WEZEL Augustin : 392 — Formulaire Méthodes Numériques : Juin 2024

Taylor : $u(x) = u(0) + h u'(0) + \frac{h^2}{2} u''(0) + \frac{h^3}{6} u'''(0) + \dots$

Lagrange : $\phi_i(x) = \frac{(x-X_0)\cdots(x-X_{i-1})(x-X_{i+1})\cdots(x-X_n)}{(X_i-X_0)(X_i-X_{i-1})(X_i-X_{i+1})(X_i-X_n)}$

N+1 abscisses   Degré N

$$e^h(x) = \frac{u^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \underbrace{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}_{\le \frac{m!\,h^{m+1}}{4}}$$

$$\le \frac{C_{m+1} h^{m+1}}{(m+1)} = O(h^{m+1})$$ Ordre N+1

Chebyshev : $X_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}\right)$

Splines cubiques :

Périodiques

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i-1}-2U_i+U_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Naturelle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ U_i U_{i} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

B-spline : $B_i^p(t) = \frac{(t-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+p+1}-t)}{(T_{i+p+1}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$

NURBs : $u^h(t) = \frac{\sum W_i B_i^p(t) X_i}{\sum_k W_k B_k^p(t)}$, W_k = poids arbitraires

Approximation : (moindres carrés)

$$\underbrace{J(a_0, a_1, a_2 \dots)}_{n \text{ param.}} = \sum_{i=0}^{m} \left(U_i - \sum_j^{n} \phi_j(X_i)\, a_j\right)^2$$

Intégration : $I \approx I^h = \sum_{i=1}^{m} w_i\, u(X_i)$,

Trapèzes : $\frac{U_h + U_{-h}}{2} = I^h \to \frac{h}{2}(U_0 + 2U_1 + \dots 2U_{m-1} + U_m)$

Degré : 1   Ordre $O(h^2) = 2$

Simpson : $I^h = \frac{U_{-h} + 4U_0 + U_h}{3} \to \frac{h}{3}(U_0 + 4U_1 + 2U_2 + \dots + 4U_{m-1} + U_m)$

Degré : 3   Ordre $O(h^4) = 4$

Gauss-Legendre : $\sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i) = I^h$

$\sum_k w_k X_k^{2j} = \frac{2}{(2j+1)}$, $\sum w_k X^{2j+1} = 0$ $j = 0,1,2 \dots m$

Degré = 2m+1   Ordre $O(h^{2m+2}) = 2m+2$

Richardson :

$O(h^1) \to O(h^2)$

$f(0) \approx 2f(h/2) - f(h)$

$O(h^2) \to O(h^3)/O(h^4)$

$f(0) \approx \frac{4f(h/2) - f(h)}{3}$

h, $h/2$, $h/4$

Romberg = Trapèze + Richardson

Dérivation

Différences centrées

$u'(0) = \frac{U_h - U_{-h}}{2h}$ ② : ③ $u'(0) = \frac{-U_{2h} + 8U_h - 8U_{-h} + U_{-2h}}{12h}$

$u''(0) = \frac{U_h - 2U_0 + U_{-h}}{h^2}$ ② : ④ $u''(0) = \frac{-U_{2h} + 16U_h - 30U_0 + 16U_{-h} - U_{-2h}}{12h^2}$

Ordre $O(h^2) = 2$ Ordre $O(h^4) = 4$

Arrondi et pas optimal ϵ = erreur arrondi du PC.

① $|\epsilon^h| \le \frac{\epsilon}{h} + \frac{C_3 h^2}{6} \to h_{opt} = \left(\frac{3\epsilon}{C_3}\right)^{1/3}$

② $|\epsilon^h| \le \frac{4\epsilon}{h^2} + \frac{C_4 h^2}{12} \to h_{opt} = \left(\frac{48\epsilon}{C_4}\right)^{1/4}$

③ $|\epsilon^h| \le \frac{3\epsilon}{h} + \frac{C_5 h^4}{30} \to h_{opt} = \left(\frac{45\epsilon}{4C_5}\right)^{1/5}$

