Física Geral I • FIS0703

Aula 22

07/12/2016

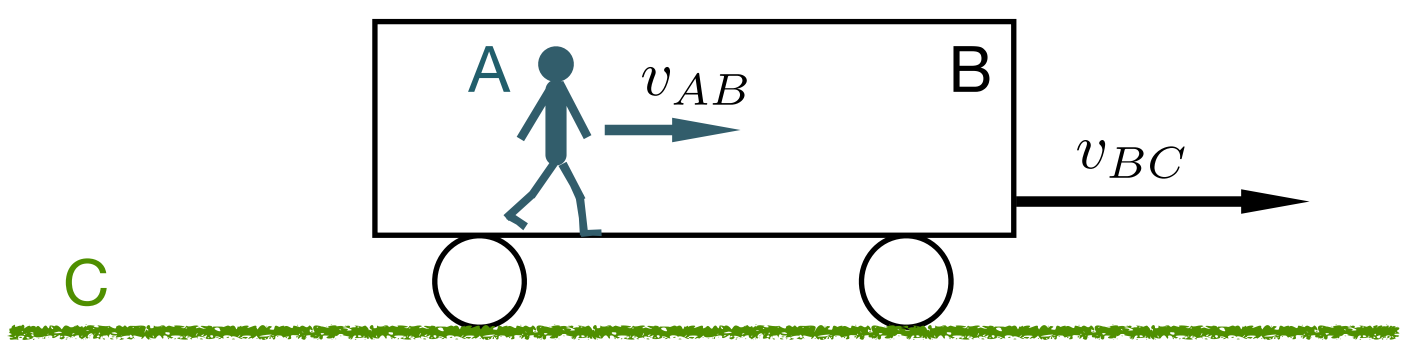
Os postulados de Einstein

Inspirado pela evidência experimental e considerações teóricas, Einstein postulou em 1905:

1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, independente do estado de movimento da fonte de luz.

A partir destes postulados, Einstein desenvolveu a teoria de relatividade restrita.

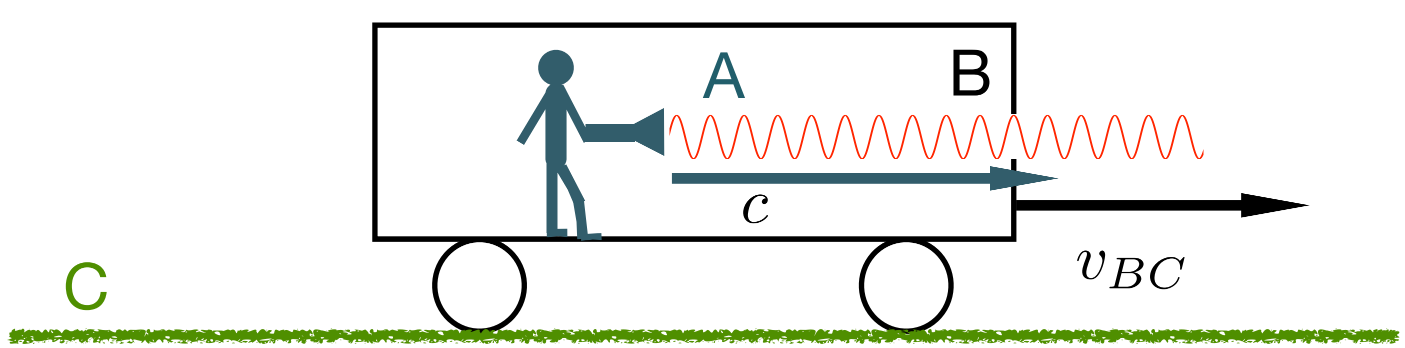
O postulado 2 contradiz a regra de adição de velocidades de Galileu (e o senso comum!)



