1º Teste de Bases de Dados
29/10/2018
2 horas (16:00 às 18:00)

Grupo 1 —

Suponha que se pretende construir uma base de dados com a informação de uma colónia de férias frequentada por crianças dos 8 aos 14 anos que funciona durante 6 semanas .

Para cada criança que frequenta a colónia regista-se: o número do BI (NdoBiC), o nome (NomeC), a idade (IdadeC) e o conselho de residência (ConsRes). Cada criança tem um ou mais encarregados de educação para os quais se regista: o número do BI (NdoBiEnc), o número do BI da criança (NdoBiC), o nome (NomeEnc), e o telefone (TelefoneEnc).

A colónia de férias tem monitores para os quais se regista: o número do BI (NdoBiM), o número do BI do monitor responsável (NdoBiIMresp) pois todos os monitores têm um monitor chefe, o nome (NomeM), a idade (IdadeM) e o seu telefone (TelefoneM).

Todas as semanas (1 a 6) as crianças são divididas em grupos para os quais se regista: o nome do grupo (NomeG), o monitor responsável, a idade mínima das crianças desse grupo (IdadeMin), a idade máxima (IdadeMax) e o número da semana em que o grupo funciona (Semana).

Como alguns equipamentos não podem ser utilizados em simultâneo por vários grupos as actividades dos grupos são planeadas com antecedência registando-se para cada grupo: o nome da actividade (Activ) o turno (Turno) que tem o valor 1 ou 2 pois há 2 turnos por dia.

Para construir a base de dados usam-se as seguintes relações:

criança(NdoBiC,NomeC, IdadeC,ConsRes)
encDeEduc(NdoBiEnc,NdoBiC, NomeEnc,TelefoneEnc)
monitor(NdoBiM,NdoBiIMresp, NomeM, IdadeM, TelefoneM)
dirigeGrupo(NomeG,NdoBiM, IdadeMin, IdadeMax, Semana)
pertenceGrupo(NdoBiC, Semana, NomeG)
actividade(NomeG, Semana, Activ, Turno)

1. Para cada relação indique:
   (a) As chaves candidatas
   (b) A chave primária
   (c) As chaves estrangeiras
2. Indique os comandos SQL para a criação das tabelas que constituem esta base de dados.
   Não se esqueça das restrições de integridade.
3. Indique as expressões em SQL e em álgebra relacional que lhe permitem obter a seguinte informação:
   (a) Indique os nomes das crianças do grupo 3 da semana 2.
   (b) Quais as actividades que o aluno com o número de BI 123 teve nas semanas em que esteve na colónia de férias?
   (c) Que crianças nunca tiveram "piscina" como actividade.
   (d) Indique o nome dos monitores que são responsáveis por outro monitor e não dirigem nenhum grupo com crianças de Portalegre.
   (e) Indique as crianças que tiveram "piscina" ou "ténis" como actividades do campo de férias.
   (f) Indique os Monitores que dirigiram grupos que tiveram "piscina" ou "ténis" como actividades.
   (g) Que crianças tiveram actividades em todos os equipamentos?
   Fizeram todas as actividades

(h) Para cada conselho indique o número de crianças que estiveram na colónia de férias.

(i) Para cada grupo (nome) indique quantas crianças estão em grupos que não correspondem à sua idade (menos que a idade mínima ou mais do que a idade máxima).

(j) Indique o nome e o telefone dos responsáveis pelos monitores que tiveram actividades na piscina com mais do que 12 crianças em simultaneo.

(k) Qual é o nome do monitor do grupo que têm mais crianças residentes no conselho de Évora na 3ª semana?

1º Exame de Bases de Dados - 3 grupos - 2º Teste G1 e G2 - 1:45

9/1/2019

2.30 horas (11:00 às 13:30)

Grupo 1 —

A escola de condução "EboraeEncarta" pretende criar uma base de dados para informatizar os seus serviços. Na escola podem-se tirar três tipos de licença de condução: motociclos, ligeiros ou pesados. Para gerir a escola deve-se representar a informação sobre: as aulas, os alunos, os veiculos e os funcionários. As aulas podem ser de condução, de código ou de mecânica no caso dos condutores de pesados. Para cada aula deve-se registar a data e hora a que se realizou, os alunos que assistiram, os instrutores que a leccionaram, número da lição e o veiculo usado no caso de ser uma aula de condução. Os funcionários da escola podem ser instrutores ou administrativos e deve-se registar o número do BI, o nome e no caso de ser um instrutor o número de cédula de instrutor. A escola dispõe de uma parque de veículos (motociclos e automóveis ligeiros). Para cada veículo é importante saber a marca, o modelo e a matricula assim como o registo das reparações ao longo do tempo ex:: Avaria: "Pára-choques" data: 3-7-2009, custo: 230 euros. Para os alunos regista-se o nome e o BI e o tipo de licença que quer tirar.

1. Para o problema acima, construa um diagrama Entidades-Relação que descreva a informação. No diagrama não se esqueça de indicar as restrições das relações e as chaves primárias das entidades.
2. Transforme o modelo E-R em tabelas. Nas tabelas não se esqueça de indicar as chaves primárias.
3. Para o esquema definido na alínea anterior indique as expressões em SQL que lhe permitem obter a seguinte informação:
   (a) Quais os nomes dos instrutores que já deram uma aula nº1 num veículo da marca Mercedes?
   (b) Qual é o nome dos alunos que tiveram a aula de condução nº5 com o instrutor com a cédula 123 em 2018?
   (c) Que alunos tiveram a aula de código nº 10 mas não tiveram a nº9 ?
   (d) Quantos alunos tiveram aula num veiculo que teve uma reparação nos travões que custou mais 300 euros?
   (e) Qual o nome dos alunos que tiveram pelo menos 20 lições de condução e de código?
   (f) Para cada veiculo indique o valor total das reparações que fez.
   (g) Qual é o instrutor que lecionou mais aulas de código?

Grupo 2 —

Considere o seguinte esquema duma BD simplificada relativa ao registo das actividades de um clube.

aula(Actividade, Monitor, Horário, Sócio, Equipamento)

que significa que o Monitor lecciona a Actividade no Equipamento em Horário, Horário é um dia da semana mais hora inicio mais hora fim (ex: segunda-10:00-12:00) e o Sócio participou.

Considere as seguintes dependências funcionais:

$Actividade \rightarrow Monitor,$

$Monitor, Horario \rightarrow Actividade$

$Socio, Horario \rightarrow Actividade, Equipamento.$

$Socio, Horario \rightarrow Monitor.$

$Actividade \rightarrow Equipamento$

1. Indique, justificando, quais são as chaves candidatas da tabela aula.
2. Indique, justificando, uma cobertura canónica deste conjunto de dependências funcionais.

3. Indique, justificando, se as afirmações abaixo correspondem ou não a regras definidas com as dependências funcionais acima.
   (a) Uma Actividade só pode funcionar num Horário.
   (b) Um Monitor só pode leccionar uma Actividade.
   (c) Um Sócio só pode usar um Equipamento num horário
   (d) Uma Actividade só pode ter um Monitor.
4. Indique, justificando se o esquema está na forma normal de Boyce-Codd. Se a sua resposta for negativa indique uma decomposição sem perdas do esquema Aula que esteja na forma normal de Boyce-Codd.
5. O conjunto de esquemas que obteve na alínea anterior garante a preservação das dependências funcionais? Justifique. Se os esquemas que obteve não preservam as dependências apresente uma decomposição do esquema Aula na 3^a forma normal.

Grupo 3 —

Suponha que uma companhia aérea construíu uma base de dados para gerir a informação sobre os seus Aviões (modelos e aviões), Pilotos, Hospedeiras, Voos, Tripulações (comandante, copiloto e hospedeira), Passageiros e Bilhetes.

Considere o seguinte esquema duma BD simplificada relativa a uma companhia aérea. (os atributos chave de cada relação estão sublinhados):

modelos (Modelo, Nlugares, Autonomia)
aviões (codA, nomeA, modelo)
piloto (nomeP, Telefone, Idade)
hospedeira (nomeH, Telefone, Idade)
voos (nVoo, codA, data, horaPartida, horaChegada, origem, destino)
comandante(nVoo, data , nomeP)
copiloto(nVoo, data , nomeP)
hospedeiraVoo(nVoo, data, nomeH)
passageiro(numPass, nomePass, morada, cidade, idade)
bilhete(nVoo, data, numPass,preço)

Considere que, por exemplo, o A320 é um modelo de avião que tem 300 lugares e autonomia para 12 horas de voo. A TAP, por exemplo, batiza os seus aviões (Camões, Vasco da Gama, etc). Um voo tem uma tripulação que deve incluir um comandante, um copiloto e algumas hospedeiras. A origem e o destino de um voo é o nome de um aeroporto.

1. Indique os comandos SQL para a criação das tabelas que constituem esta base de dados para as relações modelos e aviões. Nos comandos SQL deve ter em conta todo o tipo de restrições de integridade relevantes, devendo garantir automaticamente, por exemplo, a integridade de referência.
2. Para o problema acima, indique os comandos SQL e as expressões da álgebra relacional que lhe permitem obter informação requerida.
   (a) Quais os nomes dos aviões que têm mais de 150 lugares?
   (b) Quais os passageiros do voo que saiu no dia 07-01-08 às 12 horas da Portela para Beja comandado por um piloto de 45 anos?
   (c) Quantos modelos de aviões tem capacidade para 20 passageiros e já fizeram um voo com destino a Bragança?
   (d) Que aviões é que nunca fizeram um voo com destino a Bragança?
   (e) Que pilotos já comandaram aviões de todos os modelos existentes na companhia?
   (f) Qual é o modelo do avião que fez o voo com mais hospedeira na tripulação?

2º Trabalho de Bases de Dados 2018/2019

Data de Entrega - 11/12/18 Apresentação - 11/12/18 - 9 horas

Entregue um ficheiro em pdf com as respostas a todas as questões do enunciado incluindo o desenho do modelo ER, e um ficheiro txt com todos os comandos SQL.

Considere a seguinte descrição de um problema Uma transportadora aérea pretende implementar uma base de dados com a seguinte informação: a transportadora tem vários aviões: cada avião tem um nome, o modelo do avião, o número de lugares, e indicação da sua autonomia. Para cada modelo o número de lugares e a autonomia é sempre o mesmo.

A transportadora tem vários funcionários: administrativos, pilotos e hospedeiras e comissários de bordo. Para os funcionários em geral a companhia regista o nome, o número do BI, o NIF e a data de nascimento. Para os pilotos regista o nº da carta de piloto e o nº de anos de experiência. Para as hospedeiras e comissários regista a altura, peso e o nº de anos de experiência.

A companhia pretende registar a informação sobre os seus voos regulares que inclui o número do voo, o dia da semana, hora de partida, hora de chegada, origem, destino e nº de kms do voo. Para cada voo também se deve registar a tripulação requerida, i.è número de pilotos, de hospedeiras e de comissários de bordo (a composição da tripulação deve obedecer a regras impostas internacionalmente) para cada piloto da tripulação deve indicar o número de anos de experiência mínimo, para cada hospedeira deve indicar o peso máximo e para cada comissário deve indicar a altura mínima.

Para gerir os aviões disponíveis e os funcionários a companhia organiza os voos que faz em trajectos. Um trajecto pode ter um ou mais voos e normalmente é feito de forma a optimizar os custos da companhia, por exemplo o avião que a 1/2/2018 faz o voo 122:Lisboa - Nova Iorque também deve fazer o voo 124: Nova Iorque - Lisboa a 2/2/2018. Desta forma a companhia poupa combustível. O mesmo se passa com as tripulações a mesma tripulação que vai para Nova Iorque deve voltar para Lisboa. Assim um trajecto tem uma só tripulação e um só avião. A tripulação de um voo tem de ser igual ou superior à definida. Por exemplo se um voo tem 2 pilotos, 4 hospedeiras e 2 comissários, a tripulação afecta ao voo numa dada data pode ter 2 ou mais pilotos, 4 ou mais hospedeiras e 2 ou mais comissários mas não pode ter menos.

Por cada voo efectuado numa dada data a companhia também quer registar o número de passageiros no voo nessa data e a hora exacta da partida e da chegada (para controlar os atrasos).

1. Para o problema acima, construa um diagrama Entidades-Relação que descreva a informação. No diagrama não se esqueça de indicar as restrições das relações e as chaves primárias das entidades.

2. Transforme o modelo E-R em tabelas. Nas tabelas não se esqueça de indicar as chaves primárias.

3. Defina o conjunto de dependências funcionais que a base de dados deve verificar.

   Ex: as seguintes dependências funcionais são verdade neste domínio

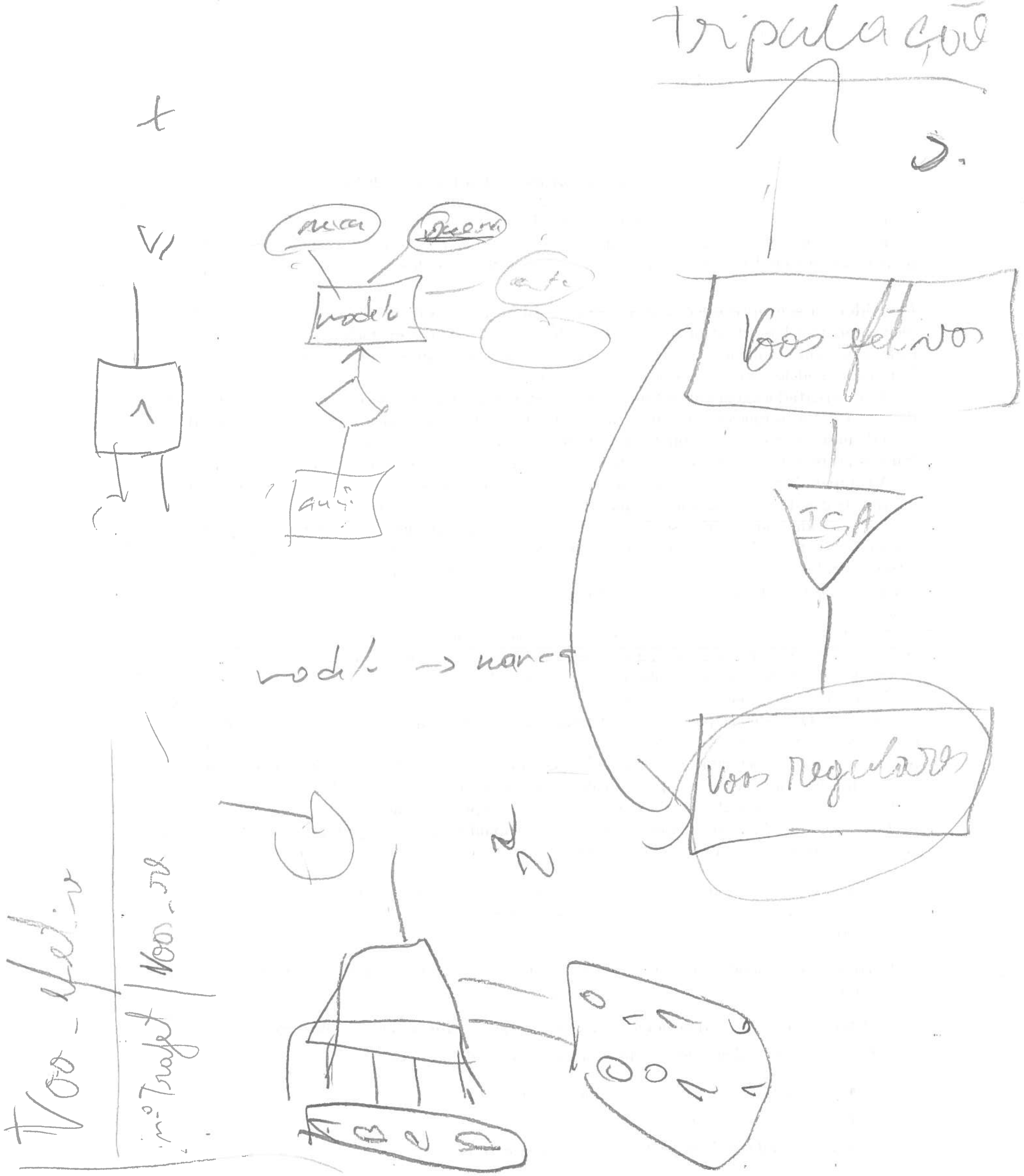
   - *marca, modelo* $\rightarrow$ *autonomia, número de lugares*
   - *nomeAvião* $\rightarrow$ *marca, modelo*
   - n^o*voo, data* $\rightarrow$ *hora_partida, hora_exacta_partida*

4. Calcule a cobertura canónica do conjunto de dependências funcionais da alínea anterior.

5. Apresente a Base de Dados na forma normal de Boyce Codd.

6. Se a base de dados da alínea anterior não preserva as dependências apresente a base de dados na 3ª formula normal.

7. Para cada relação da base de dados indique as chaves primárias, candidatas e estrangeiras.



aviões (viagem, marca, modelo, autonomia, nº passageiros)

funcionário (..., BI, tipo, ...)

voos regulares (dia, nº voo, origem, destino, sai, chega, percorre, tripulações)

voos efetivos (

Chaves:

1) **Superchave**: K é uma superchave de R se os valores de K são suficientes para identificar um tuplo único de cada relação possível r(R)

2) **chave candidata**: K é uma chave candidata se K for minimal, ou seja, é uma superchave e não tem nenhum subconjunto que seja superchave.

