Física Geral I • FIS0703

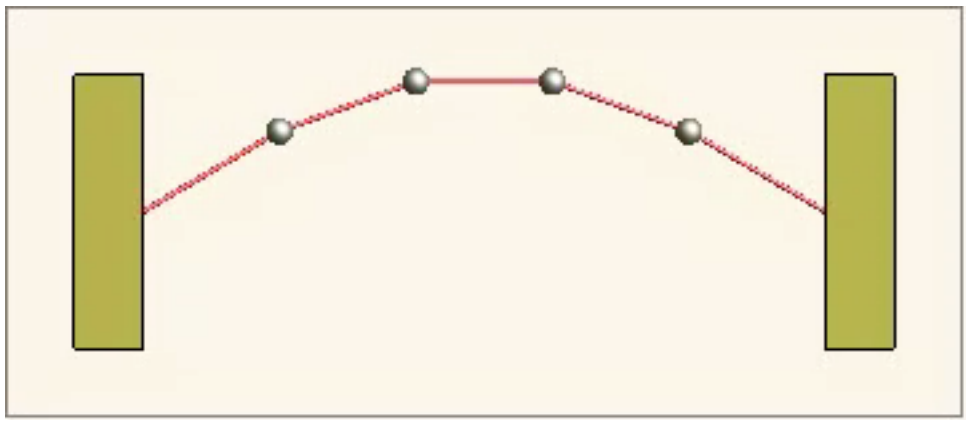
Aula 06

12/10/2016

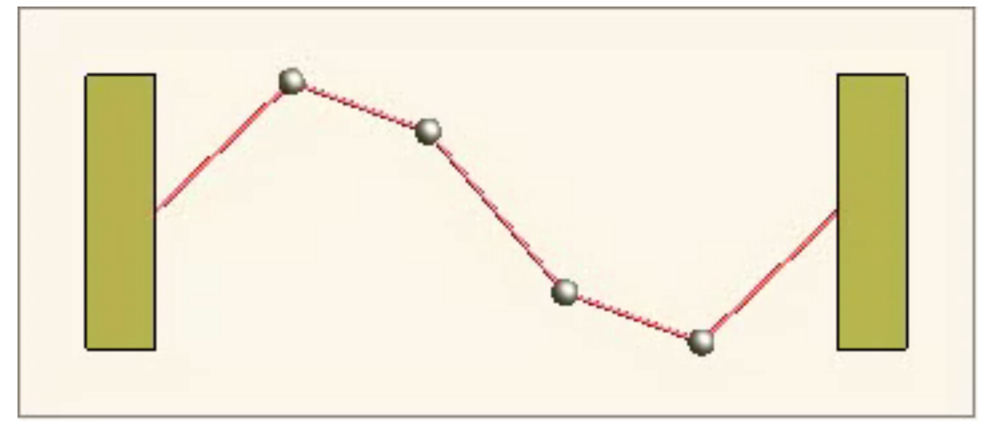
Exemplo: 4 osciladores acoplados

Para N osciladores acoplados (1D) existem N modos normais diferentes.

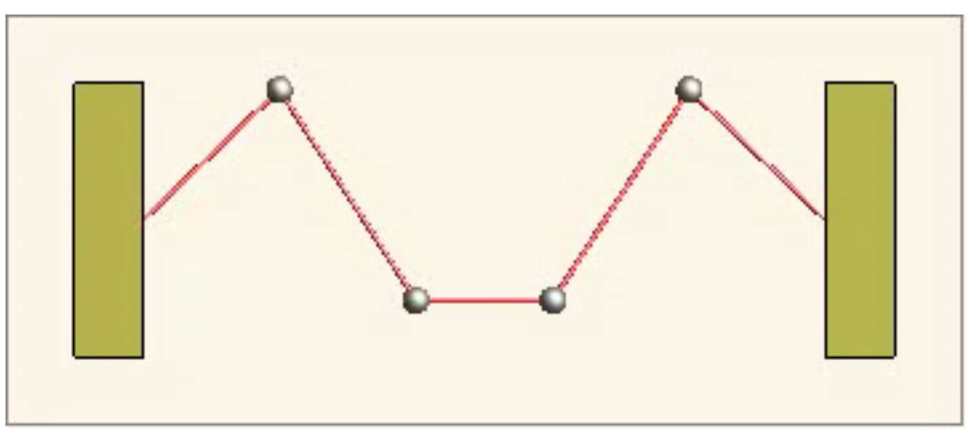
$n = 1 \quad \omega_1 = 0.62\omega_0$



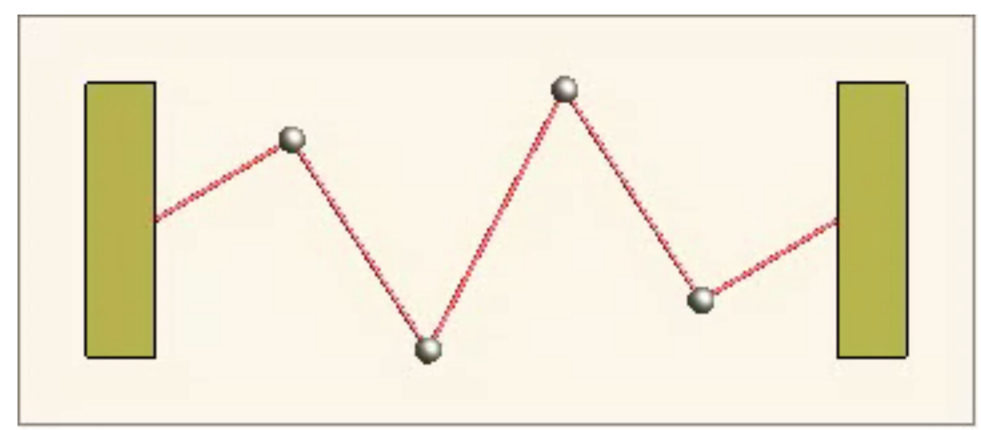
$n = 2 \quad \omega_2 = 1.18\omega_0$



$n = 3 \quad \omega_3 = 1.62\omega_0$

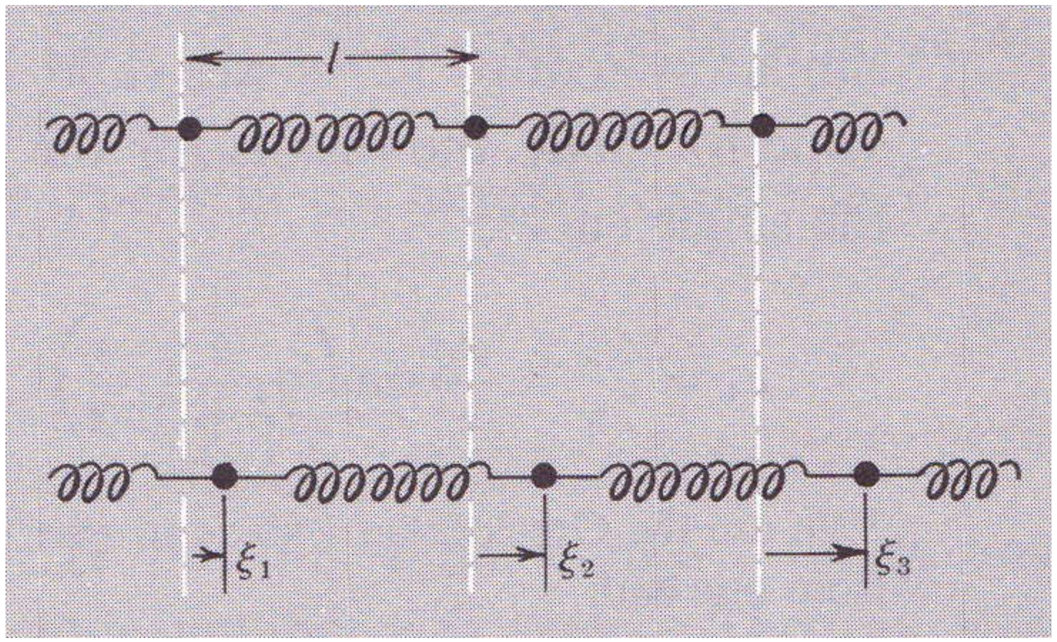


$n = 4 \quad \omega_4 = 1.90\omega_0$



Oscilações longitudinais

N massas iguais ligadas por molas ao longo duma linha reta (comprimento de equilíbrio = l)



Cada massa pode mover-se apenas ao longo desta reta.

A força restauradora vem da elongação ou compressão das molas.

