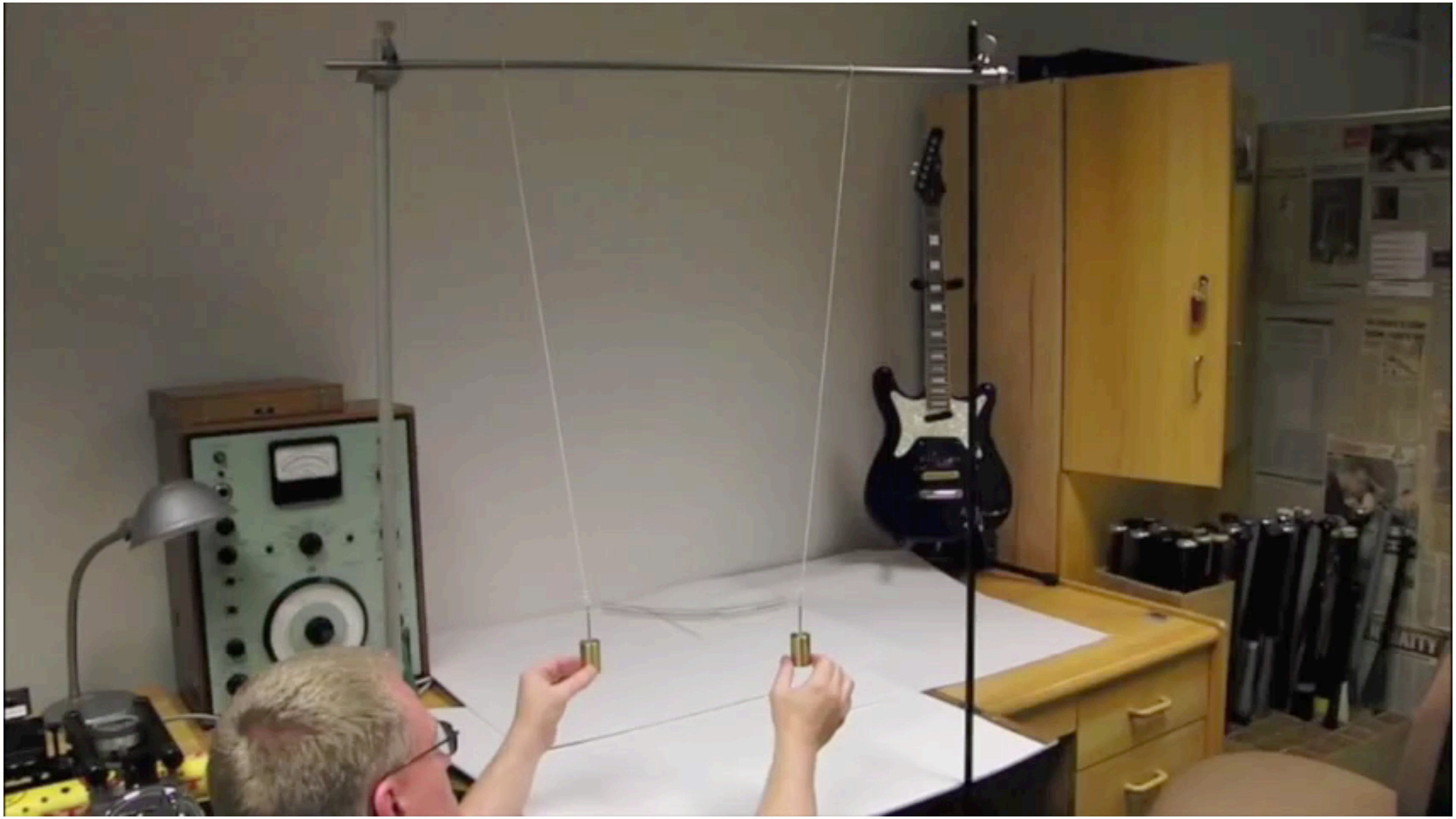
Física Geral I • FIS0703

Aula 05

10/10/2016

Osciladores acoplados

Exemplo: dois pêndulos iguais ligados por uma mola



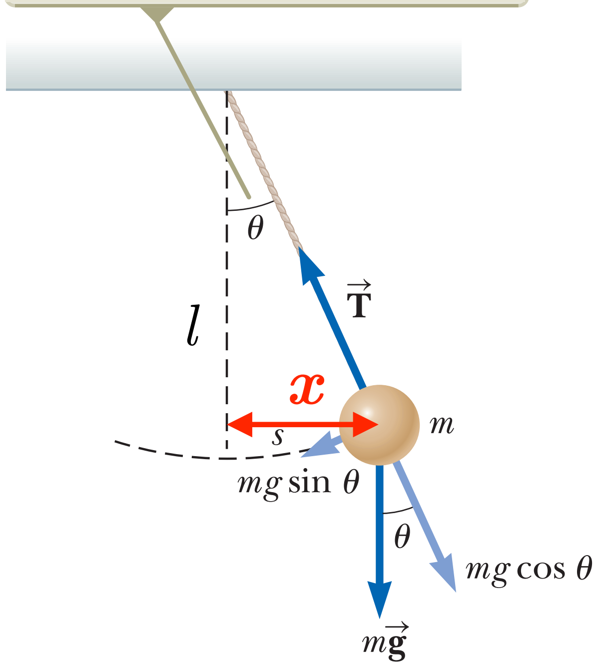
O movimento dos pêndulos é bastante complicado!

No entanto, pode ser descrito em termos dos chamados modos normais do sistema.

O pêndulo em termos do deslocamento horizontal

Voltamos à nossa dedução da equação do pêndulo simples:

Quando θ é pequeno, o movimento do pêndulo é aproximadamente um MHS em torno da posição de equilíbrio θ=0.



Direção tangencial: $F_t = ma_t \longrightarrow -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\ddot{s}$

Comprimento do arco $s = l\theta \qquad \ddot{s} = l\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Aproximação para ângulos pequenos: $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ equação para o ângulo em função do tempo

O deslocamento horizontal é $x = l\,\mathrm{sen}\,\theta \approx l\theta \qquad (x \approx s)$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

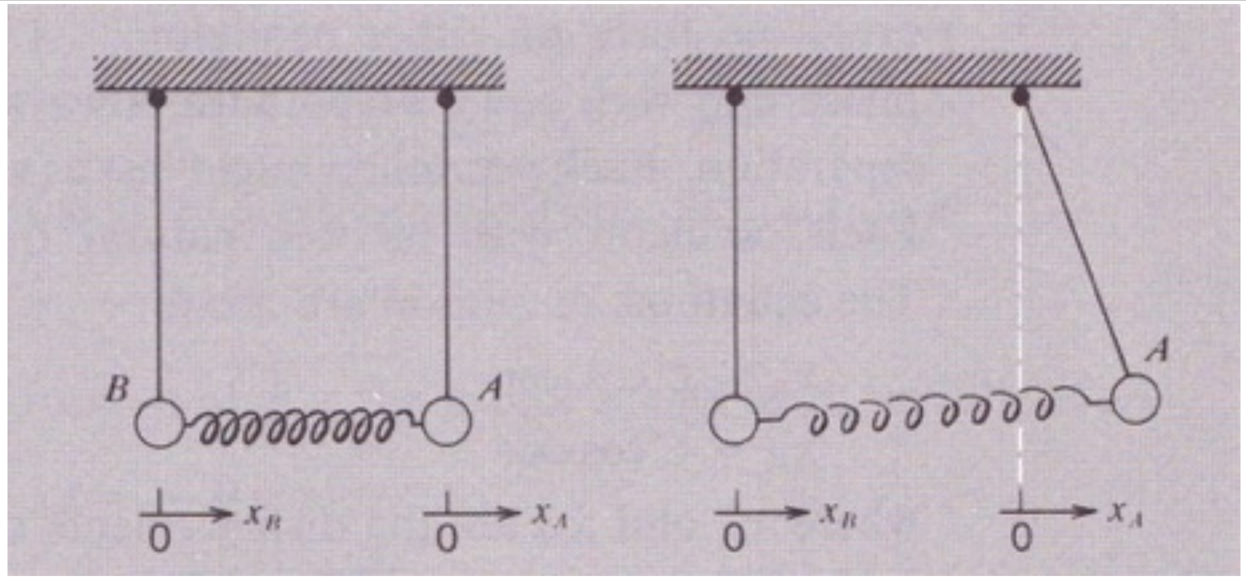
Multiplicação por m dá a 2ª lei de Newton escrita em termos de x :