④ $\epsilon^h \le \frac{16\epsilon}{3h^2} + \frac{C_6 h^4}{90} \to h_{opt} = \left(\frac{240\epsilon}{C_6}\right)^{1/6}$

EDOs $\boxed{u'(x) = f(x, u(x))}$, $u(a) = \bar{u}$

Stabilité : (MATH) $J = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,\,u(x))}$

$J < 0$ = Stable

$J > 0$ = Instable

$J \ll 0$ = Raide → Imp > Exp

Euler : (= Taylor m=1)

Impl : $U_{i+1} = U_i + h f(X_{i+1}, U_{i+1})$ $\theta_{loc} = O(h^2)$

Expl : $U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$ Ordre global = 1

Crank-Nicholson (= moyenne Euler Expl-Impl)

$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}\left(f(X_i, U_i) + f(X_{i+1}, U_{i+1})\right)$

Ordre $O(h^2) = 2$

Taylor :

$$U_{i+1} = U_i + h\left[f + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 f\right) + \frac{h^3}{24} \dots\right]$$

Ordre $O(h^m) = m$

Runge-Kutta :

$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$K_1 = f(X_i, U_i)$

$K_2 = f(X_i + h/2,\ U_i + \frac{h}{2} K_1)$

$K_3 = f(X_i + h/2,\ U_i + \frac{h}{2} K_2)$

$K_4 = f(X_i + h,\ U_i + h K_3)$

Ordre $O(h^4) = m$

Heun : $U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$

$K_1 = f(x_i, U_i)$, $K_2 = f(x_i + h, U_i + h K_1)$

Ordre $O(h^2) = 2$

Adams-Bashforth : (= interpolation des val. précédentes)

$O(h^2)$: $U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(-f_{i-1} + 3f_i) \Rightarrow |e_i| \leq \frac{5C_3}{12} h^3$

$O(h^3)$: $U_{i+1} = U_i + \frac{h}{12}(5f_{i-2} - 16f_{i-1} + 23f_i) \rightarrow \leq \frac{3C_4}{8} h^4$

Ordre ~~O(h)~~ $n \rightarrow$ $n+1$ pts d'interpolation

Gear : (Implicites) $\rightarrow$ (Interpolation des dérivées $(u^h_{i+1})'(x_{i+1}) \approx f_{i+1}$)

$O(h)$: $U_{i+1} = U_i + h f_{i+1}$

$O(h^2)$: $\frac{1}{3}(-U_{i-1} + 4U_i) + \frac{2h}{3} f_{i+1}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{PAS LIÉS}}$

$O(h^3)$ $U_{i+1} = \frac{1}{11}(2U_{i-2} - 9U_{i-1} + 18U_i) + \frac{6h}{11} f_{i+1}$

Stabilité numérique :

Problème modèle : $\boxed{u'(x) = \lambda u(x)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\rightarrow J_i = \lambda$, $f = \lambda u(x)$

Stable = $\alpha < 1$ (α facteur d'amplification)

$\alpha = \frac{U_{i+1}}{U_i}$ Pas liés $\rightarrow \frac{U_{i+m}}{U_i} = \alpha^m$