Deslocamento da massa nº p : $\xi_p(t)$

2ª lei de Newton para a massa nº p :

$$m\ddot{\xi}_p = m\omega_0^2(\xi_{p+1} - \xi_p) - m\omega_0^2(\xi_p - \xi_{p-1})$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\xi}_p + 2\omega_0^2\xi_p - \omega_0^2(\xi_{p+1} + \xi_{p-1}) = 0$$

Esta equação tem exatamente a mesma forma como no caso de oscilações transversais.

Podemos escrever imediatamente os modos normais:

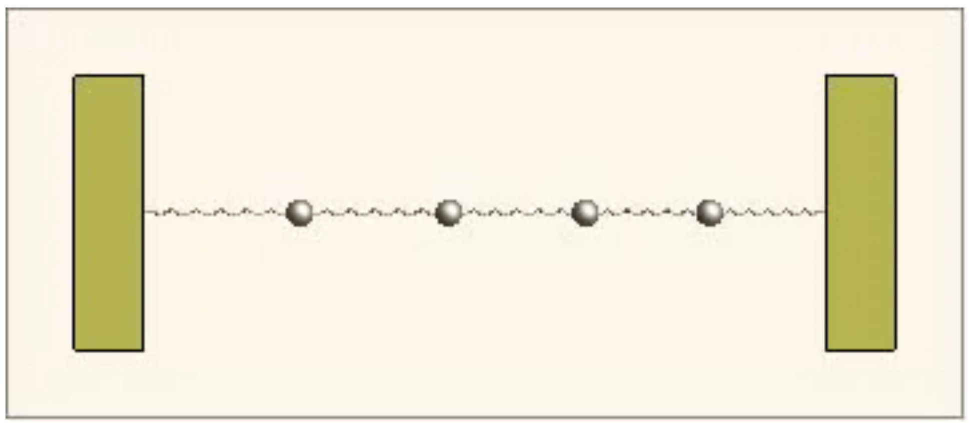
$$\xi_{p,n}(t) = C_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \cos\omega_n t \qquad \text{com} \qquad \omega_n = 2\omega_0 \,\mathrm{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

Isto é um bom modelo para uma linha de átomos num cristal (também duma coluna de gás).

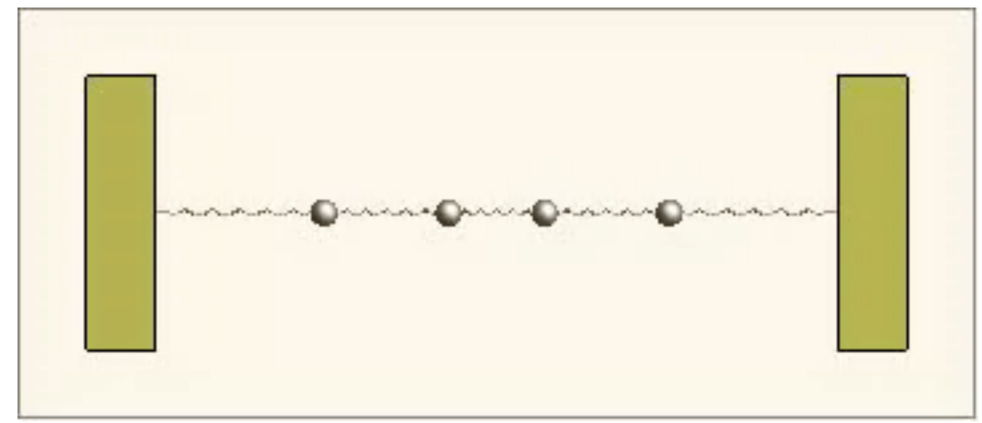
Exemplos: oscilações longitudinais

Modos normais para N=4.

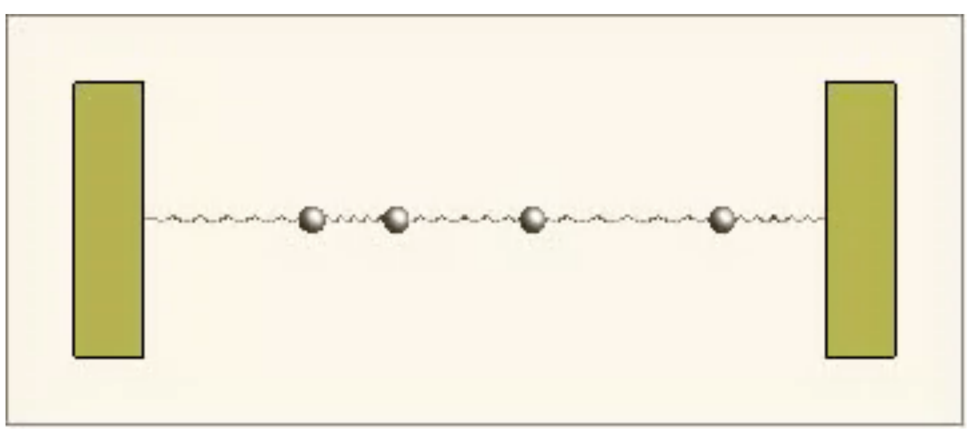
$n = 1 \quad \omega_1 = 0.62\omega_0$



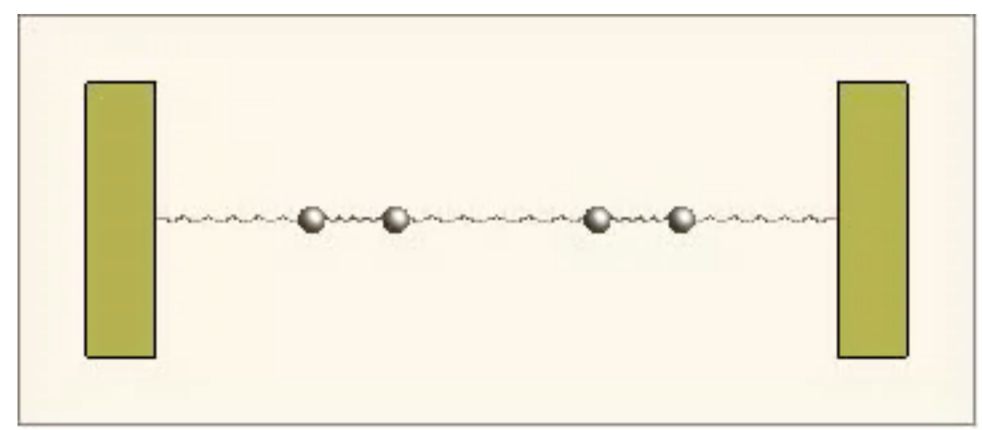
$n = 2 \quad \omega_2 = 1.18\omega_0$



$n = 3 \quad \omega_3 = 1.62\omega_0$



$n = 4 \quad \omega_4 = 1.90\omega_0$



Muitos osciladores acoplados

Oscilações transversais de N osciladores ligados por cordas elásticas, $N \gg 1$.

N=50

n=5

Queremos manter o comprimento total L e a massa total M constantes enquanto N aumenta.

$$L = (N+1)l \qquad M = Nm \qquad \mu = \frac{m}{l}$$ (densidade linear da massa)

As frequências normais são
$$\omega_n = 2\omega_0 \,\mathrm{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para n pequeno e N grande:
$$\mathrm{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \approx \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

$$\omega_n \approx 2\sqrt{\frac{T}{ml}}\frac{n\pi}{2(N+1)} = \sqrt{\frac{T}{m/l}}\frac{n\pi}{(N+1)l} \qquad \omega_n = n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

múltiplos inteiros de ω_1

Em vez de p podemos usar a distância x=pl relativamente à extremidade esquerda para especificar o oscilador nº p :

$$y_{p,n} = C_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos\omega_n t$$

$$\frac{pn\pi}{N+1} = \frac{pln\pi}{(N+1)l} = \frac{n\pi x}{L} \longrightarrow \boxed{y_n(x,t) = C_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t}$$