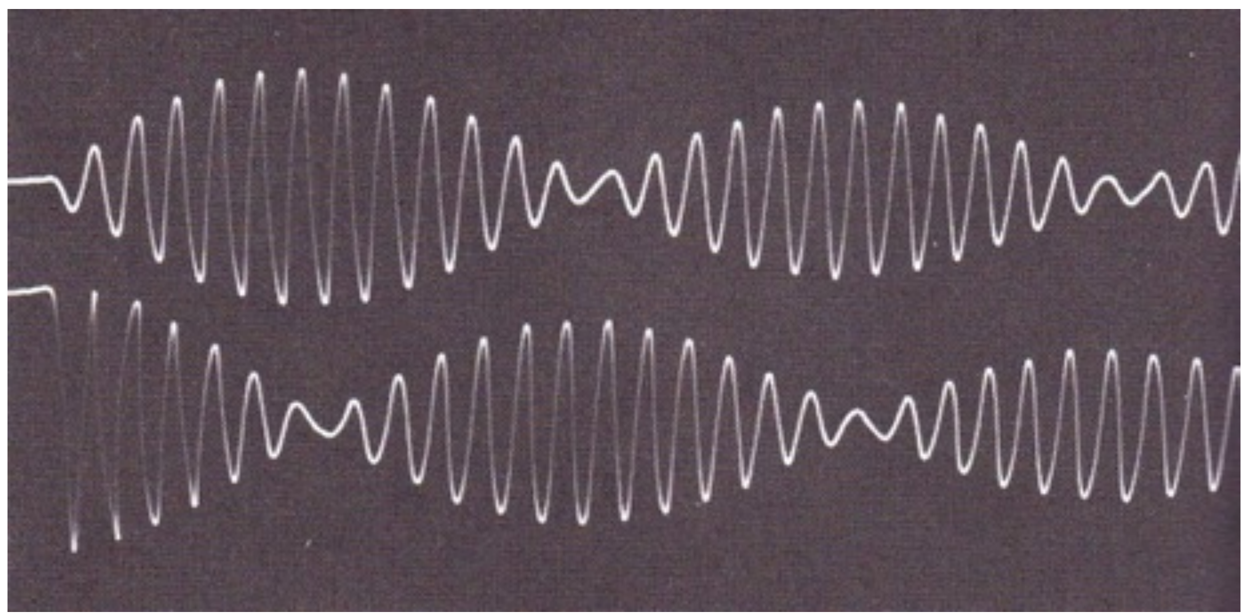
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$$

A força restauradora que atua na massa pendurada pode então também ser escrita como

$$F_{\mathrm{pend}}(x) = -m\omega_0^2 x$$

O movimento do pêndulo acoplado





Fotografia do movimento de dois pêndulos acoplados, com luzes afixadas.

(Nota-se também o amortecimento.)

O movimento de cada pêndulo parece um caso de batimento — uma sobreposição de dois MHS com frequências diferentes.

E isso é exatamente o que é!   Trata-se da sobreposição de modos normais.

Modos normais

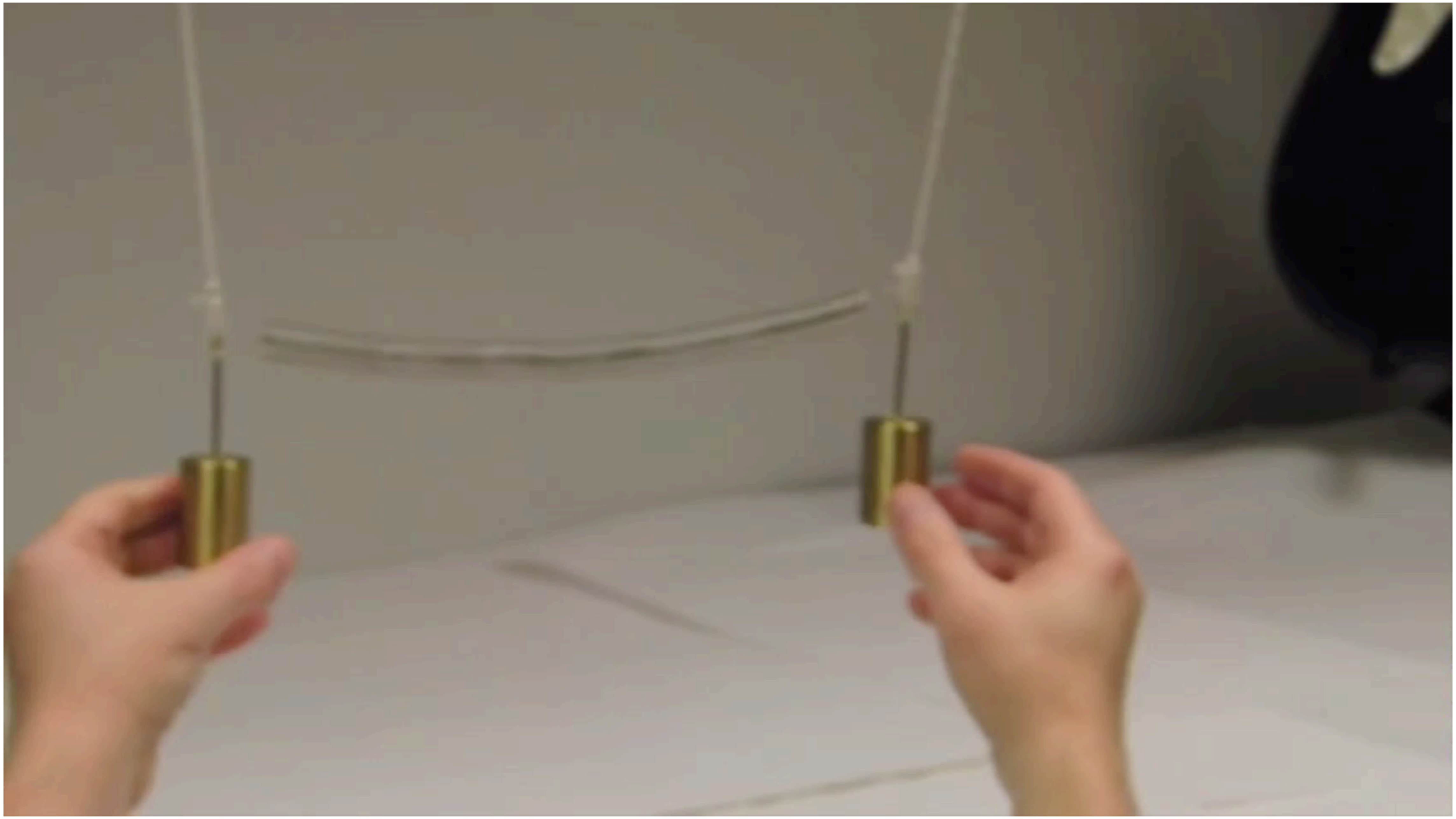
O que é um modo normal?

Um estado do sistema em que todos os osciladores oscilam com a mesma frequência, e cada oscilador tem a mesma fase ou a fase oposta de qualquer outro.

Modo normal 1

Desvio inicial dos dois pêndulos é igual. A distância entre eles permanece igual à distância de equilíbrio da mola → sem força da mola. A frequência deste modo é a dum pêndulo livre.

Modo normal 2



- O desvio inicial dos dois pêndulos é igual no sentido oposto.
- A mola exerce uma força, atrativa ou repulsiva.
- O movimento de uma massa é a imagem-espelho do da outra, i.e., eles têm sempre a fase oposta.
- A frequência deste modo é maior do que a dum pêndulo livre.

