Física Geral I • FIS0703

Aula 04

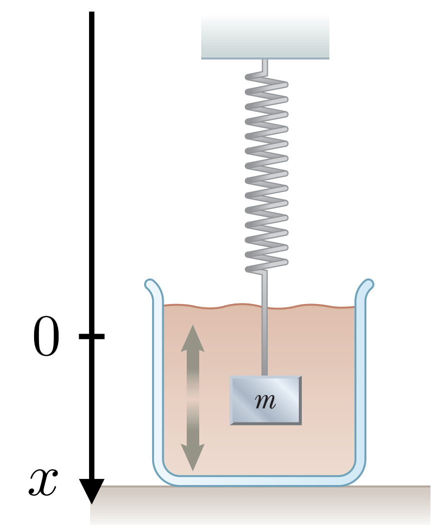
03/10/2016

Oscilações amortecidas

Oscilações harmónicas de sistemas físicos reais sempre terminam após algum tempo finito.

A energia das oscilações é dissipada devido a forças não conversativas.

Exemplo: massa numa mola move-se num líquido com viscosidade



É muito difícil descrever a força resistiva $\mathbf{R}$ exatamente.

Modelo simples: $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$

2ª lei de Newton: $ma = -kx - bv$

$$a = \ddot{x} \qquad v = \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Para simplificar: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a frequência angular do oscilador sem atrito ($b=0$)

$\gamma = \frac{b}{m}$ caracteriza o amortecimento (mesma dimensão que ω_0)

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equação do oscilador amortecido

Solução da equação do oscilador amortecido

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \xrightarrow[\text{do número complexo } z]{x \text{ é parte real}} \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Tentativa: $z = Ae^{i(pt+\phi)}$ $\quad \dot{z} = ipAe^{i(pt+\phi)} = ipz$ $\quad \ddot{z} = (ip)^2 Ae^{i(pt+\phi)} = -p^2 z$

Substituir na equação diferencial: $(-p^2 + ip\gamma + \omega_0^2)z(t) = 0$ (para qualquer t !)

$-p^2 + ip\gamma + \omega_0^2 = 0$ $\quad$ p também é complexo: $\quad p = p_r + ip_i \quad (p_r\,,\,p_i \in \mathbb{R})$

$$-(p_r + ip_i)^2 + i(p_r + ip_i)\gamma + \omega_0^2 = 0 \qquad -p_r^2 + p_i^2 - 2ip_rp_i + ip_r\gamma - p_i\gamma + \omega_0^2 = 0$$

$$-p_r^2 + p_i^2 - p_i\gamma + \omega_0^2 + i(-2p_rp_i + p_r\gamma) = 0$$

→ Duas equações (partes real e imaginária separadamente).

Parte real: $-p_r^2 + p_i^2 - p_i\gamma + \omega_0^2 = 0$ $\quad$ Parte imaginária: $-2p_rp_i + p_r\gamma = 0$

$$p_i = \frac{\gamma}{2}$$

$$-p_r^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{2} + \omega_0^2 = 0$$

$$p_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

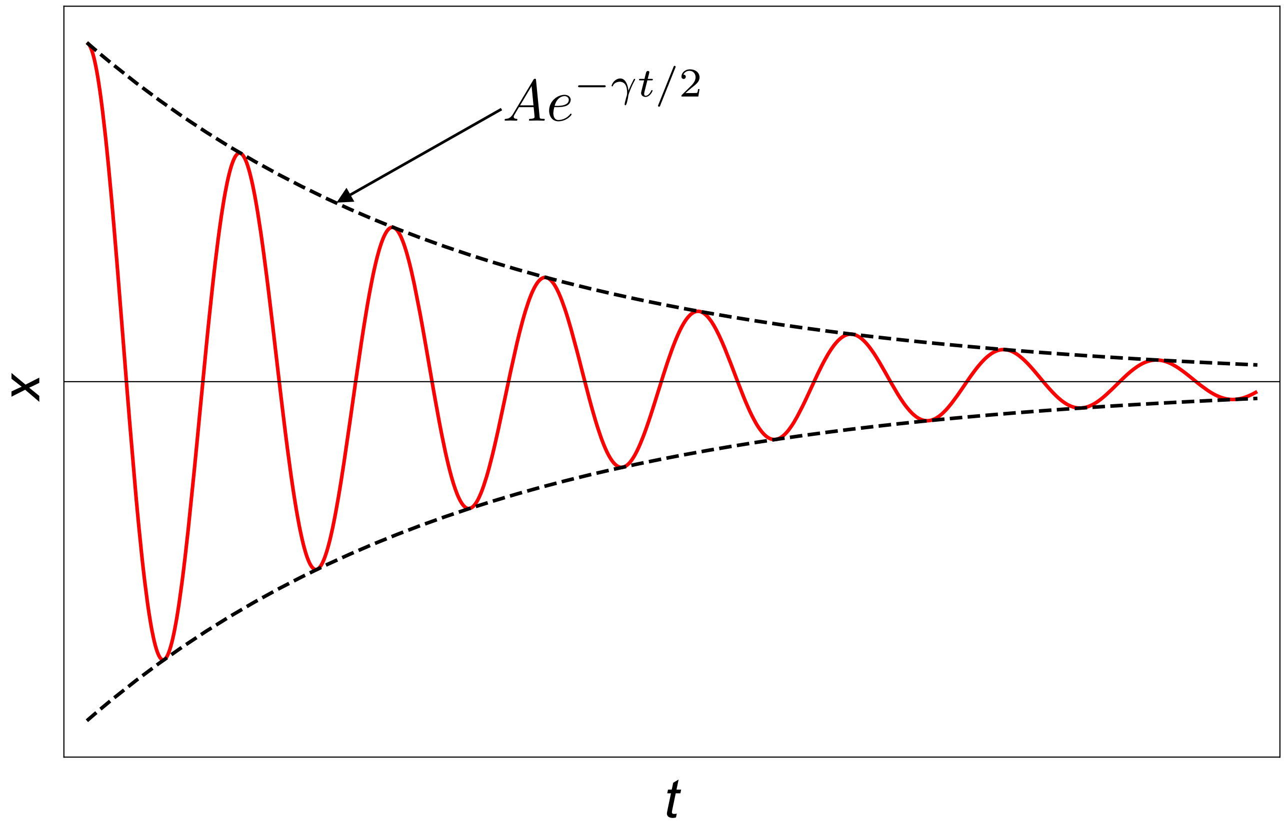
$$z = Ae^{i(pt+\phi)} = Ae^{i(p_r+ip_i)t+i\phi} = Ae^{-p_it}e^{i(p_rt+\phi)} \xrightarrow{x = \text{Re}(z)} x = Ae^{-p_it}\cos(p_rt+\phi)$$

