$V(\neg\phi)$ — $F(\phi)$

$V(\phi \wedge \psi)$ — $V(\phi)$ — $V(\psi)$

$V(\forall x \phi(x))$ — $V(\phi(a))$
a sem restrição

$F(\neg\phi)$ — $V(\phi)$

$F(\phi \vee \psi)$ — $F(\phi)$ — $F(\psi)$

$V(\phi \vee \psi)$: $V(\phi)$ | $V(\psi)$

$V(\phi \to \psi)$: $F(\phi)$ | $V(\psi)$

$V(\exists x \phi(x))$ — $V(\phi(a))$
a ñ utilizado antes

$F(\phi \wedge \psi)$: $F(\phi)$ | $F(\psi)$

$F(\phi \to \psi)$ — $V(\phi)$ — $F(\psi)$

$V(\phi \leftrightarrow \psi)$: $V(\phi)$ — $F(\psi)$ | $F(\phi)$ — $V(\psi)$

$F(\forall x \phi x)$ — $F(\phi a)$
a ñ utilizado antes

$F(\exists x \phi x)$ — $F(\phi a)$
a sem restrições

$F(\phi \leftrightarrow \psi)$: $V(\phi)$ — $F(\psi)$ | $F(\phi)$ — $V(\psi)$

definição: um tableau semantico é uma árvore binária de formulas valoradas, também chamadas de as entradas do tableau.

① uma entrada x diz-se reduzida (usada/marcada) num dado ramo sse x for a raiz de um tableau atomico de tal modo que todas as entradas num ramo através daquele tableau atómico ocorrem nesse ramo e diz ñ reduzida no caso contrário.

② um ramo de um tableau diz-se contraditório sse ~~contiver~~ tiver as entradas $V(\phi)$ e $F(\phi)$ para certa formula $\phi$.

③ um tableau diz-se terminado ou completo sse nenhum dos seus ramos não contraditórios tiver nós não usados.

④ um tableau diz-se contraditório sse todos os seus ramos forem contraditórios.

⑤ se todos os ramos forem contraditórios então $\phi$ é impossivel ser falso, logo será uma tautologia.

como o ramo é contraditório então $F(\psi)$ e $V(\psi)$. Sendo que assim $\Gamma$ é tautologia. Derivação à Beth.

definição uma derivação à Beth de uma formula $\phi$ é um tableau completo, e contraditório com a raiz $F(\phi)$. Diz-se derivavel à Beth sse existe uma derivação à Beth $\phi$, $\vdash_B \phi$
uma refutação à Beth de $\phi$ é um tableau completo e contraditório com raiz $V(\phi)$. diz-se refutável à Beth sse existir uma refutação à Beth de $\phi$.

$(\phi \check{\wedge} \psi) \sim \phi$
$(\phi \check{\wedge} \psi) \sim (\psi \check{\wedge} \phi)$
$(\phi \check{\wedge} \psi) \check{\wedge}\theta \sim \phi \check{\wedge} (\psi \check{\wedge} \theta)$
$(\phi \check{\wedge} \psi) \hat{\vee} \theta \sim \phi$
$(\phi \check{\wedge} \psi) \hat{\vee} \theta \sim (\phi \check{\wedge} \theta) \hat{\vee} (\psi \check{\wedge} \theta)$
$\neg(\phi \wedge \psi) \sim \neg\phi \vee \neg\psi$ DeMorgan $\neg(\phi \vee \psi) \sim \neg\phi \wedge \neg\psi$
$\neg\neg\phi \sim \phi$ $\quad \neg\neg\psi \sim \psi$
$(\phi \wedge \psi) \sim \psi$ $\quad \phi$ é inválida $(\phi \vee \psi) \sim \phi$
$(\phi \wedge \psi) \sim \phi$ $\quad \phi$ é imcompatível $(\phi \vee \psi) \sim \psi$

($\forall^-$) $\dfrac{\forall x \phi x}{\phi(a)}$

($\forall^+$) $\dfrac{\phi a}{\forall x \phi x}$

($\doteq^+$) $t \doteq t$

($\doteq^-$) $\dfrac{t_1 \doteq t_2,\ \phi(t_1)}{\phi(t_2)}$

($\exists^-$) $\exists x \phi x$; $\phi a$ [H] $\vdots$ $\dfrac{\theta}{\theta}$

($\exists^+$) $\dfrac{\phi a}{\exists x \phi x}$

($\wedge^-$) $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}$ $\quad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}$

($\wedge^+$) $\dfrac{\phi,\ \psi}{\phi \wedge \psi} = \dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$

($\vee^-$) $\phi \vee \psi$; $\phi$ [$H_1$] $\vdots$ $\theta$; $\psi$ [$H_2$] $\vdots$ $\theta$; $\overline{\theta}$

($\vee^+$) $\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}$ $\quad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}$

($\leftrightarrow^+$) $\dfrac{\phi \to \psi \quad \psi \to \phi}{\phi \leftrightarrow \psi}$

($\leftrightarrow^-$) $\dfrac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \to \psi \quad \psi \to \phi}$

(RA) $\neg\phi$ H $\vdots$ $\dfrac{\psi \wedge \neg\psi}{\phi}$

($\neg^+$) $\phi$ $\vdots$ $\dfrac{\psi \wedge \neg\psi}{\neg\phi}$

($\neg\neg^+$) $\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}$

($\neg\neg^-$) $\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}$

($\to^-$) MP $\dfrac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi}$

($\to^+$) $\phi$ [H] $\vdots$ $\dfrac{\psi}{\phi \to \psi}$

(MT) $\dfrac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}$

| $\phi$ | $\psi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\phi \vee \psi$ | $\phi \to \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$
$\psi$ é dedutivel ou «$\psi$ deduz-se de $\phi_1, \dots, \phi_n$» de «$\phi_1, \dots, \phi_n$ deriva-se $\psi$»

Regras de formação:
- Toda letra proposicional é uma formula.
- se $\phi$ é uma formula então $\neg\phi$ é uma formula.
- se $\phi$, $\psi$ são formulas então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ e $(\phi \to \psi)$ são formulas;
- nada mais é formula, dado que uma expressão é formula sse puder ser obtida ou construida a partir de letras proposicionais de acordo com as regras $F_2$ e $F_3$

metateorema: Para cada formula $\phi$ de uma dedução com hipoteses em DN, se $\psi_1, \dots, \psi_m$ são todas as hipoteses de que $\phi$ depende nessa dedução, então $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_m \to \phi$ é valida ($\sim \psi_1, \dots, \psi_m \vDash \phi$).

Principio da indução completa: então $\underline{\phi}(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$
1) $\underline{\phi}(1)$ é verdadeira
2) Para cada $n \geq 1$ se $\underline{\phi}(n+1)$ é verdadeira sempre que $\underline{\phi}(k)$ é verdadeira para todo $k \leq n$

definição: Para qualquer conjunto finito ou infinito $\Gamma$ de formulas de $\mathcal{L}^0$ e qualquer formula $\phi$, diz-se que $\phi$ é dedutivel (derivavel) de $\Gamma$.
$\Gamma \vdash \phi$ sse existe uma dedução de $\phi$ com hipoteses em $\Gamma$, $\phi_1, \dots, \phi_n$ em $\Gamma$ tais que $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$
um conjunto $\Gamma$ de formulas de $\mathcal{L}^0$ diz-se consistente (ñ contraditório) sse não existir nenhuma formula $\psi$ tal que $\Gamma \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Diz-se inconsistente no caso de existir, pelo menos uma formula $\psi$ tal que $\Gamma \vdash \psi \wedge \neg\psi$

$\Gamma_\omega$ é consistente maximal

$\Gamma_\omega = \bigcup_{n=0}^{\omega} \Gamma_n$

$\Gamma_\omega$ é compatível então $\Gamma$ tbm é para todo o n,
$\Gamma_n$ é consistente. $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$, $\Gamma_n \cup \{\neg\phi_n\}$
para qualquer conjunto $\Sigma$ de formulas e qualquer $\phi$ tem-se $\Sigma \vdash \phi$ sse $\Sigma \vDash \phi$

$\Gamma_\omega$ é dedutivamente fechado: para qualquer $\phi$, se $\Gamma_\omega \vdash \phi$ então $\phi \in \Gamma_\omega$

$\Gamma_\omega$ é completo, isto é para qualquer $\phi$, $\Gamma_\omega \vdash \phi$ ou $\Gamma_\omega \vdash \neg\phi$
se $\Gamma_\omega \nvdash \neg\phi$, então $\Gamma_\omega \cup \{\phi\}$ é consistente logo $\phi \in \Gamma_\omega$ e portanto $\Gamma_\omega \vdash \phi$
$\phi \wedge \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\phi \in \Gamma_\omega$ e $\psi \in \Gamma_\omega$ $\quad \phi \to \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\phi \notin \Gamma_\omega$ ou $\psi \in \Gamma_\omega$
$\phi \vee \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\phi \in \Gamma_\omega$ ou $\psi \in \Gamma_\omega$

definição 1: uma função booleana n-ária é uma função $u: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Se $\emptyset$ é uma fórmula de $\mathcal{L}^0$ onde ocorrem exatamente n letras proposicionais digamos $p_1, \dots, p_n$, a função booleana associada a $\emptyset$ é a função booleana n-ária $u_\emptyset$, definida por, $u_\emptyset(a_1, \dots, a_n) = v(\emptyset)$, para qualquer valorização $v$ tal que $v_i(p_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$

metateorema da completude funcional (MCF): Para toda a função booleana n-ária $u$ existe, pelo menos, uma fórmula $\emptyset$ de $\mathcal{L}^0$, contendo apenas os conectivos $\neg, \wedge, \vee$, tal que $u = u_\emptyset$

caso 1: Para quaisquer valores lógicos $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $u(a_1, \dots, a_n) = 0$

$(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee \dots \vee (p_n \wedge \neg p_n)$

caso 2: existe pelo menos um n-uplo de valores lógicos $(a_1, \dots, a_n)$ onde $u$ toma o valor 1.

$(a_1^1, \dots, a_n^1), (a_1^2, \dots, a_n^2), \dots, (a_1^k, \dots, a_n^k)$ $k \in (1 \leq k \leq 2^n)$

$p_i^j$ (literal) $= \begin{cases} p_i & \text{se } a_i^j = 1 \text{ (letra)} \\ \neg p_i & \text{se } a_i^j = 0 \text{ (literais)} \end{cases}$ $\Rightarrow \emptyset_j = p_1^j \wedge \dots \wedge p_n^j$

$\emptyset = \emptyset_1 \vee \emptyset_2 \vee \dots \vee \emptyset_k$

$\forall j = 1, \dots, k$

$\forall i = 1, \dots, n$

letra: p, q, r  literais: $\neg p, \neg q, \neg r$

corolário: Todo o conectivo generalizado n-ário, existe pelo menos, uma fórmula $\emptyset$ de $\mathcal{L}^0$ com n letras proposicionais e os conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que $u_\emptyset = u_\Pi$

corolário: Para toda a fórmula $\psi$ de $\mathcal{L}^0$ existe, pelo menos, uma fórmula $\emptyset$ com as mesmas letras proposicionais que $\psi$ e somente os conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que $\emptyset$ e $\psi$ são logicamente equivalentes.

FND: $u = 1$, com as letras

$\bigvee_{j=1}^{k} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^j$

$(p_1^1 \wedge p_2^1 \wedge \dots \wedge p_n^1) \vee \dots \vee (p_1^k \wedge \dots \wedge p_n^k)$

FNC: $u = 0$, com as literais

$\bigwedge_{j=1}^{k} \bigvee_{i=1}^{n} p_i^j$

$(p_1^1 \vee \dots \vee p_n^1) \wedge \dots \wedge (p_1^k \vee \dots \vee p_n^k)$

corolário das formas normais

Toda a fórmula de $\mathcal{L}^0$ é logicamente equivalente a uma fórmula na forma normal disjuntiva e a uma forma normal conjuntiva.

tabela de verdade

$\emptyset \sim \psi$: $\emptyset$ e $\psi$ são logicamente equivalentes

$\emptyset \sim \psi$ sse $\models \emptyset \leftrightarrow \psi$, onde $\sim$ é uma relação de equivalência.

$\psi \to \not\models$ ou $\not\models$

semântica tarskiana

$\mathcal{L} = \{P, f, c\}$

P: símbolo relacional binário

f: símbolo funcional binário

c: constante.

$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}) = (M, P, f, c)$

$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}; <; +; 0)$  M: IN  f: +  P: <  c: 0

M: domínio

P: relação que P designa em $\mathcal{M}$

f: $M^2 \to M$ em M, operação que f designa em $\mathcal{M}$

c: elemento que a constante c designa em $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}_2 = (\{1,2\}; \{(1,2), (2,2)\}; \{((1,1),1), ((1,2),2), ((2,1),1), ((2,2),2)\}; 2)$

M: $\{1,2\}$  c: 2

P: $\{(1,2), (2,2)\}$

$f_2(1,1) = 1 = f_2(2,1)$

$f_2(1,2) = 2 = f_2(2,2)$

- $\emptyset$ é verdadeira (ou satisfeita) em $\mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ satisfaz $\emptyset$
- $\mathcal{M}$ é modelo de $\emptyset$

$\emptyset$ é verdadeiro em $\mathcal{M}$ sse aquilo que $\emptyset$ exprime acerca dos elementos de M, incluído c, da operação f e da relação P em M acontece de facto.

definição: uma fórmula $\emptyset$ é válida na estrutura $\mathcal{M}$ sse $\emptyset$ é verdadeira em $\mathcal{M}$ com respeito a todas as atribuições $\alpha$ em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \emptyset$. Diz-se que $\emptyset$ é universalmente válida, ou só válida, sse $\emptyset$ é válida em todas as estruturas, escrevendo $\models \emptyset$. $\mathcal{M}$ é modelo de $\emptyset$ sse $\emptyset$ é válida em $\mathcal{M}$.

definição: chama-se valoração a toda a aplicação $v$ do conjunto das letras proposicionais no conjunto dos valores lógicos, $v: P \to \{0,1\}$

se $v(p) = 1$, p é verdadeira para $v$ ou que $v$ satisfaz ou realiza ou é um modelo de p. se $v(p) = 0$ é o posto.

Dada uma valoração $v$ e uma fórmula qualquer $\emptyset$, dizer que é possível determinar o valor lógico resultante para $\emptyset$, calculando de acordo com as regras e tabelas dos conectivos é dizer que a valoração $v$ se pode estender (prolongar) ao conjunto de todas as fórmulas, $\hat{v}: Prop(P) \to \{0,1\}$ que estende $v$,

$\hat{v}(p) = v(p)$ para todo p em P.

$\hat{v}(\neg\psi) = 1$ sse $\hat{v}(\psi) = 0$

$\hat{v}(\psi \wedge \theta) = 1$ sse $\hat{v}(\psi) = 1 = \hat{v}(\theta)$

$\hat{v}(\psi \vee \theta) = 1$ sse $\hat{v}(\psi) = 1$ ou $\hat{v}(\theta) = 1$

$\hat{v}(\psi \to \theta) = 1$ sse $\hat{v}(\psi) = 0$ ou $\hat{v}(\theta) = 1$

$\not\exists [\hat{v}(\emptyset) = 1, \hat{v}(\emptyset) = 0]$

uma aplicação $\hat{v}: Prop(P) \to \{0,1\}$ com estas propriedades diz-se uma valoração booleana. Dizemos que $\hat{v}$ satisfaz ou realiza ou é um modelo de $\emptyset$ ou ainda que $\emptyset$ é verdadeira para $\hat{v}$ sse $\hat{v}(\emptyset) = 1$.

