Nombre y apellido: Fiorella Stefanini

Número de libreta: LU: 99122

1	2	3	4	Calificación
B⁻⁻	R⁻	R⁺	B	7 −

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 8 de julio de 2023

Importante: Para aprobar es necesario tener al menos dos ejercicios completos bien.

Ejercicio 1: (2.5 pts) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + y + z = 1 \\ by + z = 1 \end{cases}$$

a) Determinar todos los valores de a y b para que el sistema tenga solución única.
b) Para la matriz asociada al sistema dado, demostrar que el método de Jacobi converge si y solo si el método de Gauss-Seidel converge.
c) Determinar todos los valores de a y b para asegurar la convergencia de ambos métodos. ¿Cuál de los dos métodos elegiría?

Ejercicio 2: (2.5 pts)

a) Probar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
b) Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P y Q matrices ortogonales tales que $A = PBQ$.
c) Sea $\{c_1, c_2, c_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz singular (en términos de c_1, c_2, c_3) que mejor aproxima a la matriz C en norma 2, siendo

$$C = \left(2c_1 \,\middle|\, -5c_2 \,\middle|\, 3c_3 \right)$$

Ejercicio 3: (2.5 pts) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la descomposición SVD de la matriz A.
b) Construir una matriz B de dimensión apropiada que satisfaga a la vez: $B^tB = A^tA$ y $\operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$.

Ejercicio 4: (2.5 pts) Se sabe que un cierto sistema físico que evoluciona con el tiempo cumple con el modelo $f(t) = a2^{-2t} + b2^{-t}$ y se cuenta con la siguiente tabla con mediciones en el tiempo

t	0	1	2
$f(t)$	10	3	3/4

Encontrar los valores de a y b para que el modelo aproxime a los datos de la mejor forma en el sentido de cuadrados mínimos. ¿Los valores encontrados son únicos?

Justifique todas sus respuestas

$B = U\Sigma V^t$

$B^t = V\Sigma^t U^t$

Fiorella Stefanini LU: 99/22

1

1) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1-a)f_3 - bf_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$

Para que el sistema tenga solución única

$1-a-b \neq 0$
$\underbrace{b \neq 1-a}$

$1-a \neq 0$
$\underbrace{a \neq 1}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & b & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Jacobi} \quad T = -M^{-1} \cdot N}$

$M = M^{-1} = I \Rightarrow T = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$

Para que Jacobi converga $\rho(T) < 1$

saco autovalores

$\begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[(\lambda^2 - b)\right] + \left[\lambda a\right] = 0$

$-\lambda^3 + \lambda b + \lambda a = 0$

$\lambda(-\lambda^2 + b + a) = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda^2 = b + a$

$|\lambda| = \sqrt{b+a}$

$\lambda = \sqrt{b+a}$

$\lambda = -\sqrt{b+a}$

$\rho(T) = |\sqrt{|b+a|}|$ le saco el modulo
pq $\sqrt{\ }$ siempre es +

$\sqrt{|b+a|} < 1 \Rightarrow |b+a| < 1$

$\Rightarrow$ Jacobi converge $\Leftrightarrow \underbrace{|b+a| < 1}$

$\boxed{G-S}$ $T = -M^{-1} \cdot N$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

saco $M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 - bf_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & -b & 1 \end{array}\right)$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & b & -1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -ab & b \end{pmatrix}$

Para q G-S converja el $\rho(T) < 1$

saco autovalores

$\begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 0 & -ab & b-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[\underbrace{(a-\lambda)(b-\lambda) - ab} \right] = 0$

$\lambda = 0$

$\cancel{ab} - b\lambda - a\lambda + \lambda^2 - \cancel{ab} = 0$

$\lambda^2 - b\lambda - a\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - b - a) = 0$

$\lambda = 0$ $\lambda = b + a$

$\Rightarrow \rho(T) = |b+a|$

$|b+a| < 1$ para q G-S converja

Entonces Jacobi converge $\Leftrightarrow \sqrt{|b+a|} < 1 \Leftrightarrow |b+a| < 1^2$

$\Leftrightarrow |b+a| < 1 \Leftrightarrow$ G-S converge

c) Para que los 2 métodos converjan, a y b deben cumplir que $|b+a| < 1$

Tengo que elejir el que tenga menor radio espectral ya que es el que más rapido converge

$\rho(T_{G-S}) = |b+a|$ $\rho(T_J) = \sqrt{b+a}$

$\underbrace{\sqrt{|b+a|}}_{J} \leq \underbrace{|b+a|}_{GS} \Rightarrow$ Jacobi converge + rápido.

$\leq$ $\geq$

Fiorella Stefanini LU: 99/22

2

3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Calculo los autovalores de $A^t \cdot A$ y sus autovectores

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A^t \cdot A}$$

saco autovalores

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$
$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$6 - 7\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 6 \ , \ \lambda_2 = 1$$

$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{6} \ , \ \sigma_2 = 1$

Calculo los autovectores, q' una vez normalizados, serán las columnas de mis V.

$\lambda = 6$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}_{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $-x - 2y = 0$, $x = -2y$ $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

normalizo $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{2f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $4x - 2y = 0$, $-2y = -4x$, $y = 2x$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

normalizo $\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow$ Mi $V = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{2\times 2}$ Mi $\Sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$

saco mi u $\Rightarrow u_1 = \frac{A \cdot v_1}{\sigma_1} \Rightarrow u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{15} \\ \sqrt{30}/6 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{A \cdot v_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = N_U A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ x = 2y \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y + z = 0 \\ z = y \end{matrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{\text{lo normalizo}}{\rightsquigarrow} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \cdot \Sigma \cdot V^t$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{30}/30 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/6 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/30 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{V^t}$$

b) $B = U \cdot \Sigma \cdot V^t \qquad A = U \cdot \Sigma \cdot V^t \qquad \operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0)(1,1,1,1) \rangle$

$B^t = V \cdot \Sigma^t \cdot U^t \qquad A^t = V \cdot \Sigma^t \cdot U^t$

$$\Rightarrow B^t \cdot B = A^t \cdot A$$

$U^t \cdot U$ es la Id xq es unitaria

$$V \cdot \Sigma^t \underbrace{U^t \cdot U}_{Id} \cdot \Sigma \cdot V^t = V \cdot \Sigma^t \underbrace{U^t \cdot U}_{Id} \cdot \Sigma \cdot V^t$$

$$V \cdot \underbrace{\Sigma^t \cdot \Sigma} \cdot V^t = V \cdot \underbrace{\Sigma^t \cdot \Sigma} \cdot V^t$$

$$V \cdot \Sigma^2 \cdot V^t = V \cdot \Sigma^2 \cdot V^t$$

tienen q tener la misma Σ

$$V \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^t = V \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^t$$

tienen q tener la misma V pq tienen los mismos autovalores.

No resuelto. Me pide B completa.

$\Rightarrow$ debe incorporar U

a Σ le falta 1 fila de ceros

como usa Im(B)?

Fiorella Stefanini LU: 99122

4) $f(t) = a.2^{-2t} + b.2^{-t}$

Resuelvo haciendo $A^t.A.a = A^t.b$ eso es equivalente a minimizar

Armo mi matriz $A = \begin{array}{cc} 2^{-2t} & 2^{-t} \\ \end{array}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \\ 1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$

Busco $A^t.A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \\ 1/16 & 1/4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1,07 & 1,14 \\ 1,14 & 1,31 \end{pmatrix}}_{A^t.A}$$

Busco $A^t.b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,80 \\ 11,69 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^t.A.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,80 \\ 11,69 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,07 & 1,14 \\ 1,14 & 1,31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,80 \\ 11,69 \end{pmatrix}$$

$1,07a + 1,14b = 10,80$

$1,14b = 10,80 - 1,07a$,

$b = \frac{10,80}{1,14} - \frac{1,07a}{1,14}$

$b = 9,47 - 0,94a$

$b = 9,47 - 7,41$

$\underline{b = 2,06}$

$1,14a + 1,31b = 11,69$

$1,14a + 1,31(9,47 - 0,94a) = 11,69$

$1,14a + 12,4 - 1,23a = 11,69$

$-0,09a = -0,71$

$\underline{a = 7,88}$

$\Rightarrow p(t) = 7,88 . 2^{-2t} + 2,06 . 2^{-t}$

Sí, los valores que encontre son únicos ya q las columnas de mi matriz A son Li, $\Rightarrow \exists!$ solución de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Fiorella Stefanini LU: 99122

4

2) a) si A y B son matrices ortogonales, se cumple que

$A^t \cdot A = Id$ $\quad B^t \cdot B = Id$ $\Rightarrow$ quiero ver que $A \cdot B$ es ortog.

$A \cdot A^t = Id$ $\quad B \cdot B^t = Id$

$\Rightarrow (A \cdot B)^t \cdot (AB) = Id$

tmb quiero que

$B^t \cdot \underbrace{A^t \cdot A}_{I} \cdot B = Id$

$\underbrace{B^t \cdot B = Id}$ ✓

↳ se cumple pq B es ortog.

$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = Id$

$A \cdot \underbrace{B \cdot B^t}_{Id} \cdot A^t = Id$

$\underbrace{A \cdot A^t = Id}$ → se cumple pq A es ortog.

$\Rightarrow$ El prod de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

Papel de fibra de caña de azúcar.

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 23 de mayo de 2023

Ejercicio 1. (2.5 pts)

X a) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (1,a,1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,a+3)$ y $f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$.

X b) Decidir si existe un proyector $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $P(v) = f(v)$ para todo $v \in S = \langle (1,-1,1),(1,-1,2) \rangle$ y $Nu(P) = \langle (1,1,0) \rangle$. En caso negativo, explicar por qué y en caso afirmativo mostrar uno y determinar si resulta ser un proyector ortogonal.

hacer

Ejercicio 2. (2.5 pts) Sean $\alpha > 0$ y $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{\alpha} & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1,5 a) Probar que $Cond_\infty(A(\alpha)) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} +\infty$.

1 b) ¿Qué puede decir de $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} Cond_2(A(\alpha))$?

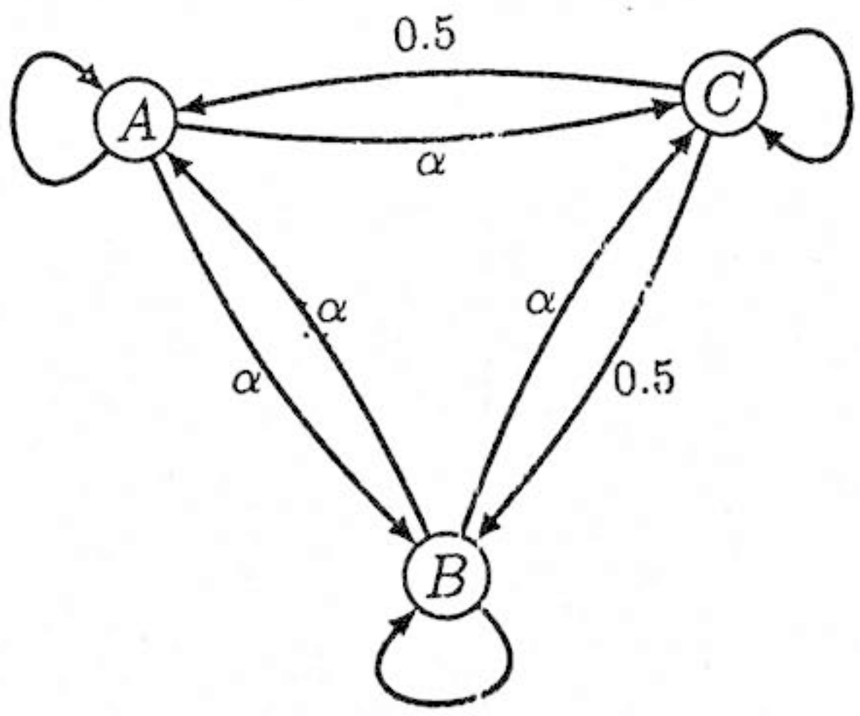
Ejercicio 3. (2.5 pts) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1 a) Decidir si A es diagonalizable.

1,5 b) Hallar una descomposición de Schur para A.

2,5 **Ejercicio 4.** (2.5 pts) Se sabe que los enlaces de tres páginas de internet vienen dados por el siguiente diagrama donde las transiciones representan la probabilidad de que cada navegante que está en una página clickee el link de otra página en cada minuto.

volver a hacer



Sabiendo que la matriz de transición P es de Markov:

a) Hallar P completando las transiciones faltantes y dando todos los posibles valores de α.

b) Hallar α para que $v = (2/5, 2/5, 1/5)$ sea estado de equilibrio.

c) Para $\alpha = \frac{1}{4}$ calcular cuántos navegantes se estima que habrá en cada página a largo plazo si inicialmente había 5000 en la página A y ninguno en las restantes.

$\begin{pmatrix} 5000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + c v_3$

$\alpha \lambda_1^k v_1 + \beta \lambda_2^k v_2 + c \lambda_3^k v_3$

1er parcial 2023

1)a) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $\exists$ t.l. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ q' satisfaga que $f(1,-1,1) = (1,a,1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,a+3)$ y $f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$

b) Decidir si $\exists$ un proyector $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $P(v) = f(v)$ $\forall v \in S$. $S = \langle (1,-1,1)(1,-1,2) \rangle$ y $Nu(P) = \langle (1,1,0) \rangle$. En caso negativo, explicar pq y en caso afirmativo mostrar uno y determ si resulta ser un proy. ortogonal

$f(1,-1,1) = (1,a,1)$
$f(1,-1,2) = (a^2,-1,a+3) \to$ es comb de los otros 2.
$f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \to \text{no son li}$$

$(1,-1,-2) = \alpha(1,-1,1) + \beta(1,-1,2)$

$1 = \alpha + \beta$ $\quad -1 = -\alpha - \beta$ $\quad -2 = \alpha + 2\beta$

$-2 = \alpha + 2 - 2\alpha$

$\beta = 1 - \alpha$ $\quad -1 = -\alpha - 1 + \alpha$ $\quad -4 = -3\alpha$

$\frac{4}{3} = \alpha$

$\beta = \frac{-1}{3}$

$\rightsquigarrow f(1,-1,-2) = \frac{4}{3} f(1,-1,1) - \frac{1}{3} f(1,-1,2)$

$(1,-1,-2) = \frac{4}{3}(1,a,1) - \frac{1}{3} \cdot (a^2,-1,a+3)$

$1 = \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3}$ $\quad \frac{4}{3}a + \frac{1}{3} = -1$

$\frac{1}{3} = \frac{a^2}{3}$ $\quad \underbrace{a = -1}$

$\underbrace{a = \pm 1}$ $\quad \Rightarrow \boxed{a = -1}$

b)

2) Sean $\alpha > 0$ y $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 6 & 1/\alpha & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar q $\text{Cond}_\infty(A(\alpha)) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} +\infty$

b) que puede decir de $\lim_{\alpha \to +\infty} \text{Cond}_2(A(\alpha))$

a) $\det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ mi matriz $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es singular.

$\text{Cond}(A)_\infty \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\qquad \|A\| = 20 + \dfrac{1}{\alpha}$

$\|A - B\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1/\alpha$

$\text{Cond}(A)_\infty \geq \left(20 + \dfrac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha$

$\text{Cond}_\infty(A) \geq 20\alpha + 1$ si $\alpha \to +\infty$

$\text{Cond}(A) \geq 0) \Rightarrow \text{Cond}_\infty(A) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} +\infty$

b) $\text{Cond}_2(A(\alpha)) \geq \dfrac{1}{n} \cdot \text{Cond}_\infty(A(\alpha))$ siendo n el tamaño de mi matriz

$\text{Cond}_2(A(\alpha)) > \dfrac{1}{4} \cdot (20\alpha + 1)$

$\text{Cond}_2(A(\alpha)) > 5\alpha + \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{Cond}_2(A(\alpha)) \to +\infty$ cuando $\alpha \to +\infty$

3) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decir si A es diagonalizable
b) Hallar una desc de Schur para A.

a) Busco autovalores.

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((2-\lambda)(-\lambda)+1\right)$$

$\lambda = 1$ $\qquad -2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = 1$
$\lambda = 1$

1 es autovalor triple.
Saco los autovalores para ver q onda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad z = 0$$

$NU = \langle (1,1,0) \rangle \quad \dim NU = 1$

$1 = 3$ No! $\Rightarrow$ No es diagonalizable

b) Busco autoval $\lambda = 1$ $\qquad A = U.T.U^* \quad t_{ii} = \lambda_i$
1 autovector $v = (1,1,0)$

quiero hallar una bon. y como es de 3x3 necesito 2. y dsp los normalizo

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Los normalizo

$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U^{-1} = U^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = U.T.U^{-1}$

$T = U^{-1}.A.U \qquad T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Papel de fibra de caña de azúcar.

Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Final – 2 de mayo de 2023

Ejercicio 1. Dados

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 2n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ n-1 & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

y $n = 10^4$.

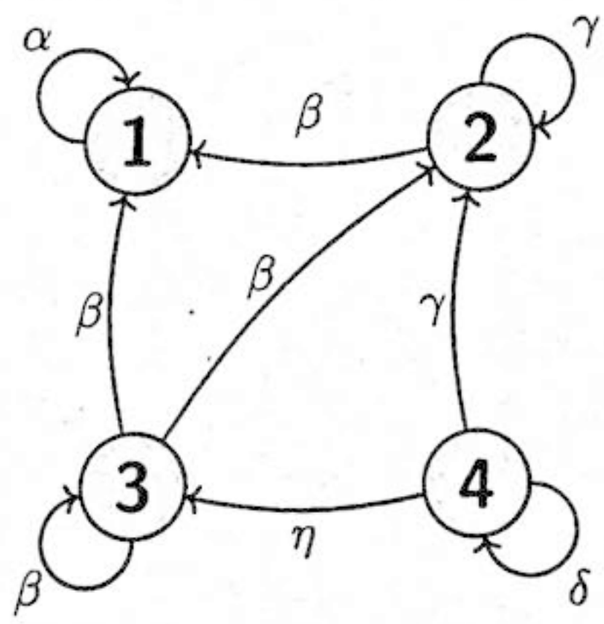
(a) Resolver el sistema $Ax = \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix}$ por eliminación gaussiana con aritmética de punto flotante de base 10 de 3 dígitos de mantisa y redondeo.

(b) Calcular la solución exacta del sistema y calcular el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

para $\tilde{x}$ la solución hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 2. Se tiene el proceso de Markov descripto por la figura:



y se sabe que la suma de los elementos de la diagonal de P es $\frac{13}{6}$.

(a) Escribir la matriz de transición P.

(b) Decidir si dado cualquier estado inicial v_0 habrá un estado límite. Indicar en particular si el estado inicial $v_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ tiene estado límite y en tal caso calcularlo.

(c) Decidir si existe P^∞. Si existe, calcularla.

Ejercicio 3. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & pq \\ 0 & q & q^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

con $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ (reales **positivos**). Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$.

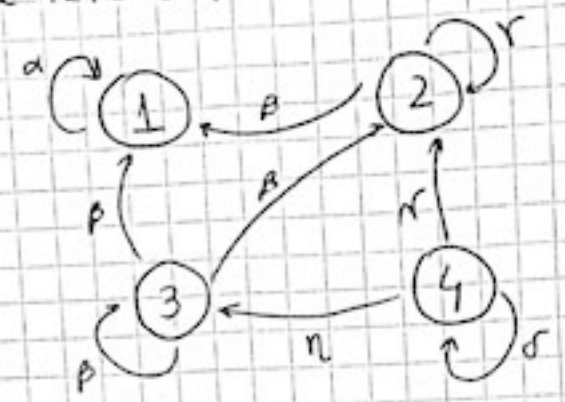
(a) Decidir para qué valores de p, q el método de Jacobi resulta convergente.

(b) Decidir para qué valores de p, q el método de Gauss-Seidel resulta convergente.

(c) Para $p = 1$ y $q = 1/4$, ¿cuál método converge más rápido?

Final 2 Mayo 2023

2) se tiene el proceso de Markov



y se sabe q' la suma de los elementos de la diagonal de P es $\frac{13}{6}$.

a) Escribir la matriz de transición P
b) Decidir si dado cualq estado inicial N_0 habrá un estado límite. Indicar en particular si $N_0 = (1/3, 1/3, 0, 1/3)$
c) Decir si $\exists P^{\infty}$ y calcularla.

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$\alpha + \gamma + \beta + \delta = \frac{13}{6}$

$1 + 2/3 + 1/3 + \delta = \frac{13}{6}$

$\delta = 1/6$

$\alpha = 1$

$\beta + \gamma = 1$

$\gamma = 2/3$

$3\beta = 1$

$\beta = 1/3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$\gamma + \eta + \delta = 1$

$\eta + \delta = 1/3$

$\eta = 1/3 - \delta$

$\eta = 1/6$

b) el estado lim $\exists$ si los autoval $\neq -1$

$\Rightarrow$ saco autovalores

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3-\lambda & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3-\lambda & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{pmatrix} 2/3-\lambda & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3-\lambda & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(2/3-\lambda)(1/3-\lambda)(1/6-\lambda)\right]$$

$\lambda = 1$ $\quad \lambda = 2/3$ $\quad \lambda = 1/3$ $\quad \lambda = 1/6$ $\Rightarrow$ el Est. lim $\exists$ ✓

saco autovectores

$$A - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -5/6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightsquigarrow x_1 = \text{libre} \\ \rightsquigarrow x_2 = 0 \\ \rightsquigarrow x_3 = 0 \\ -5/6\, x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

$v_1 = (1, 0, 0, 0)$

$$\lambda = 2/3 \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad x_4 = 0 \quad x_3 = 0$$

$$1/3\, x_1 + 1/2\, x_2 = 0$$
$$1/2\, x_1 = -1/2\, x_2$$
$$x_1 = -3/2\, x_2$$

$$v = (-3/2;\ 1,\ 0,\ 0)$$

$$\lambda = 1/3 \quad \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \quad x_4 = 0$$

$$\rightarrow 2/3\, x_1 - 1/2\, x_3 + 1/3\, x_3 = 0$$
$$2/3\, x_1 = 1/6\, x_3$$
$$x_1 = 1/4\, x_3$$

$$\rightarrow 1/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = 0$$
$$x_2 = -x_3$$

$$v = (1/4;\ -1;\ 1,\ 0)$$

$$\lambda = 1/6 \quad \begin{pmatrix} 5/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_4 \text{ libre}$$

$$\rightarrow 5/6\, x_1 - 1/3\, x_4 - 1/3\, x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 4/5\, x_4$$
$$\rightarrow 1/2\, x_2 - 1/3\, x_4 + 2/3\, x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -2/3\, x_4$$
$$\rightarrow 1/6\, x_3 = -1/6\, x_4$$
$$x_3 = -x_4$$

$$v = (4/5,\ -2/3,\ -1,\ 1)$$

$$v^k = \alpha \cdot 1^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Est. lim gral

Ahora lo calculo con $v_0 = (1/3;\ 1/3;\ 0;\ 1/3)$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha - 3/2\, \beta + 1/4\, \gamma + 4/5\, \eta = 1/3 \qquad \beta - \gamma - 2/3\, \eta = 1/3 \qquad \gamma - \eta = 0 \qquad \eta = 1/3$$

$$\gamma = \eta$$
$$\gamma = 1/3$$

$$\alpha - 4/3 + 1/12 + 4/15 = 1/3 \qquad \beta = 8/9$$

$$\alpha = \frac{79}{60}$$

$$\Rightarrow v^k = \frac{79}{60} \cdot 1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $k \to +\infty \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k, \left(\frac{1}{3}\right)^k$ y $\left(\frac{1}{6}\right)^k \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow v^\infty = \frac{79}{60} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Calculo $P^\infty \Rightarrow C \cdot D^\infty \cdot C^{-1} \rightarrow P^\infty = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/4 & 4/5 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3^\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6^\infty \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$

3) Sea

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & pq \\ 0 & q & q^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$ con $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ se quiere resolver el sist $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$

a) Decir para q' valores de p, q el método de Jacobi resulta convergente
b) Decir para q' valores de p, q el método de G-S resulta convergente.
c) Para $p = 1$ y $q = 1/4$ ¿cuál metodo conv + rápido?

a) Jacobi $T = -M^{-1} N$ $M = D$ $N = L + U$

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} P & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 : P \\ f_2 : Q \\ f_3 : S \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/S \end{array}\right)$$

$$-M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/P & 0 & 0 \\ 0 & -1/Q & 0 \\ 0 & 0 & -1/S \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1/P & 0 & 0 \\ 0 & -1/Q & 0 \\ 0 & 0 & -1/S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & PQ \\ 0 & 0 & Q^2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q \\ 0 & 0 & -Q \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ahora saco autovalores y veo para q' valores el $\rho(T) < 1$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -Q \\ 0 & -\lambda & -Q \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - Q) - Q(-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda Q + \lambda Q = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 2Q) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda^2 = 2Q$

$\lambda = \sqrt{2Q}$ como Q es $\mathbb{R}_{>0}$, λ no es complejo y siempre va a ser + por ser raíz cuadrada.