Modos normais

O que é um modo normal?

Um estado do sistema em que todos os osciladores oscilam com a mesma frequência, e cada oscilador tem a mesma fase ou a fase oposta de qualquer outro.

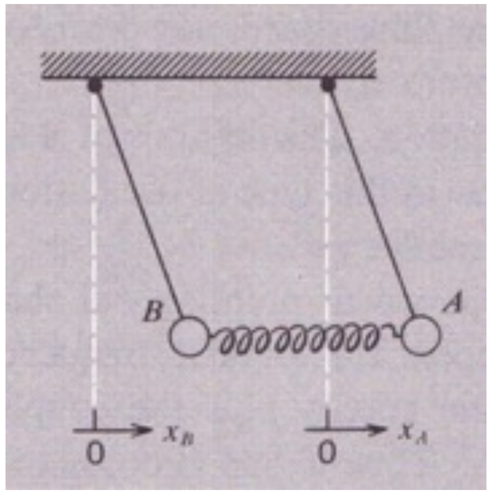
No caso dos dois pêndulos acoplados os modos normais são fáceis de encontrar por simetria.

Modo 1: A distância entre as massas permanece constante (como se a mola não estivesse presente)

$$x_A = C \cos \omega_0 t$$

$$x_B = C \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

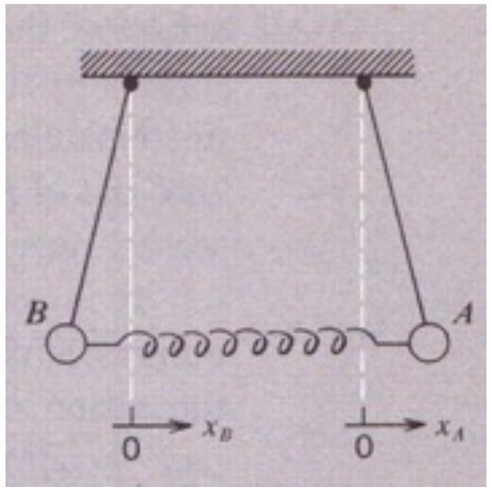


Modo 2: Quando o deslocamento de uma massa é x, a mola fica esticada em $2x$

$$m\ddot{x}_A = -m\omega_0^2 x_A - 2kx_A \qquad x_B = -x_A$$

$$\ddot{x}_A + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)x_A = 0 \qquad \omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x}_A + \omega'^2 x_A = 0 \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$$



Sobreposição dos modos normais

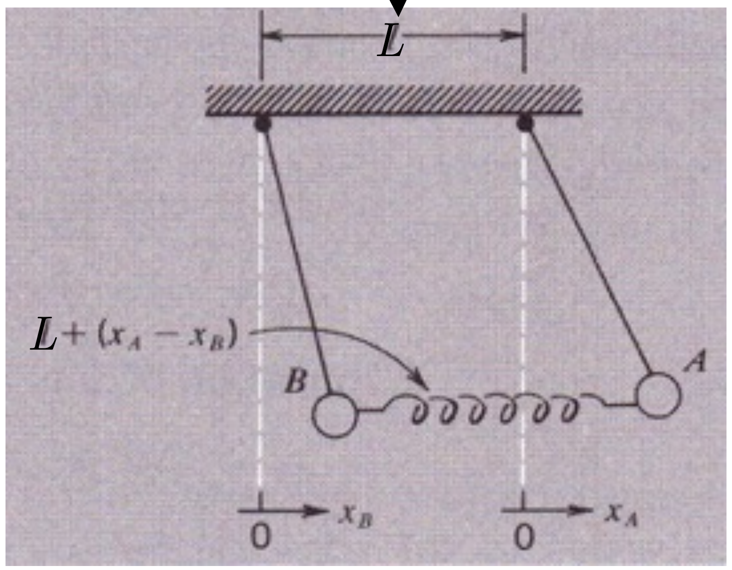
Situação do sistema num instante arbitrário:

A em x_A

B em x_B

(relativamente à respetiva posição de equilíbro)

Comprimento de equilíbrio da mola



A mola é esticada em $x_A - x_B$

exerce força $\begin{cases} -k(x_A - x_B) & \text{sobre A} \\ k(x_A - x_B) & \text{sobre B} \end{cases}$

$$m\ddot{x}_A = -m\omega_0^2 x_A - k(x_A - x_B)$$

$$m\ddot{x}_B = -m\omega_0^2 x_B + k(x_A - x_B)$$

$$\omega_c^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}_A + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B = 0$$

$$\ddot{x}_B + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A = 0$$

Sistema de equações diferenciais acopladas

As equações têm de ser resolvidas simultaneamente

Neste caso é fácil: somar e subtrair as duas equações dá

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_A + x_B) - \omega_c^2(x_A + x_B) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_A - x_B) + \omega_c^2(x_A - x_B) = 0$$

Resolução do sistema de equações

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_A + x_B) - \omega_c^2(x_A + x_B) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_A - x_B) + \omega_c^2(x_A - x_B) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) + \omega_0^2(x_A + x_B) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)(x_A - x_B) = 0$$

Duas equações de MHS, mas para coordenadas normais

$$q_1 = x_A + x_B$$

$$q_2 = x_A - x_B$$

Agora são duas equações independentes

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \omega'^2 q_2 = 0 \qquad \text{com} \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$$

Encontramos as mesmas frequências normais como antes através de considerações de simetria

Soluções particulares (fase zero): $q_1 = C\cos\omega_0 t$ $q_2 = D\cos\omega' t$

C e D dependem das condições iniciais

$$x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}C\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}D\cos\omega' t$$

$$x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{1}{2}C\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}D\cos\omega' t$$

Movimento dos pêndulos acoplados

$$x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}C\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}D\cos\omega' t \qquad x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{1}{2}C\cos\omega_0 t - \frac{1}{2}D\cos\omega' t$$

Condições iniciais (t=0): $x_A = A_0$ $\quad \dot{x}_A = 0$ $\quad x_B = 0$ $\quad \dot{x}_B = 0$

$$x_A = A_0 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D \qquad x_B = 0 = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D$$

(as derivadas são automaticamente zero)

$$\longrightarrow \qquad C = A_0 \qquad D = A_0$$

Resultado:

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t + \cos\omega' t) \\ x_B &= \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t - \cos\omega' t) \end{aligned}}$$

uma sobreposição de modos normais

Também pode ser escrito:

$$x_A = A_0 \cos\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right)$$

$$x_B = A_0 \,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right)$$

Nesta forma o batimento é explícito.

Determinação dos modos normais

Como podemos determinar os modos normais quando simetrias não ajudam?

Procuramos soluções da forma $x_A = C_A \cos(\omega t + \phi_A)$ $x_B = C_B \cos(\omega t + \phi_B)$

mesma frequência angular

As fases relativas entre x_A e x_B são 0 ou π num modo normal (sem atrito).

Porque $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$, uma diferença de fase de π pode ser representada por um sinal - da amplitude.

Primeiro procuramos soluções da forma mais simples $x_A = C_A \cos\omega t$ $x_B = C_B \cos\omega t$

mas as amplitudes C_A e C_B podem ser positivas ou negativas.

velocidade inicial = 0

Substituir estas funções nas equações diferenciais acopladas

$$\ddot{x}_A + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B = 0$$

$$\ddot{x}_B + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A = 0$$

dá o resultado:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_A \cos\omega t - \omega_c^2 C_B \cos\omega t = 0$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_B \cos\omega t - \omega_c^2 C_A \cos\omega t = 0$$

As equações têm de valer em qualquer instante t → dividir pelo factor comum $\cos\omega t$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_A - \omega_c^2 C_B = 0$$

$$-\omega_c^2 C_A + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_B = 0$$

Um sistema de equações lineares para as amplitudes incógnitas C_A e C_B

Determinação dos modos normais (cont.)