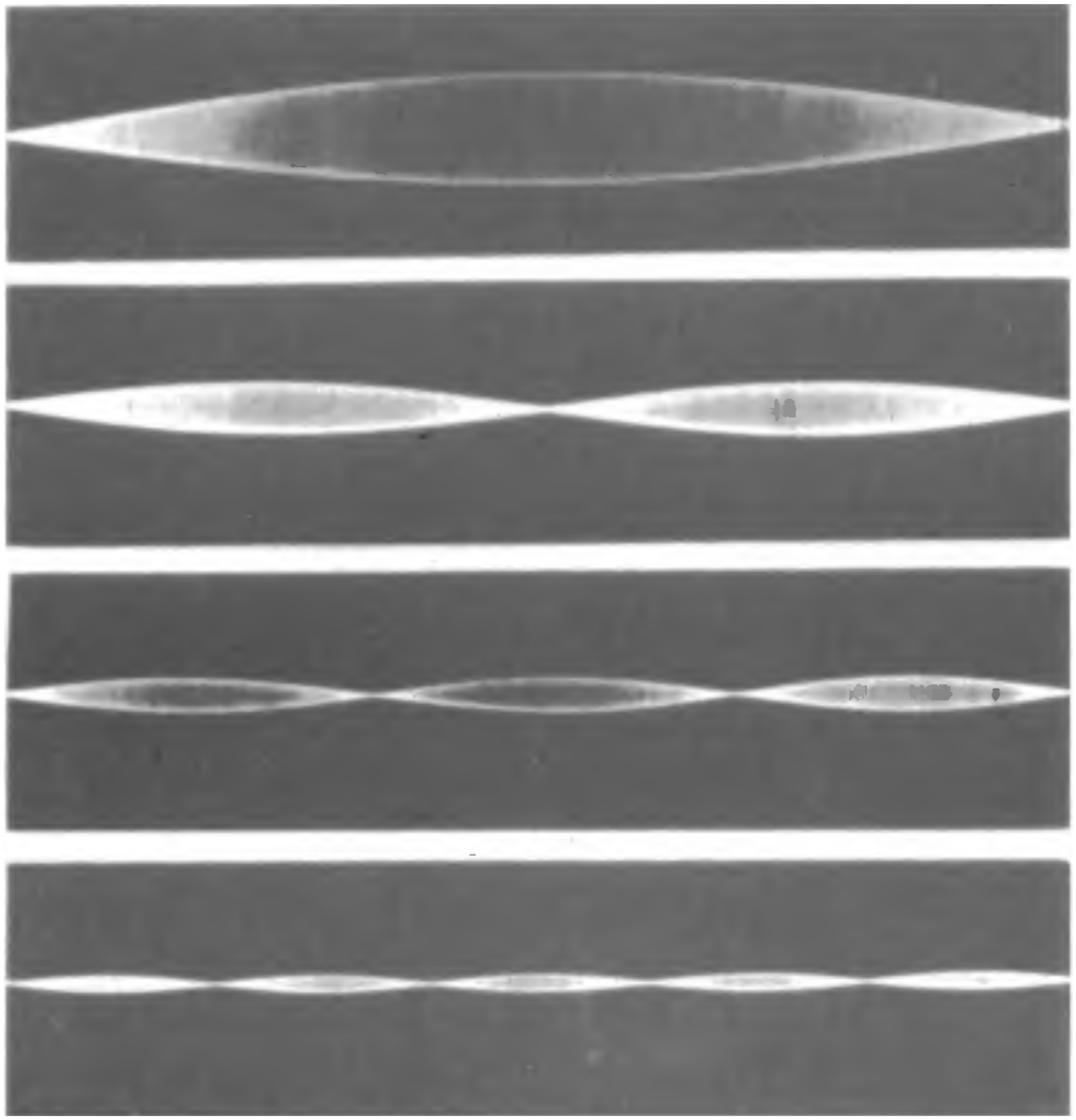
Modos normais no limite contínuo

Ondas

Oscilações em sistemas contínuas: cordas

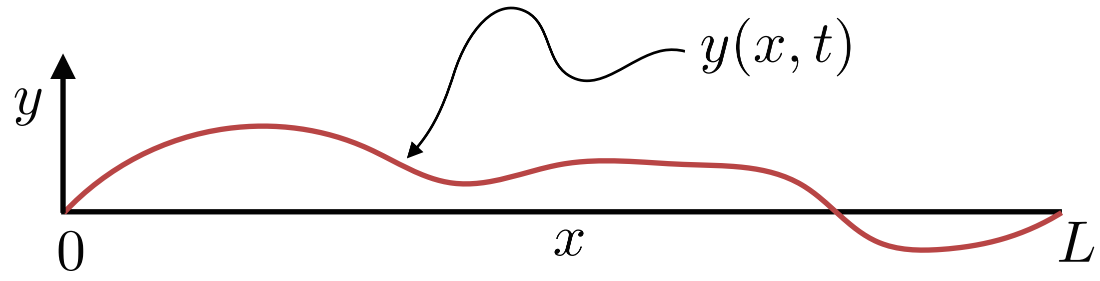
- Ondas são perturbações dum meio que se propagam no espaço, enquanto o próprio meio não é transportado
- A análise das vibrações de cordas é um bom ponto de partida para o estudo de vibrações de meios contínuos em geral.
- Os resultados também têm aplicações em muitas outras áreas da física, e.g., eletromagnetismo, mecânica quântica, teoria quântica de campos, etc.

Fotografias de cordas a vibrar em vários modos normais.



Oscilações duma corda

Consideremos uma corda elástica sob tensão T, fixada nas duas extremidades.



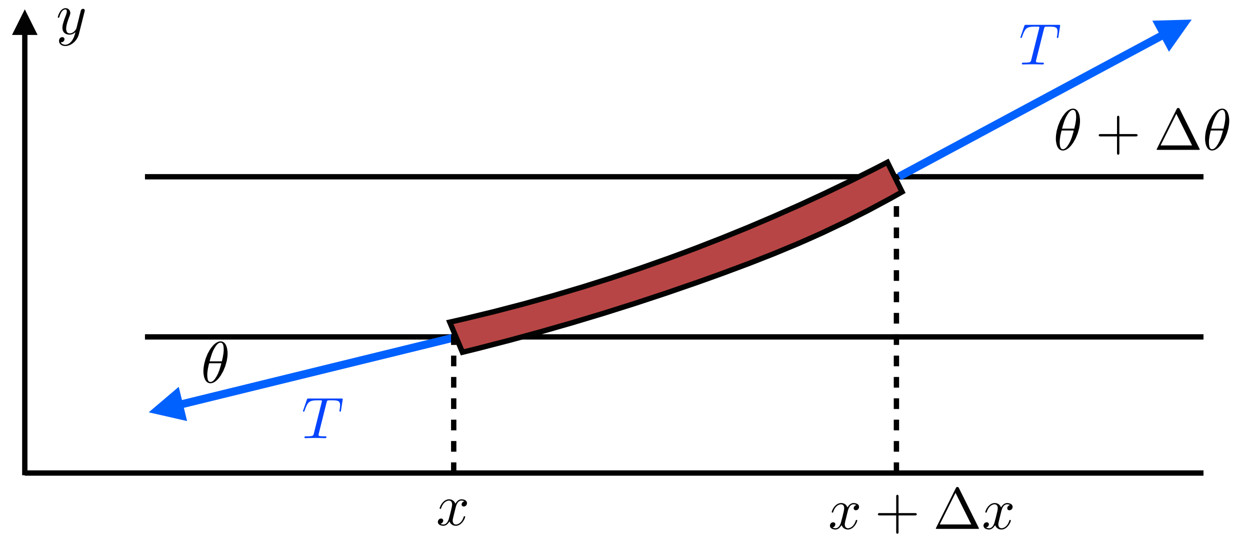


Diagrama de forças sobre um pequeno segmento da corda sob tensão T

A força total sobre o segmento é

$$F_y = T\,\mathrm{sen}\,(\theta+\Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta \approx T\Delta\theta$$

$$F_x = T\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta \quad \approx 0$$

(ângulos pequenos)

Newton

$$\boxed{(\mu\Delta x)a_y = T\Delta\theta} \qquad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\tan\theta\right)\Delta x = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x = \frac{1}{\cos^2\theta}\Delta\theta \approx \Delta\theta$$

Com isso, $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta x = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$ $\qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $\qquad v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ tem dimensão de velocidade

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

A equação de ondas

Este resultado implica que ondas com velocidade v podem propagar-se ao longo da corda.