$\sqrt{2Q} < 1$

$Q < 1/2$

si $Q < 1/2$ y P cualquiera $\Rightarrow$ Jacobi converge

b) G-S $T = -M^{-1} N$ $M = D + L$ $N = U$

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} P & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 : P \\ f_2 : Q \\ f_3 : 5 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/Q & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right) f_3 - f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/Q & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/P & 0 & 1/5 \end{array}\right) f_3 - f_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/P & -1/Q & 1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/P & 0 & 0 \\ 0 & -1/Q & 0 \\ 1/P & 1/Q & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1/P & 0 & 0 \\ 0 & -1/Q & 0 \\ 1/P & 1/Q & -1/S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & PQ \\ 0 & 0 & Q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q \\ 0 & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 2Q \end{pmatrix}$$ Miro el $\rho(T)$.

saco autovalores

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & Q \\ 0 & -\lambda & -Q \\ 0 & 0 & 2Q-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot -\lambda \cdot (2Q-\lambda) \Rightarrow \lambda^2(2Q-\lambda)$$

$\lambda = 0$ $\quad$ $\lambda = 2Q$ como $Q \in \mathbb{R}_{>0}$ siempre va a ser $\oplus$

$2Q < 1$
$Q < 1/2$

$\Rightarrow$ G-S converge si
$Q < 1/2$ y P es cualquier real

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/16 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

como ya calculamos, con Jacobi $\lambda = \sqrt{2Q} \rightsquigarrow \lambda = \sqrt{1/2} \Rightarrow \underline{\lambda = \sqrt{2}/2}$

y con G-S $\lambda = 2Q \rightsquigarrow \underline{\lambda = 1/2}$

$\Rightarrow$ como $\underbrace{1/2}_{0,5} < \underbrace{\sqrt{2}/2}_{0,7} \Rightarrow$ G-S conv. + rápido

4) se quiere estimar bla bla

t	0	1	2	3	4	5
y	1.2	3.5	7.3	14.2	24.1	38.3

a) Hallar la función de la forma $f(t) = a \cdot e^{bx + c \cdot x^3}$ q' mejor ajusta a los datos en sentido de $\square$ min
b) ¿cual es el peso estimado de la pob. en $t = 3.5$?

$f(t) = a \cdot e^{bx + cx^3}$
$\ln(f(t)) = \ln a \cdot e^{bx + cx^3}$
$\ln(f(t)) = \underbrace{\ln(a)}_{a_1} + \underbrace{b}_{b_1}x + \underbrace{c}_{c_1}x^3$

$A^t \cdot A \cdot a = A^t \cdot b$

$$b = \begin{pmatrix} \ln(1.2) \\ \ln(3.5) \\ \ln(7.3) \\ \ln(14.2) \\ \ln(24.1) \\ \ln(38.3) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & x & x^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & 64 \\ 1 & 5 & 125 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \text{hago } A^t \cdot A \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}}_{3 \times 6} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & 64 \\ 1 & 5 & 125 \end{pmatrix}}_{6 \times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 & 225 \\ 15 & 55 & 979 \\ 225 & 979 & 20515 \end{pmatrix}$$

Ahora hago $A^t b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,18 \\ 1,25 \\ 1,98 \\ 2,65 \\ 3,18 \\ 3,64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,88 \\ 44,08 \\ 747,16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 & 225 \\ 15 & 55 & 979 \\ 225 & 979 & 20515 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,88 \\ 44,08 \\ 747,16 \end{pmatrix}$$

$6a_1 + 15b_1 + 225c_1 = 12,88$

$6a_1 = 12,88 - 15b_1 - 225c_1$

$a_1 = 2,14 - 2,5b_1 - 37,5c_1$

$15a_1 + 55b_1 + 979c_1 = 44,08$

$32,1 - 37,5b_1 - 562,5c_1 + 55b_1 + 979c_1 = 44,08$

$17,5b_1 + 416,5c_1 = 11,98$

$17,5b_1 = 11,98 - 416,5c_1$

$b_1 = 0,68 - 23,8c_1$

$\underline{b_1 = 0,82}$

$a_1 = 2,14 - 1,7 + 59,5c_1 - 37,5c_1$

$a_1 = 0,44 + 22c_1$

$\underline{a_1 = 0,26}$

$225a_1 + 979b_1 + 20515c_1 = 747,16$

$99 + 4950c_1 + 665,7 - 23300,2c_1 + 20515c_1 = 747,16$

$764,7 + 2164,8c_1 = 747,16$

$2164,8c_1 = -17,54$

$\underline{c_1 = -8,10 \cdot 10^{-3}}$

$\Rightarrow a_1 = \ln(a)$

$0,26 = \ln(a)$

$e^{0,26} = a$

$\underline{1,29 = a}$ y los otros son iguales

$\Rightarrow$ la función q mejor ajusta $\underline{f(t) = 1,29 \cdot e^{0,87x - 8,10\,10^{-3}x^3}}$

b) $f(3,5) = 1,29 \cdot e^{3,045 - 0,34} \rightsquigarrow \underline{f(3,5) \cong 19,29}$

1) Dados

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 2n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ n-1 & 2n & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad n = 10^4 = 10000$$

a) Resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix}$ por eliminación gaussiana con aritmetica de pto flotante de base 10 de 3 dígitos de mantisa y redondeo.

b) Calcular la sol exacta del sistema y calcular el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$ para $\tilde{x}$ la sol hallada en el item anterior.

Ejercicios de Parcial:

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decidir para que valores de c GS converge $\forall x_0$ inicial

b) Para $c = 1/3$ probar q' Jacobi converge y decir si converge G-S o J.

a) Busco la matriz $T = -M^{-1} \cdot N$

$M = L + D$
$N = U$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 4c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 4c & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 4c & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & c & -1/2 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c \end{pmatrix}$

Busco autovalores

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & c & -1/2 \\ 0 & -c^2-\lambda & 0 \\ 0 & -4c^2 & 4c-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \left((-c^2-\lambda)(2c-\lambda) \right) = 0$

$\lambda = 0$ $|0| < 1$ ✓

$-c^2 - \lambda = 0$
$-c^2 = \lambda$
$|-c^2| < 1$
$c < 1$

$2c - \lambda = 0$
$2c = \lambda$
$|2c| < 1$
$c < 1/2$

$\rightarrow$ para q converga GS, $\underline{c < 1/2}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T = -M^{-1} \cdot N$ $M = D$
$N = L + U$

$T = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/6 \\ 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/6 \\ -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

saco autovalores

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -\lambda & -2/6 \\ -4/3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow -\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{2}\lambda\right) - \lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{3}\lambda - \lambda^3 - \frac{1}{9}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{5}{9}\lambda + \frac{2}{27} = 0 \quad \Delta = 0 \quad \lambda = -2/3$$
$$\lambda = (1+\sqrt{2})/3$$
$$\lambda = (1-\sqrt{2})/3$$

$$\rho(T) = \frac{1+\sqrt{2}}{3} < 1 \Rightarrow \text{Jacobi converge}$$

G-S converge + rápido pq tiene menor radio espectral

2) sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Se quiere resolver $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar $\alpha \neq 0$ tq G-S converge
b) lo mismo para Jacobi y comparar

a) si $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow$ G-S converg xq A sería estrict. diagonal dominante

si $\alpha \in [-1, 1]$ con $\alpha \neq 0$.

~~si $|\det(A)| > 1 \Rightarrow$ no converge~~

~~$\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha \cdot \alpha^2 - 1 \cdot (-1) \Rightarrow \alpha^3 + 1$~~

~~¿pq esto no funciona?~~

y bueno... no queda otra q hacer la inversa :''''

$\Rightarrow$ para G-S

$T = -M^{-1} \cdot N \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ busco la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_1 \cdot 1/\alpha \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1/\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 \cdot 1/\alpha \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 - f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & +1/\alpha^2 & -1/\alpha & 1 \end{array}\right) f_3 \cdot 1/\alpha \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\alpha^3 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 1/\alpha^2 & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha^3 & 1/\alpha^2 & -1/\alpha \end{pmatrix}$$

$$-M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 1/\alpha^2 & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha^3 & 1/\alpha^2 & -1/\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \lambda Id) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -\lambda & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(-\lambda)\left(-\frac{1}{\alpha^3} - \lambda\right) \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = -\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\left|\frac{1}{\alpha^3}\right| < 1$$

$$1 < \alpha^3$$

$$\underline{|\alpha| > 1}$$

$\Rightarrow$ G-S converge $\Leftrightarrow |\alpha| > 1$

b) $T = -M^{-1} \cdot N$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-M^{-1} = -\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha \\ 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

autovalores $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -1/\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 0$

$\lambda = -\frac{1}{\alpha}$ $\quad \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$

$\underline{|\alpha| > 1}$

Para jacobi converge si $\underline{|\alpha| > 1}$

$\rho(T_{G-S}) = \left|\frac{1}{\alpha^3}\right| \qquad \rho(T_J) = \left|\frac{1}{\alpha}\right|$

$\left|\frac{1}{\alpha^3}\right| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| \Rightarrow$ G-S converge $\oplus$ rápido.

Preguntar $\longrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

se quiere resolver $Ax = b$

a) Determinar si se puede usar G-S y J para hallar x.

b) se define la iteración $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$

i) Mostrar que si $x_k \to \tilde{x}$ entonces $\tilde{x}$ es la sol de $Ax = b$

ii) Decidir si $\{x_k\}_{k \geq 1}$ converge.

$J = x_{n+1} = -D^{-1}(L+U)x_n + D^{-1}\cdot b \rightarrow$

$G\text{-}S = x_{n+1} = -(L+D)^{-1}\cdot U x_n + (L+D)^{-1}\cdot b \rightarrow$

Regular item b

3

2do Parcial 1° dic 2022

1) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Probar q' el método G-S converge $\forall$ vector inicial $\Leftrightarrow$ el método de Jacobi converge $\forall$ vector inicial.
Fijando un valor de α para el cual ambos convergen ¿cuál método elijiría y PQ?

b) Sea $\alpha = 1$. Calcular la sol exacta de $Ax = b$ y probar que si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge en a lo sumo 1 paso para cualquier $t \in \mathbb{R}$. ¿Contradice este resultado al item anterior?

a) G-S. Busco la matriz de iteraciones.

$T = -M^{-1}\cdot N$ donde $M = (L+D)$, $N = U$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = +\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = T$

saco autovalores $\begin{vmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = +\lambda^2(2\alpha^2-\lambda) = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda = 2\alpha^2$

$|2\alpha^2| < 1$

$|\alpha^2| < \frac{1}{2}$

G-S converge $\leftarrow$ $\boxed{\alpha < \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}$

Veo q' onda Jacobi $T = -M^{-1}\cdot N$

$T = +\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}^{T}$ saco autoval.

$\begin{vmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\alpha^2) \rightarrow \lambda^2 - 2\alpha^2 = 0$

$\lambda = 0$

$(\lambda - \sqrt{2}\alpha)(\lambda + \sqrt{2}\alpha)$

$\lambda = \sqrt{2}\alpha$ $\rightarrow \lambda = -\sqrt{2}\alpha$

J converge $\Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$

$|\sqrt{2}\alpha| < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}$

Jacobi converge $\Leftrightarrow |\sqrt{2}\alpha| < 1 \Leftrightarrow \alpha < \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \Leftrightarrow$ G-S converge

si $\alpha = \frac{1}{2}$

$\rho(T_J) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \rho(T_{G-S}) = \frac{1}{2}$ $\quad$ G-S converge (+) rápido

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M = D = I = I^{-1}$

$x_{n+1} = -M^{-1} \cdot N \cdot x_n + M^{-1} \cdot b$

$x_{n+1} = -N \cdot x_n + b$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_n + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{posible sol. del sistema}}$ no depende de t.

$Ax = b$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución

$\Rightarrow$ si $t=0$, el vector q me dan ya es solución y si $t \neq 0$, mostramos en (*) q' en al menos 1 paso converge.

En el item (a) digimos q' Jacobi converge $\forall x_0 \Leftrightarrow \alpha < \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$

$1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ no se cumple pero dependiendo del x_0 puede o no converger

2) Se quiere resolver el sistema $Ax=b$ para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$ y cierto $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se propone el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} x_{n+1} = -\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} x_n + b$$

a) Probar q' si la iteración converge a un $\tilde{x}$, entonces $\tilde{x}$ es solución de $Ax=b$.

b) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tq el método converge para cualq. vector inicial.

c) ¿Qué condición impondrían sobre k para garantizar q $\exists$ una $\|.\|$ tq el error e_n verifique $\|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|e_0\|$?

a) Si $x_n \to \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x}$ es sol de $Ax=b$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = b$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \tilde{x} = b \Rightarrow \tilde{x} \text{ es solución de } Ax=b$$

b) $\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$ no puedo buscar las matrices de iteración. pq' no es inversible. (tengo cero en la diagonal)

busco un método alternativo

$$x_{n+1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{M}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} x_n + b$$

λ es autov de T

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ k & \lambda/3 & 2\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda\left(\frac{\lambda^2}{9} - k^2\right) \begin{cases} |\lambda| \text{ [illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_n + b$$

$\Rightarrow$ el método converge $\forall v_0$ inicial si $\rho(T) < 1$.

son autovalores de T.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3k & 0 \\ -3k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 9k^2)$$

$\lambda = 0$ $\quad (\lambda - 3k)(\lambda + 3k)$

$\lambda = 3k$ $\quad \lambda = -3k$

$|3k| < 1 \Rightarrow |k| < \left|\frac{1}{3}\right|$

$\Rightarrow$ El método converge $\forall x_0 \Leftarrow \left(|k| < \frac{1}{3}\right)$

c) quero q $\|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \|e_0\|$ $\qquad e_0 = \|x_0 - \tilde{x}\|$

la formula original $e_n \leq \|T\|^n \cdot \|x_0 - \tilde{x}\|$ | $\|e_k\| \leq \|M\|^k \cdot \|e_0\|$

quero $\|T\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)$

utilizo mi $T = \begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ya sague mis autovalores $\lambda = 0$, $\lambda = 3k$, $\lambda = -3k$

si $\rho(T) < \frac{1}{4}$ como $\rho(T) = \min_{\|\cdot\|} \{\|T\|\}$ $\qquad 3|k| < \frac{1}{4}$

$|k| < \frac{1}{12}$

si $|k| < \frac{1}{12} \Rightarrow \exists \|\cdot\|$ tq $\|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|e_0\|$ ✓

3) Hallar una matriz A del tamaño adecuado q verifique simultaneamente:

$\max_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 2$, $\min_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de $A^t A$

y $A^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lo de las normas sabo q $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$ son autovalores de A.

si N es autov de $\underbrace{A^t}_{2\times 3} \underbrace{A}_{3\times 2}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es col de N y fila de N^t

$\Rightarrow N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\underbrace{A^t}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\rightsquigarrow U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\rightsquigarrow \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $V^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & 1 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

quiero q la U sea ortog. $\hookrightarrow$ falta normalizar (hay q normalizar)

El nucleo de A^t es $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ es columna de U pq' quiero una base

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$

$A = A_1 + A_2$

$A_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{3\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{1\times 2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$A_2 = 1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} (3+4\sqrt{2})/6 & (4\sqrt{2}-3)/6 \\ (4\sqrt{2}-3)/6 & (3+4\sqrt{2})/6 \\ \sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ consultar

lo de la U siempre va al final

otro forma

completo a q U

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$ Σ = anterior, V^* = anterior $U = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) Se miden las concentraciones de cierto agente químico (en mg/m^3), y se obtiene la sgte tabla:

x	0	1/2	1
y	1	2	2

donde x se mide en horas. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función tipo $f(x) = ax + b\cos(\pi x)$ y estimar la concentración a la hora y media de comenzadas las mediciones.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{y}$$

$$A^t \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^t \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^t \cdot A}$$

$$A^t \cdot b = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-a + 2b = -1$$

$$-a + 2\left(\frac{5}{4}a - 3\right) = -1$$

$$-a + \frac{5}{2}a - 6 = -1$$

$$\frac{3}{2}a = 5 \Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$5/4\, a - b = 3$$

$$b = \frac{5}{4}a - 3$$

$$b = \frac{7}{6}$$

La mejor aproximación es $f(x) = \frac{10}{3}x + \frac{7}{6}\cos(\pi x)$

A la hora y media es 1,5 $\Rightarrow f(1,5) = \frac{10}{3} \cdot (1,5) + \frac{7}{6} \cdot \cos(1,5\pi)$

$$\boxed{f(1,5) = 5\,\frac{mg}{m^3} \text{ es la concentración}}$$

1) Ejercicio random:

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$ se quiere resolver $Ax = b$

a) Determinar si se puede usar G-S y Jacobi para hallar x.

b) Se define la iteración $x_{k+1} = (I-A).x_k + b$

i) Mostrar q si $x_k \to \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x}$ es sol de $Ax=b$

ii) Decidir si $\{x_k\}_{k\geq 1}$ converge.

a) para usar G-S necesito q $(L+D)$ sea invertible y para usar Jacobi necesito q D sea invertible.

y no lo son, no puedo usar esos métodos.

b) i) $\tilde{x} = (I-A).\tilde{x} + b$

$\cancel{\tilde{x}} - \cancel{\tilde{x}} + A\tilde{x} = b$

$A\tilde{x} = b \Rightarrow \tilde{x}$ es sol de $Ax=b$

ii) $x_{k+1} = \underbrace{(I-A)}_{T} x_k + b$

$$T = I - A = \begin{pmatrix} -1/2 & +1/2 & 0 \\ +1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & +1/2 \end{pmatrix}$$

saco autovalores

$$\begin{vmatrix} -1/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 \\ 0 & +3/2 & -1/2-\lambda \end{vmatrix} = (-1/2-\lambda).((1-\lambda)(-1/2-\lambda)+3/4) - \frac{1}{2}(1/2(-1/2-\lambda))$$

$$= (-1/2-\lambda)(-1/2-\lambda+\lambda/2+\lambda^2+3/4) - 1/2(-1/4-1/2\lambda)$$

$$= (-1/2-\lambda)(1/4-\lambda/2+\lambda^2)+1/8+\lambda/4$$

$$= -1/8+\lambda/4-\lambda^2/2-\lambda/4+\lambda^2/2-\lambda^3+1/8+\lambda/4$$

$$= -\lambda^3+\lambda/4 = 0$$

$$-\lambda(+\lambda^2-1/4) = 0$$

$\lambda = 0$ $\quad \lambda = \frac{1}{2}$ $\quad \lambda = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \rho(T) = \frac{1}{2} < 1$ no metodo converge $\forall x_0$ inicial

Recuperatorio 2do Parcial 2022

1) Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tq el método G-S converge $\forall$ vector inicial

b) Lo mismo para Jacobi

c) Sea $\alpha = 1$. Probar q̲ si̲ $x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ el metodo G-S converge en 1 paso.

a) $M = (L+D) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lo hice antes $\Rightarrow$ G-S converge $\Leftrightarrow |\alpha| > 1$

b) J converge $\Leftrightarrow |\alpha| > 1$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ G-S: $x_{n+1} = -(L+D)^{-1} \cdot U \cdot x_n + (L+D)^{-1} \cdot b$

$L+D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Preguntar lo de la inversa</u>

Ayuda c/b

2) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la DVS de A

b) Caracterizar geometricamente la imagen de la esfera unitaria.

$$S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1 \}$$

para la transformación $T(x) = Ax$.

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

saco autovalores y autovectores de $A^t A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)-4\big) = (5-\lambda)(-5\lambda+\lambda^2)$$

$\lambda_1 = 5$ $\quad \lambda(-5+\lambda)$: $\lambda = 0$, $\lambda = 5$

$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{5}, \ \sigma_2 = \sqrt{5}, \ \sigma_3 = 0$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco autovectores

Si $\lambda = 5$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 2f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -y + 2z = 0$, $y = 2z$

$\langle (1,0,0)(0,2,1) \rangle$

Si $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = 0 \quad 4y + 2z = 0$, $2z = -4y$, $z = -2y$

$\langle (0,1,-2) \rangle$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normalizo}} V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} \rightsquigarrow u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

$$u_2 = \frac{A \cdot v_2}{\delta_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}$$

1

Busco u_3 a ojo.