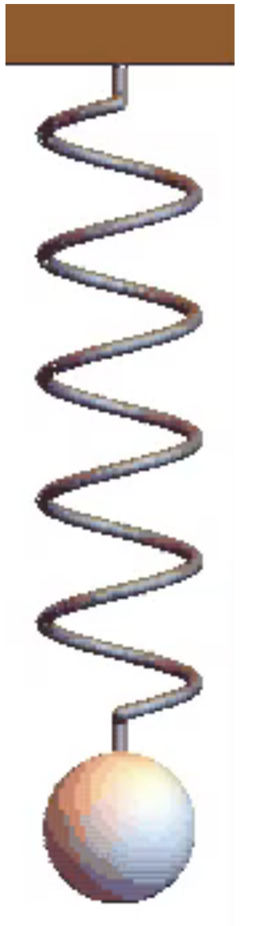
Oscilador amortecido

$$x = Ae^{-p_i t}\cos(p_r t + \phi) \qquad p_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \qquad p_i = \frac{\gamma}{2}$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \phi)} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Exemplo:





O oscilador é caracterizado por ω_0 e γ.

É útil introduzir o valor Q do oscilador:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

"Qualidade"

Oscilador amortecido

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

$Q \gg 1$ amortecimento fraco (oscilador quase livre)

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$\omega \approx \omega_0$ quando $Q \gg 1$

Podemos escrever $x(t) = Ae^{-\omega_0 t/2Q}\cos(\omega t + \phi)$

Pergunta: após quantas oscilações a amplitude terá descido para 1/e do valor inicial?

$$\frac{\omega_0 t}{2Q} = 1 \qquad t = \frac{2Q}{\omega_0} = nT \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad n = \frac{2Q}{T\omega_0} = \frac{Q}{\pi}\frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{Q}{\pi}$$

para grande Q

Podemos então escrever a amplitude em função do número de ciclos decorridos n

$$A(n) \approx A(0)e^{-n\pi/Q}$$

Resposta: $A(n) = A(0)\frac{1}{e} = A(0)e^{-1} = A(0)e^{-n\pi/Q} \longrightarrow n\pi/Q = 1 \longrightarrow n = \frac{Q}{\pi}$

Amortecimento forte

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

O que acontece quando $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$?

Temos de voltar à resolução da equação de movimento: $z = Ae^{i(pt+\phi)} = Ae^{i(p_r+ip_i)t+i\phi}$

$$p_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = -\left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right) \qquad p_r = \pm i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = \pm i\beta \qquad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \qquad p_i = \frac{\gamma}{2}$$

$$z = Ae^{i(\pm i\beta + i\gamma/2)t+i\phi} = Ae^{-(\gamma/2 \mp \beta)t+i\phi}$$

parte real: $x = A\cos\phi\, e^{-(\gamma/2 \mp \beta)t}$

A solução geral é uma combinação das duas soluções:

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma/2+\beta)t} + A_2 e^{-(\gamma/2-\beta)t}$$

Já não há oscilações!

(mas é possível passar a linha x=0 uma vez)

As constantes A_1 e A_2 são determinadas pelas condições iniciais (valores de $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$ para algum instante t_0).

Caso particular $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$:

Amortecimento crítico

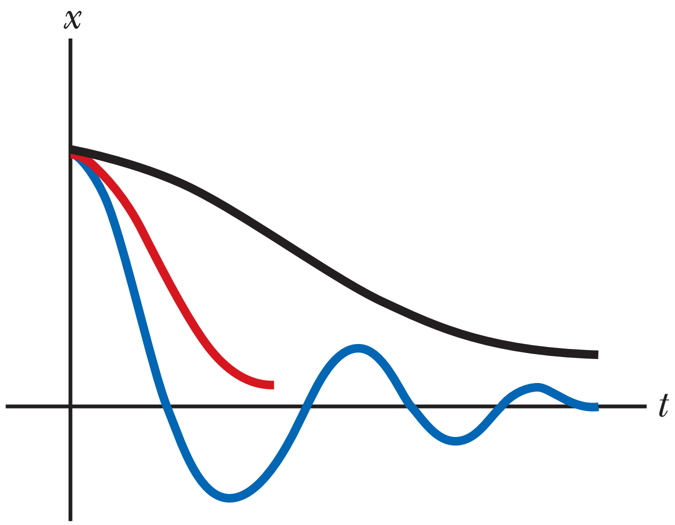
Aplicações em instrumentos de medição: o apontador atinge um novo equilíbrio sem oscilação.