Galileu:

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

Velocidade de A no referencial de C



Einstein:

$$v_{AC} = v_{AB} = c$$

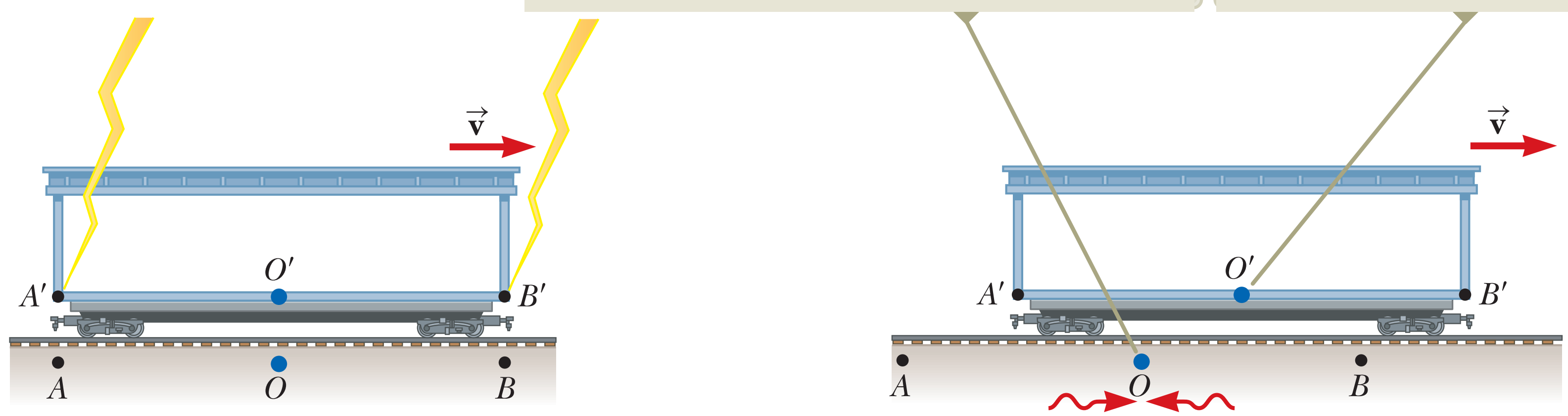
A relatividade da simultaneidade

Experiência imaginada: uma carruagem de comboio a andar com velocidade **v**

Dois eventos (raios a atingir dois pontos da carruagem) são observados por um observador estacionário (O) e um observador que se move com a carruagem (O’).

Os dois eventos são simultâneos para o observador estacionário O que se encontra no meio entre A e B.

Os dois eventos não são simultâneos para o observador O’, para quem B’ aconteceu antes de A’.



O: recebe os sinais de luz de A e B em simultâneo.

O’: recebe o sinal de luz de B’ antes de A’.

Interpretação: dado que para O’ os sinais de luz de A’ e de B’ ambos se propagam com a mesma velocidade *c*, B’ deve ter acontecido antes de A’.

Conclusão: **Dois eventos que são simultâneos num referencial inercial, em geral não são simultâneos num outro referencial inercial.**

