Física Geral I • FIS0703

Aula 08

19/10/2016

Miniteste 1

Turma C: 2ª, 24/10/2016, 9h, CLAV-129

Turmas A+B: 3ª, 25/10/2016, 14h, CLAV-Anfiteatro 1

Materia: Dimensões, unidades, vetores, erros e medições

O princípio de sobreposição

Ondas têm uma propriedade notável que as distingue das partículas: elas podem ser combinadas no mesmo ponto do espaço.

Quando duas ou mais ondas se propagam por um meio, a função de onda resultante em cada ponto é a soma das funções de onda individuais.

Este princípio de sobreposição é satisfeito por ondas lineares.

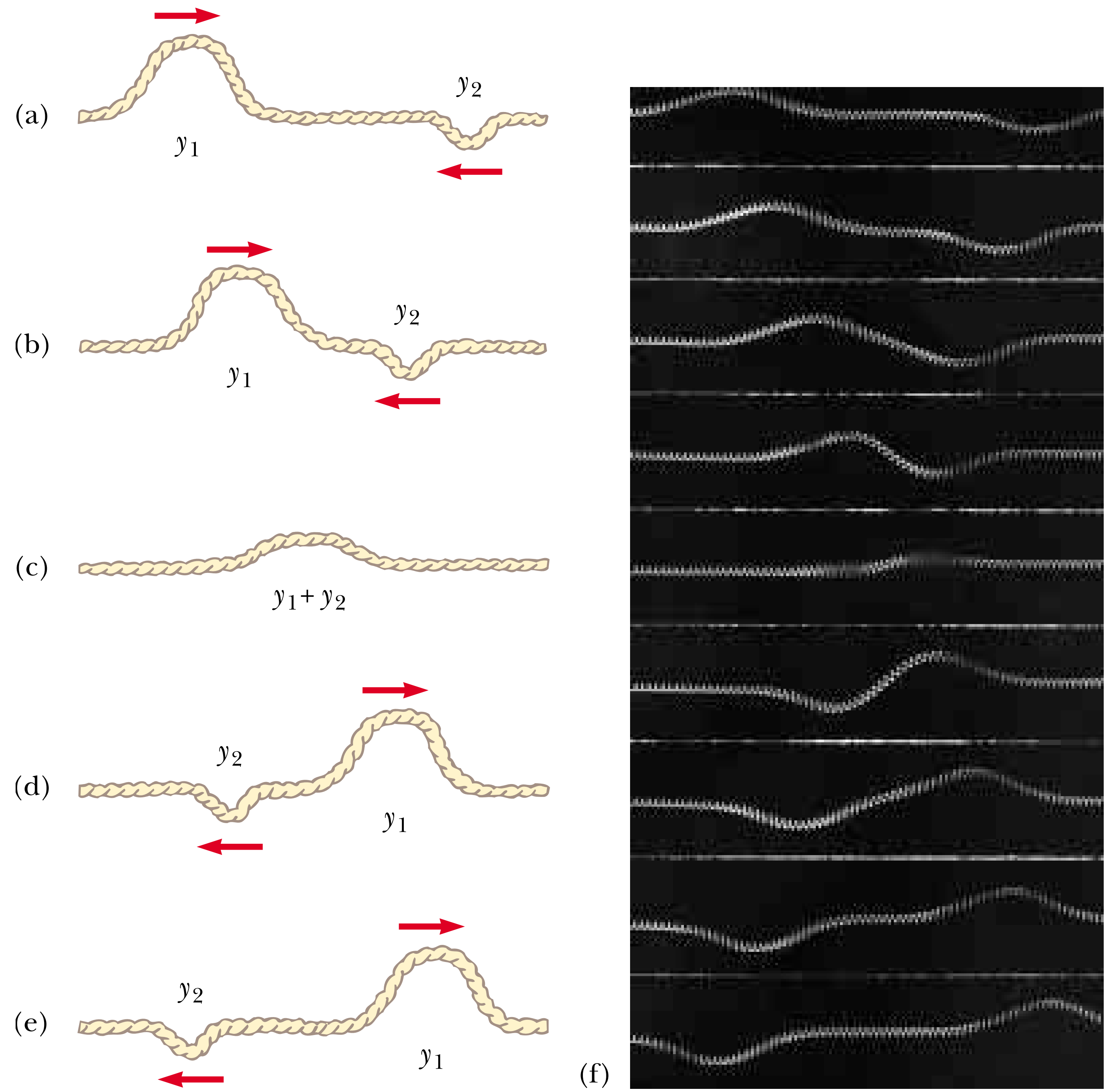
Isto implica que uma onda pode passar por outra sem efeito permanente.

Enquanto existe uma sobreposição de duas ondas ocorre interferência.

- Interferência construtiva: amplitudes de ondas adicionam-se.
- Interferência destrutiva: amplitudes de ondas subtraem-se.

Interferência de dois pulsos

Cancelamento parcial
(interferência destrutiva)



Sobreposição de ondas sinusoidais

Consideremos duas ondas sinusoidais que se movem na mesma direção (para a direita) num meio linear. As amplitudes, comprimentos de onda e frequências angulares são iguais, mas há uma diferença de fase.

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad\qquad y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

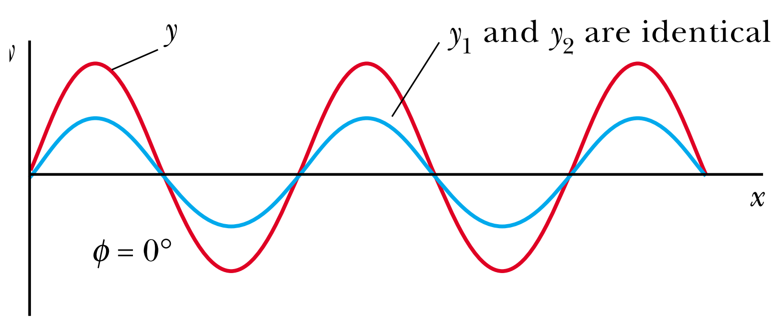
$$y = y_1 + y_2 = A\,[\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + \mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)]$$ (sobreposição)

Usando $\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ com $\alpha = kx - \omega t$, $\beta = kx - \omega t + \phi$

podemos escrever $y = \boxed{2A\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\,\mathrm{sen}\left(kx - \omega t + \boxed{\dfrac{\phi}{2}}\right)$

O resultado também é uma onda sinusoidal Amplitude Fase

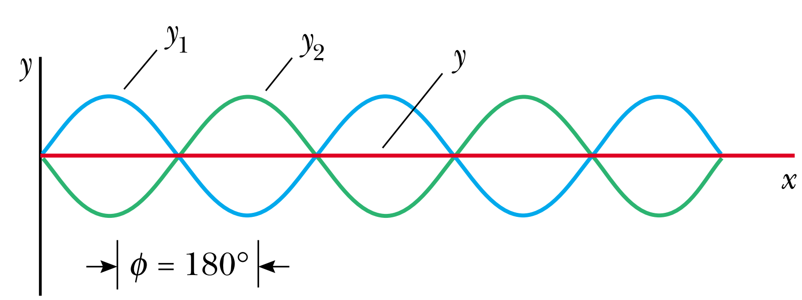
Interferência construtiva



$$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$$

Amplitude = 2A

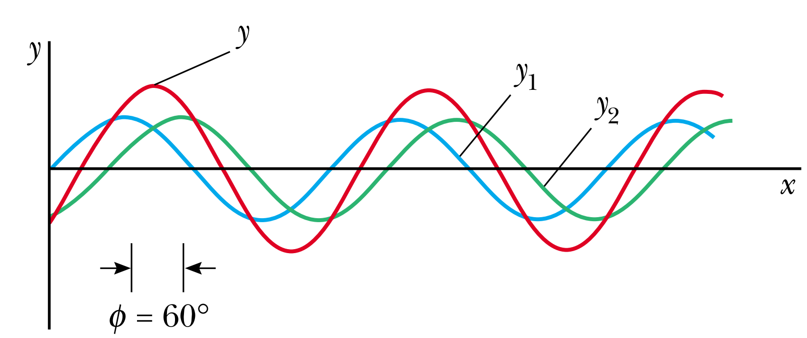
Interferência destrutiva



$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$$

Amplitude = 0

Caso intermédio



Amplitude entre 0 e 2A

Ondas estacionárias (I)

Consideremos duas ondas sinusodais com igual amplitude, comprimento de onda e frequência angular, que se movimentam ao longo duma linha em sentidos opostos.