- $\emptyset$ é contraditório: $\forall v [v(\emptyset) = 0]$
- $\emptyset$ é compatível: $\exists v$ tal que $v(\emptyset) = 1$
- $\emptyset$ é tautologia: $\forall v [v(\emptyset) = 1]$
- $\emptyset$ é contingente: $\exists v, v'$ tais que

**Termos e fórmulas:** termos são simplesmente os parâmetros e as constantes (se houver alguma). Os termos da fórmula $ft_1, \dots, t_n$ de uma linguagem com símbolos funcionais, tem-se que $f$ é um símbolo funcional de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos.

$T_1$. os parâmetros e as constantes são termos

$T_2$. se $f$ é um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $ft_1, \dots, t_n$ é um termo

$T_3$ nada mais é termo

$F_1$. se $t_1, t_2$ são termos, então $= t_1 t_2$ é uma fórmula; se $P$ é um símbolo predicado n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos então $Pt_1, \dots, t_n$ é uma fórmula.

$F_2$. se $\phi$ é uma fórmula então $\neg\phi$ é uma fórmula

$F_3$. se $\phi, \psi$ são fórmulas então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ são fórmulas.

**notações:**

Fórmulas atômicas: fórmulas do tipo $F_1$

Fórmulas compostas: fórmulas restantes

Quantificadores de $x$: '$\forall x$' e '$\exists x$'

Parâmetros de quantificação (parâmetro associado a) em $x$: $\phi(a)$ passa a $\forall x \phi x$ e $\exists x \phi x$

**$\forall x \psi$, $\exists x \psi$:** fórmula $\psi$ é o alcance ou alçada do quantificador em $x$.

Fórmulas mudas ou aparentes em $\phi$: todas as ocorrências numa fórmula $\phi$ de uma variável $x$ que ocorram num quantificador em $x$ ou no alcance de um quantificador em $x$.

uma fórmula $\phi$ na qual ocorrem os parâmetros $a_1, \dots, a_n$ também se diz uma fórmula aberta, sentença aberta ou uma condição nesses parâmetros $\phi(a_1, \dots, a_n)$

**Termo fechado:** termo onde não ocorrem nenhum parâmetro

**Fórmula fechada ou sentença:** fórmula sem parâmetro

**definição:** seja $\Gamma$ um conjunto de sentenças, $\psi$ uma sentença de $\mathcal{L}$. Dizemos que $\psi$ é dedutível de $\Gamma$, ou que é teorema de $\Gamma$ e $\Gamma \vdash \psi$ sse existe uma dedução (DNQ) de $\psi$ com hipóteses em $\Gamma$

**metateorema da compacidade:** se um conjunto $\Sigma$ de sentenças de $\mathcal{L}$ é compatível sse todo o subconjunto finito de $\Sigma$ é compatível.

**corolário:** se um conjunto $\Sigma$ de sentenças de $\mathcal{L}$ tem modelos finitos arbitrariamente grandes então $\Sigma$ tem, pelo menos, um modelo infinito.

**metateorema da validade e completude semântica:** seja $\Sigma$ um conjunto qualquer de sentenças de uma linguagem elementar $\mathcal{L}$, $\psi$ uma sentença de $\mathcal{L}$. Então $\Sigma \vDash \psi$ sse $\Sigma \vdash$. Em particular, $\psi$ é válida sse $\psi$ é um teorema lógico.

**corolário:** o sistema DNQ é consistente, isto é, não existe nenhuma sentença $\phi$ tal que $\vdash \phi \wedge \neg\phi$

**Exercício:** seja P um símbolo de relação unária e Q um símbolo de relação binária. Dê um exemplo de uma estrutura adequada com domínio IR em que $\forall x (Px \to \exists y Qxy)$ é válida.

H: IR  P: positivo (pos)  $f(Qx)$: <  $(Px)$  e: $\{m, n\}$  $x, m$ / $y, n$

(IR, pos, >) forma $\forall x (Px \to \exists y Qy)$

Todo o número real positivo m existe um número n tal que m < n

**Exercício:** o que é um conjunto de fórmulas consistente maximal?

1. { i) $\Sigma \nvdash \phi \wedge \neg\phi$
   ii) $\Sigma$ consistente, $\psi \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\psi\}$ inconsistente

**Exercício:** Teoria de $\mathfrak{M}$ ($Tr(\mathfrak{M})$)

Todas as sentenças $\phi$ de $\mathcal{L}$ tais que $\mathfrak{M} \vDash \phi$

**Exercício:** Dê um exemplo de um termo que contém dois símbolos de função, um símbolo de constante e duas variáveis

$Pyxy$

$\neg\phi \vdash \psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\phi$ | H |
| 2. | $\psi$ | H |
| 3. | $\psi \vee \phi$ | 2, $\vee^+$ |
| 4. | $\psi \to (\psi \vee \phi)$ | 2-4, $\to^+$ |
| 5. | $\psi \vee \phi$ | H, 10 |
| 6. | $\psi$ | [H] |
| 7. | $\phi$ | [H] |
| 8. | $\psi$ | 1, 7, $\perp$ |
| 9. | $\psi$ | 5, 6, 7-8 |
| 10. | $(\psi \vee \phi) \to \psi$ | 5-9, $\to^+$ |
| 11. | $\psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$ | 4, 10, $\leftrightarrow^+$ |

$\vdash \forall x \forall y ((Rxy \wedge x = y) \to Ryy)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $Rab \wedge a = b$ | H |
| 2. | $Rab$ | 1, $\wedge^-$ |
| 3. | $a = b$ | 1, $\wedge^-$ |
| 4. | $Rbb$ | 2, 3, $=^-$ |
| 5. | $(Rab \wedge a = b) \to Rbb$ | 1-4, $\to^+$ |
| 6. | $\forall y (Ray \wedge a = y \to Ryy)$ | 5, $\forall^+$ |
| 7. | $\forall x \forall y ((Rxy \wedge x = y) \to Ryy)$ | 6, $\forall^+$ |

$\forall x (Px \to Qx) \vdash \neg\exists x (Px \wedge \neg Qx)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x (Px \to Qx)$ | H |
| 2. | $\forall x (Px \wedge \neg Qx)$ | $[H]_{10}$ |
| 3 | $Pa \wedge \neg Qa$ | $[H]_9$ |
| 4. | $Pa$ | 3, $\wedge^-$ |
| 5. | $\neg Qa$ | 3, $\wedge^-$ |
| 6. | $Pa \to Qa$ | 1, $\forall^-$ |
| 7. | $Qa$ | 4, 6, $\to^+$ |
| 8. | $\theta \wedge \neg\theta$ | 5, 7, $\perp$ |
| 9. | $\theta \wedge \neg\theta$ | 2-8, $\exists^-$ |
| 10. | $\neg\exists x (Px \wedge \neg Qx)$ | 2-9 $\neg^+$ |

**Exercício:** $Ax$: x é aluno
$Px$: x é Portátil
$Tx$: x é Tablet
$Rxy$: x tem y
$Sxy$: x é mais poderoso que y

alguns alunos têm portátil
$\exists x \exists y (Ax \wedge Py \wedge Rxy)$

um aluno com 1 portátil nunca tem um tablet
$\forall x \forall y \forall z (Ax \wedge Py \wedge Tz \to (Rxy \to \neg Rxz))$

Portáteis são mais poderosos que tablets
$\forall x \forall y (Px \wedge Ty \to Sxy)$

Há Portáteis mais poderosos que outros
$\exists x \exists y (Px \wedge Py \wedge Sxy)$

## Completude funcional e formas normais

· $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\phi$, cujos argumentos e valores são valores lógicos.

exemplo: $p \wedge q \to r$ determina uma função ternária $\mathcal{U}$ tal que $\forall a, b, c \in \{0, 1\}$

$$\mathcal{U}(a,b,c) = \begin{cases} \text{valor lógico de } p \wedge q \to r, \text{ quando se} \\ \text{atribuem a } p, q, r, \text{ os valores lógicos} \\ a, b, c, \text{ respetivamente.} \end{cases}$$

$\mathcal{U}(0,1,0) = 1$ ; $\mathcal{U}(1,1,0) = 0$

As tabelas dos valores lógicos de $\phi$ e a tabela de $\mathcal{U}_\phi$ são em tudo idênticas.

| p \| a | q \| b | r \| c | $p \wedge q \to r$ \| $\mathcal{U}(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| ... | ... | ... | ... |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

definição: Uma função booleana n-ária é uma função $\mathcal{U}: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Se $\phi$ é uma formula de $\mathcal{L}^0$ onde ocorrem exatamente n letras proposicionais digamos $p_1, \ldots, p_n$, a função booleana associada a $\phi$ é a função booleana n-ária $\mathcal{U}_\phi$, definida por

$$\mathcal{U}_\phi(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{V}(\phi), \text{ para qualquer valoração } \mathcal{V} \text{ tal que}$$

$$\mathcal{V}_i(p_i) = a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

## Metateorema da completude funcional (MCF)

Para toda a função booleana n-ária $\mathcal{U}$ existe, pelo menos, uma formula $\phi$ de $\mathcal{L}$, contendo apenas os conectivos $\neg, \wedge, \vee$, tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\phi$

demonstração: seja $\mathcal{U}$ uma função booleana n-ária qualquer. Há 2 casos a considerar

caso 1: Para quaisquer valores lógicos $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $\mathcal{U}(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

$$(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee \ldots \vee (p_n \wedge \neg p_n)$$

caso 2: Existe, pelo menos, um n-uplo de valores lógicos $(a_1, \ldots, a_n)$ onde $\mathcal{U}$ toma o valor de 1. Numerando estes n-uplos onde $\mathcal{U}$ toma o valor 1,

$$(a_1^1, \ldots, a_n^1), (a_1^2, \ldots, a_n^2), (a_1^3, \ldots, a_n^3), \ldots, (a_1^k, \ldots, a_n^k) \quad k \in (1 \leq k \leq 2^n)$$

$\forall \gamma = 1, \ldots, k$
$\forall i = 1, \ldots, n$

$$P_i^\gamma = \begin{cases} p_i & \text{se } a_i^\gamma = 1 \\ \neg p_i & \text{se } a_i^\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi_i = P_1^\gamma \wedge \ldots \wedge P_n^\gamma$ para $\gamma = 1 \ldots$

$$\phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_k$$

Scanned by CamScanner

A

## Literal, Letras

$$\text{Literal } P_i^{\gamma} = \begin{cases} \text{Letras: } p_i \ (p, q, r, \dots) \text{ se } a_i^{\gamma} = 1 \\ \text{Literais (negação das letras): } \neg p_i \ (\neg p, \neg q, \neg r, \dots) \text{ se } a_i^{\gamma} = 0 \end{cases}$$

$\forall \gamma = 1, \dots, k$
$\forall i = 1, \dots, n$

## Corolário:

Para todo o conectivo generalizado n-ário, existe, pelo menos, uma fórmula $\phi$ de $\mathcal{L}^0$ com n letras proposicionais e os conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que $\mathcal{U}_\phi = \mathcal{U}_{\Pi}$

## Corolário:

Para toda a fórmula $\psi$ de $\mathcal{L}^0$ existe, pelo menos, uma fórmula $\phi$ com as mesmas letras proposionais que $\psi$ e somente os conectivos $\neg, \wedge, \vee$, tal que $\phi$ e $\psi$ são lógicamente equivalêntes.

**Forma Normal Disjuntiva** $\boxed{\text{FND}}$ $\quad \mathcal{U} = 1$, com as letras

$$\bigvee_{\gamma=1}^{k} \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{\gamma} \Rightarrow (p_1^1 \wedge p_2^1 \wedge p_3^1 \wedge \dots \wedge p_n^1) \vee \dots \vee (p_1^k \wedge \dots \wedge p_n^k)$$

**Forma normal Conjuntiva** $\boxed{\text{FNC}}$ $\quad \mathcal{U} = 0$, com as literais

$$\bigwedge_{\gamma=1}^{k} \bigvee_{i=1}^{n} P_i^{\gamma} \Rightarrow (p_1^1 \vee p_2^1 \vee \dots \vee p_n^1) \wedge \dots \wedge (p_1^k \vee \dots \vee p_n^k)$$

Ou seja, pelo Corolário das Formas Normais

Toda a formula de $\mathcal{L}^0$ é lógicamente equivalente a uma fórmula na forma normal disjuntiva e a uma fórmula na forma normal conjuntiva.

$\boxed{\phi \sim \psi}$ significa que $\phi$ e $\psi$ são logicamente equivalêntes, quer dizer que

$\boxed{\phi \sim \psi}$ sse $\boxed{\models \phi \leftrightarrow \psi}$, onde $\boxed{\sim}$ denota uma relação de equivalência

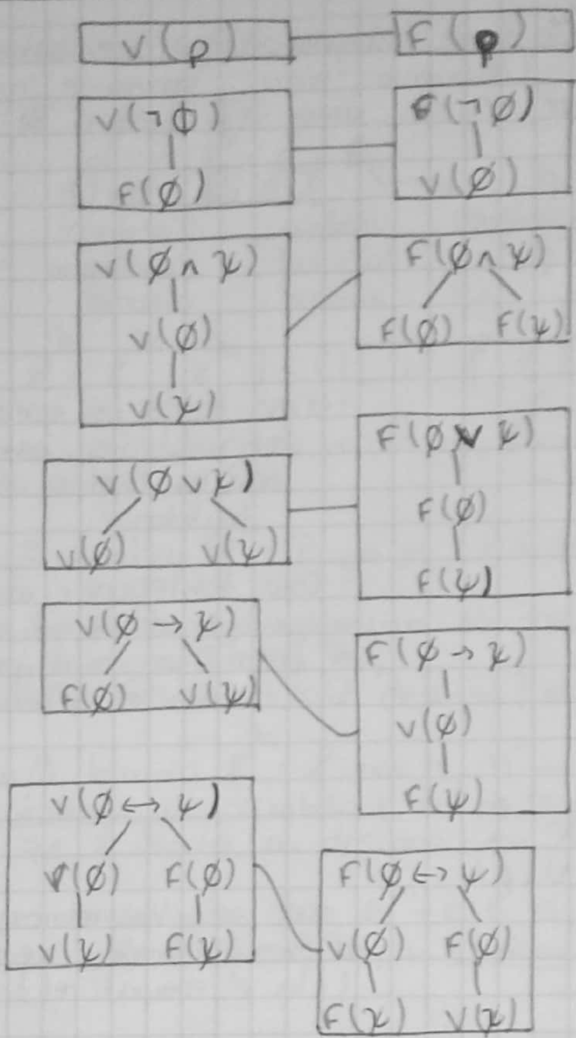
**Fórmulas de Horn** é uma fórmula na FNC tal que cada disjunção contém, quanto muito, uma literal positiva.