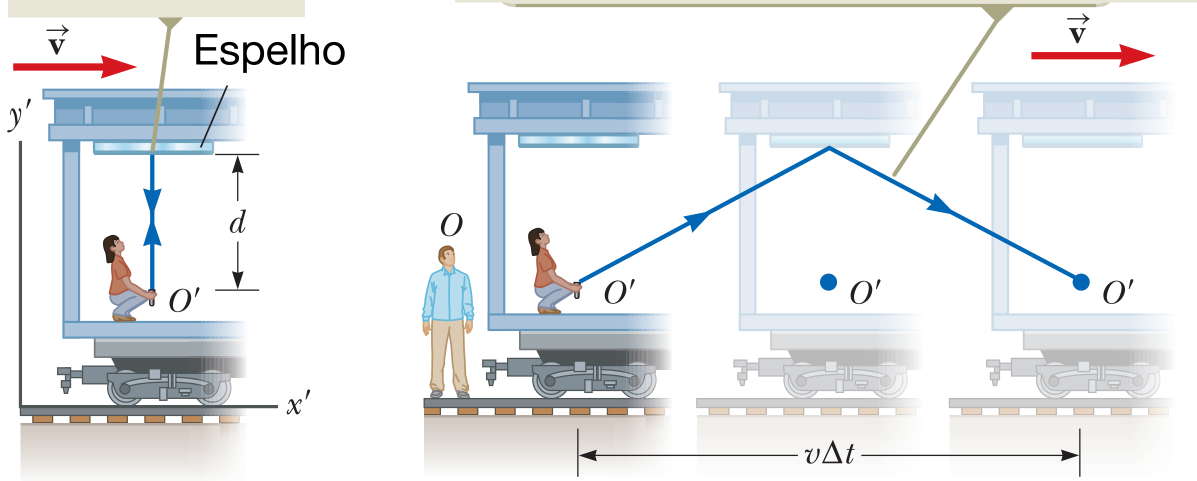
A dilatação do tempo

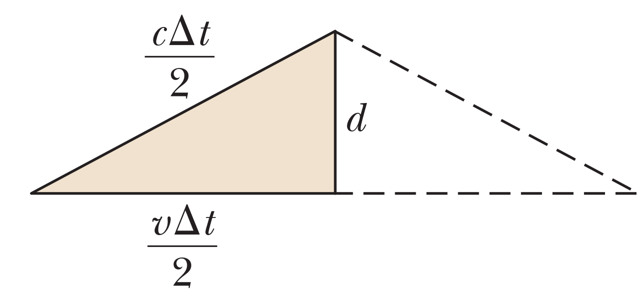
Experiência imaginada: um “relógio de luz” numa carruagem de comboio com velocidade v

Pergunta: quanto tempo demora para um pulso de luz subir e descer uma vez?

O Observer O' vê o pulso de luz subir e descer verticalmente uma distância total de 2d.

O Observador O vê o pulso de luz num caminho diagonal e mede a distância de viagem maior do que 2d.





O’: $\Delta t_p = \dfrac{2d}{c}$

“Tempo próprio”

O: $$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2 \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t_p}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Conclusão: Relógios em movimento correm devagar

A dilatação do tempo

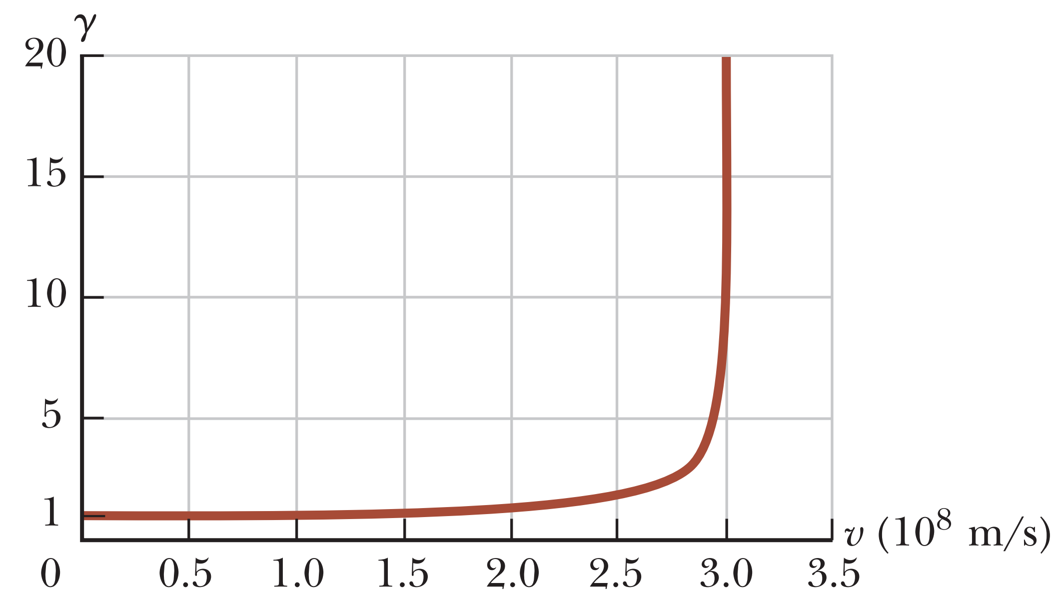
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t_p}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