A solução geral da equação diferencial tem a forma

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t/2}$$

Duas constantes ajustáveis A e B

Osciladores amortecidos

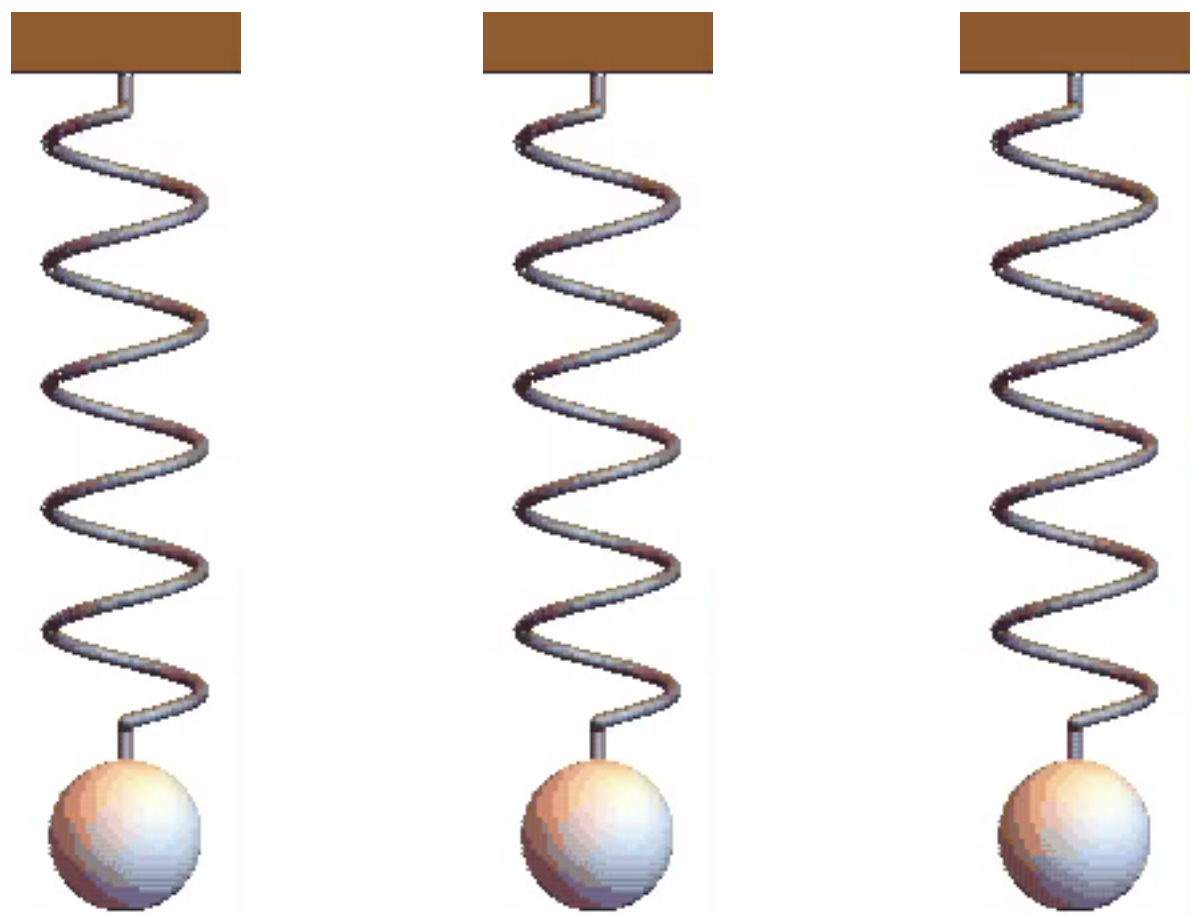


regime sobre-amortecido $Q < 1/2$

regime amortecido crítico $Q = 1/2$

regime sub-amortecido $Q > 1/2$

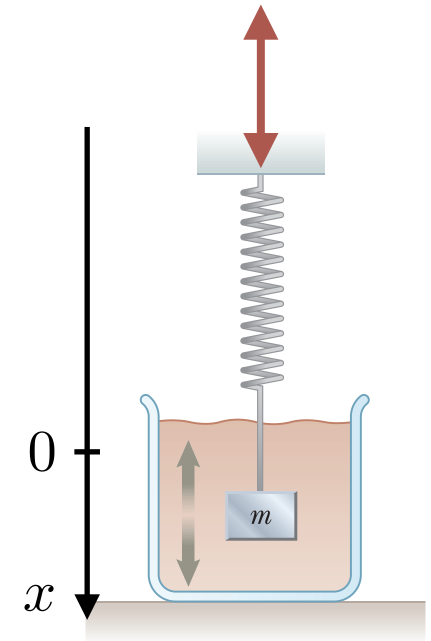
Q=8   Q=2/5   Q=1/2



Oscilações forçadas

Fenómenos muito interessantes e importantes ocorrem quando forças periódicas externas atuam num oscilador.

Voltamos ao sistema massa+mola, mas agora sujeito à força $F = F_0 \cos \omega t$



$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$ equação do movimento

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ a frequência angular "natural" (ou "própria") do oscilador livre

$$\gamma = \frac{b}{m}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Após algum tempo, o sistema vai oscilar com a frequência angular imposta ω → estado estacionário

Resolução da equação de movimento

Na representação complexa, procuramos soluções da equação $\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \dfrac{F_0}{m} e^{i\omega t}$

da forma $z = Ae^{i(\omega t - \delta)}$, com $x = \mathrm{Re}(z)$

desfasamento entre força externa e resposta do sistema

Substituição na equação diferencial dá $$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)Ae^{i(\omega t - \delta)} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Esta igualdade vale para qualquer t. Por isso $$(\omega_0^2 - \omega^2)A + i\omega\gamma A = \frac{F_0}{m} e^{i\delta}$$

Parte real: $$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m}\cos\delta \qquad (1)$$

Parte imaginária: $$\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{sen}\,\delta \qquad (2)$$

$(1)^2+(2)^2$ dá $$A^2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right] = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}}$$

(2)/(1) dá $$\boxed{\tan\delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Ressonância