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_A - \omega_c^2 C_B = 0$$
$$-\omega_c^2 C_A + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C_B = 0$$

Para um valor arbitrário de ω, a única solução é

$C_A = C_B = 0$ ("solução trivial")

Mas para certos valores de ω, as duas equações não são independentes. Neste caso temos apenas uma equação para as duas variáveis. Apenas a razão C_A / C_B é determinada.

Das duas equações obtemos: $\dfrac{C_A}{C_B} = \dfrac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}$ e $\dfrac{C_A}{C_B} = \dfrac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2}$

Quando as amplitudes não são ambas zero, isso implica $\dfrac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2} = \dfrac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2}$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)^2 = \omega_c^4 \qquad -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 = \pm\omega_c^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2 \mp \omega_c^2$$

Duas soluções: $\boxed{\omega_1 = \omega_0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}}$ (confirma o resultado já obtido)

Modo 1: $\omega = \omega_1 = \omega_0 \qquad \dfrac{C_A}{C_B} = 1$

$$x_A = C\cos\omega_1 t$$
$$x_B = C\cos\omega_1 t$$

Modo 2: $\omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \qquad \dfrac{C_A}{C_B} = -1$

$$x_A = D\cos\omega_2 t$$
$$x_B = -D\cos\omega_2 t$$

Os módulos das amplitudes C e D são determinados pelas condições iniciais.

É fácil de ver que as somas também são soluções

$$x_A = C\cos\omega_1 t + D\cos\omega_2 t$$
$$x_B = C\cos\omega_1 t - D\cos\omega_2 t$$

Solução geral para os pêndulos acoplados

As soluções do sistema acoplado sem atrito, com fases iniciais arbitrárias, são

Modo 1: $x_A = C\cos(\omega_1 t + \alpha)$

$x_B = C\cos(\omega_1 t + \alpha)$

Modo 2: $x_A = D\cos(\omega_2 t + \beta)$

$x_B = -D\cos(\omega_2 t + \beta)$

A solução geral é a combinação linear

$$x_A(t) = C\cos(\omega_1 t + \alpha) + D\cos(\omega_2 t + \beta)$$

$$x_B(t) = C\cos(\omega_1 t + \alpha) - D\cos(\omega_2 t + \beta)$$

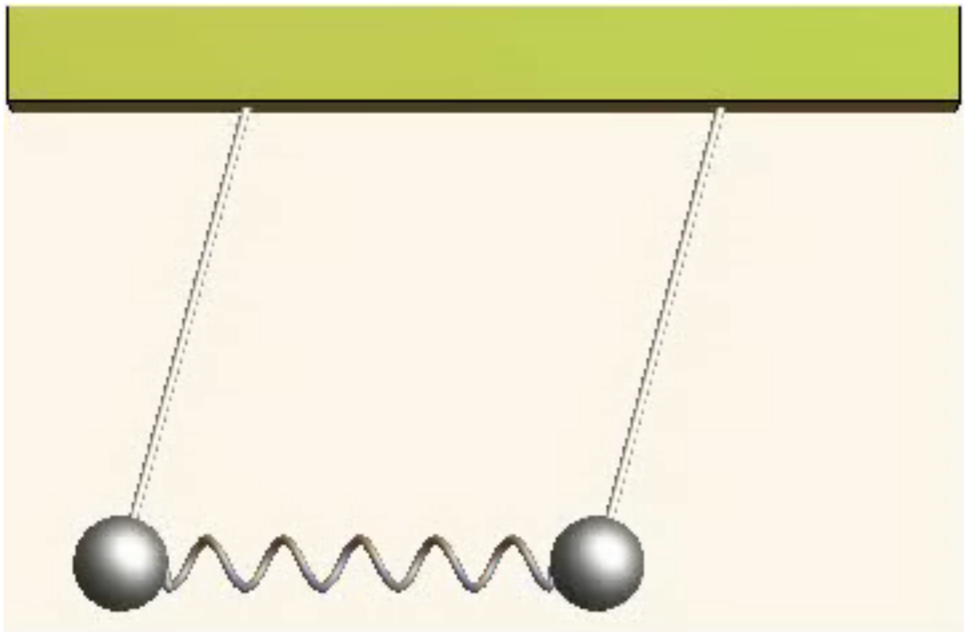
As quatro constantes, C, D, α, β, são determinadas pelas condições iniciais, i.e., pelos valores $x_A(0)$, $\dot{x}_A(0)$, $x_B(0)$, $\dot{x}_B(0)$

Exemplo: pêndulos acoplados

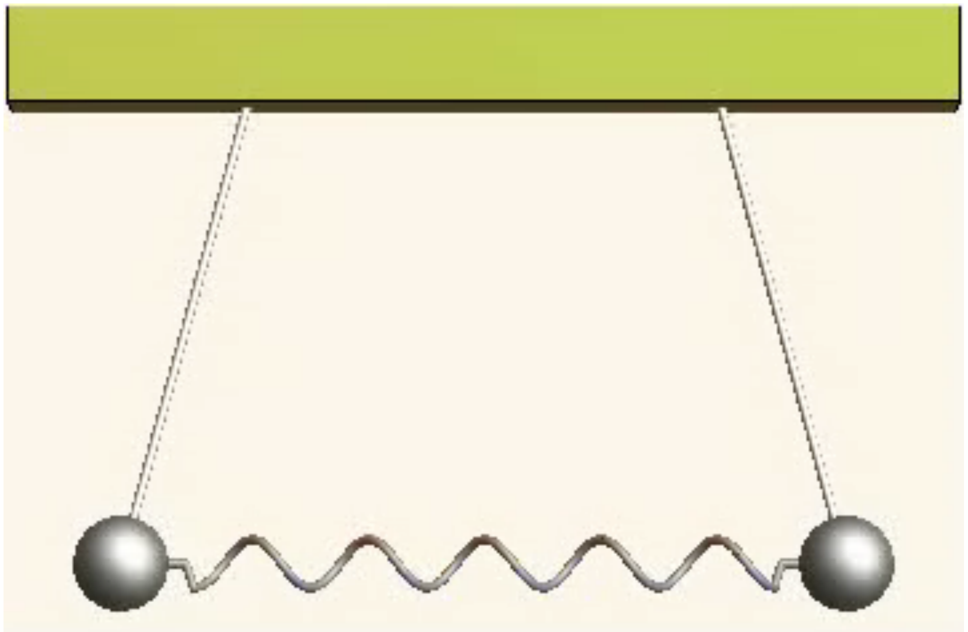
$m = 1\ \text{kg}$ $\quad g = 9.8\ \text{m/s}^2$ $\quad k = 10\ \text{N/m}$ $\quad \omega_0 = 3.13\ \text{s}^{-1}$ $\quad \omega_c = 3.16\ \text{s}^{-1}$

$l = L = 1\ \text{m}$

Modo 1: $\omega_1 = 3.13\ \text{s}^{-1}$



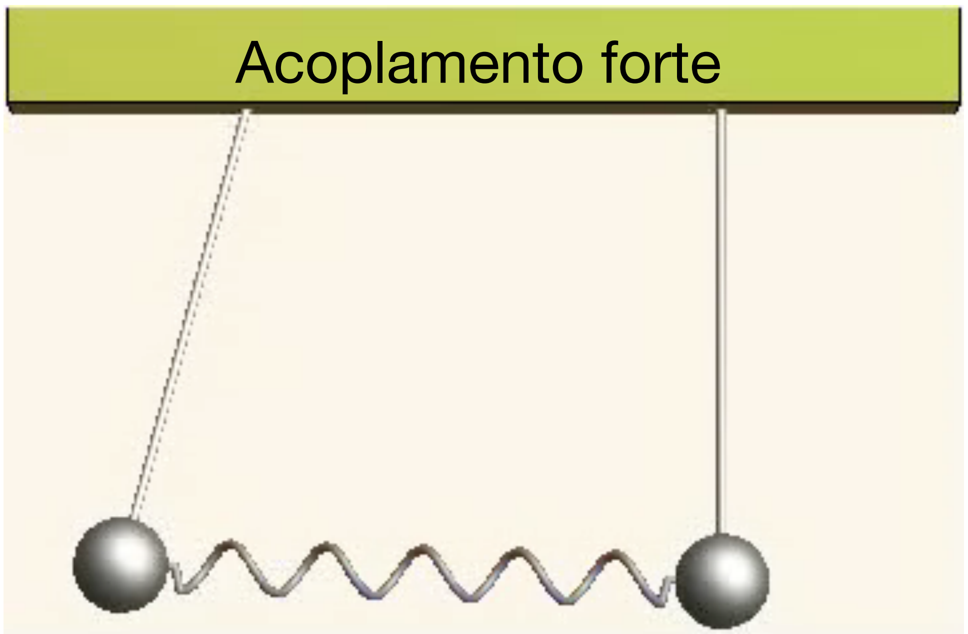
Modo 2: $\omega_2 = 5.46\ \text{s}^{-1}$