v/c	γ
0	1
0.001 0	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37

Para $v \ll c$: $\gamma \approx 1$

Efeitos relativistas tornam-se importantes quando $v \sim c$



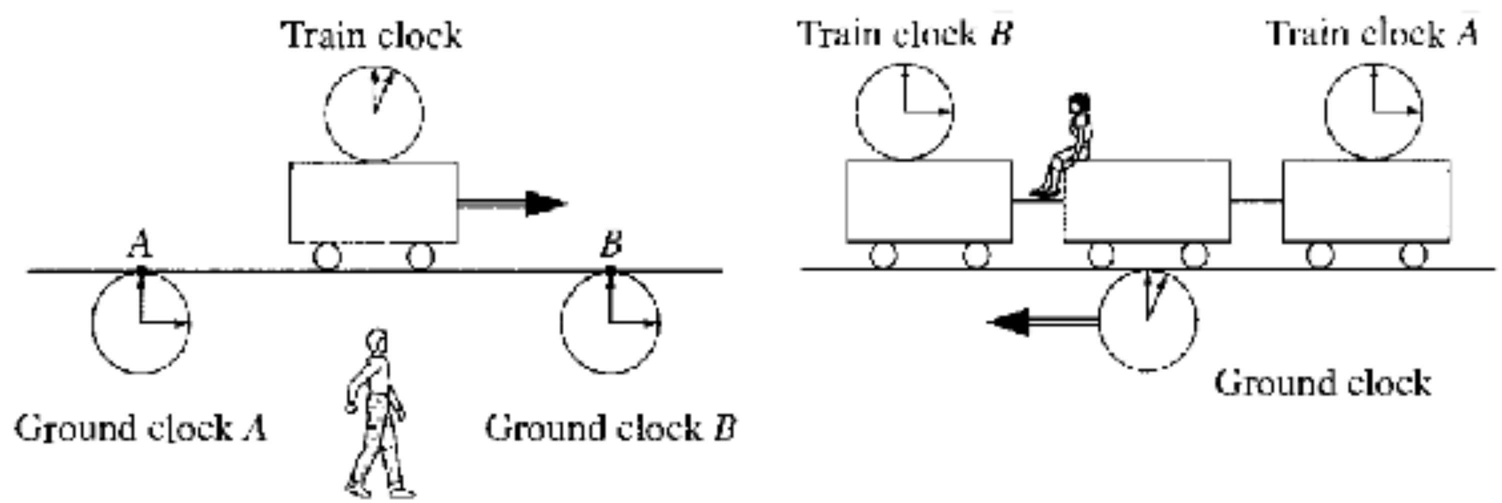
Verificação experimental: decaimento de muões, cronómetros atómicos, …

A dilatação do tempo

A dilatação do tempo não está em contradição com o princípio de relatividade?

- O observador *O* (no solo) diz que o relógio de *O'* corre devagar
- O observador *O'* afirma que o relógio de *O* corre devagar, porque *O* move-se relativamente a *O'* com a velocidade -**v**
- Quem tem razão?

Não há contradição:
ambos têm razão!



Cada observador usa dois relógios sincronizados e regista o tempo quando o relógio em movimento passa ao lado deles.

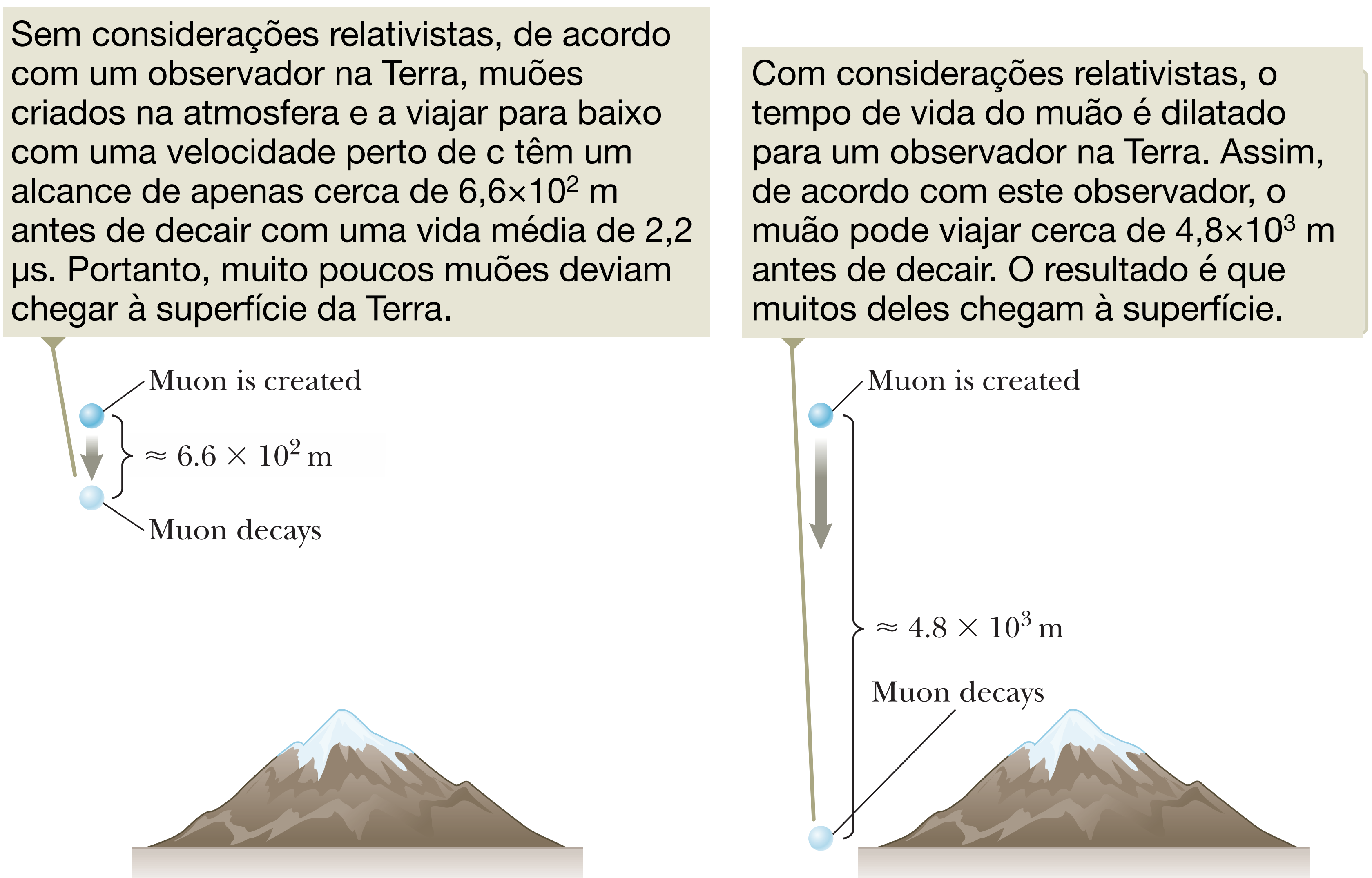
Repare que os dois observadores medem coisas diferentes:
- *O* compare dois relógios no solo com um no comboio
- *O'* compare dois relógios no comboio com um no solo

