Vectores l.i. y escritura única.

Ejemplos:

Retomemos el conjunto l.d.

$$\{(2,1,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$$

y queremos escribir a $(4,2,2)$ como comb. lineal de ellos. ¿Se puede? ¿Esa escritura es única?

Matricialmente, buscamos soluciones de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que hay <u>infinitas</u> soluciones

De hecho, vemos también que habrá ciertos vectores que <u>no</u> se podrán escribir como combinación lineal de ellos.

¿Por qué?

Si tomamos ahora el conjunto l.i.

$$\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$$

y tomamos un vector cualquiera $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ siempre se podrá escribir (a,b,c) como combinación lineal de los 3 vectores l.i. y esa escritura es única. Veamos por qué.

Planteamos la matriz ampliada correspondiente al sistema que viene de buscar soluciones (α,β,γ) de:

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,1,0)=(a,b,c),$$

es decir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \underset{F_2-F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \underset{F_3-F_2\to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-b+a \end{array}\right).$$

Vemos que este sistema es compatible determinado independientemente de (a,b,c).

Es decir, dado cualquier $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ existen únicos (α, β, γ) tales que

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,1,0) = (a,b,c).$$

¿Esto vale solo en $\mathbb{R}^3$? ¿y si estamos en un $\mathbb{K}$-ev V cualquiera?

Vale la

Proposición (escritura única).

Sea V un $\mathbb{K}$-ev y $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto l.i. Entonces cualquier $w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$.

Dem: Supongamos que

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \quad (1)$$

y

$$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \quad (2)$$

Si vemos que $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i = 1, \dots, m$, habremos probado lo que queremos.

Restando (1) y (2), tenemos que

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) \cdot v_m$$

Pero como $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto l.i tenemos que $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_m - \beta_m = 0$ ■

Bases y dimensión

Vimos que el conjunto

$$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es un conjunto l.i.

Y también vimos que cualquier $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal (de forma única) de ellos. Es decir el conjunto B "genera todo $\mathbb{R}^3$".

Estas dos propiedades son las que caracterizan una base. En este ejemplo

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

__NOTA:__ $\mathcal{B}$ es un conjunto, no es un subespacio.

__Definición:__ Sea V un $\mathbb{K}$-eV. El conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ se dice que es una base de V si:

a) $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ($\{v_1, \dots, v_m\}$ "generan" cualquier elemento de V como comb. lineal de ellos).

b) $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto l.i.

Por lo visto en el ejemplo anterior:

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

Algunas preguntas que nos podemos hacer:

- ¿Habrá otras bases de $\mathbb{R}^3$ diferentes?
- ¿Todas tendrán la misma cantidad de elementos?
- Dado un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿hay un conjunto minimal (en el sentido de tener la menor cantidad de elementos) que siga generando a $\mathbb{R}^3$? ¿Ese conjunto "minimal" será l.i? Es decir, dado un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿me puedo quedar con un subconjunto de ellos que sea una base de $\mathbb{R}^3$?
- Ahora dado un conjunto l.i de $\mathbb{R}^3$ formado por dos vectores ¿pueden ser una base? ¿puedo

extenderlo a una base agregando los vectores que haga falta?

Todas estas preguntas nos las podemos hacer en $\mathbb{R}^n$ o en cualquier $\mathbb{k}$-espacio vectorial que sea finitamente generado (es decir, generado por finitos elementos).

Respondamos esas preguntas:

<u>Teorema:</u> Sea V un k-e.v. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces cualquier otra base B' de V tiene la misma cantidad de elementos. A esa cantidad de elementos se la llama **dimensión de V**.

Para probar este teorema veamos antes qué relación hay entre

- cantidad de elementos de un conjunto de generadores de V

y

- cantidad de elementos de un conjunto l.i de V.

(Ya veremos para qué nos sirve esto....)

<u>Lema:</u> Dado V un k-ev. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de generadores y $\{w_1, \dots, w_s\}$ es un conjunto l.i, entonces $r \geq s$.

No llegué a dar este Lema en la clase.

