 \}$$

Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$, para $S+T$ y determinar si la suma es directa

Para calcular $S \cap T$, podemos pasar la escritura de S a ecuaciones ó podemos ver cuales vectores de S $\left(a(1,2,-2) + b(0,1,1) \right)$ están también en T (o sea satisfacen ambas ecuaciones de T)

Un vector de S se escribe como $(a, 2a+b, -2a+b)$ y si está en T

debe pasar:

$$\text{EC1} \quad 2a - (2a+b) = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

$$\text{EC2} \quad 2a+b + -2a+b = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

→ Las combinaciones lineales que están en T son

$$a\,(1,2,-2)+0\cdot(0,1,1)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Esto nos dice que

$$S \cap T = \langle (1,2,-2) \rangle .$$

Para $S+T$ buscamos generadores de $T = \{(x_1, x_2 x_3) : 2x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$

Vemos que x_2 está en la dos ec.

⇒ despejamos

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \qquad x_3 = -x_2$$

de manera que

$$T = \left\{ \left(\frac{x_2}{2}, x_2, -x_2\right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{ x_2 \left(\frac{1}{2}, 1, -1 \right), \; x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle \left(\frac{1}{2}, 1, -1 \right) \rangle$$

$$= \langle (1, 2, -2) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad S + T = \langle (1,2,-2) \, (0,1,1) \, (1,2,-2) \rangle$$

$$= \langle (1,2,-2) \, (0,1,1) \rangle$$

S y T <u>no</u> están en suma directa.

Independencia lineal, bases y dimensión:

Empecemos con un ejemplo:

Sea $S = \langle (1,1,0), (0,1,-1), (2,1,1) \rangle$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ ev.

Nos preguntamos:

¿Este conjunto de generadores de S es minimal? Es decir, puedo sacar alguno de los generadores y que solo 2 vectores de ellos generen el mismo S?

Vemos que $(2,1,1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)\cdot(0,1,-1)$

y por lo tanto

$$S = \langle (1,1,0), (0,1,-1) \rangle.$$

¿Hay otra elección?

Notemos que $(0,1,-1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)(2,1,1)$

y por lo tanto también

$$S = \langle (1,1,0), (2,1,1) \rangle$$

¿Cuándo puedo sacar un generador sin cambiar el subespacio?
¿Qué caracteriza esta propiedad?

Notemos que en el primer caso, si

$$(2,1,1) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)\cdot(0,1,-1)$$

entonces,

$$2(1,1,0) + (-1)(0,1,-1) + (-1)(2,1,1) = (0,0,0)$$

Es decir, pudimos escribir al $(0,0,0)$ como combinación lineal de $(1,1,0)$, $(0,1,-1)$ y $(2,1,1)$

Y como puedo escribir al $(0,0,0)$ como comb. lineal de esos tres, vemos que podemos despejar a cualquiera de ellos como comb. lineal de los otros dos, por ej:

$(1,1,0) = \frac{1}{2}(0,1,-1) + \frac{1}{2}(2,1,1)$.

<u>Definición</u>: Dado V un $\mathbb{K}$-e.v un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ se dice **l.i.** (**linealmente independiente**) si <u>no</u> se puede escribir al $\bar{0} \in V$ como combinación lineal no nula de los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Esto es lo mismo que decir que la única forma de escribir

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

es tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

¿Qué será que dos vectores sean **l.d** (**linealmente dependientes**)?

Esto es que <u>no</u> sean l.i. Es decir, decimos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un **conjunto l.d.** si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

no todos nulos de manera que

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Ejemplos:

1) Decidir si el conjunto de vectores $\{\underbrace{(2,1,1)}_{v_1};\ \underbrace{(1,1,0)}_{v_2};\ \underbrace{(0,1,-1)}_{v_3}\}$ es l.i.

a) Planteamos una comb. lineal del $(0,0,0)$

$$\alpha(2,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,1,-1)=(0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha+\beta+\gamma\cdot 0&=0\\ \alpha+\beta+\gamma&=0\\ \alpha+\beta\cdot 0-\gamma&=0 \end{aligned}$$

y vemos si existe solución (α,β,γ) no nula (en este caso serían l.d.) o si la única solución (α,β,γ) es $(0,0,0)$ (en este caso serían l.i.).

Matricialmente:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no todos nulos de manera que

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Ejemplos:

1) Decidir si el conjunto de vectores $\{\underbrace{(2,1,1)}_{v_1}; \underbrace{(1,1,0)}_{v_2}; \underbrace{(0,1,-1)}_{v_3}\}$ es l.i.

a) Planteamos una comb. lineal del $(0,0,0)$

$$\alpha(2,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,1,-1)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha+\beta+\gamma\cdot 0 &= 0 \\ \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta\cdot 0-\gamma &= 0 \end{aligned}$$

y vemos si existe solución (α,β,γ) no nula (en este caso serían l.d.) o si la única solución (α,β,γ) es $(0,0,0)$ (en este caso serían l.i).

Matricialmente:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notar que esta matriz corresponde a poner los vectores dados como columnas.

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2$

$F_3 - \frac{1}{2}F_1 \to F_3$

$F_3 + F_2 \to F_3$

Esto me dice que el sistema es compatible indeterminado, es decir, que existen infinitas soluciones (en particular infinitas no nulas). Luego el conjunto es l.d. Además podemos dar alguna solución explícita.

b) Otra forma de chequear si un conjunto es l.d (sin calcular explícitamente) es construir una matriz con los vectores como filas.