Modos normais duma corda

Já obtivemos os modos normais de N osciladores acoplados no limite $N \to \infty$:

$$\boxed{y_n(x,t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t} \qquad \omega_n = n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Podemos verificar que estes modos normais são soluções da equação de ondas

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} = -C_n\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t \;= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 y_n$$

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = -C_n\omega_n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t \;= -\omega_n^2 y_n$$

$$-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 y_n = -\frac{1}{v^2}\omega_n^2 y_n \longrightarrow v^2 = \omega_n^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{T}{\mu}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 = \frac{T}{\mu} \qquad \checkmark$$

Usando

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

podemos escrever

$$y_n(x,t) = \frac{C_n}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x + \omega_n t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x - \omega_n t\right)\right\}$$

$$\frac{L}{n\pi}\omega_n = v \longrightarrow y_n(x,t) = \frac{C_n}{2}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x+vt)\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x-vt)\right]\right\}$$

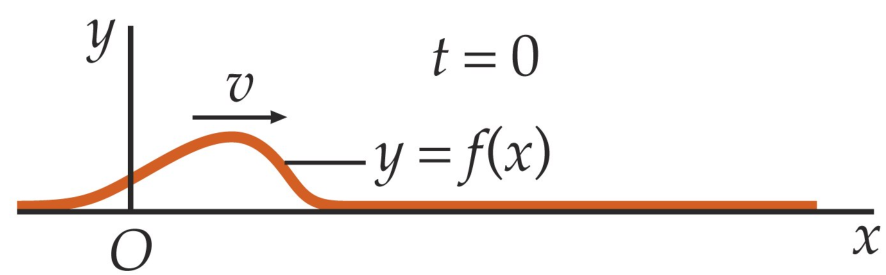
Os modos normais são somas de duas ondas progressivas (uma para a esquerda e outra para a direita, com igual amplitude).

Movimento de pulsos com perfil constante

Queremos encontrar uma função $y(x,t)$ que descreve o movimento dum pulso para a direita com velocidade constante v, sem alterar o seu perfil.

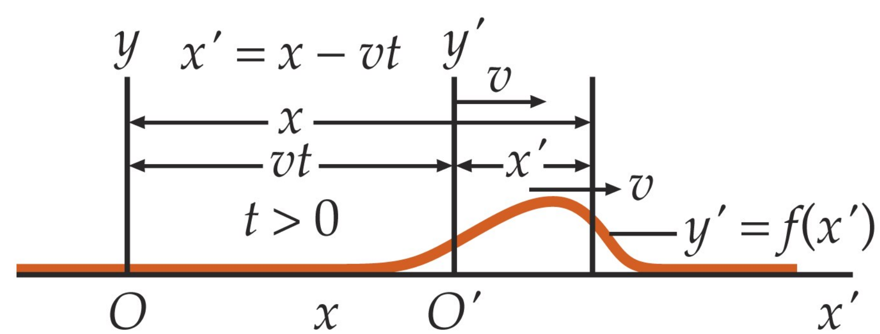
Pulso em *t*=0 :

$$y(x,0) = f(x)$$



Pulso propaga-se com velocidade v para a direita

$$y(x,t) = y'(x') = f(x-vt)$$



Qualquer função que depende de x e t apenas na combinação x-vt representa um movimento para a direita sem alteração do seu perfil.

Em analogia: um pulso que se propaga para a esquerda com velocidade v é descrito por