<u>Dem:</u>

Cada w_i se escribe como comb. lineal de $\{v_1, \dots, v_r\}$ porque son generadores

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{1r} v_r \qquad \alpha_{ij} \in k$$

$$\vdots$$

$$w_s = \alpha_{s1} v_1 + \dots + \alpha_{sr} v_r$$

Notemos que, si probamos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1r} \end{matrix}} & \begin{matrix} \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{s1} \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & \cdots & \alpha_{sr} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{r \times s}$$

que tiene en sus columnas los escalares de la combinación lineal de cada w_i, tiene única solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la solución nula,

entonces debe ser $\underline{r \geq s}$.

Si fuera $r < s$ tendría más incógnitas que ecuaciones con lo cual no puede tener solución única.

Sea $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ solución del sistema homogéneo, entonces

$$\alpha_{11}\beta_1 + \cdots + \alpha_{s1}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i1}\beta_i = 0$$

$$\alpha_{12}\beta_1 + \cdots + \alpha_{s2}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i2}\beta_i = 0$$

$\vdots$

$$\alpha_{1r}\beta_1 + \cdots + \alpha_{sr}\beta_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ir}\beta_i = 0.$$

Escrito todo junto: $\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i = 0$
para $j = 1, \ldots, r$

Entonces $\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i\right) \cdot v_j = 0.$

$\Rightarrow$ si sumo todo (sumo en j)

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij}\beta_i\right) \cdot v_j = 0$$

Damos vuelta el orden de la suma

$$\sum_{i=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j\right)}_{w_i} \cdot \beta_i = 0$$

y como $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es un conjunto l.i, obtenemos que

$$\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0.$$

Podemos demostrar ahora el <u>Teorema</u>:

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un base de V.

Tomamos $\tilde{B}$ otra base de V

$\tilde{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Tanto B como $\tilde{B}$ son conjuntos de generadores de V y son conjuntos l.i.

Como B es conj de generadores

y $\tilde{B}$ es conj li

$\Rightarrow n \geq m$.

Como $\tilde{B}$ es conj de generadores

y B es un conj li

$\Rightarrow m \geq n$.

Luego $m = n$. $\blacksquare$

Como consecuencia de los resultados anteriores vemos que si V es un k-ev. de dimensión n, entonces:

- Un conjunto S de elementos de V que tiene menos de n elementos <u>no</u> puede generar todo V.
- Si S es un conjunto de n elementos de V que es l.i, entonces es base de V.
- Un conjunto S de más de n elemento no puede ser l.i.

<u>Ejercicio:</u>
Pensar una demostración de cada enunciado.

<u>Ejemplos:</u>

1) $\{(1,0)(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, se la llama base canónica de $\mathbb{R}^2$

2) $\{(1,1),(1,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

3) Llamamos $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ a los elementos de la base canónica

En general, llamamos $e_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ ó $e_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ y $e_i \in \mathbb{R}^n$ con $1 \leq i \leq n$ es un vector que tiene 1 en el lugar i-ésimo y 0 en el resto

4) $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que **dado un conjunto finito de generadores siempre me puedo quedar con un base.**

<u>Proposición</u>: Sea V un k-ev de dimensión n y S un conjunto de generadores de V de m elementos con $m > n$, entonces podemos extraer un subconjunto B de n elementos de S que sean una base.

Dem: S no puede ser un conjunto li (porque si lo fuera sería una base con distinta cantidad de elementos que la dimensión n).

Llamemos $S = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Como es l.d., existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ no todos nulos:

$$0 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m.$$

Como algún $\alpha_i \neq 0$, suponemos $\alpha_m \neq 0$

$$w_m = \frac{-\alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_{m-1} w_{m-1}}{\alpha_m}$$

y por lo tanto

$\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ genera lo mismo que $\{w_1, \dots, w_m\}$, es decir, V.

Si todavía $m-1 > n$, podemos repetir este proceso hasta quedarnos con un conjunto de n elementos que generan V y por lo tanto resulta ser una base.

En $\mathbb{R}^n$, ¿como hacemos este procedimiento?

En $\mathbb{R}^3$: Dado

$$S = \{(1,2,3),(2,4,6),(1,1,0),(0,0,1),(1,1,2)\}$$

conjunto de generadores de $\langle S \rangle$

extraer una base de $\langle S \rangle$.