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \longrightarrow \qquad \longleftarrow y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$$

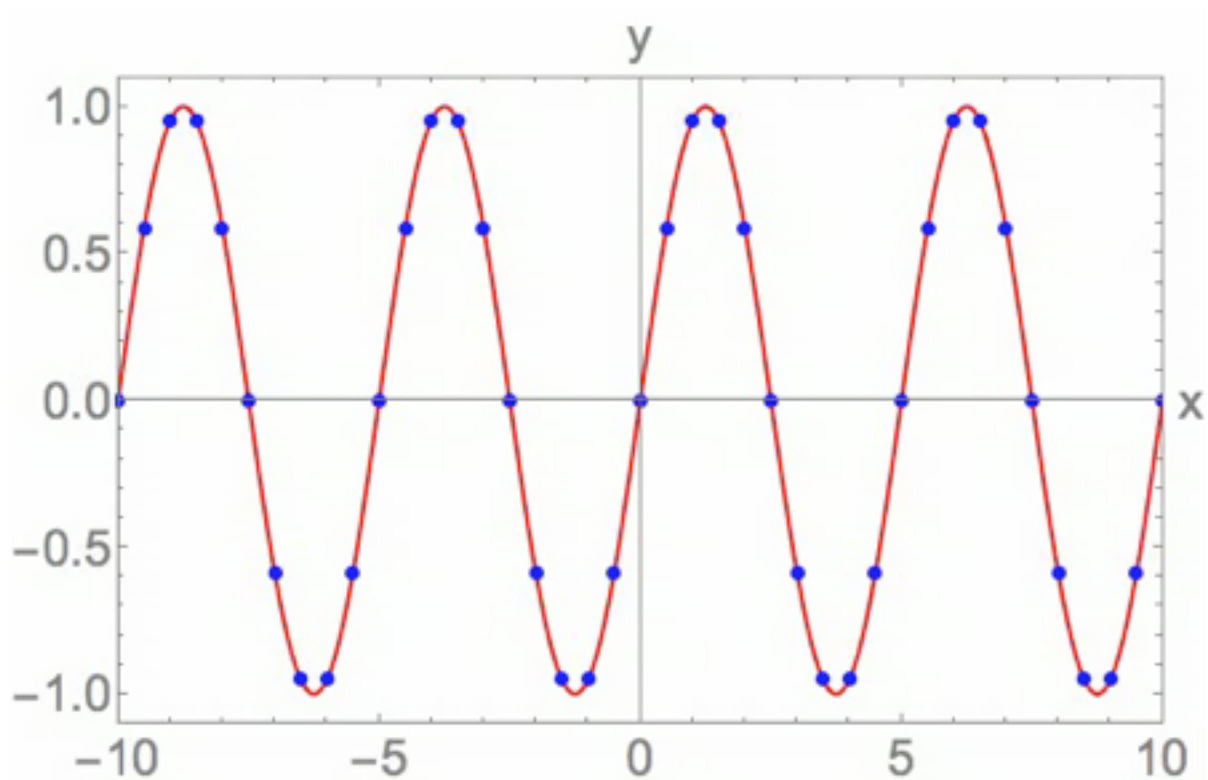
$$y = y_1 + y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$$ (sobreposição)

Com $\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$ obtemos $\boxed{y = 2A\,\mathrm{sen}\,kx\,\cos\omega t}$

Esta expressão descreve um padrão de oscilação com um contorno estacionário.

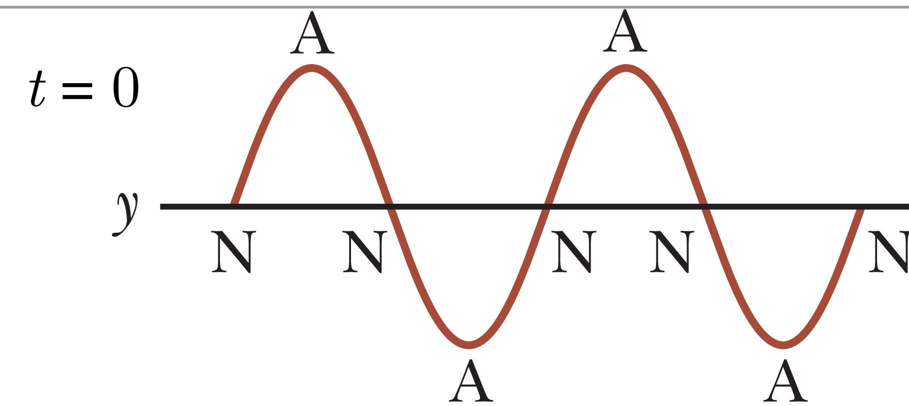
Esta onda estacionária não contém a expressão $kx \pm \omega t$ → não é uma onda progressiva.

A onda oscila com frequência ω e com uma amplitude que depende da posição x.



Ondas estacionárias (II)

$$y = 2A \,\mathrm{sen}\, kx \,\cos \omega t$$



Existem pontos em que a amplitude é zero: $\mathrm{sen}\, kx = 0 \longrightarrow kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Nodos em $x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

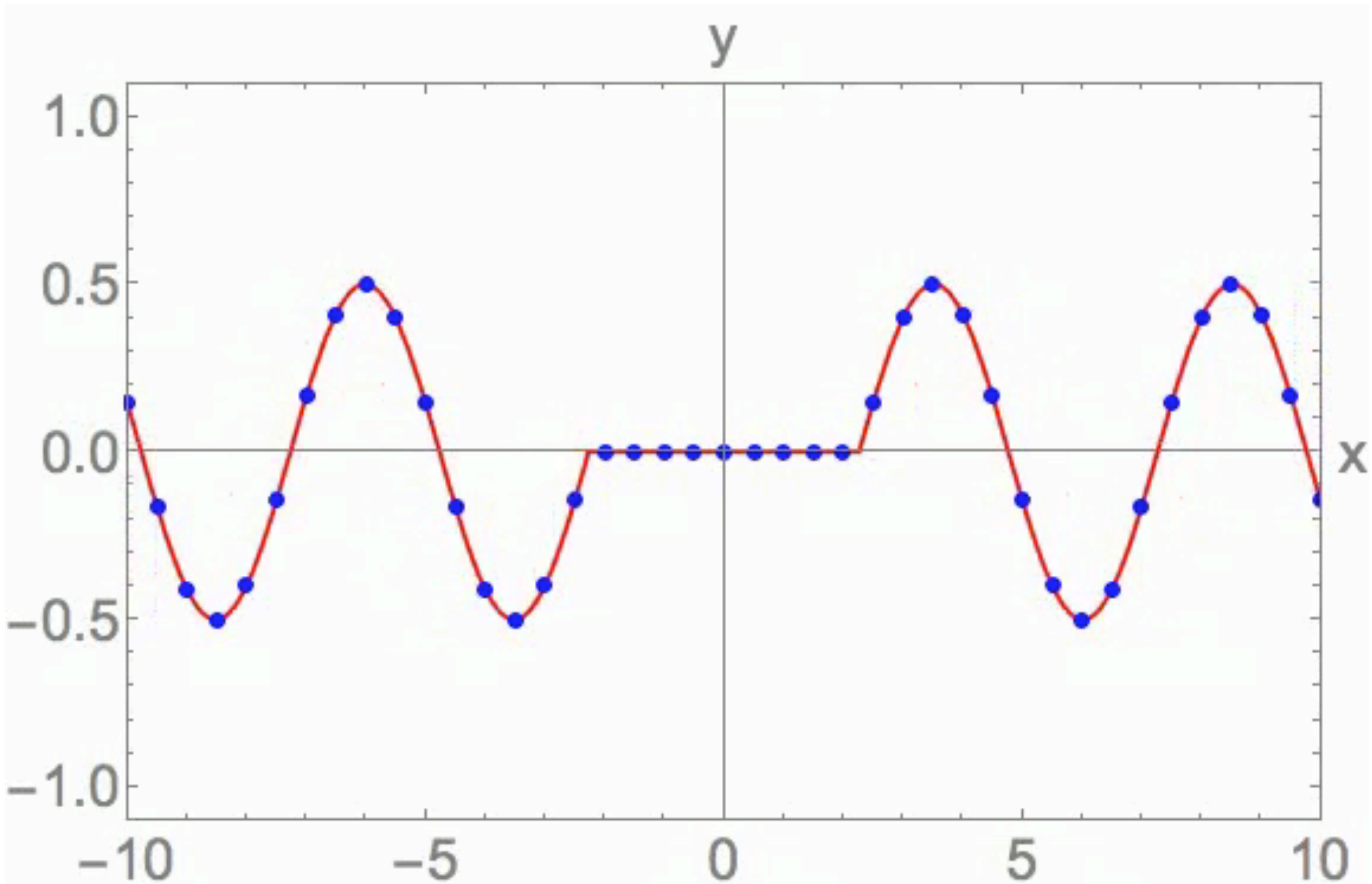
Pontos em que a amplitude é máxima: $\mathrm{sen}\, kx = \pm 1 \longrightarrow kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$