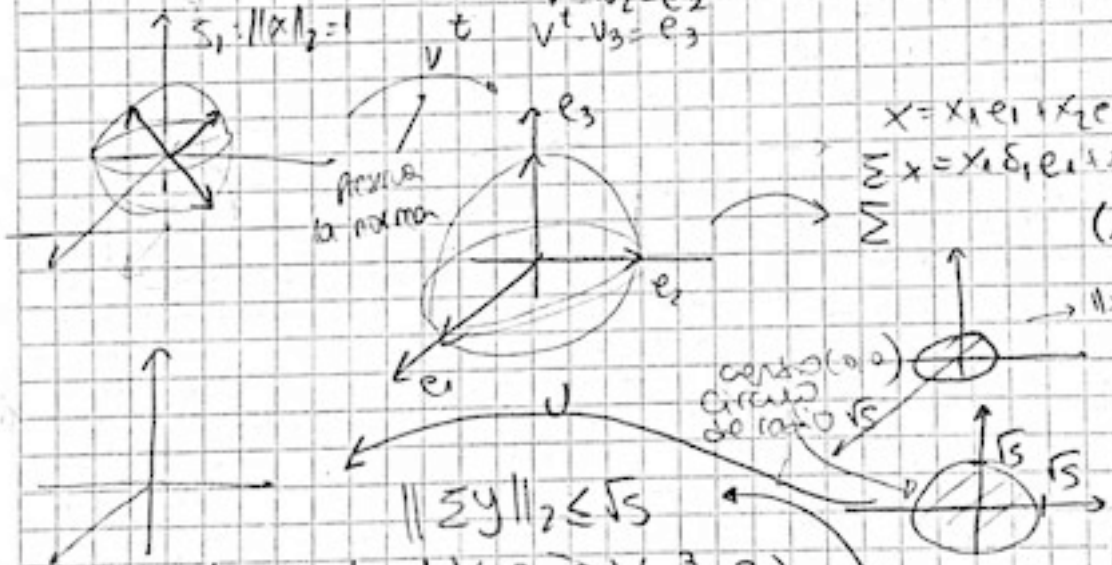
$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & +2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & +1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

b) $A = U \cdot \Sigma \cdot V^t$

$V^t \cdot v_1 = e_1$
$V^t \cdot v_2 = e_2$
$V^t \cdot v_3 = e_3$

con esa $U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$\Sigma x = x_1 \delta_1 e_1 + x_2 \delta_2 e_2 + 0$

$\Sigma \quad (x_1 \delta_1, x_2 \delta_2, 0)$

$y =$

$y \in S = \{x : \|x\|_2 = 1\}$

$\|y\|_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

$\|\Sigma y\|_2^2 = \delta_1^2 y_1^2 + \delta_2^2 y_2^2$

$\|\Sigma y\|_2 \leq \sqrt{5}$

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) calcular $\text{cond}_2(A)$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$\delta_1 = \sqrt{5} = \delta_2$

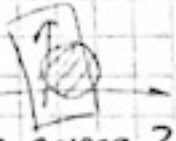
$5(y_1^2 + y_2^2) \leftarrow \boxed{5y_1^2 + 5y_2^2} \leq 5$

$A^t A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 72 \quad \delta_1 = 6\sqrt{2}$
$\lambda_2 = 18 \quad \delta_2 = 3\sqrt{2}$

$\text{cond}_2(A) = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \boxed{2}$

$\langle v_1, v_2 \rangle \xrightarrow{V^t} \langle e_1, e_2 \rangle \xrightarrow{U\Sigma} \langle u_1, u_2 \rangle$



b) Hallar la matriz de rango 1 q' mejor aproxima a A en norma 2.

$A_1 = U \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^t \rightsquigarrow$ Uso los mismos que la U y la V^t.

Preguntar lo del polinomio interpolador

4)

x	-1	0	1	2
y	-2	0	2	0

Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función tipo $f(x) = ax^3 + bx + c$

¿Es f el polinomio interpolador de Lagrange? si la respuesta es afirmativa, justificar adecuadamente. si la respuesta es negativa, calcularlo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^t A a = A^t b. \qquad a = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculo $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \\ 8 & 18 & 66 \end{pmatrix}$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 18 \\ 8 & 18 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 18 & 4 \\ 8 & 18 & 66 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2f_2 - f_1 \\ f_3 - 2f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 28 & 4 \\ 0 & 14 & 50 & 4 \end{array}\right) 6f_3 - 14f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 28 & 4 \\ 0 & 0 & -92 & -32 \end{array}\right)$$

$-92a = -32$

$a = 8/23$

algún error de cuentas

$a = -\frac{2}{3} \quad b = \frac{8}{3} \quad c = 0$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x$

para ver si f es el polinom interp de Lagrange

$p(x) = y_0 l_0 + y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3$

$p(x) = -2 l_0(x) + 0\, l_1(x) + 2 l_2(x) + 0\, l_3(x)$

3) Dada las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) verificar q el sistema $Ax = b$ tiene infinitas sol
b) Hallar la desc en la $A = U\Sigma V^t$
c) Calcular la pseudoinversa

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) f_2 \leftrightarrow f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \qquad z = 3$$

$$x - y + 3 = 0$$
$$x = y - 3$$

$$v = \begin{pmatrix} y-3 \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$$

$y(1,1,0) + (-3,0,3)$

recta sol $= \lambda(1,1,0) + (-3,0,3)$

b) $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad \Sigma, V, U \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

saco autoval y autovect

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 1\right] + 1\left[(-3+\lambda) + 1\right] - 1\left[1 - 1 + \lambda\right]$$
$$= (1-\lambda)\left[2 - 4\lambda + \lambda^2\right] - 2 + \lambda - \lambda$$
$$= 2 - 4\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 2 = 0$$
$$-6\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$
$$\lambda(-6 + 5\lambda - \lambda^2) = 0$$
$$\lambda = 3, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = 0 \quad \text{de } 0, 1, 4$$

$\sigma_1 = \sqrt{3}$
$\sigma_2 = \sqrt{2}$
$\sigma_3 = 0$

$$\boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

si $\lambda = 0$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 + f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad z = 0$$

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$x - y = 0$$
$$x = y$$

$\lambda=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \lambda=1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda=4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix}1/2 & -1 & 1\\ -1/2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot \quad V^t=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 & 2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{2}$$

$$u_1=\frac{A\cdot v_1}{2} \rightsquigarrow u_1=\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/6\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}}{2}=\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\\-\sqrt{6}/6\end{pmatrix}}_{u_1}$$

$$u_2=\frac{A\,v_2}{1} \rightsquigarrow u_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-\sqrt{3}/3\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$u=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0\\ -\sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad u_3=v\cup A^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}y=0\\x-z=0\\x=z\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0\\ -\sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 & 2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

c) Pseudoinversa $\quad A^+=V\Sigma^+U^* \rightsquigarrow A^+=V\cdot\Sigma^{-1}\cdot U^t$

$$A^+=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ -\sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6\\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{3}/3 & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^+=\begin{pmatrix}-1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/4 & -1/2 & -1/4\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}} \qquad A\cdot\underbrace{A^+\cdot b}=b \qquad A^+=U^t_r\Sigma_r^{-1}U_r$$

$$A\,x=b$$

$$z=A^+b \rightsquigarrow z=\begin{pmatrix}-1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/4 & -1/2 & -1/4\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-3/2\\3/2\\3\end{pmatrix}}_{x^*} \rightarrow \boxed{\text{la } \|\cdot\| \text{ chica}}$$

Busco lo sol hom de $(Ax=0)$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad z=0 \quad \begin{matrix}x-y=0\\x=y\end{matrix} \Rightarrow v=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{sol hom}}$$

$$\|x^*\|_2<\|z\|_2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{3\sqrt{6}}{2} \qquad \frac{\sqrt{02}}{2}$$

$$\approx 3.6 \qquad \approx 3.9$$

$$x_p=x_H+x^*=0 \quad \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\3\end{pmatrix}=z$$

$$Ax=b$$

$$\underbrace{A^tA}_{I}\,x=\underbrace{A^tb}$$

2) Se desea resolver un sistema de la forma $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Puede utilizarse el método de Jacobi? ¿Y el de G-S?

b) Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = (I - A)x_n + b$$

Probar q' si la suc. $(x_n)_n$ generada por el método converge a un cierto vector, entonces x^* es sol de $Ax = b$

c) Probar q el método del item anterior aplicado a A converge.

a) No, pues $J = -M^{-1}N$ donde $M = D \rightsquigarrow$ no es inversible.

$G\text{-}S = -M^{-1}N$ donde $M = (L + D) \rightsquigarrow$ no es inversible

b) $x_{n+1} = (I - A)x_n + b$

$x^* = (I - A)x^* + b$

$x^* - x^* + Ax^* = b$

$\underline{Ax^* = b} \longrightarrow x^*$ es sol de $Ax = b$

c) $T = (I - A)$ $\quad T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(T) < 1$ ✓

Solo autovalores

4)

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2,74	6,77	0,41	7,07	8,78	22,44	45,05

1

X → comienzo activ Y → prod. vendidos

a) Hallar el polinomio $f(x) = C_0 + C_2 x^2$ q mejor ajusta a los ...

b) Ajustar una func de la forma $g(x) = (d_0 + d_1 x)^3$.

c) ~~f(80)~~

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \\ 1 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,74 \\ 6,77 \\ 0,41 \\ 7,07 \\ 8,78 \\ 22,44 \\ 45,05 \end{pmatrix}$$

$$A^t A \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \end{pmatrix} = A^t b \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \\ 1 & 36 \end{pmatrix}}_{7\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix}}_{2\times 7} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 91 \\ 91 & 2275 \end{pmatrix}}_{A^t \cdot A}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{pmatrix}}_{2\times 7} \underbrace{\begin{pmatrix} 2,74 \\ 6,77 \\ 0,41 \\ 7,07 \\ 8,78 \\ 22,44 \\ 45,05 \end{pmatrix}}_{7\times 1} = \begin{pmatrix} 93,26 \\ 2395,32 \end{pmatrix}$$

$$A^t A a = A^t \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 91 \\ 91 & 2275 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93,26 \\ 2395,32 \end{pmatrix}$$

$7C_0 + 91C_2 = 93,26$
$7C_0 = 93,26 - 91C_2$
$C_0 = 13,3 - 13C_2$
$C_0 = 13,3 - 13 \cdot 1,08$
$\underline{C_0 = -0,74}$

$91C_0 + 2275C_2 = 2395,32$
$1210,3 - 1183C_2 + 2275C_2 = 2395,32$
$1210,3 + 1092C_2 = 2395,32$
$1092C_2 = 1185,02$
$\underline{C_2 = 1,08}$

$\underline{f(x) = -0,74 + 1,08x^2}$

$$(a \pm b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

b) $(d_0 + d_1 x)^3 = d_0^3 + 3d_0^2 d_1 x + 3d_0 \cdot d_1^2 x^2 + d_1^3 x^3$

$$d_0^3 + 3d_0^2 d_1 x + 3d_0 d_1^2 x^2 + d_1^3 x^3$$

$$A = \underbrace{\begin{array}{cccc} d_0 & 3x & 3x^2 & x^3 \\ \end{array}}_{7\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 12 & 8 \\ 1 & 9 & 27 & 27 \\ 1 & 12 & 48 & 64 \\ 1 & 15 & 75 & 125 \\ 1 & 18 & 108 & 216 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_0^3 \\ d_0^2 d_1 \\ d_0 d_1^2 \\ d_1^3 \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,74 \\ 6,22 \\ 0,41 \\ 7,07 \\ 3,73 \\ 27,44 \\ 45,05 \end{pmatrix}}_{b}$$

c) $-0,74 + 1,08x^2 \geq 80$

$$1,08x^2 \geq 80,74 \rightsquigarrow x^2 \geq 74,7$$
$$|x| \geq 8,6$$

PACCAL 16 - Marzo 2023

3) $a \neq 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la SVD
b) Hallar la matriz de rango 1 mas cercana a A.

$A = U \Sigma V^t$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & a^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(a^2-\lambda) - a^2\right)$$

$\underbrace{\lambda = 1}$

$$\cancel{a^2} - \lambda - a^2\lambda^2 + \lambda^2 - \cancel{a^2} = 0$$
$$(\lambda^2 - \lambda(1+a^2)) = 0$$
$$\lambda(\lambda - (1+a^2)) = 0$$

$\underbrace{\lambda = 0}$ $\quad \underbrace{\lambda = 1 + a^2}$

si $\lambda = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x + ay = 0$, $x = -ay$, $z = 0$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $ay = 0$, $y = 0$ $ax = 0$, $x = 0$ $z = \text{libre}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 + a^2$

$\begin{pmatrix} -a^2 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 + l_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -a^2x + ay = 0$, $ay = a^2x$, $y = ax$, $z = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{1+a^2}$ $\|v_2\| = 1$ $\|v_3\| = \sqrt{1+a^2}$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \sqrt{1+a^2}$$

$$u_1 = \frac{A \cdot v_1}{\sigma_1} \rightsquigarrow u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ a/\sqrt{1+a^2} \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+a^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$\frac{1+a^2}{1+a^2} = 1$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$u_2 = \frac{A \cdot v_2}{\sigma_2} \rightsquigarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_3 \rightsquigarrow A^t = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - al_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x = 0$, $z = 0$, $y = a$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \underbrace{U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^t$$

$$\boxed{b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t}$$

2) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, notamos $A = D + L + U$, donde D es diagonal, L triangular inf estricta y U triang sup estricta. Sea $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz identidad.

a) Mostrar q' si la sgte iteración converge a $\tilde{x}$, entonces $\tilde{x}$ es sol de $Ax = b$

$$(2D + I) \cdot x^{(k+1)} = (-L + I - U + D)\, x^{(k)} + b$$

$$(2D + I)\, \tilde{x} - (-L + I - U + D)\, \tilde{x} = b$$

$$(2D + \cancel{I} + L - \cancel{I} + U - D)\, \tilde{x} = b$$

$$(D + L + U)\, \tilde{x} = b \implies \tilde{x} \text{ es sol de } Ax = b$$

b) Considerar el método iterativo del ítem anterior:

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + c$$

donde $B = (2D + I)^{-1} \cdot (-L + I - U + D)$ y $c = (2D + I)^{-1} \cdot b$

Mostrar que λ es autovalor de $B \iff \lambda$ cumple:

$$\det(-L + I - U + D - \lambda(2D + I)) = 0$$

$$B = (2D + I)^{-1} \cdot (-L + I - U + D)$$

$$(2D + I)\, B = (2D + I)(2D + I)^{-1} \cdot (-L + I - U + D)$$

$$(2D + I)\, B = (-L + I - U + D)$$

$$\det((2D + I)B - \lambda(2D + I)) = 0$$

$$\det((2D + I)(B - \lambda I)) = 0$$

$$\det(2D + I) \cdot \det(B - \lambda Id) = 0$$

$\longrightarrow \lambda$ es autovalor de B

c) Considerar la sgte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar para q' valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, el método propuesto en b) converge.

$$x^{k+1} = Bx^k + C$$

$$x^{k+1} = \underbrace{(2D+I)^{-1}\cdot(-L+I-U+D)}_{B}\cdot x^n + (2D+I)^{-1}\cdot b$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & -\alpha/3 \\ 0 & -\alpha/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Saco autovalores

$$\begin{vmatrix} 2/3-\lambda & 0 & 0 \\ -2/3 & 2/3-\lambda & -\alpha/3 \\ 0 & -\alpha/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\cdot\left((2/3-\lambda)^2 - (\alpha/3)^2\right)$$

$$\underbrace{\lambda = \frac{2}{3}}_{} \qquad \frac{2}{3}-\lambda-\frac{\alpha}{3} = 0 \qquad \frac{2}{3}-\lambda+\frac{\alpha}{3} = 0$$

$$\lambda = \frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3} \qquad \underbrace{\lambda = \frac{2}{3}+\frac{\alpha}{3}}_{}$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \checkmark$$

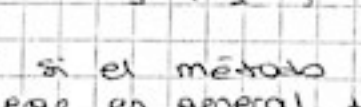
$$\left|\frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3}\right| < 1 \qquad \left|\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{3}\right| < 1$$

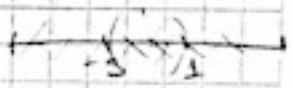
$$\frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3} < 1 \quad \cap \quad \frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3} > -1 \qquad \frac{2}{3}+\frac{\alpha}{3} < 1 \quad \cap \quad \frac{2}{3}+\frac{\alpha}{3} > -1$$

$$-\frac{\alpha}{3} < \frac{1}{3} \quad \cap \quad -\frac{\alpha}{3} > -\frac{5}{3} \qquad \frac{\alpha}{3} < \frac{1}{3} \quad \cap \quad \frac{\alpha}{3} > \frac{-5}{3}$$

$$\underbrace{\alpha > -1}_{} \quad \cap \quad \underbrace{\alpha < 5}_{} \qquad \underbrace{\alpha < 1}_{} \qquad \underbrace{\alpha > -5}_{}$$

$$\alpha \in (-1;5) \qquad \boxed{\alpha \in (-1;1)} \qquad \alpha \in (-5;1)$$





d) Fijando $\alpha = 0{,}5$, decidir si el método de G-S converge. En caso afirmativo ¿converge en general + rápido q' el método del item b.?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = -M^{-1}\cdot N \qquad M = (L+D) \qquad N = U$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda M + N) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - (0{,}5)^2\right) = 0$$

$$\underbrace{\lambda = 0}_{} \qquad \lambda - 0{,}5 = 0 \qquad \lambda + 0{,}5 = 0$$

$$\underbrace{\lambda = 0{,}5}_{} \qquad \underbrace{\lambda = -0{,}5}_{}$$

→ G-S converge ✓

2do parcial

h

2) Se quiere resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar q' el método de Jacobi converge cualquiera sea el valor inicial $\Leftrightarrow$ G-S converge cualq. sea el valor inicial.

$J \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M = D \quad N = L + U$

$-M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

$T = -M^{-1} N$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Saco autovalores

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\alpha & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \alpha^2) \longrightarrow \lambda^2 = -\alpha^2$$

$|\lambda| = \sqrt{-\alpha^2}$

$\lambda = 0 \qquad |\lambda| = \alpha i \qquad |\alpha i| < 1$

$\boxed{|\alpha| < 1}$

$|\alpha i| = |\alpha|$

$G \rightarrow \quad M = (L + D) \quad N = U$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot -1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - \alpha f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +\alpha & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow T = -M^{-1} N \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Saco los autovalores

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda)(-\alpha^2-\lambda)$$

$$\lambda^2(-\alpha^2-\lambda)$$

$$\Delta = 0 \qquad \Delta = -\alpha^2$$

$$|-\alpha^2| < 1$$

$$|\alpha^2| < 1$$

$$\underline{|\alpha| < 1}$$

b) todos los valores q convergen es para $\underline{|\alpha| < 1}$

3)

x	0	1	2	3	4	5
y	40	29	20	12	6	3

a) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ q' mejor ajusta a los datos en el sentido de cuadrados mínimos.

b) Ajustar una función de la forma $g(x) = (d_0 + d_1 x)^2$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente.

c) Para cada uno de los ajustes obtenidos ¿cuál será la distancia estimada del objeto a la Tierra luego de 6 días?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 29 \\ 20 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Planteo $A^t \cdot A\, a = A^t \cdot b$

$$A^t A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}}_{3\times 7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}}_{7\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 15 & 979 \end{pmatrix}}_{A^t \cdot A}$$

$$A^t b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 29 \\ 20 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 144 \\ 333 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 15 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 144 \\ 333 \end{pmatrix}$$

$6C_0 + 15C_1 + 55C_2 = 110$ $\quad 15C_0 + 55C_1 + 225C_2 = 144$ $\quad 55C_0 + 15C_1 + 979C_2 = 333$

$\Rightarrow$ se despeja y sale.

b)

x	0	1	2	3	4
y	20	19	17	13	10

a) Hallar los valores de a, b y c q' se sostiene al ajustar los datos con una funcion del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizando cuadrados minimos. Calcular el error $E = \sum (y_i - f(x_i))^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 17 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 364 \\ 132 \\ 79 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 364 \\ 132 \\ 79 \end{pmatrix}$$

$30a + 10b + 5c = 79$ $\quad 100a + 30b + 10c = 132$ $\quad 354a + 100b + 30c = 364$

$c = \frac{79}{5} - 6a - 2b$ $\quad 100a + 30b + 158 - 60a - 20b = 132$

$60a + 10b = -26$

$b = -\frac{13}{5} - 6a$

$354a - 260 - 400a + 630 + 60a = 364$

$44a = -6$

$\boxed{a = -\frac{3}{7}}$

$c = \frac{79}{5} - 6a + \frac{26}{5} + 8a$

$c = 21 + 2a$

$\boxed{b = -\frac{31}{35}}$

$\boxed{c = \frac{141}{7}}$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{7}x^2 - \frac{31}{35}x + \frac{141}{7}}$$

Calculo los $f(x_i)$

$f(0) = 141/7$ $\quad$ $f(3) = 472/35$

$f(1) = 659/35$ $\quad$ $f(4) = 341/35$

$f(2) = 583/35$

$$E = \sum (y_i - f(x_i))^2$$

b) Hallar los valores de k y d q' se obtienen al ajustar los datos con una funcion del tipo $g(x) = ke^{dx^2}$ utilizando □ mini

$g(x) = ke^{dx^2}$

$\ln(g(x)) = \ln(ke^{dx^2}) = \ln(k) + dx^2$ $\qquad$ $\ln(k) = c$

$\ln(g(x)) = c + dx^2$ $\qquad$ $c + dx^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1d \\ 1 & 4d \\ 1 & 9d \\ 1 & 16d \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1d & 4d & 9d & 16d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1d \\ 1 & 4d \\ 1 & 9d \\ 1 & 16d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 30d \\ 30 & 354 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(20) \\ \ln(19) \\ \ln(17) \\ \ln(13) \\ \ln(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,6 \\ 74,2 \end{pmatrix}$$

c) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,6 \\ 74,2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $c = 2,9$, $d = -0,04$ $\rightsquigarrow$ $e^{2,9} = \underline{18,1 = k}$

$\Rightarrow g(x) = 18,1 \cdot e^{-0,04x^2}$

2) Dada una matriz A, notamos $A = D + L + U$, donde D diagonal

a) Probar q x es sol de $Ax = b \iff x$ satisface

$$\left(I + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

$$\left(I + \frac{1}{2}L\right)x + \left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

$$\left(\cancel{I} + \frac{1}{2}L + D - \cancel{I} + \frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

$$(D + L + U)x = b \iff Ax = b \checkmark$$

b) considerar el método derivado de la formula anterior:

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

donde $B = -\underbrace{\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1}}_{M}\underbrace{\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)}_{N}$ y $c = \left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot b$

Probar q λ es autovalor de $B \iff$ es raiz de la ecuacion

$$\det\Big(\underbrace{D - I + \frac{1}{2}L + U}_{L} + \lambda\underbrace{\left(I + \frac{1}{2}L\right)}_{M}\Big) = 0 \qquad \det(B - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(-\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)\right)$$

$$B = -\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)$$

$$\left(I - \frac{1}{2}L\right) \cdot B = \left(I - \frac{1}{2}L\right) \cdot -\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)$$

$$-\left(I - \frac{1}{2}L\right) \cdot B = +\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)$$

$$\det(B - \lambda Id) = 0 \Rightarrow \det\left(-M^{-1} \cdot N - \lambda Id\right) \Rightarrow \det\left(-M^{-1}N - \lambda MM^{-1}\right)$$

$$= \det\left(-M^{-1}(N + \lambda M)\right) \iff \det\underbrace{\left(-M^{-1}\right)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(N + \lambda M)}_{=0}$$

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\right) \checkmark \text{ se cumple}$$

Cu

c) sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Probar q' el método anterior converge $\Leftrightarrow |a|<1$

$$A = D+L+U \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1+a^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a/2 & 1 & 0 \\ 0 & a/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & a^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a/2 & 0 & a \\ 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a/2 & 1 & 0 \\ 0 & a/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a/2 & a^2 & a \\ 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - a/2 f_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a/2 & 1 & 0 \\ 0 & a/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - \frac{a}{2} f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4} & -\frac{a}{2} & 1 \end{array}\right) \qquad -\frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}$$

queda hallable

Lo nuevo.

$$\det(\lambda M + N) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a\lambda/2 & \lambda & 0 \\ 0 & a\lambda/2 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a/2 & a^2 & a \\ 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \frac{a\lambda}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}(\lambda-1)$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & +a & 0 \\ \frac{a}{2}(\lambda+1) & \lambda+a^2 & +a \\ 0 & \frac{a}{2}(\lambda+1) & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left((\lambda+a^2)\lambda - \frac{a^2}{2}(\lambda+1) \right) - \frac{a}{2}(\lambda+1)(a\lambda)$$

$$\lambda\left(\lambda^2 + \lambda a^2 - \frac{a^2}{2}\lambda - \frac{a^2}{2} \right) - \frac{a^2}{2}\lambda^2 - \frac{a^2}{2}\lambda$$

$$\lambda^3 + \cancel{\lambda a^2} - \frac{a^2}{2}\lambda - \cancel{\frac{a^2}{2}\lambda^2} - \frac{a^2}{2}\lambda \Rightarrow \lambda^3 - a^2\lambda \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - a^2)$$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = a \qquad \lambda = -a$

$$\underline{|a|<1}$$

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio Primer Parcial – 13 de julio de 2023

Importante: Para aprobar es necesario tener al menos dos ejercicios completos bien.