Ponemos los vectores como filas de una matriz y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Esto me dice que $(2,4,6)$ es comb. lineal de los otros. De hecho

$F_2 - 2F_1 \to F_2$ ...... $F_2 = 2F_1$

$F_3 - F_1 \to F_3$ (2)

$F_5 - F_1 \to F_5$ (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_5 - F_3 \to F_5$ ③ $\qquad F_5 - 2F_4 \to F_5$ ④

Esto me dice que $(1,1,2)$ es comb. lineal de los otros.

Si rastreamos las operaciones que hicimos

① $(1,1,2) - (1,2,3) = (0,-1,-1)$

② $(1,1,0) - (1,2,3) = (0,-1,-3)$

③ $(0,-1,-1) - (0,-1,-3) = (0,0,2)$

④ $(0,0,0) = (0,0,2) - 2 \cdot (0,0,1)$

$$= (0,-1,-1) - (0,-1,-3) - 2 \cdot (0,0,1)$$

$\downarrow$ paso ③

$$\underset{\text{pasos ① y ②}}{=} (1,1,2) - (1,\cancel{2},3) - (1,1,0)$$

$$+ (1,\cancel{2},3) - 2\cdot(0,0,1)$$

$$\Rightarrow (0,0,0) = (1,1,2) - (1,1,0) - 2(0,0,1)$$

$$\Rightarrow (1,1,2) = (1,1,0) + 2(0,0,1).$$

De todo esto concluimos que

$$\{(1,2,3), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

es una base de $\langle S \rangle$ y como

$\dim \langle S \rangle = 3$ y $\langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

debe ser $\langle S \rangle = \mathbb{R}^3$.

A continuación veremos que **todo un conjunto li en V un k-ev. de dimensión finita, siempre se puede extender a una base.**

<u>Proposición</u>: Sea V un k-ev. de dimensión n y sea $L = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto l.i (luego $r \leq n$),

entonces existen $w_{r+1}, \dots, w_n \in V$ de manera que

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\} \text{ es}$$

una base de V.

<u>Dem:</u>

Si $r = n$, listo, L ya era una base.

Si $r < n$, entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ no es base y por lo tanto, no generan V.

Entonces existe $w_{r+1} \in V$:

$$w_{r+1} \notin \langle v_1, \dots, v_r \rangle$$

y por lo tanto

$$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}\} \text{ es un conjunto l.i.}$$

Inductivamente, si

$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}\}$ es una base, listo. $(r+1 = n)$

Si no, existe $w_{r+2} \in V$:

$w_{r+2} \notin \langle v_1, \ldots, v_r, w_{r+1} \rangle \ldots\ldots$

<u>Corolario</u>: Todo e.v. de dimensión finita admite una base.

<u>Ejemplo</u>: Dado el conjunto

$L = \{(1,1,1,0), (1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

mostrar que L es un conjunto l.i y extender a una base.

Dejo como ej mostrar que es un conjunto l.i.

Podríamos "a ojo" agregar dos vectores pero tiene sus riesgos y habría que verificar que la propuesta es correcta.

Si no, más sistemáticamente, para extender L a una base de $\mathbb{R}^4$, hacemos eliminación Gaussiana a la matriz que tiene los elementos de L como filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice por lo pronto que

$$\langle (1,1,1,0)(1,0,1,0) \rangle = \langle (1,1,1,0),(0,-1,0,0) \rangle$$

y queremos agregar dos vectores más de manera de tener una base.

Por lo hecho, vemos que alcanza con agregarlo al conjunto

$$\{(1,1,1,0)\,(0,-1,0,0)\}$$

De la eliminación Gaussiana vemos fácilmente que si agregamos e_3 y e_4 tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz escalonada que nos dice que los vectores

$$\{\overbrace{(1,1,1,0)\,(1,0,1,0)}^{L},\ (0,0,1,0)\,(0,0,0,1)\}$$

forman una base de $\mathbb{R}^4$ que contiene a L.