**Equivalências lógicas**

| | $\wedge$ | $\vee$ |
|---|---|---|
| Idempotência | $(\phi \wedge \psi) \sim \phi$ | $(\phi \vee \psi) \sim \phi$ |
| comutatividade | $(\phi \wedge \psi) \sim (\psi \wedge \phi)$ | $(\phi \vee \psi) \sim (\psi \vee \phi)$ |
| associatividade | $(\phi \wedge \psi) \wedge \theta \sim \phi \wedge (\psi \wedge \theta)$ | $(\phi \vee \psi) \vee \theta \sim \phi \vee (\psi \vee \theta)$ |
| absorção | $(\phi \wedge \psi) \vee \phi \sim \phi$ | $(\phi \vee \psi) \wedge \phi \sim \phi$ |
| distributividade | $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \sim (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$ | $(\phi \vee \psi) \wedge \theta \sim (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$ |
| De Morgan | $\neg(\phi \wedge \psi) \sim \neg \phi \vee \neg \psi$ | $\neg(\phi \vee \psi) \sim \neg \phi \wedge \neg \psi$ |
| dupla negação | $\neg\neg \phi \sim \phi$ | $\neg\neg \psi \sim \psi$ |
| se $\phi$ é invalida | $(\phi \wedge \psi) \sim \psi$ | $(\phi \vee \psi) \sim \phi$ |
| se $\phi$ é incompatível | $(\phi \wedge \psi) \sim \phi$ | $(\phi \vee \psi) \sim \psi$ |

# Tableaux semânticos de Beth

àtomicos




definição: Um tableau semântico é uma àrvore binária de fórmulas valoradas, também chamadas de as entradas do tableau, satisfazendo certas regras.

i. os tableaux atómicos são tableaux finitos.

def 1: Uma entrada X diz-se reduzida (usada ou marcada) num dado ramo se X for a raiz de um tableau atómico de tal modo que todas as entradas num ramo através daquele tableau atómico ocorrem nesse ramo e diz-se não reduzida no caso contrário

def.2: Um ramo de um tableau diz-se contraditório se contiver as entradas V(ϕ) e F(ϕ), para certa fórmula ϕ, e diz-se não contraditório, no caso contrário

def 3: Um tableau diz-se terminado (ou completo) se nenhum dos seus ramos não contraditórios tiver nós não usados, caso contrário diz-se não terminado

def 4: um tableaux diz-se contraditório se todos os seus ramos forem contraditórios, e no caso contrário diz-se não contraditório.

def 5: se todos os ramos forem contraditórios então ϕ é impossível ser falso logo será uma tautologia.

**Definição:** Uma derivação à Beth de uma fórmula $\phi$ é um tableau completo e contraditório com a raiz $F(\phi)$.
Diz-se derivável à Beth sse existir uma derivação à Beth $\phi$.

$$\vdash_B \phi$$

Uma refutação à Beth de $\phi$ é um tableau completo e contraditório com raiz $V(\phi)$.
Diz-se refutável à Beth sse existir uma refutação à Beth de $\phi$

**Exemplo:** $((p \to q) \to p) \to p$ } Lei de Peirce

0. $F[((p \to q) \to p) \to p]$
1. $V((p \to q) \to p)$
2. $F(p)$
3. $F(p \to q)$ $\quad$ $V(p)$ ⊗
4. $V(p)$
5. $F(p)$ ⊗

- Como todos os ramos são contraditórios, então a fórmula lógica será uma tautologia.
- Este tableau é contraditório, o que quer dizer que a tentativa de falsificar a Lei de Peirce falhou. Ela é derivável à Beth (e é válida)

**Exemplo:**

0. $V[((p \to q) \to p) \to p]$
1. $F[(p \to q) \to p]$ $\quad$ $V(p)$
2. $V(p \to q)$
3. $F(q)$
4. $F(p)$ $\quad$ $V(q)$

Como não há ramos contraditórios a fórmula não é refutável à Beth (ela é compatível)

X

# Semântica tarskiana

definição: Uma estrutura adequada para a linguagem $\mathcal{L}$ (estrutura $\mathcal{L}$) é um sistema ("uplo" ordenado)

$$\mathcal{L} = \{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{símbolo} \\ \text{relacional} \\ \text{binário}}}{P}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{símbolo} \\ \text{funcional} \\ \text{binário}}}{f}, \underset{\text{constante}}{e} \}$$

$$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, e^{\mathcal{M}}) = (M, P, f, e)$$

i) um conjunto ou classe não vazio $M$, chamado de domínio, suporte ou universo da estrutura $\mathcal{M}$;

ii) Uma relação binária $P^{\mathcal{M}} = P$ em $M$, $P \subseteq M^2$.

- A relação em $\mathcal{M}$ correspondente ao símbolo $P$,
- A interpretação de $P$ em $\mathcal{M}$,
- A relação que $P$ denota (ou designa) em $\mathcal{M}$,

iii) Uma relação binária $f^{\mathcal{M}} = f$ em $M$, $M^2 \longrightarrow M$, que diz a operação em $\mathcal{M}$ correspondente ao símbolo $f$, ou a interpretação de $f$ em $\mathcal{M}$, ou a operação que $f$ denota (ou designa) em $\mathcal{M}$.

iv) Um elemento constante ou fixo $e^{\mathcal{M}} = e \in M$, correspondente ao símbolo $e$, ou a interpretação de $e$ em $\mathcal{M}$, ou o elemento que a constante $e$ denota (ou designa).

i) 2 estruturas para a mesma linguagem $\mathcal{L}$ dizem-se semelhantes ou do mesmo tipo.

exemplo: 3 estruturas do mesmo tipo para a linguagem, $\mathcal{L} = \{P, f, e\}$

$\mathcal{M}_1 = (M, P^{\mathcal{M}_1}, f^{\mathcal{M}_1}, e^{\mathcal{M}_1}) = (M_1; P_1; f_1; e_1) = (\mathbb{N}; <; +; 0)$

$\mathcal{M}_2 = (M, P^{\mathcal{M}_2}, f^{\mathcal{M}_2}, e^{\mathcal{M}_2}) = (M_1; P_2; f_2; e_2) = (\{1\}; \emptyset; \{((1,1),1)\}; 1)$

$\mathcal{M}_3 = (M, P^{\mathcal{M}_3}, f^{\mathcal{M}_3}, e^{\mathcal{M}_3}) = (M_1; P_3; f_3; e_3) =$

$= (\{1,2\}; \{(1,2),(2,2)\}; \{((1,1),1), ((1,2),2), ((2,1),1), ((2,2),2)\}; 2)$

- $<$ é a relação de ordem estrita usual em $\mathbb{N}$
- $+$ é a operação de adição usual.
- $0$ é a constante em $\mathbb{N}$
- domínio do conjunto $\mathbb{N}$

- $f = \{((1,1),1)\}$ é a operação binária em $\{1\}$ tal que $f(1,1) = 1$
- $\emptyset$ significa que $\{1\}$ é o único valor do domínio
- $1$ é a constante do domínio

valores até $(1,2)$ e $(2,$

domínio $\{1,2\}$

constante do domínio $2$

$f_3$ é operação binária $\{1,2\}$

$f_3 : \{ \_\_\_ \} : \{1,2\} \to \{1,2\}$

$f_3(1,1) = 1$
$f_3(1,2) = 2$
$f_3(2,1) = 1$
$f_3(2,2) = 2$

$\doteq$ $\mathcal{L}$, pode ser interpretado como denota ou corresponde à relação de identidade em M

Objetivo é definir, para cada sentença $\phi$ de $\mathcal{L}$ e cada estrutura $\mathfrak{M}$.

<u>ou</u> « $\phi$ é verdadeira (ou satisfeita) em $\mathfrak{M}$ »

→ « $\mathfrak{M}$ satisfaz $\phi$ »

→ « $\mathfrak{M}$ é modelo de $\phi$ »

$\phi$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse aquilo que $\phi$ exprime acerca dos elementos de M, incluindo e, da operação $f$ e da relação P em M, acontece de facto

<u>variaveis individuais:</u> $x_0, x_1, x_2, \ldots$

<u>parâmetros:</u> $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

<u>definição:</u>

Seja $\mathfrak{M} = (M, P, f, c)$ uma estrutura $\mathcal{L}$. chama-se <u>atribuição</u> em $\mathfrak{M}$ a toda a sucessão $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \rangle \doteq \langle \alpha_i \rangle\, i \geq 0$, de elementos de M. A um par ordenado da $\mathfrak{I} = (\mathfrak{M}, \alpha)$ chamamos <u>interpretação</u> de $\mathcal{L}$

Dada uma atribuição $\alpha$ em $\mathfrak{M}$, supõem-se que a cada parâmetro $a_i$ é atribuido o valor $\alpha_i$,

$$a_i \mapsto \alpha_i \; [\doteq \alpha(i), \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots]$$

O Dominio, as relações e funções de $\mathfrak{M}$ ⇒ O Dominio, as relações e funções da interpretação $\mathfrak{I}$

« $\phi$ é verdadeira (ou satisfeita) na interpretação $\mathfrak{I}$ »

« $\phi$ é verdadeira (ou satisfeita) em $\mathfrak{M}$, com respeito a $\alpha$ »

$$\mathfrak{I}(\phi) = 1 \;;\; \mathfrak{I} \models \phi \;;\; \mathfrak{M} \models \phi[\alpha]$$

<u>1. valor de um termo $t$ em $\mathfrak{I}$</u>

valor de $t$ em $\mathfrak{M}$ com respeito a $\alpha$ $\}$ $\mathfrak{I}(t)\,[= t_{\mathfrak{I}} = t^{\mathfrak{M}}[\alpha]]$

<u>2. valor lógico da fórmula $\phi$ em $\mathfrak{I}$</u>

valor lógico de $\phi$ em $\mathfrak{M}$ com respeito a $\alpha$ $\}$ $\mathfrak{I}(\phi)\,[= \phi_{\mathfrak{I}} = \phi^{\mathfrak{M}}[\alpha]]$

$\mathfrak{I}(t)$: se $t$ é um parametro $a_i$ → $\mathfrak{I}(a_i) = \alpha_i$

se $t$ é constante $c$, então $\mathfrak{I}(t)$ é o elemento $e^{\mathfrak{M}} = e$ que e denota $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{I}(c) = e$

se $t$ é da forma $f t_1 t_2$ então $\mathfrak{I}(t)$ é $f(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2))$, → $\mathfrak{I}(f t_1, t_2) = f(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2))$

<u>Exemplo:</u>

No grupo ordenado dos inteiros: $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}; +; <; 0)$ se $\alpha = \langle 1, 3, 2, 3, \ldots \rangle$

$\mathcal{I} = (\mathcal{M}, \alpha)$ e $t$ é o termo $a_0 + (a_3 + 0)$ tem-se,

$$\mathcal{M}(t) = 1 + (3+0) = 4$$

<u>Definição $\mathcal{I}(\emptyset)$</u>: se $\emptyset$ é atómica, digamos uma igualdade $(t_1 \doteq t_2)$

$$\mathcal{I}((t_1 \doteq t_2)) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(t_1) = \mathcal{I}(t_2)$$

se $t_1$ e $t_2$ tiverem o mesmo valor em $\mathcal{M}$ com respeito a $\alpha$;
se $\emptyset$ é da forma $Pt_1t_2$ então:

$$\mathcal{I}(Pt_1t_2) = 1 \quad \text{sse} \quad (\mathcal{I}(t_1), \mathcal{I}(t_2)) \in P$$

se o par ordenado de valores $t_1$ e $t_2$ em $\mathcal{M}$ com respeito a $\alpha$ está na relação que $P$ designa em $\mathcal{M}$

i) <u>se $\emptyset$ for da forma $\neg\psi$, então</u>:

$$\mathcal{I}(\neg\psi) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(\psi) = 0$$

ii) <u>se $\emptyset$ for da forma $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$ então</u>:

$$\mathcal{I}(\psi \wedge \theta) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(\psi) = 1 \ \text{e} \ \mathcal{I}(\theta) = 1$$

$$\mathcal{I}(\psi \vee \theta) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(\psi) = 1 \ \text{ou} \ \mathcal{I}(\theta) = 1$$

$$\mathcal{I}(\psi \to \theta) = 1 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(\psi) = 0 \ \text{ou} \ \mathcal{I}(\theta) = 1$$

<u>definição</u>:

$\mathcal{I}(\emptyset) = 1$
- $\emptyset$ é verdadeira ou satisfeita em $\mathcal{I}$
- $\mathcal{I}$ satisfaz $\emptyset$
- $\emptyset$ é verdadeira ou satisfeita em $\mathcal{M}$ com respeito a $\alpha$

$\mathcal{I} \models \emptyset$

$\mathcal{M} \models \emptyset[\alpha] \quad \Rightarrow \mathcal{M} \models \emptyset(a_0, a_1, \ldots, a_k)[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k]$

$\mathcal{I}(\emptyset) = 0$
- $\emptyset$ é falsa ou ñ satisfeita em $\mathcal{I}$
- $\mathcal{I}$ ñ satisfaz $\emptyset$
- $\emptyset$ é falsa ou insatisfeita em $\mathcal{M}$ com respeito a $\alpha$

$\mathcal{I} \not\models \emptyset$

$\mathcal{M} \not\models \emptyset[\alpha]$

$\Rightarrow \mathcal{M} \not\models \emptyset(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$

$\mathcal{M} \models \forall x_0 \psi(x_0, a_1, \ldots, a_k)[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ sse $\mathcal{M} \models \psi(a_0, \ldots, a_k)[m, \ldots, \alpha_k]$ $m \in M$

$\mathcal{M} \models \exists x_0 \psi(x_0, a_1, \ldots, a_k)[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$

✗

Exemplo: $\phi(a_1; a_3): \exists x_0 (x_0 < a_1 \wedge a_1 + a_3 < x_0 + 0)$ ✗

$\alpha: a_1 \mapsto 1, \; a_3 \mapsto -1$

$\mathcal{M} \vDash \phi(a_1, a_3)[1, -1]$ sse m tal que

$\mathcal{M} \vDash (a_0 < a_1 \wedge a_1 + a_3 < a_0 + 0)[m, 1, -1]$

$\mathcal{M} \vDash (a_0 < a_1)[m, 1]$ e $\mathcal{M} \vDash (a_1 + a_3 < a_0 + 0)[m, 1, -1]$

$m < 1$ e $1 + (-1) < m + 0$, isto é, $m < 1$ e $0 < m$

o que não acontece. Portanto $\mathcal{M} \nvDash \phi(a_1, a_3)[1, -1]$

definição: uma formula $\phi$ é válida na estrutura $\mathcal{M}$ sse $\phi$ é verdadeira em $\mathcal{M}$ com respeito a todas as atribuições $\alpha$ em $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M} \vDash \phi.$$

Diz-se que $\phi$ é universalmente válida, ou só válida, sse $\phi$ é valida em todas as estruturas, escrevendo $\vDash \phi$

$\mathcal{M}$ é modelo de $\phi$ sse $\phi$ é válida em $\mathcal{M}$

## Dedução Natural Quantificacional (DNQ)

eliminação universal

$$\frac{\forall x \, \phi(x)}{\phi(t)} \; (\forall^-)$$

igualdade

$(=^+)$ $t = t$

$(=^-)$ $\dfrac{t_1 = t_2, \; \phi(t_1)}{\phi(t_2)}$

$\boxed{\forall x (Px \to Qx), Pa \vdash Qa}$

1. $\forall x (Px \to Qx)$ H
2. $Pa$ H
3. $Pa \to Qa$ 1, $(\forall^-)$ $\quad Q(t) = Qa$
4. $Qa$ 2, 3, (MP)