Si al triangular la matriz con operaciones de fila (que involucran hacer combinaciones lineales de ellas) aparece una fila de ceros es porque esos vectores filas son l.d.

Ej:

$$\begin{array}{c} v_1 \leftarrow \\ v_2 \leftarrow \\ v_3 \leftarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 2F_2 \to F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto me dice (nuevamente) que el conjunto $\{(2,1,1), (1,1,0), (0,1,-1)\}$ es l.d.

2) Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$ es l.i.

Usamos opción a) y planteamos la matriz que tiene a los vectores como columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2 - f_1 \to f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_3 - f_2 \to f_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene única solución (0,0,0) y por lo tanto el conjunto de vectores es l.i.

Matrices

Profundicemos un poco en el producto de matrices. Empezamos por el producto de matrices por vector:

Ej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a + 4\cdot b \\ 2\cdot a + 5\, b \\ 3\cdot a + 6\, b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot a + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot b$$

Con lo cual vemos que multiplicar una matriz A por un vector es hacer una combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes de la combinación lineal a las coordenadas del vector.

Análogamente, si multiplicamos una matriz por un vector a izquierda estamos haciendo combinaciones lineales de filas:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 2 & a\cdot 3 + b\cdot 4 & a\cdot 5 + b\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a(1,3,5) + b(2,4,6) \right)$$

Más generalmente, recordemos el producto de matrices: Dadas $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{k}^{n \times r}$, $\mathbb{k}$ cuerpo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{nj} & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{m \times r}.$$

donde $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

Del producto de matrices vemos que la matriz $A \cdot B$ es

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum a_{1l} b_{l1} & \sum a_{1l} b_{l2} & \cdots & \sum a_{1l} b_{lr} \\ \sum a_{2l} b_{l1} & \sum a_{2l} b_{l2} & \cdots & \sum a_{2l} b_{lr} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum a_{ml} b_{l1} & \cdots & & \sum a_{ml} b_{lr} \end{pmatrix}$$

donde usamos $\sum$ para $\sum_{l=1}^{n}$

$\Rightarrow$ así vemos la primera columna de $A \cdot B$.

Vemos que

$$\boxed{\begin{matrix} \sum a_{1l} b_{l1} \\ \sum a_{2l} b_{l1} \\ \vdots \\ \sum a_{ml} b_{l1} \end{matrix}} = A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = A \cdot C_1(B)$$

Es decir $C_1(A \cdot B) = A \cdot C_1(B)$

y en general $C_i(A \cdot B) = A \cdot C_i(B)$

Ejemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 0} \\ -1 \quad 0 \quad 3 \\ 4 \quad -2 \quad 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3\times 2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)3 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 0 + (-2)1 + 1\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-2)(-1) + 1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Y también

$$A \cdot B = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}^{B}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)3 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 0 + (-2)1 + 1\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-2)(-1) + 1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0\cdot C_1(A) + 1\cdot C_2(A) + 2\cdot C_3(A) \;\middle|\; 3\cdot C_1(A) - 1\cdot C_2(A) + 0\cdot C_3(A) \right)$$

$$= \left(A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\underbrace{A\cdot C_1(B)}_{C_1(A\cdot B)} \;\middle|\; \underbrace{A\cdot C_2(B)}_{C_2(A\cdot B)} \right)$$

Además

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{1}\cdot 0 + \boxed{2}\,1 + \boxed{0}\cdot 2 & \boxed{1}\,3 + \boxed{2}\,(-1) + \boxed{0}\,0 \\ \boxed{(-1)}\cdot 0 + \boxed{0}\,1 + \boxed{3}\cdot 2 & \boxed{(-1)}\,3 + \boxed{0}\,(-1) + \boxed{3}\,0 \\ \boxed{4}\cdot 0 + \boxed{(-2)}\,1 + \boxed{1}\,2 & \boxed{4}\,3 + \boxed{(-2)}(-1) + \boxed{1}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1,2,0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (-1,0,3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (4,-2,1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot\underbrace{(0,3)}_{F_1(A)} + 2\cdot\underbrace{(1,-1)}_{F_2(A)} + 0\cdot\underbrace{(2,0)}_{F_3(A)} \\ \hline (-1)\underbrace{(0,3)}_{F_1(A)} + 0\cdot\underbrace{(1,-1)}_{F_2(A)} + 3\underbrace{(2,0)}_{F_3(A)} \\ \hline 4\overbrace{(0,3)}^{F_1(A)} + (-2)\overbrace{(1,-1)}^{F_2(A)} + 1\cdot\overbrace{(2,0)}^{F_3(A)} \end{pmatrix}$$

Son comb. lineal de las filas de B!

$$= \begin{pmatrix} F_1(A)\cdot B \\ F_2(A)\,B \\ F_3(A)\cdot B \end{pmatrix} \begin{matrix} \to F_1(AB) \\ \to F_2(AB) \\ \to F_3(AB) \end{matrix}$$

En general, vale también que

$$F_i(AB) = F_i(A)\cdot B$$

Propiedades del producto de matrices:

- Es asociativo:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- No es conmutativo:

No vale en general que AB sea igual a $B \cdot A$