REECRIRE le schéma avec α et $\lambda u(x)$

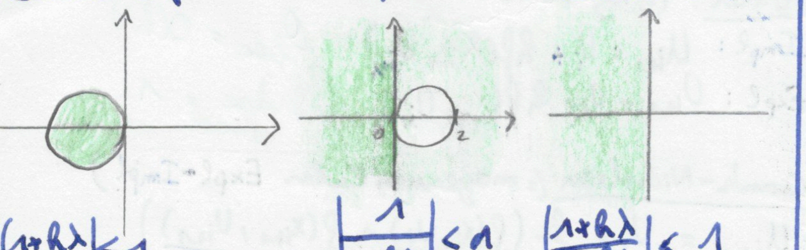
$\rightarrow$ isoler α en fct de h, λ

$\rightarrow$ condition sur $h\lambda \in \mathbb{C}$

SYSTEMES $A = J f(x_i, U_i)$ $\hookleftarrow$ Re $h\lambda_i$

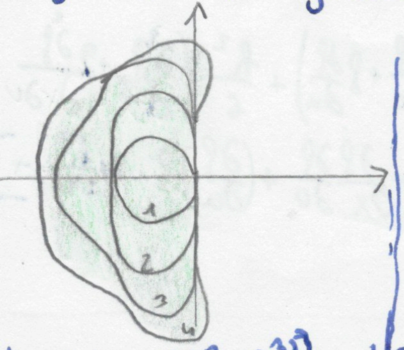
Zones de Stabilité

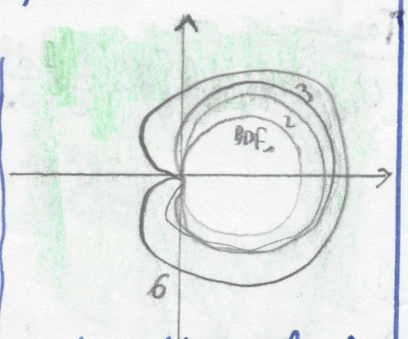
Euler expl Impl Crank Nico



$|1 + h\lambda| < 1$ $\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| < 1$ $\left|\frac{1 + h\lambda}{1 - h\lambda}\right| < 1$

Taylor ($a = n$) (= Runge Kutta) Gear





$\left|\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + h\lambda}_{1\,(=\text{Euler})} + \frac{h^2\lambda^2}{2!}}_{2} + \frac{h^3\lambda^3}{3!}}_{3} + \dots\right| \leq 1$ ...

Solution d'un polynôme en α plus grande que 1? $\rightarrow$ Instable

$p(\alpha) = \dots \underbrace{h\lambda}_{\text{paramètre}} \alpha^n \dots$

Équations non-linéaires $f(x) = 0$

Taux de convergence α (ou r) : $\lim_{i \to \infty} \frac{|e_i|}{|e_{i-1}|^{\alpha}} = C$

Bissection : Binary Search

$\alpha = 1$ $f(a) f(b) < 1$

Point fixe $f(x) = 0 \Rightarrow x = g(x)$

Conv $\Rightarrow |g'(x)| < 1$

Schéma : $x_{i+1} = g(x_i)$

Systèmes : $\sum_j \left|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right| < 1$ pour chaque compos. de $g(x)$

$\alpha = 1$

Newton-Raphson : $\alpha = 2$

Schéma : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Convergence $e_{i+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_i)} e_i^2$

Systèmes : $J f(x_i) \Delta x = -f(x_i) \Rightarrow Ax = -b$ à résoudre

$\rightarrow x_{i+1} = x_i + \Delta x$

Sécante : $\alpha = \varphi = 1{,}618$

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ $\approx \frac{1}{f'(x_i)}$

Trouver α ?

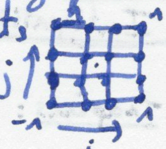
~~x_{i+1}~~ $e_{i+1} = e_i - \frac{f(x)(e_i - e_{i-1})}{f(x + e_i) - f(x + e_{i-1})}$

Taylor autour de $f(x)$

$\rightarrow e_{i+1} = e_i - f(x)(e_i - e_{i-1})$ ⚠ 1× calcul de $f(x)$ / iter

EDP Différences finies : maillage

Poisson $h = \frac{2}{n-1}$, n^2 points



$\nabla^2 u(x,y) + 1 = 0$ $(x,y) \in \Omega$

$u(x,y) = 0$ $(x,y) \in \partial\Omega$

$\rightarrow \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}}{h^2} + 1 = 0$

(Résoudre par matrice)

Chaleur $\alpha \left[\frac{cm^2}{s}\right]$ k conductivité $\beta = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ [%]

$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{espace}}$ $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ capa thermique $\rightarrow U_i^{n+1} = U_i^n + \beta(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n)$ temps n, espace i

Stabilité $= [\;] = [\;] + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & \end{bmatrix}}_{A} [\;]$

$|1 + \beta\lambda_i| < 1$

$Av = \lambda v$ $\hookrightarrow 0 < \lambda_i < 2$

$\hookrightarrow \beta < 1/2 \rightarrow \boxed{\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha}}$