Antinodos em $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$

- A distância entre nodos adjacentes é $\frac{\lambda}{2}$
- A distância entre antinodos adjacentes é $\frac{\lambda}{2}$
- A distância entre nodos e antinodos adjacentes é $\frac{\lambda}{4}$

Ondas estacionárias (III)

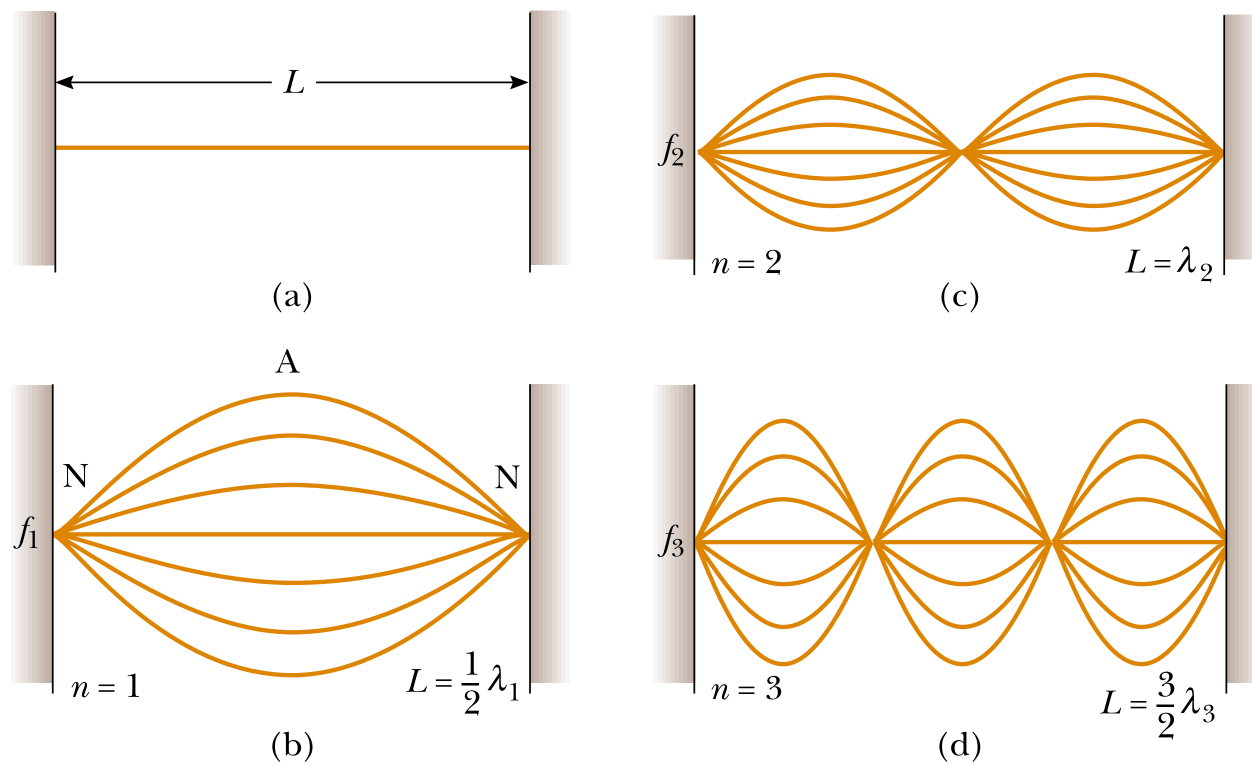
A formação duma onda estacionária como sobreposição de duas ondas progressivas que se propagam em sentidos opostos.



Ondas estacionárias numa corda

Uma corda de comprimento *L*, e com as duas extremidades fixas:

Ondas estacionárias estabelecem-se como sobreposição de ondas incidentes e refletidas nas duas extremidades fixas.



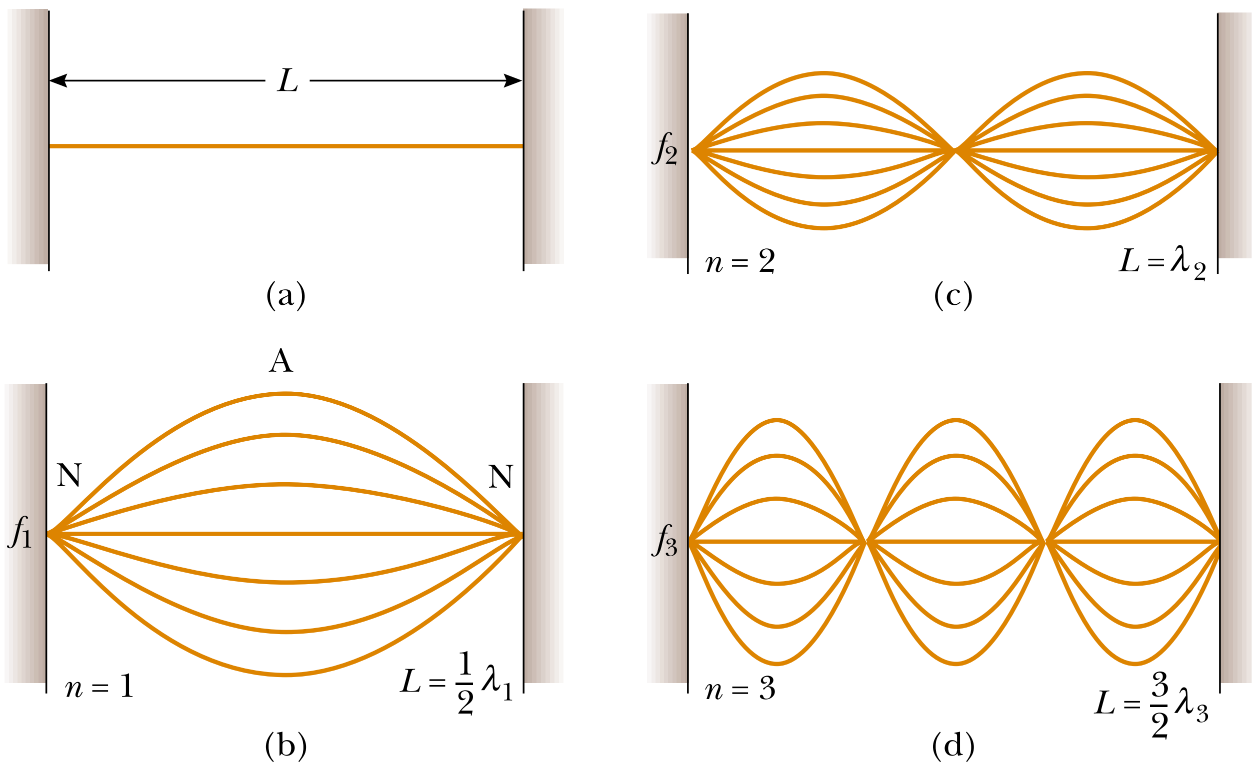
Estas ondas são exatamente os modos normais da corda que já determinámos:

$$y_n(x,t) = C_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t \qquad \omega_n = n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Nesta forma vê-se a sobreposição de duas ondas progressivas

$$y_n(x,t) = \frac{C_n}{2}\left\{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x + \omega_n t\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x - \omega_n t\right)\right\}$$