3) **chave Primária**: chave candidata escolhida como forma principal para identificar os tuplos de uma relação. Deve-se escolher um atributo que nunca mude ou raramente.

4) **chave Estrangeira**: esquema de uma relação pode ter um atributo que é a chave primária de outra relação.

6) **Interseção (∩)**: $r \cap s$, r e s tenham a mesma aridade e os domínios compatíveis

7) **natural Join (⋈)**: $R = (A, B, C, D)$ $S = (E, B, D)$

$r \bowtie s = (A, B, C, D, E)$ é igual a $\Pi_{r.A, r.B, r.C, r.D, s.E}(\sigma_{r.B=s.B}(\sigma_{r.D=s.D}(r \times s)))$

9) **projeção generalizada (Π)**: Estende a operação projeção permitindo o uso de funções aritméticas na lista de atributos da projeção

10) **Funções de Agregação**: Avg: valor medio, min: valor minimo, max: valor maximo

sum: soma de valores, count: nº de valores

operação

$g_1, g_2 \dots g_n \; \mathcal{G}_{F_1(A_1), \dots, F_m(A_m)}(E)$

(E) → expressão de algebra relacional

lista de atributos onde se pretende agrupar (pode ser vazia)

função de agregação

atributos do esquema E

exemplo: $\mathcal{G}_{sum(c)}(r) =$

sum(c)
27

Algebra:

1) **selecionar (σ)**: $\sigma_p(r)$, ligado a termos com ∨ ; ∧ ; ¬ ou por operações $>, <, =, \leq,$

exemplo: $\sigma_{branch = perry}(acount)$

2) **Projetar (Π)**: $\Pi_{A1, An}(r)$ sendo $A_1, \dots A_n$ atributos. os atributos que ñ são projetos são eliminados.

3) **união (∪)**: $r \cup s$, r e s devem ter a mesma aridade (= nº de atributos) e os seus domínios devem ser compatíveis. ou seja, o mesmo tipo de atributos deve ser encontrado nas 2 relações

4) **Diferença (−)**: $r - s$, r e s devem ter a mesma aridade e os seus domínios compatíveis.

5) **Produto cartesiano (×)**: $r \times s$, r e s devem ser dijuntos ($r \cap s = \emptyset$) e se R(s) não são dijuntos é necessario usar a operação renomear.

8) **Afetação**: é sempre feita para uma variavel de relação temporária. o resulto à direita de ← é atribuido à varial de relação do lado esquerdo de ←. Pode-se usar a variavel em expressões subsequentes.

exemplo: escrever $r \div s$ como

$temp_1 \leftarrow \Pi_{R-S}(r)$

$temp_2 \leftarrow \Pi_{R-S}(temp_1 \times s) - \Pi_{R-S,S}(r)$

resultado $= temp_1 - temp_2$

11) **outer Join**:

loan =

loan_nº	branch-name	Amount
L-170	downtown	3000
L-230	Redwood	4000
L-260	Perry	1700

borrower =

customer-name	loan-nº
Jones	L-170
smith	L-230
Hayes	L-155

natural Join (loan ⋈ borrower):

loan-nº	branch-name	Amount	customer-name
L-170	downtown	3000	Jones
L-230	redwood	4000	smith

left outer Join (=⋈) : loan =⋈ borrower

Right outer Joint (⋈=)

Full outer Joint (=⋈=)

loan-nº	branch-name	Amount	customer-name
L-170	downtown	3000	Jones
L-230	redwood	4000	smith
L-260	Perry	1700	null

loan ⋈= borrower

loan-nº	branch-name	amount	customer-name
L-170	down+	3000	Jones
L-230	red	4000	smith
L-155	null	null	Hayes

loan =⋈= borrower :

loan nº	branchname	amount	cust-name
L-170	dow	3000	Jones
L-230	Red	4000	smith
L-260	Perry	1700	null
L-155	null	null	Hayes

10 modificação:

deletion, insertion, updating + ←

$r \leftarrow r - e$ | deletion |

$r \leftarrow r \cup e$ | insertion |

$r \leftarrow \Pi_{F_1,\dots,F_m}(r)$

operações com conjuntos:

união, intersect, except

A union B ande A e B
intersect são conjuntos
except de queries

clausula with

permite definir uma vista temporária que está disponível só para a query onde a clausula with ocorre.

· encontrar todas as contas com o saldo maximo

with max_balance (value) as select max (balance)
from account

select account_nº
from account, max_balance
where account.balance = max_balance.value

deletion:

delete from ___ where ___

exemplo

delete from account where balance < (select avg (balance)
from account)

Insertion: insert into ___ values ___

sql tipos de dados:

char n int n float n
varchar n real n numeric (p,d) p unidades, c c.d.d

clausulas:

select
from
where → + between
not null

Funções de Agregação:

avg, min, max, sum, count

select $\boxed{\text{avg (R)}}$ $\boxed{\text{count (R)}}$ $\boxed{\text{sum (R)}}$
from ___ $\boxed{\text{max (R)}}$ $\boxed{\text{min (R)}}$
where ___

operação de strings:

% ⇒ o caracter % substitui qualquer substring

_ ⇒ o caracter _ substitui qualquer caracter

select
from
where ___ like % subst %
_c_

operação de agregação:

select ___
from ___
where ___
group by ___

nota: os atributos da clausula select fora da função agregação devem aparecer na lista do group by

vista (view)

create view ___ as < sql query >

exemplo: criar a vista que consiste nas agencias e seus clientes

create view all_customers as (select branch_name, customer_name
from depositor, account
where depositor.account_number = acc.acc_nº)
union
(select branch_name, customer_name)
from borrower, loan
where borrower.loan_nº = loan.loan_nº)

create table name (
~~tipo do atributo~~
atributo tipo do atr.;
primary key ( );
);

exemplo:
create table branch (
branch_name char(15),
branch_city char(30),
assets integer,
primary key (branch_name))

1ª forma normal

Os domínios são atomicos se os seus elementos unidades indivisíveis. Quer isto dizer, que R não contem elementos/atributos de multiplos valores. R apenas contem atributos de um unico valor.

. É sempre assumido que todas as relações estão na primeira forma normal.

exemplo:

id	name	linguage
s_1	A	c | c++
s_2	A	c++ | Java
s_3	B	Java

A relação não se encontra na 1ª forma normal.

- single value attribute: id, name
- multiple value attribute: linguage

⇓

id	name	linguage
s_1	A	c
s_1	A	c++
s_2	A	c++
s_2	A	Java
s_3	B	Java

A relação já se encontra na 1ª forma normal.

- single value attribute: id, name, linguage

Dependências funcionais

- restringe o conjunto de relações validas
- Requer que o valor de um conjunto de atributos determine unicamente o valor de outro conjunto de atributos.
- Uma dependência funcional é uma generalização de chave

exemplo 1.

name	Roll	CGPA
A	R_1	7.6
B	R_2	5.5
C	R_3	9.2
A	R_4	9.1
B	R_5	8.7

Student (name, Roll, CGPA)

$\boxed{A \to B}$

$a_1, a_2 \to c$ ✓

$a_1 \to c_1, c_2$ ✗

então, $\boxed{Roll \to CGPA}$ ✓ $\boxed{name \to CGPA}$ ✗

$\boxed{Roll \to name}$ ✓ $\boxed{CGPA \to name}$ ✓

$\boxed{name \to Roll}$ ✗ $A \to R_1, R_4$ ✗

$\boxed{CGPA \to Roll}$ ✓

$F = \{Roll \to CGPA, Roll \to name, CGPA \to name, CGPA \to Roll\}$

√ são todas as dependencias funcionais da relação Student

exemplo 2.

a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_1	d_2
a_2	b_2	c_2	d_2
a_2	b_2	c_2	d_3
a_3	b_3	c_2	d_4

$\boxed{A \to B}$ ✗ $a_1 \to b_1, b_2$ ✗

$\boxed{A \to C}$ ✓ $a_1 \to c_1$, $a_2 \to c_2$ ✓, $a_3 \to c_2$

$\boxed{A \to D}$ ✗ $a_1 \to d_1, d_2$ ✗

$\boxed{B \to C}$ ✗ $b_1 \to c_1$, $b_2 \to c_1, c_2$ ✗

$b_1 \to d_1$, $b_2 \to d_2, d_3$ ✗ $\boxed{C \to D}$ ✗

$F = \{A \to C\}$

- uma dependência funcional é trivial se é satisfeita por todas as instâncias de uma relação:

$\boxed{\alpha \to \beta \text{ é trivial se } \beta \subseteq \alpha}$

exemplo 3.

id	name	phone
123	bob	2528
321	gray	2438
423	smith	2368
123	bob	2698

$\boxed{id \to name}$ ✓ 123 → bob, 321 → gray, 423 → smith

$\boxed{id \to phone}$ ✗ 123 → 2528, 2698 ✗

$\boxed{phone \to id}$ ✓ 2528, 2698 → 123 ✓

$\boxed{name \to id}$ ✓

$\boxed{name \to phone}$ ✗

$\boxed{phone \to name}$ ✓

$F = \{id \to name;\ phone \to name\}$

Fecho de uma dependência funcional ou conjunto de dependencias funcionais

- conjunto de todas as dependências funcionais implicadas por F, e F^+ é o fecho de F.

Exemplo 1. $R(A, B, C)$ $F = \langle A \to B, B \to C \rangle$

$F^+ = \{A \to A, B \to B, C \to C, A \to B, B \to C, A \to C\}$

Exemplo 2. $R(A, B, C, D)$ $F = \{A \to B, B \to D, C \to B\}$

$F^+ = \{A \to A, B \to B, C \to C, D \to D, A \to B, B \to D, A \to D, C \to B, C \to D\}$

$A^+ = \{A, B, D\} \Rightarrow A^+ \to ABD$ $cl(A) = \{ABD\}$

Exemplo 3. $R(A, B, C, D, E, F, G)$

$F = \{AB \to CD, AF \to D, DE \to F, C \to G, F \to E, G \to A\}$

$(CF)^+ = CFGEAD$ $(AF)^+ = AFDE$

$(BG)^+ = BGACD$ $(AB)^+ = ABCDG$

- o conjunto de todas as dependencias funcionais implicadas por F é o fecho de F, F^+

Forma Normal de Boyce-Codd

- 1. $\alpha \to \beta$ é trivial ($\beta \subseteq \alpha$)
- 2. α é super chave de R

O esquema de uma relação R está em BCNF com respeito a um conjunto F de dependências funcionais se para todas as d.f de F^+ da forma $\alpha \to \beta$ $\alpha, \beta \subseteq R$

decomposição de um esquema na BCNF (ñ se verifica $\alpha \to \beta$ trivial)

$$R \begin{cases} \to (\alpha \cup \beta) \\ \to R - (\beta - \alpha) \end{cases}$$

Preservação das dependências: se para verificar cada dependência funcional que se verifica na base de dados for suficiente olhar para uma relação. Então diz-se que a decomposição da BD preserva as dependências funcionais, se não ocorrer, então vamos recorrer à 3NF.

Terceira Forma Normal

- → $\alpha \to \beta \subseteq a F^+$
- → $\alpha \to \beta$ é trivial
- → α é uma super chave de R
- → cada atributo A pertencente a $\beta - \alpha$ está contido numa chave candidata de R.

Se a relação está na BCNF então encontra-se em 3NF

A terceira condição é um relaxamento da BCNF para assegurar a preservação das dependências.