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

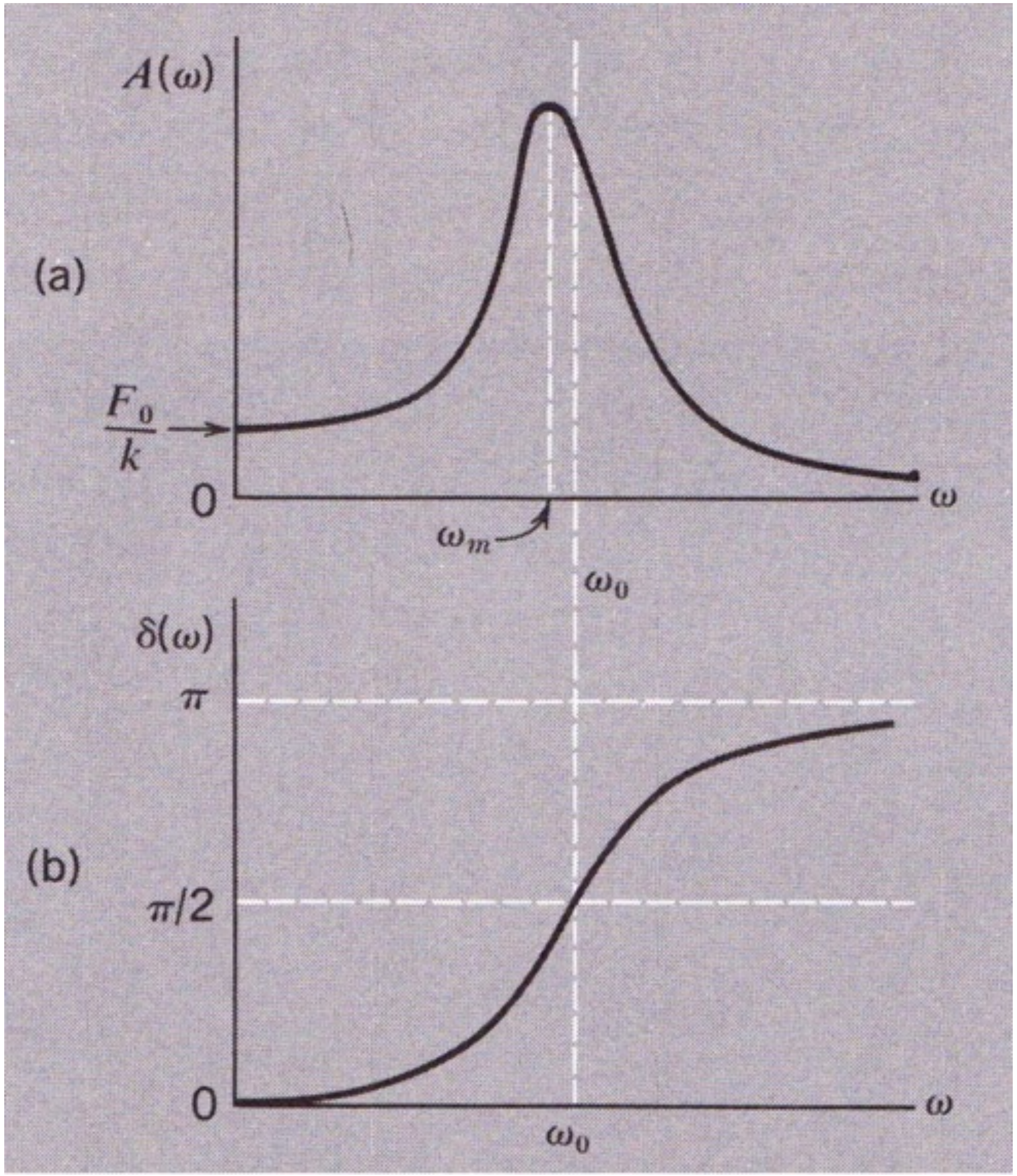
A amplitude tem um máximo quando

$\omega = \omega_m$, muito perto de ω_0

(mais perto para menor γ)

$$\tan\delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$\delta = \dfrac{\pi}{2}$ quando $\omega = \omega_0$



Ressonância em função de Q

Podemos usar $\gamma = \dfrac{\omega_0}{Q}$ para escrever amplitude A e fase δ em função de Q

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Para $\omega = 0$ temos $A(0) \equiv A_0 = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2} = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{m}{k} = \dfrac{F_0}{k}$

Isto é também o deslocamento causado pela força estática F_0 (sem surpresa!)

