1) Dada $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$, se quiere resolver $Ax = b$

Se propone

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{=M}, \quad x_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N} x_n + b$$

a) Probar q' si $x_n \to x^* \Rightarrow x^*$ es solución de $Ax = b$

b) Hallar k para que haya convergencia $\forall x_0$

c) ¿Qué condición impondrías sobre k para garantizar que existe una norma $\|\cdot\|$ que verifique

$$\|x_M - x^*\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|x_0 - x^*\|$$

2) dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$T_j = -D^{-1}(L+U)$

a) Probar que λ es autovalor de $T_j \iff \det(\lambda D + L + U) = 0$

b) Probar que el metodo dado por T_j no converge

c) dados $M = 2D + L$ y $N = U - D$

Probar que $X = -M^{-1}N + M^{-1}b$ si y solo si $Ax = b$

D) Probar que el metodo dado por $X_{N+1} = -M^{-1}N X_N + M^{-1}b$ converge.

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 < 1 \Rightarrow |\lambda^2| < 1$$

$$\rho(B) = \inf_{\|\cdot\|} \|B\|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \|\cdot\|$$

$$\rho(B) \leq \|B\| < \rho(B) + \varepsilon$$

2) (a) "Lo hicimos recien" xd

(b) Calculamos el $\det(\lambda D + L + U)$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$L + U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2+1) - 1(-\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda^2+2)$$

Autovalores de T_j son

$$\lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 = -2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}\, i$$

$$|\lambda|^2 = 2 \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{2} > 1$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \sqrt{2}\, i$

Tienen modulo $\sqrt{2} > 1$

$\lambda_3 = -\sqrt{2}\, i$

$\Rightarrow$ No converge

(c) $2D + L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$M =$

$N = U - D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$M + N = 2D + L + U - D = \underbrace{L + D + U}_{A}$

$Ax = b \Leftrightarrow (M+N)x = b$

$\Leftrightarrow Mx = -Nx + b \Leftrightarrow X = -M^{-1}NX + M^{-1}b$

O sea, M+N tiene que ser A

D) Calcular Radio espectral

(de esta

$X_{n+1} = (-M^{-1}N)X_n + M^{-1}b$

λ es autovalor de $-M^{-1}N$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda M + N) = 0$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2\lambda-1 & -1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{8}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}\, i}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{4}$$

$$|a + b i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$|a+bi| \quad \sqrt{a+b}$

(Modulo)

$$\left|\frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}}$$

$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \leq 1$ y el otro autovalor es $\frac{1}{2}$ que satisface $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

$$\Rightarrow \rho(-M^{-1}N) \leq 1$$

3) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) Probar: A tiene todos sus valores singulares iguales $\Leftrightarrow$ es múltiplo de una matriz ortogonal

b) Sea $B = -2Q$ con Q ortogonal

Dar dos descomposiciones SVD distintas.

c) Dar la matriz singular más cercana a B de rango máximo.

4) a) Probar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

b) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Probar que A y B tienen los mismos valores singulares $\Longleftrightarrow$ existen P, Q ortogonales tq $A = P \cdot B \cdot Q$

c) Sea $\{c_1, c_2, c_3\}$

una BON de $\mathbb{R}^3$. Hallar la

MATRIZ SINGULAR (EN TERMINOS DE
(C_1, C_2, C_3) QUE MEJOR APROXIMA
A LA MATRIZ C EN NORMA 2
SIENDO $C = (2C_1 \mid -5C_2 \mid 3C_3)$

5) a) HALLAR SVD de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) CONSTRUIR $B \setminus B^t B = A^t A$ Y
$\text{Im } B = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$

3) a) (SI SOLO SI)

$\Rightarrow$)

$A = U \Sigma V^T =$

(todas matrices $N \times N$)

como todos los val. singulares

son iguales

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \delta & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \vdots \\ \vdots & & \delta \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} = \delta \, Id_N$$

$$A = U \delta Id V^T =$$

$\delta \, U . V^T =$ es decir

$\Rightarrow$ A es igual a δ. una matriz ortogonal que es $U V^T$

(Justificar)

$\hookrightarrow$ en teorica.

$\Leftarrow$) $A = \delta \cdot Q$ con Q ortogonal

Como se busca los valores singulares de una matriz A cualquiera?

$\Rightarrow A^t A$

$\Rightarrow \therefore (dQ)^t dQ$

$= Q^t d d Q = d^2 \underbrace{Q^t Q}_{Id}$

$= d^2 Id$

d^2 es el unico autovalor de $A^t A$

$\Downarrow$

$\boxed{d^2} = |d|$ ← Importante el modulo

$\sqrt{0}$ es el único valor singular

$\Rightarrow$ Son todos iguales.