Espacios vectoriales de dimensión finita

Veamos otros ejemplos de espacios vectoriales de dimensión finita.

— $\mathbb{R}_4[x]$ como $\mathbb{R}$-ev.

$$\mathbb{R}_4[x] = \{\text{polinomios con coeficientes en } \mathbb{R} \text{ de grado menor o igual a } 4\}$$

$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, \dots, 4\}$$

Acá el 0 en $\mathbb{R}_4[x]$ es el polinomio

$$0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$$

$\Rightarrow$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ es una base de $\mathbb{R}_4[x]$

Ojo! Aquí al mostrar que $\mathcal{B}$ es li consideramos una combinación lineal de $\mathcal{B}$ igualada al polinomio 0 y queremos ver que la única posibilidad es que todos los escalares sean 0. Veamos eso:

$$0 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d x^3 + e \cdot x^4$$

Pero sabemos que dos polinomios son iguales si y solo si los coeficientes de términos de igual grado coinciden. Luego $a=b=c=d=e=0$ ya que el polinomio 0 es

$$0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+0\cdot x^4.$$

— $\mathbb{C}^{2\times 3}$ como $\mathbb{C}$-ev.

$\mathbb{C}^{2\times 3} = \{$ matrices de 2×3 con coeficientes en $\mathbb{C}\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{C}^{2\times 3}$ como $\mathbb{C}$-ev.

— Pensar qué pasa con $\mathbb{C}$ como

$\mathbb{R}$- ev.

$$\mathbb{C} = \{ a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Coordenadas (lo retomamos más adelante).

Volvamos al ejemplo de $\mathbb{R}_4[x]$

Por resultado anterior, cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ admite una escritura única como combinación lineal de los elementos de la base

$$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}, \text{ es}$$

decir

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

es decir

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ caracteriza de forma única a $P(x)$ con respecto a la base B.

Escribimos

$$P(x) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)_{\mathcal{B}}$$

y se llaman las coordenadas de $P(x)$ en la base $\mathcal{B}$.

<u>Ej</u>: Tomamos en $\mathbb{R}_4[x]$ a

$$P(x) = 2x^2 - 3x^3.$$

Para la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$$P(x) = (0, 0, 2, -3, 0)_{\mathcal{B}}.$$

Pero para la base

$$\mathcal{B}' = \{1, 1+x, 1+x+x^2, x^3, x^4\}$$

(chequear que es una base de $\mathbb{R}_4[x]$)

planteamos

$$2x^2 - 3x^3 = a \cdot 1 + b(1+x) + c(1+x+x^2) + d x^3 + e x^4$$

$\Rightarrow$ distribuyendo y agrupando

$$2x^2-3x^3 = a+b+c+(b+c)x+cx^2+dx^3+ex^4$$

de donde

$$a+b+c=0, \quad b+c=0, \quad c=2, \quad d=-3, \quad e=0$$

$$\Rightarrow \quad a=0, \quad b=-2, \quad c=2, \quad d=-3, \quad e=0$$

es decir

$$P(x) = (0,-2,2,-3,0)_{B'}$$

<u>OJO!</u> Importa el orden de los vectores de la base.

<u>En general</u>: Dado V un k-ev de dimensión n y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. Luego, cualquier $w\in V$ admite una escritura única como combinación lineal de los elementos de la base B

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Al vector en k^n: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se lo llama coordenadas de w en la base B y se escribe:

$$w = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B$$

Rango Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ se define

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$C(A)$ = el espacio columna de A

$= \langle (1,2,3), (2,1,0) \rangle$

$= \operatorname{Im} A \rightsquigarrow$ imagen de A.

(sabemos que $\operatorname{Im} A$ es un subespacio).

Geométricamente, $C(A)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ y cuando planteamos por ejemplo el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

nos preguntamos si $(2,3,0)$ está en ese plano, o lo que es lo mismo si está en el espacio columna de A.

$N(A)$ = núcleo de $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \bar{0}\}$

también es subesp y son las soluc del

sistema homogéneo.