Mas dois relógios sincronizados num referencial inercial não serão sincronizados noutro!

Decaimento de muões

Os muões são partículas elementares com propriedades semelhantes às dos eletrões, mas não são estáveis: em repouso decaem com um tempo de semi-vida de 2,2 μs.

Por que é que muitos muões são detectados à superfície da Terra?



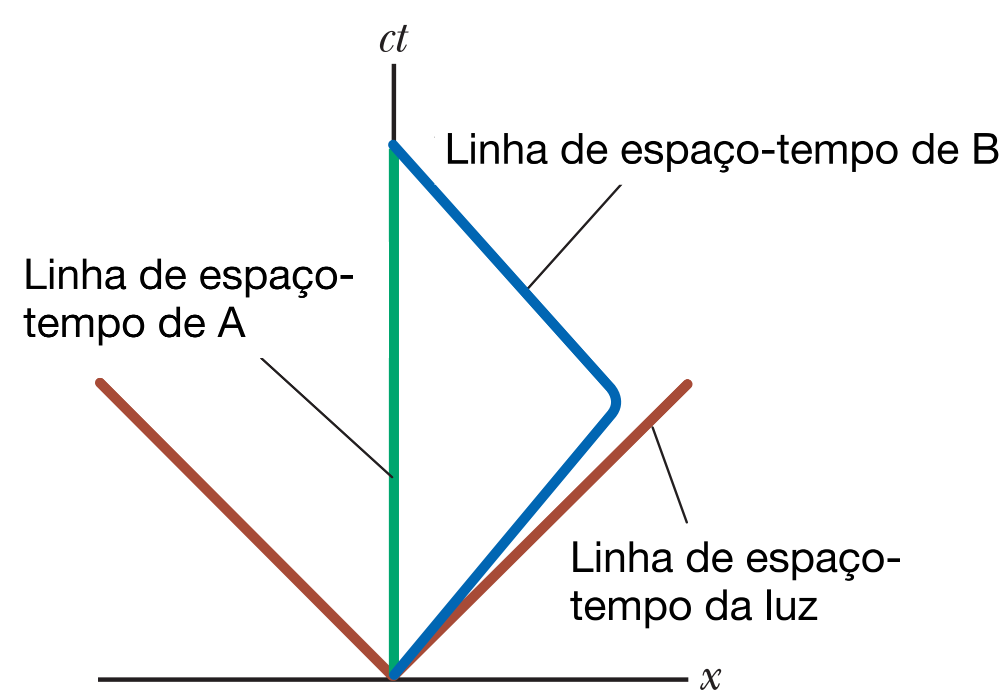
O paradoxo dos gémeos

A dilatação do tempo afeta todo o tipo de “relógios”, incluindo biológicos.