Ondas estacionárias numa corda (II)



Comprimentos de onda e frequências são quantizadas devido às condições fronteira

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f = \frac{v}{\lambda} \longrightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Velocidade de propagação na corda $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

As frequências com as quais a corda pode vibrar

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

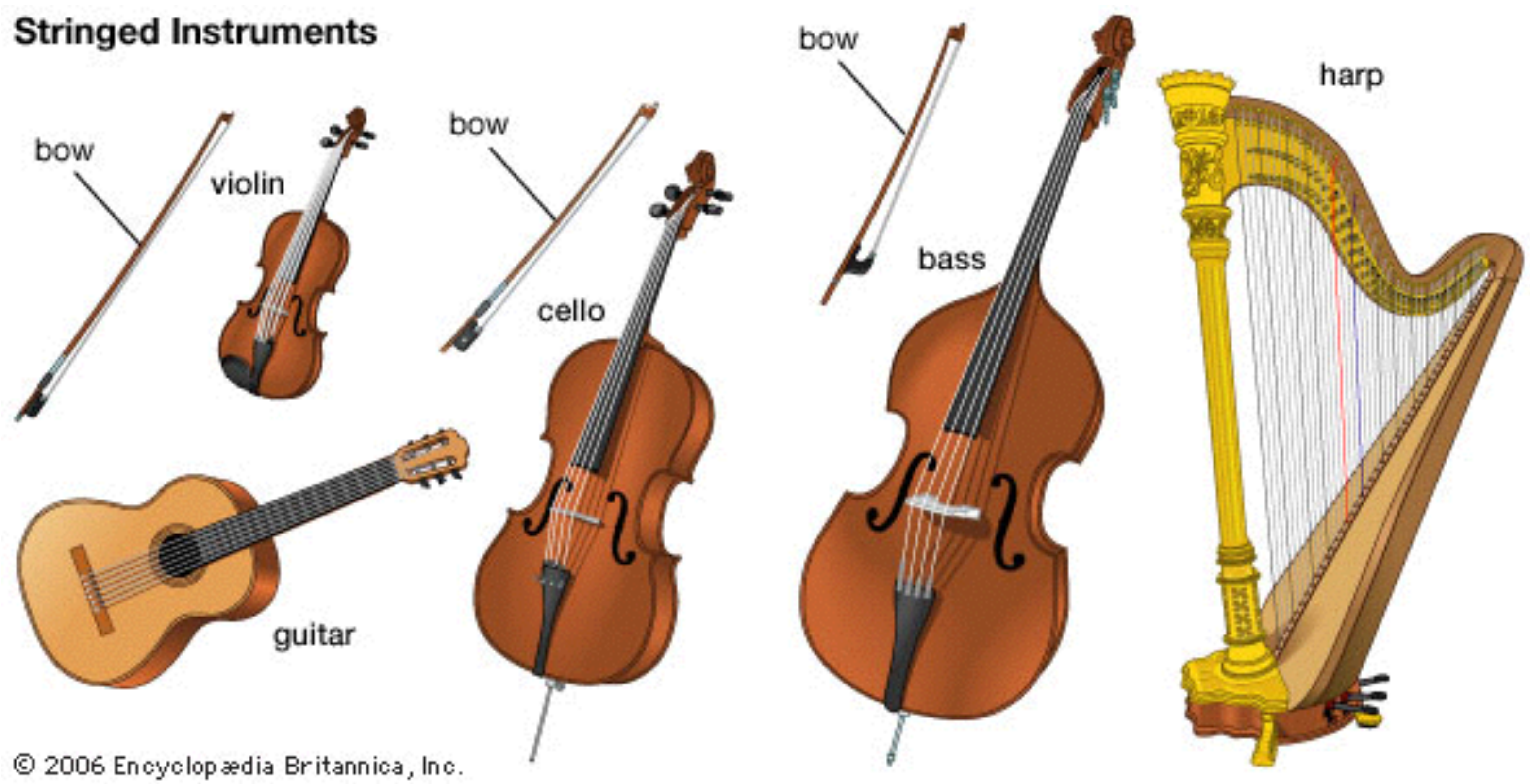
frequência fundamental (1ª harmónica) $\quad f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$f_2 = 2f_1$ 2ª harmónica

$f_n = nf_1$ série de harmónicas

Sistemas cujos modos normais não têm frequências que são múltiplos inteiros duma frequência fundamental não são harmónicos (e.g. um tambor).

Instrumentos musicais de cordas



$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para alterar as frequências duma corda, um músico pode alterar

- o comprimento L
- a tensão T
- a densidade de massa μ

  (o material da corda)

Para fazer oscilar uma corda, ela é deformada e depois largada.

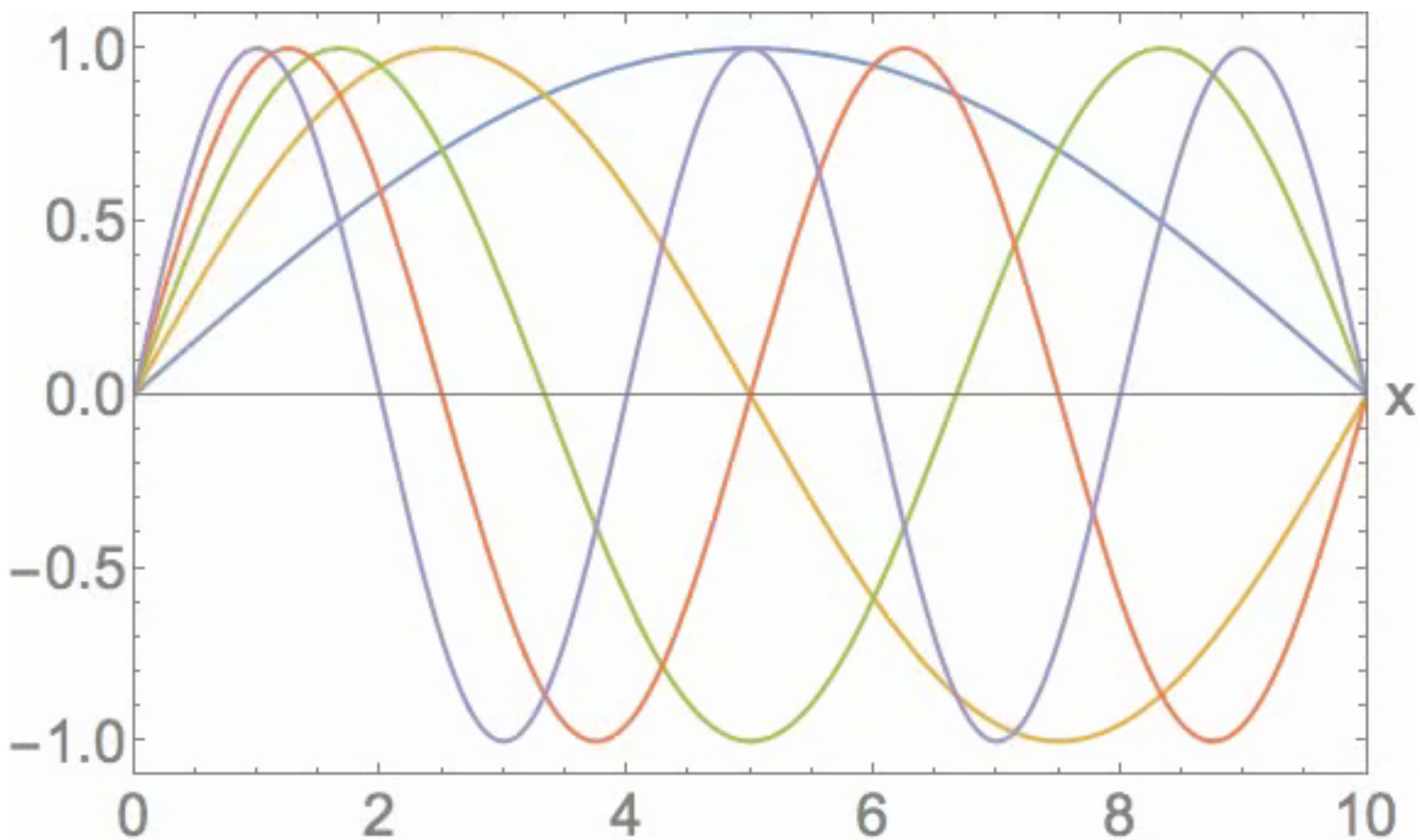
Maneiras diferentes de o fazer excitam as harmónicas com amplitudes diferentes:

- Guitarra: a corda é arrancada
- Violino: a corda é tocada com um arco
- Piano: a corda é atingida por um pequeno martelo

Quando instrumentos diferentes tocam a mesma nota musical, a frequência fundamental é a mesma, mas a intensidade das várias harmónicas é diferente e o som produzido tem um timbre diferente.