Exemplo 1. $R(A,B,C,D,E)$

$F = \{A \to BCDE, B \to ADE, D \to E\}$

$A^+ \Rightarrow \{ABCDE\}$ $BC^+ \to ABCDE$ $D^+ \to DE$

3NF ✗

$$R \begin{cases} R_1(A,B,C,D) = \{A \to BCDE, B \to ADE\} \\ R_2(D,E) = \{D \to E\} \end{cases}$$

3NF ✓

$\left.\begin{matrix} A \to B \\ B \to H \end{matrix}\right\}$ regra 3. $\boxed{A \to H} \subseteq F^+$

$\left.\begin{matrix} A \to B \\ A \to C \end{matrix}\right\}$ regra 4. $\boxed{A \to BC} \subseteq F^+$

Exemplo 2. $R(A,B,C,G,H,I)$

$F = \{A \to B, A \to C, CG \to H, CG \to I, B \to H\}$

$\left.\begin{matrix} A \to C \\ CG \to H \end{matrix}\right\}$ 5ª $\boxed{AG \to H}$ $\boxed{AG \to I}$ $\subseteq F^+$

$\boxed{CG \to HI} \subseteq F^+$ 4ª

Regras de inferência de dependências funcionais

→ **1ª Regra:** Reflexividade $\boxed{x \subseteq y}$ então $\boxed{y \to x}$

$\beta \subseteq \alpha$ então $\alpha \to \beta$

$R(A,B,C,D)$ $ABC \to AB$ onde $AB \subseteq ABC$

→ **2ª Regra:** Aumento/Ampliação $\boxed{x \to y}$ então $\boxed{xz \to yz}$

$\alpha \to \beta$ então $\gamma\alpha \to \gamma\beta$

→ **3ª Regra:** Transitividade $\boxed{x \to y}$ e $\boxed{y \to z}$ então $\boxed{x \to z}$

4ª Regra: Adição/união $\boxed{x \to y}$ e $\boxed{x \to z}$ então $\boxed{x \to yz}$

$x^+ \to yz$

5ª Regra: Pseudo transitividade $\boxed{x \to y}$ e $\boxed{yz \to w}$ então $\boxed{xz \to w}$

6ª Regra: desconstrução/decomposição $\boxed{x \to yz}$ então $\boxed{x \to y}$ $\boxed{x \to z}$

exemplo 1. $R(A,B,C,G,H,I)$ $F = \{A \to B, A \to C, CG \to H, CG \to I, B \to H\}$

$F^+ = \{A \to A, B \to B, C \to C, G \to G, H \to H, I \to I,$

$A \to B, B \to H, A \to H, \ldots$

$\left.\begin{matrix} A \to B \\ B \to H \end{matrix}\right\}$ regra 3ª $\Rightarrow \boxed{A \to H}$ regra 4ª $\Rightarrow \boxed{A \to BC}$

$A \to C$ → regra 2° $\Rightarrow \boxed{H \to CH}$

$CG \to H$, $CG \to I$ → regra 4ª $\Rightarrow \boxed{CH \to HI}$

regra 5ª $\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} AH \to H \\ AH \to I \end{matrix}}$ regra 2ª $\boxed{H \to AH}$

Exemplo 4: Fecho de conjunto

R(A, B, C, G, H, I)

F = {A → B, A → C, C~~B~~ → H, CG → I, B → H}

$(AG)^+ = ABCGHI$

AG é chave candidata? ✓

AG é super chave? ✓

Será que AG → R? $AG^+ = \{ABCGHI\}$ $AG^+ \supseteq R$

3.1 será que algum subconjunto de AG é superchave?

a) será que A → R? $A^+ = \{ABCH\}$ $A^+ \not\supseteq R$

b) será que G → R? $G^+ = \{G\}$ $G^+ \not\supseteq R$

→ R: não há nenhum subconjunto de AG que seja superchave.

Superchave: especifica que não pode ocorrer 2 tuplos distintos terem o mesmo valor para superchave.

R(A, B, C, D, E) ; F = < A → C, E → B, D → E >

Student (Book-id, name, author)

bookid	name	author
B_1	xyz	A_1
B_2	ABC	A_2
B_3	xyz	A_2
B_4	PQR	A_3
B_5	RSP	A_1
B_6	ABC	A_3

Supondo que [x, y, z] é superchave então para qualquer tuplo na relação a combinação dos 3 não será nunca igual, não se repete.

[name, author] não sempre unicas entre si. Então podemos considerar esta combinação uma superchave da relação. como o caso de [book-id].

[name, book-id, author] também é superchave, dado que não há 2 tuplos iguais. Nas superchaves pode ocorrer redundância, no caso anterior, como book-id é unico em toda a relação então é superchave, logo, a combinação referida é redundante ter name e author uma vez que bookid já é superchave da relação

[name, author] superchave [book-id] superchave [name, bookid, author]

Usos do Fecho de atributos

1.º testar uma superchave: para testar se α é uma superchave, calcula-se $(\alpha)^+$ e verifica-se se α^+ contem todos os atributos de R

2.º testar as dependências funcionais: para verificar se uma dependencia funcional se verifica $\alpha \to \beta$, basta verificar $\beta \subseteq \alpha^+$. Isto é, calcular α^+ usando o fecho dos atributos, e depois verificamos se contém β.

3.º calcular o fecho de F: para cada $\gamma \subseteq R$, encontramos o fecho γ^+ e para cada $S \subseteq \gamma^+$, retornamos uma dependência funcional $\gamma \to S$

chave candidata: • superchave sem redundância e sem forma de poder ser reduzida. ou seja, é uma superchave minimal.

• na relação student, a chave candidata é bookid, pois é super chave minimal que vamos obter todos os atributos da relação. No caso da relação R, AD é superchave e minimal logo é a chave candidata

$(AD)^+ \to ADCBE \supseteq R$

• Para encontrar a chave candidata:

1.º Passo: Procurar os atributos que não estejam no lado dir[eito]

2.º Passo: Encontrar o fecho desses atributos. se não tivermos qualquer dependencia funcional que dê para aferir quaisquer outros atributos da relação, tem de se fazer combinaçõe[s] de atributos.

3.º Passo: como os atributos vão estar sempre presentes na chave candidata, fazemos as combinações mensionadas até obtemos uma chave candidata.

$F = \{ CH \to G,\ A \to BC,\ B \to CFH,\ E \to A,\ F \to EG \}$

1º passo: D

2º passo: $(D)^+ \Rightarrow D$

3º passo: $(DA)^+ = \{ADBCFHGEG\} \supseteq R$ ✓

$(DB)^+ = \{BDCFHGEA\} \supseteq R$ ✓

$(DC)^+ = \{CD\} \not\supseteq R$

$(DF)^+ = \{FDEGABCH\} \supseteq R$ ✓

$(DG)^+ = \{GD\} \not\supseteq R$ — nota: $[DCH]^+ = \{DCHG\} \not\supseteq R$

$(DE)^+ = \{EDABCFHG\} \supseteq R$ ✓

$(DG)^+ = \{GD\} \not\supseteq R$

$(DH)^+ = \{HD\} \not\supseteq R$ — nota: $(DE)^+ = \{EDA \ldots\}$ como $DE^+ \supseteq DA$ e DA é c.c. então DE é c.c.

Chaves candidatas: [AD, BD, FD, ED]

Cobertura canónica

- conjuntos de dependências funcionais podem ter dependências redundantes que podem ser inferidas de outras.

$A \to C$ é redundante em $\{A \to B,\ B \to C\}$

$\{A \to B;\ B \to C,\ A \to CD\} \Rightarrow \{A \to B,\ B \to C,\ A \to D\}$

$\{A \to B,\ B \to C,\ AC \to D\} \Rightarrow \{A \to B,\ B \to C,\ A \to D\}$

- uma cobertura canónica de F é um conjunto minimal de dependências funcionais equivalente a F, sem dependências redundantes nem dependências com partes redundantes.

$F = \{A \to C,\ C \to D,\ D \to B,\ E \to F\}$

1º passo: AE

2º passo: $(AE)^+ = \{AECFDB\} \supseteq R$

chave candidata: AE

Exemplo 3. $R(A, B, C, D, E)$ $F = \{A \to B,\ AB \to C,\ BC \to E,\ BD \to E\}$

1º passo AD

2º passo $(AD)^+ = \{ADBCE\}$

chave candidata: AD

→ considerando o conjunto F de DF e a dependência funcional $\alpha \to \beta$ em F.

- o atributo A é extra em α se $A \in \alpha$ e F implica $(F - \{\alpha \to \beta\}) \cup \{(\alpha - A) \to \beta\}$
- o atributo A é extra em β se $A \in \beta$ e o conjunto de dp $(F - \{\alpha \to \beta\}) \cup \{\alpha \to (\beta - A)\}$ implica F.

Exemplo 1. $F = \{A \to C,\ AB \to C\}$

B é atributo extra em $AB \to C$ porque $\{A \to C,\ AB \to C\}$ o que implica que $A \to C$, resultado de largar B em $AB \to C$

Exemplo 2. $F = \{A \to C,\ AB \to CD\}$

C é atributo extra em $AB \to CD$ pois $AB \to C$ pode ser inferido mesmo depois de retirar C.

▶ Testar se um atributo é extra:

- considere o conjunto F de d.f e a d.f $\alpha \to \beta$ em F
- Para testar se o atributo $A \in \alpha$ é extra em α:
  1. calcular $(\{\alpha\} - A)^+$ usando as dependências em F
  2. verificar que $(\{\alpha\} - A)^+$ contem β; se sim, então A é extra
- Para testar se o atributo $A \in \beta$ é extra em β:
  1. calcular α^+ usando só dependências funcionais em $F = (F - \{\alpha \to \beta\}) \cup \{\alpha \to (\beta - A)\}$
  2. verificar α^+ contem A; se sim, A é extra em β

➔ A cobertura canónica de F é o conjunto de dependências F_c tal que:

a) F implica todas as dependências em F_c

b) F_c implica todas as dependências em F

c) nunhuma dependência funcional em F_c contem um atributo extra.

d) cada lado esquerdo da dependência funcional em F_c é único

Exemplo 1: R(A, B, C) F = {A → BC, B → C, A → B, AB → C}

1° combinar A → BC e A → B em A → BC

conjunto fica: {A → BC, B → C, AB → C}

2° A é extra em AB → C

verificar se o resultado de remover A de AB → C é implicado pelas outras dependências

sim: B → C e já se encontra em F

conjunto fica: {A → BC, B → C}

3° C é extra em A → BC

verificar se A → C é implicado por A → B e as outras dependências.

sim: A → B ⟹ B → C ⟹ $\boxed{A \to C}$

transitividade eam

A cobertura canónica é: {A → B, B → C}

Exemplo 2.

1° Passo: colocar todos os atributos do lado direito de modo unico

2° Passo: remoção de atributos extras

3° Passo: remoção de d.f com redundancia

R(A, B, C, D, E)

F = {A → B, AB → C, D → AC, D → E}

G = {A → BC, D → AB}

a) F cobre G b) G cobre F

c) F e G são iguais d) nenhuma

1° passo: F = {A → B ✓, $\boxed{AB \to C}$ A → C ✓, D → A ✓, D → C ✗, D → E}

G = {A → B ✓, A → C ✓, D → A ✓, D → B} ✗

2° passo: B é extra em AB → C

$A^+ = \{ABC\}$ $B^+ = \{B\}$

$\boxed{A \to C}$ nova d.f uma vez que B é encontrado por A.

3° passo: $\boxed{A \to C}$ ✗ retirarmos

$D^+ = \{DACEB\}$

$\boxed{A \to B}$ ✗ nunca chego a B logo não é redundante.

$\boxed{D \to A}$ ✗ nunca chego a A logo não é redundante

$\boxed{D \to E}$ ✗ nunca chego a E

$\boxed{D \to C}$ ✗ é redundante logo elimina-se

não é redundante

Forma canónica F = {A → B, A → C, D → A, D → E}

A → BC D → AE

$\boxed{A \to B}$ ✗ $A^+ = \{AC\}$ $D^+ = \{ACB\}$ não há

$\boxed{A \to C}$ ✗ $A^+ = \{AB\}$ $D^+ = \{ABD\}$ não é redundante

$\boxed{D \to A}$ ✗ $A^+ = \{ACB\}$ $D^+ = \{BD\}$

$\boxed{D \to B}$ ✗ $D^+ = \{ADBC\}$ é redundante

Decomposição sem perdas nos joins

- Para o caso de $R = (R_1, R_2)$ requer-se que para todas as relações possíveis r no esquema R

$$\boxed{r = \Pi_{R_1}(r) \bowtie \Pi_{R_2}(r)}$$

- A decomposição de R em R_1 e R_2 é sem perdas nos joins se e só se pelo menos uma das seguintes dependências está em F^+:

  1. $R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1$
  2. $R_1 \cap R_2 \rightarrow R_2$

Exemplo: $R(A, B, C)$

$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

Pode ser decomposto em 2 formas diferentes:

1ª $R_1 = (A, B)$ $R_2 = (B, C)$

decomposição sem perdas nos joins: $R_1 \cap R_2 = \{B\}$ e $B \rightarrow BC$

preservação das dependências

2ª $R_1(A, B)$ $R_2 = (A, C)$

decomposição sem perdas nos joins: $R_1 \cap R_2 = \{A\}$ e $A \rightarrow AB$

não preserva as dependências. não se pode verificar $B \rightarrow C$ sem calcular $R_1 \bowtie R_2$

Teste para a preservação das dependências

Exemplo 1.

$R(A, B, C)$

$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

- chave candidata = A

  $A^+ = \{ABC\}$

- R não está na BCNF

- na decomposição $R_1(A, B)$ e $R_2(B, C)$

  então, $R_1(A, B)$ $F_1 = \{A \rightarrow B\}$

  $R_2(B, C)$ $F_2 = \{B \rightarrow C\}$

- R1 e R2 estão na BCNF
- decomposição sem perdas nos joins
- Preserva as dependências

Teste para a BCNF

- Para verificar se a dependência funcional $\alpha \rightarrow \beta$ causa a violação da BCNF

  1. calcular α^+
  2. verificar se inclui todos os atributos de R, isto é se é uma super chave de R

teste simplificado: para verificar se o esquema de uma relação R está na BCNF, basta verificar só as dependências do conjunto F, não é necessário verificar todas as dependências de F^+

se nenhuma das d.f de F viola a BCNF, então nenhuma das dependências de F^+ causa a violação da BCNF. Mas usar só F é incorreto.

$R(A, B, C, D, E)$

$F = \{A \rightarrow B, BC \rightarrow D\}$

- $R_1 = (A, B)$ $R_2 = (A, C, D, E)$
- nenhuma das dependências de F contem só atributos de (A,C,D,E) assim somos levados a pensar que R_2 satisfaz BCNF, mas de fato, $AC \rightarrow D$ em F^+ mostra que R_2 n esta em BCNF

Testar se uma decomposição de R está na BCNF

- Para testar se um esquema R_i numa decomposição de R está na BCNF,

1. ou se testa se R_i está na BCNF com respeito à restrição de F a R_i, isto é todas as DF em F^+ que só contêm atributos de R_i.

2. ou usa-se o conjunto original de dependências funcionais de R mas com o seguinte teste:

→ para todo o conjunto de atributos $\alpha \subseteq R_i$, verificar se α^+ ou não tem nenhum atributo de $R_i - \alpha$ ou tem todos os atributos de R_i

→ se a condição é violada por algum $\alpha \to \beta$ em F, a dependência $\alpha \to (\alpha^+ - \alpha) \cap R_i$ verifica-se em R_i e R_i viola BCNF

→ usa-se a dependência acima para decompor R_i

BCNF e Preservação das dependências

nem sempre é possível obter uma decomposição na BCNF que preserve as dependências.

$R = (J, K, L)$ $F = \{JK \to L, L \to K\}$

chave candidata: $J^+ = \cancel{J}R(JK)^+ = JKL \supseteq R$ $\}$ $\boxed{c.c}$ JL e JK
$(JL)^+ = JKL \supseteq R$

A relação K ñ está na forma BCNF

Qualquer decomposição de R não vai preservar $JK \to L$ isto obriga a ter que fazer um join para testar $JK \to L$

Exemplo 1: $R(A, B, C)$ $F = \{A \to B, B \to C\}$

chave candidata: A

não está na BCNF porque B não é chave candidata de R logo $B \to C$ viola a BCNF

decomposição: $R_1 = (B, C)$

$R_2 = (A, B)$

Exemplo 2:

R = (branch_name, branch_city, assets, customer_name, loan_num, amount)

F = {branch_name → assets, branch_city
loan_number → amount, branch_name}

chave candidata:

$(\text{customer\_name}, \text{loan\_number})^+$ = {customer_name, loan_number, amount, branch_name, branch_city, assets}

$\boxed{c.c}$ = (customer_name, loan_number)

decomposição:

R_1 = (branch_name, branch_city, assets)

R_2 = (branch_name, customer_name, loan_number, amount)

R_3 = (branch_name, loan_number, amount)

R_4 = (customer_name, loan_number)

decomposição Final: R1

R3

R4

3NF: motivação

Situações em que a BCNF não preserva as d.f e nas atualizações a verificação das d.f deve ser feita de forma eficiente.