Ejercicio 1: (2.5 pts) Dada la base $B = \{(1,0,0,0);(1,2,0,0);(1,2,3,0);(1,2,3,4)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$|f|_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Dar una base de $Nu(f)$ y de $Im(f)$.
b) Decidir si $\mathbb{R}^4 = Nu(f) \oplus Im(f)$.

Ejercicio 2: (2.5 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Probar que A es simétrica y definida positiva $\forall n \in \mathbb{N}$.
b) Hallar la descomposición de Cholesky de la matriz A. ¿Es única esta descomposición?
c) Para la matriz L de la descomposición probar que $Cond_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 3: (2.5 pts) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

a) Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ si $a_0 = 2$ y $a_1 = -1$.
b) Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$ cuando $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Ejercicio 4: (2.5 pts) Un proceso de Markov admite 3 estadios: α, β y γ. La probabilidad de pasar del estadio α a cada uno de los otros sectores es 1/2. Un individuo que está en el estadio β tiene probabilidad 1/3 de pasar al α y lo mismo sucede para transitar del β al γ. Los individuos en el estadio γ tienen probabilidad 1 de pasar al α en el período siguiente.

a) Armar la matriz de transición A de este proceso.
b) Hallar, si existe, el estado límite del proceso.
c) Hallar A^∞.

Justifique todas sus respuestas

1)

$$|F|_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ la quiero pasar a la base canónica

1forma =

$\Rightarrow F_{EE} = C_{BE} \cdot F_{BB} \cdot C_{EB}$ $\qquad C_{EB} = C_{BE}^{-1}$

$$F_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$F_{EE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$F_{EE} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & -4/3 & 0 \\ 9 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & -4/3 & 0 \\ 9 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5f_2-8f_1 \\ 5f_3-9f_1 \\ 5f_4-4f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4/3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -8/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-3f_2 \\ f_4+2f_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2y + 4/3 z = 0$ $\qquad$ $5x - 2/3 z - z = 0$

$2y = 4/3 z$ $\qquad$ $5x = 5/3 z$

$y = 2/3 z$ $\qquad$ $x = 1/3 z$

grado libre

$Nu = \langle (1/3, 2/3, 1, 0)(0,0,0,1) \rangle$

quiero ver la img, pero seguro son la, triangulo y mirro

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & -4/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5f_2+f_1 \\ 5f_3+f_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 4/3 & 4 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+2/3 f_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Im = \langle (5,8,9,4)(-1,-2,-3,0) \rangle$

b) Busco la intersección del Nu y la Im.

2) Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Para q sea sim es a ojo, q sea def positiva veo q el det de los menores principales sea >0.

$1 > 0$ ✓

$4 + \frac{1}{n^2} - 4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > 0$ ✓ pues nunca se hace neg.

$1 \cdot \left(8 + \frac{2}{n^2} - 4\right) - 2 \cdot (4 - 2) + 1 \cdot \left(4 - 4 - \frac{1}{n^2}\right)$

$\cancel{4} + \frac{2}{n^2} - \cancel{4} + \cancel{4} - \cancel{4} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} > 0$ ✓ $\Rightarrow$ es sim y def $\oplus$.

b) $A = L \cdot L^t$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{11}^2 = 1$ $\quad$ $\underline{a_{11} = 1}$

$a_{11} a_{12} = 2$ $\quad$ $\underline{a_{12} = 2}$

$a_{11} \cdot a_{13} = 1$ $\quad$ $\underline{a_{13} = 1}$

$a_{21} \cdot a_{11} = 2$ $\quad$ $\underline{a_{21} = 2}$

$a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2 = 4 + \frac{1}{n^2}$

$\cancel{4} + a_{22}^2 = \cancel{4} + \frac{1}{n^2}$

$a_{22}^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \underline{a_{22} = \left|\frac{1}{n}\right|}$

$a_{21} \cdot a_{13} + a_{22} \cdot a_{23} = 2$

$2 \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot a_{23} = 2$

$\underline{a_{23} = 0}$

$a_{31} \cdot a_{11} = 1$ $\quad$ $\underline{a_{31} = 1}$

$a_{31} \cdot a_{12} + a_{32} \cdot a_{22} = 2$

$1 \cdot 2 + \frac{1}{n} \cdot a_{32} = 2$

$\underline{a_{32} = 0}$

$a_{31} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} + a_{33}^2 = 2$

$1 \cdot 1 + + a_{33}^2 = 2$

$a_{33}^2 = 1$

$\underline{a_{33} = 1}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/n & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/n & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|L\|_\infty = 2 + \frac{1}{n}$

$\text{Cond}_\infty(L) \geq \frac{\|L\|_\infty}{\|L-B\|_\infty}$ con P. sing $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1 col de cero

$\text{cond}_\infty(L) \geq \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot n$ $\quad L - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\|L-B\| = 1/n$

$\text{cond}_\infty(L) > 2n + 1$

$\Rightarrow$ si $n \to +\infty \Rightarrow \text{cond}_\infty(L) \to +\infty$

3) $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$ ver en dsp

4)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \end{array}$$

b) Para hallar el estado límite tengo q' sacar autoval y autovect.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3-\lambda & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = 1\left(1/2 \cdot 1/3 - 1/2(1/3-\lambda)\right) - \lambda\left(-\lambda(1/3-\lambda) - 1/3 \cdot 1/2\right)$$

$$\cancel{1/6} - \cancel{1/6} + 1/2\lambda - \lambda\left(-1/3\lambda + \lambda^2 - 1/6\right)$$

$$1/2\lambda + 1/3\lambda^2 - \lambda^3 + 1/6\lambda$$

$$2/3\lambda + 1/3\lambda^2 - \lambda^3 \longrightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = -2/3, \quad \lambda = 0$$

saco autovectores

$\lambda = 1$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & -2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 + 1/2 f_1 \\ f_3 + 1/2 f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} f_3 + f_2 \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-1/2y + 1/2z = 0$ $\quad -x + 1/3y + y = 0$
$1/2y = 1/2z$ $\quad x = 4/3y$
$z = y$ $\quad v = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2/3$
$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2/3 f_2 - 1/2 f_1 \\ 2/3 f_3 - 1/2 f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/18 & -1/18 \end{pmatrix} f_3 - \frac{1}{9} f_2$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1/2y - 1/2z = 0$ $\quad 2/3x = -4/3z$
$1/2y = 1/2z$ $\quad x = -2z$ $\quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$y = z$

El de $\lambda=0$ ni me interesa

$$\Rightarrow v^k = \alpha \cdot 1^k \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\beta \left(-\frac{2}{3}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot (0)^k \begin{pmatrix} v_3 \end{pmatrix}}_{\to 0 \text{ cuando } k \to \infty}$$

$$v^\infty = \alpha \cdot 1^\infty \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $A^\infty = C \cdot D^\infty \cdot C^{-1}$

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 4/3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

3) $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$

a) $a_0 = 2,\ a_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 6a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}_{A^2} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizo $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$

busco autoval $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+3)$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

soco autovect

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+3f_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -2x + y = 0$, $\underline{y = 2x}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & +2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 3x + y = 0$, $y = -3x$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$A^{+} = V \Sigma^{-1} U^{t}$

- Pseudoinversa
- Diagonalización $\longrightarrow$ $A = \underset{\text{autovect}}{C} \; \overset{\text{autoval}}{D} \; C^{-1}$ $\quad (D = C^{-1} A C)$

A es diagonalizable $\Rightarrow$ $\underbrace{\dim E_\lambda}_{\text{dim autoval}} = \underbrace{\alpha}_{\text{grado autoval}}$

Gran Schmidt

$u_1 = v_1$

$u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|_2^2} \cdot u_2$

Demo = $\|u\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2 = 1} \|ux\|_2 = \|ux\|_2 = \|x\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2 = 1} \|x\|_2 = 1$

Demo = $\|ux\|_2 = (ux)^{*} \cdot (ux) = x^{*} \underbrace{u^{*} \cdot u}_{I} \cdot x = x^{*} \cdot x = \underbrace{\|x\|_2^2}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{*} A)}$ y $\|A\|_2 = \rho(A) \leftarrow$ max autoval en $|\cdot|$

1) Ejercicio.

$f(x,y,z) = (2x - 2y ; x - y, 0)$

a) Dar una base β tq $|f|_{\beta\beta}$ sea diagonal

b) calcular $(|f|_{EE})^{m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ la misma pero con la λ elevada a m

c) ¿ $\exists$ P / $P^2 = |f|_{EE}$? $\longrightarrow$ sí tq $D^{n} = D^{1} = D^{2}$ pues solo tengo el 1

quiero q $|f|_{\beta\beta}$ sea diagonal, siendo $f(x,y,z) = (2x - 2y ; x - y ; 0)$

$|f|_{\beta\beta} = \underbrace{C_{E\beta}}_{\text{col m de autovect}} \; F_{EE} \; \underbrace{C_{\beta E}}_{\text{la inversa}}$ $\qquad C_{\beta E} (v)_{\beta} = C_{\beta E} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = v$

saco img de f

$f(1,0,0) = (2, 1; 0)$

$f(0,1,0) = (-2; -1; 0)$

$f(0,0,1) = (0; 0, 0)$

$|f|_{EE} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

saco autovalores $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left((2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 \right)$

$\underline{\lambda = 0}$

$-\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda(\lambda - 1) = 0$

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad$ $\underline{\lambda = 1}$

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1)$

si $\lambda = 0 \Rightarrow E_{\lambda=0} = \langle (1,1,0)(0,0,1) \rangle$ $\qquad$ si $\lambda = 1 \Rightarrow E_{\lambda=1} = \langle (2,1,0) \rangle$

$|f|_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ $\qquad$ Base $\beta = \{ (1,1,0)(0,0,1)(2,1,0) \}$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$ Como calculo A^{50}

Si A es diago $\Rightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1} \Rightarrow A^{50} = C \cdot D^{50} \cdot C^{-1}$

Si A no es diag $\Rightarrow A = U \cdot T \cdot U^{-1} \Rightarrow A^{50} = U \cdot T^{50} \cdot U^{-1}$

U unitaria con autov. — T diag con autov.

Si ó no es diag

Calculo la desc de Schur

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 8 & 8 \\ -1 & 7-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)\cdot((7-\lambda)(7-\lambda)-4)) + 1\left(8(7-\lambda)+16\right) - 1\left(-16-8(7-\lambda)\right)$$

$$(13-\lambda)(45-14\lambda+\lambda^2) + 72 - 8\lambda + 72 - 8\lambda$$

$$585 - 182\lambda + 13\lambda^2 - 45\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 + 144 - 16\lambda$$

$$729 - 243\lambda + 27\lambda - \lambda^3 = 0$$

$\longrightarrow \lambda = 9$ triple

Saco autovectores.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4f_2+f_1 \\ 4f_3+f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$4x + 8y + 8z = 0$

$x = -2y - 2z$

$N = \langle (-2, 1, 0)(-2, 0, 1) \rangle$

Los ortonormalizo y hago G-S.

$w_1 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)$

$w_2 = (-2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}) - \frac{4}{5} \cdot (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)$

$w_2 = \left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}, \frac{-4\sqrt{5}}{25}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ saco el zom con prod cruz

$w_3 = (1/3, 2/3, +2/3)$

$$\frac{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0) \times \left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}, \frac{-4\sqrt{5}}{25}, 1/\sqrt{5}\right)}{3/5} = \frac{(1/5, 2/5, +2/5)}{3/5}$$

$A = U \cdot T \cdot U^{*}$

$\Rightarrow T = U^{*} \cdot A \cdot U$

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -2\sqrt{5}/25 & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/25 & 2/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -2\sqrt{5}/25 & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4\sqrt{5}/25 & 2/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}^{t}$$

Hallar la factorización QR

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5}/5 \\ 0 \\ -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 . Q_1 \rangle}{\| q_1 \|^2} . Q_1$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5}/5 \\ 0 \\ -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{normalizado}}$$

$$\rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{norm}]{10} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 . Q_1 \rangle}{\| Q_1 \|^2} . Q_1$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{26}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28/25 \\ 21/25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{normalizo}]{10} \underbrace{\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}}_{q_2}$$

$\wedge 3/5$

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 26/5 \\ 0 & -2/5 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Probar q' A no admite desc LU
b) Hallar la desc LU de PA.

a) Para q' A no admita desc LU, algun det de los menores principales es cero.

$0 = 0 \Rightarrow$ no admite.

b) $P.A \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} f_3 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} f_3 + f_2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{U}$ $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad PA = LU$

$L_1 PA = U$

$PA = \underbrace{L_1^{-1}}_{L} \underbrace{U}_{U}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3) Considerar la suc de Fibonacci, dada por la recursión $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ $\quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

a) Hallar una matriz A tq $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$

Mostrar q $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

b) Diagonalizar A

c) Dar una formula cerrada para F_n.

$A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ \underbrace{F_{n-1} + F_n}_{= F_{n+1}} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

saco autoval $= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 1$

$-\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\longrightarrow \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

saco autovect

$E_{\lambda' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \left\langle \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} ; 1 \right) \right\rangle \quad E_{\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \left\langle -\frac{\sqrt{5}-1}{2} , 1 \right\rangle$

$A = C D C^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} (\sqrt{5}-1)/2 & -(\sqrt{5}+1)/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{5}-1)/2 & -(\sqrt{5}+1)/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}}$$

parcial

2) $A = D + L + U$

a) Probar q x es sol de $Ax = b \iff x$ satisface

$$\left(I + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

$$\left(I + \frac{1}{2}L\right)x + \left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

$$\left(\cancel{I} + \frac{1}{2}L + D - \cancel{I} + \frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

$$\underbrace{(L + D + U)}_{A}x = b \implies x \text{ es sol}$$

b) $x_{n+1} = Bx_n + c$ $\qquad B = -\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)$

$$c = \left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot b$$

Probar q λ es autoval de $B \iff \lambda$ es raíz de la ecuación

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda\left(I + \frac{1}{2}L\right)\right) = 0$$

Sé q' $\det(B - \lambda Id) = 0$

$$\det\left(-\left(I + \tfrac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(D - I + \tfrac{1}{2}L + U\right) - \lambda I\right) \iff \det\left(-M^{-1} \cdot N - \lambda M^{-1} \cdot M\right)$$

$$= \det\left(-M^{-1}(N + \lambda M)\right) \iff \underbrace{\det(-M)^{-1}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(N + \lambda M)}_{=0}$$

pues

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda\left(I + \frac{1}{2}L\right)\right)$$

sé cumple

c)

Demos del 2do parcial

2) a) probar q' el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal

una matriz es $\perp \Leftrightarrow AA^t = A^tA = Id$

$\Rightarrow$ si A y B son $\perp$ $\Rightarrow (AB)(AB)^t = A\underbrace{BB^t}_{I}A^t \Rightarrow AA^t = I$

$(AB)^t(AB) = B^t\underbrace{A^tA}_{I}B = B^tB = I$

b) sean 2 matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar q A y B tienen los mismos valores sing $\Leftrightarrow \exists P, Q$ matrices $\perp$ tq $A = P \cdot B \cdot Q$.

$\Rightarrow$) si A y B tienen mism v sing

$A = P\,B\,Q$

$U_A \Sigma V_A^t = \underbrace{P \cdot U_B}\,\Sigma\,\underbrace{V_B^t\,Q}$

$U_A = P U_B$

$PU_B = U_A$

$P\underbrace{U_B U_B^t}_{I} = U_A U_B^t$

$\underline{P = U_A U_B^t}$

$V_A^t = V_B^t Q$

$V_B^t Q = V_A^t$

$V_B V_B^t Q = V_B V_A^t$

$\underline{Q = V_B V_A^t}$

$\Leftarrow$) $A = P\,B\,Q$

$A = \underbrace{P\,U_B}_{\perp}\,\Sigma_B\,\underbrace{V_B^t\,Q}_{\perp}$ $\Rightarrow$ es una desc SVD de A

A puede tener muchos SVD pero los sigm son iguales

$\Rightarrow \Sigma_A = \Sigma_B$

c) Probar que

$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_1(A)$

$\|Ax\|_2 = \|(U\Sigma V^t)x\|_2 = \|(\Sigma V^t)x\|_2 = \|\Sigma y\| = \max \sigma_i = \sigma_1$ (U unit)

$y = V^t x$

$\|x\| = 1$ y V^t tiene filas de 1.

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encontrar la desc svd de la matriz A
b) Construir una matriz B de dim apropiada q' satisfaga a la vez q' $B^t \cdot B = A^t \cdot A$ y $\operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0)(1,1,1,1) \rangle$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
$U \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
$V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

saco autov de $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$
$6 - 7\lambda + \lambda^2 = 0 \quad \lambda = 0 \quad \underline{\lambda = 6} \quad \underline{\lambda = 1}$

$\sigma_1 = \sqrt{6}$
$\sigma_2 = 1$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

saco autovalores

$\lambda = 6 \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x - 2y = 0 \\ x = -2y \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow N = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 4x - 2y = 0 \\ 2y = 4x \\ y = 2x \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Busco u: $u_1 = \dfrac{A N_1}{\sigma_1} \Rightarrow \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 5 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{30}/15 \\ \sqrt{30}/6 \\ \sqrt{30}/30 \end{pmatrix}}_{u_1}$

$u_2 = \dfrac{A N_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{u_2}$

Busco u_3 haciendo el Nu A^t

$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = -y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2y \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow N = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}}_{u_3}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{30}/15 & 1/\sqrt{5} & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{30}/6 & 0 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{30}/30 & 2/\sqrt{5} & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{V^t}$$

b) $\underbrace{\underbrace{B^t}_{n\times 4}\cdot\underbrace{B}_{4\times n}}_{2\times 2} = \underbrace{\underbrace{A^t}_{2\times 3}\cdot\underbrace{A}_{3\times 2}}_{2\times 2}$

$\mathrm{Im}\, B = \langle (1,1,0,0)(1,1,1,1) \rangle$

$B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow n = 2 \quad \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

$U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Sigma \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

$B = U_B \Sigma_B V_B^t$

$A = U_A \Sigma_A V_A^t$

$$(U_B \Sigma_B V_B^t)^t (U_B \Sigma_B V_B^t) = (U_A \Sigma_A V_A^t)^t (U_A \Sigma_A V_A^t)$$

$$V_B \cdot \Sigma_B^t \cdot \underbrace{U_B^t U_B}_{Id} \Sigma_B V_B^t = V_A \cdot \Sigma_A^t \cdot \underbrace{U_A^t U_A}_{Id} \cdot \Sigma_A V_A^t$$

$$V_B \underbrace{\Sigma_B^t \cdot \Sigma_B} V_B^t = V_A \Sigma_A^t \cdot \Sigma_A V_A^t$$

$$V_B \Sigma_B^2 V_B^t = V_A \Sigma_A^2 V_A^t$$

Ahora, tienen los mismos valores singulares

$\Rightarrow \Sigma_B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la V es la misma pq' tienen los mismos autovect $V_B = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Busco mi U. q' sé que la Im de B son las col. de U

hago G-S

$w_1 = (1,1,0,0) \Rightarrow w_1 = (1/2; 1/2; 0; 0)$ $\qquad w_2 = (0,0,1/2,1/2)$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1; v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 \Rightarrow w_2 = (1,1,1,1) - 1(1,1,0,0) = (0;0;1,1)$

$$U_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

1CB y 2DO PARCIAL MIOS

1er parcial 23 mayo 2023

1) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tq $\exists$ tl $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ q' satisfaga que $f(1,-1,1) = (1,a,1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,a+3)$ y $f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$.

b) decir si $\exists$ un proyector $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $P(v) = f(v)$ $\forall v \in S$, $S = \langle (1,-1,1)(1,-1,2) \rangle$ y $\operatorname{Nu} P = \langle (1,1,0) \rangle$. En caso negativo explicar pq y en caso afirmativo mostrarlo y determinar si resulta ser un proy $\perp$.

a) $f(1,-1,1) = (1,a,1)$
$f(1,-1,2) = (a^2,-1,a+3)$
$f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$

veo si son li $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$ son LD

$\Rightarrow f(1,-1,-2) = \alpha \cdot f(1,-1,1) + \beta \cdot f(1,-1,2)$

$f(1,-1,-2) = f(\alpha+\beta, -\alpha-\beta, \alpha+2\beta)$

$\alpha+\beta = 1$ $\quad -1+\beta-\beta = 1$ $\quad 1-\beta+2\beta = -2$
$\alpha = 1-\beta$ $\quad \beta = -3$
$\alpha = 4$

$\Rightarrow f(1,-1,-2) = 4f(1,-1,1) - 3f(1,-1,2)$

$(1,-1,-2) = 4(1,a,1) - 3(a^2,-1,a+3)$

$1 = 4 - 3a^2$ $\quad -1 = 4a + 3$ $\quad -2 = 4 - 3a - 9$
$a^2 = 1$ $\quad \underline{a = -1}$ $\quad 3 = -3a$
$|a| = 1$ $\quad \underline{a = -1}$
$\Rightarrow \underline{a = 1}$

b) $P(1,-1,1) = f(1,-1,1) = (1,-1,1)$ ✓

$P(1,-1,2) = f(1,-1,2) = (1,-1,2)$ ✓

falta uno para completar $P \Rightarrow$ veo q' $\operatorname{Nu} P = \langle (1,1,0) \rangle$

$P(1,1,0) = (0,0,0)$ son li y $P(v) = v$ $\forall v \in P$.