Modos normais duma corda

Os primeiros 5 modos normais com a mesma amplitude.

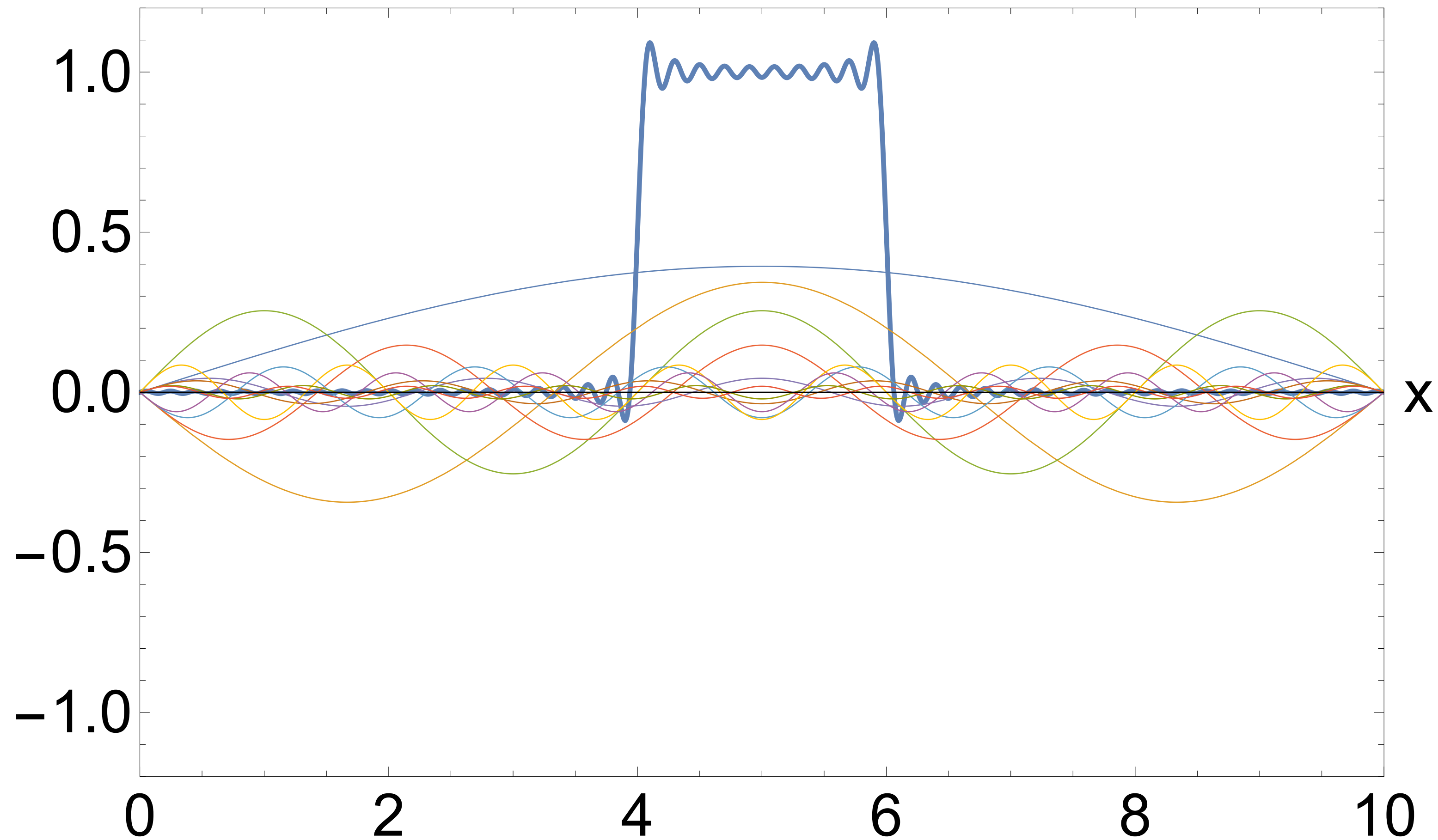


Exemplo duma oscilação geral duma corda

Exemplo: uma deformação retangular numa corda.

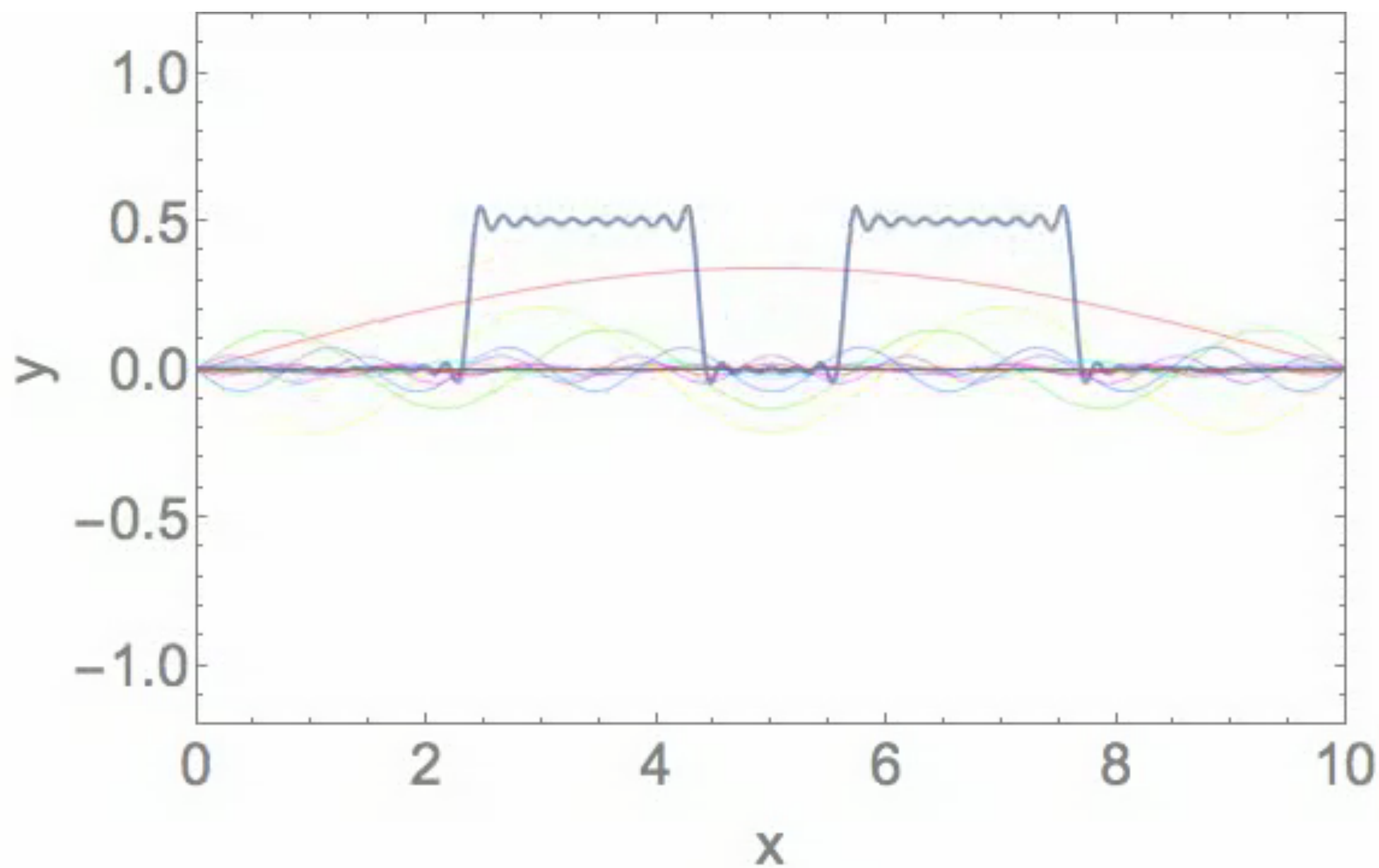
A função de onda inicial da onda é descrita como sobreposição de modos normais.