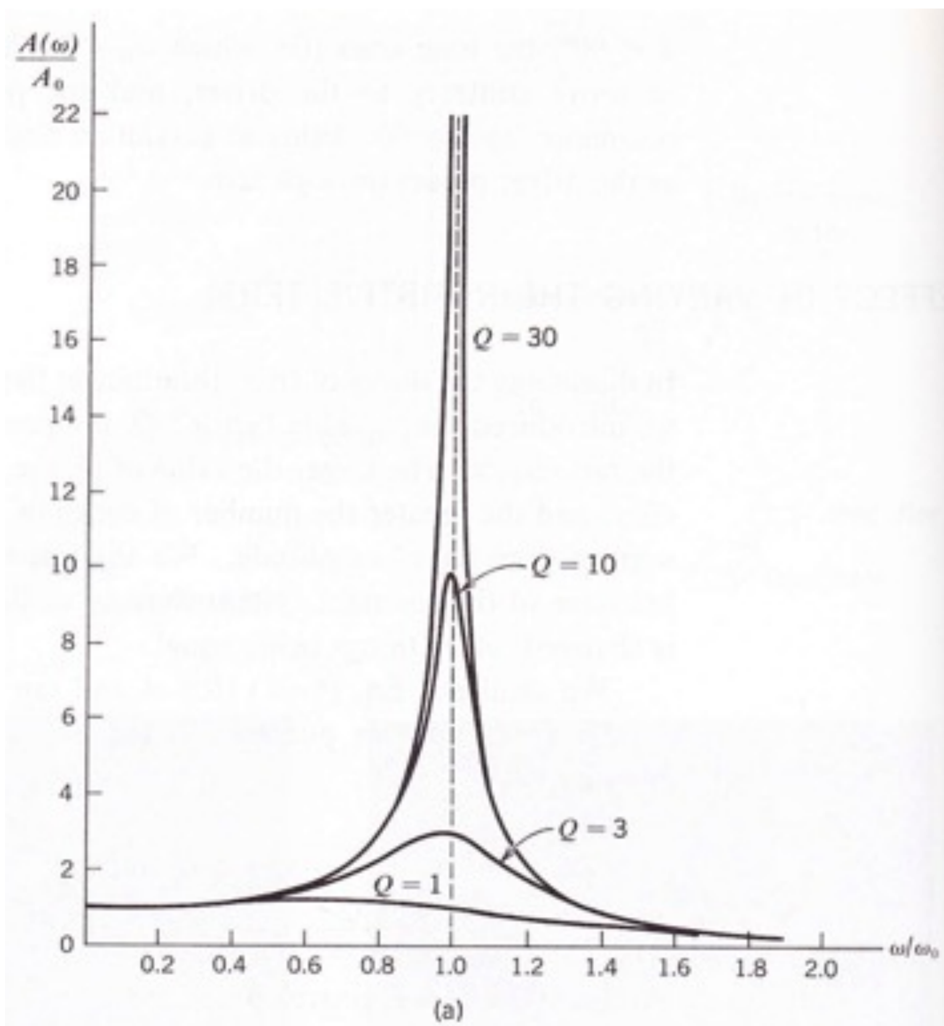
A amplitude é máxima em $\quad \omega_m = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

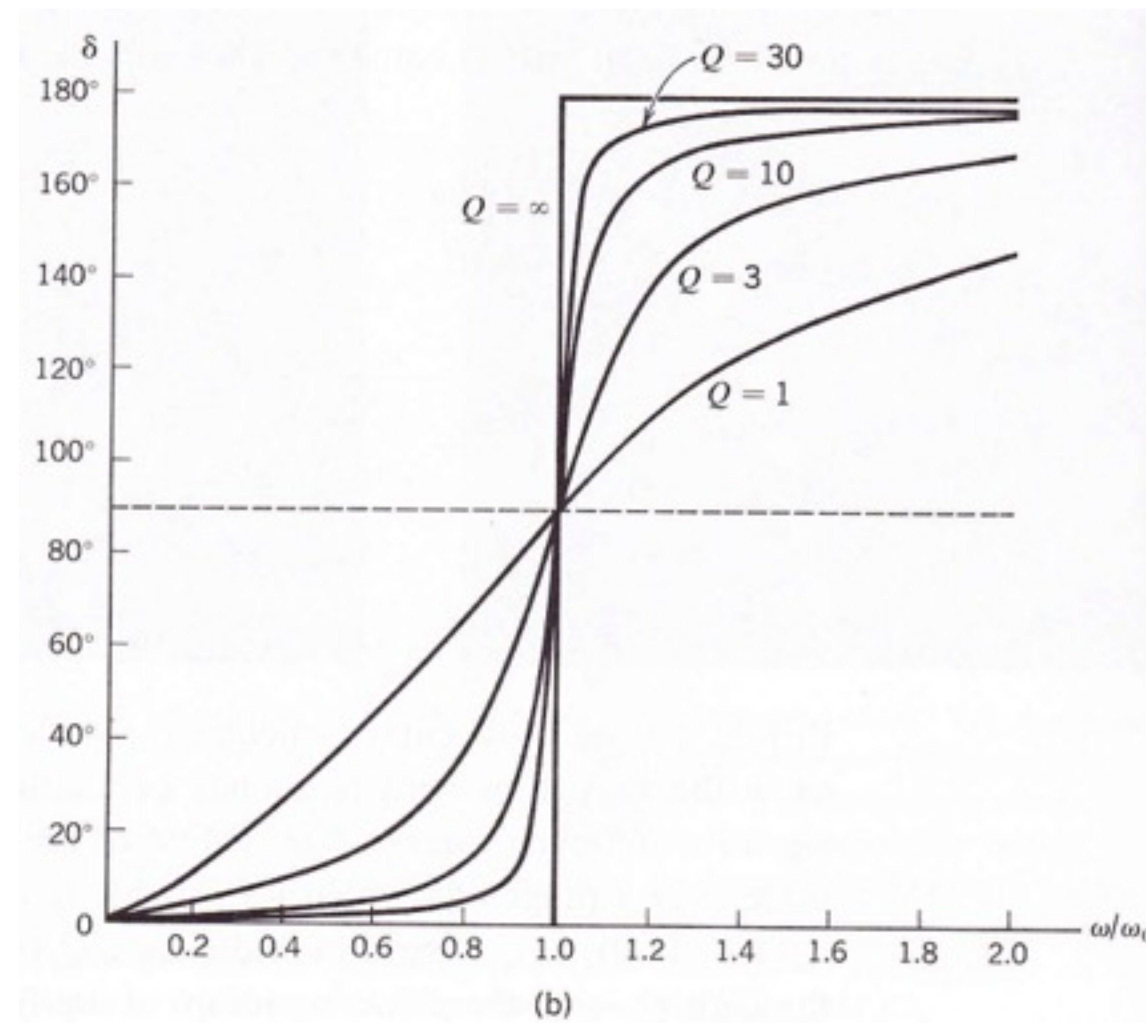
Um máximo existe enquanto $\quad Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

O valor máximo da amplitude é $\quad A(\omega_m) \equiv A_m = A_0 \dfrac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Amplitude máxima em função de Q

$$A(\omega_m) \equiv A_m = A_0 \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \qquad \omega_m = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2-\omega^2}$$