Para ver si es un proy $\perp$ puedo ver q' $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Nu} P$

$\langle (1,-1,1)(1,1,0) \rangle = 0$ ✓

$\langle (1,-1,2)(1,1,0) \rangle = 0$ ✓

2) Sean $\alpha > 0$, $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{4\times4}$ la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 6 & 1/\alpha & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar q' $\text{Cond}_\infty(A(\alpha)) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} +\infty$

b) ¿Qué puede decir $\lim_{\alpha \to +\infty} \text{cond}_2(A(\alpha))$?

a) $\text{Cond}_\infty(A(\alpha)) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ con B singular. $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es singular pues det = 0

$\|A\|_\infty$ = max suma de filas $\|A\|_\infty = 20 + \frac{1}{\alpha}$ $\quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\|A-B\|_\infty = \frac{1}{\alpha}$

$\text{Cond}_\infty(A(\alpha)) > \left(20 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha \longrightarrow \text{cond}_\infty(A(\alpha)) > 20\alpha + 1$

$\text{Cond}_\infty(A(\alpha)) > \infty \Rightarrow \text{Cond}_\infty(A(\alpha)) \longrightarrow \infty$ cuando $\alpha \to \infty$

b) $\text{Cond}_2(A(\alpha)) > \frac{1}{n} \cdot \text{Cond}_\infty(A(\alpha))$ con n el rango de la matriz

$\text{Cond}_2(A(\alpha)) > \frac{1}{4} \cdot (20\alpha + 1) \rightsquigarrow \text{Cond}_2(A(\alpha)) > 5\alpha + 1/4$

$\text{Cond}_2(A(\alpha)) > \infty \Rightarrow \text{Cond}_2(A(\alpha)) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} +\infty$

3) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decir si A es diagonalizable
b) Hallar una descomposición de Schur para A.

a) para ver si A es diagonalizable veo si dim λ_i = dim Autovectores asociados a λ_i

saco autovalores $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) + 1]$

$\lambda = 1$ $\quad -2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = 1$

tiene autoval 1 triple, busco autovect

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = 0$ $\quad x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$

$v = (1, 1, 0)$ 1 dim

$3 \neq 1 \Rightarrow$ no es diag

b) la desc de schur $A = U \cdot T \cdot U^t$

$$T = U^t A U$$

busco T para armar mi U necesito mis autovectores ortonormalizados y ortogonales

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) El de Markov es muy largo

2do parcial 8 julio 2023

1) consideremos el sgte sist de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + y + z = 1 \\ by + z = 1 \end{cases}$$

a) Determinar todos los valores de a y b para q' el sist tenga sol única.

b) para la matriz asociada al sist dado, demostrar q' el método de Jacobi converge ⟺ G-S converge.

c) Determinar todos los valores de a y b para asegurar la convergencia de ambos métodos, cuando los 2 eligiria.

6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 0 & b & 1 & \end{array}\right) f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & \\ 0 & 1-a & 1 & \\ 0 & b & 1 & \end{array}\right)_{(1-a)f_3 - bf_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & \\ 0 & 1-a & 1 & \\ 0 & 0 & 1-a-b & \end{array}\right)$$

para q' tenga sol única $\underbrace{\begin{array}{c} 1-a-b \neq 0 \\ 1 \neq a+b \end{array}}$

b) Jacobi $T = -M^{-1} \cdot N$ $\quad M = D \quad N = L + U$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

saco autoval para ver el $\rho(T)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - b) + a(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda + a\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + b + a) = 0$$

$$\underbrace{\lambda = 0} \qquad \underbrace{\begin{array}{c} \lambda^2 = b + a \\ \lambda = \sqrt{|b+a|} \end{array}}$$

miro $\rho(T) \longrightarrow \sqrt{|b+a|} < 1$

$$|b+a| < 1$$

Jacobi converge sí $|b+a| < 1$

Ahora miro G-S

G-S converge $\Leftrightarrow \rho(T) < 1$ con $T = -M^{-1} N$ $\quad M = (L+D)$, $N = U$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{f_3 - bf_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & -b & 1 \end{array}\right) \qquad -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & b & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -ab & b \end{pmatrix}$$

saco autovalores de T

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 0 & -ab & b-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left((a-\lambda)(b-\lambda) - ab\right)$$

$\lambda = 0$

$$\cancel{ab} - a\lambda - b\lambda + \lambda^2 - \cancel{ab} = 0$$

$$\lambda(\lambda - a - b) = 0$$

$\lambda = 0$ $\qquad$ $\lambda = a + b$

$\rho(T) = |a+b| < 1$

$\Rightarrow$ Jacobi converge $\Leftrightarrow$ $\sqrt{|b+a|} < 1 \Leftrightarrow |b+a| < 1 \Rightarrow$ G-S converge

c) como mi matriz es tridiagonal, converge G-S + rápido, elijiría G-S

2) a) Probar q' el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

Una matriz es ortogonal si cumple que $U.U^t = Id$ y q $U^t.U = Id$

$\Rightarrow$ si A es ortogonal y B es ortogonal, A.B debería ser ortogonal, debería cumplir que:

$(A.B).(A.B)^t = Id$

$A.\underbrace{B.B^t}_{Id}.A^t = Id$

$A.A^t = Id$ ✓

se cumple pues A y B ⊥

$(AB)^t.(A.B) = Id$

$B^t.\underbrace{A^t.A}_{Id}.B = Id$

$B^t.B = Id$ ✓

b) Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar q' A y B tienen los mismos valores singulares $\Leftrightarrow \exists$ P y Q matrices ⊥ tq $A = PBQ$

y c) en otra hoja.

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la desc SVD de la matriz A
b) Construir una matriz B de dimensión apropiada q' satisfaga a la vez $B^t.B = A^t.A$ y $\operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0),(1,1,1,1) \rangle$

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\quad A = U.\Sigma.V^t \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Busco los autoval y autovec de $A^t.A$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)-4$$

$$6 - 7\lambda + \lambda^2$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}\right\} \text{autoval}$$

busco autovectores (columnas de V) $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} f_2 - 2f_1 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -x-2y=0 \\ x=-2y \end{matrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lo normalizo}} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} f_2 + \tfrac{1}{2} f_1 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 4x-2y=0 \\ -2y=-4x \\ y=2x \end{matrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad V^t = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

busco las columnas de U

$$u_1 = \frac{A\,v_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{30}/15 \\ \sqrt{30}/6 \\ \sqrt{30}/30 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

$$u_2 = \frac{A\,v_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{u_2}$$

Para buscar u_3 busco el nucleo de A^t

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[y+z=0 \quad z=-y]{} \begin{matrix} x-2y=0 \\ x=2y \end{matrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} -\sqrt{30}/15 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/6 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/30 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{30}/15 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/6 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{30}/30 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{V^t}$$

$B \in \mathbb{R}^{n \times 2}$

b) $\underbrace{B^t}_{2\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times 2} = \underbrace{A^t \cdot A}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$ $\qquad$ $\operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0), (1,1,1,1) \rangle$

Escribo a cada una con su SVD

Por U unit

$$(U_B \Sigma_B V_B^t)^t \cdot (U_B \Sigma_B V_B^t) = (U_A \Sigma_A V_A^t)^t \cdot (U_A \Sigma_A V_A^t)$$

$$V_B \cdot \Sigma_B^t \cdot \underbrace{U_B^t \cdot U_B}_{Id} \cdot \Sigma_B \cdot V_B^t = V_A \cdot \Sigma_A^t \cdot \underbrace{U_A^t \cdot U_A}_{Id} \cdot \Sigma_A \cdot V_A^t$$

$$V_B \cdot \Sigma_B^t \cdot \Sigma_B \cdot V_B^t = V_A \cdot \Sigma_A^t \cdot \Sigma_A \cdot V_A^t \qquad \Sigma^t \cdot \Sigma = \Sigma^2$$

$$V_B \cdot \Sigma_B^2 \cdot V_B^t = V_A \cdot \Sigma_A^2 \cdot V_A^t$$

Mi Matriz A y B tienen los mismos val sing $\Rightarrow$ los mismos autovect

$\Rightarrow B = U \cdot \Sigma \cdot V^t$ $\qquad$ como $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & \end{pmatrix}$ $\quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Col}(U)$ $\quad$ las columnas de U son la Im de B

$\operatorname{Im} B = \langle (1,1,0,0)(1,1,1,1) \rangle$ los vectores $\in \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

$\Rightarrow U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

ortonormalizo la Im B con G-S

$w_1 = u_1 = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$

$u_2 = u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle \cdot w_1$

$u_2 = (1/2; 1/2; 1/2; 1/2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$

$u_2 = (0; 0; 1/2; 1/2)$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & \overbrace{-1/\sqrt{2}}^{\text{Arbitrario}} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio del Segundo Parcial – 15 de diciembre de 2022

Ejercicio 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que el método de Gauss-Seidel converge para todo vector inicial.

(b) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que el método de Jacobi converge para todo vector inicial.
Fijado un valor de α para el cual ambos convergen ¿cuál método eligiría y por qué?

(c) (0,5 pts.) Sea $\alpha = 1$. Probar que si $x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ el método de Gauss-Seidel converge en 1 paso.

Ejercicio 2. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (1,5 pts.) Hallar la DVS de A.

(b) (1 pt.) Caracterizar geométricamente la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(x) = Ax$.

Ejercicio 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(a) (1 pt.) Calcular $Cond_2(A)$. $\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

(b) (1,5 pts.) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.

Ejercicio 4.

x	-1	0	1	2
y	-2	0	2	0

Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función tipo $f(x) = ax^3 + bx + c$.
¿Es f el Polinomio Interpolador de Lagrange? Si la respuesta es afirmativa, justificar adecuadamente. Si la respuesta es negativa, calcularlo.

1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ se quiere resolver $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) G-S $T = -M^{-1}N$ $M = (L+D)$ $N = U$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1/\alpha \\ f_2/\alpha \\ f_3/\alpha \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/\alpha \end{array}\right) f_2 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/\alpha \end{array}\right) f_3 - f_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\alpha & -1/\alpha & 1/\alpha \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 1/\alpha & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha & 1/\alpha & -1/\alpha \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 1/\alpha & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha & 1/\alpha & -1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & -1/\alpha \end{pmatrix} \text{ saco autoval } \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -\lambda & 1/\alpha \\ 0 & 0 & -1/\alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{-\lambda(-\lambda)}_{\lambda = 0}\underbrace{(-1/\alpha - \lambda)}_{\lambda = -\frac{1}{\alpha}} \qquad \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$$

$$\frac{1}{|\alpha|} < 1$$

$$1 < |\alpha| \Leftrightarrow |\alpha| > 1$$

$\Rightarrow$ G-S conv $\Leftrightarrow |\alpha| > 1$

b) Jacobi $T = -M^{-1}N$ $M = D$ $N = L+U$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & & \\ & 1/\alpha & \\ & & 1/\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow T = -\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{saco autoval } \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -1/\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2) + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$-\lambda^3 - \frac{1}{\alpha^3} = 0 \rightarrow \lambda^3 = -\frac{1}{\alpha^3} \Leftrightarrow \lambda = \left|\frac{1}{\alpha}\right|$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$$

$$1 < |\alpha| \Leftrightarrow \underline{|\alpha| > 1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T = -M^{-1}N \quad M = (L+D)$

$N = U$

$$x_{n+1} = Tx + M^{-1}b$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \text{ ii } \forall$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad U \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $V \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times3}$

Hallar la DVS

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

saco autovalores $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda)-4))$

$\lambda = 5$ $\quad -5\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda(-5+\lambda) = 0$

$\lambda = 0$ $\quad \lambda = 5$

$\sigma_1 = \sqrt{5}$ $\quad$ saco autovectores

$\sigma_2 = \sqrt{5}$

$\sigma_3 = 0$ $\quad \lambda = 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} f_3 + 2f_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -y + 2z = 0$

$y = 2z$

$v = (1, 0, 0)(0, 2, 1)$

$\lambda = 0 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} f_3 - f_2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 5\lambda = 0$ $\quad 4y + 2z = 0$

$\lambda = 0$ $\quad 2z = -4y$

$z = -2y$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad v = (0, 1, -2)$

$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underbrace{A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}$$

saco autov de $A^t A$ $\quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 72-\lambda & 0 \\ 0 & 18-\lambda \end{vmatrix} = (72-\lambda)(18-\lambda)$$

$\lambda = 72 \qquad \lambda = 18$

$\sigma_1 = 6\sqrt{2}$
$\sigma_2 = 3\sqrt{2}$

$$\text{cond}_2(A) = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\text{cond}_2(A) = 2}$$

b) $A = U \cdot \Sigma \, V^t$

$A = U \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^t \longrightarrow$ la matriz q' mejor aproxima a A de rango 1.

4)

x	-1	0	1	2
y	-2	0	2	0

$P(x) = ax^3 + bx + c$

$A^t A a = A^t b$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^3 & x & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 66 & 18 & 8 \\ 18 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 66 & 18 & 8 \\ 18 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Resolver}}$$

Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 1 de diciembre de 2022

Ejercicio 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) (1,5 pts.) Probar que el método de Gauss-Seidel converge para todo vector inicial $\Longleftrightarrow$ el método de Jacobi converge para todo vector inicial.
Fijado un valor de α para el cual ambos convergen ¿cuál método eligiría y por qué?

(b) (1 pt.) Sea $\alpha = 1$. Calcular la solución exacta de $Ax = b$ y probar que si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge en a lo sumo 1 paso para cualquier $t \in \mathbb{R}$ ¿Contradice este resultado al ítem anterior?

Ejercicio 2. Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ para la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ y cierto $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se propone el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} x_{n+1} = -\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} x_n + b$$

.

(a) (0,5 pts.) Probar que si la iteración converge a un x^* entonces x^* es solución de $Ax = b$.
(b) (1 pt.) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que el método converge para cualquier vector inicial.
(c) (1 pt.) ¿Qué condición impondrían sobre k para garantizar que exista una norma $||.||$ tal que el error e_n verifique $||e_n|| \leq (\frac{1}{4})^n ||e_0||$?

Ejercicio 3. Hallar una matriz A del tamaño adecuado que verifique simultáneamente:

$\max\limits_{||x||_2=1} \{||Ax||_2\} = 2$, $\min\limits_{||x||_2=1} \{||Ax||_2\} = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de A^tA y $A^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Se miden las concentraciones de cierto agente químico (en mg/m^3) y se obtiene la siguiente tabla :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	1	2	2

donde x se mide en horas. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función tipo $f(x) = ax + b\cos(\pi x)$ y estimar la concentración a la hora y media de comenzadas las mediciones.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

Jacobi $T = -M^{-1}N$ $M = D$, $N = L + U$

$-M^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

saco autoval $\begin{vmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\alpha^2)$

$\lambda = 0$ $\lambda^2 = 2\alpha^2$

$\lambda = \sqrt{2\alpha^2}$

$|\sqrt{2\alpha^2}| < 1$

$\sqrt{2\alpha^2} < 1$

$2\alpha^2 < 1$

$\alpha^2 < 1/2$

$|\alpha| < \sqrt{2}/2$ $\Rightarrow$ si $|\alpha| < \sqrt{2}/2 \Rightarrow$ J conv

Pruebo con G-S $T = -M^{-1}N$ $M = (L + D)$ $N = U$

$-M^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - \alpha f_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 - \alpha f_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & -\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & -2\alpha^3 & 0 \end{pmatrix}$ saco autoval $\begin{vmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 - \lambda & 0 \\ 0 & -2\alpha^3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2\alpha^2 - \lambda)(-\lambda)$

$\lambda = 0$ $\lambda = 2\alpha^2$

$\Rightarrow |2\alpha^2| < 1$

$\alpha^2 < 1/2$

$|\alpha| < \sqrt{2}/2$ $\Rightarrow$ si $|\alpha| < \sqrt{2}/2$ G-S converge

$\Rightarrow$ G-S converge $\Leftrightarrow$ J conv

Jacobi conv $\Leftrightarrow |\sqrt{2\alpha^2}| < 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < 1/2 \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow$ G-S converge

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 + x_3 = 1$

$x_2 = 1 - x_3$

$x_3 = -1$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = -1 + x_3$

$x_1 = 2$

$x_1 + 2x_2 = -1$

$-1 + x_3 + 2 - 2x_3 = -1$

$-x_3 = -2$

$x_3 = 2$

$\boxed{\text{Sol. exacta} = (1, 2, -1)}$

$$\boxed{x_{n+1} = T x_n + M \cdot b}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

Metodo Jacobi $\quad x_{n+1} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{T} \cdot x_n + \underbrace{D^{-1}}_{M} \cdot b$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{no depende de } t$$

veo si funciona

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

cumple ♡. $\Rightarrow$ converge en a lo sumo un paso $\forall t$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{M} x_{n+1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} x_n + b$$

a) si $x^* \rightsquigarrow$ es sol $\Rightarrow x^* \rightsquigarrow x$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \tilde{x} = b \quad \Rightarrow \tilde{x} \text{ es sol.}$$

b) A no es inversable $\Rightarrow$

$$M x_{n+1} = -N \cdot x_n + b$$

$$x_{n+1} = -M^{-1} \cdot N \cdot x_n + M^{-1} \cdot b$$

$$x_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} x_n + \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot b$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco autoval $\begin{vmatrix} -\lambda & -3k & 0 \\ -3k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 9k^2)$

$\lambda = 0 \qquad (\lambda - 3k)(\lambda + 3k)$

$\lambda = 3k \qquad \lambda = -3k$

$|3k| < 1$

$|k| < 1/3 \quad$ si $|k| < 1/3 \Rightarrow$ converge

c) $\|e_n\| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\|T\|^n} \cdot \|e_0\|$ quiero q' alguna $\|T\|$ me de $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ sé que $\|T\|_2 = |\rho(A)|$

$= \exists |\lambda| \leq \frac{1}{4}$

$|k| < \frac{1}{12}$

si $|k| < \frac{1}{12} \Rightarrow \exists \|\cdot\|$ tq $\|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \|e_0\|$

3) $\max\limits_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 2$ $\min\limits_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 1$

$\downarrow$ + grande c valor sing $\uparrow$ + chico valor sing

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovector de $\underbrace{A^t A}_{n\times 3 \; 3\times n}$ y $\underbrace{A^t}_{n\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{está en el núcleo } (A^t) \; 3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $N \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ \mu_1 & \mu_2 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4)

x	0	1/2	1
y	1	2	2

$A^t \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$f(x) = ax + b\cos(\pi x)$

$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & \cos(\pi x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot A \cdot a = A^t \cdot b$

$5/4\, a - b = 3$

$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} b - b = 3$

$3/2\, b = 1/2$

$b = 1/3$

$-a + 2b = -2$

$-a = -2 - 2b$

$a = 2 + 2b$

$a = 8/3$

$\boxed{\Rightarrow f(x) = \frac{8}{3} x + \frac{1}{3} \cos(\pi x)}$

1	2	3	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 27 de Mayo de 2022

Chequear

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4 y al menos un ejercicio debe estar completamente correcto.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0) \rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle (2,0,-2,0), (-2,1,0,1), (2,1,-4,1) \rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall\, v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) (1 pt.) Sea $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de $\mathrm{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

Ejercicio 2. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \quad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) (1.5 pts.) Probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\mathrm{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

¿Es necesario?

b) (1 pt.) Para $n = 10^4$, hallar la descomposición LU de A.

c) (1 pt.) Para $n = 10^4$, utilizar la descomposición LU hallada para resolver el sistema $Ax = b$ utilizando aritmética de 4 dígitos (en base 10).

d) (0.5 pt.) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = (0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ y calcular, para $n = 10^4$, el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la proy $\perp$ sobre $S = \langle (1,1,1,1)(1,2,1,0) \rangle$

$T = \quad x_1 = x_2 - x_3 \quad x_4 = x_2$

$T = \langle (1;1;0;1)(-1;0;1;0) \rangle$

$g(v) = f(v) \ \forall v \in T \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g(1,1,0,1) = f(1,1,0,1) \\ g(-1,0,1,0) = f(-1,0,1,0) \end{array} \right]$ los busco con la proy

veo si los <> de W son li

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$W = \langle (2,0,-2,0)(0,1,-2,1) \rangle$

$\left. \begin{array}{l} g(2,0,-2,0) = (2,0,1,1) \\ g(0,1,-2,1) = (0,-1,2,2) \end{array} \right] \quad g(W) = \langle (2,0,1,1)(0,-1,2,2) \rangle$

Ahora, para hacer $f(1,1,0,1)$ sobre S, tengo q' tener S ortogonal

$S = \langle \underbrace{(1,1,1,1)}_{w_1} (0,1,0,-1) \rangle$

$w_1 = v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$w_2 = v_2 - 2(1/2, 1/2, 1/2, 1/2) \Rightarrow w_2 = (0,1;0,-1)$

$\Rightarrow f(1,1,0,1) = \text{Proy}_{w_1}(1,1,0,1) + \text{Proy}_{w_2}(1,1,0,1)$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,1,0,1)}{4} \cdot (1,1,1,1) + \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1,1,0,1)}{2} \cdot (0,1,0,1)}_{\to 0}$$

$\boxed{f(1,1,0,1) = (3/4; 3/4; 3/4; 3/4)}$

$f(-1,0,1,0) = \text{Proy}_{w_1}(-1,0,1,0) + \text{Proy}_{w_2}(-1,0,1,0)$

$$\underbrace{\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1,0,1,0)}{4} (1,1,1,1)}_{\to 0} + \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1,1,0,1)}{2} \cdot (0,1,0,1)$$

$\boxed{f(-1,0,1,0) = \vec{0}}$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} g(1,1,0,1) = (3/4; 3/4; 3/4; 3/4) \\ g(-1,0,1,0) = \vec{0} \\ g(2,0,-2,0) = \vec{0} \end{array} \right.$ — no es mult

ya no cumple

$\Rightarrow$ //

1	2	3	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio del Primer Parcial – 15 de julio de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4.