→ solução: definir uma forma normal mais fraca chamada a 3NF.

Exemplo 1.

$R = (J, K, L)$ $F = \{JK \to L, L \to K\}$

Chaves primárias: JK e JL

Não respeita BCNF, mas encontra-se na 3NF

$JK \to L$ onde JK é superchave

$L \to K$ K está contida numa chave candidata

Verificar se está na 3NF

- é necessário verificar só as D.F em F
- usar o fecho dos atributos para verificar cada dependência $X \to \beta$, se α é uma superchave.
- se α não é uma superchave, temos que verificar se cada atributo em β está contido numa chave candidata de R.

Regras de BCNF:

1. Tem de estar na 3NF
2. para qualquer d.f $A \to B$, A é superchave

ou seja A é um non-prime atribute se B é um prime atribute

decompor 3NF

cust_banker_branch (customer_id, employee_id, branch_name, type)

F = { customer_id, employee_id → branch_name, type
employee_id → branch_name
customer_id, branch_name → employee_id }

1º passo: calcular a cobertura canónica

- branch_name é extra na 1ª dp e é o único

F_c = { customer_id, employee_id → type
employee_id → branch_name
customer_id, branch_name → employee_id }

- o ciclo para garantir os esquemas estão na 3NF:

(customer_id, employee_id, type) contem uma chave c. do esquema original e assim não é necessário adicionar mais nenhum esquema.

- se as dependências funcionais fossem consideradas numa ordem diferente, 1ª → 2NF e 2ª → 3NF

(employee_id, branch_name) não seria incluido na decomposição porque é um subconjunto de (customer_id, branch_name, employee...

- O resultado do esquema 3FN simplificado é:

(customer_id, employee_id, type)

Prime and non-Prime atributes

R(A, B, C, D, E, F) $(CE)^+ = CEFABD \supseteq R$ é chave. c.

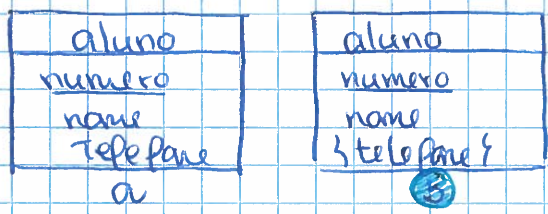
$C \to F$
$E \to A$
$EC \to D$
$A \to B$

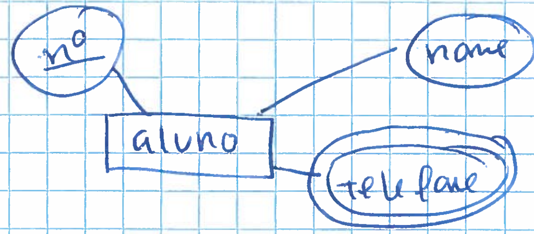
Prime atribute (CE): ~~representa uma c. c~~
↳ atributo de uma relação que existe em uma das possíveis chaves

non prime atribute: ~~não representa nada~~
(F, A, D, B)

Pergunta 1

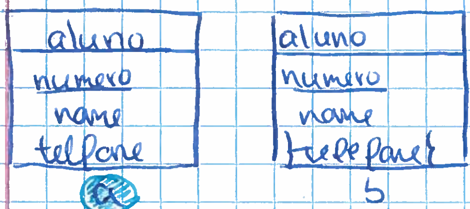
Considere que quer representar que um aluno pode ter vários nº de telefone! Qual o diagrama ER correto?





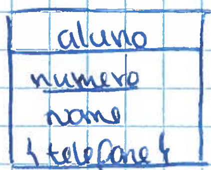
Pergunta 2

aluno (numero, nome, telefone)



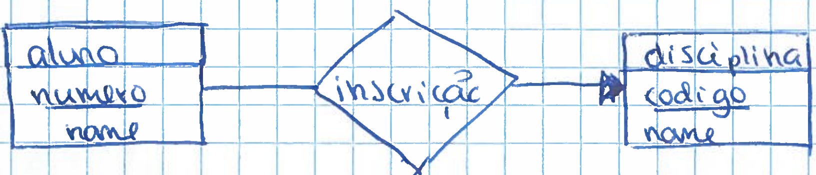
Pergunta 3

aluno (numero, nome)
aluno telefone (numero, telefone)



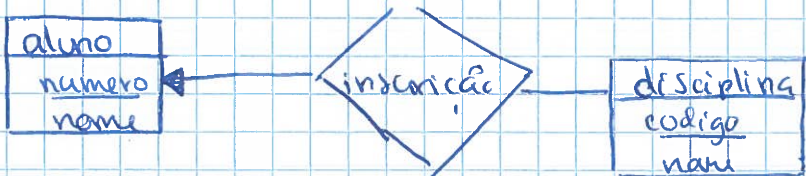
Pergunta 4

numa escola os alunos são representados pelo nº e nome e as disciplinas pelo codigo e o nome. considerando que os alunos só se podem inscrever a uma disciplina



} aluno (numero, nome, codigo,

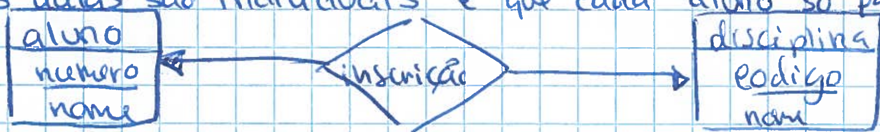
Para cada disciplina só pode haver 1 aluno inscrito



} disciplina (codigo, nome, n

Um aluno pode se inscrever até 5 disciplinas e que cada disciplina pode ter no max 20 alunos

As aulas são individuais e que cada aluno só faz uma disciplina.

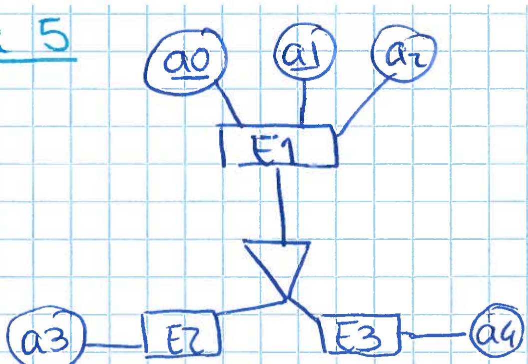


} aluno (numero, nome, codi
disciplina (codigo, nome, nume

inscrição (numero, codigo)

só acontece no caso:

Pergunta 5



e1 (a0, a1, a2)

e2 (a0, a1, a3)

e3 (a0, a1, a3)

Pergunta 1.

Considere $R = (A, B, C, D, E)$ e $F = \{A \to CD, B \to CE\}$. Considere que a cobertura canónica de F é F.

r(R) dado F está na BCNF?

$(AB)^+ = ABCDE \supseteq R$ então AB é chave candidata

non-prime (C, D, E)

prime (A, B)

• como (C, D, E) não são prime attributes e (A, B) non-prime attribute, a relação não está na BCNF, ou seja, A e B não são super chaves.

• não se encontra na 3ªNF, logo, a conclusão retirada é que a relação não se encontra na BCNF.

Pergunta 2.

Considere a relação $R(A, B, C, D, E)$ e $F = \{A \to CD, B \to E, B \to C\}$

Indique a chave candidata

$(AB)^+ = ABCDE \supseteq R$ AB é chave candidata.

Pergunta 3.

$R = (A, B, C, D)$ e $F = \{A, D \to CB, A \to C\}$

indique a chave candidata

$(AD)^+ = ADBC$ A, D é chave candidata

Pergunta 4.

docente (Doc, gabinete, categoria, email, telefone)

gabinete → categoria
DOC → email
Telefone → doc

Telefone, categoria é chave candidata?

$(\text{Telefone, categoria})^+ =$ telefone, categoria, doc, email $\not\supseteq$ docente

telefone, categoria não é chave candidata.

Pergunta 5.

$R = (A, B, C, D)$ e $F = \{C \to BA, D \to C\}$ e a decomposição:

$R_1(A, C, B)$ e $R_2(A, D)$ preserva as dependências? não

$R_1(ACB) \cap R_2(AD) = \{A\}$ e $D \to C$ ñ se verifica
logo ñ preserva depen.

Pergunta 6.

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{C \to BA,\ D \to C\}$

decomposição $R_1(A, C, B)$ e $R_2(C, D)$ preserva as dependencias?

$C \to AB$ $D \to C$

$R_1 \cap R_2 = \{C\}$ → sim

Pergunta 7.

$R = (A, B, C, D)$ e $F = \{C \to BA,\ D \to C\}$

calcule BC^+

$(BC)^+ = BCA = ABC$

Pergunta 8.

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{AD \to CB,\ A \to C\}$

a relação $r(R)$ está na Forma BCNF?

1º passo $AD \to C$
$AD \to B$
$A \to C$

2º passo $A^+ = AC$
$D^+ = D$
não há atributos extra

3º passo $(AD)^+ = ADCB$ logo $A \to C$ é redundante.

Forma canonica
ou estrutura canónica de $F = \{AD \to CB\}$

$(AD)^+ = ADBC \supset R$ | é chave candida e super chave logo n pode ocorrer

non-prime (C, B), prime (A, D)

como AD não é super chave, então a relação n está na 3NF logo tbm n está na BCNF

Pergunta 9.

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{AD \to B,\ AB \to C\}$

a relação $r(R)$ está na Forma BCNF?

$(AD)^+ = ADBC$ é super chave

$(ADB)^+ = ADBC$
$(ADC)^+ = ADCB$ } é

A relação $r(R)$ está na Forma BCNF.

Pergunta 10

$R = (A, B, C, D)$ e $F = \{A, D \to B\}$ indique uma decomposição sem perdas

$AD \to C$ e $C \to B$ $\hat{AD} \to B$ obtida através da regra da transitividade
então $AD \to B$

$R_1 = (A, D, B)$ e $R_2 = (A, C, B)$

ou

$R_1 = (A, C, D)$ $F = \{AD \to C\}$
$R_2 = (C, B)$ $F = \{C \to B\}$

Truque: R_1 = (letras da depe. f. dada)

R_2 = (letras do lado esquerdo + as que faltam)

Pergunta 11

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{A \to B\}$ indique uma decomposição sem perdas.

$R_1 = (A, B)$ $R_2 = (A, C, D)$

Pergunta 12

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{A \to B\}$ indique uma super chave

$R_1 = (A, B) \Rightarrow A \to B$

$R_2 = (A, C, D) \Rightarrow AC \to D$

ABCD ACD AB

$A^+ = \{A, B, C, D\}$ *

$(ABC)^+ = ABCD$

$(ABD)^+ = ABCD$

Pergunta 13

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{A \to B\}$ indique a chave candidata

$(ABCD)^+ = ABCD$ $BCD^+ = BCD$

$ACD = ABCD$ OK

Pergunta 14

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{C \to BA, D \to C\}$

$R_1 = (A, ~~C~~, B)$ $R_2 = (A, D)$ preserva as dependencias

$AC \to B$ $A \to D$ não preserva as dependencias

Pergunta 15

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{AD \to CB, A \to C\}$ indique uma partição sem perdas.

$R1 = (AC)$ $R2 = (A, B, D)$

Pergunta 16

docente (DOC, gabinete, categ, email, telefone)
leciona (DOC, disc, anolect)
disciplina (DISC, anocurso, semestre, horasp, horast, creditos, programa.

DISC → ano_curso, semestre. uma disciplina só pode estar num ano de um curso.

um docente só pode lecionar uma disciplina num ano letivo

DOC, anolectivo → DISC

Pergunta 17

$R(A,B,C,D,E)$ $F = \{A \to CD,\ B \to CE\}$ é a cobertura canonica de F e F e AB é chave candidata.

Indique uma decomposição de R na 3NF.

$R_1 = (ACD)$

$R_2 = (BCE)$

$R_3 = (AB)$

Pergunta 18

$R = (A, B, C, D, E)$ $F = \{A \to CD,\ B \to E,\ B \to C\}$

Qual a cobertura canonica?

1º passo: $A \to C$, $A \to D$, $B \to E$, $B \to C$

2º passo ñ ha elementos extra

3º passo ñ ha redundancia

$Fc = \{A \to CD,\ B \to EC$

Pergunta 19

$R = (A, B, C, D.)$ $F = \{AD \to CB,\ A \to C\}$ A é atributo extra em $AD \to CB$?

$AD \to C$, $AD \to B$, $A \to C$ — $D \to C$, $AD \to B$, $A \to C$ $\Big\}$ $AD \to C$, $AD \to B$ $\Big\rangle$ $AD \to CB$ logo A ñ é atributo extra

Pergunta 20

$R = (A, B, C, D)$ $F = \{AD \to CB,\ A \to C\}$ D é atributo extra em $AD \to CB$?

$AD \to C$, $AD \to B$, $A \to C$ $\Rightarrow$ $AD \to B$, $A \to C$ $\to$ D é necessário em $AD \to B$ então ñ pode pode ser extra em $AD \to CB$.

B é extra em $AD \to CB$?

$AD \to C$, $AD \to B$, $A \to C$ $\Big\}$ B ñ é extra

1. Noções elementares de conjuntos

Notação e convenções: o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é definido por alguns autores incluindo o zero, e por outros começando pelo um. Nesta disciplina optaremos pela primeira definição:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Representamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{R}$ o dos números reais.

Dizemos que um conjunto X está contido num conjunto Y, e representamos por $X \subseteq Y$, se todos os elementos de X pertencem a Y. O conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto de todos os seus subconjuntos:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{3, 7\}$, temos

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{3,7\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3,7\}\}.$$

Dados dois conjuntos A e B, a *união* de A com B é o conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

a *intersecção* de A e B é o conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

e o *complementar* de B em A (pode ler-se "B excepto A") é o conjunto

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Um número natural é *primo* se tiver exactamente dois divisores, o 1 e ele próprio.

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que f é *injectiva* se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes, ou seja, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, se $f(a_1) = f(a_2)$ então $a_1 = a_2$. Dizemos que f é *sobrejectiva* se o contradomínio (conjunto de todas as imagens) for B, ou seja, se para cada elemento $b \in B$ existe um objecto $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Dizemos que f é *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exercícios e problemas

1. Enumere cinco elementos de cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisível por } 5\}$;
   (b) $\{a \in \mathbb{N} : a \text{ é divisor de } 36\}$;
   (c) $\{z \in \mathbb{N} : z \text{ é múltiplo de } 7\}$;
   (d) $\{2m + 1 : m \in \mathbb{N} \wedge m > 0\}$;
   (e) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$;
   (f) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$;
   (g) $\{2^t : t \in \mathbb{N}\}$;
   (h) $\{t^2 : t \in \mathbb{N}\}$;
   (i) $\{\frac{1}{s} : s \in \mathbb{N} \wedge s > 0\}$;
   (j) $\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < 1\}$;
   (k) $\{s \in \mathbb{N} : s + 1 \text{ é primo}\}$.