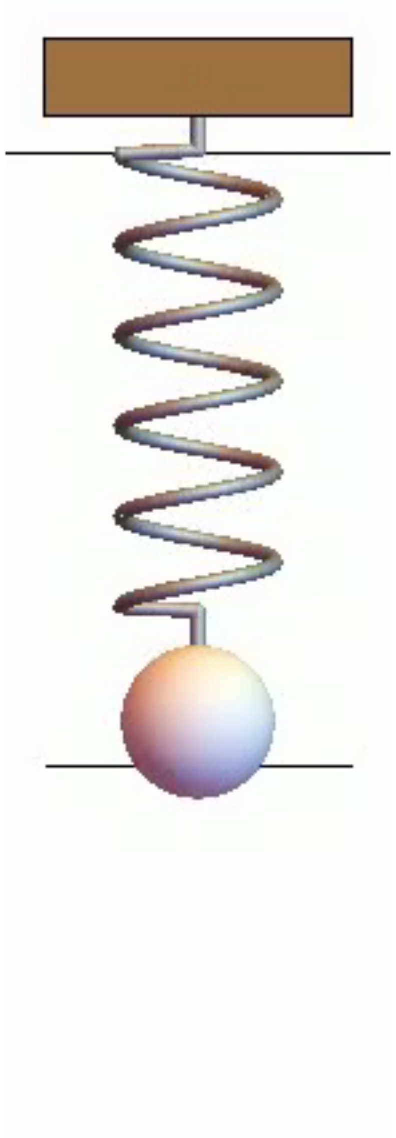




Para grande Q : $\qquad A_m \approx QA_0 \qquad \omega_m \approx \omega_0$

Exemplo: Q=10

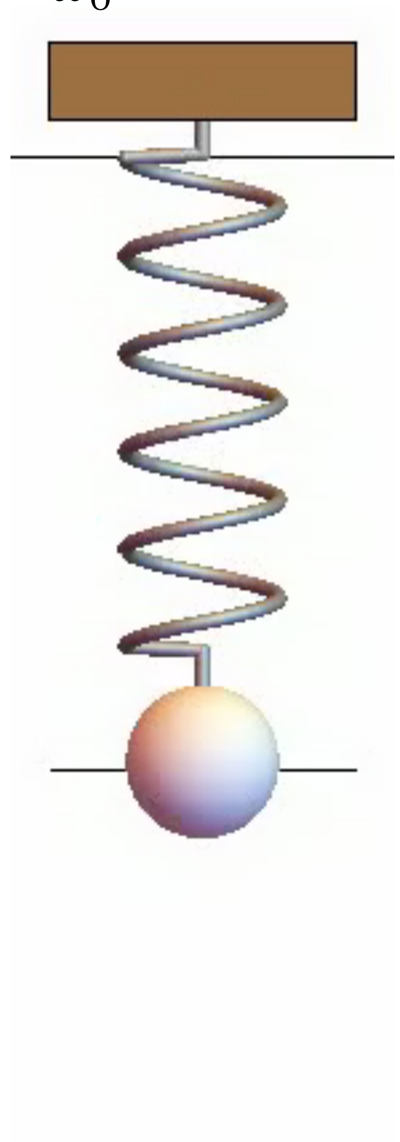
$$\frac{\omega}{\omega_0} = 0.4$$



$$\frac{A}{\eta_0} = 1.19$$

$$\delta = 2.7^\circ$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 0.9987$$

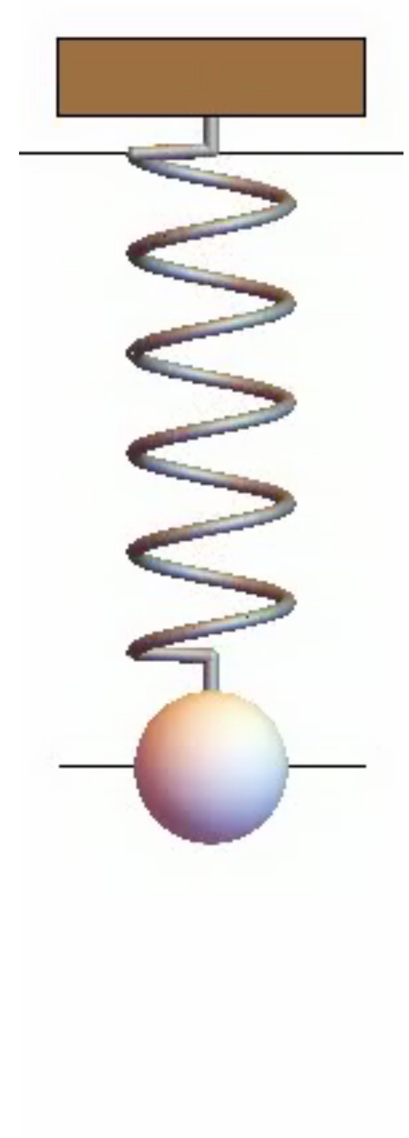


$$\frac{A}{\eta_0} = 10.0094$$

$$\delta = 88.6^\circ$$

(max. amp.)

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1$$

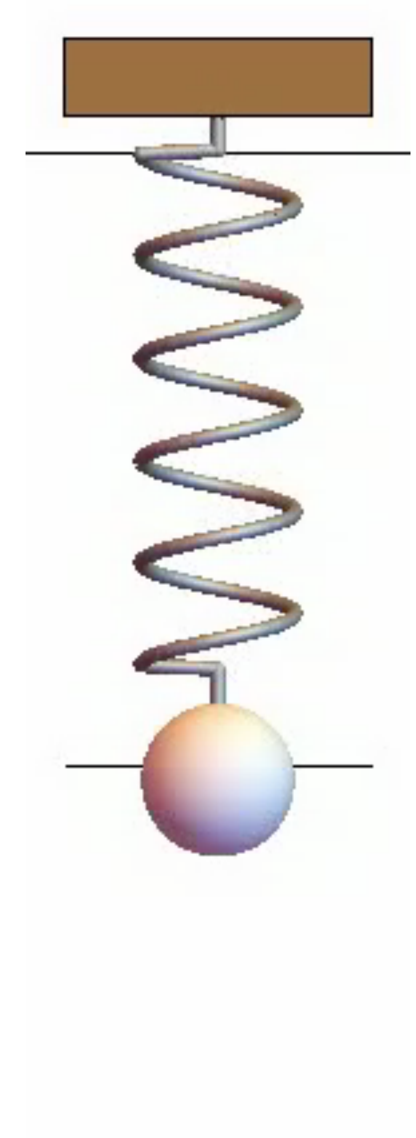


$$\frac{A}{\eta_0} = 10$$

$$\delta = 90^\circ$$

(ressonância)