Ejercicio 1. Sean $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - x_4, -\alpha x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

y los subespacios:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 = 0,\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0\} \\ T &= \langle (1,1,1,-3), (1,-1,0,0), (1,-3,-1,-3) \rangle \end{aligned}$$

a) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

b) (1 pt.) Para $\alpha = 1$, decidir si existe una transformación lineal $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(S+T) = \mathrm{Im}(f)$ y que $g(\mathrm{Nu}(f)) = (0,0,0,0)$. En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

c) (1 pt.) Para $\alpha = 1$ y considerando $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 - 2x_3, x_1)$$

decidir si $f \circ h$ es monomorfismo. En caso contrario, hallar una base de $\mathrm{Nu}(f \circ h)$

Ejercicio 2. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon & 2+\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Probar que $\mathrm{Cond}_\infty(A) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$ y deducir que $\mathrm{Cond}_2(A) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$.

b) (1 pt.) Para $\varepsilon = 0.001$, calcular la descomposición LU de A.

Pero $\|\ \|_2$?

c) (1 pt.) Para $\varepsilon = 0.001$, resolver el sistema $Ax = b$ mediante eliminación gaussiana sin pivoteo usando aritmética de punto flotante en base 10 con 3 dígitos de mantisa y sistema de redondeo.

d) (0.5 pts.) Para $\varepsilon = 0.001$, hallar la solución exacta x del sistema y calcular el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - x_4, -\alpha x_3 + x_4, x_3 - x_4)$

$f(1,0,0,0) = (2,1,0,0)$
$f(0,1,0,0) = (1,\alpha,0,0)$
$f(0,0,1,0) = (0,\alpha,-\alpha,1)$
$f(0,0,0,1) = (0,-1,1,-1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2f_2 - f_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \alpha f_4 + f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+1 \end{pmatrix}$$

si $-\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \dim Nu = 1 \Rightarrow \dim Im = 3$
$\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightsquigarrow x_2 = 0 \quad x_1 = 0 \\ \rightsquigarrow -x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 \\ \end{matrix}$$

$\boxed{Nu = \langle (0,0,1,1) \rangle}$

$Im = \{(2,1,0,0)(1,1,0,0)(0,1,-1,1)\cancel{(0,-1,1,-1)}\}$

$\Rightarrow \boxed{Im = \langle (2,1,0,0)(1,1,0,0)(0,1,-1,1) \rangle}$

$S = \quad x_1 = x_2 \qquad 2x_1 + x_3 + x_4 = 0$
$x_3 = -x_4 - 2x_2$

$\boxed{S = \langle (1;1;-2;0)(0;0;-1;1) \rangle}$

veo si T es li o ld

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & +3 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T = \langle (1,1,1,-3)(1,-1,0,0) \rangle}$$

Busco $S + T = \langle (1,1,-2,0)\underline{(0,0,-1,1)}(1,1,1,-3)(1,-1,0,0) \rangle$

$g(0,0,1,1) = \vec{0}$

$g(1,1,-2,0) = (2,1,0,0)$
$g(0,0,-1,1) = (1,1,0,0)$
$g(1,1,1,-3) = (0,1,-1,1)$
$g(1,-1,0,0) =$ comb lineal ∨ o ∧

$\rightsquigarrow$

$g(1,1,-2,0) = (2,1,0,0)$
$g(0,0,-1,1) = (1,1,0,0)$
$g(1,1,1,-3) = (0,1,-1,1)$
$g(0,0,1,1) = \vec{0}$

2) a) $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\qquad \|A\|_\infty = 7$

$\mathrm{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{7}{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = 0$

$\Rightarrow \mathrm{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$ $\qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\|A-B\| = 2\varepsilon$

$\mathrm{cond}_2(A) \geq \dfrac{1}{n} \cdot \mathrm{cond}_\infty(A)$

$\mathrm{cond}_2(A) > \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty \quad \Rightarrow \mathrm{cond}_2(A) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$

b) $A = LU$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon & 2+\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -(1+\varepsilon) & \varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -(1+\varepsilon) & \varepsilon \\ 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \rightsquigarrow L_2 \cdot L_1 \cdot A = U$$

$$A = \underbrace{L_2^{-1} \cdot L_1^{-1}}_{L} \cdot U$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -(1+\varepsilon) & \varepsilon \\ 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0{,}001 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

c) $\underbrace{A}_{L}x = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b \longrightarrow Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$
$y_2 = 0{,}1$
$-0{,}1 + y_3 = 0{,}1$ $\qquad 1 \times 10^{-4}$
$y_3 = 0{,}2$ $\qquad 0{,}0001$

$y = Ux$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0{,}001 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$0{,}2x_3 = 0{,}2$
$\underline{x_3 = 1}$

$-x_2 + 0{,}001x_3 = 0{,}1$

Álgebra Lineal Computacional - Simulacro de Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2021

Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sean $S = \{2x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_2 + x_4)$.

   $\in$ Pi

   (a) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(\mathrm{Im}(f)) = S$ y $g(\mathrm{Nú}(f)) = \mathrm{Im}(f)$.

   (b) Decidir si g es epi, mono o isomorfismo. Justificar.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$, consideramos la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostrar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.

   ej hasta acá

   (b) Hallar una matriz de permutación adecuada $\boldsymbol{P}$ y calcular la descomposición $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$.

   (c) Probar que $Cond_\infty(\boldsymbol{A}) \to \infty$ cuando $a \to 1$.

   (d) ¿Qué ocurre con $Cond_2(\boldsymbol{A})$ cuando $a \to 1$?

3. Considerar las matrices

$$\text{(a) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

   (a) Determinar en cada caso si la iteración:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|} \\ r_k = \dfrac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{v}^{(k)}} \end{cases}$$

   da como resultado una sucesión r_k convergente para algún vector inicial $\boldsymbol{v}^{(0)}$.

   (b) Para la matriz en (a), dar un subespacio S tal que r_k converja para todo $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. ¿Converge también $\boldsymbol{v}^{(k)}$ para los vectores en dicho subespacio?

   (c) Para la matriz en (b) y el vector inicial $v^{(0)} = (1, 4, 3)$, ¿existe $\lim_{k\to\infty} v^{(k)}$? ¿Y $\lim_{k\to\infty} v^{(2k)}$?

1) $S = \{ 2x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0 \}$

$x_2 = 2x_1$ $\qquad$ $x_3 = x_4$

$(x_1, 2x_1, x_3, x_3)$

$S = \langle (1,-2,0,0)(0,0,1,1) \rangle$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2 - x_4,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 + x_4,\ x_2 + x_4)$

$f(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$
$f(0,1,0,0) = (-1,-1,1,1)$
$f(0,0,1,0) = (0,1,0,0)$
$f(0,0,0,1) = (-1,0,1,1)$

$$|f| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(-1,0,1,1) = (-1,-1,1,1) - (0,1,0,0)$

$\operatorname{Im} f = \langle (0,1,0,0)(-1,-1,1,1) \rangle$

$g(0,1,0,0) = (1,-2,0,0)$

$g(-1,-1,1,1) = (0,0,1,1)$

Busco el NU f

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 + f_2 \\ f_4 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_4 + x_3 = 0$ $\qquad$ $-x_2 - x_4 = 0$

$x_1 = -x_4 - x_3$ $\qquad$ $x_2 = -x_4$

$NU = (-x_4 - x_3, -x_4, x_3, x_4) \rightsquigarrow NU = \langle (-1,-1,0,1)(-1,0,1,0) \rangle$

$g(-1,-1,0,1) = (0,1,0,0)$

$g(-1,0,1,0) = (-1,-1,1,1)$

Veo si son li

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 - f_1 \\ f_4 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} f_4 + f_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ son li $\Rightarrow$ mi tl g es $\begin{cases} g(0,1,0,0) = (1,-2,0,0) \\ g(-1,-1,1,1) = (0,0,1,1) \\ g(-1,-1,0,1) = (0,1,0,0) \\ g(-1,0,1,0) = (-1,-1,1,1) \end{cases}$

Con esto $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} f_4 + f_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} f_3 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} f_4 + f_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x_1 = 0 \\ \to x_2 = 0 \\ \to x_3 = 0 \\ \to x_4 = 0 \end{matrix}$$

NU $g = \vec{0}$ $\Rightarrow$ g es mono

$\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ g es epi $\Rightarrow$ g es iso

~~para ver si es mono el nucle tiene a ser solo el cero, como todos son LI, cuando triangule no se va ning~~

~~= no es mono, no es epi, no es iso~~

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) No admite desc lu si alguno de los det de los menores principales es cero

$1 \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$ ✓ ya no admitiría

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1-4) + 1(1) = -5 + 1 = -4 \neq 0 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} + 1\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}} - 1\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{-1 \cdot -7}$$

$$1(-a-3) - 2(2a+4) + 1(2) + (-1)(-a-3) + 1(3) + 7$$
$$-a-3-4a-8+a+a+3+3+7$$
$$-3a+2=0$$
$$-3a=-2$$
$$\underline{a = 2/3}$$ y si $a = 2/3$ amb admite desc.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ \\ f_4-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+2f_1 \\ f_4+2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} f_4+f_3$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+6 \end{pmatrix}$ $\quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 =$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$PA = LU$

$P \cdot L_1 L_2 \cdot A = U$

$P \cdot L_2 \cdot L_1 P^{-1} \cdot P \cdot A = U$

$PA = \underbrace{P^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot L_1^{-1} \cdot P}_{L} \cdot U$

c) $\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\qquad \|A\|_\infty = 8$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{es sing.}$$

$\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{8}{a-1}$ si $a \to 1$ $\Rightarrow 0 \to \infty$

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \qquad \|A-B\| = a-1$$

$\text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[a \to 1]{} +\infty$

d) $\text{cond}_2(A) \geq \dfrac{1}{n} \cdot \text{cond}_\infty(A)$

$\text{cond}_2(A) > \dfrac{1}{4} \cdot \underbrace{\dfrac{8}{a-1}}_{\to +\infty \text{ si } a \to 1} \Rightarrow \text{cond}_2(A) \xrightarrow[a \to 1]{} +\infty$

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 18 de octubre de 2022

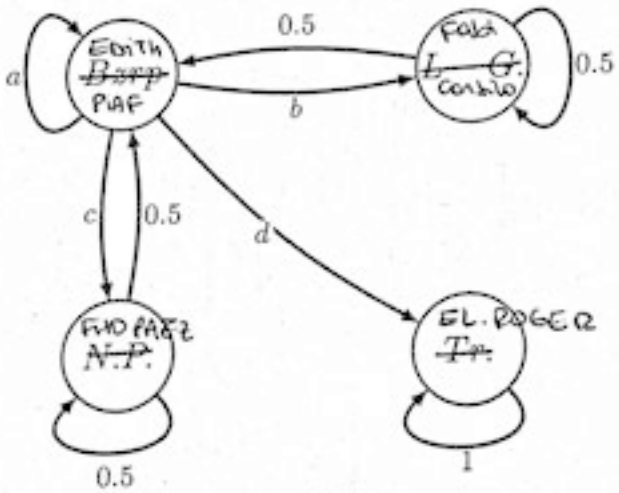
Ejercicio 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & n^2 \\ 0 & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

(a) (1,5 pts.) Probar que $Cond_\infty(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

(b) (1 pt.) Probar que $Cond_2(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

Ejercicio 2. Una aplicación para escuchar música estudia un extraño comportamiento en las elecciones musicales de sus usuaries. Cada dos minutos cambian entre ~~Trueno~~ E.R, ~~Bizarrap~~ EP, ~~Nathy Peluso~~ F.P y ~~L-Gante~~ F.C según el diagrama:



Por ejemplo, de quienes están escuchando a ~~L-Gante keloké~~ Fab. cont, en dos minutos el 50% pasará a escuchar a ~~Bizarrap~~ E.P y el otro 50% seguirá escuchando a ~~L-Gante~~ F.C.

Sabiendo que la matriz P que representa el proceso de transición es de Markov y que $v = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un estado de equilibrio,

(a) (1 pt.) Dar la matriz de transición P y determinar **si existe** P^∞.

(b) (1,5 pts.) Si en el instante inicial del estudio hay 300 usuaries escuchando ~~Bizarrap~~ EP, 100 usuaries escuchando ~~L-Gante~~ F.C y 300 usuaries escuchando a ~~Nathy Peluso~~ F.P ¿Cuántos usuaries aproximadamente estarán escuchando a ~~Nathy Peluso~~ FP a los 20 minutos?

1)

$$A_n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \cdots & n^2 \\ 0 & 1/n & & \\ & 0 & & \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots 0 & 1/n \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \frac{1}{n} + n^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & \cdots & n^2 \\ & 0 & & \\ & & 1/n & \\ 1 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 1/n & & \\ & & 0 & \\ 0 & \cdot & & 0 \end{pmatrix} \qquad \|A-B\| = \frac{1}{n}$$

a) $\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$

$\text{Cond}_\infty(A) \geq \left(\frac{1}{n} + n^2\right) \cdot n$

$\text{cond}_\infty(A) \geq \underbrace{1 + n^3}_{\substack{\to\infty \\ n\to 0}}$

b) $\text{cond}_2(A_n) > \frac{1}{n} \cdot \text{cond}_\infty(A_n)$

$\text{cond}_2(A_n) > \frac{1}{n} \cdot (1 + n^2)$

$\text{cond}_2(A_n) > \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{n}_{\to\infty} \Rightarrow \text{cond}_2(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

2) a)

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} EE & EP & FP & FC \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & d & b & 0 \\ 0 & a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & c & 0{,}5 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} EE \\ EP \\ FP \\ FC \end{array}$$

Como es de Markov, $P(N) = N$ y las col suman 1

$$\begin{pmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & c & 0{,}5 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$3 + 2d = 3$
$\underline{d = 0}$

$2a + 3/2 = 2$
$2a = 1/2$
$\underline{a = 1/4}$

$2c + 1 = 2$
$2c = 1$
$\underline{c = 1/2}$

$2b + 1/2 = 1$
$2b = 1/2$
$\underline{b = 1/4}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para ver si $\exists$ estado de eq saco los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big[(1/4-\lambda)(1/2-\lambda)^2 - 1/2\,(1/2\,(1/2-\lambda)) + 1/4\,(-1/2\,(1/2-\lambda))$$

$$= (1-\lambda)\Big[(1/4-\lambda)(1/4+\lambda+\lambda^2) - 1/2\,(1/4-1/2\lambda) + 1/4\,(-1/4+1/2\lambda)\Big]$$

$$= (1-\lambda)\Big[\cancel{1/16} + \cancel{1/4\lambda} + 1/4\lambda^2 - \cancel{1/4\lambda} - \lambda^2 - \lambda^3 - 1/8 + 1/4\lambda - \cancel{1/16} + 1/8\lambda\Big]$$

$$(1-\lambda)\Big[-1/8 + 3/8\lambda - 3/4\lambda^2 - \lambda^3\Big]$$

$\lambda = 1$ (doble) $\qquad \lambda = -1/4 \qquad \lambda = 1/2 \quad \Rightarrow \exists P^{\infty}$

Los autovectores

$\lambda = 1 \longrightarrow \langle (1,0,0,0)(0,-2,2,1) \rangle$

$\lambda = -1/4 \longrightarrow \langle (0,-3/2,1,1/2) \rangle$

$\lambda = 1/2 \longrightarrow \langle (0,0,-1,1) \rangle$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to EE \\ \to EP \\ \to FP \\ \to FC \end{matrix} \qquad \text{necesito buscar } N^{10}$$

$$v^k = \alpha\,(1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\,(1)^k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \left(\frac{-1}{4}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \eta \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Busco mis $\alpha, \beta, \gamma, \eta$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$

$-2\beta - \frac{3}{2}\gamma = 300$

$\beta = -150 - \frac{3}{4}\gamma$

$2\beta + \gamma - \eta = 300$

$2\cdot\left(-150 - \frac{3}{4}\gamma\right) + \gamma - 250 - \frac{1}{4}\gamma = 300$

$-300 - \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{4}\gamma = 550$

$-\frac{3}{4}\gamma = 850$

$\underline{\gamma = \frac{-3400}{3}}$

$\beta + \frac{1}{2}\gamma + \eta = 100$

$-150 - \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{2}\gamma + \eta = 100$

$\eta = 250 + \frac{1}{4}\gamma$

$\eta = 250 + \frac{1}{4}\cdot\frac{-3400}{3}$

$\underline{\eta = \frac{-100}{3}}$

$\beta = -150 - \frac{3}{4}\cdot\frac{-3400}{3}$

$\underline{\beta = 700}$

$$v^k = 700\,(1)^k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3400}{3}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{100}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para q' sea sim $\alpha^2 = \alpha + 2$

$0 = \alpha + 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 2$

$\alpha = -1$

Pruebo con cual me da un $\underline{\lambda = 0}$

$$\alpha = 2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda) - 4\right] - 4\left[4 - 4\lambda - 4\right] + 2\left[8 - 8 + 2\lambda\right]$$

$$(4-\lambda)(-5\lambda + \lambda^2) + 16\lambda + 4\lambda$$

$$-20\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 16\lambda + 4\lambda = 0 \qquad -\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(-\lambda + 9)$$

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad$ $\underline{\lambda = 9}$

Busco autovectores

$$\lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ 2f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 4x + 4y + 2z = 0 \\ z = -2x - 2y \end{matrix}$$

$N = (1, 0, -2)(0, 1, -2)$

$$\lambda = 9 \quad \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5f_2 + 4f_1 \\ 5f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 + 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -9y + 18z = 0 \\ \underline{y = 2z} \end{matrix}$$

$-5x + 4y + 2z = 0$

$-5x + 8z + 2z = 0$

$-5x = -10z$

$x = 2z$

$N = (2; 2; 1)$

$\Rightarrow$ B autovect $= \{(1,0,-2)(0,1,-2)(2,2,1)\}$

<u>Los ortonormalizo</u>

arranco con w_2

$w_2 = (0,1,-2) - \frac{4}{5}(1,0,-2) = \boxed{(-4/5, 1, -2/5)}$

falta ortonormalizar

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 ; w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 ; w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$w_3 = (2,2,1) - 0 - 0 \Rightarrow \boxed{w_3 = (2,2,1)}$

falta ortonormalizar

$\Rightarrow B_{ON} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; 0; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \frac{(-4/5, 1, -2/5)}{\sqrt{4/5}} \right\}$

Álgebra Lineal Computacional - Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2021 (21/5/2020)

Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sean $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por: $g(x, y, z) = (x-y, 2x+y+3z, x+z)$ y $S = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}$.
   (a) Calcular Nú(g) e Im(g)
   (b) Definir, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(S) \subset \text{Im}(g)$, $f(\text{Im}(g)) = \text{Nú}(g)$.
   (c) Para la f hallada en (b), calcular Nú(f) y decidir si f es epi, mono o iso.

2. Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Hallar el valor de α para que $dim(\text{Nú}(g)) = 1$.
   (b) Probar que $Cond_\infty(A) \to \infty$ cuando α se aproxima al valor hallado.
   (c) Para el valor de α hallado, calcular la descomposición LU de la matriz.
   (d) Para el valor de α hallado dar las matrices de los proyectores ortogonales sobre Nú(g) y sobre Nú$(g)^\perp$.

3. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   (a) determinar los autovalores y autovectores de A y determinar si la matriz es diagonalizable.
   (b) para el vector inicial $v^{(0)} = (2, 1, 4)$, determinar si la iteración
$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|}, & \text{para } k \geq 1 \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases}$$
   da como resultado una sucesión r_k convergente, y en tal caso calcular dicho límite. ¿Converge también $v^{(k)}$? ¿A qué vector? Explicar por qué.
   (c) si en cambio tomamos $v^{(0)} = (1, 1, 4)$, determinar si la iteración
$$v^{(k)} = \frac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|}, \quad \text{para } k \geq 1$$
   da como resultado una sucesión $v^{(k)}$ convergente, y en tal caso calcular dicho límite.

1) $g(x,y,z) = (x-y, 2x+y+3z, x+z)$

$$|g|_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} f_2+f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$x = y$

$z = -y$

$\boxed{Nu = \langle (1,1,-1) \rangle}$

$\boxed{Im = \langle (1,2,1)(-1,1,0) \rangle}$

$S = \{(x,y,z) \mid x-y-z=0\} \rightarrow x = y+z$

$\boxed{S = \langle (1,1,0)(1,0,1) \rangle}$

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$F(S) \subset Img \Rightarrow$ $f(1,1,0) = (1,2,1)$, $f(1,0,1) = (-1,-2,-1)$ > los mando al mismo pues no tienen q' ser iguales

$f(1,2,1) = (1,1,-1)$, $f(-1,1,0) = (1,1,-1)$ > p/q' tienen q ir al núcleo de g q' es dim 1

Veo si son LI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4+f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \\ f_4+2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $f(1,1,0) = (1,2,1) \in S$

$f(1,0,1) = (-1,-2,-1)$

$f(1,2,1) = (1,1,-1) \in Im$

$f(-1,1,0) = (1,1,-1) \rightarrow$ se mueve p/q es ld

Busco $S \cap Im \rightsquigarrow \alpha(1,2,1) + \beta(-1,1,0)$

$(\alpha-\beta, 2\alpha+\beta, \alpha)$

$S = x-y-z=0 \Rightarrow \alpha-\beta-2\alpha-\beta-\alpha = 0$

$-2\alpha-2\beta = 0$

$\alpha = -\beta$

$S \cap Img = \langle (-2,-1,-1) \rangle$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1,1,0) = (1,2,1) \\ f(1,2,1) = (1,1,-1) \\ f(-2,-1,-1) = 0 \end{cases}$ — q va al nucleo e Img

2) a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ \\ f_4-3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \\ f_4+4f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ f_4-6f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & -6\alpha-6 \end{pmatrix}$$ para q' la dim $NU(g) = 1$ $\rightarrow -6\alpha-6=0$

$-6\alpha = 6$

$\underline{\alpha = -1}$

si $\alpha = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow x_1 - x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\rightarrow -x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = x_2$

$-x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$\underline{NU = \langle (0,1,0,1) \rangle}$

b) $\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\quad \|A\|_\infty = 6$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ det = 0

$\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{6}{\alpha+1}$

$\rightarrow \infty$ si $\alpha \rightarrow -1$

$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\|A-B\| = \alpha+1$

$\rightarrow \text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\alpha \to -1]{} +\infty$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ \\ f_4-3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ f_4+4f_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ f_4-6f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = LU$

$L_2 L_1 \cdot A = U$

$A = \underbrace{L_2^{-1} \cdot L_1^{-1}}_{L} \cdot U$

$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$

a) $-x_3 = 0$ $\quad -x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ $\quad x_1 - x_2 + x_4 = 0$

$\underbrace{x_3 = 0}$ $\quad \underbrace{x_4 = x_2}$ $\quad \underbrace{x_1 = 0}$

$$\text{Nu } A = \langle (0, 1, 0, 1) \rangle$$

Matriz de Proy sobre Nu $= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\|\cdot\|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\|\cdot\|} \cdot (0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Matriz de Proy sobre $\text{Nu}(g)^{\perp} = I - P$

$$\boxed{P^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

2do Parcial 2do cuatri 2022

1) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Probar q' el método de G-S converge $\forall$ vector inicial $\Leftrightarrow$ el método de Jacobi converge $\forall$ vector inicial.
Fijado un valor de α para el cual ambos convergen ¿cuál método elegiría y porq?

b) Sea $\alpha = 1$. Calcular la sol. exacta de $Ax = b$ y probar que si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge en a lo sumo un paso para cualquier $t \in \mathbb{R}$ ¿contradice este resultado al ítem anterior?

a) G-S. $T = -M^{-1}N$ $\quad M = (L+D)$ $\quad N = U$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Saco M^{-1} =
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2 - \alpha f_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 - \alpha f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & -\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Saco autovalores y me fijo $\rho(T) < 1$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2\alpha^3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2 (2\alpha^2 - \lambda)$$

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda = 2\alpha^2$ $\qquad |2\alpha^2| < 1$

$2\alpha^2 < 1$

$\alpha^2 < 1/2$

$$\boxed{|\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Jacobi:

$T = -M^{-1}N \qquad M = D \qquad N = L + U$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$ solos autovalores $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2\alpha & 0 \\ -\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & -\lambda \end{pmatrix}$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\alpha^2\right)$$

$\lambda = 0 \qquad \lambda - \sqrt{2}\alpha = 0 \qquad \lambda + \sqrt{2}\alpha = 0$

$\lambda = \sqrt{2}\alpha \qquad \lambda = -\sqrt{2}\alpha$

$$|\sqrt{2}\alpha| < 1$$

$$\sqrt{2}\alpha < 1$$

$$\boxed{|\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\sqrt{2}|\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ G-S converge

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \qquad D = I = I^{-1} = 1$$

$$x_{n+1} = -D^{-1}\cdot(L+U)\cdot x_0 + D^{-1}\cdot b$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{una sol q' no depende de t.}}$$

Prueba q' debe ser

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \text{se cumple}$$

El metodo de Jacobi converge pero no contradice lo dicho en el ejercicio anterior pq' si $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ converge para cualquier α. No pero una vez q' nos dan α No, no importa si no se cumple α.