Más generalmente, si $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{C_1(A) \quad\quad C_n(A)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 . C_1(A) + \ldots + x_n C_n(A)$$

$C_1(A)$ columna 1 de A

$C_n(A)$ → columna n de A que son vectores de $\mathbb{k}^m$.

y $C(A) = \langle C_1(A), \ldots, C_n(A) \rangle \subseteq \mathbb{k}^m$

Se define rango columna de una matriz A a la dimensión del subespacio $C(A)$.
y se lo nota $rg_C(A)$.

Análogamente, se define el subespacio de las filas de A

$$F(A) = \langle F_1(A), \ldots, F_m(A) \rangle \subseteq \mathbb{k}^n$$

y el rango fila de una matriz A

es la dimensión del subespacio $F(A)$ y se la nota $rg_F(A)$.

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, vemos que $(-4,-6) = -2\,(2,3)$

$\Rightarrow$

$C(A) = \langle (2,3), (-4,-6) \rangle = \langle (2,3) \rangle$

luego $\dim C(A) = 1 \Rightarrow rg_C(A) = 1$.

$F(A) = \langle (2,-4), (3,-6) \rangle = \langle (2,-4) \rangle$
$= \langle (1,-2) \rangle$

luego $\dim F(A) = 1 \Rightarrow rg_F(A) = 1$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$C(A) = \langle (1,2,3), (2,1,0) \rangle$ que podemos ver tiene dimensión 2.

luego $rg_C(A) = 2$.

y $F(A) = \langle (1,2)(2,1), (3,0) \rangle$

$= \langle (1,2), (2,1) \rangle$ (convencerse)

$\Rightarrow \quad rg_F(A) = 2.$

Se puede probar que si $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow$ $rg_F(A) = rg_C(A)$, se lo llama rango y se escribe $rg(A)$ (ver más adelante).

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1), (8,6,2) \rangle$

Vemos que $(8,6,2) = 2(1,1,0) + 2(3,2,1)$

$\Rightarrow C(A) = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$

Luego podemos plantear la descomposición de A como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{R}$$

La llamamos R.

guardamos solo las columnas que son l.i de A. La llamamos C

- Acá ponemos una columna de manera que al multiplicar $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ me devuelva la primera columna de A.
- Lo mismo con la segunda columna.
- La última columna deben ser los escalares de la combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ que me dan la tercera columna de A.

luego $A = C \cdot R$.

A R se la conoce como forma escalonada reducida por filas de A (sin filas de ceros). Veamos por qué!!

Notemos que el producto $C \cdot R$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lo podemos pensar como recién como columnas pero.... también lo podemos pensar como filas, es decir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$F_1(A) = F_1(C) \cdot R = \boxed{1}(1,0,2) + \boxed{3}(0,1,2)$$

$$F_1(A) = (1,3,8)$$

comb. lineal de las filas de R

De la misma forma

$$(1,2,6) = F_2(A) = \boxed{1}\,(1,0,2) + \boxed{2}\cdot(0,1,2)$$

$$(0,1,2) = F_3(A) = \boxed{0}\,(1,0,2) + \boxed{1}\,(0,1,2)$$

Lo cual nos dice que hay ciertas operaciones de fila que nos llevan de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que por lo tanto esta es la forma escalonada reducida de filas (con fila de ceros en este caso).

$$\Rightarrow \langle F_1(A), F_2(A), F_3(A) \rangle = \langle F_1(R), F_2(R) \rangle$$

$$\Rightarrow \dim \langle F_1(A), F_2(A), F_3(A) \rangle = 2$$

Esto va a pasar siempre si hacemos descomposición $A = C \cdot R$ para cualquier $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ donde tendremos que la cantidad de columnas l i de A es la cantidad de columnas de C que coincide con la cantidad de filas l i de R (sacando las filas de ceros).

Esto nos va a decir que

$$\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \langle C_1(C), \dots, C_r(C) \rangle$$

y

$$\langle F_1(A), \dots, F_m(A) \rangle = \langle F_1(R), \dots, F_r(R) \rangle$$

de donde vemos que

$$\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \dim \langle F_1(A), \dots, F_m(A) \rangle$$

$\Rightarrow$ $rg(A)$ = dimensión del espacio columna
= dimensión del espacio fila.