Introdução universal

$$\frac{\phi(a)}{\forall x \, \phi(x)} \; (\forall^+)$$

a ñ depende de hipóteses em a ocorre

$\boxed{\forall x (Px \to Qx), \forall x (Qx \to Rx) \vdash \forall x (Px \to Rx)}$

1. $\forall x (Px \to Qx)$ H
2. $\forall x (Qx \to Rx)$ H
3. $Pa$ H
4. $Pa \to Qa$ 1, $\forall^-$
5. $Qa$ 3, 4, MP
6. $Qa \to Ra$ 2, $\forall^-$
7. $Ra$ 5, 6, MP
8. $Pa \to Ra$ 3-7, $\to^+$
9. $\forall x (Px \to Rx)$ 8, $\forall^+$

+

Introdução existencial

Eliminação existencial

a ñ pode ocorrer em $\theta$

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)} \ \exists^{+}$$

$$\begin{array}{l} \exists x \phi(x) \\ \phi(a_0) \quad [H] \\ \vdots \\ \theta \\ \hline \theta \end{array} \ \exists^{-}$$

# Tableaux semânticos de Beth dos Quantificadores

$$\begin{array}{c} v(\forall x \phi(x)) \\ | \\ v(\phi(a)) \end{array}$$

a sem restrição

$$\begin{array}{c} v(\exists x \phi(x)) \\ | \\ v(\phi(a)) \end{array}$$

a ñ utilizado antes

$$\begin{array}{c} F(\forall x \phi(x)) \\ | \\ F(\phi(a)) \end{array}$$

a ñ utilizado antes

$$\begin{array}{c} F(\exists x \phi(x)) \\ | \\ F(\phi(a)) \end{array}$$

a sem restrições

**Argumento**: é uma sequência finita de proposições (asserções, sentenças) de determinada linguagem.

$\underbrace{\phi_1, \dots, \phi_n, \psi}_{\text{proposições}}$

$\phi_1, \dots, \phi_n$ permissas do argumento

$\psi$ conclusão do argumento

$$\begin{array}{l} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \psi \end{array}$$

« $\phi_1, \dots, \phi_n$ portanto $\psi$ »

$\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$

$\dfrac{\phi_1, \dots, \phi_n}{\psi}$ é valid[o] sse $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$

**definição**: Um argumento $\phi_1, \dots, \phi_n / \psi$ diz-se correto ou válido sse a conclusão for verdadeira sempre que as permissas $\phi_1, \dots, \phi_n$ forem simultaneamente verdadeiras. Diz-se inválido ou incorreto no caso contrário

## Tabelas de Verdade

V = 1
F = 0

| $\phi$ | $\neg\phi$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\phi$ | $\psi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\phi \vee \psi$ | $\phi \rightarrow \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

+

**definição**: chama-se valoração (ou valuação) a toda a aplicação $v$ do conjunto das letras proposicionais no conjunto dos valores lógicos,

$$v: P \rightarrow \{0,1\}$$

se $v(p)=1$, $p$ é verdadeira para $v$ ou que $v$ satisfaz ou realiza ou é um modelo de $p$.

se $v(p)=0$, é o oposto.

- $\rightarrow \emptyset$ é contraditória, $\forall_v [v(\emptyset)=0]$
- $\rightarrow \emptyset$ é tautologia, uma tautologia ou válida: $\forall_v [v(\emptyset)$ booleana
- $\rightarrow \emptyset$ é compatível: $\exists_v$ tal que $v(\emptyset)=1$
- $\rightarrow \emptyset$ é contigente: $\exists_{v, v'}$ tais que $[v(\emptyset)=1], [v'(\emptyset)$

Dada uma valoração $v$ e uma fórmula qualquer $\emptyset$, dizer que é possível determinar o valor lógico resultante para $\emptyset$, calculado de acordo com as tabelas dos conectivos é dizer que a valuação $v$ se pode estender (prolongar) ao conjunto de todas as fórmulas

$$\hat{v}: Prop(P) \rightarrow \{0,1\}$$ que estende $v$, $\hat{v}(p)=v(p)$ para todo $p$ em $P$

$\hat{v}(\neg\psi)=1$ sse $\hat{v}(\psi)=0$
$\hat{v}(\psi\wedge\theta)=1$ sse $\hat{v}(\psi)=1 = \hat{v}(\theta)$
$\hat{v}(\psi\vee\theta)=1$ sse $\hat{v}(\psi)=1$ ou $\hat{v}(\theta)=1$
$\hat{v}(\psi\rightarrow\theta)=1$ sse $\hat{v}(\psi)=0$ ou $\hat{v}(\theta)=1$

uma aplicação $\hat{v}: Prop(P) \rightarrow \{0,1\}$ com estas propriedades diz-se uma valuação (ou valoração) booleana. Dizemos que $\hat{v}$ satisfaz ou realiza ou é um modelo de $\emptyset$ ou ainda que $\emptyset$ é verdadeira para $\hat{v}$ sse $\hat{v}(\emptyset)=1$

**eliminação da conjunção**

$\boxed{\dfrac{\emptyset\wedge\psi}{\emptyset} \text{ ou } \dfrac{\emptyset\wedge\psi}{\psi}}$ $\wedge^-$
- $\emptyset\wedge\psi \vdash \emptyset$
- $\emptyset\wedge\psi \vdash \psi$

**Introdução da conjunção**

$\boxed{\dfrac{\emptyset, \psi}{\emptyset\wedge\psi}}$ $\wedge^+$
- $\emptyset \vdash \emptyset\wedge\psi$
- $\psi \vdash \emptyset\wedge\psi$

$\boxed{\dfrac{\emptyset \quad \psi}{\emptyset\wedge\psi}}$

**eliminação da dupla negação**
~~introdução~~

$\boxed{\neg\neg\emptyset}$

$\neg\neg^-$
- $\neg(\neg\emptyset) \vdash \emptyset$

$\neg\neg^+$
- $\emptyset \vdash \neg(\neg\emptyset)$

$\boxed{\dfrac{\emptyset}{\neg\neg\emptyset}}$

**eliminação do condicional:**

Modus (Ponendo) ponens $\boxed{\dfrac{\emptyset, \emptyset\rightarrow\psi}{\psi}}$

$\Rightarrow^-$, MP
- $\emptyset \vdash \psi$
- $\emptyset\rightarrow\psi \vdash \psi$

$\boxed{\dfrac{\emptyset \quad \emptyset\rightarrow\psi}{\psi}}$

**Introdução do condicional:**

$\emptyset$ [H]
$\vdots$
$\psi$
$\overline{\emptyset\rightarrow\psi}$

$\Rightarrow^+$
- $\emptyset \vdash \emptyset\rightarrow\psi$
- $\psi \vdash \emptyset\rightarrow\psi$

**Introdução da negação:**

$\emptyset$
$\vdots$
$\psi\wedge\neg\psi$
$\overline{\neg\emptyset}$

$\neg^+$
- $\emptyset \vdash \neg\emptyset$
- $\psi\wedge\neg\psi \vdash \neg\emptyset$

**Modos Tollens**

MT

$\boxed{\dfrac{\emptyset\rightarrow\psi, \neg\psi}{\neg\emptyset}}$
- $\emptyset\rightarrow\psi \vdash \neg\emptyset$
- $\neg\psi \vdash \neg\emptyset$

**Redução ao absurdo**

$$\begin{array}{|c|}\hline \neg\phi \quad [H] \\ \vdots \\ \psi \wedge \neg\psi \\ \hline \phi \\ \hline \end{array}$$

**RA**
- $\neg\phi \vdash \phi$
- $\psi \wedge \neg\psi \vdash \phi$

**Introdução da disjunção:**

$$\boxed{\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \quad \text{ou} \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}}$$

$\vee^{+}$
- $\phi \vdash \phi \vee \psi$
- $\psi \vdash \phi \vee \psi$

**eliminação da disjunção:**

$$\begin{array}{c|ccc} & \phi \vee \psi & & \phi \vee \psi \\ & \phi \; [H_1] & \text{ou} & \psi \; [H_2] \\ & \vdots & & \vdots \\ & \theta & & \theta \\ \hline & & \theta & \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \phi \vee \psi \\ \phi \quad [H_1] \\ \vdots \\ \theta \\ \psi \quad [H_2] \\ \vdots \\ \theta \\ \hline \theta \\ \hline \end{array} \longrightarrow \underline{\vee^{-}}$$

**bicondicional**

$$\boxed{\frac{\phi \rightarrow \psi, \; \psi \rightarrow \phi}{\phi \leftrightarrow \psi}}$$

$\leftrightarrow^{+}$
- $\phi \rightarrow \psi \vdash \phi \leftrightarrow \psi$
- $\psi \rightarrow \phi \vdash \phi \leftrightarrow \psi$

$$\begin{array}{|c|}\hline \phi \rightarrow \psi \\ \psi \rightarrow \phi \\ \hline \phi \leftrightarrow \psi \\ \hline \end{array}$$

$\leftrightarrow^{-}$

$$\boxed{\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \rightarrow \psi} \; , \; \frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \phi}}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \phi \leftrightarrow \psi \\ \hline \phi \rightarrow \psi \\ \psi \rightarrow \phi \\ \hline \end{array}$$

**Regras de formação:**

cálculo proposicional, $\mathcal{L}^{0}$, em que as fórmulas de $\mathcal{L}^{0}$ são formadas

1. Toda a letra proposicional (átomos: p, q, r, s, ...) é uma fórmula;
2. se $\phi$ é uma fórmula então $\neg\phi$ é uma fórmula.
3. se $\phi$, $\psi$ são fórmulas então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ e $(\phi \rightarrow \psi)$ são fórmulas;
4. nada mais é fórmula, dado que uma expressão é fórmula se puder ser obtida ou construída a partir de letras proposicionais de acordo com as regras $F_2$ e $F_3$.

**Sistema Dedutivo: dedução Natural**

i) Compreende uma lista finita de Regras de Inferência, correspondem a certas formas muito simples e frequentes de argumentação válida.

ii) Compreende um conceito de derivabilidade ou dedutibilidade, correspondente à noção intuitiva de demonstração em matemática, $\vdash$.

Escrevemos, $\boxed{\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi}$ «de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ deduz-se (deriva-se) $\psi$»

para exprimir que $\psi$ é dedutível ou «$\psi$ deduz-se de $\phi_1, \ldots, \phi_n$» derivável de $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

**metateorema**: Para cada fórmula $\phi$ de uma dedução com hipóteses em DN, se $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_m$ são todas as hipóteses de que $\phi$ depende nessa dedução, então $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_m \rightarrow \phi$ é válida $(\sim \psi_1, \ldots, \psi_m \models \phi)$.

**Princípio de indução completa**: então $\bar{\phi}(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$

i) $\bar{\phi}(1)$ é verdadeira

ii) para cada $n \geq 1$, se $\bar{\phi}(n+1)$ é verdadeira sempre que $\bar{\phi}(k)$ é verdadeira para todo $k \leq n$

X

**definição** Para qualquer conjunto finito ou infinito $\Gamma$ de fórmulas de $\mathcal{L}^{\circ}$ e qualquer fórmula $\varnothing$, diz-se que $\varnothing$ é dedutível (derivável) de $\Gamma$,

$\Gamma \vdash \varnothing$ sse existe uma dedução de $\varnothing$ com hipóteses em $\Gamma$, $\varnothing_1, \dots, \varnothing_n$ em $\Gamma$ tais que $\varnothing_1, \dots, \varnothing_n \vdash \varnothing$

Um conjunto $\Gamma$ de fórmulas de $\mathcal{L}^{\circ}$ diz-se consistente (não contraditório) sse não existir nenhuma fórmula $\psi$ tal que $\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi$.
Diz-se inconsistente no caso de existir, pelo menos uma fórmula $\psi$ tal que $\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi$.

· $\Gamma_\infty$ é consistente maximal: i) $\Gamma_\omega$ é consistente, e

ii) para qualquer $\varnothing$, se $\varnothing \notin \Gamma_\omega$, então $\Gamma_\omega \cup \{\varnothing\}$ é contraditório

$\Gamma_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$

$\Gamma_\omega$ é compatível então $\Gamma$ também é

para todo o n, $\Gamma_n$ é consistente,

$\Gamma_n \cup \{\varnothing_n\}, \Gamma_n \cup \{\neg \varnothing_n\}$

· $\Gamma_\omega$ é dedutivamente fechado: para qualquer $\varnothing$, se $\Gamma_\omega \vdash \varnothing$ então $\varnothing \in \Gamma_\omega$

· $\Gamma_\omega$ é completo, isto é para qualquer $\varnothing$, $\Gamma_\omega \vdash \varnothing$ ou $\Gamma_\omega \vdash \neg \varnothing$

se $\Gamma_\omega \nvdash \neg \varnothing$, então $\Gamma_\omega \cup \{\varnothing\}$ é consistente, logo $\varnothing \in \Gamma_\omega$ e portanto $\Gamma_\omega \vdash \varnothing$.

· $\varnothing \wedge \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\varnothing \in \Gamma_\omega$ e $\psi \in \Gamma_\omega$
· $\varnothing \vee \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\varnothing \in \Gamma_\omega$ ou $\psi \in \Gamma_\omega$
· $\varnothing \to \psi \in \Gamma_\omega$ sse $\varnothing \notin \Gamma_\omega$ ou $\psi \in \Gamma_\omega$

para qualquer conjunto $\Sigma$ de fórmulas e qualquer fórmula $\varnothing$ tem-se

$$\Sigma \vdash \varnothing \quad \text{sse} \quad \Sigma \models \varnothing$$

**Notações: termos e fórmulas**

i. Termos são simplesmente os parâmetros e as constantes (se houver alguma). Os termos da fórmula $f t_1, \dots, t_n$, de uma linguagem com símbolos funcionais, tem-se que $f$ é um símbolo funcional de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos.

$T_1$. os parâmetros e as constantes são termos;
$T_2$. se $f$ é um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f t_1, \dots, t_n$ é um termo.
$T_3$. Nada mais é termo

$F_1$. se $t_1, t_2$ são termos, então $= t_1, t_2$ é uma fórmula; se $P$ é um símbolo predicativo n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $P t_1, \dots, t_n$ é uma fórmula.

$F_2$. se $\varnothing$ é uma fórmula então $\neg \varnothing$ é uma fórmula.

$F_3$. se $\varnothing, \psi$ são fórmulas, então $(\varnothing \wedge \psi), (\varnothing \vee \psi), (\varnothing \to \psi)$ são fórmulas notações:

Formulas atómicas: formulas do tipo $F_i$

Formulas compostas: formulas restantes

Quantificadores de $x$: '$\forall x$' e '$\exists x$'

Parametros da quantificação (parametro associado a) em $x$: $\emptyset(a)$ passa a
$\forall x(\emptyset(x))$
$\exists x(\emptyset(x))$

$\forall x \forall y \emptyset$ abrevia-se para $\forall x,y \emptyset$ ou $\forall xy \emptyset$

$\exists x \exists y \emptyset$ abrevia-se para $\exists x,y \emptyset$ ou $\exists xy \emptyset$

Formula da forma $\forall x \psi$, $\exists x \psi$: formula $\psi$ é o alcance ou ação do quantificador em $x$.