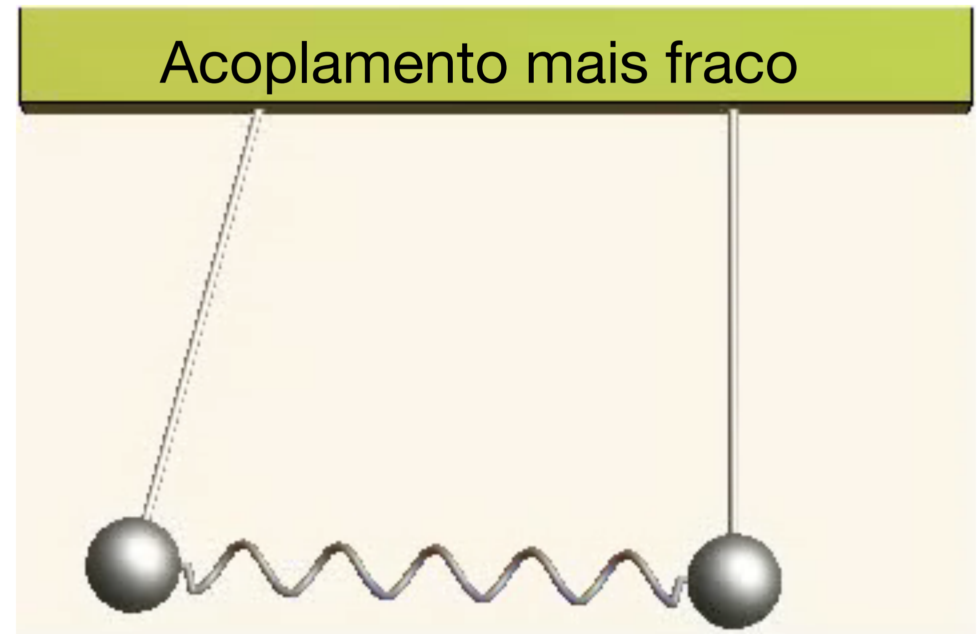
Exemplo: pêndulos acoplados com variação de k

O movimento dos pêndulos calculado como sobreposição de modos normais, de acordo com as condições iniciais.

$k = 10\ \mathrm{N/m}$

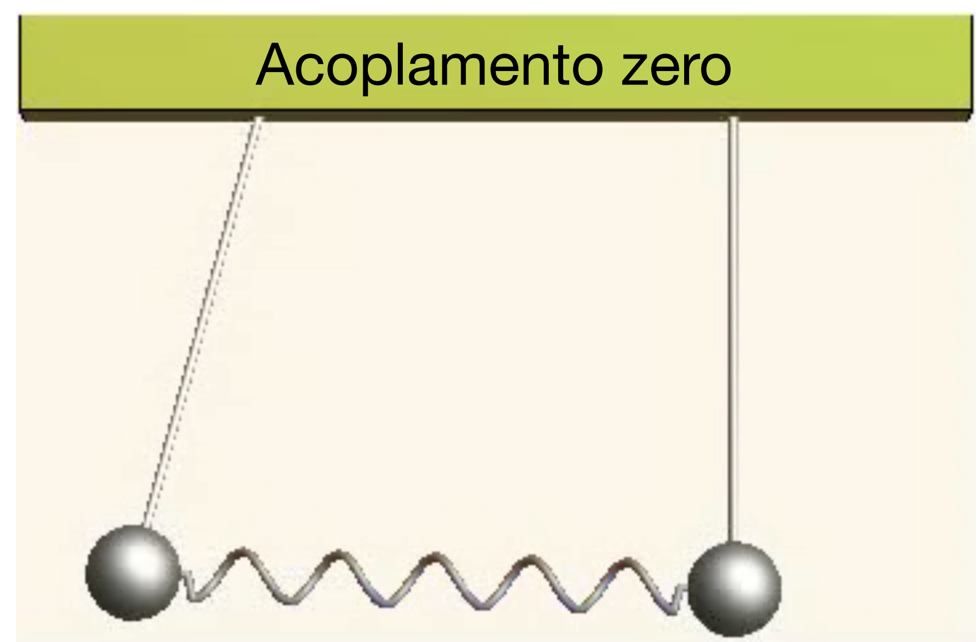


$k = 1\ \mathrm{N/m}$



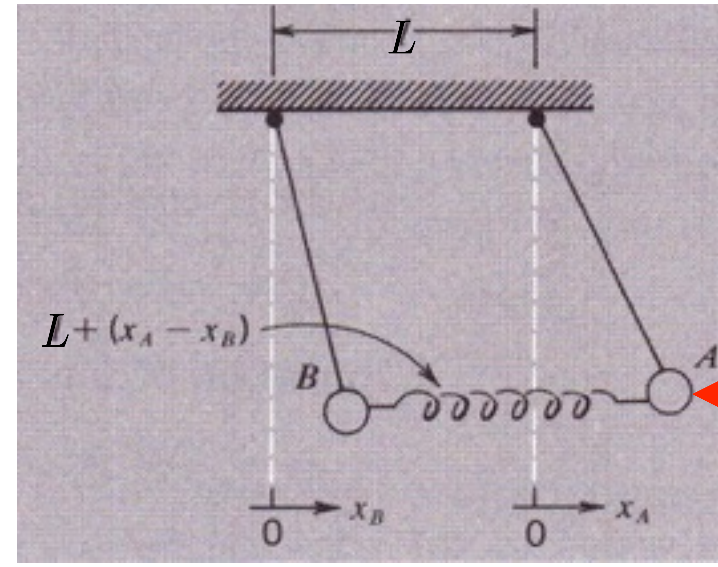
No limite em que o acoplamento desaparece, os pêndulos movimentam-se de forma independente, com $\omega_2 = \omega_1 = \omega_0$

$k = 0\ \mathrm{N/m}$



Vibrações forçadas de dois osciladores acoplados

Exemplo: uma força periódica atua no pêndulo A.