Exemplo:

- Dois gémeos idênticos, A e B.
- O gémeo A fica na Terra, enquanto o gémeo B faz uma viagem numa nave espacial que se movimenta a uma velocidade perto de c.
- Quando B regressa à Terra, A diz que B é agora mais jovem, porque o relógio biológico de B andava devagar visto do referencial de A.
- O paradoxo: B diz que A é agora mais jovem, porque, visto do referencial de B, A estava em movimento e B em repouso. Quem tem razão?

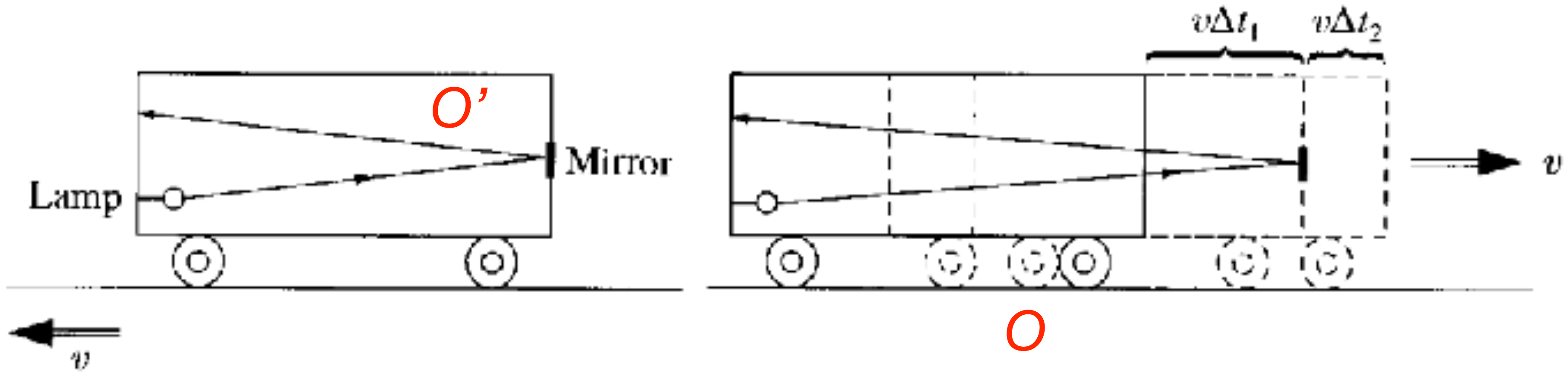
Diagrama de espaço-tempo



Solução: não há paradoxo, porque as situações de A e B não são simétricas. Para comparar os relógios, B tem de regressar a A, o que precisa duma fase de aceleração (mudança do referencial inercial). A tem razão.

A contração de Lorentz

Exemplo: um sinal de luz é emitido por uma lâmpada e refletido por um espelho, numa carruagem em movimento com velocidade v em relação ao solo. Quanto tempo demora a ida e volta do sinal?



Para O': $\Delta t' = 2\frac{L_p}{c}$

"comprimento próprio"

Para O':

$$\Delta t_1 = \frac{L + v\Delta t_1}{c} \qquad \Delta t_2 = \frac{L - v\Delta t_2}{c}$$

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c - v} \qquad \Delta t_2 = \frac{L}{c + v}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\frac{L}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Pela dilatação do tempo:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta t$$

$$\boxed{L = \frac{L_p}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,L_p}$$

Objetos em movimento são contraídos

Nota: dimensões perpendiculares à velocidade **v** não são contraídas

O efeito de Doppler relativista

- Na dedução do efeito de Doppler para ondas de som, as velocidades da fonte e do observador eram definidas relativamente ao meio da propagação das ondes.

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

- Para luz não se pode fazer o mesmo, porque um meio para ondas eletromagnéticas não existe.
- A frequência observada pode apenas depender da velocidade relativa v entre fonte e observador.