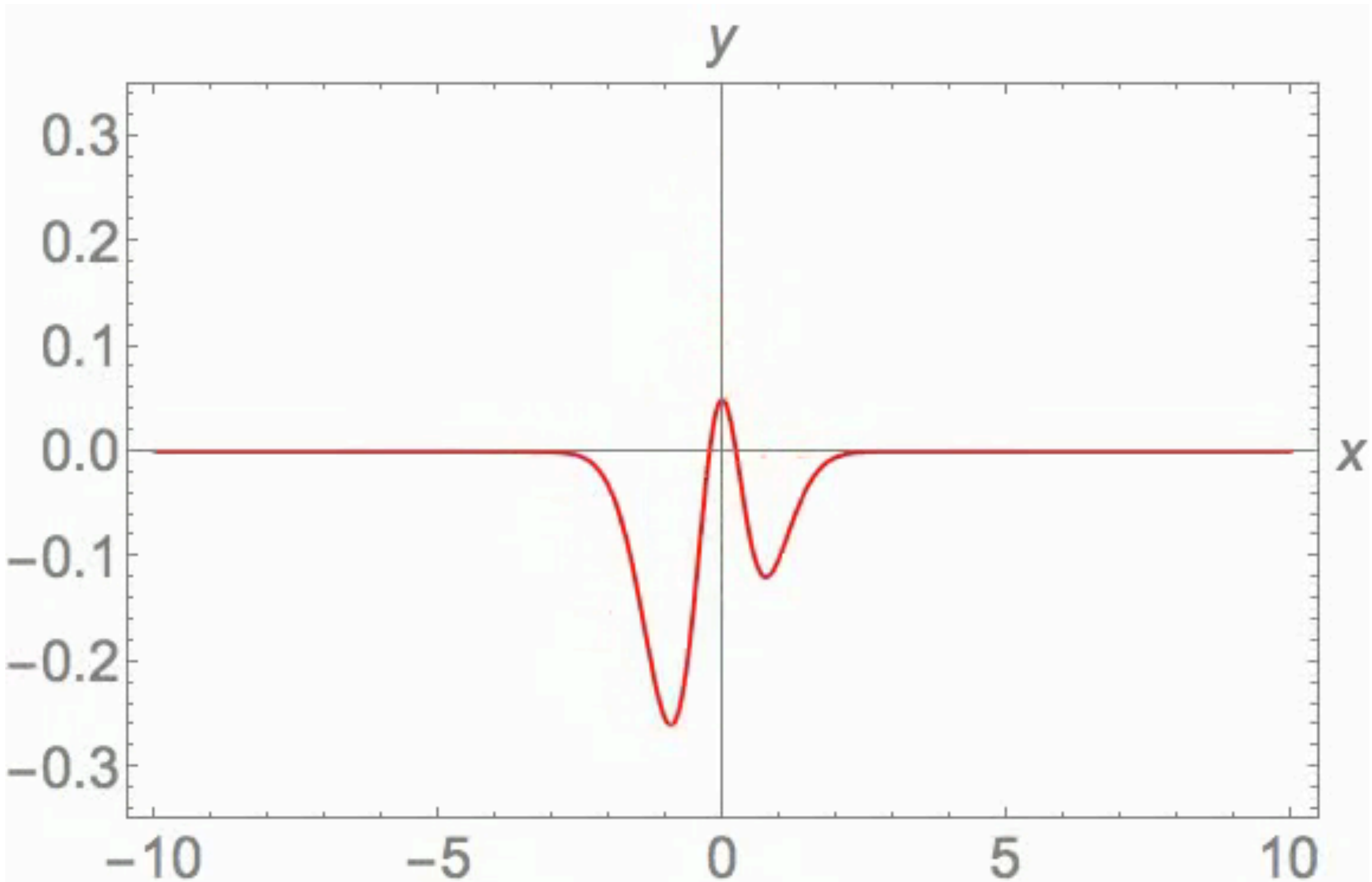
$$y(x,t) = y'(x') = f(x+vt)$$

Exemplos: propagação de pulsos

$$y(x,t) = \frac{e^{-(x-vt)^2}\left(t^2 - x^2\right)}{t^2 + x^2 + 1}$$

Esta função não é da forma $y(x,t) = f(x \pm vt)$

→ O perfil muda no tempo

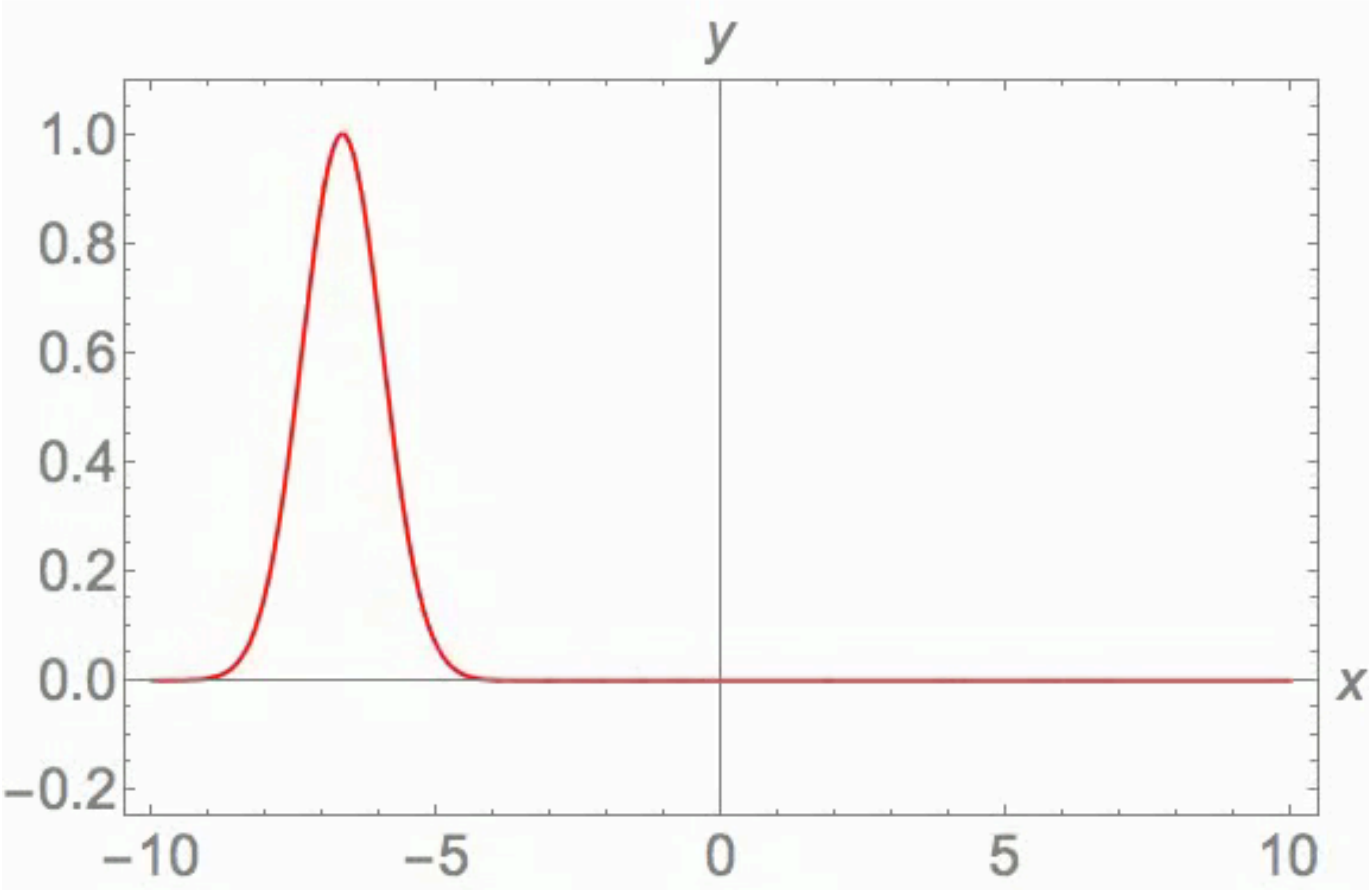


Exemplos: propagação de pulsos

$y(x,t) = e^{-(x-vt)^2}$

Esta função é da forma $y(x,t) = f(x - vt)$

$\longrightarrow$ Movimento para a direita; o perfil não muda

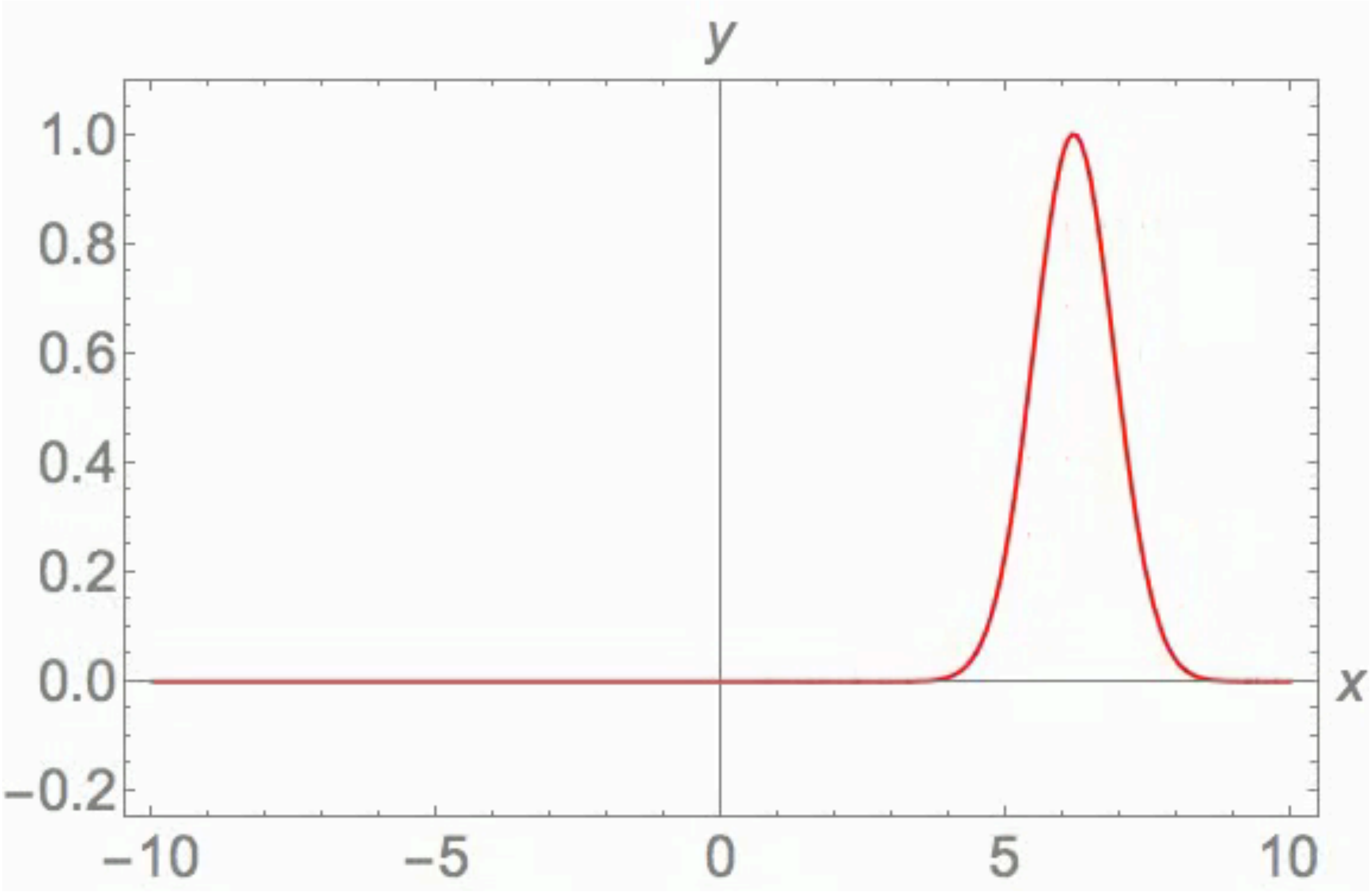


Exemplos: propagação de pulsos

$y(x,t) = e^{-(x+vt)^2}$

Esta função é da forma $y(x,t) = f(x+vt)$

$\longrightarrow$ Movimento para a esquerda; o perfil não muda



Soluções da equação de ondas

Qualquer função da forma $y(x,t) = f(x \pm vt)$ é uma solução da equação de ondas:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{d(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = f'$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{df'}{d(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = f''$$

f' é a derivada da função f em ordem do seu argumento inteiro.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -vf'$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d(-vf')}{d(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = v^2 f''$$

Agora é óbvio que a equação de ondas é satisfeita

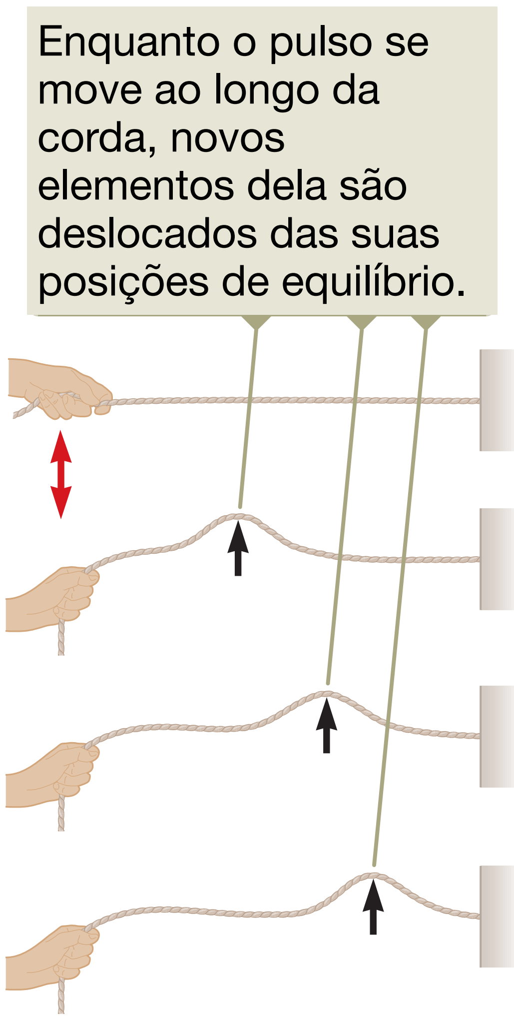
$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