$F_0 \cos \omega t$

2ª lei de Newton:

$$m\ddot{x}_A = -m\omega_0^2 x_A - k(x_A - x_B) + F_0 \cos \omega t$$
$$m\ddot{x}_B = -m\omega_0^2 x_B + k(x_A - x_B)$$

$$\ddot{x}_A + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad \omega_c^2 = \frac{k}{m}$$
$$\ddot{x}_B + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A = 0$$

Adicionar e subtrair as equações para usar as coordenadas normais

$$q_1 = x_A + x_B$$
$$q_2 = x_A - x_B$$

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad \ddot{q}_2 + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)q_2 = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

Agora substituir:

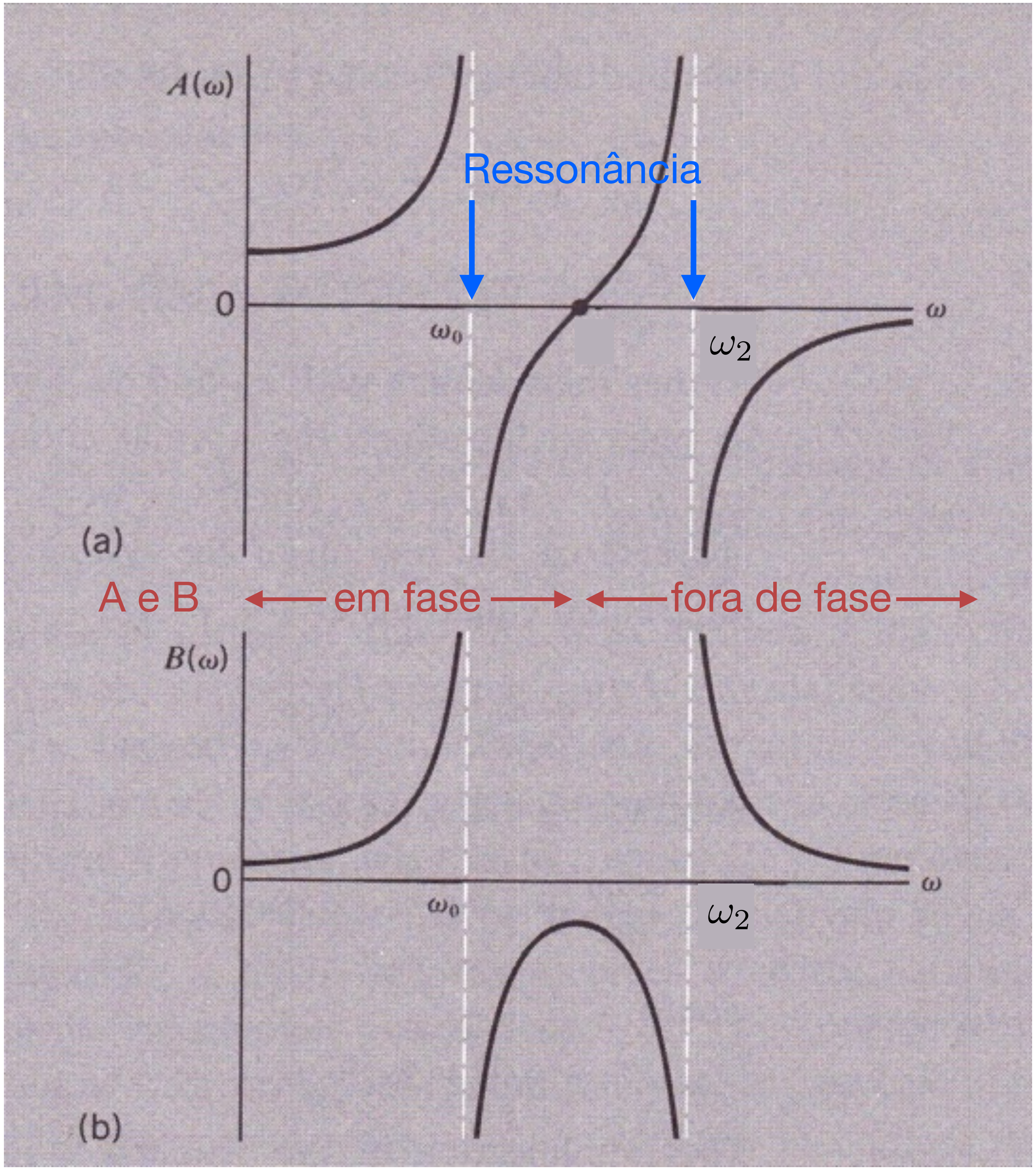
$$q_1 = C \cos \omega t \Rightarrow -\omega^2 C + \omega_0^2 C = \frac{F_0}{m} \qquad C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$q_2 = D \cos \omega t \Rightarrow -\omega^2 D + \omega_2^2 D = \frac{F_0}{m} \qquad D = \frac{F_0/m}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

$$x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = A \cos \omega t \qquad A = \frac{1}{2}(C + D) \qquad A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

$$x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = B \cos \omega t \qquad B = \frac{1}{2}(C - D) \qquad B(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

Ressonância em dois pêndulos acoplados



Sem atrito: singularidades

Com atrito: curvas contínuas

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

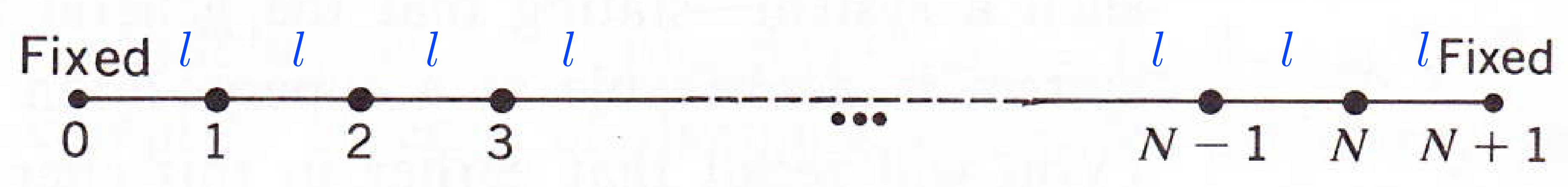
$$B(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

Observa-se ressonância sempre que a frequência da força externa atinge a frequência dum modo normal.

Isso permite também medir as frequências dos modos normais.

N osciladores acoplados

Exemplo: N massas iguais ligadas por cordas elásticas, e com extremidades fixas.

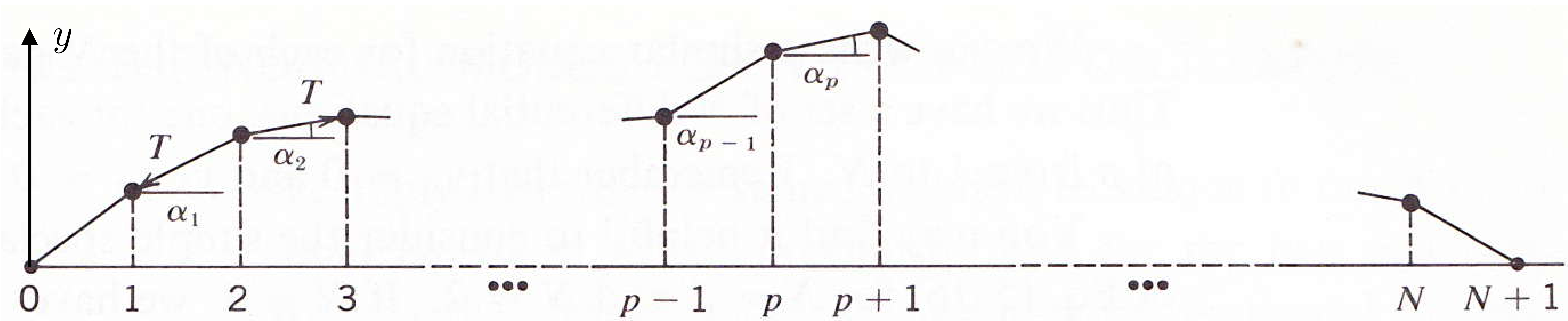


$$\boxed{y_0 = y_{N+1} = 0}$$

Condição fronteira

Consideremos deslocamentos transversais das massas (mais fácil de desenhar).