2. Enumere todos os elementos de cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $\{\frac{1}{b} : b \in \{1, 2, 3, 4\}\}$;
   (b) $\{n^2 - n : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$;
   (c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\}$;
   (d) $\{\frac{1}{c^2} : c \in \mathbb{N} \wedge 0 < c < 11\}$;
   (e) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$;
   (f) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Quantos elementos há em cada um dos seguintes conjuntos?
   (a) $\{l \in \mathbb{N} : l^2 = 9\}$;
   (b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 25\}$;
   (c) $\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = \frac{4}{49}\}$;
   (d) $\{b \in \mathbb{Q} : b^2 = 2\}$;
   (e) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = 2\}$;
   (f) $\{c \in \mathbb{R} : c^2 = -2\}$;
   (g) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\}$;
   (h) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$;
   (i) $\{p \in \mathbb{Z} : 5 < p < 73\}$;
   (j) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é par e } |n| \leq 73\}$;
   (k) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 73\}$;

(l) $\{x \in \mathbb{R} : 0.99 < x < 1\}$;

(m) $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$;

(n) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(o) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$;

(p) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}$;

(q) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par e primo}\}$;

(r) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par ou primo}\}$.

4. Considere os conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}\,;$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}\,;$$
$$C = \{4n+3 : n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}\,;$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0\}.$$

Quais destes conjuntos são subconjuntos de quais? Considere as 16 possibilidades.

5. Considere os conjuntos:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\,;$$
$$A = \{1,3,5,7,9,11\}\,;$$
$$B = \{2,3,5,7,11\}\,;$$
$$C = \{2,3,6,12\}\,;$$
$$D = \{2,4,8\}\,.$$

(a) Determine os conjuntos:

i. $A \cup B$;

ii. $A \cap C$;

iii. $(A \cup B) \cap (U \setminus C)$;

iv. $A \setminus B$;

v. $C \setminus D$.

(b) Quantos subconjuntos de C existem?

(c) Das seguintes afirmações, quais são verdadeiras?

$$0 \in A; \quad 3 \in B; \quad \{2,12\} \subseteq C;$$
$$\{3\} \in B; \quad \{4\} \subseteq D; \quad \{3,6\} \in \mathcal{P}(C);$$
$$\emptyset \in A; \quad \emptyset \subseteq A; \quad \{\emptyset, \{7\}\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

6. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer contidos num conjunto U. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras e quais são falsas (para as falsas apresente um contra-exemplo):

(a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) Se $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

(c) Se $A \cap B \subseteq A \cup B$, então $A = B$.

(d) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$.

(e) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ sempre que $A \subseteq B$.

(f) $A \cap B = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

7. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer conjuntos A e B, $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup B$.

(b) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $A \subseteq B \cap C$.

(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ se } x \geq 1; \\ x, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ -x^3 \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $f(3)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $f(-3)$.

(b) Esboce o gráfico de f.

(c) Determine o contradomínio de f.

9. Sejam $S = \{1,2,3,4,5\}$ e $T = \{a,b,c,d\}$. Responda justificando a cada uma das seguintes perguntas (no caso de a resposta ser positiva, dê um exemplo):

(a) Existem funções injectivas de S para T?

(b) Existem funções injectivas de T para S?

(c) Existem funções sobrejectivas de S para T?

(d) Existem funções sobrejectivas de T para S?

(e) Existem funções bijectivas de T para S?

10. Seja $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(m,n) = 2^m 3^n$.

(a) Calcule $g(m,n)$, para cinco valores distintos de (m,n).

(b) Mostre que g é injectiva, utilizando o seguinte resultado:

Todo o número natural positivo admite uma única factorização em números primos (a menos de permutação de factores).

(c) g é sobrejectiva?

(d) Seja $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $h(m, n) = 2^m 4^n$. Mostre que h não é injectiva.

1. Noções elementares de conjuntos

Notação e convenções: o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é definido por alguns autores incluindo o zero, e por outros começando pelo um. Nesta disciplina optaremos pela primeira definição:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Representamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{R}$ o dos números reais.

Dizemos que um conjunto X está contido num conjunto Y, e representamos por $X \subseteq Y$, se todos os elementos de X pertencem a Y. O conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto de todos os seus subconjuntos:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{3, 7\}$, temos

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{3,7\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3,7\}\}.$$

Um número natural é *primo* se tiver exactamente dois divisores, o 1 e ele próprio.

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que f é *injectiva* se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes, ou seja, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, se $f(a_1) = f(a_2)$ então $a_1 = a_2$. Dizemos que f é *sobrejectiva* se o contradomínio (conjunto de todas as imagens) for B, ou seja, se para cada elemento $b \in B$ existe um objecto $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Dizemos que f é *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exercícios e problemas

1. Enumere cinco elementos de cada um dos seguintes conjuntos.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisível por } 5\}$;

(b) $\{a \in \mathbb{N} : a \text{ é divisor de } 36\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{N} : z \text{ é múltiplo de } 7\}$;

(d) $\{2m + 1 : m \in \mathbb{N} \land m > 0\}$;

(e) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$;

(f) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$;

(g) $\{2^t : t \in \mathbb{N}\}$;

(h) $\{t^2 : t \in \mathbb{N}\}$;

(i) $\{\frac{1}{s} : s \in \mathbb{N} \land s > 0\}$;

(j) $\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < 1\}$;

(k) $\{s \in \mathbb{N} : s + 1 \text{ é primo}\}$.

2. Enumere todos os elementos de cada um dos seguintes conjuntos.

(a) $\{\frac{1}{b} : b \in \{1, 2, 3, 4\}\}$;

(b) $\{n^2 - n : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$;

(c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\}$;

(d) $\{\frac{1}{c^2} : c \in \mathbb{N} \land 0 < c < 11\}$;

(e) $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$;

(f) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Quantos elementos há em cada um dos seguintes conjuntos?

(a) $\{l \in \mathbb{N} : l^2 = 9\}$;

(b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 25\}$;

(c) $\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = \frac{4}{49}\}$;

(d) $\{b \in \mathbb{Q} : b^2 = 2\}$;

(e) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = 2\}$;

(f) $\{c \in \mathbb{R} : c^2 = -2\}$;

(g) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\}$;

(h) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$;

(i) $\{p \in \mathbb{Z} : 5 < p < 73\}$;

(j) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é par e } |n| \leq 73\}$;

(k) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 73\}$;

(l) $\{x \in \mathbb{R} : 0.99 < x < 1\}$;

(m) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$;

(n) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(o) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$;

(p) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}$;

(q) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par e primo}\}$;

(r) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par ou primo}\}$.

4. Considere os conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}\,;$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}\,;$$
$$C = \{4n+3 : n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}\,;$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0\}.$$

Quais destes conjuntos são subconjuntos de quais? Considere as 16 possibilidades.

5. Considere os conjuntos:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\,;$$
$$A = \{1,3,5,7,9,11\}\,;$$
$$B = \{2,3,5,7,11\}\,;$$
$$C = \{2,3,6,12\}\,;$$
$$D = \{2,4,8\}\,.$$

(a) Determine os conjuntos:
   i. $A \cup B$;
   ii. $A \cap C$;
   iii. $(A \cup B) \cap (U \setminus C)$;
   iv. $A \setminus B$;
   v. $C \setminus D$.

(b) Quantos subconjuntos de C existem?

(c) Das seguintes afirmações, quais são verdadeiras?

$$0 \in A; \quad 3 \in B; \quad \{2,12\} \subseteq C;$$
$$\{3\} \in B; \quad \{4\} \subseteq D; \quad \{3,6\} \in \mathcal{P}(C);$$
$$\emptyset \in A; \quad \emptyset \subseteq A; \quad \{\emptyset, \{7\}\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

6. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer contidos num conjunto U. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras e quais são falsas (para as falsas apresente um contra-exemplo):

(a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) Se $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

(c) Se $A \cap B \subseteq A \cup B$, então $A = B$.

(d) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$.

(e) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ sempre que $A \subseteq B$.

(f) $A \cap B = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

7. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer conjuntos A e B, $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup B$.

(b) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $A \subseteq B \cap C$.

(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ se } x \geq 1; \\ x, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ -x^3 \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $f(3)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $f(-3)$.

(b) Esboce o gráfico de f.

(c) Determine o contradomínio de f.

9. Sejam $S = \{1,2,3,4,5\}$ e $T = \{a,b,c,d\}$. Responda justificando a cada uma das seguintes perguntas (no caso de a resposta ser positiva, dê um exemplo):

(a) Existem funções injectivas de S para T?

(b) Existem funções injectivas de T para S?

(c) Existem funções sobrejectivas de S para T?

(d) Existem funções sobrejectivas de T para S?

(e) Existem funções bijectivas de T para S?

10. Seja $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(m,n) = 2^m 3^n$.

(a) Calcule $g(m,n)$, para cinco valores distintos de (m,n).

(b) Mostre que g é injectiva, utilizando o seguinte resultado:

> *Todo o número natural positivo admite uma única factorização em números primos (a menos de permutação de factores).*

(c) g é sobrejectiva?

(d) Seja $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $h(m,n) = 2^m 4^n$. Mostre que h não é injectiva.

Matemática Discreta

1. Noções elementares de conjuntos

→ $\mathbb{N}$, conjunto dos n^os^ naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
→ $\mathbb{Z}$, conjunto dos n^os^ inteiros;
→ $\mathbb{Q}$, conjunto dos n^os^ racionais;
→ $\mathbb{R}$, conjunto dos n^os^ reais;

teoria 1.

→ X e Y são conjuntos
→ $X \subseteq Y$, X é subconjunto de Y
→ cada elemento x' de X é elemento de Y

teoria 2.

→ $X \subseteq Y$ → O conjunto X está contido em Y, se todos os seus elementos pertencerem a Y.

→ O conjunto das partes que constituem o conjunto A é o conjunto de todos os seus subconjuntos:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

· sendo $A = \{3, 7\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{3, 7\}\}.$$

$\emptyset \subseteq \{3, 7\}$

↳ seja $x' \in \emptyset$. Então $x \neq x'$. Logo $x' \in \emptyset$ é falso.

· Por teorema da lógica, toda a conclusão é verdade:

então,
1) $x' \in \{3, 7\}$ é verdade;
2) $\emptyset \subseteq \{3, 7\}$;
3) também $\emptyset \subseteq X$, X conjunto qualquer;

Teoria 3.

→ Conjuntos A e B:

· $A \cup B$ (União) ("A unido com B")

↳ $\{x \in (A \cup B) : x \in A \vee x \in B\}$

· $A \cap B$ (interseção) ("A intersetado com B")

↳ $\{x \in (A \cap B) : x \in A \wedge x \in B\}$

· $(A \setminus B)$ ou $(A - B)$ (complementar de B em A) ("A menos B") ou ("A exceto B")

↳ $\{x \in (A \setminus B) : x \in A \wedge x \notin B\}$

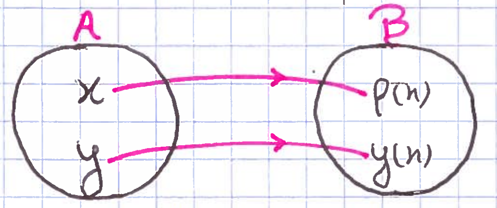
Teoria 4.

→ **Funções:**

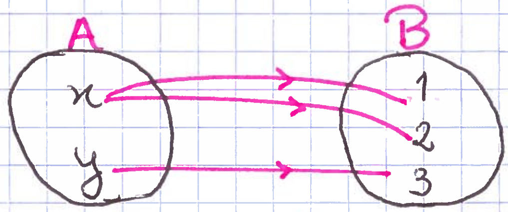
1) $f: A \rightarrow B$ ("De A para B")

2) $f(x)$ é definida para $x \in A$

3) $f(x)$ é exatamente um elemento de B



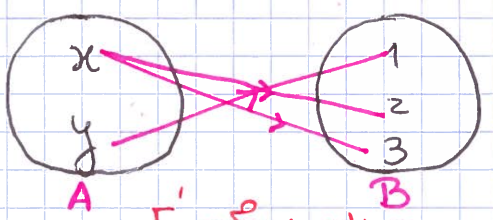
É função



não é função

É injetiva

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$



É não injetiva

→ Se $D'f(x) = B \Rightarrow b \in B \; \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$ F. Sobrejetiva

→ se $F(x)$ for injetiva e sobrejetiva F. bijetiva

1. Noções elementares de conjuntos

Exercício 1.

(a) $\{5, 10, 15, 20, 25\}$ divisíveis 5 = " multiplo 5 = tabuada 5

(b) $\{\frac{36}{a} = \underline{n}$ (resto 0) $\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ $a = \frac{36}{n}$ divisor

(c) $\{7, 14, 21, 28, 35\}$

(d) $\left\{\begin{matrix} m=1 & 2(1)+1=3 \\ m=2 & 2(2)+1=5 \\ m=3 & 2(3)+1=7 \\ m=4 & 2(4)+1=9 \\ m=5 & 2(5)+1=11 \end{matrix}\right\}$

(e) $P = \{\{1\}, \{2; 4\}, \{3; 4; 5\}, \{4; 5\}, \{1, 2, 3\}\}$

(f) $P = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\ \}; \ \}$

(g) $\left\{\begin{matrix} t=0 & 2^0 & 1 \\ t\ 1 & 2^1 \\ t & 2^2 & 4 \\ t=3 & 2^3=8 \\ t=4 & 2^4=16 \end{matrix}\right\}$

(h) $\left\{\begin{matrix} -0 & b^2\ 0 \\ t & 1 \\ t- & 2^2\ 4 \\ t-3 & 3^2=9 \\ t\ 4 & 4^2=16 \end{matrix}\right\}$

(i) $\left\{\begin{matrix} s=1 & 1/1 = 1 \\ s=2 & 1/2 = 0{,}5 \\ s=3 & 1/3 = 0{,}33 \\ s=4 & 1/4 = 0{,}25 \\ s=5 & 1/5 = 0{,}2 \end{matrix}\right\}$

(k) $\left\{\begin{matrix} s=1 & 1+1=2 \\ s=2 & 2+1=3 \\ s=4 & 4+1=5 \\ s=6 & 6+1=7 \\ s=8 & 8+1=9 \end{matrix}\right\}$

(j) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ $1/2, 1/4, 1/3, 1/5, 1/6\}$

Exercício 2.

(a) $\left\{\frac{1}{b} : b \in \{1,2,3,4\}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\}$

(b) $\{n^2 - n : n \in \{0,1,2,3,4\}\} = \{0; 0; 2; 6; 12\} = \{0; 2; 6; 12\}$

(c) $\{n \in \mathbb{N} :$ n é divisor de 75$\} = \{75; 25; 15; 5; 3; 1\}$

(d) $\left\{\frac{1}{c^2} : c \in \mathbb{N} \wedge 0 < c < 11\right\} = \{1; 1/4; 1/9; 1/16; 1/25; 1/36; 1/49; 1/64; \ \ 1 \ \ 1\}$

(e) $P(\{a,b,c,d\}) - \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,\ \}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{\ ,d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}$, $\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}\ \{a,b,c,d\}$ $\underline{2^4 = 16}$

(f) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{3; 1\}$

Exercício 3.