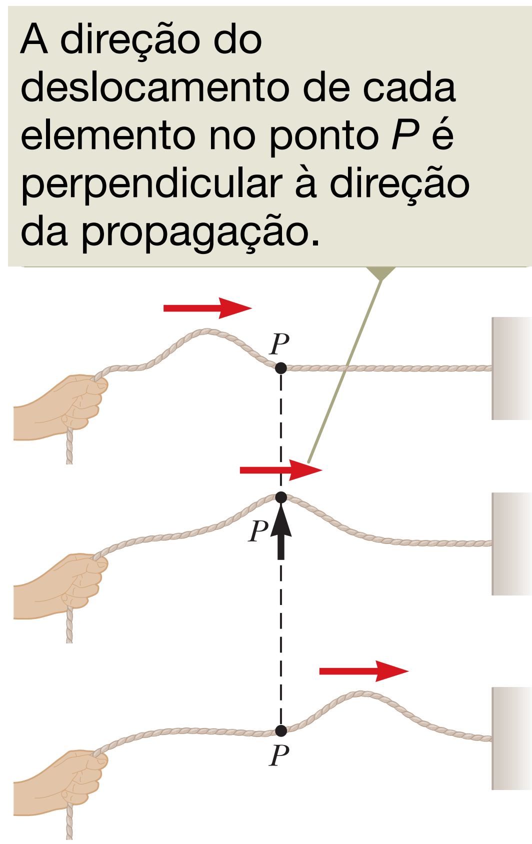
Repetição desta dedução com $y(x,t) = f(x+vt)$ dá o mesmo resultado.

Este cálculo também mostra que, na equação de ondas, v é a velocidade de propagação.

Ondas transversais e longitudinais

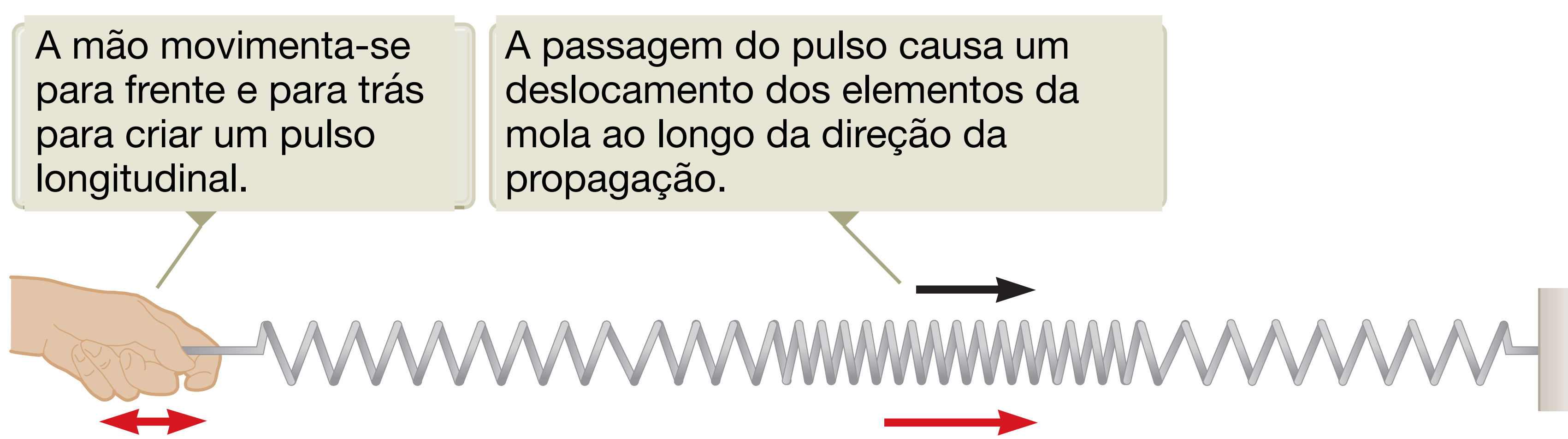
Exemplo: um movimento brusco gera uma perturbação que se propaga numa corda sob tensão





Ondas transversais: perturbação numa direção perpendicular à direção da propagação.

Ondas longitudinais: perturbação numa direção ao longo da direção da propagação.

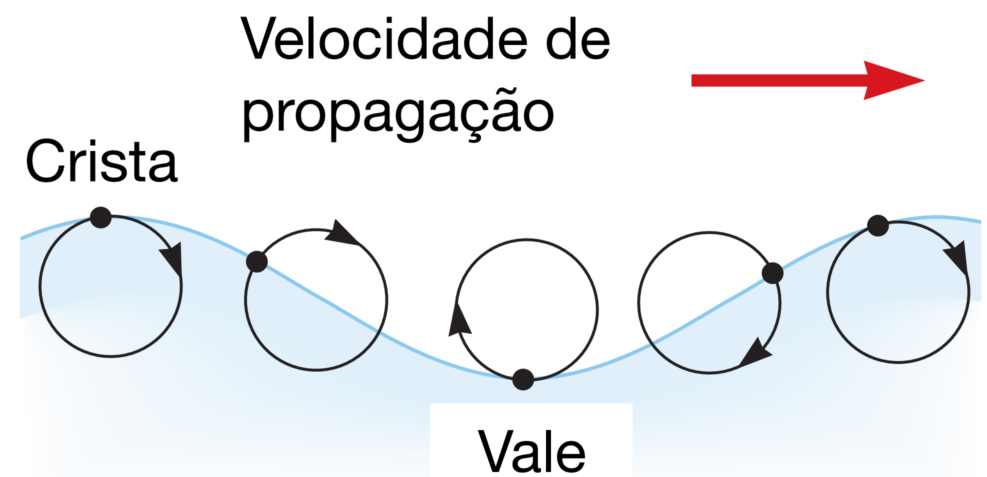


Combinação de ondas transversais e longitudinais

Na natureza existem ondas que combinam as duas formas de onda, transversal e longitudinal.

- Um exemplo bem conhecido: ondas de superfície de água.

Durante a passagem duma onda de superfície (em água profunda), pequenos elementos da água movimentam-se em trajetórias quase circulares.

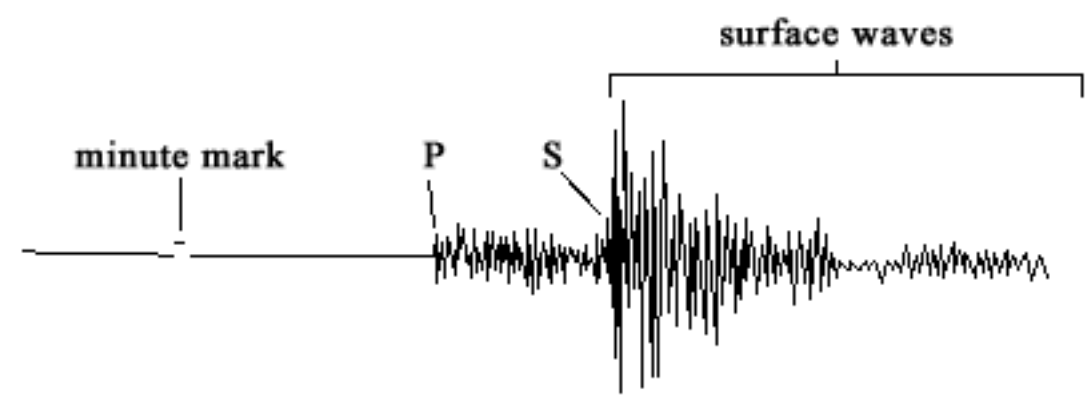


- Terramotos:

Do ponto de origem do sismo abaixo da superfície da Terra, ondas longitudinais (ondas P - “primárias”) e ondas transversais (ondas S - “secundárias”) são emitidas.

Na superfície, as ondas P são mais rápidas (7-8 km/s), as ondas S mais lentas (4-5 km/s).

Um sismógrafo regista a chegada destas ondas. Da diferença do tempo é possível deduzir a distância entre o epicentro e o observador.