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 2$$



$$\frac{A}{\eta_0} = 0.33$$

$$\delta = 176.2^\circ$$

Fenómenos transitórios

As soluções encontradas para o regime estacionário não têm parâmetros livres que se possam ajustar com as condições iniciais. (Amplitude, frequência angular e fase são determinadas.) Como é possível?

O oscilador no regime estacionário não guarda memória do seu estado inicial.

Mas a solução duma equação diferencial de 2ª ordem tem sempre dois parâmetros ajustáveis!

A solução geral da equação do movimento inclui também uma solução transitória para além da solução estacionária.

A solução estacionária da equação $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$ do oscilador forçado era

$$x_1(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

A equação do oscilador livre era $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

e para a solução (regime sub-amortecido) obtivemos $x_2(t) = Be^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t + \phi)$

com $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Então $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ também é uma solução da equação do oscilador forçado

A solução geral com dois parâmetros ajustáveis, B e ϕ , é

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + Be^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$

Fenómenos transitórios (cont.)

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + Be^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$\omega_1 \neq \omega$

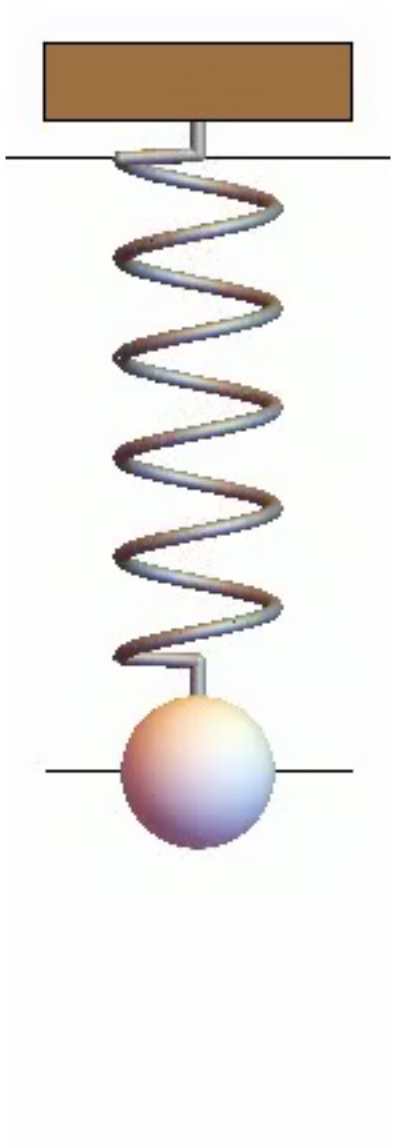
Enquanto a solução transitória é perceptível, observa-se um fenómeno de batimento.

A solução transitória decai exponencialmente.