Formulas mudas ou aparentes em $\emptyset$: todas as ocorrências numa formula $\emptyset$ de uma variavel $x$ que ocorram num quantificador em $x$ ou no alcance de um quantificador em $x$.

uma formula $\emptyset$ na qual ocorrem os parametros $a_1, \dots, a_n$ também se diz uma formula aberta, sentença aberta ou uma condição nesses parametros

$$\emptyset(a_1, \dots, a_n)$$

Termo fechado: termo onde não ocorrem nenhum parâmetro.

Formula fechada ou sentença: formula sem parâmetros.

definição: seja $\Gamma$ um conjunto de sentenças, $\psi$ uma sentença de $\mathcal{L}$.
Dizemos que $\psi$ é dedutivel de $\Gamma$, ou que é teorema de $\Gamma$ e
$\Gamma \vdash \psi$
sse existe uma dedução (DNQ) de $\psi$ com hipoteses em $\Gamma$

metateorema da compacidade: se um conjunto $\Sigma$ de sentenças de $\mathcal{L}$ tem compatível sse todo o subconjunto finito de $\Sigma$ é compatível.

corolário: se um conjunto $\Sigma$ de sentenças de $\mathcal{L}$ tem modelos finitos arbitrariamente grandes então $\Sigma$ tem, pelo menos, um modelo infinito

metateorema da validade e completude semântica:
seja $\Sigma$ um conjunto qualquer de sentenças de uma linguagem elementar $\mathcal{L}$, $\psi$ uma sentença de $\mathcal{L}$. Então $\Sigma \models \psi$ sse $\Sigma \vdash$
em particular, $\psi$ é valida sse $\psi$ é um teorema lógico

corolário: o sistema DNQ é consistente, isto é, não existe nenhuma sentença $\emptyset$ tal que $\vdash \emptyset \wedge \neg \emptyset$

Scanned by CamScanner

## Exercícios

1. Simbolize ao nível proposicional os seguintes argumentos. Diga quais dos argumentos são válidos e inválidos.

a) se não existe petróleo no Algarve então os peritos estão certos ou o Governo mente. Existe petróleo no Algarve ou os peritos estão errados. Portanto, o governo não mente.

p: existe petróleo no Algarve
q: os peritos estão certos
g: o governo mente

$(\neg p) \to (q \vee g)$
$p \vee (\neg q)$
―――――――
$(\neg g)$

| p | q | g | ¬p | → | q∨g | p | ∨ | (¬q) | ¬g | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | × |

argumento inválido, porque a permissas corretas (verdadeiras) corresponde uma conclusão falsa.

b) os vencimentos aumentam somente se há inflação. se há inflação, então o custo de vida aumenta. Os vencimentos não aumentam. Portanto, o custo de vida aumenta.

v: os vencimentos aumentam
i: há inflação
c: custo de vida aumenta

$v \to i$
$c \leftarrow i$
$\neg v$
―――――
$c$

| v | i | c | v → i | c ← i | ¬v | c | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |

o argumento é inválido, porque a permissas corretas corresponde uma conclusão falsa.

c) se 2 é primo, então é o menor primo. se 2 é o menor primo, então 1 não é primo. 1 não é primo. Portanto, 2 é primo.

p: 2 é primo
m: 2 é o menor primo
q: 1 é primo

$p \to m$
$m \to \neg q$
$\neg q$
―――――
$p$

| p | m | q | p → m | m → | ¬q | p | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |

o argumento é inválido, porque a permissas corretas corresponde uma conclusão falsa.

d) Maria João é boa pianista ou é boa bailarina. Maria João é boa pianista. Portanto, Maria João não é boa bailarina.

p: Maria João é boa pianista
b: Maria João é boa bailarina

$p \vee b$
$p$
―――
$\neg b$

| $p$ | $b$ | $p \vee b$ | $p$ | $\neg b$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |

o argumento é inválido porque a permissas corretas corresponde uma conclusão falsa

e) Só se eu ganhar o totoloto é que pago aos credores. Os credores não ficam satisfeitos excepto se eu lhes pagar. Portanto, ganho o totoloto ou os credores não ficam satisfeitos. excepto se = ou = se não

t: eu ganho o totoloto
p: eu pago aos credores
c: credores ficam satisfeitos

$p \to t$
$\neg p \to \neg c$
―――
$t \vee \neg c$

| $p$ | $t$ | $c$ | $p \to t$ | $\neg p \to \neg c$ | | | $t \vee \neg c$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ✓ |

o argumento é válido, porque a permissas corretas corresponde uma conclusão verdadeira.

2. Tendo em conta a interpretação com Domínio: conjunto dos números naturais;

$Px$: $x$ é Par
$Rx$: $x$ é Primo
$Ix$: $x$ é Impar
$Q(x,y) = xQy = Qxy$: $x$ divide $y$
$y$ é multiplo de $x$

traduza para linguagem corrente as expressões simbólicas seguintes.

a) $\forall x\,(Q(2,x) \to Px)$
Qualquer numero natural $x$ é par se for multiplo de 2

b) $\exists x\,(Px \wedge Q(x,3))$
Existe um numero natural $x$ que é par e divisivel por 3

c) $\forall x\,(Px \to \forall y\,(Q(x,y) \to Py))$
para qualquer nº natural $x$ tem-se que, se $x$ for então, para um valor qualquer $y$ tal que $x$ seja divisivel por $y$ então $y$ tbm será par,

d) $\forall x\,(\neg Px \to \neg Q(2,x))$
se qualquer que seja o nº natural $x$ ñ for par então 2 não divide $x$

e) $\exists x\,(Ix \wedge Q(0,x))$
Existe um nº natural impar e divisivel por zero

f) $\forall x\,(Rx \to \exists y\,(Py \wedge Q(x,y)))$
Qualquer que seja o nº natural $x$, existe um nº natural $y$ que, se $x$ for Primo então $y$ é Par e multiplo de $x$.

3. Para cada grupo fixe uma interpretação adequada e simbolize as proposições respetivas:

A.1 Toda a modelo é vaidosa: $\forall x\,(Mx \to Vx)$

$Mx$: $x$ é modelo
$Vx$: $x$ é vaidosa

A.2 Algumas modelos são vaidosas: $\exists x\,(Mx \land Vx)$

A.3 Nenhuma modelo é vaidosa: $\forall x\,(\neg Mx \to Vx)$

A.4 Algumas modelos não são vaidosas: $\exists x\,(Mx \land \neg Vx)$

A.5 Somente as modelos são vaidosas: $\forall x\,(Mx \land Vx)$

A.6 Todos são vaidosos, excepto as modelos $\forall x\,(\neg Mx \to Vx)$

A.7 Algumas modelos são bonitas, mas vaidosas $\exists x\,(Mx \land (Bx \land Vx))$

B.1 Todo o número natural primo maior que 2 é impar: $\forall x\,(Nx \land M(x,2) \to Ix)$
$Nx$: $x$ é numero natural primo
$xMy$: $x$ Maior que $y$
$Ix$: $x$ é impar

B.2 Existe um Primo Par: $\exists x\,(Nx \land \neg Ix)$

B.3 Existe um e não mais de um primo par: $\exists x\,(Nx \land \neg Ix) \land (y\,(Py \land \neg Iy \Rightarrow y \doteq x)$

B.4 Para todo o número existe um primo maior do que ele: $\forall x\,(\exists y\,(Ny \land Myx$

B.5 $n$ é primo [utilizando "$\leq$" e "$\times$"]: $\forall x \forall y\,(n \doteq x \times y \Rightarrow (x \doteq 1 \land y \doteq n) \lor (x \doteq n \land y \doteq 1))$

C.1 Com toda a linha incidem, pelo menos, 2 pontos:
$Lx$: $x$ é linha
$Px$: $x$ é Ponto
$Ix$: $x$ incide com $y$

$\forall x\,(Lx \to \exists y \exists z\,(Py \land Pz) \land Ixy \land Ixz)$
$(\land \neg y \doteq z)$

C.2 Por dois pontos passa, pelo menos, uma linha:
$\forall x \forall y\,(Px \land Py \land (\neg x \doteq y) \to \exists z\,(Lz \land xIz \land yIz))$

C.3 Por dois pontos não passa mais que uma linha:

$\forall x \forall y\,[(Px \land Py \land (\neg x \doteq y) \to \forall z \forall w\,((Lz \land Lw \land I_{xz} \land Iyz \land Ixw \land Iyw) \Rightarrow z \doteq w$

C.4 Quaisquer duas linhas tem um ponto em comum:

$\forall x \forall y\,(Lx \land Ly \land (\neg x \doteq y) \to \exists z\,(Pz \land Ixz \land Iyz))$

C.5 Duas linhas tem, quanto muito, 1 ponto em comum:
$\forall x \forall y\,(Lx \land Ly \land (\neg x \doteq y) \to (\exists z \exists w\,(Pz \land Pw \land Ixz \land Iyz \land Ixw \land Iyw) \Rightarrow w \doteq z))$

4. Simbolize ao nível quantificacional, fornecendo ao mesmo tempo uma interpretação conveniente:

a) Todo o leão é feroz. Alguns leões não bebem água. Portanto, alguns animais ferozes não bebem água. [domínio: animais]

$Lx$: x é leão
$Bx$: x bebe água
$Fx$: x é feroz

$$\begin{array}{l} \forall x (Lx \rightarrow Fx) \\ \exists x (Lx \rightarrow \neg Bx) \\ \hline \exists x (Fx \rightarrow \neg Bx) \end{array}$$

b) Todos os britanicos, excepto os escoceses, são fleumáticos. Ricardo Coração de Leão é britanico, mas não é fleumático. Portanto, Ricardo Coração de Leão é escocês. [domínio: pessoas]

$Bx$: x é britanico
$Ex$: x é Escocês
$Fx$: x é Fleumatico

$$\begin{array}{l} \forall x (Bx \wedge \neg Ex \rightarrow Fx) \\ (Br \wedge \neg Fr) \\ \hline Er \end{array}$$

r: Ricardo Coração de Leão

c) Há, quanto muito, um lógico incoerente. Frege é um lógico incoerente. Russel não é Frege. Portanto, Russel é um lógico coerente [use =] [domínio: —]

$Lx$: x é lógico
$Ix$: x é incoerente

$$\begin{array}{l} \exists x (Lx \wedge Ix) \\ L_F \wedge I_F \\ \neg R = F \\ \hline L_R \wedge \neg I_R \end{array}$$

argumento inválido

F: Frege
R: Russel

5. Simbolize ao nível quantificacional, tendo em conta as seguintes interpretações:

a) Domínio: todas as coisas
$Mx$: x é um problema matemático
$Lx$: x é um problema lógico
$Sx$: x é solúvel
$Fxy$: x é mais fácil de resolver do que y

1. Existem problemas matemáticos insolúveis: $\exists x (Mx \wedge \neg Sx)$

2. Nenhum problema lógico é insolúvel: $\forall x (Lx \rightarrow Sx)$ ou $\neg \exists x (Lx \wedge \neg Sx)$

3. Os problemas matemáticos são os mais fáceis de resolver do que os problemas lógicos: $\forall x \forall y (Mx \wedge Ly \rightarrow Fxy)$

4. Alguns problemas lógicos são mais fáceis de resolver do que outros problemas lógicos: $\exists x \exists y (Lx \wedge Ly \rightarrow Fxy)$

b) Domínio: Tudo
$Px$: x é uma Pessoa
$Gxy$: x compreende y
a: Alice no País das maravilhas
b: Principia Mathematica
c: Lógica e Aritmética

Scanned by CamScanner

1. Quem compreende Alice no P.M ou Principia Mathematica compreende lógica e Aritmética: $\forall x (Px \wedge (Cxa \vee Cxb) \to Cxc)$

2. Ninguém compreende tudo: $\neg \exists x (Px \wedge (\forall y (Cxy)))$

3. Ninguém compreende nada: $\neg \exists x (Px \wedge (\neg \exists y (Cxy)))$

4. Somente quem compreende Principia Mathematica compreende lógica e aritmética: $\forall x ((Px \wedge Cxb) \to Cxc)$

c) Dominio: Tudo
$Px$: $x$ é uma Pessoa
$Dx$: $x$ é dinheiro
$Rxy$: $x$ possui (ou tem) $y$
$b$: Bill Gates

1. existem pessoas sem dinheiro nenhum: $\exists x (Px \to \neg \exists y (Dy \wedge Rxy))$

2. Bill tem algum dinheiro, mas ñ tem o dinheiro todo que há: $\exists x (Dx \wedge Rbx \wedge (\neg \exists y (Dy \wedge \neg Rby)))$

3. Toda a gente tem algum dinheiro, mas não tem o dinheiro todo que há: $\exists y \forall x [(Px \wedge Dy \wedge Rxy) \wedge \neg \exists z (Px \wedge Dz \wedge Rxz)]$

4. $\forall x (Px \wedge \forall y (Dy \to Rxy) \to \forall z Rxz)$

Toda a gente que tenha todo o dinheiro tem tudo.