Observador e fonte aproximam-se com velocidade v:

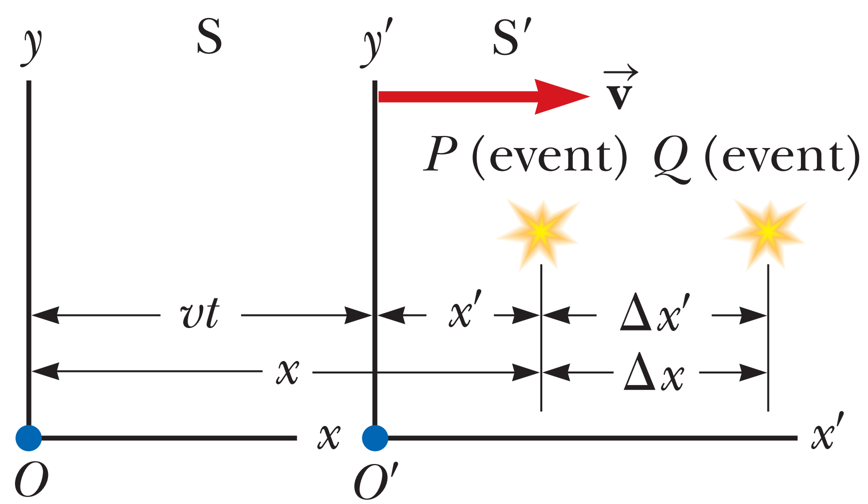
$$f' = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} f$$

Observador e fonte afastam-se com velocidade v:

$$f' = \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} f$$

A transformação de Lorentz

Dados as coordenadas (x,y,z,t) dum evento no referencial S, quais são as coordenadas (x',y',z',t') do mesmo evento noutro referencial inercial S'?



$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Transformação de Lorentz
S → S'

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Transformação de Lorentz
S' → S

Adição de velocidades: velocidade dum objeto

em S': $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$

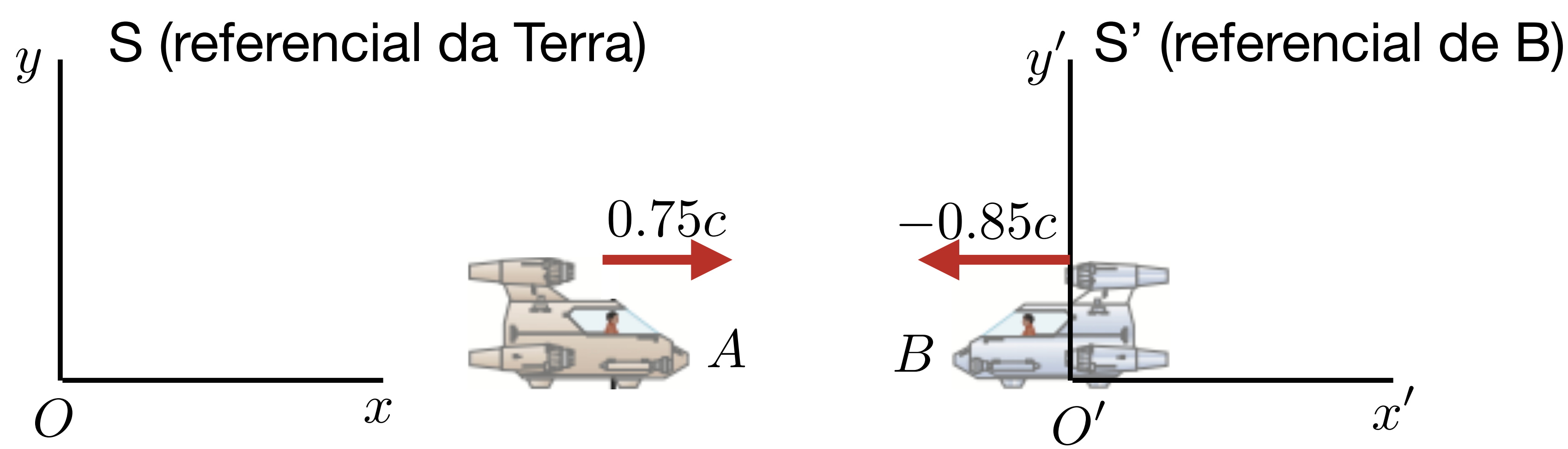
em S: $u_x = \frac{dx}{dt}$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

No caso $v \ll c$ a transformação de Galileu é recuperado: $u'_x = u_x - v$

Exemplo da adição relativista de velocidades

Duas naves espaciais, A e B, movimentam-se ao longo da mesma direção em sentidos opostos. Um observador na Terra mede as velocidades das nave espaciais e obtém 0.750 *c* para A e 0.850 *c* para B. Qual é a velocidade de A observada pela tripulação de B?