(a) $\{l \in \mathbb{N} : l^2 = 9\} \Rightarrow \{-3; 3\}$ 2 elementos

(b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 25\} \Rightarrow \{-5, 5\}$ 2 element s

(c) $\{n \in \mathbb{Q} : n^2 = \frac{4}{49}\} \Rightarrow \{n = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}}\} = \{-\frac{2}{7}; \frac{2}{7}\}$ 2 lementos

(d) $\{b \in \mathbb{Q} : b^2 = 2\} \Rightarrow \{b = \sqrt{2}\}$ $\underline{b \subset \mathbb{Q} \Rightarrow b = \sqrt{2} \subset \mathbb{R}}$ $\{\emptyset\}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p e q $\in \mathbb{N}$ é falso: no maximo 1 elemento $\{p, q\}$ é par   assim $2q^2 = (2k)^2$ ... q e   (contr di ...)

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ p é par   logo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ e racional

(e) $\{n \in \mathbb{R} : n^2 = 2\} = \{n = \pm\sqrt{2}\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ 2 elementos

(f) $\{c \in \mathbb{R} : c^2 = -2\} = \{c = \pm\sqrt{-2}\} = \{\emptyset\}$

(g) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\} = \{73\} + \{0\} = 74$ elementos

(h) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\} = 74 + 73 = 147$ elementos

(i) $\{p \in \mathbb{Z} : 5 < p < 73\} = 72 + 71 = 143$ elementos

(m) $P(\{1,2,3\}) = 2^3 = 8$ elementos

$\{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(n) $P(\mathbb{N}) = +\infty$ elementos

(p) $\{n \in \mathbb{N} : n$ é primo$\} = +\infty$ elementos

mostrar que existe um nº primo $> n$, $n \in \mathbb{N}$ qualquer

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ fatorial n ($n!$)

$n! + 1 > n!$

$\frac{1 \times \cancel{2} \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n}{\cancel{2}} + 1 =$

$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n}{n} + 1 = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) + \frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$

$= 1 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$n! + 1$ não é divisível por $2, 3, 4, \ldots, n$. É produto de fatores primos, cada um tem de ser maior do que n. Então $\exists$ nº infinito de primos

(q) $\{n \in \mathbb{N} : n$ é par e primo$\} = \{2\}$ 1 elemento

(r) $\{n \in \mathbb{N} : n$ é par ou primo$\} = \{2\} + \{+\infty\} = +\infty$ elementos

Exercício 4.

$A = \{n \in \mathbb{N} : n$ é ímpar$\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} : n$ é primo$\}$

$C = \{4n+3 : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 0\}$ $n=0$ 3, $n=1$ 7, $n=2$ 11, $n=3$ 15

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5\}$

- $A \subseteq A$ ✓
- $B \subseteq B$ ✓
- $C \subseteq C$ ✓
- $D \subseteq D$ ✓

- ~~$A \subseteq B$~~
- ~~$A \subseteq C$~~
- ~~$A \subseteq D$~~
- $C \subseteq A$ ✓
- ~~$C \subseteq B$~~
- ~~$C \subseteq D$~~

- ~~$B \subseteq A$~~
- ~~$B \subseteq C$~~
- ~~$B \subseteq D$~~
- $D \subseteq A$ ✓
- $D \subseteq B$ ✓
- ~~$D \subseteq C$~~

16 possibilidades $= 2^4$

Exercício 5.

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A = \{1,3,5,7,9,11\}$

$B = \{2,3,5,7,11\}$

$C = \{2,3,6,12\}$

$D = \{2,4,8\}$

(a) i $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$

ii $A \cap C = \{3\}$

iii $(A \cup B) \cap (U \setminus C) = \{1,5,7,9,11\}$

$(U \setminus C) = \{1,4,5,7,8,9,10,11\}$

iv $A \setminus B = \{1,9\}$

v $C \setminus D = \{3,6,12\}$

(b) ~~$A \subseteq C$~~

~~$B \subseteq C$~~

$\boxed{C \subseteq C}$ ✓

~~$D \subseteq C$~~

~~$U \subseteq C$~~

(c) $0 \in A$ F

$3 \in B$ V

$\{2,12\} \subseteq C$ V

$\{3\} \subseteq B$ V

$\{4\} \subseteq D$ V

$\{3,6\} \in P(C)$ V

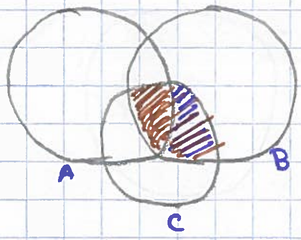
$\emptyset \in A$ F

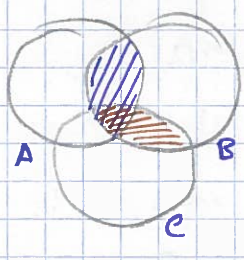
$\emptyset \subseteq A$ V | $P(A)$

$\{\emptyset, \{7\}\} \subseteq P(A)$

Exercício 6.

(a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ verdade





(b) $A \cup B \subseteq A \cap B$ então $A = B$ Falso

$\Downarrow$

$(x \in A \vee x \in B) \subseteq (x \; A \wedge x \in B)$

$\Downarrow$

todo o valor $x \in A \subseteq x \in$ e $x \in B$
ou $x \in B$

$A \neq$ $\left\{ \begin{array}{l} A \ni \begin{cases} x \in A \cup \\ x \notin A \cap B \end{cases} \\ x \in B \setminus A \} \text{ semelhança} \end{array} \right.$

" para caso especial $\Rightarrow$ verdade

(c) $A \cap B \subseteq A \cup B$ então $A = B$

$x \in A$ e $x \in B$ $\subseteq (x \in A$ ou $x \in B)$

(d) $(A \cap \emptyset) \cup$
$\emptyset \cup B = B$ verdade
B

(e) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ sempre que $\subseteq B$
$A \cap B = A$

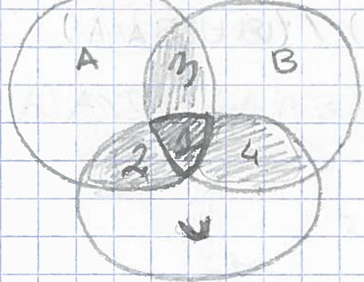
verdade

(f) $A \cap B = (U \setminus A) \cup (A \; B)$

" $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \; B \cup (B \;)$ "

Falso

Exercício 7.



$\cap B \cap$

2 ($\cap U$)

3 $(A \cap B)$

(U)

(a) $\underbrace{A \cap B \subseteq A}_{1^o}$ e $\underbrace{A \subseteq A \cup B}_{2^o}$

1º seja $x \in A \cap B$ então $x \in A \wedge x \in B$
então $x \in A$ logo $A \cap B \subseteq A$

2º $A \Rightarrow x \in A$
$A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$
então $x \in A \subseteq (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

(b) $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$

se $x \in A \subseteq x \in B$ $\quad x \in C$

então $\subseteq$

$x \in A \quad (x \in (B \cap C) : x \in B \wedge x \in C)$

$x \in C$ e $x \in B$ logo $A \subseteq (B \cap \;)$

$x \in A$

(c) $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$

$x \in A \subseteq x \in C$ $\quad x \in B \subseteq x \in C$

$x \in A$ e $x \in B$ $\subseteq C$

seja $x \in A \cup B$ logo $x \in A$ ou $x \in B$

i) se $x \in A$ então $x \in$

ii) se $x \subset B$ então $x \in$

$\} x \subset$ E tão $B \in C$

Exercício 8.

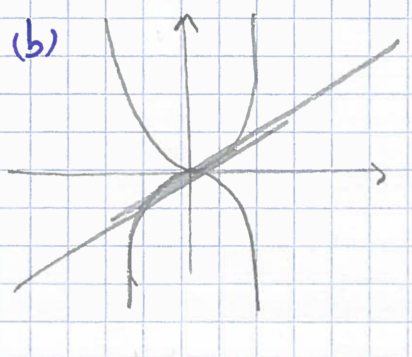
(a) $p(3) = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$p(1/3) = 1/3$

$p(-1/3) = -(-1/3)^3 = 0{,}037$

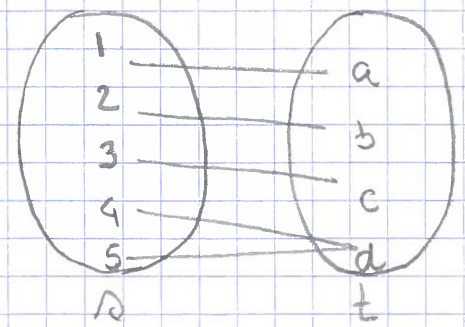
$p(-3) = 27$

(b)



(c) D'_f $]\infty, [U]$

Exercício 9.



$x \in s \Rightarrow f(x) = s' \in s$

(a) Falso. s tem mais objetos que t

(b) Sim

(c) $a \in A \Rightarrow f(a) = b \in B = D'f$

Sim. Porque t tem menos elementos que s

(d) Não, pela mesma razão da alínea anterior

(e) não, porque é injetiva mas não é sobregetiva
logo não pode ser bijetiva

Exercício 10.

(a) $g(0,1) = 2^0 \cdot 3^1 = 3$

$g(1,0) = 2^1 \cdot 3^0 = 2$

$g(1,2) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$

$g(2,1) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$

$g(3,4) = 2^3 \cdot 3^4 = 648$

(b) $g(m_1, m_2) = g(m_2, n_2)$

$2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2}$

$2^{m_1} \cdot 2^{-m_2} = 3^{n_2} \cdot 3^{-n_1}$

$2^{(m_1 - m_2)} = 3^{(n_2 - n_1)}$

$m_1 - m_2 = n_2 - n_1 = 0$

uma potência de base 2 nunca corresponde a outra de base 3. Neste caso, temos uma exceção

$\begin{cases} m_1 = m_2 \\ n_1 = n_2 \end{cases} \Rightarrow (m_1 ; m_2) = (n_1 ;$

$m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ > g é injetiva

(c)

(d) $h(m_1 ; m_2) = h(n_1 ; n_2)$

$2^{m_1} \cdot 4^{n_1} = 2^{m_2} \cdot 4^{n_2}$

$2^{m_1} \cdot 2^{m_2} = 4^{n_2} \cdot 4^{n_1}$

$2^{(m_1 - m_2)} = 4^{(n_2 - n_1)}$

$2^{(m_1 - m_2)} = 2^{2(n_2 - n_1)}$

$m_1 - m_2 = 2n_2 - 2n_1$ $(m_1 ; m_2) = (2n_1 ; 2$

$m_1 = 2n_1$, $m_2 = 2n_2$ > h não é injetiva

2. Noções elementares de conjuntos (continuação)

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e seja C um conjunto qualquer. A *imagem de C por f* é o conjunto

$$f(C) = \{y : \exists x \in C : f(x) = y\}.$$

A *imagem recíproca de C por f* é o conjunto

$$f^{\leftarrow}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Dados dois números inteiros n e k, chamamos *combinações de n, k a k*, ao número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

convencionando que $\binom{n}{k} = 0$ caso algum dos números n, k, ou $n-k$ seja negativo.

Exercícios e problemas

1. Considere as funções

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g, h, j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas por

$$f(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad g(x) = -x,$$
$$h(x) = 3x - 2, \qquad j(x) = x^2.$$

Calcule

(a) $(f \circ h)(\frac{1}{3})$;
(b) $(h \circ f)(\frac{1}{3})$;
(c) $(j \circ h \circ f \circ g)(4)$;
(d) $(j \circ j \circ j)(2)$;
(e) $(h \circ h \circ j \circ f)(3)$.

2. Sejam f, g, h e j as funções definidas na pergunta anterior. Calcule as expressões gerais de

(a) $f \circ g$;
(b) $g \circ f$;
(c) $h \circ j$;
(d) $j \circ h$;
(e) $f \circ g \circ h$;
(f) $f \circ f$;
(g) $g \circ g$;
(h) $h \circ h$;
(i) $j \circ j$.

3. Encontre uma expressão geral para a função inversa de cada uma das seguintes funções reais de variável real.

(a) $k(x) = 2x + 3$;
(b) $l(x) = x^3 - 2$;
(c) $m(x) = (x-2)^3$;
(d) $n(x) = \sqrt[3]{x} + 7$.

4. Considere a função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = (x-3)^2 - 1$. Calcule os seguintes conjuntos (faça um esboço do gráfico se ajudar):

(a) $p(\{2,3,4,5\})$;
(b) $p([5,7[)$;
(c) $p([-1,4[)$;
(d) $p^{\leftarrow}(\{3,15\})$;
(e) $p^{\leftarrow}(\{-2,-1,0\})$;
(f) $p^{\leftarrow}([0,8[)$;
(g) $p^{\leftarrow}([-5,3[)$;
(h) $p^{\leftarrow}([-7,-2[)$.

5. Seja $f : S \longrightarrow T$.

(a) Mostre que $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$, para qualquer $B \subseteq T$.
(b) Mostre que $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A))$, para qualquer $A \subseteq S$.
(c) Mostre que

$$f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)),$$

para quaisquer $B_1, B_2 \subseteq T$.
(d) Em que condições se dá a igualdade na alínea (5a)?
(e) Em que condições se dá a igualdade na alínea (5b)?

6. Seja $f : S \longrightarrow T$. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras. Para estas, apresente uma demonstração. Para as falsas, apresente um contraexemplo.

   (a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.

   (b) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.

   (c) Se $f(A_1) = f(A_2)$, então $A_1 = A_2$.

7. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

   (a) Calcule os seis primeiros termos da sucessão.

   (b) Calcule $a_{n+1} - a_n$, para $0 \leq n \leq 4$.

   (c) Mostre que $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

8. Construa as primeiras 11 linhas do triângulo de Pascal e assinale os números ímpares. Construindo mais linhas se necessário, tente encontrar um padrão conhecido.

9. Calcule:

   (a) $\frac{7!}{5!}$;

   (b) $\frac{10!}{6!4!}$;

   (c) $\frac{9!}{9!0!}$;

   (d) $\frac{8!}{4!}$;

   (e) $\frac{1111!}{1110!}$;

   (f) $\sum_{s=0}^{5} s!$;

   (g) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$;

   (h) $\sum_{i=7}^{101}(-1)^i$;

   (i) $\sum_{l=0}^{3}(l^2+1)$;

   (j) $\left(\sum_{l=0}^{3} l^2\right) + 1$;

   (k) $\prod_{r=1}^{n}(r-3)$, para $n=2$, $n=3$, $n=4$ e $n=77$;

   (l) $\prod_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m}$, para $n=2$, $n=3$, $n=4$ e $n=77$;

   (m) $\prod_{t=6}^{6} t$.

   (n) $\binom{7}{6}$.

   (o) $\binom{7}{1}$.

   (p) $\binom{444}{443}$.

   (q) $\binom{444}{120} - \binom{444}{324}$.

10. Simplifique:

   (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$;

   (b) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.

11. Mostre que para quaisquer naturais a, b,

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}.$$

12. Considere as sucessões $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$s_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}; \quad t_n = \frac{s_{n+1}}{s_n}; \quad r_n = \frac{t_{n+1}}{t_n}.$$

   (a) Calcule a expressão geral das sucessões $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} r_n$.