Quem tem todo o dinheiro tem tudo

$\boxed{\phi, \phi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \theta}$

| | |
|---|---|
| 1. $\phi$ | H |
| 2. $\phi \to \psi$ | H |
| 3. $\psi \to \theta$ | H |
| 4. $\psi$ | $1,2, \to^-$ |
| 5. $\theta$ | $4,3, \to^-$ |

$\boxed{\phi \to \psi, \neg \psi \vdash \neg \phi}$

| | |
|---|---|
| 1. $\phi \to \psi$ | H |
| 2. $\neg \psi$ | [H] |
| 3. $\phi$ | [H] |
| 4. $\psi$ | $3,1, \to^-$ |
| 5. $\psi \wedge \neg \psi$ | $4,2, \wedge^+$ |
| 6. $\neg \phi$ | $3, 3\text{-}5, \neg^+$ |

$\boxed{\phi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \phi \to \theta}$

| | |
|---|---|
| 1. $\phi \to \psi$ | H |
| 2. $\psi \to \theta$ | H |
| 3. $\phi$ | [H] |
| 4. $\psi$ | $3,1, \to^-$ |
| 5. $\theta$ | $4,2, \to^-$ |
| 6. $\phi \to \theta$ | $3, 3\text{-}5, \to^+$ |

$\boxed{(\phi \to \psi) \to [(\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta)]}$

| | |
|---|---|
| 1. $\phi \to \psi$ | H |
| 2. $\phi$ | [H] |
| 3. $\psi$ | $2,1, \to^-$ |
| 4. $\theta$ | [H] |
| 5. $\psi \to \theta$ | $4; 3\text{-}4, \to^+$ |
| 6. $\phi \to \theta$ | $2; 2\text{-}4, \to^+$ |
| 7. $(\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta)$ | $5\text{-}6, \to^+$ |

$\boxed{\phi \vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi$ | H |
| 2. | $\neg\phi \wedge \neg\phi$ | [H] |
| 3. | $\neg\phi$ | $2, \wedge^-$ |
| 4. | $\phi \wedge \neg\phi$ | $1, 3, \wedge^+$ |
| 5. | $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ | $2, 2\text{-}4, \neg^+$ |

$\boxed{\phi \vdash (\neg\neg\phi)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi$ | H |
| 2. | $\neg\phi$ | [H] |
| 3. | $\phi \wedge \neg\phi$ | $1, 2, \wedge^+$ |
| 4. | $\neg\neg\phi$ | $2, 3, \neg^+$ |

$\boxed{(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta) \vdash \phi \vee (\psi \wedge \theta)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta)$ | H |
| 2. | $\phi \vee \psi$ | $1, \wedge^-$ |
| 3. | $\phi \vee \theta$ | $1, \wedge^-$ |
| 4. | $\phi$ | $H_1$ |
| 5. | $\phi \vee (\psi \wedge \theta)$ | $4, \vee^+$ |
| 6. | $\psi$ | $H_2$ |
| 7. | $\phi$ | $H_{21}$ |
| 8. | $\phi \vee (\psi \wedge \theta)$ | $7, \vee^+$ |
| 9. | $\theta$ | $H_{22}$ |
| 10. | $\psi \wedge \theta$ | $6, 9, \wedge^+$ |
| 11. | $\phi \wedge (\psi \wedge \theta)$ | $10, \vee^+$ |
| 12. | $\phi \vee (\psi \wedge \theta)$ | $6, 7\text{-}8, 9\text{-}10, \vee^-$ |
| 13. | $\phi \vee (\psi \wedge \theta)$ | $3, 4\text{-}5, 6\text{-}12, \vee^-$ |

$\boxed{(\phi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi \rightarrow \psi$ | H |
| 2. | $\neg\psi$ | $[H]_7$ |
| 3. | $\phi$ | $[H]_6$ |
| 4. | $\psi$ | $3, 4, \rightarrow^-$ |
| 5. | $\psi \wedge \neg\psi$ | $4\text{-}2, \wedge^+$ |
| 6. | $\neg\phi$ | $3, 3\text{-}5, \neg^+$ |
| 7. | $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$ | $2, 2\text{-}6, \rightarrow^+$ |

$\boxed{\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi \vee \psi$ | H |
| 2. | $\phi$ | $H_1$ |
| 3. | $\psi \vee \phi$ | $2, \vee^+$ |
| 4. | $\psi$ | $H_2$ |
| 5. | $\psi \vee \phi$ | $4, \vee^+$ |
| 6. | $\psi \vee \phi$ | $1, 2\text{-}3, 4\text{-}5, \vee^-$ |

$\boxed{\phi \leftrightarrow \psi, \psi \leftrightarrow \theta \vdash \phi \leftrightarrow \theta}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi \leftrightarrow \psi$ | H |
| 2. | $\phi \leftrightarrow \theta$ | H |
| 3. | $\phi \rightarrow \psi$ | $1, \leftrightarrow^-$ |
| 4. | $\psi \leftrightarrow \theta$ | $2, \leftrightarrow^-$ |
| 5. | $\phi \rightarrow \theta$ | $3, 4, (9)$ |
| 6. | $\theta \rightarrow \psi$ | $2, \leftrightarrow^-$ |
| 7. | $\psi \rightarrow \phi$ | $1, \leftrightarrow^-$ |
| 8. | $\theta \rightarrow \phi$ | $6, 7 (9)$ |

Scanned by CamScanner

## Exercícios

1. Obter fórmulas lógicas equivalentes às alíneas na forma FND e FNC

a) $(p \leftrightarrow q)$;

b) $(p \to (\neg q \vee r))$;

c) $p \to (q \to (r \to r))$;

d) $p \wedge (\neg q \vee r)$;

e) $p \vee (q \wedge \neg(r \wedge s))$;

2. Determinar equivalentes mais simples para as fórmulas

a) $(p \to q) \wedge p$;

b) $(p \to q) \vee (\neg p)$;

c) $(p \to q) \to q$;

d) $p \to (p \wedge q)$;

e) $(p \wedge q) \vee p$

3. Aplicar o algoritmo ~~Beth~~ Horn para testas a formulas de Horn e dizer se são compatíveis ou não.

a) $p \wedge (q \vee (\neg p)) \wedge ((\neg q) \vee r)$;

b) $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$;

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$;

4. Construa derivações à Beth de diversas leis estabelecidas no sistema DN

(9'') $(\phi \to \chi) \to ((\chi \to \theta) \to (\phi \to \theta))$ ✓

(10) $(\phi \wedge \phi) \to \phi$ ✓

(11) $\phi \to (\chi \to (\phi \wedge \chi))$ ✓

(12) $\neg\neg\phi \to \phi$ ✓

(13) $\phi \to ((\phi \to \chi) \to \chi)$ ✓

(21) $(\phi \to (\chi \to \theta)) \leftrightarrow ((\phi \vee \chi) \wedge (\phi \vee \theta))$ ✓

(41) $\phi \vee \neg\phi$ ✓

(46) $\neg(\phi \wedge \chi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\chi)$ ✓

(47) 1. $\neg(\phi \vee \chi) \leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\chi$ ✓

2. $\not\models (\phi \wedge \chi) \vee (\phi \wedge \neg\chi)$ ✓

3. $\not\models (\chi \to \theta) \to ((\phi \vee \chi) \to \theta)$

Resolução 4. (9°) $F[(\emptyset \to \psi) \to ((\chi \to \theta) \to (\emptyset \to \theta))]$

$V(\emptyset \to \chi)$

$F((\psi \to \theta) \to (\emptyset \to \theta))$

$V(\psi \to \theta)$

$F(\emptyset \to \theta)$

$V(\emptyset)$

$F(\theta)$

$F(\emptyset)$ ⊗ | $V(\chi)$

$F(\chi)$ ⊗ | $V(\theta)$ ⊗

⊗

como todos os ramos são contradições então é impossível ser Falsa. Logo será uma tautologia

(10) $F[(\emptyset \wedge \emptyset) \to \emptyset]$

$V(\emptyset \wedge \emptyset)$

$F(\emptyset)$

$F(\emptyset)$ | $V(\emptyset)$ ⊗

⊗

R: ______

(11) $F[\emptyset \to (\chi \to (\emptyset \wedge \psi))]$

$V(\emptyset)$

$F(\chi \to (\emptyset \wedge \psi))$

$V(\chi)$

$F(\emptyset \wedge \chi)$ ⊗

$F(\emptyset)$ | $F(\psi)$

⊗

R: tautologia

(12) $F[\neg\neg\emptyset \to \emptyset]$

$V(\neg\neg\emptyset)$ ⊗

$F(\emptyset)$

R: tautologia

(13) $F[\emptyset \to ((\emptyset \to \chi) \to \chi)]$

$V(\emptyset)$

$F[((\emptyset \to \chi) \to \chi)]$

$V(\emptyset \to \chi)$

$F(\chi)$ ⊗

$F(\emptyset)$ | $V(\chi)$

⊗

R. tautologia

(21) $F[(\emptyset \to (\chi \to \theta)) \leftrightarrow ((\emptyset \vee \chi) \wedge (\emptyset \vee \theta))]$

$V(\emptyset \to (\psi \to \theta))$ | $F(\emptyset \to (\chi \to \theta))$

$F((\emptyset \vee \psi) \wedge (\emptyset \vee \theta))$ | $V((\emptyset \vee \chi) \wedge (\emptyset \vee \theta))$

$F(\emptyset \vee \chi)$ | $F(\emptyset \vee \theta)$ | $V(\emptyset \vee \psi)$

$F(\emptyset)$ | $F(\emptyset)$ | $V(\emptyset \vee \theta)$

$F(\psi)$ | $F(\theta)$ ⊗ | $V(\emptyset)$ $V(\theta)$

$F(\emptyset)$ $V(\chi \to \theta)$ | $F(\emptyset)$ $V(\chi \to \theta)$ | ⊗ $V(\emptyset)$ $V(\emptyset)$

$F(\chi)$ $V(\theta)$ | $F(\psi)$ $V(\theta)$ | $V(\psi)$ $V(\psi)$

R: não é tautotigia

⊗ ⊗

R. Tautologia

incorreto de acordo com a resolução do professor

(21) $F[(\emptyset \vee (\chi \wedge \theta)) \leftrightarrow ((\emptyset \vee \chi) \wedge (\emptyset \vee \theta))]$

$V[(\emptyset \vee (\chi \wedge \theta))]$ $\quad$ $F[\emptyset \vee (\chi \wedge \theta)]$

$F[(\emptyset \vee \chi) \wedge (\emptyset \vee \theta)]$ $\quad$ $V[(\emptyset \vee \chi) \wedge (\emptyset \vee \theta)]$

$V[\emptyset]$ $\quad$ $V(\chi \wedge \theta)$ $\quad$ $F(\emptyset)$

$F(\emptyset \vee \chi)$ $\quad$ $F(\emptyset \vee \theta)$ $\quad$ $V(\chi)$ $\quad$ $F(\chi \wedge \theta)$

$F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\emptyset)$ $\quad$ $V(\theta)$ $\quad$ $V(\emptyset \vee \chi)$

$F(\chi)$ $\quad$ $F(\theta)$ $\quad$ $V(\emptyset \vee \theta)$

$F(\chi)$ $\quad$ $F(\theta)$

$V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\theta)$ $\quad$ $V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\theta)$

R: tautologia

(41) $F(\emptyset \vee \neg\emptyset)$

$F(\emptyset)$

$F(\neg\emptyset)$

$V(\emptyset)$

R: tautologia

(46) $F[\neg(\emptyset \wedge \chi) \leftrightarrow (\neg\emptyset \vee \neg\chi)]$

$F[\neg(\emptyset \wedge \chi) \leftrightarrow \neg(\emptyset \wedge \chi)]$

$V[\neg(\emptyset \wedge \chi)]$ $\quad$ $F[\neg(\emptyset \wedge \chi)]$

$F[\neg(\emptyset \wedge \chi)]$ $\quad$ $V[\neg(\emptyset \wedge \chi)]$

$F(\emptyset \wedge \chi)$ $\quad$ $V(\emptyset \wedge \chi)$

$F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\chi)$ $\quad$ $V(\emptyset)$

$V(\emptyset \wedge \chi)$ $\quad$ $V(\emptyset \wedge \chi)$ $\quad$ $V(\chi)$

$V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\emptyset)$ $\quad$ $F(\emptyset \wedge \chi)$

$V(\chi)$ $\quad$ $V(\chi)$ $\quad$ $F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\chi)$

R: tautologia

(47) 1. $F[\neg(\emptyset \vee \chi) \leftrightarrow \neg\emptyset \wedge \neg\chi]$

$F[\neg(\emptyset \vee \chi) \leftrightarrow \neg(\emptyset \vee \chi)]$

$V[\neg(\emptyset \vee \chi)]$ $\quad$ $F[\neg(\emptyset \vee \chi)]$

$F[\neg(\emptyset \vee \chi)]$ $\quad$ $V[\neg(\emptyset \vee \chi)]$

$F(\emptyset \vee \chi)$ $\quad$ $V(\emptyset \vee \chi)$

$V(\emptyset \vee \chi)$ $\quad$ $F(\emptyset \vee \chi)$

$F(\emptyset)$ $\quad$ $V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\chi)$

$F(\chi)$ $\quad$ $F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\emptyset)$

$V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\chi)$ $\quad$ $F(\chi)$ $\quad$ $F(\chi)$

R: tautologia

(47) 2 $F[(\emptyset \wedge \chi) \vee (\emptyset \wedge \neg\chi)]$

$F(\emptyset \wedge \chi)$

$F(\emptyset \wedge \neg\chi)$

$F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\chi)$

$F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\neg\chi)$ $\quad$ $F(\emptyset)$ $\quad$ $F(\neg\chi)$

$V(\chi)$ $\quad$ $V(\chi)$

R: Não é uma tautologia

| $\emptyset$ | $\chi$ |
|---|---|
| 1 | 0 |

(47) 3 $F[(\chi \to \theta) \to ((\emptyset \vee \chi) \to \theta)]$

$V(\chi \to \theta)$

$F((\emptyset \vee \chi) \to \theta)$

$V(\emptyset \vee \chi)$

$F(\theta)$

$F(\chi)$ $\quad$ $V(\theta)$

$V(\emptyset)$ $\quad$ $V(\chi)$

R: Não é uma tautologia

| $\emptyset$ | $\chi$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |

Scanned by CamScanner

## Resolução 1.

a) $P \to q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\boxed{1}$ |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | $\boxed{1}$ |

$\square$ FND $= \sim[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

$\circ$ FNC $= \sim[(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)]$

b) $p \to (\neg q \vee r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q \vee r$ | | | $p \to (\neg q \vee r)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\boxed{0}$ | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | $\boxed{10}$ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\boxed{10}$ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\boxed{10}$ | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\circ$ FND $\sim[(p \wedge q \wedge r) \vee$
$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee$
$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$
$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)]$

$\square$ FNC $\sim[(p \vee q \vee r) \wedge$
$(p \vee q \vee \neg r) \wedge$
$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge$
$(\neg p \vee \neg q \vee r)]$

c) $p \to (q \to (r \to r))$

---

2. a) $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ $\quad \sim((\neg p \vee q) \wedge p) \sim (p \wedge q)$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $p \to q \wedge p$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$((p \wedge q) \vee p) \quad \sim (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \vee p$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Scanned by CamScanner

$g(x,y) = exp(xy)$ símbolo de função binária

$\boxed{gxy}$ $< 2(x) = 2x$

termos $\quad$ $us(exp\ xy)$ $g(x) = e^x$

$x < y$ $\quad$ $2x$ $\quad$ $exp(x)$

$2x < y$

$e^x < y$ $\quad$ $e^x < cos\ y$

$\boxed{2x = xy}$

$Pxy = P(x,y) = x + y$ - binário + $xy$

$P(2,3) = 2 + 3 = 5$

$c(2x)y$

$\boxed{2x < y}$ $\wedge$ $e^x = 3y$

$2.3 < 4$

Falso $6 < 4$ $\quad$ $\neg(2x<y)$

(102) $\forall x(Px \to Qx)$, $\neg Qa \vdash \neg Pa$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x\ (Px \to Qx)$ | H |
| 2. | $\neg Qa$ | H |
| 3. | $Pa \to Qa$ | 1, $\forall$ |
| 4. | $Pa$ | [H], 2 |
| 5. | $Qa$ | 3, 4, $\to^-$ |
| 6. | $Qa \wedge \neg Qa$ | 2, 5, $\wedge^+$ |
| 7. | $\neg Pa$ | 4-6, $\neg^+$ |

dedução natural lógica de Predicados

| $\frac{\forall x Px}{P(t)}$ $\forall^-$ | $\frac{P(a)}{\forall x Px}$ $\forall^+$ | a não depende de hipóteses em que a corr |
|---|---|---|
| $\exists x Px$ ; Pa H ; ⋮ ; $\theta$ ; $\frac{}{\theta}$ $\exists^-$ | $\frac{Pa}{\exists x Px}$ $\exists^+$ | $\frac{\neg \forall x \emptyset(x)}{\exists x \neg \emptyset(x)}$ (DM₁) $\frac{\neg \exists x \emptyset(x)}{\forall x \neg \emptyset(x)}$ (DM₂) ; 1) $\forall x Px \dashv\vdash \neg \exists x \neg Px$ ; 2) $\exists x Px \dashv\vdash \neg \forall x \neg Px$ |

a ñ pode ocorrer em $\theta$

leis importantes => mudança de variáveis mudas, permutabilidade de quantificadores da mesma espécie.