As amplitudes dos vários modos normais podem ser determinadas pela análise de Fourier.



O retângulo aqui é representado por modos até n=101
(apenas modos até n=21 são mostrados no gráfico)

Movimento dum pulso retangular numa corda



Ondas estacionárias em colunas de ar

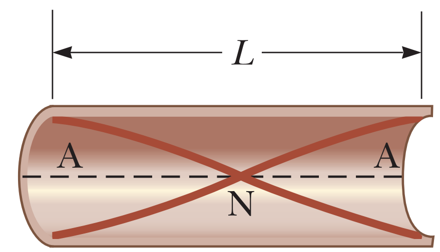
Interferência entre ondas longitudinais que se propagam em sentidos opostos em colunas de ar podem gerar ondas estacionárias.
Instrumentos de sopro e órgãos produzem os seus sons desta maneira.

Antinodo de deslocamento = nodo da variação da pressão

- Extremidade fechada = nodo de deslocamento
- Extremidade aberta = antinodo de deslocamento (aproximadamente!)
- Ondas podem ser refletidas em extremidades fechadas, mas também (parcialmente) em extremidades abertas
- Os sons de instrumentos de sopro são produzidos por ressonância

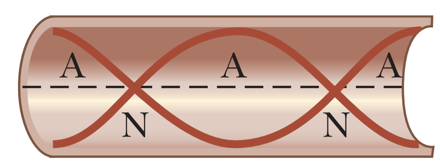
A=antinodo
N=nodo
de deslocamento

Tubo aberto aberto



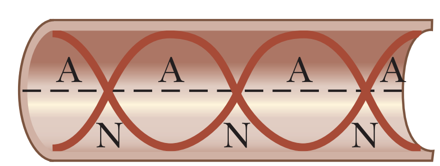
$\lambda_1 = 2L$

$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$ 1ª harmónica



$\lambda_2 = L$

$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$ 2ª harmónica

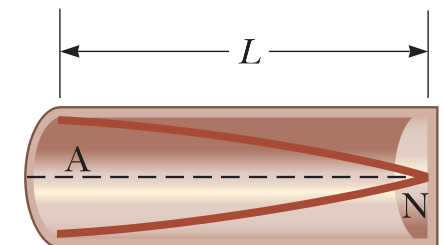


$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$ 3ª harmónica

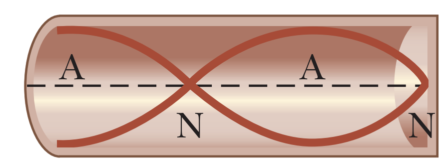
$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tubo aberto fechado



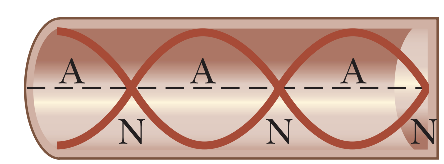
$\lambda_1 = 4L$

$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$ 1ª harmónica



$\lambda_3 = \frac{4}{3}L$

$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$ 3ª harmónica



$\lambda_5 = \frac{4}{5}L$

$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$ 5ª harmónica

$$f_n = n\frac{v}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

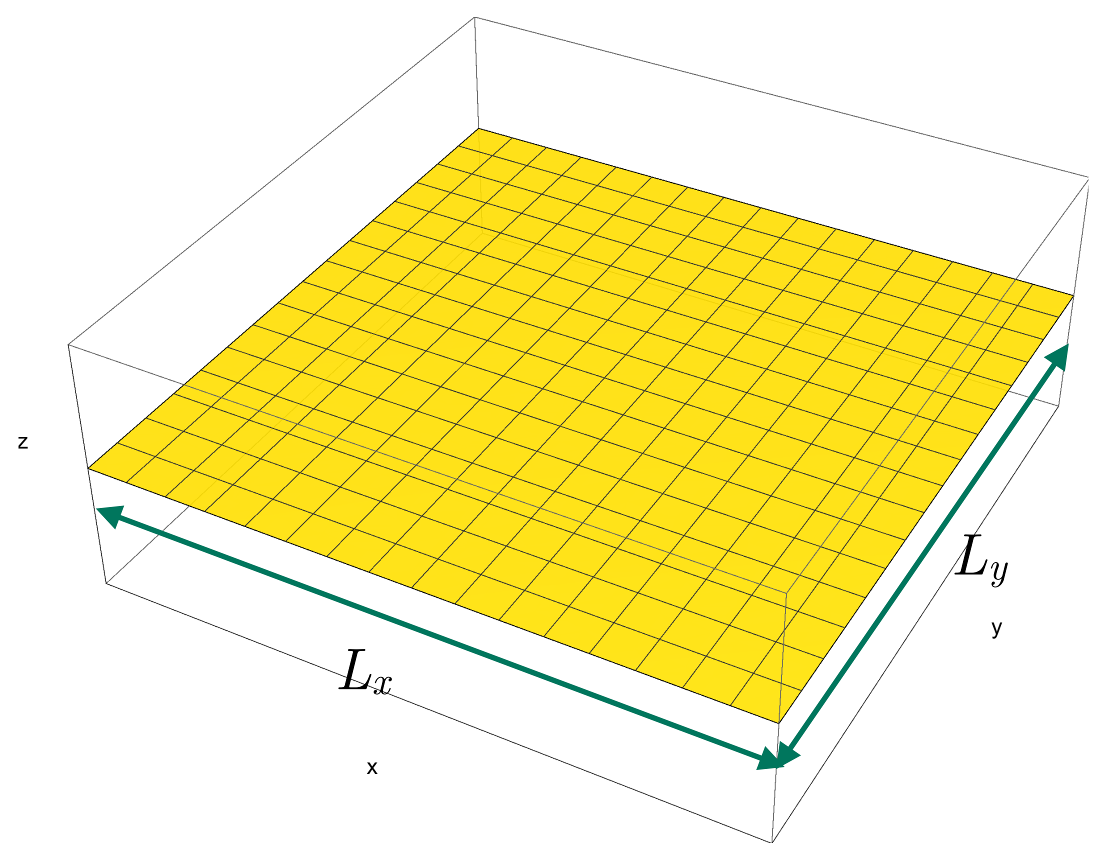
Oscilações de sistemas bi-dimensionais

Equação de ondas a duas dimensões: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$ + condições fronteira

Exemplo: membrana retangular, área: $L_x \times L_y$ S … tensão superficial σ … massa/área

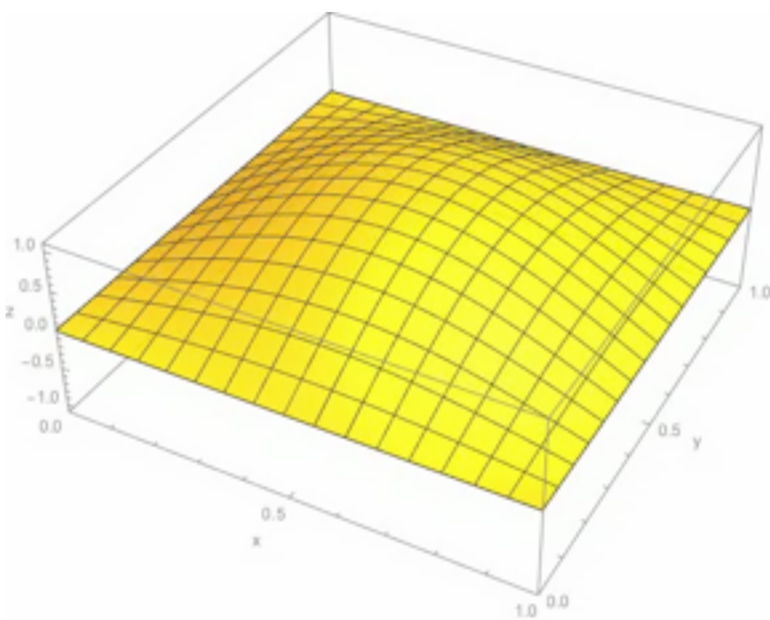
Frequências dos modos normais: $$\omega_{n_1 n_2} = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}\sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{L_y}\right)^2} \qquad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \ldots$$

$$z_{n_1 n_2}(x, y, t) = A_{n_1 n_2} \operatorname{sen}\frac{n_1\pi x}{L_x} \operatorname{sen}\frac{n_2\pi y}{L_y} \cos\omega_{n_1 n_2} t$$