$u_x = 0.75c$ velocidade de A no referencial S

$v = -0.85c$ velocidade de B no referencial S = velocidade de S' relativamente a S

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.75c - (-0.85c)}{1 - \frac{(0.75c)(-0.85c)}{c^2}} = 0.977c$$

Mecânica relativista

Para manter as leis da física invariantes sob transformações de Lorentz, as definições de momento linear e de energia têm de ser modificadas.

Para velocidades $v \ll c$ (no limite não-relativista), as definições da mecânica de Newton devem ser reproduzidas.

Quando o momento linear é conservado num referencial inercial S, deve ser conservado também em qualquer outro referencial inercial S'.

O momento linear duma partícula com velocidade **u** no referencial S:

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \gamma m \mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

A 2ª lei de Newton permanece válida na mecânica relativista quando esta definição do momento linear é usada.

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

A energia relativista

A dedução da versão relativista do teorema trabalho-energia cinética:

Uma partícula move-se ao longo do eixo *x*, e é acelerada pela força **F** do repouso até à velocidade final *u*.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx$$

O trabalho realizado pela força **F**

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt}$$

substituir no integral

$$W = \int_0^t \frac{m}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt}(udt) = m\int_0^u \frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} du \longrightarrow W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2$$

O trabalho realizado pela força **F** é igual ao aumento da energia cinética da partícula.

Energia cinética relativista

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2}$$

A energia relativista

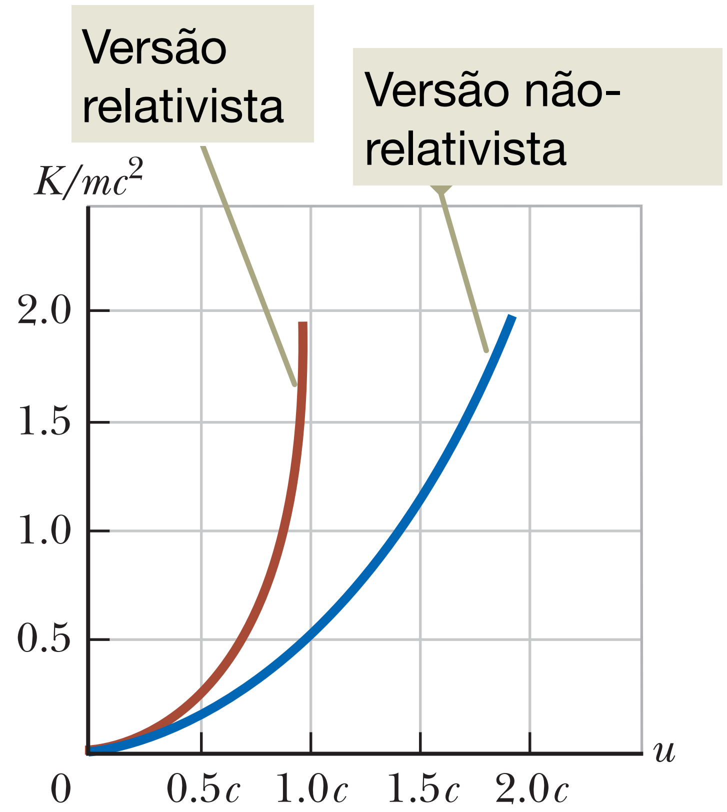
$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

O limite não-relativista $u \ll c$:

É útil aplicar a expansão $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ quando $x \ll 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

$$K \approx \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - 1\right] mc^2 = \frac{1}{2}mu^2 \qquad (u \ll c)$$



A energia relativista

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2}$$

Nesta expressão aparece uma energia independente da velocidade:

$$\boxed{E_R = mc^2}$$

Energia de repouso da partícula

→ massa é uma forma de energia

A energia total relativista é

$$E = K + mc^2$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2$$

Calcular os quadrados de $E = \gamma mc^2$ e $p = \gamma mu$ e eliminar u dá:

$$\boxed{E = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2}}$$

Daqui obtém-se a energia de partículas sem massa (e.g. fotões): $\boxed{E = pc}$