(110) $\forall x Px \dashv\vdash \forall y Py$

$\vdash$
1. $\forall x Px$ H
2. Pa $\forall^-$
3. $\forall y Py$ 2, $\forall^+$

(111) $\exists x Px \dashv\vdash \exists y Py$

$\vdash$
1. $\exists x Px$ H
2. Pa [H]
3. $\exists y Py$ 2, $\exists^+$
4. $\exists y Py$ 1-3, $\exists^-$

(112) $\forall xy Qxy \dashv\vdash \forall yx Qxy$

$\vdash$ 1. $\forall x(\forall y Qxy)$ H
2. $\forall y (Qay)$ 1, $\forall^-$
3. Qab 2, $\forall^-$
4. $\forall x Qxb$ 3, $\forall^+$
5. $\forall y(\forall x Qxy)$ 4, $\forall^+$

(113) $\exists xy Qxy \dashv\vdash \exists yx Qxy$

$\vdash$ 1. $\exists x(\exists y Qxy)$ H
2. $\exists y Qay$ [H], 7
3. Qab [H], 6
4. $\exists x Qxb$ 3, $\exists^+$
5. $\exists y(\exists x Qxy)$ 4, $\exists^+$
6. $\exists y \exists x Qxy$ 2-5, $\exists^-$
7. $\exists y(\exists x Qxy)$ 1-6, $\exists^-$

(114) $\exists x \dashv\vdash \exists xy(Px \wedge Py)$

$\vdash$ 1. $\exists x Px$ H
2. P(a) [H], 8
3. P(b) [H], 7
4. $Pa \wedge Pb$ 2, 3, $\wedge^+$
5. $\exists y (Pa \wedge Pb)$ 4, $\exists^+$
6. $\exists x \exists y (Px \wedge Py)$ 5, $\exists^+$
7. $\exists x \exists y (Px \wedge Py)$ 3-6, $\exists^-$
8. $\exists x \exists y (Px \wedge Py)$ 1-7, $\exists^-$

$\dashv$ 1. $\exists x(\exists y (Px \wedge Py))$ H
2. $\exists y (Pa \wedge Py)$ [H], 7
3. $Pa \wedge Pb$ [H], 6
4. Pa 3, $\wedge^-$
5. $\exists x Px$ 4, $\exists^+$
6. $\exists x Px$ 2-5, $\exists^-$
7. $\exists x Px$ 1-6, $\exists^-$

(115) $\exists x \forall y Rxy \dashv\vdash \forall y \exists x Rxy$

$\vdash$ 1. $\exists x \forall y Rxy$ H
2. $\forall y Ray$ [H], 6
3. Rab 2, $\forall^-$
4. $\exists x Rxb$ 3, $\exists^+$
5. $\forall y \exists x Rxy$ 4, $\forall^+$
6. $\forall y \exists x Rxy$ 1-5, $\exists^-$

$\forall y \exists x Rxy \nvdash \exists x \forall y Rxy$

Para qualquer número existe um novo número menor não existe número menor do que qualquer outro ~~número~~.

(117) $\vdash$ 1. $\exists x Px$ H
2. $\forall x \neg Px$ H
3. Pa [H], 6
4. $\neg Pa$ 2, $\forall^-$
5. $\theta \wedge \neg\theta$ 3, 4, $\bot$
6. $\theta \wedge \neg\theta$ 1-5, $\exists^-$
7. $\neg(\forall x \neg Px)$ 2-6, $\neg^+$

$\dashv$ 1. $\neg\forall x \neg Px$ H
2. $\neg Pa$ H
3. $\exists x \neg Px$ 2, $\exists^+$
4. $\exists x \neg\neg Px$ DM₁
5. $\neg\neg Pb$ [H]
6. Pb 5, $\neg\neg^-$
7. $\exists x Px$ 6, $\exists^+$
8. $\exists x Px$ 4-7, $\exists^-$

## tableaux de semânticos dos quantificadores

| | |
|---|---|
| V $\forall x\,\phi(x)$<br>V $\phi(a)$<br>a sem restrição | F $\forall x\,\phi(x)$<br>F $\phi(a)$<br>a ñ pode ser utilizado |
| V $\exists x\,\phi(x)$<br>V $\phi(a)$<br>a ñ utilizado antes | F $\exists x\,\phi(x)$<br>F $\phi(a)$<br>a sem restrição |

3.29 h) $F(\forall x\,\neg\phi(x) \to \neg\exists x\,\phi(x))$

$V\ \forall x\,\neg\phi(x)$
$F\ \neg\exists x\,\phi(x)$
$V\ \exists x\,\phi(x)$
$V\ \phi(a)$
$V\ \neg\phi(a)$ ⊗
$F\ \phi(a)$

o ramo unico é contraditório: F(h) é impossivel então V(h), ou ainda h) é uma tautologia

Derivação à Beth

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $V(\neg\phi)$<br>$F(\phi)$ | $F(\neg\phi)$<br>$V(\phi)$ | $V(\psi\wedge\theta)$<br>$V(\psi)$<br>$V(\theta)$ | $F(\psi\wedge\theta)$<br>$F(\psi)$ $F(\psi)$ | $V(\psi\vee\theta)$<br>$V(\psi)$ $V(\theta)$ | $F(\psi\vee\theta)$<br>$F(\psi)$ $F(\theta)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $V(\psi\leftrightarrow\theta)$<br>$V(\psi)$ $F(\psi)$<br>$V(\theta)$ $F(\theta)$ | $F(\psi\leftrightarrow\theta)$<br>$V(\psi)$ $F(\psi)$<br>$F(\theta)$ $V(\theta)$ | $V(\psi\to\theta)$<br>$F(\psi)$ $V(\theta)$ | $F(\psi\to\theta)$<br>$V(\psi)$<br>$F(\theta)$ |

i) $F(\exists x\,\neg\phi(x) \to \neg\forall x\,\phi(x))$

$V(\exists x\,\neg\phi(x))$
$F(\neg\forall x\,\phi(x))$
$V(\forall x\,\phi(x))$
$V(\neg\phi(a))$
$F(\phi(a))$
$V(\phi(a))$ ⊗

contradição.
O ramo unico é contraditorio logo F(i) é impossivel i) é tautologia

j) $\exists x\,(\phi(x)\to\theta) \to (\forall x\,\phi(x)\to\theta)]$

$V[\exists x\,(\phi(x)\to\theta)]$
$F[\forall x\,\phi(x)\to\theta]$
$V[\phi(a)\to\theta]$
$V[\forall x\,\phi(x)]$
$F(\theta)$
$V[\phi(a)]$
⊗ $F[\phi(a)]$    $V(\theta)$ ⊗

contradição
justificação é igual

b) $F[\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x))]$

$V[\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x))$ $\quad$ $F[\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x))]$

$F[\forall x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x)]$ $\quad$ $V[\forall x(\phi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))]$

$F\ \forall x\phi(x)$ $\quad$ $F\ \forall x\psi(x)$ $\quad$ $V[\forall x\phi(x)]$

$F\ \phi(a)$ $\quad$ $F(\psi(a))$ $\quad$ $V[\forall x\psi(a)]$

$V[\phi(a) \wedge \psi(a)]$ $\quad$ $V[\phi(a) \wedge \psi(a)]$ $\quad$ $F(\phi(a) \wedge \psi(a))$

$V(\phi(a))$ $\quad$ $V(\phi(a))$ $\quad$ $F(\phi(a))$ $\quad$ $F(\psi(a))$

$V(\psi(a))$ $\quad$ $V[\psi(a)]$ $\quad$ $V(\phi(a))$ $\quad$ $V(\psi(a))$

todos os ramos contraditórios.
b) é tautologia

ver 3.2 Investigue se são tautologias

(a'). $(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$

(b'). $(\exists x Px \to \exists x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$

(e'). $(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$

(p'). $\forall x(Px \vee Qx) \to \forall x Px \vee \forall x Qx$

(a') $F[\forall x Px \to \forall x Qx \to \forall x(Px \to Qx)]$

$V[\forall x Px \to \forall x Qx]$

$F[\forall x(Px \to Qx)]$

$F(Pa \to Qa)$

$V(Pa)$

$F(Qa)$

$F[\forall x Px]$ $\quad$ $V[\forall x Qx]$

$F[Pb]$ $\quad$ $V[Qa]$

como um ramo ñ tem contradição então a' não é tautologia

$\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ Linguagem Gotica

$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$

7.1 Metateorema da validade e completude semântica

Exemplos:

char * f = (int) "123"

f = 123

no exemplo · $P$ é símbolo de relação binário
· $f$ é símbolo de função binário
· $c$ é símbolo de constante

· $M$ é domínio, $M \neq \emptyset$
· $P^{m} \subseteq M \times M$
· $f^{m}: M \times M \to M$
· $c^{m}: \in M$ fixo

$\mathcal{M} \models \phi$ "$\mathcal{M}$ satisfaz a fórmula $\phi$", "$\mathcal{M}$ é um modelo de $\phi$", "$\phi$ é verdade em $M$".

7.2 corolário

não existe fórmula $\phi$ tal que $\vdash \phi \wedge \neg \phi$.

Demonstração: Pelo metateorema da validade 7.1 ter-se-ia $\models \phi \wedge \neg \phi$. então para toda a estrutura adequada $\mathcal{M}$ teríamos $\mathcal{M} \models \phi$ e $\mathcal{M} \models \neg \phi$ ou ainda, $\phi$ é teorema e não é teorema ao mesmo tempo. (contradição). Então $\vdash \phi \wedge \neg \phi$ é impossível e a lógica de predicados é consistente

7.3 Metateorema da capacidade

demonstração: Seja $\Sigma$ um conjunto infinito de sentenças tal que todo o subconjunto $S$ é compatível. Pelo metateorema da validade cada subconjunto $S$ de $\Sigma$ é consistente.
Então $\Sigma$ é consistente ($\Sigma \nvdash \phi \wedge \neg \phi$)
Um número finito $\bar{S}$ de sentenças é utilizado para mostrar $\phi \wedge \neg \phi$, $S \vdash \phi \wedge \neg \phi$ implicaria $\bar{S}$ inconsistente, contradição.
Pelo metateorema da completude, $\Sigma$ é compatível.

---

3.5 a. (1) a: Alberto
j: João
$Cx$: $x$ é candidato

$\phi$: $\forall x\,(Cx \to (x \doteq a \vee x \doteq j))$
$Ix$: $x$ é idiota
$Ia \wedge Ij$
$\phi, \psi \,/\, \forall x\,(Cx \to Ix)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi$ | H |
| 2. | $Cs$ | H |
| 3 | $Cs \to s \doteq a \vee s \doteq j$ | 1, $\forall^-$ |
| 4. | $s \doteq a \vee s \doteq j$ | 2, 3, $\to^-$ |
| 5. | $s \doteq a$ | H |
| 6. | $\psi$ | H |
| 7. | $Ia$ | 6, $\wedge^-$ |
| 8 | $Is$ | 5, 7, $=$ |
| 9 | $s \doteq j$ | $[H_2]$ |
| 10. | $\psi$ | 6, $\wedge^-$ |
| 11. | $Ij$ | 10, $\wedge^-$ |
| 12. | $Is$ | 9, 11, $=$ |
| 13 | $Is$ | 4, 5-8, 9-12, $\vee^-$ |
| 14. | $Cs \to Is$ | 2, 8, $\to^+$ |
| 15 | $\forall x\,(Cx \to Ix)$ | 14, $\forall^+$ |

(2) Paradoxo do Barbeiro

$Bx$: $x$ é barbeiro

$Fxy$: $x$ faz a barba a $y$

$\phi: \forall x \, (Bx \rightarrow \forall y \, (\neg Fyy \rightarrow Fxy))$

$\psi: \forall x \, (Bx \rightarrow \forall y \, (Fyy \rightarrow \neg Fxy)$

$\theta: \neg \exists x \, Bx$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi$ | H |
| 2. | $\psi$ | H |
| 3. | $\exists x \, Bx$ | H |
| 4. | $Bb$ | H |
| 5. | $Fbb \vee \neg Fbb$ | H |
| 6. | $\neg Fbb$ | H |
| 7. | $Bb \rightarrow (\forall y \, \neg Fyy \rightarrow Fby)$ | $\phi$, $\forall^-$ |
| 8. | $\forall y \, (\neg Fyy \rightarrow Fby)$ | 7, $\forall^-$ |
| 9. | $\neg Fbb \rightarrow Fbb$ | 8, $\forall^-$ |
| 10. | $Fbb$ | 6, 9, $\rightarrow^-$ |
| 11. | $Fbb \wedge \neg Fbb$ | 6, 10, $\wedge^+$ |
| 12. | $Fbb$ | |
| 13. | $Bb \rightarrow \forall y \, (Fyy \rightarrow \neg Fby)$ | $\psi$, $\forall^-$ |
| 14. | $\forall y \, (Fyy \rightarrow \neg Fby)$ | 4, 13, $\forall^-$ |
| 15. | $Fbb \rightarrow \neg Fbb$ | 14, $\forall$ |
| 16. | $\neg Fbb$ | 12, 15, $\rightarrow^-$ |
| 17. | $Fbb \wedge \neg Fbb$ | 12, 16 |
| 18. | $Fbb \wedge \neg Fbb$ | 5, 6 - 11, 12, 17 |
| 19. | $\theta \wedge \neg \phi$ | 18, I |
| 20. | $\neg \exists x \, Bx$ | 3, 19, $\neg^+$ |

3.15

teoria: conjunto de sentenças

Uma teoria é completa se para todas as sentenças $\phi$, $T \vdash \phi$ ou $T \vdash \neg\phi$
T compatível. Existe um modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \tau$ para todo $\tau \in T$

seja $\mathcal{M}$ um modelo então $Tr(\mathcal{M}) = \{\sigma \mid \mathcal{M} \models \sigma\}$

Diz-se que dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são elementarmente equivalentes se para toda a sentença $\sigma$, $\mathcal{M} \models \sigma$ se e só se $\mathcal{M}' \models \sigma$

mostramos (1) => (2)

sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ dois modelos da teoria T. seja $\phi \in T$ uma sentença, tal que $\mathcal{M} \models \phi$. temos que mostrar que $\mathcal{M}' \models \phi$. sabemos que $T \vdash \phi$ ou $T \vdash \neg\phi$. Suponhamos primeiro que $T \vdash \phi$ ou $\mathcal{M}' \models T$. Então $\mathcal{M}' \models \phi$ pela metateorema de validade no segundo caso $T \vdash \neg\phi$ Então $\mathcal{M}' \models \neg\phi$. Então não $\mathcal{M} \models \phi$. condição Então $\mathcal{M}' \models \phi$ Quod erat demonstrandum.

mostramos (2) => (3)

Pela compatibilidade de T existe um modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \sigma$ para todo $\sigma \in T$. Temos que mostrar que $T = Tr(\mathcal{M})$

$T \subseteq Tr(\mathcal{M})$: seja $\tau \in T$. Então $\mathcal{M} \models \tau$, então $\tau \in Tr(\mathcal{M})$
$Tr(\mathcal{M}) \subseteq T$: seja $\sigma$ uma sentença tal que $\mathcal{M} \models \sigma$. seja $\mathcal{M}'$ um outro modelo de T. Então $\mathcal{M}' \models \sigma$. Então $T \models \sigma$, pela definição de consequência lógica. Pelo metateorema de comportamento (completude?) $T \vdash \sigma$. Então $\sigma \in T$. Combinando $T = Tr(\mathcal{M})$

mostramos (3) => (1)

seja $T = Tr(\mathcal{M})$ para algum modelo $\mathcal{M}$ seja $\phi$ uma sentença. Então $\mathcal{M} \models \phi$ ou $\mathcal{M} \models \neg\phi$, porque $\mathcal{M} \models T$ pelo metateorema de completude, $T \vdash \phi$ ou $T \vdash \neg\phi$, então T é completa.