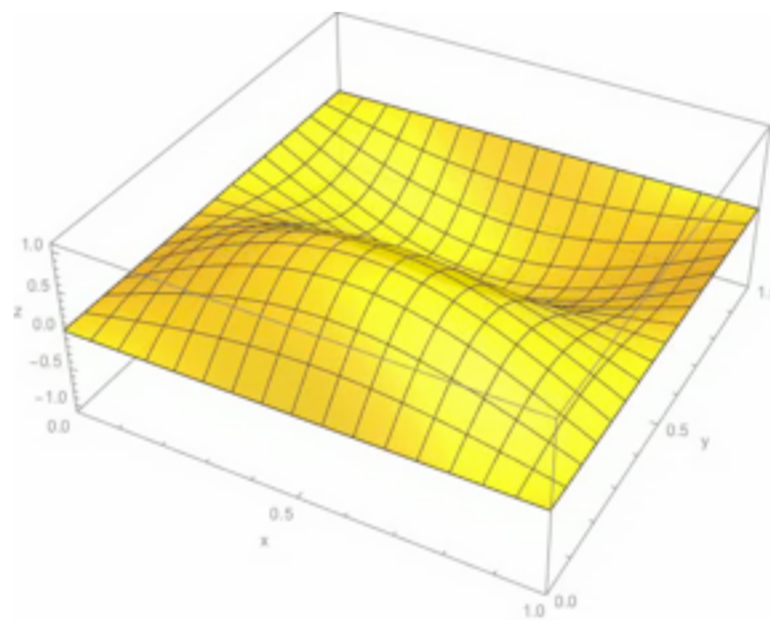


Modos normais duma membrana quadrada

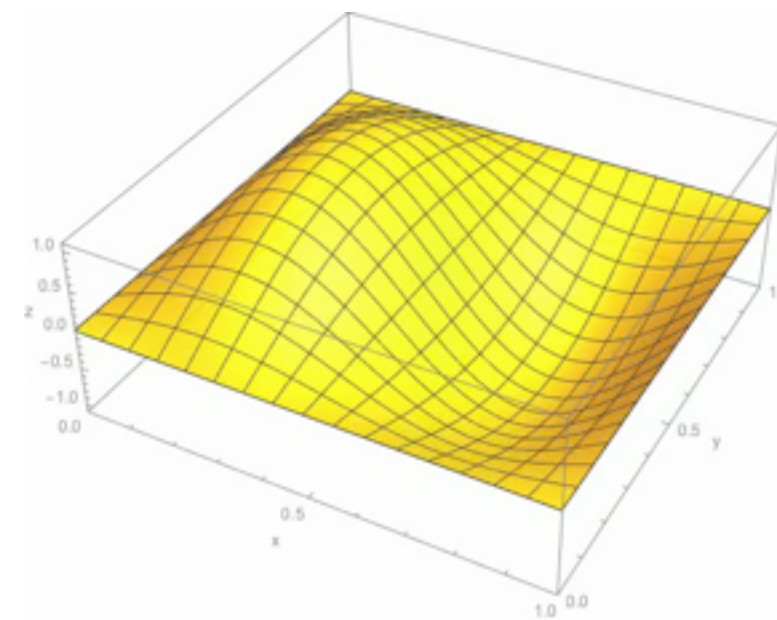
$n_1 = 1,\ n_2 = 1$



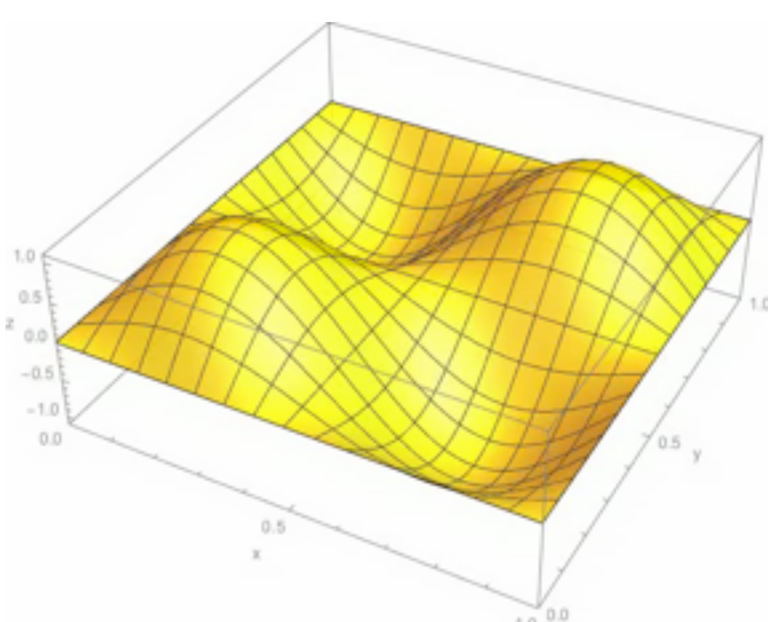
$n_1 = 1,\ n_2 = 2$



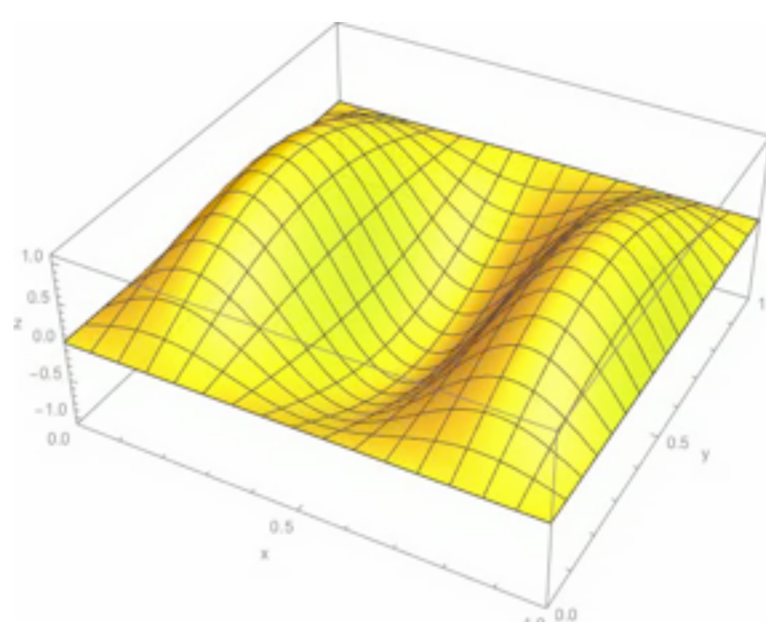
$n_1 = 2,\ n_2 = 1$



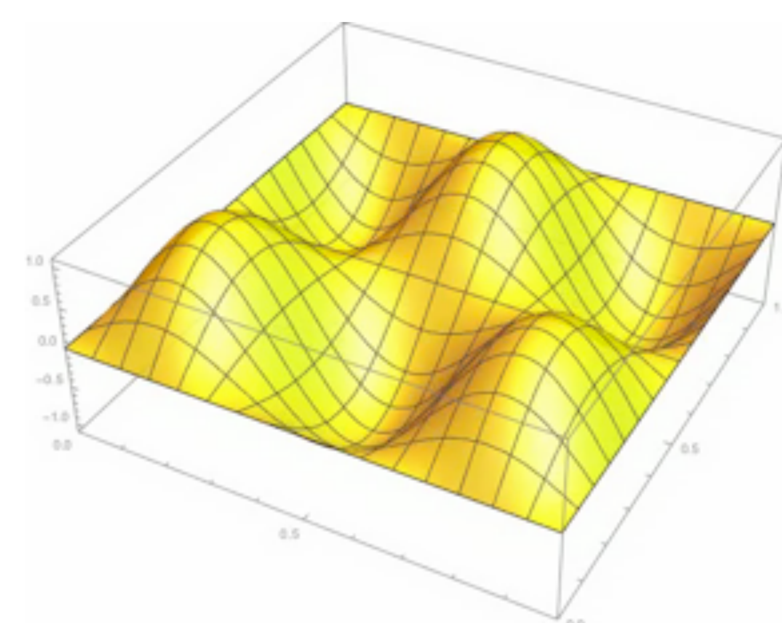
$n_1 = 2,\ n_2 = 2$



$n_1 = 3,\ n_2 = 1$



$n_1 = 3,\ n_2 = 2$



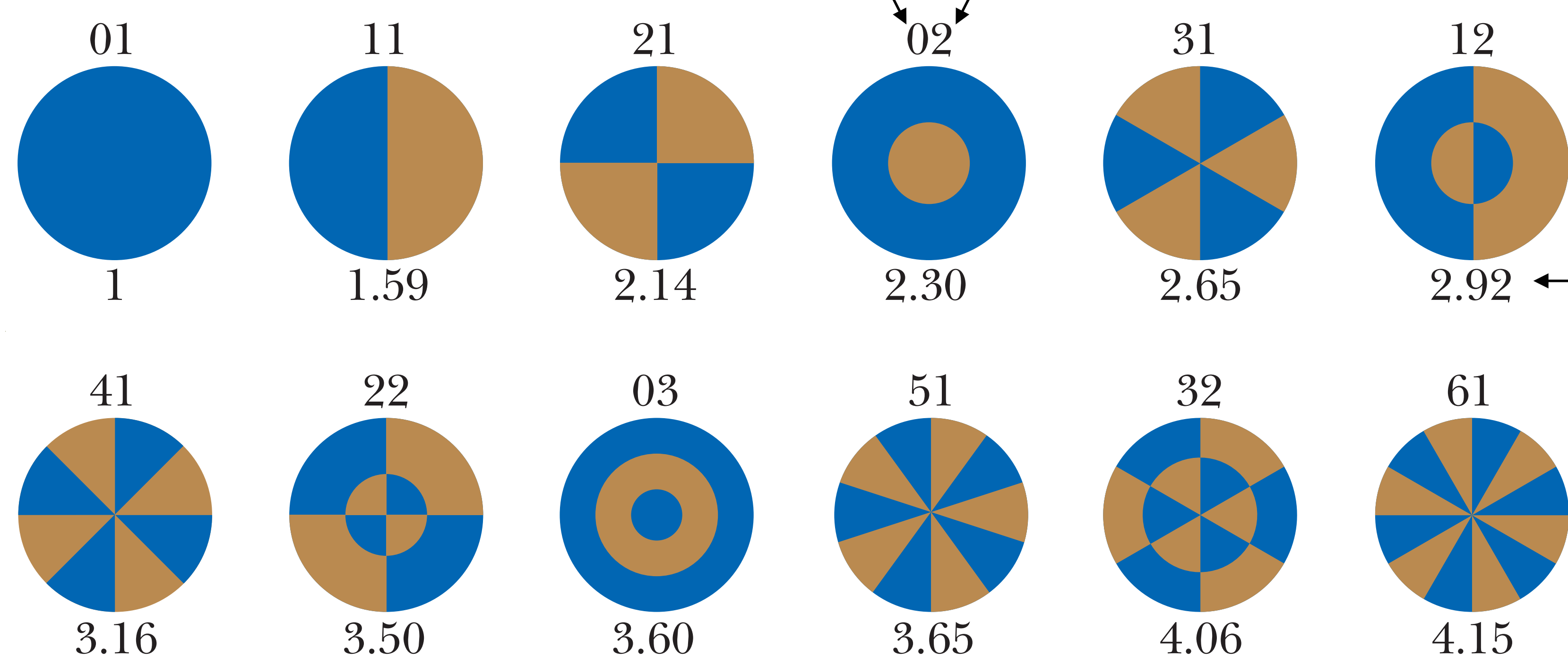
Modos normais duma membrana circular