2. Noções elementares de conjuntos (cont.)

Teoria 1

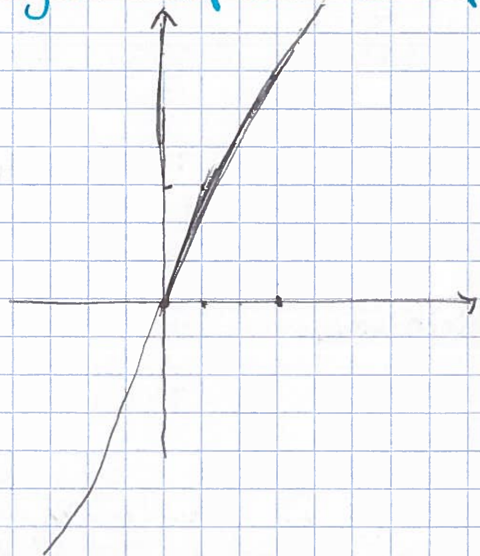
Seja $f: A \to B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$

- $f(C) = \{y \in B \mid y = f(x)$ para certo $x \in C\}$ → imagem de C por f
- $\overleftarrow{f}(D) = \{x \mid f(x) \in D\}$ → imagem recíproca de c por f

$f(x) = 3x$, $\overleftarrow{f}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

$f\,[3, \infty[\; = [9, \infty[$

$\overleftarrow{f}\,[3, \infty[\; = [1, \infty[$



Teoria 2.

- $(h \circ g)(x) =$ Função composta $= h[g(x)]$
- $(h \circ g \circ f)(x) = h\left[g[f(x)]\right]$

$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots$

$n \cdot (n+1)$

$0! = 1$

Exercício 1.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $h(x) = 3x - 2$ $g(x) = -x$ $j(x) = x^2$

(a) $f \circ h(1/3) = f[h(1/3)] = f[3(1/3) - 2] = f(-1) = -\frac{1}{1} = -1$

(b) $h \circ f(1/3) = h[f(1/3)] = h(1/(1/3)) = h(3) = 3(3) - 2 = 7$

(c) $j \circ h \circ f \circ g(4)$ $j[h[f[g]] = j[h(-1/4)] = j(3(-1/4) - 2) = j(-11/4) = \frac{121}{16}$

$f \circ g = f[g(4)] = f(-4) = -\frac{1}{4}$

(d) $j \circ j \circ j(2) = j[j(j(2))] = j(j(4)) = j(16) = 256$

(e) $h \circ h \circ j \circ f(3) = h(h(j(f(3)))) = h(h(j(1/3))) = h(h(1/9)) =$
$= h(-5/3) = -7$

Exercicio 2.

(a) $f\circ g(x) = f[g(x)] = f(-x) = -\frac{1}{x}$

(b) $g\circ f(x) = g[f(x)] = g(1/x) = -\frac{1}{x}$

(c) $h\circ j(x) = h[j(x)] = 3(x^2)-2 = 3x^2-2$

(d) $j\circ h(x) = j[h(x)] = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

(e) $f\circ g\circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(3x-2)) = f(-3x+2) = -\frac{1}{3x-2}$

(f) $f\circ f(x) = f[f(x)] = f(1/x) = x$

(g) $g\circ g(x) = g[g(x)] = g(-x) = -(-x) = x$

(h) $h\circ h(x) = h[h(x)] = h(3x-2) = 3(3x-2)-2 = 9x-6-2 = 9x-8$

(i) $j\circ j(x) = j[g(x)] = j[x^2] = (x^2)^2 = x^4$

Exercicio 3.

(a) $k(x) = y \Leftrightarrow y = 2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ $\quad k^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

(b) $l(x) = y \Leftrightarrow y = x^3-2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+2}$ $\quad l^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

(c) $m(x) = y \Leftrightarrow y = (x-2)^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}+2$ $\quad m^{-1}(x) = \sqrt[3]{y}+2$

(d) $n(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x}+7 \Leftrightarrow x = (y-7)^3$ $\quad n^{-1}(x) = (x-7)^3$

Exercicio 4.

$p(x) = (x-3)^2 - 1$

(a) $p(2) = (2-3)^2-1 = 0$

$p(3) = (3-3)^2-1 = -1$

$p(4) = (4-3)^2-1 = 0$

$p(5) = (5-3)^2-1 = 3$

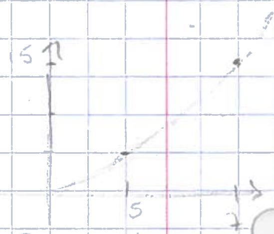
$p(\{2,3,4,5\}) = \{0;-1;3\}$

(b) $p(]5,7[) =]3;15[$

$p(5) = (5-3)^2-1 = 3$

$p(7) = (7-3)^2-1 = 15$

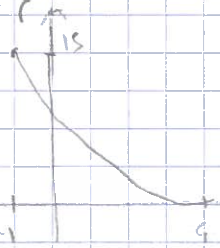
Pq a função p é crescente



(c) $p(]-1;4[) = [0;15]$

$p(-1) = ((-1)-3)^2-1 = 15$

$p(4) = (4-3)^2-1 = 0$



(d) $p(x) = y \Leftrightarrow y = (x-3)^2-1 \Leftrightarrow \sqrt{y+1}+3 = x$

$\overleftarrow{p}(\{3;15\}) = \{5,7\}$

$p^{-1}(3) = \sqrt[2]{3+1}+3 = 5$

$p^{-1}(15) = \sqrt{15+1}+3 = 7$

$p^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$p(7) = p(-1) = 15$

g não é injetiva

(e) $\overleftarrow{p}(\{-2,-1,0\}) = \{\emptyset,3,4\}$

$p^{-1}(-2) = \sqrt[2]{(-2)+1}+3 = \emptyset$

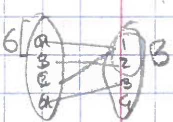
$p^{-1}(-1) = \sqrt[2]{(-1)+1}+3 = 3$

$p^{-1}(0) = \sqrt[2]{0+1}+3 = 4$

o gráfico só vai a $y=-1$, por isso

$\overleftarrow{p}(-2) = \emptyset$

(f) $\overleftarrow{p}([0,8[) =]0,2] \cup [4,6[$



$\overleftarrow{p}(B) = \{a,b,c,d\}$

Pelo gráfico

(g) $f^{\leftarrow}([-5;3[) =]1;5[$ pelo gráfico

(h) $f^{\leftarrow}([-7,2[) = \emptyset$

$f^{-1}(7)\ \emptyset$

$f^{-1}(-2 = \emptyset$

pelo gráfico

Exercício 5.

(a) $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B \quad \forall B \subseteq T$

seja $b \in f(f^{\leftarrow}(B))$ então $b = f(a)$, com $a \in f^{\leftarrow}(B)$, isto é $f(a) \in B$. logo $b = f(a) \in B$.

então $f(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$

(b) $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A)) \quad \forall A \subseteq S$

seja $a \in A$, então $f(a) \in f(A)$

então $a \in f^{\leftarrow}(f(A))$. logo $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A))$

(c) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2) \quad \forall B_1, B_2 - T$

1º ($\subseteq$): Seja $a \in f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2)$. Então $f(a) \in B_1 \cap B_2$
Então $f(a) \in B_1$ e $f(a) \in B_2$. Então $a\ f^{\leftarrow}(B_1)$ e $a \in f^{\leftarrow}(B_2)$
Então $a \in f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$

2º ($\supseteq$): seja $a \in f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$. Então $a \in f^{\leftarrow}(B_1)$ e $a \in f^{\leftarrow}(B_2)$
Então $f(a) \in B_1$ e $f(a) \in B_2$. Então $f(a) \in f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$
Então $a \in f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2)$
Então $f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2) \subseteq f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2)$

3º: $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) - f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$

(d) $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$, se f é sobrejetiva sobre B

(e) $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$, se f é injetiva

Exercício 6.

(a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Falso. Igualdade se f é injetiva

$\{a_1\} = A_1$, $\{a_2\} = A_2$ $\rangle\ b$

$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\}$

(b) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

Falso

$f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A_1 = 1 \quad A_2 = [1,1]$

$f(A \setminus A_2)\ f((-\infty,-1 \cup\ ,+\infty)$ $\{$

$f(A)\setminus f(A_2)\ \ (\mathbb{R}) \setminus f([\cdot,])$

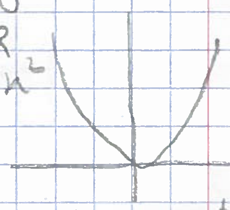
$= \{0\} \setminus\ \ = \emptyset$

(c) $f(A_1) = f(A_2)\quad A_1 = A$

Falso

$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) \to x^2$



só quando $f\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

com $\mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$

Exercício 7.

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

(a)

$n=0 \quad a_0 = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{+1} = -1$

$n=1 \quad a_1 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

$n=2 \quad a_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$n=3 \quad a_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$n=4 \quad a_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$

$n=5 \quad a_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(b)

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+2}\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{(n-1)}{n+1}$$

$n=0 \quad \frac{0}{0+2} - \frac{(0-1)}{0+1} = 0-(-1) = 1$

$n=1 \quad 1/(1+2) - (1-1)/(1+1) = 1/3 - 0 = 1/3$

$n=2 \quad 2/(2+2) - (2-1)/(2+1) = 1/2 - 1/3 = 1/6$

$n=3 \quad 3/(3+2) - (3-1)/(3+1) = 3/5 - 1/2 = 1/10$

$n=4 \quad 4/(4+2) - (4-1)/(4+1) = 2/3 - 3/5 = \frac{1}{15}$

(c) $a_{n+1} - a_n =$

$$= \frac{n}{n+2}_{(n+1)} - \frac{(n-1)}{n+1}_{(n+2)} = \frac{\cancel{n^2}+\cancel{n}-\cancel{n^2}-\cancel{n}+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$n(n+1) = n^2+n$

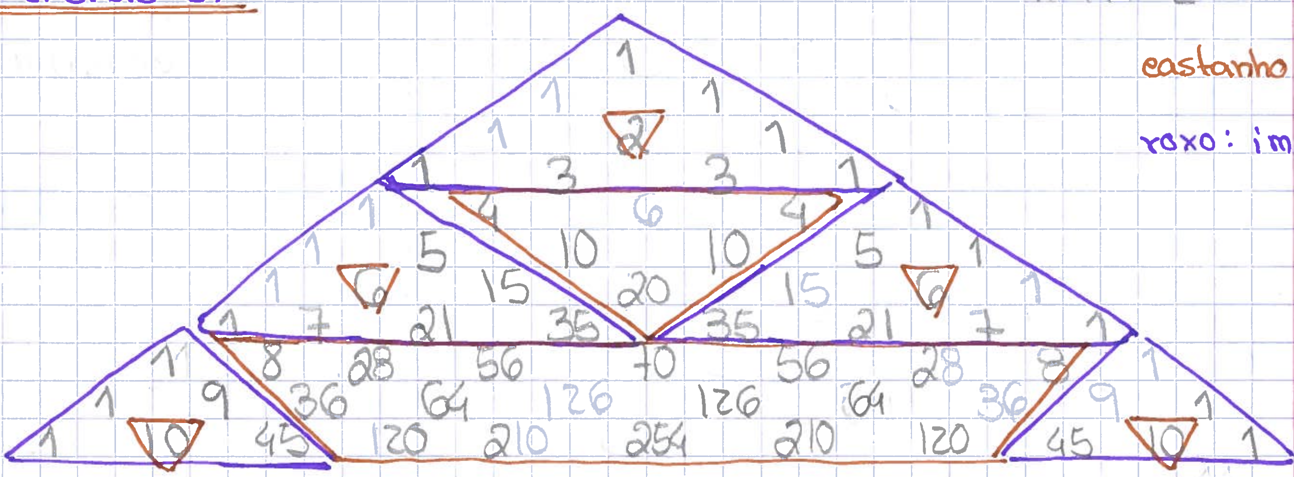
$(n-1).(n+2) = n^2+2n-n-2$

n^2+n-2

Exercício 8.

castanho : pares

roxo : ímpares



linha 1 : ordem 0

$^0C_0$

$^1C_0 \quad ^1C_1$

$^2C_0 \quad ^2C_1 \quad ^2C_2$

$^{10}C_0 \quad \dots \quad ^{10}C_{10}$

Exercício 9.

(a) $\frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 7\times6 = 42$ (b) $\frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\times9\times\cancel{8}\times\cancel{7}\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,\cancel{4!}} = \frac{10\times9\times\cancel{8\times7}}{4!} = 210$

(d) $\frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 8\times7\times6\times5 = 1680$ (e) $\frac{1111!}{1110!} = \frac{1111\ \cancel{1110!}}{\cancel{1110!}} = 1111$

(c) $\frac{\cancel{9!}}{\cancel{9!}\,0!} = 1$ (f) $\sum_{s=0}^{5} s! = 0!+1!+2!+3!+4!+5! = 154$

(g) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i = (-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^6+(-1)^7+(-1)^8+(-1)^9+(-1)^{10}$ $\cancel{-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1}$ $=0$

(h) $\sum_{i=7}^{101}(-1)^i = (-1)^7+(-1)^8+\dots+(-1)^{99}+(-1)^{100}+(-1)^{101} = \cancel{-1+1}\dots\cancel{-1+1}-1 = -1$

(i) $\sum_{\ell=0}^{3}(\ell^2+1) = (0^2+1)+(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1) = 1+2+5+10 = 18$

(j) $\left(\sum_{\ell=0}^{3}\ell^2\right)+1 = (0^2+1^2+2^2+3^2)+1 = 15$

(k) $\prod_{r=1}^{n}(r-3) \Rightarrow$ $n=2$ $(1-3)(2-3)=2$

$n=3$ $(1-3)(2-3)(3-3)=0$

$n=4$ $(1-3)(2-3)(3-3)(4-3)=0$

$n=77$ $(1-3)(\ \dots\ )=0$

(l) $\prod_{m=1}^{n}\frac{m+1}{m}$

l)

$n=2$ $\left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right)$ $(2)\cdot\frac{3}{2}=3$

$n=3$ $\left(\frac{1+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3}\right) = 2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=4$

$n=4$ $\left(\frac{1+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right) = 4\times\frac{5}{4} = 5$

$n=77$ $(77)\cdot\left(\frac{77+1}{77}\right) = 77\times\frac{78}{77} = 78$

(m) $\prod_{t=6}^{6} t = 6$

(o) $\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,6!} = \frac{7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$

(n) $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!\,1!} = \frac{7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}\times1!} = 7$

(p) $\binom{444}{443} = \frac{444!}{443!\,1!} = \frac{444\times\cancel{443!}}{\cancel{443!}\times1!} = 444$

(q) $\binom{444}{120} - \binom{444}{324} = \frac{444!}{120!\,324!} - \frac{444!}{324!\,120!} = 0$

Exercício 10.

(a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n-1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n-1}$

(b) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{n!\,\cancel{n!}}{(n-1)!\,\cancel{n!}\,(n+1)} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercício 11.

$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!} + \frac{a!}{(b+1)!\,(a-(b+1))!} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!} + \frac{a!}{b!\,(b+1)\,(a-b-1)!}$

$= \frac{a!}{b!\,(a-b-1)!\,(a-b)} + \frac{a!}{b!\,(b+1)(a-b-1)!} = \frac{a!}{b!\,(a-b-1)!}\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b+1}\right) =$

$= \frac{a!}{b!\,(a-b-1)!}\cdot\frac{b+1+a-b}{(a-b)(b+1)} = \frac{a!\,(a+1)}{(b+1)!\,(a-b)!} = \frac{(a+1)!}{(b+1)!\,(a+1-(b+1))!} = \binom{a+1}{b+1}$

Exercício 12.