$\exists_y \forall_x (f_x \doteq y) \vdash \forall_x \exists y (f_x \doteq y)$

1. $\exists y [\forall_x (f_x \doteq y)]$ H

2. $\forall_x (f_x \doteq a)$ [H], 5

3. $f_b \doteq a$ 2, $\forall^-$

4. $\exists y\ f_b \doteq y$ 3, $\exists^+$

5. $\exists y\ f_b \doteq y$ 1-4, $\exists^-$

6. $\forall_x \exists y\ f(x \doteq y)$ 5, $\forall^+$

# Lógica Computacional

Universidade de Évora, ano 2018, 6 de Abril.

## Frequência 1

**Duração:** 2 horas

**Exercício 1** *Sejam $\phi, \psi, \theta$ proposições.*

1. *Investigue se*
$$((\phi \to \psi) \to \theta) \longleftrightarrow (\neg\theta \to (\phi \wedge \neg\psi))$$
*é uma tautologia.*

2. *Investigue se*
$$\phi \to \theta, \psi \vee \theta \models \phi \vee \psi$$

**Exercício 2** *Utilize os símbolos seguintes:*

| | | |
|---|---|---|
| $Cx$ | : | *x é caminho* |
| $Lx$ | : | *x é localidade* |
| $xVy$ | | *x vai para y* |
| $r$ | | *Roma* |

*Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:*

*Todos os caminhos vão para Roma.*
*Alguns caminhos não vão para Roma.*
*Existem caminhos que ligam localidades.*

*Interprete:*
$$\exists x(Cx \wedge \forall y(Ly \to \neg xVy)).$$

**Exercício 3** 1. *Dê o enunciado do Metateorema de Validade da Lógica proposicional.*

2. *Que é uma valoração booleana?*

3. *Sejam $\phi$ e $\psi$ fórmulas da Lógica proposicional. Suponha-se que $\{\phi, \neg\psi\}$ é incompatível. Mostre que $\phi \models \psi$.*

4. *Sejam $\phi$, $\psi$ e $\theta$ fórmulas da Lógica proposicional. Suponha-se que $\{\phi, \psi\}$ é consistente e que $\phi, \psi \vdash \theta$. Mostre que $\{\phi, \psi, \theta\}$ é consistente.*

**Exercício 4** *Sejam $\phi, \psi$ e $\theta$ proposições. Mostre que*

$$\phi \wedge \neg \psi \vdash \neg(\phi \rightarrow \psi)$$

$$\vdash (\neg\neg\phi) \leftrightarrow \phi$$

$$(\phi \rightarrow \psi) \vee \neg\theta \vdash \theta \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$$

**Esquema de deduções na Dedução Natural:**

$\wedge^+$ : $\phi, \psi / \phi \wedge \psi$

$\wedge^-$ : $\phi \wedge \psi / \phi$ e $\phi \wedge \psi / \psi$

$\neg^+$ : $\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi / \neg\phi$

$\neg\neg^-$ : $\neg\neg\phi / \phi$

$\rightarrow^+$ : $\phi[H] \cdots \psi / \phi \rightarrow \psi$

$\rightarrow^-$ : $\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$

$\vee^+$ : $\phi / \phi \vee \psi$ e $\psi / \phi \vee \psi$

$\vee^-$ : $\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta / \theta$

$\leftrightarrow^+$ : $\phi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \phi / \phi \leftrightarrow \psi$

$\leftrightarrow^-$ : $\phi \leftrightarrow \psi / \phi \rightarrow \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi / \psi \rightarrow \phi$

# Lógica Computacional

Universidade de Évora, 6 de Junho de 2018.

## Exame normal

**Duração:** 3 horas.

*Justifique as respostas.*

**Exercício 1** *Sejam $\phi, \psi$ e $\theta$ proposições. Mostre que*

$$(\phi \vee \psi) \to \theta \models (\phi \to \theta) \vee (\psi \to \theta).$$

*As fórmulas $(\phi \vee \psi) \to \theta$ e $(\phi \to \theta) \vee (\psi \to \theta)$ são logicamente equivalentes?*

**Exercício 2** *Utilizando Tableaux Semânticos, investigue se*

$$(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$$

$$\forall x(Px \vee Qx) \to (\forall x Px \vee \exists x Qx)$$

*são tautologias.*

**Exercício 3** *Seja $P$ um símbolo de relação unária e $Q$ um símbolo de relação binária. Dê um exemplo de uma estrutura adequada com domínio $\mathbb{R}$ em que $\forall x(Px \to \exists y Qxy)$ é válida.*

**Exercício 4**

1. *No âmbito da Lógica proposicional, que é um conjunto de fórmulas consistente, e que é um conjunto de fórmulas consistente maximal?*
2. *Dê um exemplo de uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva com três literais, que é incompatível.*
3. *Dê um exemplo de um termo que contém dois símbolos de função, um símbolo de constante e duas variáveis.*
4. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, seja $\mathcal{L}$ uma linguagem e $\mathfrak{M}$ uma estrutura adequada para $\mathcal{L}$. Que é $Tr(\mathfrak{M})$, i.é. a Teoria de $\mathfrak{M}$?*

**Exercício 5** *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:*

*Alguns alunos têm um portátil.*
*Um aluno com um portátil nunca tem um tablet.*
*Portáteis são mais poderosos que tablets.*
*Há portáteis que são mais poderosos que outros.*

*$Ax$: $x$ é aluno, $Px$: $x$ é portátil, $Tx$: $x$ é tablet, $Rxy$: $x$ tem $y$, $Sxy$: $x$ é mais poderoso que $y$.*

$F[(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)]$

$V[\alpha \to \neg\beta]$

$F[\neg(\alpha \wedge \beta)]$

$V[\alpha \wedge \beta]$

$V[\alpha]$

$V[\beta]$

$F[\alpha]$ $\otimes$ $\quad$ $V[\neg\beta]$ $\otimes$

$F[\beta]$

Tautologia

**Exercício 6** *Sejam $\phi$ e $\psi$ proposições, e $P$ e $Q$ predicados unários. Mostre na Dedução Natural*

$$\neg\phi \vdash \psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$$

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

$$\vdash \forall x \forall y((Rxy \wedge x \doteq y) \to Ryy).$$

$F[\forall x(Px \vee Qx) \to (\forall x Px \vee \exists x Qx)]$

$V[\forall x(Px \vee Qx)]$

$F[\forall x Px \vee \exists x Qx]$

$F[\forall x Px]$

$F[\exists x Qx]$

$F[Pa]$

$F[Qa]$

$V[\forall x Px]$ $\quad$ $V[\forall x Qx]$

$V[Pa]$ $\otimes$ $\quad$ $V[Qa]$ $\otimes$

$V[Pa \vee Qa]$

$V(Pa)$ $\quad$ $V(Qa)$

**Esquema de deduções na Dedução Natural:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\wedge^+$ | : | $\phi/\phi \wedge \psi$ | $\to^+$ | : | $\phi[H] \cdots \psi/\phi \to \psi$ |
| $\wedge^-$ | : | $\phi \wedge \psi/\phi$ e $\phi \wedge \psi/\psi$ | $\to^-$ | : | $\phi, \phi \to \psi/\psi$ |
| $\neg^+$ | : | $\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi/\neg\phi$ | $\leftrightarrow^-$ | : | $\phi \leftrightarrow \psi/\phi \to \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi/\psi \to \phi$ |
| $\neg\neg^-$ | : | $\neg\neg\phi/\phi$ | $\leftrightarrow^+$ | : | $\phi \to \psi, \psi \to \phi/\phi \leftrightarrow \psi$ |

$\vee^+$ : $\phi/\phi \vee \psi$ e $\psi/\phi \vee \psi$

$\vee^-$ : $\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta/\theta$

$\forall^+$ : $\phi(a)/\forall x\phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hipótese, nem depende de hipóteses em que $a$ ocorre; substituição em todas as ocorrências de $a$ em $\phi$.

$\forall^-$ : $\forall x\phi(x)/\phi(t)$, com $t$ termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de $x$ em $\phi(x)$.

$\exists^+$ : $\phi(t)/\exists x\phi(x)$, com $t$ termo qualquer; substituição em algumas ocorrências $t$ em $\phi$.

$\exists^-$ : $\exists x\phi(x), \phi(a)[H] \cdots \psi/\psi$, $a_0$ não ocorre em $\psi$; substituição em todas as ocorrências livres de $x$ em $\phi(x)$.

$\doteq^+$ : $t \doteq t$, com $t$ termo qualquer.

$\doteq^-$ : $t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com $t_1, t_2$ termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de $t_1$ em $\phi$.

# Lógica Computacional

Universidade de Évora, 19 de Junho de 2018.

## Exame de recurso

**Duração:** 3 horas.

*Justifique as respostas.*

**Exercise 1** *Sejam $\phi, \psi$ e $\theta$ proposições.*

1. *Investigue se* $(\phi \rightarrow \theta) \vee (\psi \rightarrow \theta)) \models (\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta)$.
2. *Investigue se* $(\phi \rightarrow \theta) \vee (\psi \rightarrow \theta)) \sim (\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta)$.

**Exercise 2** *Sejam $\phi$ e $\psi$ proposições. Deduza*

$$\phi \rightarrow \psi, \phi \rightarrow \neg\psi \vdash \neg\phi$$

$$\phi \wedge \psi \vdash \phi \leftrightarrow \psi.$$

**Exercise 3** *Sejam $\phi, \psi$ e $\theta$ proposições e $P$ e $Q$ predicados unários. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as fórmulas*

$$((\phi \vee \theta) \rightarrow (\psi \vee \theta)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$$

$$\exists x \forall y (Px \rightarrow Qy) \leftrightarrow \forall y \exists x (Px \rightarrow Qy)$$

*são uma tautologia.*

**Exercise 4** *Sejam $P$ e $Q$ predicados unários. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx) \wedge \exists x Qx \vdash \exists x(Qx \wedge \neg Px).$$

$$\forall x \forall y (x \doteq y) \rightarrow \exists x \forall y (x \doteq y).$$

**Exercise 5** *Sejam $p, q$ e $r$ letras proposicionais. Obtenha uma Forma Normal Distributiva para $p \leftrightarrow (q \wedge r)$.*

**Exercise 6** *Considere a fórmula da Lógica de primeira Ordem*

$$\phi : \forall x \exists y(Axyfc \wedge \exists z(Bfxz \leftrightarrow (Acgxyz \rightarrow \forall z Bxz))).$$

*O símbolos $f$ e $g$ são símbolos de funções, os símbolos $A$ e $B$ são símbolos de relações e $c$ é um símbolo de constante.*

1. *Para que a fórmula seja bem-formada, determine a aridade $f, g, A$ e $B$.*
2. *Indique os termos que ocorrem em $\phi$.*
3. *Indique as fórmulas atómicas que ocorrem em $\phi$.*
4. *$\phi$ é uma sentênça?*

**Exercise 7** 1. *No âmbito da Lógica proposicional, que procedimento da Dedução Natural chama-se a Reductio ad Absurdum?*

explicar inconsistente

2. *Sejam $\phi, \psi$ e $\theta$ fórmulas da Lógica proposicional. Suponha-se que $\{\phi, \psi, \theta\}$ é inconsistente. Mostre que $\{\phi, \psi\} \vdash \neg\theta$.*
3. *No âmbito da Lógica de Primeira Ordem, que é Consequência Lógica?*
4. *Dê uma estrutura adequada para a linguagem $\mathcal{L} : \{P, f, c\}$ em que $P$ é um símbolo de relação ternário, $f$ é um símbolo de função unário, e $c$ é um símbolo de constante.*

**Exercise 8** *Utilize os símbolos seguintes:*

| | |
|---|---|
| $Px$ | *$x$ é Português* |
| $Gxy$ | *$x$ ganha $y$* |
| $c$ | *Campeonato Mundial de Futebol* |
| $Axy$ | *$x$ gosta de $y$* |

*Simbolize 1) − 3) na linguagem da Lógica da primeira Ordem e interprete 4) na lingua natural:*

1. *Alguns Portugueses gostam do Campeonato Mundial de Futebol.*
2. *Quem gosta do o Campeonato Mundial de Futebol gosta de o ganhar.*
3. *Todos gostam de ganhar do Campeonato Mundial de Futebol, excepto os Portugueses que não gostam deste campeonato.*
4. $\exists y(\forall x(Px \wedge Axy) \rightarrow (y \doteq c))$.

**Esquema de deduções na Dedução Natural:**

| | | |
|---|---|---|
| $\wedge^+$ | : | $\phi, \psi / \phi \wedge \psi$ |
| $\wedge^-$ | : | $\phi \wedge \psi / \phi$ e $\phi \wedge \psi / \psi$ |
| $\neg^+$ | : | $\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi / \neg\phi$ |
| $\neg\neg^-$ | : | $\neg\neg\phi / \phi$ |
| $\rightarrow^+$ | : | $\phi[H] \cdots \psi / \phi \rightarrow \psi$ |
| $\rightarrow^-$ | : | $\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$ |
| $\leftrightarrow^-$ | : | $\phi \leftrightarrow \psi / \phi \rightarrow \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi / \psi \rightarrow \phi$ |
| $\leftrightarrow^+$ | : | $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \phi / \phi \leftrightarrow \psi$ |
| $\vee^+$ | : | $\phi / \phi \vee \psi$ e $\psi / \phi \vee \psi$ |
| $\vee^-$ | : | $\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta / \theta$ |

$$\frac{\phi \quad H. \\ \vdots \\ \psi}{\phi \rightarrow \psi}$$

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \\ \psi \rightarrow \phi}{\phi \leftrightarrow \psi}$$

$\forall^+$ : $\phi(a)/\forall x\phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hipótese, nem depende de hipóteses em que $a$ ocorre; substituição em todas as ocorrências de $a$ em $\phi$.

$\forall^-$ : $\forall x\phi(x)/\phi(t)$, com $t$ termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de $x$ em $\phi(x)$.

$\exists^+$ : $\phi(t)/\exists x\phi(x)$, com $t$ termo qualquer; substituição em algumas ocorrências $t$ em $\phi$.

$\exists^-$ : $\exists x\phi(x), \phi(a)[H] \cdots \psi/\psi$, $a$ não ocorre em $\psi$; substituição em todas as ocorrências livres de $x$ em $\phi(x)$.

$\doteq^+$ : $t \doteq t$, com $t$ termo qualquer.

$\doteq^-$ : $t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com $t_1, t_2$ termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de $t_1$ em $\phi$.