Alguns modos normais duma membrana elástica fixa no seu perimetro.

Nodos ao longo de linhas

Número de linhas nodais radiais

Número de linhas nodais circulares



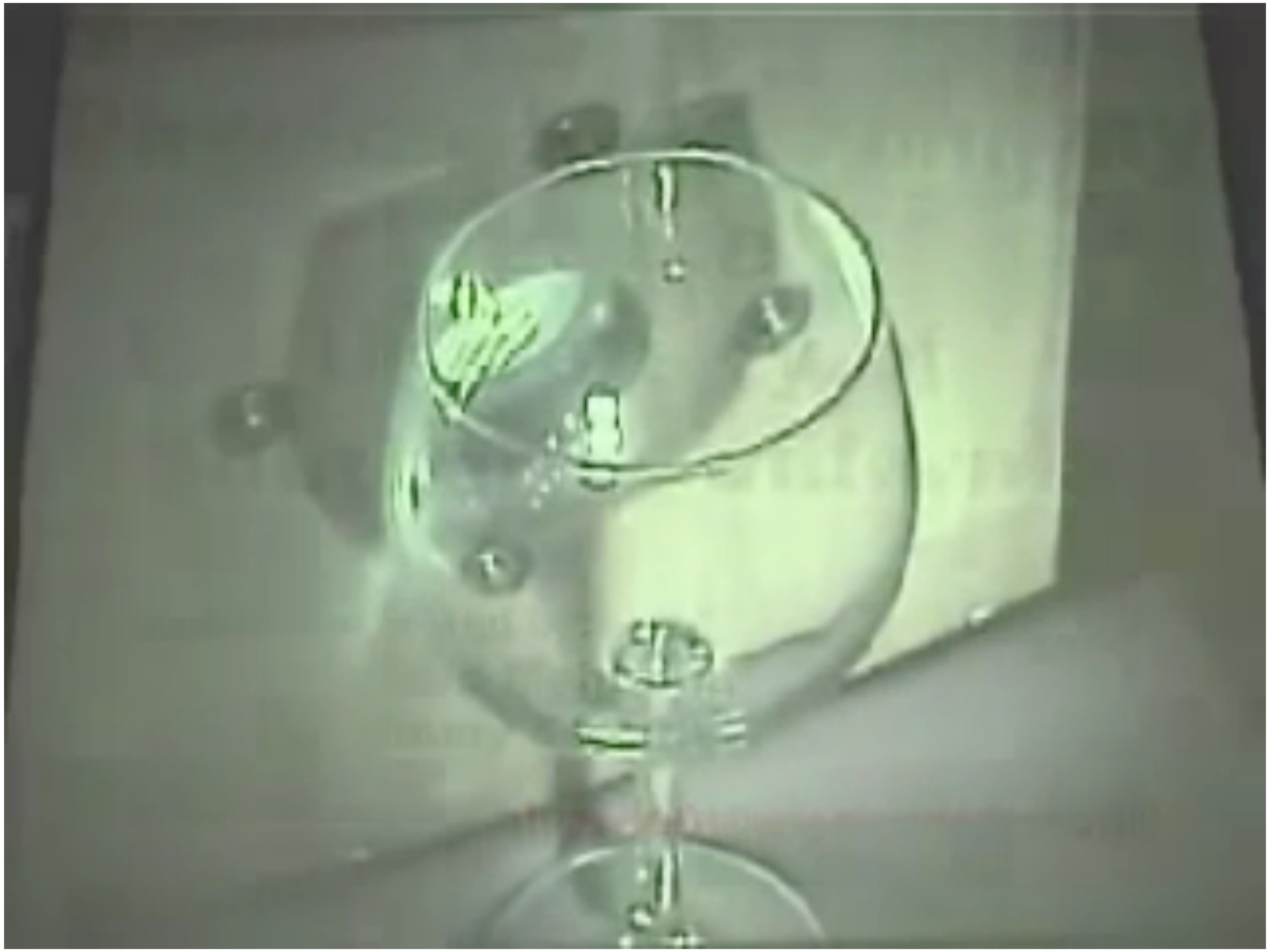
Frequência em múltiplos da fundamental

Elemento da membrana a movimentar-se para fora do plano num instante t

Elemento da membrana a movimentar-se para dentro do plano num instante t

As frequências não formam uma série de harmónicas.

Ressonância



Ressonância