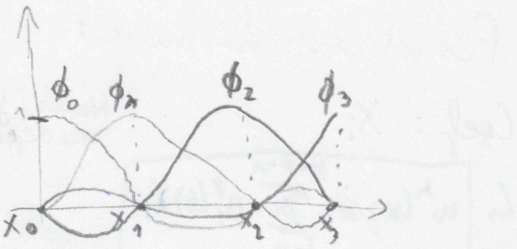
Formulaire Methodes Num' !-)

Interpolation :

abssisses/noeuds des fonctions

Lagrange : $\phi_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_m)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\cdots(x_i-x_{i+1})(x_i-x_m)}$

(=Vandermonde)



↳ $\boxed{u^h(x) = \sum_{i=0}^{m} U_i\,\phi_i(x)}$

N+1 absisses   Degrée = N   ordre = N+1 → $e^h(x) = \dfrac{u^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)}_{\le m!\frac{h^{m+1}}{4}}$

$\le \dfrac{C_{n+1}}{(m+1)!}\,\dfrac{m!\,h^{m+1}}{4} = O\left(h^{m+1}\right)$

Phenomène de Runge → Absisses de Chebyshev $\boxed{X_i = \cos\left(\dfrac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}\right)}$ $i = 0,\dots,m$.

↓ calmer les oscillations

Splines cubiques

N+1 absisses, n splines cubiques, 4n paramètres a_i, b_i, c_i, d_i

4n − 2 conditions :

$U^{h_1}(X_0) = U_0$ $u^{h_i}(x_i) = U_i$ $u^{h_i\,'}(x_i) = u^{h_{i+1}\,'}(x_i)$

$U^{h_n}(X_n) = U_n$, $U^{h_{i+1}}(X_i) = U_i$, $u^{h_i\,''}(x_i) = u^{h_{i+1}\,''}(x_i)$

2   2n − 2   2n − 2

+ 2 conditions limites : - Périodique → même deriv 1 et 2 au extrem
- Naturelles $u''(0) = u''(n) = 0$

Système à résoudre (périodique) + h constant

$$\frac{h^2}{6}\begin{bmatrix}4&1&0&\cdots&1\\1&4&1&\cdots&0\\\vdots&1&4&1&\vdots\\1&\cdots&1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U''_0\\\vdots\\U''_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}\\\vdots\\\vdots\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&\\1&4&1&0&0\\\cdots&\cdots&1&4&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\\vdots\\\vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}\\\vdots\end{bmatrix}$$

Approximation :

Forme générale : $\boxed{u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,\phi_j(x)}$ → fonctions de base ; coef

m = nombre d'absisse

n = nombre de fonctions de base

Critère de base : Moindres carrés

↳ $\underbrace{\sum_{i=0}^{m}\left(U_i - \sum_{j=0}^{n} a_j\,\phi_j(x_i)\right)^2}_{J(a_0\dots a_n)}$ minimal ⟹ $\nabla J = 0$ ⟹ $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}\phi_k(x_i)\,\phi_j(x_i)\right)a_j = \sum_{i=0}^{m}\phi_k(x_i)\,U_i$

coef $k = 0, 1, \dots, n$.

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\sum_i^m \phi_0\phi_0(x_i) & \cdots & \sum_i \phi_0\phi_n(x_i)\\ \sum_i \phi_1\phi_0(x_i) & & \cdots\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_i^m \phi_n\phi_0(x_i) & \cdots & \sum \phi_n\phi_n(x_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\\vdots\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum\phi_0(x_i)U_i\\\vdots\\\vdots\\\sum\phi_n(x_i)U_i\end{bmatrix}$$

B-splines : Approximation

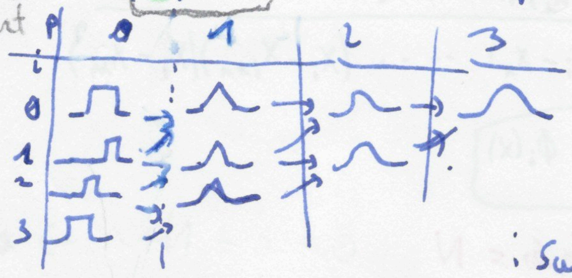
Fonctions de base : $B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+p+1} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$ } Récursive LERP des degrés précédent,

degré p

Noeud de départ i

Coef : X_i

$$\hookrightarrow \boxed{u^h(x) = \sum_{i=0}^{m-p-1} B_i^p(t) X_i}$$



$$\sum_{i=0}^{m-p-1} B_i^p(t) = 1 \quad T_p \le t \le T_{m+p}$$

T_i = Noeuds

NURBS : $u^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m-p-1} W_i B_i^p(t) X_i}{\sum_{k=0}^{m-p-1} W_k B_k^p(t)}$, W_k = poids arbitraires

Surface : $\frac{\sum\sum W_{ij} B_i^p(t) B_j^p(s) P_{ij}}{\sum\sum W_{ij} B_i^p(t) B_j^p(s)}$

P, W Matrices.

Intégration :

Quadrature : $I^h = \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i)$, $E^h = I - I^h$

poids ↲ Abscisses ↳ Erreur

Newton-Cotes : Abcisses EQUIDISTANTES

$$I \approx \sum_{i=0}^{m} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\,dx}_{w_i \text{ poids}}$$

→ engendré des polynômes

Trapèzes composites : $\frac{h}{2}(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + \dots + 2U_{n-1} + U_n)$

Degré = 1 Ordre = h^2 (2)

Simpson composite : $\frac{h}{3}(U_0 + 4U_1 + 2U_2 + \dots + 4U_{n-1} + U_n)$

Degré = 3 Ordre = h^4 (4)

Gauss-Legendre

Choix des poids ET des abscisses = $2m+2$ degrés de liberté → $\boxed{\text{degré de } 2m+1}$

$m+1$ $m+1$

Ordre $2m+2$

Conditions :

$$\sum_{k=0}^{m} w_k X_k^{2j} = \frac{2}{(2j+1)} \qquad j = 0, 1, \dots m$$

$$\sum_{k=0}^{m} w_k X_k^{2j+1} = 0 \qquad j = 0, 1, \dots m$$

Extrapolation

Richardson : Fait gagner un ordre / terme de précision : $j \to j+1$ (ou autre si expansion sans tous les termes)

$$F_{i,j} = \frac{(2^j F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1})}{2^j - 1}$$

$h/2^i$ $h/2^{i-1}$

j = ordre du terme à viser

Grâce à Taylor

$$u(x) = u(0) + x\,u'(0) + \frac{x^2}{2}u''(0) + \frac{x^3}{6}u^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24}u^{(4)}(0) + \frac{x^5}{120}u^{(5)}(0) + \frac{x^6}{720}u^{(6)}(0) + \dots$$

Exemple : $f(\frac{h}{2}) = f(0) + \frac{h}{2}f'(0) + \frac{h^2}{8}f''(0)$

$f(\frac{h}{4}) = f(0) + \frac{h}{4}f'(0) + \frac{h^2}{32}f''(0)$

$2f(\frac{h}{4}) - f(\frac{h}{2}) = (2-1)f(0) + \cancel{(2h/4 - h/2)f'(0)} + f''(0)\frac{h^2}{16}$

$\Leftrightarrow f(0) = \frac{2f(\frac{h}{4}) - f(\frac{h}{2})}{2-1} + \frac{h^2}{16}f''(0)$