2) Se quiere resolver el sistema $Ax=b$ para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$ y cierto $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se propone el sgte método iterativo.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{M} x_{n+1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} x_n + b$$

a) Probar q' si la iteración converge a un $\tilde{x}$ entonces $\tilde{x}$ es solución de $Ax=b$.

b) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales q el método converge para cualquier vector inicial.

c) ¿Qué condición impondrían sobre k para garantizar que exista una norma $\|\cdot\|$ tq el error e_n verifique

$$\boxed{\|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|e_0\| \ ?}$$

a)
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \tilde{x} = b$$

$A\tilde{x} = b \Rightarrow \tilde{x}$ es sol de $Ax=b$

b) $x_{n+1} = -M^{-1} \cdot N x_n + M^{-1} b$ ← método iterativo

$$x_{n+1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \cdot x_n + \underbrace{(M^{-1}) \cdot b}_{c}$$

$$x_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{mi nueva } T} x_n + M^{-1} \cdot b$$

Saco autovalores de T

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3k & 0 \\ -3k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 9k^2)$$

$\lambda = 0$ $\quad$ $\lambda - 3k = 0$, $\lambda = 3k$ $\quad$ $\lambda = -3k$

$|3k| < 1$

$\boxed{|k| < \frac{1}{3}} \Rightarrow$ converge $\forall k$ es $|k| < \frac{1}{3}$

c) $\|e_k\| \leq \|M\|^k \cdot \|e_0\|$ quiero buscar una $\|\cdot\|_2$ de M y ρ_{M} q sea $\frac{1}{4}$

$\rho(M) < \frac{1}{4}$

$\|M\|_2 \quad \rho(M) = 3k < \frac{1}{4}$

$\exists \|\cdot\|$

si $k < \frac{1}{12} \Rightarrow \|e_k\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \|e_0\|$

$\boxed{k < \frac{1}{12}}$

3) Hallar una matriz A del tamaño adecuado q verifique simultaneamente:

$\max_{\|Ax\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 2$, $\min_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\} = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de $A^t \cdot A$

y $A^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A^t A \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$ es una columna de V

$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \sigma_1 = 2$

$\lambda_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1$

$\underbrace{A^t}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$

nucleo de A^t

$A^t = 2\times 3$

$A = 3\times 2$

$\Sigma = 3\times 2$

$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$U = 3\times 3$

$V = 2\times 2$

$\Rightarrow A = U \cdot \Sigma \cdot V^t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ u_1 & u_2 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

completo u_1 con vectores ortogonales y normalizados $\begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 2/3 \\ 2/3 & u_2 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ ← voy q normalizar

Busco u_2 con producto cruz $\rightarrow (-2/3, 2/3, 0) \times (2/3, 2/3, 1/3) \rightsquigarrow N = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/9 \\ -8/9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/9 & 2/3 \\ 2/3 & 2/9 & 2/3 \\ 0 & -8/9 & 1/3 \end{pmatrix}$ le normalizo $\rightarrow U = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1/4 & 2/3 \\ \sqrt{2}/2 & 1/4 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \frac{8}{9}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1/4 & 2/3 \\ \sqrt{2}/2 & 1/4 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) Se miden las concentraciones de cierto agente químico en (mg/m^3) y se obtiene la sgte tabla

x	0	1/2	1
y	1	2	2

donde x se mide en horas. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función $f(x) = ax + b\cos(\pi x)$ y estimar la concentración a la hora y media de comenzadas las mediciones.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t . A . a = A^t . b$$

$$A^t . A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t . b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{4}a - b = 3$$

$$\frac{5}{2}b + \frac{5}{4} - b = 3$$

$$\frac{3}{2}b = \frac{7}{4}$$

$$b = \frac{7}{6}$$

$$-a + 2b = -1$$

$$a = 2b + 1$$

$$a = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{10}{3}x + \frac{7}{6}\cos(\pi x)$$

hora y media = 1,5 $\quad f(1,5) = \frac{10}{3} . (1,5) + \frac{7}{6} . \cos(1,5 . \pi)$

$$\boxed{f(1,5) = 5}$$

Rec 2do parcial 2do cuatri 2022

1) Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tq el método de G-S converge $\forall x_0$ inicial

G-S $\quad T = -M^{-1} N \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Necesito $M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 : \alpha \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ f_2 - f_1 \\ \\ \end{array}$

$-\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1/\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ : \alpha \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ f_3 - f_2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1/\alpha^2 & -1/\alpha & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ : \alpha \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\alpha^3 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha \end{array}\right)$

$\Rightarrow \quad -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 1/\alpha^2 & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha^3 & 1/\alpha^2 & -1/\alpha \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^3 \end{pmatrix}$ solo autovalores

$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -\lambda & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^3 - \lambda \end{vmatrix} \rightsquigarrow (-\lambda)(-\lambda)\left(-\frac{1}{\alpha^3} - \lambda\right)$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{\alpha^3}$

$\left|\frac{-1}{\alpha^3}\right| < 1$

$\frac{1}{|\alpha^3|} < 1$

$1 < |\alpha^3|$

$\underline{|\alpha| > 1}$

b) Idem pero para Jacobi

$T = -M^{-1} N \quad M = D \quad N = (L+U) \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad -M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1/\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$

solo autovalores

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & -1/\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = 0 \qquad \left|\frac{-1}{\alpha^3}\right| < 1$$

$$-\lambda^3 - \frac{1}{\alpha^3} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\alpha^3} \qquad \frac{1}{|\alpha^3|} < 1$$

$$\underline{|\alpha| > 1} \Leftarrow 1 < |\alpha|$$

si $\alpha = 2$

$\rho(T_J) = \frac{1}{8}$ $\qquad \rho(T_{GS}) = \frac{1}{8}$

c) sea $\alpha = 1$. Probar q' si $x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ el método de G-S converge en 1 paso.

$$x_{n+1} = \underbrace{-(L+D)^{-1} \cdot U}_{-M^{-1} \cdot N} x_n + (L+D)^{-1} \cdot b$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{una sol}}$$

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \underline{\text{se cumple}} \quad ☺$$

2) siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad U \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad V \in \mathbb{R}^{3\times3}$

a) Hallar la SVD de A

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

saco autovalores y autovectores

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left((4-\lambda)(1-\lambda) - 4\right) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$ $\qquad -5\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda(-5+\lambda)$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = 5$

saco autovectores

$\lambda = 5$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $-y + 2z = 0$ $\quad 4z - 4z = 0$ ← variable libre

$y = 2z$ $\quad 0 = 0$

$= (x, 2z, z) \rightsquigarrow x(1,0,0) + z(0,2,1)$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $x = 0$ $\quad 4y + 2z = 0$

$z = -2y$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$u_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} \rightsquigarrow u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = u_1$

$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$

Para sacar u_3, busco $N(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad x = 0$

$2/\sqrt{5}\, y + 1/\sqrt{5}\, z = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad z = -2y$

$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Hallar la matriz de rango 1 q' mejor aproxima a A en $\|\cdot\|_2$

$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{2\times 3}$ } forma reducida

sea

el

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Calcular $\text{cond}_2(A)$

b) Hallar la matriz de rango 1 q' mejor aproxima a A en $\|\cdot\|_2$

a) $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_2(A)}$

Para hallar A multiplico $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}}$

busco $A^t A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ saco autovalores

$\begin{pmatrix} 72-\lambda & 0 \\ 0 & 18-\lambda \end{pmatrix} = (72-\lambda)(18-\lambda) \Rightarrow \lambda = 72 \quad \lambda = 18$

$\sigma_1 = 6\sqrt{2} \quad \sigma_2 = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = \dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \boxed{2}$

b) Busco autovect

$\lambda = 72 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -54 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = a \\ y = 0 \end{matrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 18 \quad \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = a \end{matrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$u_1 = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{6\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

4) Se quiere aproximar

x	0	1	2	4
y	1/2	2	9/2	21

usando la familia de funciones $\{x^2, 2^x\}$

$f(x) = \alpha x^2 + \beta 2^x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \qquad A^t \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 265 & 274 \\ 274 & 277 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 9/2 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 355 \\ 358,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 265 & 274 \\ 274 & 277 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 355 \\ 358,5 \end{pmatrix}$$ despejo y listo

5)

año	0	1	2	3	4	5	6
#ind	216	219	287	303	438	556	681

$g(x) = d_0 e^{d_1 x}$

1EROS PARCIALES

PARCIAL 18 de Oct 2022

1) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \cdots & n^2 \\ 0 & 1/n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$$

a) Probar q $\text{cond}_\infty(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

$\|A_n\|_\infty = \left(\frac{1}{n} + n^2\right)$

b) Probar q $\text{cond}_2(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$

a) $\text{cond}_\infty(A_n) \geq \dfrac{\|A_n\|_\infty}{\|A - B\|_\infty}$ Busco un B q sea singular

$$B = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \cdots & n^2 \\ 0 & & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 1/n \end{pmatrix}$$ es singular ya tiene col de 0

$\text{cond}_\infty(A_n) \geq \left(\frac{1}{n} + n^2\right) \cdot n$

$\text{cond}_\infty(A_n) \geq 1 + n^3$

$\underline{\text{cond}_\infty(A_n) \geq \infty}$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1/n & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \|A - B\| = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \text{cond}_\infty(A_n) \to \infty$ cuando $n \to +\infty$

b) $\text{cond}_2(A_n) \geq \frac{1}{n} \text{cond}_\infty(A_n)$

$\text{cond}_2(A_n) \geq \frac{1}{n} \cdot (1 + n^3)$

$\text{cond}_2(A_n) \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\infty} + \underbrace{n^2}_{\infty}$ $\Rightarrow \text{cond}_2(A_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para q' A sea simetrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

b) Para el valor de α hallado en (a), dar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada con autovectores de A.

Pto 3 sec simetrica

$\alpha^2 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ $\quad \alpha = 2$, $\alpha = -1$

me fijo cual me da un $\lambda = 0$

si $\alpha = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ solo autoval $$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|1-\lambda|\left((4-\lambda)(1-\lambda)-4\right) - 4\left(4(1-\lambda)-4\right) + 2\left(8-2\right)$

$(4-\lambda)(-5\lambda+\lambda^2)+16\lambda+4\lambda$

$-20\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 20\lambda =$

$9\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(9-\lambda)$

$\lambda = 0$ $\quad \lambda = 9$

Da $\lambda = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

saco autovectores y autoval

si $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - f_1 \\ 2f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$4x + 4y + 2z = 0$

$z = -2x - 2y$

$v = (1, 0, -2)(0, 1, -2)$

$\hookrightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

si $\lambda = 9$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5f_2 + 4f_1 \\ 5f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} f_3 + 2f_2 \quad \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-9y + 18z = 0$

$-9y = -18z$

$y = 2z$

$-5x + 8z + 2z = 0$

$-5x = -10z$

$x = 2z$

$v = (2, 2, 1)$

$\Rightarrow N_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad N_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad N_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

tengo q' usar G.S.

$w_1 = N_1$

$$w_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$w_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{4\sqrt{5}}{25}, 0, \frac{-8\sqrt{5}}{25}\right) = \left(\frac{-4\sqrt{5}}{25}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{16}{25}\right)$$

$$w_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) + \frac{4\sqrt{5}}{15}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{11\sqrt{5}}{15}\cdot\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$w_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) + \left(\frac{4}{15}, 0, \frac{-8}{15}\right) + \left(0, \frac{11}{15}, \frac{-22}{15}\right)$$

$$w_3 = \left(\frac{14}{15}, \frac{14}{15}, -\frac{1}{15}\right) \; ?$$

$$\text{Bon} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-4\sqrt{5}}{25}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{16}{25}\right)\left(\frac{14}{15}, \frac{14}{15}, -\frac{1}{15}\right)\right\}$$

4) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\times10^{-3} \\ 1 & 1\times10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y sea $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ NO ENTRA

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ con aritmetica de punto flotante de base 10 de dos dígitos de mantisa y redondeo. Si $\hat{x}$ es la sol q' da la máquina y $\hat{b} = A\hat{x}$ (exacto) se requiere que $\|\hat{b} - b\|_\infty < 1\times10^{-2}$

a) Mostrar q' si se resuelve con eliminación gaussiana

$a = 1$ $\quad f(1,-1,1) = (1,1,1)$

$f(1,-1,2) = (1,-1,2)$

$f(1,-1,-2) = (1,-1,-2) \rightarrow L_i$

$S = \langle (1,-1,1)(1,-1,2) \rangle \quad W^P = \langle (1,1,0) \rangle$

Rec 1er Parcial 2022

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor de α para q' A no admita desc LU.
b) Para el valor de α hallado en el ítem anterior, hallar una matriz de permutación P adecuada y calcular la desc $PA = LU$

para q' A no admita desc LU el $\det(A(1:k), A(1:k)) \neq 0$

$\det 1 \neq 0$ ✓

$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$ ✓

$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = 1(2\alpha - 1) + 2(-2\alpha - 1) + 1(-2 - 2)$

$2\alpha - 1 - 4\alpha - 2 - 4$

$-2\alpha - 7 = 0$

$-2\alpha = 7$

$\alpha = -7/2$ si $\alpha = -7/2 \Rightarrow$ no LU

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -7/2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 + 2f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - 2f_1 \end{matrix}$

PA LU
no triangular

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & +7 & 1 \\ 0 & 3 & -9/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} f_3 + \frac{3}{2} f_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no se puede hacer desc. LU.

MATRIZ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P.A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ahí sí puedo hacer LU.

$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$

$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2^{-1} \cdot L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$P.L_2.L_1.A = U$

$P.L_2.L_1.P^{-1}.P.A = U$

$PA = \underbrace{P^{-1}.L_2^{-1}.L_1^{-1}.P}_{L}.U$

$\underbrace{P^{-1}}_{\text{fila}}.L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la sgte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,64 & 0 & 9,02 \end{pmatrix}$$

a) Mostrar q' A es def ⊕ y calcular su desc de cholesky.

para q' sea def ⊕ tengo q' siguiente $\det((1:k)(1:k)) > 0$

$\det 4 > 0$ ✓

$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$ ✓

$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,64 & 0 & 9,02 \end{pmatrix} = 36,28 + 3,28 > 0$ ✓

Calculo cholesky $A = L \cdot L^t$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{L \text{ Δ inf}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{L \text{ Δ sup}}$$

$2a_{11} = 4$ $\quad$ $\underbrace{a_{11} = 2}$

$a_{11} \cdot a_{12} = 0$ $\quad$ $\underbrace{a_{12} = 0}$

$a_{11} a_{13} = 1,64$ $\quad$ $\underbrace{a_{13} = 0,82}$

$a_{11} \cdot a_{21} = 0$ $\quad$ $\underbrace{a_{21} = 0}$

$a_{11} \cdot a_{21} + a_{22}^2 = 1$ $\quad$ $\underbrace{a_{22} = \pm 1}$

$a_{21} a_{13} + a_{22} a_{23} = 0$ $\quad$ $\underbrace{a_{23} = 0}$

$a_{31} \cdot a_{11} = 1,64$ $\quad$ $\underbrace{a_{31} = 0,82}$

$a_{31} \cdot a_{12} + a_{32} \cdot \overbrace{a_{22}}^{=1} = 0$ $\quad$ $\underbrace{a_{32} = 0}$

$a_{31} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} + a_{33}^2 = 9,02$ $\quad$ $a_{33}^2 = 3,6$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,82 & 0 & 3,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6 \end{pmatrix}$$

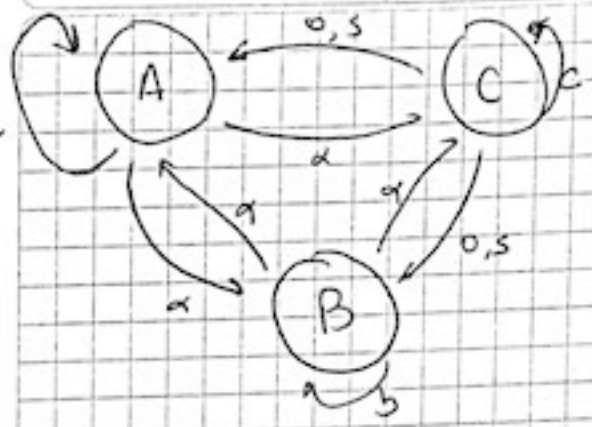
b) utilizar la desc. obt para resolver $AX = b$ con $b = (4, -1, 1, 6)$

$AX = b$

$L \cdot \underbrace{L^t X}_{y} = b \rightarrow L y = b$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 3,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1,6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ \end{pmatrix}$

a



a) Hallar P completando las transiciones faltantes y donde todos los posibles valores de A

b) Hallar α para q N = (2/5 ; 2/5 ; 1/5) sea E.q

c) Para α = 1/4, calcular cuantos navegantes se estima q' habrá en cada página a largo plazo si inicialmente había 5000 en la pag A y ninguno en los restantes

a)

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & \alpha & 0,5 \\ \alpha & b & 0,5 \\ \alpha & \alpha & c \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

Para q sea de Markov las columnas deben sumar 1

$\Rightarrow$ $a + 2\alpha = 1$ $\quad$ $2\alpha + b = 1$ $\quad$ $1 + c = 1$

$\alpha = \frac{1-a}{2}$ $\quad$ $\alpha = \frac{1-b}{2}$ $\quad$ $c = 0$

a y b son iguales

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & \frac{1-a}{2} & 0,5 \\ \frac{1-a}{2} & a & 0,5 \\ \frac{1-a}{2} & \frac{1-a}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \frac{1-a}{2}$

$2\alpha = 1 - a$

$-2\alpha + 1 = a$ $\longrightarrow$ como tienen q estar entre 0 y 1

$0 \leq 1 - 2\alpha \leq 1$

$-1 \leq -2\alpha \leq 0$

$1 \geq \alpha \geq 0$

$\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$

b) $P \cdot N = N$

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & 1/2 \\ \alpha & a & 1/2 \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$2/5\,a + 2/5\,\alpha + 1/10 = 2/5$

$2/5\,a + 2/5\,\alpha = 3/10$

$\alpha = 3/4 - a$

$a = 1/2$

$2/5\,\alpha + 2/5\,a + 1/10 = 2/5$

$3/10 - 2/5\,a + 2/5\,a + 1/10 = 2/5$ ✓

$4/5\,\alpha = 1/5$

$\alpha = 1/4$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad N_0 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Me pide N^k.

saco autovalores

$$\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = (1/2-\lambda)\cdot\left[\left((1/2-\lambda)(-\lambda) - 1/8\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(-1/4\lambda - 1/8\right) + 1/4\left(1/8 - 1/2(1/2-\lambda)\right)\right]$$

$$= (1/2-\lambda)\left[-1/2\lambda + \lambda^2 - 1/8 + 1/16\lambda + 1/32 + 1/4\left(-1/8 + 1/2\lambda\right)\right]$$

$$(1/2-\lambda)\left(-\frac{7}{16}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{32} - \frac{1}{32} + \frac{1}{8}\lambda\right)$$

$$(1/2-\lambda)\left(-\frac{5}{16}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{32}\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{16} + \frac{5}{16}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{8}$$

$$= -\frac{1}{32}\lambda + \frac{13}{16}\lambda^2 - \frac{1}{16} - \lambda^3 = 0$$

a alguna cuestión le pide.

los autovalores son: $\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = \frac{1}{4}$ $\quad \lambda_3 = -\frac{1}{4}$

$$N^k = \alpha \cdot 1^k \cdot (N_1) + \beta \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot (N_2) + \gamma \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot (N_3)$$

$\Rightarrow$ como me pide a largo plazo me pide $N^\infty = 0$ $\frac{1}{4}$ y $-\frac{1}{4}$ mueren.

$\Rightarrow N^k = \alpha \cdot 1 \cdot (N_1)$ saco autovector.

si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 + 1/2 f_1 \\ f_3 + 1/2 f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -3/8 & 3/4 \\ 0 & 3/8 & -3/4 \end{pmatrix} f_3 + f_2$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -3/8 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-3/8y + 3/4z = 0$

$-3/8y = -3/4z$

$y = +2z$

$-1/2x + 1/2z + 1/2z = 0$

$-1/2x = -z$

$x = 2z$

$$N = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el de $\lambda = \frac{1}{4} = (-1, 1, 0)$

$\lambda = -1/4 = (1, 1, -2)$

$$v^0 = \alpha\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5000\\0\\0\end{pmatrix}$$

$2\alpha - \beta + \gamma = 5000$
$4\gamma - \beta + \gamma = 5000$
$5\gamma - 5000 = \beta$
$\beta = -1875$

$2\alpha + \beta + \gamma = 0$
$2\gamma + 5\gamma - 5000 + \gamma = 0$
$8\gamma = 5000$
$\gamma = 625$

$\alpha - 2\gamma = 0$
$\alpha = 2\gamma$
$\alpha = 1250$

$$\Rightarrow v^k = 1250 \cdot 1^k \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - 1875 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 625 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$v^\infty = 1250\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - 1875 \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^\infty}_{\to 0}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\to 0} + 625 \cdot \underbrace{\underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)^\infty}_{\to 0} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\to 0}$$

$$\boxed{v^\infty = \begin{pmatrix}2500\\2500\\1250\end{pmatrix}}$$

Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & n & 5n\\1 & 3n & 3n\\1 & n & 2n\end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix}2n/3\\2n/3\\n/3\end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Probar que $\exists$ una constante $c > 0$ tq $\text{cond}_\infty(A) \geq cn$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y deducir q' $\text{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

$\text{cond}_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} \geq cn$ $\quad \|A\|_\infty = 1 + 6n$ $\quad$ cuando $n \to \infty$ $\Rightarrow cn \cdot (1+6n) = cn + 6cn^2$

Busco una b singular tq $\frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} \to +\infty$

$\text{cond}_\infty(A) \geq \frac{(1+6n)}{1} \geq cn$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}0 & n & 5n\\0 & 3n & 3n\\0 & n & 2n\end{pmatrix}$$

$\text{cond}_\infty(A) \geq 1 + 6n \geq cn$

$$A - B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \|A-B\|_\infty = 1$$

$\Rightarrow \underline{c = 6}$

$\text{cond}_\infty(A) \geq 6n$ cuando $n \to \infty$.