Reflexão de pulsos em cordas

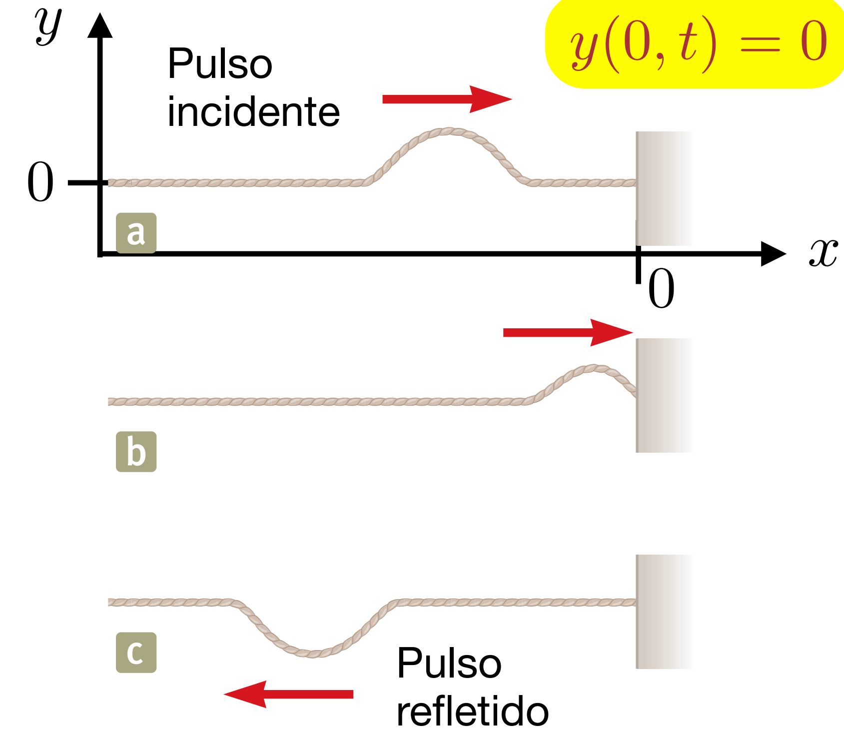
Uma situação importante ocorre quando uma onda progressiva encontra alguma alteração no meio pelo qual se propaga.

- Exemplo: um pulso numa corda encontra uma extremidade fixa.

  ▸ Observa-se que o pulso é refletido, mas também invertido.

  ▸ Quando chega ao ponto fixo, a corda exerce uma força para cima sobre este ponto. Pela 3ª lei de Newton, o ponto exerce uma força com mesma intensidade sobre a corda, mas dirigida para baixo.

$$y(0,t)=0$$

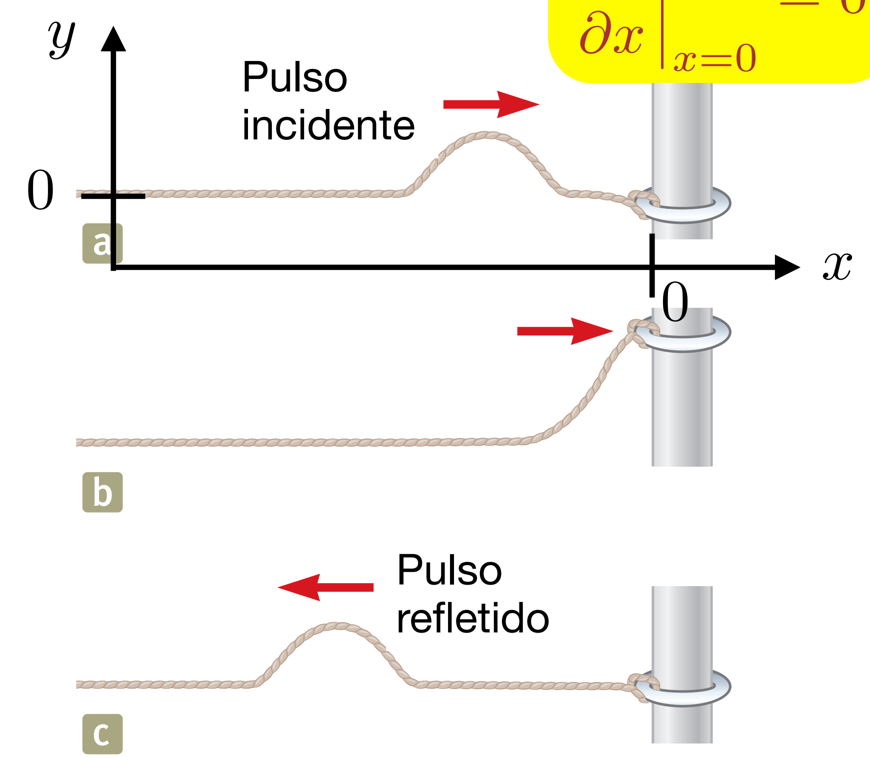


- Exemplo: a corda termina numa extremidade livre. Equivalente: a corda é fixa a um anel (sem massa) que pode deslizar livremente para cima e para baixo duma haste.

  ▸ Observa-se que o pulso é refletido, mas não invertido.

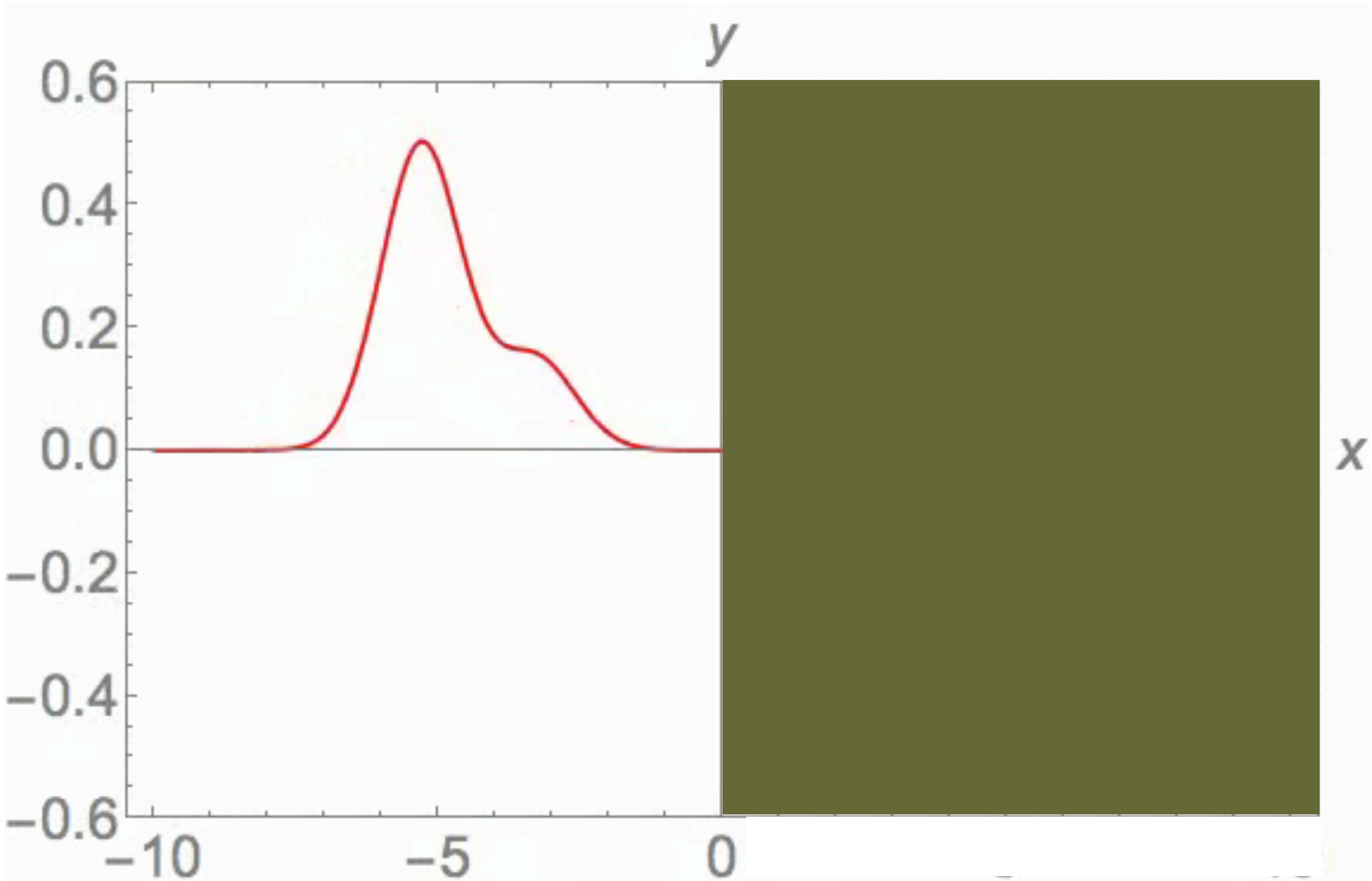
  ▸ Quando o pulso chega à extremidade, a corda exerce uma força para cima sobre o anel, e ele sobe até ao dobro da altura do pulso. Depois desce com a parte descendente do pulso. A força que o anel exerce, pela 3ª lei de Newton, sobre a corda durante este tempo, produz o pulso refletido.