Diagrama das forças quando a corda está sob tensão T:



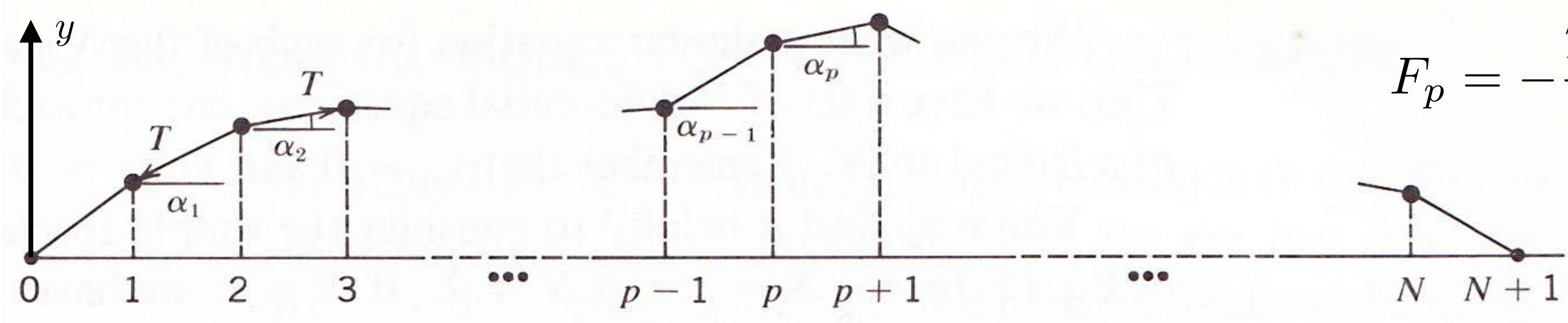
Aproximação para deslocamentos pequenos: embora a distância entre osciladores vizinhos não é rigorosamente constante, alterações do módulo da tensão, *T*, são ignoradas, tal como forças resultantes ao longo da direção x (bom enquanto $\alpha_p \ll 1$).

Componente y da força total sobre o oscilador p:

$$F_p = -T \operatorname{sen} \alpha_{p-1} + T \operatorname{sen} \alpha_p$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{p-1} \approx \frac{y_p - y_{p-1}}{l} \qquad \operatorname{sen} \alpha_p \approx \frac{y_{p+1} - y_p}{l} \quad \longrightarrow \quad F_p = -\frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) + \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p)$$

N osciladores acoplados (cont.)



$$F_p = -\frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) + \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p)$$

$$\boxed{y_0 = y_{N+1} = 0}$$

Pela 2ª lei de Newton:

$$m\ddot{y}_p + \frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) - \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p) = 0$$

$$\ddot{y}_p + \frac{T}{ml}2y_p - \frac{T}{ml}(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{T}{ml} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{y}_p + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0} \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

Equação do movimento do oscilador nº p

Sistema de N equações diferenciais acopladas

Modos normais de N osciladores acoplados

$$\ddot{y}_p + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0$$

Procuramos soluções sinussoidais com igual frequência ω de todos os osciladores.

Tentativa: $y_p = A_p \cos \omega t$ $\qquad p = 1, 2, \ldots, N$

Com isso $\dot{y}_p = -\omega A_p \operatorname{sen} \omega t$ (a nossa escolha implica velocidades iniciais zero)

$$\ddot{y}_p = -\omega^2 A_p \cos \omega t \qquad y_0 = y_{N+1} = 0$$

Substituição na equação diferencial dá (após divisão por $\cos\ \omega t$)

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p-1} + A_{p+1}) = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, N \qquad \text{com} \quad A_0 = A_{N+1} = 0$$

É possível encontrar valores de ω para os quais esta equação é satisfeita para todos os p?

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}$$

Não depende de p

Razão de amplitudes também deve ser igual para todos os p.

Isto é possível quando $A_p = C \operatorname{sen} p\theta$:

$$A_{p-1} + A_{p+1} = C\left[\operatorname{sen}(p-1)\theta + \operatorname{sen}(p+1)\theta\right] = 2C \operatorname{sen} p\theta \cos\theta = 2A_p \cos\theta$$

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2\cos\theta$$

Assim, a razão dos amplitudes é constante e independente de p.

Modos normais de N osciladores acoplados (cont.)

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p}=2\cos\theta$$

Falta apenas determinar θ a partir das condições fronteira.

$$A_p = C\,\mathrm{sen}\,p\theta$$

$A_0 = 0$ (a primeira condição é satisfeita automaticamente)

$$A_{N+1} = C\,\mathrm{sen}\,(N+1)\theta = 0 \qquad (N+1)\theta = n\pi \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \theta = \frac{n\pi}{N+1}$$

$$A_p = C\,\mathrm{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right] = 4\omega_0^2\,\mathrm{sen}^2\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \qquad \omega = 2\omega_0\,\mathrm{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

A cada n corresponde um modo diferente. Por isso escrevemos mais explicitamente:

$$\boxed{\omega_n = 2\omega_0\,\mathrm{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]} \qquad \boxed{A_{p,n} = C\,\mathrm{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)}$$

onde $n = 1,2,3,\ldots$

$$y_{p,n}(t) = A_{p,n}\cos\omega_n t \longrightarrow \boxed{y_{p,n}(t) = A_{p,n}\cos(\omega_n t+\phi_n)}$$

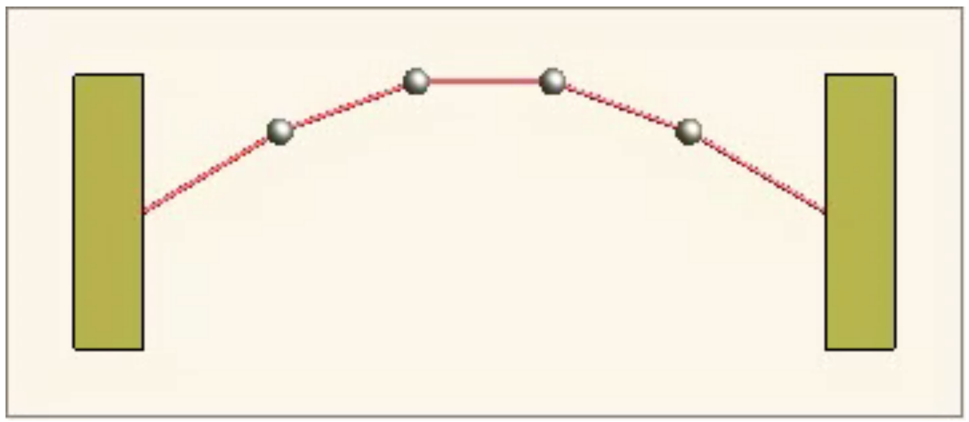
o deslocamento transversal do oscilador p no modo n

fase inicial arbitrária (para $\dot{y}_p(0) \neq 0$)

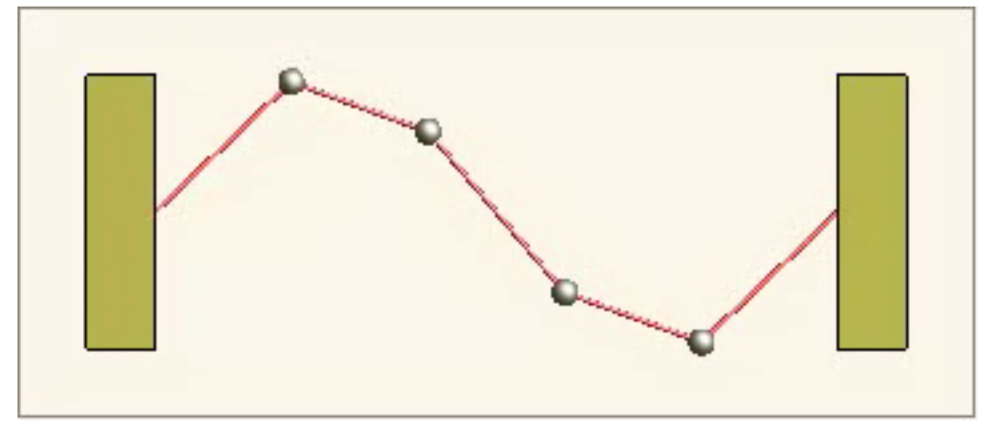
Exemplo: 4 osciladores acoplados

Para N osciladores acoplados (1D) existem N modos normais diferentes.