Considerar la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

Mostrar q' es def ⊕ y calcular su desc de Cholesky.

para q' sea def positiva, a det de los menores principales >0

$\det 4 > 0$

$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} > 0$

$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} > 0$ ✓

Cholesky $A = L \cdot L^t$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{11}^2 = 4$
$\underline{a_{11} = 2}$

$a_{11} \cdot a_{12} = 2$
$\underline{a_{12} = 1}$

$a_{32} \cdot a_{13} = -2$
$\underline{a_{13} = -1}$

$a_{21} \cdot a_{11} = 2$
$\underline{a_{21} = 1}$

$a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2 = 5$
$1 \quad a_{22}^2 = 4$
$\underline{a_{22} = 2}$

$a_{21} \cdot a_{13} + a_{22} a_{23} = 5$
$-1 + 2 a_{23} = 5$
$\underline{a_{23} = 3}$

$a_{31} \cdot a_{11} = -2$
$\underline{a_{31} = -1}$

$a_{31} \cdot a_{12} + a_{32} \cdot a_{22} = 5$
$-1 + 2 a_{32} = 5$
$\underline{a_{32} = 3}$

$a_{31} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{33} + a_{33}^2 = 11$
$1 + 9 + a_{33}^2 = 11$
$\underline{a_{33} = 1}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^t}$$

) Para $n \geq 3$ considerar

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & & & & 0 & 0 & 0 \\ n-2 & n-2 & n-2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-1 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Probar q' $\text{cond}_1(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$

recordar que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Probar que $\text{cond}_2(A_{20}) \geq 10$

a) $\text{cond}_1(A_n) = \frac{\|A_n\|_1}{\|A - B\|_1}$ $\qquad \|A_n\|_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} \text{Idem} & 0 \end{pmatrix}$

$\|A - B\| = 1$

$\rightarrow \text{cond}_1(A_n) = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} \infty}$ ✓

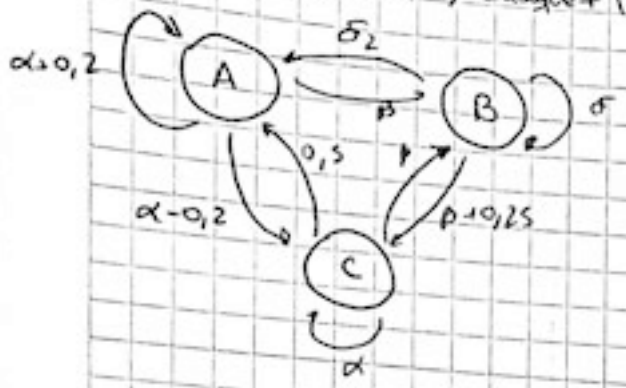
b) $\frac{1}{n} \text{cond}_1(A_{20}) \leq \text{cond}_2(A_{20})$

$\frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \leq \text{cond}_2(A_{20})$

$\frac{n+1}{2} \leq \text{cond}_2(A_{20})$ como $n = 20$

$\frac{21}{2} \leq \text{cond}_2(A_{20})$ ✓

4) Futbol (A), Basquet (B), tenis (C).



Cambian cada 1 minuto.

a) Hallar la matriz de transición P y calcular sus autovalores.

b) Inicialmente hay 300 esp mirando futbol, 300 basket y 600 tenis. Luego de 5 min cuantos miran futbol? ¿y luego de 8 la de tenis?

c) Decidir si $\exists P^{\infty}$. En caso afirm calcularlo y hallar el estado límite del est. inicial corresp al item b.

a)
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha+0,2 & \delta^2 & 0,5 \\ \beta & \delta & \beta \\ \alpha-0,2 & \beta+0,25 & \alpha \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

$\alpha+0,2+\beta+\alpha-0,2=1$
$2\alpha+\beta=1$
$\beta=1-2\alpha$
$\underline{\beta=0}$

$\delta^2+\delta+\cancel{\beta}+0,25=1$
$\delta^2+\delta-0,75=0$
$\boxed{\delta_1=1/2}$
$\delta_2=-3/2$

$\beta+\alpha+0,5=1$
$1-2\alpha+\alpha=0,5$
$-\alpha=-0,5$
$\underline{\alpha=0,5}$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0,7-\lambda & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,5-\lambda & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,5-\lambda \end{pmatrix}=(0,5-\lambda)\left((0,7-\lambda)(0,5-\lambda)-0,15\right)$$

$\lambda=\frac{1}{2}$ $\quad (0,35-0,7\lambda-0,5\lambda+\lambda^2-0,15)$

$(0,2-1,2\lambda+\lambda^2)=0$

$\lambda=1$
$\lambda=1/5$

b) $$N^0=\begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Est} \lim V^k=\alpha\cdot 1^k\cdot\begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix}+\beta\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k\begin{pmatrix} v_2 \end{pmatrix}+\gamma\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\begin{pmatrix} v_3 \end{pmatrix}$$

solo los autovectores

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -0,3 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & -0,5 \end{pmatrix} f_3 + f_1 \quad \begin{pmatrix} -0,3 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} f_3 + f_2$$

$$\begin{pmatrix} -0,3 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} -0,5y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -0,3x + 0,5z &= 0 \\ 0,3x &= 0,5z \\ x &= 5/3\, z \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 1/5$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,3 \end{pmatrix} f_3 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \end{pmatrix} \quad y = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -0,2x - 0,2z &= 0 \\ 0,2x &= -0,2z \\ x &= -z \end{aligned}$$

Si $\lambda = 1/2$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 0,3x + 0,25y &= 0 \\ y &= -6/5\, x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,2x - 0,3x + 0,5z &= 0 \\ 0,2z &= 1/5\, x \end{aligned}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim V^k = \alpha \cdot 1^k \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$-6/5\,\gamma = 300 \qquad \gamma = -250$$

$$\alpha + \beta - 50 = 300 \qquad \alpha = 350 + \beta \qquad \alpha = 200$$

$$\frac{1750}{3} + \frac{5}{3}\beta - \beta - 250 = 300 \qquad \frac{2}{3}\beta = -\frac{100}{3} \qquad \beta = -50$$

$$\boxed{\Rightarrow V^k = 200 \cdot 1^k \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 50 \left(\frac{1}{5}\right)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 250 \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}}$$

$$V^5 = 300 \cdot 1 \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{125} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{125}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$V^5 = 492$ personas van a mirar fútbol

c) Si $\exists P^\infty$ pues ningún autoval es $\lambda = -1$

$\Rightarrow$

$$P^\infty = C \cdot D^\infty \cdot C^{-1}$$

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6/5 \\ 1 & 1 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1^\infty & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^\infty & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^\infty \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6/5 \\ 1 & 1 & 1/5 \end{pmatrix}^{-1}$$

4) Sea $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$P = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 1 \\ b & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales P resulta una matriz de Markov y, para los valores hallados, determinar todos los estados de equilibrio

b) Sean a y b los hallados en el ítem (a). Determinar si $\exists$ estado límite para los sgtes estados iniciales.

i) $N_0 = (3/6;\ 1/6;\ 2/6)$ $\quad \exists P^\infty$?

ii) $N_0 = (3/8;\ 3/8;\ 2/8)$

a) $2a + b = 1$ $\quad 2a + 2b = 1$ $\quad$ x ser de Markov

$b = 1 - 2a$ $\quad 2a + 2 - 4a = 1$

$b = 0$ $\quad -2a = -1$

$a = 1/2$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calc autovalores $\det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1/2 - \lambda)[\lambda^2 - 1]$

$\underline{\lambda = 1/2}$ $\quad \underline{\lambda = \pm 1}$

P.eq = combinal de autovect de autoval 1

saco autovalores

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = f_1} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 = f_2} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-1/2 x = 0$ $\quad -y + z = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = 0$ $\quad y = z$

$\Rightarrow p_{eq} = \underbrace{v^k = \alpha \cdot 1^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\quad p^\infty \nexists$ pq $\lambda = -1$ oscila.

b) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad N_0 = \begin{pmatrix} 3/6 \\ 1/6 \\ 2/6 \end{pmatrix}$

Tengo q' sacar autovectores: $N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\lambda = -1$) $\quad N_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($\lambda = 1/2$)

$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/6 \\ 1/6 \\ 2/6 \end{pmatrix}$ $\quad -3\gamma = 3/6$, $\gamma = -1/6$

$\alpha + \beta - 1/6 = 1/6$ $\quad 1/3 - \beta - \beta + 2\gamma = 2/6$

$\alpha = 1/3 - \beta$ $\quad -2\beta = 2/6$

$\alpha = 1/2$ $\quad \beta = -1/6$

$\Rightarrow v^k = \frac{1}{2} \cdot 1^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \underbrace{(-1)^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{oscila}} - \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\to 0} \Rightarrow \nexists\, v^\infty$

hago lo mismo con el otro autovector.

$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$ $\quad -3\gamma = 3/8$, $\gamma = -1/8$

$\alpha + \beta - 1/8 = 3/8$ $\quad 1/2 - \beta - \beta - 1/4 = 3/8$

$\alpha = 1/2 - \beta$ $\quad -2\beta = 0$

$\alpha = 1/2$ $\quad \beta = 0$

$\Rightarrow v^k = \frac{1}{2} \cdot 1^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot (-1)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\, v^\infty$

∞

Hallar descom LU de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2-4f_1 \\ f_3+2f_1 \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 7 & 17 \end{pmatrix}}_{U} \qquad L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P.L_1.A = U \rightsquigarrow \underline{PA = LU} \rightarrow$ queso.

$P.L_1.P^{-1}.P.A = PU \qquad P^{-1}=P \qquad L_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$PA = \underbrace{P^{-1}.L_1^{-1}.P}_{L}.\underbrace{PU}_{U}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}}_{U} \qquad = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}$$

2) Sea la sgte matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon & 2+\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

a) Probar que $\text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$ y deducir q' $\text{cond}_2(A) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$

$\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\qquad \|A\|_\infty = 2+|3-\varepsilon|+|2+\varepsilon| \Rightarrow \|A\|_\infty = 7$ $\quad \varepsilon\to 0$

busco B singular tq me quede algún ε solo

$\text{cond}_\infty(A) \geq \underbrace{\dfrac{7}{\underbrace{2\varepsilon}_{\to 0}}}_{\to\infty}$ $\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$ $\qquad \|A-B\| = 2\varepsilon$

$\text{cond}_2(A) \geq \dfrac{1}{n}.\text{cond}_\infty(A)$

$\text{cond}_2(A) \geq \underbrace{\dfrac{1}{3}.\dfrac{7}{\underbrace{2\varepsilon}_{\to 0}}}_{\to\infty} \Rightarrow \text{cond}_2(A) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$

Hallar la desc. de Schur

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Busco autoval $= \begin{vmatrix} 13-\lambda & 8 & 8 \\ -1 & 7-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$

$= (13-\lambda)\left[\left((7-\lambda)^2 - 4\right)\right] + \left(8(7-\lambda)+16\right) - 1\left(-16 - 8(7-\lambda)\right)$

$(13-\lambda)(45 - 14\lambda + \lambda^2) + (72 - 8\lambda) + 72 - 8\lambda$

$585 - 182\lambda + 13\lambda^2 - 45\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 + 144 - 16\lambda$

$729 - 243\lambda + 27\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \rightarrow \underline{\lambda = 9}$ autovalor triple

$A = UTU^*$ $\quad U^* = U^{-1}$

$T = U^* . A . U$

Busco autovectores

$\lambda = 9$ $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4f_2 + f_1 \\ 4f_3 + f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 4x + 8y + 8z = 0$

$4x = -8y - 8z$

$x = -2y - 2z$

$v = (-2y-2z ; y ; z) \rightarrow v = \langle \underbrace{(-2, 1, 0)}_{v_1} \underbrace{(-2, 0, 1)}_{v_2} \rangle$

1º ortonormalizo $= \underbrace{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{5}} ; 0\right)}_{v_1} \underbrace{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}} ; 0 ; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{v_2}$

$w_1 = v_1$

$w_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} ; 0 ; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{4}{5} . \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{5}} ; 0\right) = \left(\frac{8\sqrt{5}}{25} ; \frac{-4\sqrt{5}}{25} ; 0\right)$

$w_2 = \left(\frac{-18\sqrt{5}}{25} ; \frac{4\sqrt{5}}{25} ; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Saco el 3ero con prod cruz

$U = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -18\sqrt{5}/25 & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/25 & 2/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ \frac{-18\sqrt{5}}{25} & \frac{4\sqrt{5}}{25} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5} ; \frac{2}{5} ; \frac{2}{5}\right)$

3/5

$T = U^t A U$

$$T = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -15\sqrt{5}/25 & 4\sqrt{5}/25 & 1/\sqrt{5} \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 3 & 8 \\ -1 & -7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -18\sqrt{5}/25 & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/25 & 2/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$$

2) Sea $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la tl dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor de α para q' $(\dim Nu(g)) = 1$

b) Probar q' $\text{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando α se aprox al valor hallado

c) Para el valor de α hallado, calcular la desc LU de la matriz

d) Para el valor de α hallado, ~~calcular la desc~~ dar las matrices de las proy ortogonales sobre $Nu(g)$ y sobre $Nu(g)^\perp$

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ \\ f_4-3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+f_2 \\ f_4+4f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} f_4-6f_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & -6\alpha-6 \end{pmatrix}$$

si $-6\alpha-6=0$
$-6\alpha=6$
$\alpha=-1$ $\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \dim Nu(g)=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} -b+d=0 \\ +c=0, \quad d=b \end{matrix} \to a-b+b=0, \quad a=0$$

$Nu(g) = \langle (0;1;0;1) \rangle$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\|A\|_\infty = 7$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es singular

$\Rightarrow \text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $A-B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\|A-B\|_\infty = \alpha+1$

$\text{cond}_\infty(A) \geq \dfrac{7}{\underbrace{\alpha+1}_{\to 0}} \to \infty$ $\Rightarrow \text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\alpha \to -1]{} \infty$

~~Problema~~

~~1) Determinar para las cuales operaciones son lineales,~~

c) $A = LU$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \cdot L_1 \cdot A = U \Rightarrow A = L_2^{-1} \cdot L_1^{-1} \cdot U$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Sean $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la tl dada por $g(x,y,z) = (\overset{x}{x-y}, \overset{y}{2x+y+3z}, \overset{z}{x+z})$ y $S = \{(x,y,z) : x-y-z=0\} \rightsquigarrow x = y+z$

$\boxed{S = \langle (1,1,0)(1,0,1) \rangle}$

a) Calcular $Nu(g)$ e $Im(g)$

b) Definir si es posible una tl $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $f(S) \subset Im(g)$, $f(Im(g)) = Nu(g)$

c) para la f hallada en b, calcular $Nu(f)$ y decir si f es epi, mono o iso

a) calculo $Im(g)$ = $g(1,0,0) = (1,2,1)$
$g(0,1,0) = (-1,1,0)$
$g(0,0,1) = (0,3,1)$

$$g = \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$Nu(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3y + 3z = 0 \qquad x - y = 0$
$z = -y \qquad x = y$

$\boxed{Nu(g) = \langle (1,1,-1) \rangle}$

me fijo para $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} f_2 + f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Im(g) = \langle (1,2,1)(-1,1,0) \rangle}$

Busco $S \cap \operatorname{Im} g$

$S = x - y - z = 0$ $\qquad \operatorname{Im} g = \langle (1,2,1)(-1,1,0) \rangle$

$\operatorname{Im} g = \alpha(1,2,1) + \beta(-1,1,0)$

$= (\underbrace{\alpha-\beta}_{x}, \underbrace{2\alpha+\beta}_{y}, \underbrace{\alpha}_{z}) = (-2\beta, -\beta, -\beta)$

$\alpha - \beta - 2\alpha - \beta - \alpha = 0$

$-2\beta - 2\alpha = 0$

$-2\alpha = 2\beta$

$\alpha = -\beta$

$\boxed{(-2,-1,-1)}$

$\cap$

S y $\operatorname{Im} g$

$\operatorname{Im} \cap S \leftarrow f(-2,-1,-1) = \vec{0} \rightarrow$ (g) el res tiene q' estar en los 2 q hay

$\operatorname{Im} \leftarrow f(1,2,1) = (1,1,-1)$

$S \leftarrow f(1,1,0) = (1,2,1)$

1) Sean $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$

$T = \langle (0,-2,1,3)(0,-1,0,1)(0,0,1,1) \rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proy $\perp$ sobre $S+T$

a) Hallar $M_{\mathcal{E}}(f)$, la matriz de f en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$

b) para $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_4)$ decidir si $h \circ f$ es epimorfismo

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la proy $\perp$ sobre $S+T$

1ero hago $S+T$

Paso S a generadores $\quad x_2 - x_3 - x_4 \qquad x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 2x_3 + x_4 = 0$

$x_1 - 2x_4 + x_4 = 0$

$x_1 = x_4$

$S = \langle (1;-1,0;1)(0;1,1;0) \rangle$

$\Rightarrow S+T = \langle (1,-1,0,1)(0,1,1,0)(0,-2,1,3)(0,-1,0,1)(0,0,1,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3+2f_2 \\ f_4+f_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3f_4-f_3 \\ 3f_5-f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S+T = \langle (1,-1,0,1)(0,1,1,0)(0,-2,1,3) \rangle$

$f(1,0,0,0)$
$f(0,1,0,0)$
$f(0,0,1,0)$
$f(0,0,0,1)$

1) Sean $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+x_2,\ x_1+\alpha x_2+\alpha x_3-x_4,\ -\alpha x_3+x_4,\ x_3-x_4)$
y los subespacios

$x_1=x_2$ $\qquad$ $x_3=-2x_1-x_4$

$S=\{x\in\mathbb{R}^4 : x_1-x_2=0,\ 2x_1+x_3+x_4=0\} \langle (1,1,-2,0)(0,0,-1,1)\rangle$

$T = \langle (1,1,1,-3)(1,-1,0,0)(1,-3,-1,-3)\rangle$

a) Hallar los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ tq $\dim(Im(f))=3$
b) Para $\alpha=1$, decidir si $\exists$ una tl $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tq $g(S+T)=Im(f)$ y q $g(Nu(f))=\vec{0}$. En caso afirmativo, exhibir un ejemplo, en caso negativo, explicar pq.

c) para $\alpha=1$ y consid $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dada por

$h(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2,\ x_3,\ x_2-2x_3,\ x_1)$

donde si $f\circ h$ es monomorfismo. En caso contrario, hallar una base de $Nu(f\circ h)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} f_2-f_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \alpha f_4+f_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+1 \end{pmatrix}$$

$-\alpha+1=0$
$\alpha=1$

b) base Nu f y Im f

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} 2f_2-f_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} f_4+f_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea el

$-c+d=0$ $\qquad$ $b+2c-2c=0$ $\qquad$ $2a=0$
$d=c$ $\qquad$ $b=0$ $\qquad$ $a=0$

$Nu f = \langle (0,0,1,1)\rangle$

$Im = \langle (2,1,0,0)(1,1,0,0)(0,1,-1,1)\rangle$

Busco $S+T$

$\langle (1,1,-2,0)(0,0,-1,1)(1,1,1,-3)(1,-1,0,0)(1,-3,-1,-3) \rangle$

Me hago cuatro menos

$\langle (1,1,1,-3)(1,-1,0,0)(1,-3,-1,-3)(1,1,-2,0) \rangle$ $\dim(S+T)=4$

$g(\mathrm{Nuf}) = g(0,0,1,1) = \vec{0}$

$g(S+T) = \mathrm{Im} f \Rightarrow$ $g(1,1,1,-3) = (2,1,0,0)$
$g(1,-1,0,0) = (1,1,0,0)$
$g(1,-3,-1,-3) = (0,1,-1,0)$
$g(1,1,-2,0) =$ Nada

g TL $\rightsquigarrow \begin{cases} g(1,1,1,-3) = (2,1,0,0) \\ g(1,-1,0,0) = (1,1,0,0) \\ g(1,-3,-1,-3) = (0,1,-1,0) \\ g(0,0,1,1) = \vec{0} \end{cases}$

1) sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proy $\perp$ sobre $S = \langle (1,1,1,1)(1,2,1,0) \rangle$

y sean $T: \{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ , \ -x_2 + x_4 = 0 \}$ y

$W = \langle (2,0,-2,0)(-2,1,0,1)(2,1,-4,1) \rangle$

2) Decidir si $\exists$ algún $\perp$ g q cumpla

$g(W) = \langle (2,0,1,1)(0,-1,2,2) \rangle$

$g(N) = f(N) \quad \underbrace{\forall N \in T}$

paso T a generadores $\quad x_4 = x_2 \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = x_2 - x_3$

$T = \langle (x_2 - x_3 ; x_2 ; x_3 ; x_2) \rangle$

$\boxed{T = \langle (1;1;0;1)(-1;0;1;0) \rangle}$

me fijo si se puede sacar algún W

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2+f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$\boxed{W = \langle (2,0,-2,0)(-2,1,0,1) \rangle}$

busco $W \cap T$

$W = \alpha(2,0,-2,0) + \beta(-2,1,0,1)$

$W = (\underbrace{2\alpha - 2\beta}_{x_1} ; \underbrace{\beta}_{x_2} ; \underbrace{-2\alpha}_{x_3} ; \underbrace{\beta}_{x_4})$

reemp en T $\quad 2\alpha - 2\beta - \beta - \cancel{2\alpha} = 0 \qquad -\beta + \beta = 0$

$-3\beta = 0$

$\boxed{\beta = 0}$

$W \cap T = \langle 2\alpha, 0, -2\alpha, 0 \rangle = \langle (2,0,-2,0) \rangle$

$B_g = \{ \underbrace{(2,0,-2,0)}_{W} \overbrace{(-2,0,-2,0)}^{W \cap T} \overbrace{(+1,1,0,1)}^{T} \underbrace{(0,0,0,1)}_{\text{completo}} \}$