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$



Propagação de pulsos: extremidade fixa

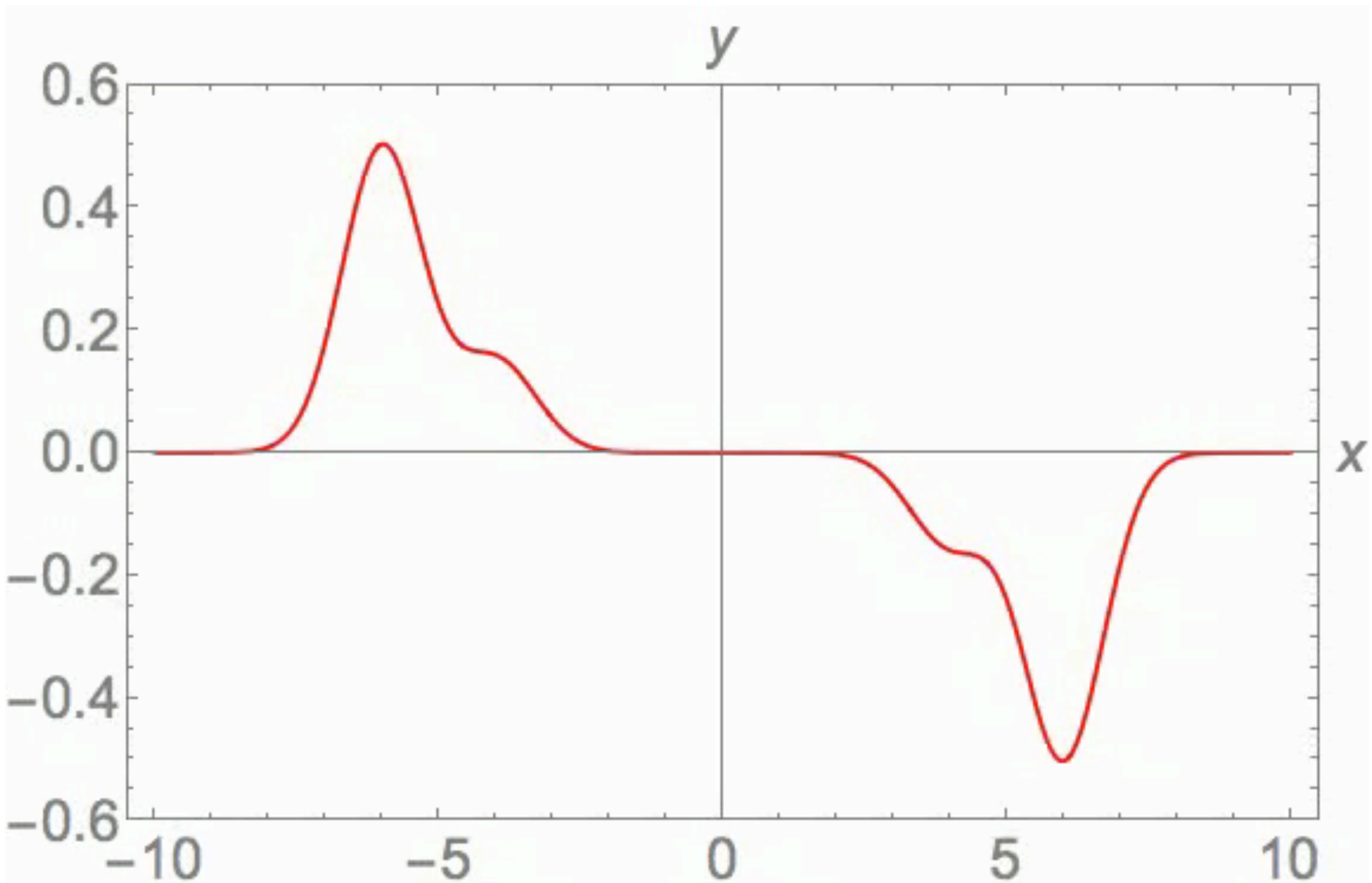
Condição fronteira: corda fixa em x=0



Propagação de pulsos: extremidade fixa

Condição fronteira: corda fixa em x=0

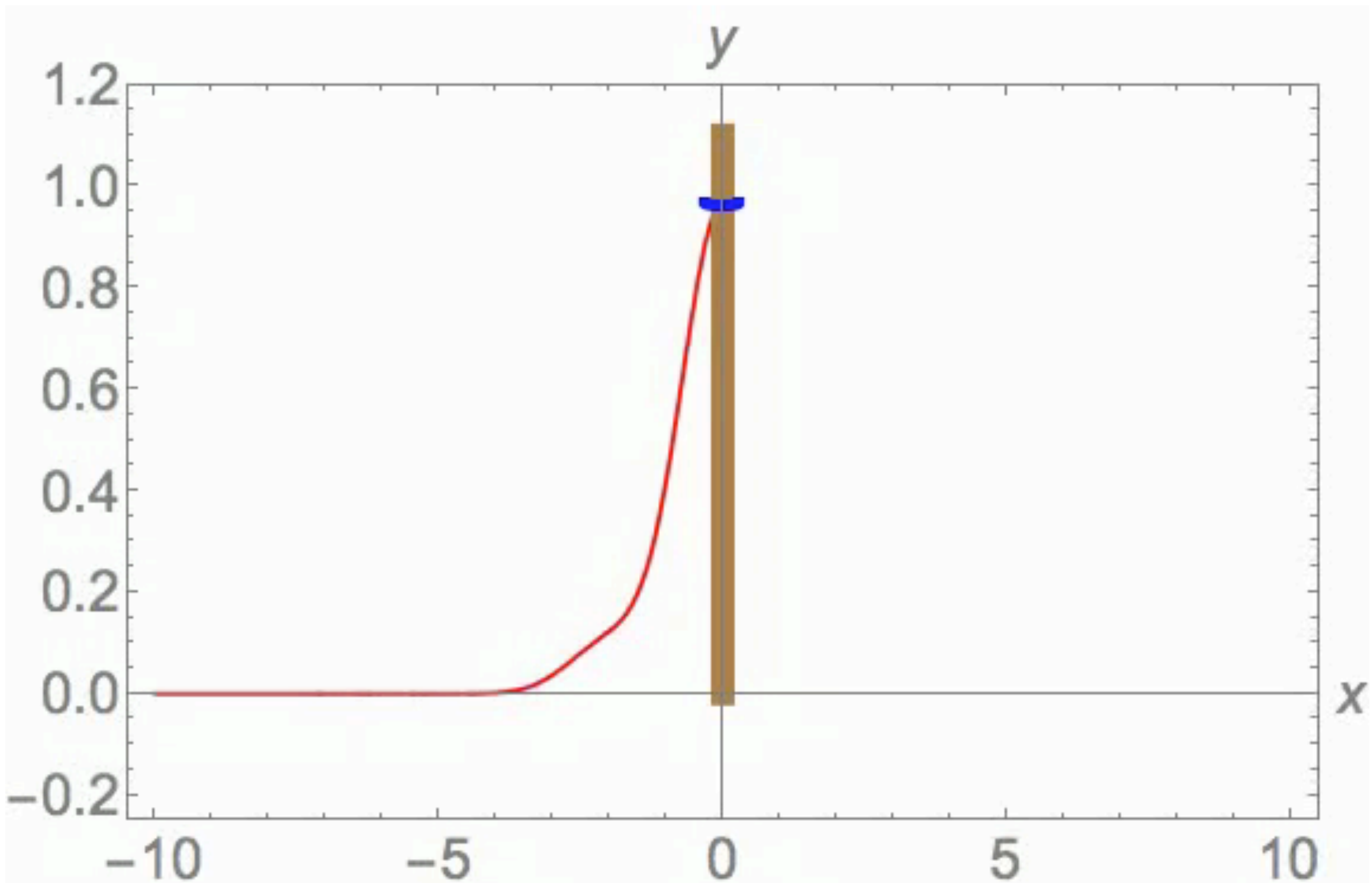
Pulso virtual



Propagação de pulsos: extremidade livre

Condição fronteira: corda sempre horizontal em x=0

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$



Propagação de pulsos: extremidade livre

Condição fronteira: corda sempre horizontal em x=0

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Pulso virtual