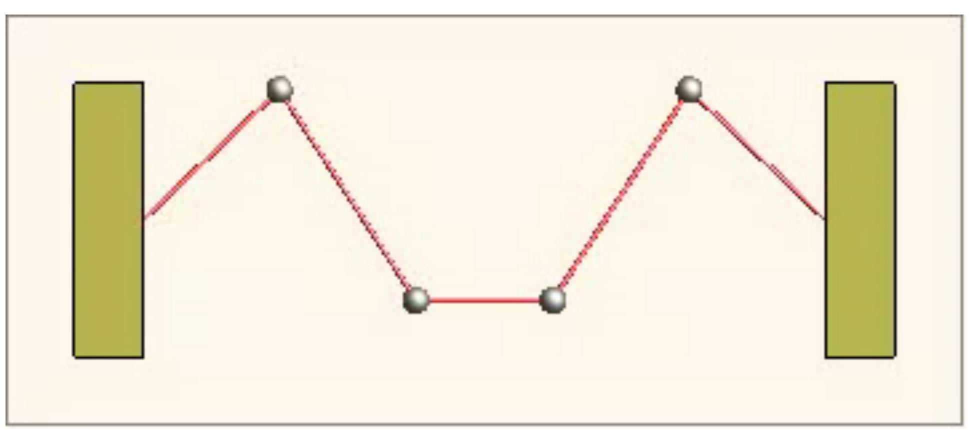
$$n = 1 \quad \omega_1 = 0.62\omega_0$$



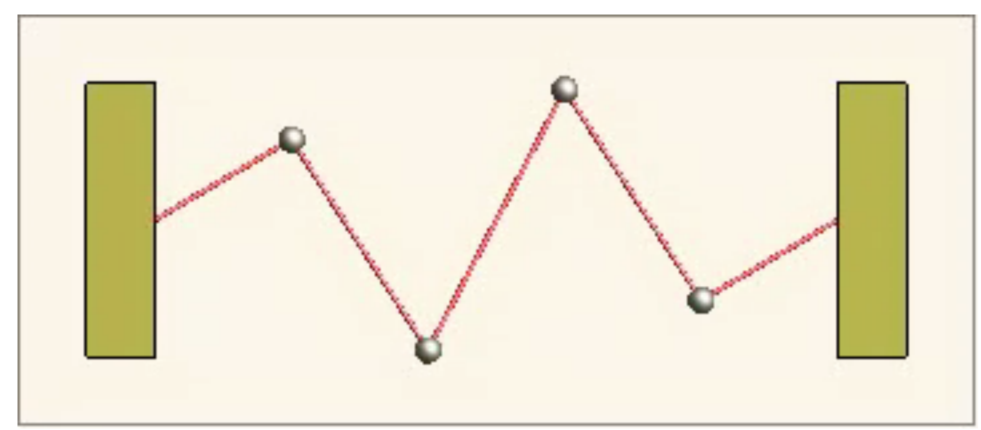
$$n = 2 \quad \omega_2 = 1.18\omega_0$$



$$n = 3 \quad \omega_3 = 1.62\omega_0$$

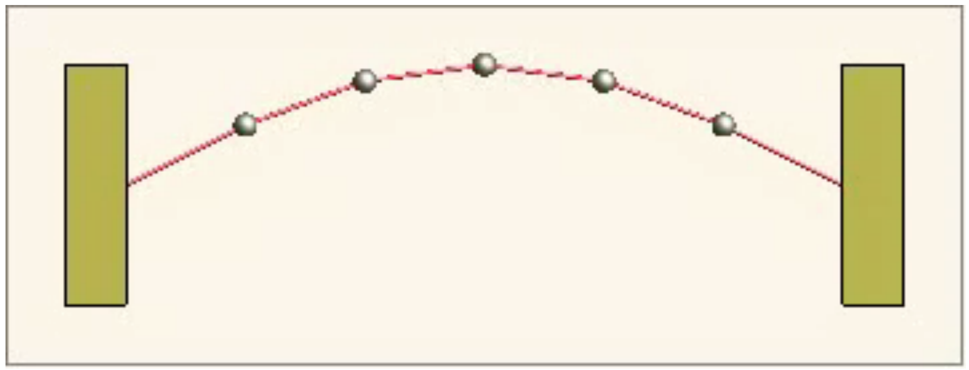


$$n = 4 \quad \omega_4 = 1.90\omega_0$$

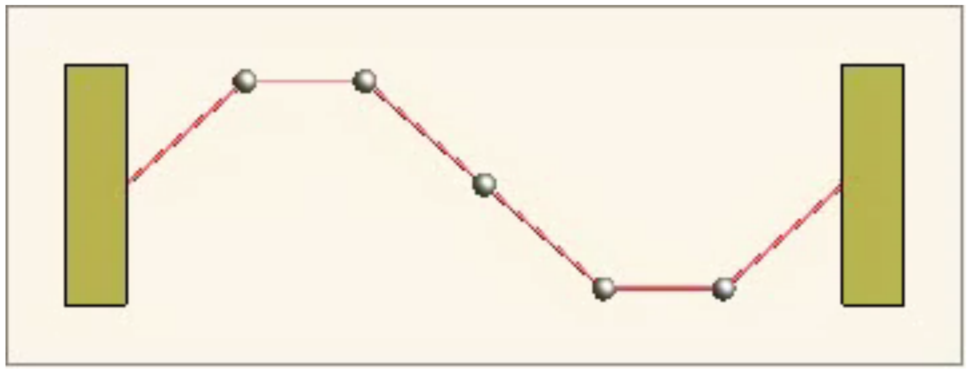


Exemplo: 5 osciladores acoplados

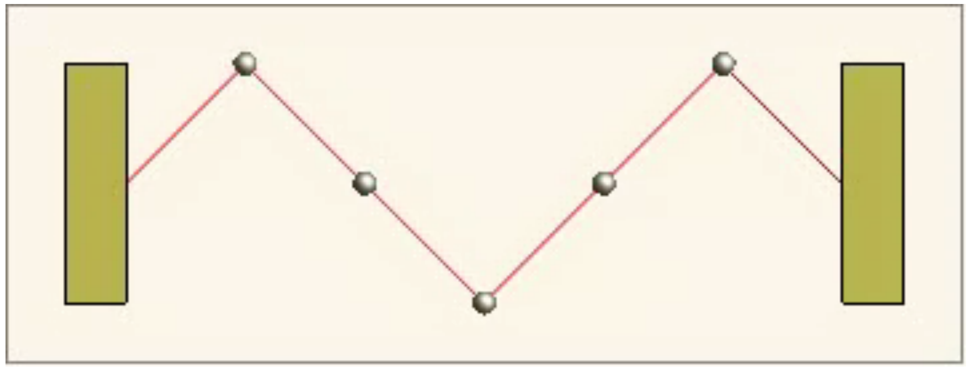
$n = 1 \quad \omega_1 = 0.52\omega_0$



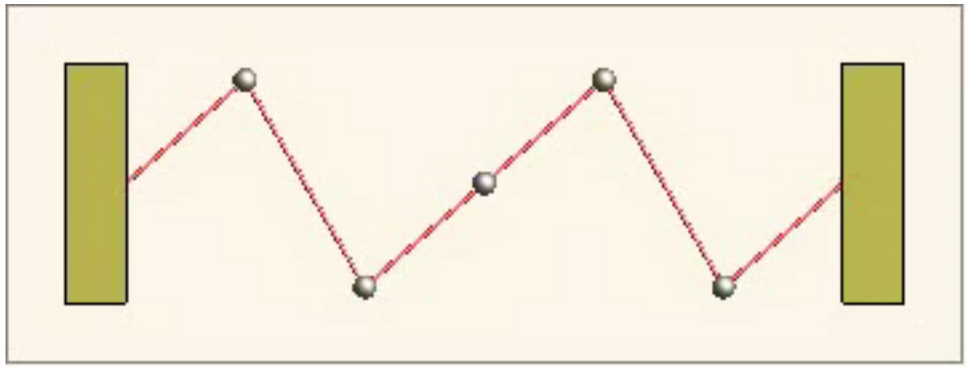
$n = 2 \quad \omega_2 = \omega_0$



$n = 3 \quad \omega_3 = 1.41\omega_0$



$n = 4 \quad \omega_4 = 1.73\omega_0$



$n = 5 \quad \omega_5 = 1.93\omega_0$