(b) ya se que es 2 ?

$$B = -2Q = -Id\, 2Id\, Q$$
$$= Q\, 2\, Id(-Id)$$

dos opciones

ó

$$B^t B = 4 Id \Rightarrow$$

$\sigma = 2$

$\Sigma = \sigma Id$

(c) $M = -Id_{N \times N} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot Q$

LISTO

FALOPA

osea $A^t = A^{-1}$

$B^t = B^{-1}$

(4) (a)

A, B $A^t A = Id$

A, B ORTOGONALES, es decir $A^t . A = Id$

$$B^t . B = Id$$

qvq

$$(AB)^t AB = Id$$

$$(AB)^t AB = B^t \underbrace{A^t A}_{Id} B = \underbrace{B^t B}_{Id} = Id \checkmark$$

queda probado

(b) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow$) $A = U_1 \Sigma_1 V_1^t$,

$$B = U_2 \Sigma_2 V_2^t$$

con $\Sigma_1 = \Sigma_2$

despejo

$$\Sigma_1 = U_1^t A V_1 \qquad \Sigma_2 = U_2^t B V_2$$

como $\Sigma_1 = \Sigma_2$

$$U_1^T A V_1 = U_2^T B V_2$$

$$A = \underbrace{U_1 U_2^T}_{P} B \underbrace{V_2 V_1^T}_{Q}$$

Por item 1 y usando que la transpuesta de una matriz ortogonal es ortogonal $\Rightarrow$ tenemos que P y Q es ortogonal

$\Leftarrow)$

$$A = PBQ$$

con P Q ortogonales

Hagamos SVD

$B = U \Sigma V^T$ una svd de B

$$\Rightarrow A = \underbrace{PU}_{\tilde{U}} \Sigma \underbrace{V^T Q}_{\tilde{V}^T}$$ con $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ ortogonales

es una descomp. SVD de A con

lo cual los valores singulares de

A coinciden con los de B

(tienen misma Σ)

(c)

$$C = \left(2c_1 \,|\, -5c_2 \,|\, 3c_3 \right)$$

$$C^t C = \begin{pmatrix} 2c_1^t \\ \hline -5c_2^t \\ \hline 3c_3^t \end{pmatrix} \cdot \left(2c_1 \,|\, -5c_2 \,|\, 3c_3 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4\overbrace{c_1^t c_1}^{=1} & -10\overbrace{c_1^t c_2}^{=0} & 6\overbrace{c_1^t c_3}^{=0} \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

que $c_1^t c_1 = 0$ $c_1^t c_2$

es por propiedades

de una bon

Autovalor 4

$\rightarrow$ Autovector e_1

Auto 25

$\rightarrow$ Autovector e_2

Auto 1

→ Autov. e_2

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{UNA MATRIZ DIAGONAL TIENE EN SU DIAGONAL LOS AUTOVALORES}}$

$$U = \left(u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right)$$

$-C_2$

$$C v_1 = \lambda_1 u_1 \rightarrow C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 u_1 \rightarrow u_1 = \frac{1}{5}\left(-5 C_2 \right)$$

$$C v_2 = \lambda_2 u_2 \Rightarrow C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 u_2 \rightarrow u_2 = \frac{1}{3}\left(3 C_3\right) = C_3$$

$$C v_3 = \lambda u_3 \rightarrow C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 u_3 \rightarrow \ldots \rightarrow C_1$$

$$(w_1|w_2|w_3) = (-c_2|c_3|c_1)$$

$$\Rightarrow (-c_2|c_3|c_1)\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^T$$

(A donde se fue el 2?)

(es porque es la mas cercana a esta)

$$\Rightarrow M = (-c_2|c_3|c_1)\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= (-c_2|c_3|c_1)\begin{pmatrix}0&5&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(0|-5c_2|3c_3)}_{\text{Resultado}}$$

5) a)

la SVD de A queda

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ 5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

no como la IMAGEN es de $\underline{dim = 4}$

b) $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ $\quad B^T B = \overset{2\times 3\ 3\times 2}{A^T A} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$Im(B) = \langle (1,1,0,0),(1,1,1,1) \rangle$$

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T$$

$$= V \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} V^T \Rightarrow \underset{\underset{B^T B}{\parallel}}{(A^T A)} V = V \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICO POR
V ambos lados

$\to$ Como $(B^tB)V = V\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underset{4\times 2}{B} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{desconocida} \\ 4\times 4}}{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 2} V^t$

$V = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^t$, $\quad v_1$, v_2

$\to$ base de B

$\text{Im}\, B = \langle Bv_1, Bv_2 \rangle \quad \left(f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \right)$

$Bv_1 = \lambda_1 w_1$, $\quad Bv_2 = \lambda_2 w_2$

$= \langle \sqrt{6}\, w_1, 1\, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$

$= \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$

$= \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$

(ORTOGONAL)

$= \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$

(NORMALIZO)

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\ldots} & 0 & -\frac{1}{\ldots} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Puedo usar Gram-Schmidt ó completar a una BON de $\mathbb{R}^4$ (completarlos a una BON, (creo que ambas completan a una BON))

~~#~~

Listo

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\operatorname{Im} T = \{T v \; v \in \mathbb{R}^n\}$

$= \langle T v_i \rangle$ con $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Base de $\mathbb{R}^n$