(a)

$$t_n = \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{n!\,(n+1-k)!}}{\prod_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \prod_{k=0}^{n}\frac{\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!\cdot k!\,(n-k)!}{n!\cdot n!\cdot(n+1-k)!} = \prod_{k=0}^{n}\frac{n+1}{n+1-k} = (n+1)^{n+1}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1-k} =$$

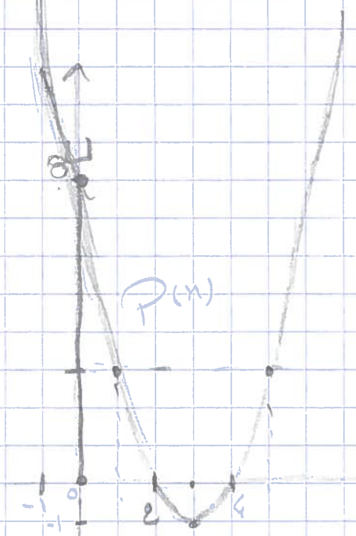
$$= (n+1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$r_n = \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+2)^{n+2}/(n+2)!}{(n+1)^{n+1}/(n+1)!} = \frac{(n+2)^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+2)!} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot(n+2)}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+2)} =$$

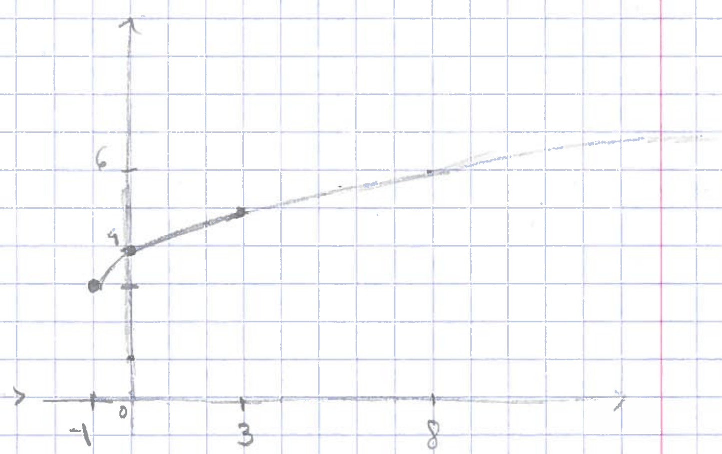
$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}(r_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$



$p(x) = (x-3)^2-1$



$p^{-1}(x) = \sqrt[2]{x+1}+3$

3. Princípio de indução matemática

Uma das ferramentas mais utilizadas em demonstrações que envolvem números naturais é a indução:

Princípio de indução matemática. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

1. $\Phi(0)$ *e*
2. $\forall n \in \mathbb{N}(\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1))$

então

$$\forall n \in \mathbb{N}(\Phi(n)).$$

Uma consequência deste princípio, também útil, é a indução completa:

Princípio de indução completa. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n \Phi(m) \Rightarrow \Phi(n))$$

então

$$\forall n \in \mathbb{N}(\Phi(n)).$$

Exercícios e problemas

1. Mostre que as seguintes igualdades são válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(a)
$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2};$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1;$$

(c) Se $n \geq 3$, então
$$\sum_{l=3}^{n} (4l - 11) = 2n^2 - 9n + 10;$$

(d)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(e) Se $n \geq 1$, então
$$\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

(f) Se $n \geq 1$, então
$$\sum_{p=1}^{n} (2p-1)^3 = n^2(2n^2 - 1);$$

(g) Se $n \geq 1$, então
$$\sum_{j=1}^{n} (6j - 2) = n(3n+1);$$

(h)
$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2.$$

Sugestão: utilize o resultado da alínea (1a).

(i)
$$\sum_{l=0}^{n} r^l = \frac{r^{n+1}-1}{r-1},$$

para qualquer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(j)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Sejam a e b números reais. Considere a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada recursivamente por $s_0 = a$ e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 2s_n + b$. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n a + (2^n - 1)b$.

3. Mostre que
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{m}{4m+1},$$
para qualquer natural $m \geq 1$.

4. (a) Mostre que $11^r - 4^r$ é múltiplo de 7, para qualquer natural $r \geq 1$.
   (b) Mostre que $13^t - 8^t$ é múltiplo de 5, para qualquer natural $t \geq 1$.
   (c) Sejam a, b e c inteiros tais que $a - b = c$. Mostre que $a^u - b^u$ é múltiplo de c, para qualquer natural $u \geq 1$.

5. Mostre que $p! > 2^p$, para qualquer natural $p \geq 4$.

6. Mostre que se A é um conjunto de n elementos ($n \in \mathbb{N}$), então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

7. Mostre que $s^2 > s + 1$, para qualquer natural $s \geq 2$.

8. Considere a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (2k + 1).$$

(a) Calcule os sete primeiros termos da sucessão.

(b) Adivinhe uma expressão geral para a sucessão e mostre que é válida utilizando o princípio de indução matemática.

9. Adivinhe uma expressão sem envolver somatórios para

$$\sum_{j=1}^{n} j!j$$

e mostre-a por indução matemática.

10. Considere a proposição "$p(n) : n^2 + 5n + 1$ é par".

(a) Mostre que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

(b) Para que valores de n é veradeira a proposição?

11. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (2k + 1) = 3n^2,$$

para qualquer natural $n \geq 1$.

12. Mostre que $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16, para qualquer natural $n \geq 1$.

13. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \tfrac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k},$$

para qualquer natural $n \geq 1$.

14. Mostre a fórmula de De Moivre: para qualquer natural n,

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

15. Construa o Triângulo de Pascal até à linha de ordem dez (chamando linha de ordem zero à primeira).

(a) Calcule a soma dos quadrados dos elementos da linha de ordem 3. Qual é a linha onde este valor aparece no centro? Faça o mesmo para as linhas de ordem 4 e 5.

(b) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todas as linhas do Triângulo de Pascal, mostrando por indução que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(c) Calcule a soma dos elementos indicados na figura:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Encontre o valor que calculou no Triângulo de Pascal. Dê exemplos de outras somas análogas.

(d) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todo o Triângulo de Pascal, mostrando por indução em n que para qualquer natural k,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(e) Mostre por indução em n que para qualquer natural m,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}.$$

Sem recorrer à indução, mostre que esta igualdade se pode deduzir da igualdade da alínea anterior.

3. Princípio de indução matemática

Exercício 1

(a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ i) base: $n=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i = 0 \quad \frac{0(\quad)}{2} \quad 0$

$0+1+2+3+4+5+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ii) hereditariedade: Seja $n \in \mathbb{N}$ e supon-a-se $\sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)}{2}$

$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+\;)}{2} + (n+1) - \frac{n(n+1)+2\quad+)}{2} \quad \frac{(n\;2)\,n}{2} - (n\;,)(\;+2)$

hipótese de indução

Logo, pelo princípio da indução matemática temos $\sum_{0}^{n} i \; \frac{n(n+1)}{2}$ pa a todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ i) base: $n=0 \; > \sum_{k=0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1}\; 1$

ii) Hereditariedade   Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{i=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

Então, pelo princípio da indução matemática temos $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{l=3}^{n} (4l-11) = 2n^2 - 9n + 10 \qquad n \geq 3$

i) base: $n=3 \;, \; \sum_{l=3}^{3} ((4\times3)-1) = 12 - 11 = 1 = 2(3)^2 - 9(3) + 10$

ii) Hereditariedade: seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{l=3}^{3} (4l-1) = 2n^2 - 9n + 10$

$\sum_{l=3}^{n+1} (4l-11) = \sum_{l=3}^{n} (4l-11) + 4(n+1) - 11 = 2n^2 - 9n + 10 + 4n - 7 =$

$= 2n^2 - 5n + 3 = 2(n+1)^2 - 9(n+1) + 10$

$= 2(n^2+2n+1) - 9n + 9 + 10 =$

$= 2n^2 + 4n + 2 - 9n - 9 + 10 =$

$= 2n^2 - 5n + 3$

Então, pelo teorema da indução matemática temos $\sum_{l=3}^{n} (4l-11) = 2n^2 - 9n +$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

(d) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) base

$n=0$; $\sum_{i=0}^{0} 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2(0)+1)}{6}$

ii) Hereditariedade:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)((2n^2+n) + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+n+4n+4+2)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Então, pelo teorema da I.M, temos que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(e) $n \geq 1$

$$\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

i) base:

$n=1$ $\quad \sum_{m=1}^{1} (2(1)-1)^2 = 1 = \frac{(1)(2(1)-1)(2(1)+1)}{3}$

ii) Hereditariedade:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

$$\sum_{m=1}^{n+1} (2m-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(4n^2+4n+1)}{3} =$$

$$= \frac{n(4n^2+2n-2n-1) + 3(4n^2+4n+1)}{3} = \frac{n(4n^2-1) + 3(4n^2+4n+1)}{3} = \frac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3} =$$

$$= \frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$$

$$\frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+2-1)(2n+2+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2+6n+2n+3)}{3} = \frac{((n+1)(4n^2+8n+3))}{3} = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3} = \frac{4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3}{3}$$

$$= \frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$$

Então, pelo I.M, temos $\sum_{m=1}^{n} (2m-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

para todo o $n \in \mathbb{N}$

(g) $n \geq 1$ $\quad \sum_{j=1}^{n} (6j-2) = n(3n+1)$

base

i) $n = 1$, $\sum_{j=1}^{1} (6(1)-2) = 1(3\cdot 1+1) = 4$

ii) Hereditariedade

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos $\sum_{j=1}^{n} (6j-2) = n(3n+1)$

$$\sum_{j=1}^{n+1} (6j-2) + (6(n+1)-2) = n(3n+1) + 6n+6-2 = 3n^2+n+6n+4$$

$$(n+1)(3(n+1)+1) = (n+1)(3n+3+1) = (n+1)(3n+4) = 3n^2+4n+3n+4 = 3n^2+7n+4$$

Então pelo T.I.M, temos que $\sum_{j=1}^{n} (6j-2) = n(3n+1)$

(h) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

i) base:

$n=0$; $0^3 = 0$ e $\frac{0^4+(2\times 0^3)+0^2}{4} = 0$

$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1)$
$= (n^2+2n+1)(n+1)$
$= n^3+2n^2+n+n^2+2n+1$
$= n^3+3n^2+3n+1$
$(n^3+3n^2+3n+1)(n+1) = (n+1)^4$

ii) hereditariedade:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{i=0}^{n} (i^3) = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (i)^3 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i^3}_{H.I.} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4} =$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\frac{(n+1)^4+2(n+1)^3+(n+1)^2}{4} = \frac{(n^4+3n^3+3n^2+n+n^3+3n^2+3n+1)+(2n^3+6n^2+6n+1)\ n+2n}{4}$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

Ficha 6 2015/2016

1.

(a) $95 = 31 \times 3 + 2$ $\qquad d = s \times 95 + t \times 3$

$3 = 1 \times 2 + 1$ $\qquad 1 = 3 - (1 \times 2)$

$2 = 2 \times 1 + 0$ $\qquad 1 = 3 - 1(95 - 31 \times 3)$

$\qquad 1 = 32 \times 3 - 1 \times 95$

Logo $s = -1$ e $t = 32$

(b)

$$\begin{cases} x \equiv_3 2 \\ x \equiv_5 4 \\ x \equiv_{19} 3 \end{cases}$$

$95\,a \equiv_3 2$

portanto, $95 \times (-2) \equiv_3 2$, $\quad 95 \times (-1) \equiv_3 1$

$a \in [-2]_3$ Fazendo $a = 1$

$19 \times 3\, b \equiv_5 4$ $\qquad$ como $23 \times 5 - 2 \times 57 = 1$

$57 \times (-2) \equiv_5 1$ portanto, $57 \times (-8) \equiv_5 4$ $\qquad b \in [-8]_5$ Fazendo $b = 2$

$3 \times 5\, c \equiv_{19} 3$

como $4 \times 19 - 5 \times 15 = 1$, $15 \times (-5) \equiv_{19} 1$

portanto,

$15 \times (-15) \equiv_{19} 3$ $\qquad c \in [-15]_{19}$ Fazendo $c = 4$

Logo uma solução do sistema é

$x = 95 \times 1 + 57 \times 2 + 15 \times 4$

$x = 95 + 114 + 60$

$x = 260$

conjunto-solução

$[260]_{285}$

c) $\overline{15} \times \overline{a} = \overline{1}$

$15 \times a \equiv_{19} 1$ $\qquad$ Logo o inverso de $\overline{15}$ em $\mathbb{Z}_{19}$ é $\overline{14}$ $\qquad a \in [\;\;]_{19}$

inverso de um número é o número que multiplicado por o original dá 1

d) $7 = 1 \times 5 + 2$ $\qquad 1 = 5 - 2 \times 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$ $\qquad 1 = 5 - 2(7 - 1 \times 5)$ $\qquad 3 \times 5 - 1 = 2 \times 7$

$2 = 2 \times 1 + 0$ $\qquad 1 = 3 \times 5 - 2 \times 7$ $\qquad 3 \times 5 \equiv_7 1$

como $\text{mdc}(6, 14) = 2$ temos que 6 e 14 não são primos entre si portanto $\overline{6}$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_{14}$

$\overline{7} \times \overline{6} = \overline{0}$, $\mathbb{Z}_{14}$

2. Base: $\sum_{i=0}^{0} 6i = 0 = 3 \times 0 \times (0+1)$

Hereditariedade: seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\sum_{i=0}^{n} 6i = 3n(n+1)$ então:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 6i = \sum_{i=0}^{n} 6i + 6(n+1) = 3n(n+1) + 6(n+1)$$
$$= 3(n+1) \times (n+2)$$
$$= 3(n+1) \times ((n+1)+1)$$

Logo, por I. M.,

$$\sum_{i=0}^{n} 6i = 3n(n+1)$$

3.

a) há $7 \times 9 = 63$ arestas no grafo $K_{7,9}$

b) como grafo $K_{7,9}$ tem 16 vertices há $\binom{63}{16}$ susgrafos $K_{7,9}$ com 16 arestas e 16 vertices

c) como uma arvore tem 16 vertices tem exactamente 15 arestas, nenhum dos grafos da alínea anterior é uma arvore.

d) Há $\binom{7}{5} \times \binom{9}{6} + \binom{7}{6} \times \binom{9}{5}$ susgrafos $K_{7,9}$ isomorfos a $K_{5,9}$

4.

Suponhamos que $a_1 \equiv_n b_1$ e $a_2 \equiv_n b_2$. Então, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a_1 - b_1 = k_1 n$ e $a_2 - b_2 = k_2 n$

$$(3a_1 - 5a_2) - (3b_1 - 5b_1) = 3(a_1 - b_1) - 5(a_2 - b_2)$$
$$= 3 \times k_1 n - 5 \times k_2 n$$
$$= (3 \times k_1 - 5 \times k_2) n$$

logo, $3a_1 - 5a_2 \equiv_n 3b_1 - 5b_2$