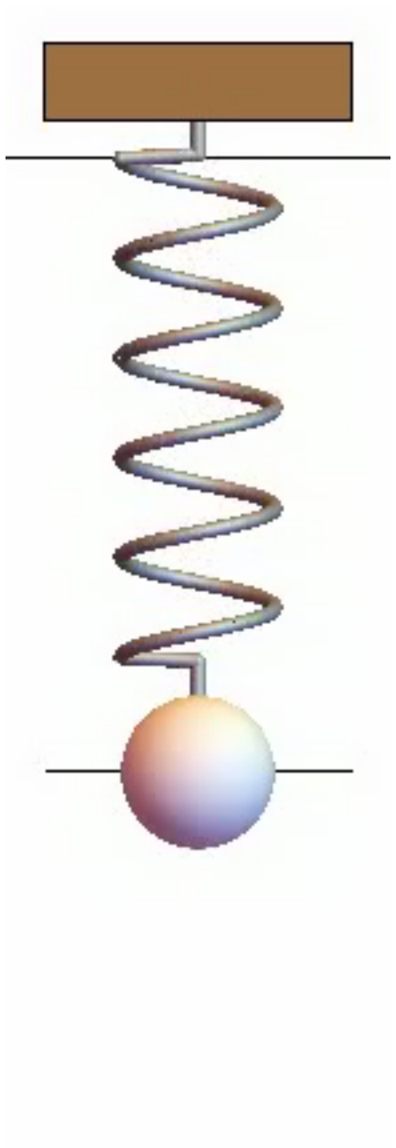
Exemplos: Q=10, solução total

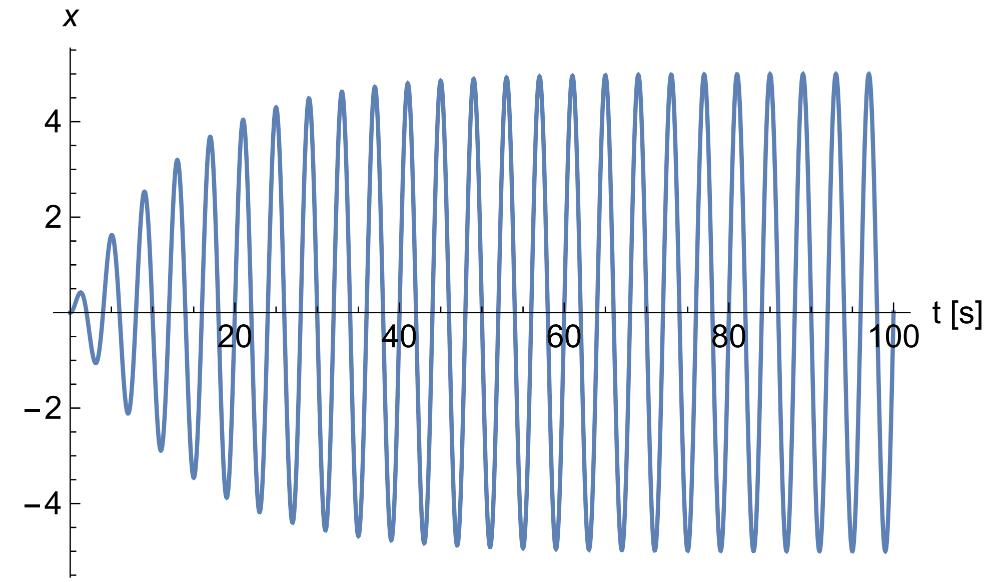
Oscilador forçado à frequência de ressonância

Solução total com transitória



Solução estacionária

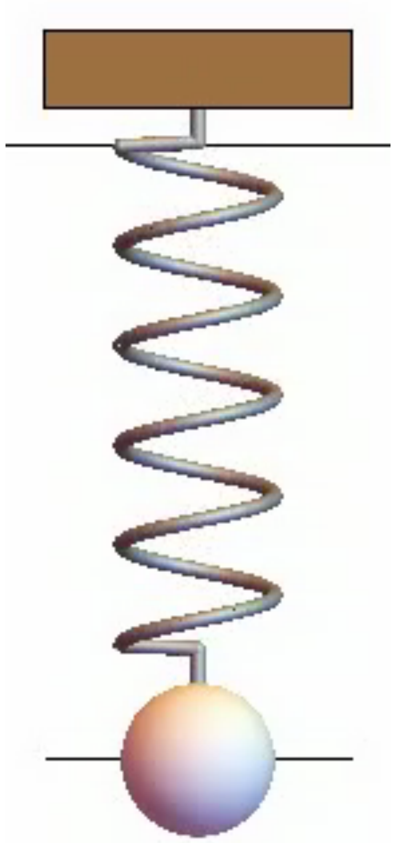




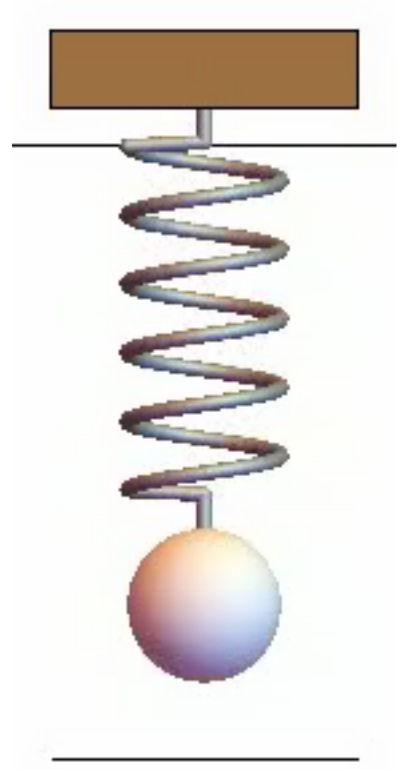
Exemplos: Q=10, solução total

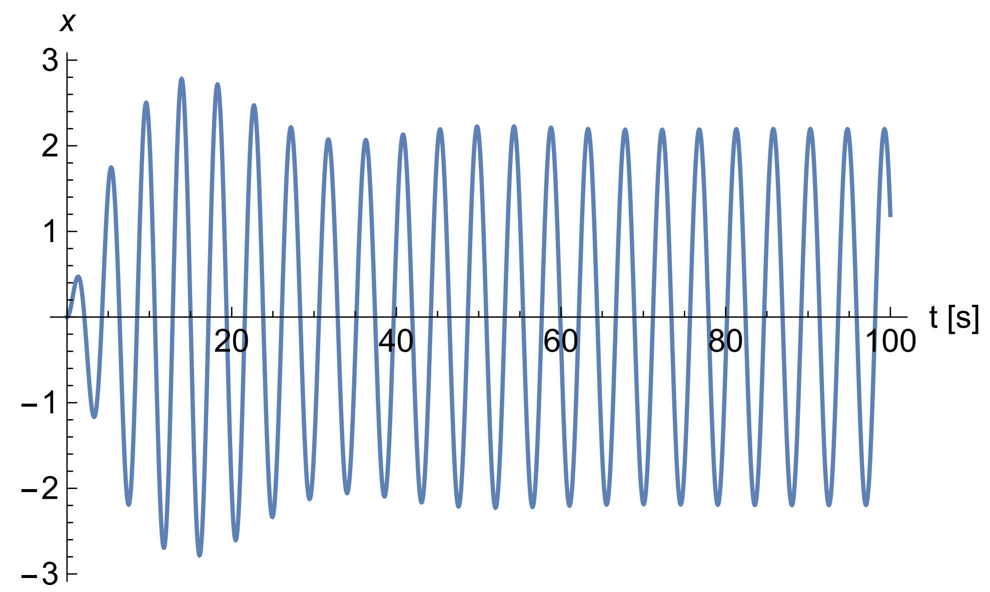
Oscilador forçado abaixo da frequência de ressonância

Solução total com transitória



Solução estacionária





Exemplos de ressonância

A força externa periódica é fornecida pelo jovem com a frequência de ressonância.
A amplitude da oscilação aumenta.

Exemplos de ressonância

Como é que a menina consegue aumentar a sua amplitude sem força externa?

O colapso da ponte Tacoma Narrows (EUA, 1940)

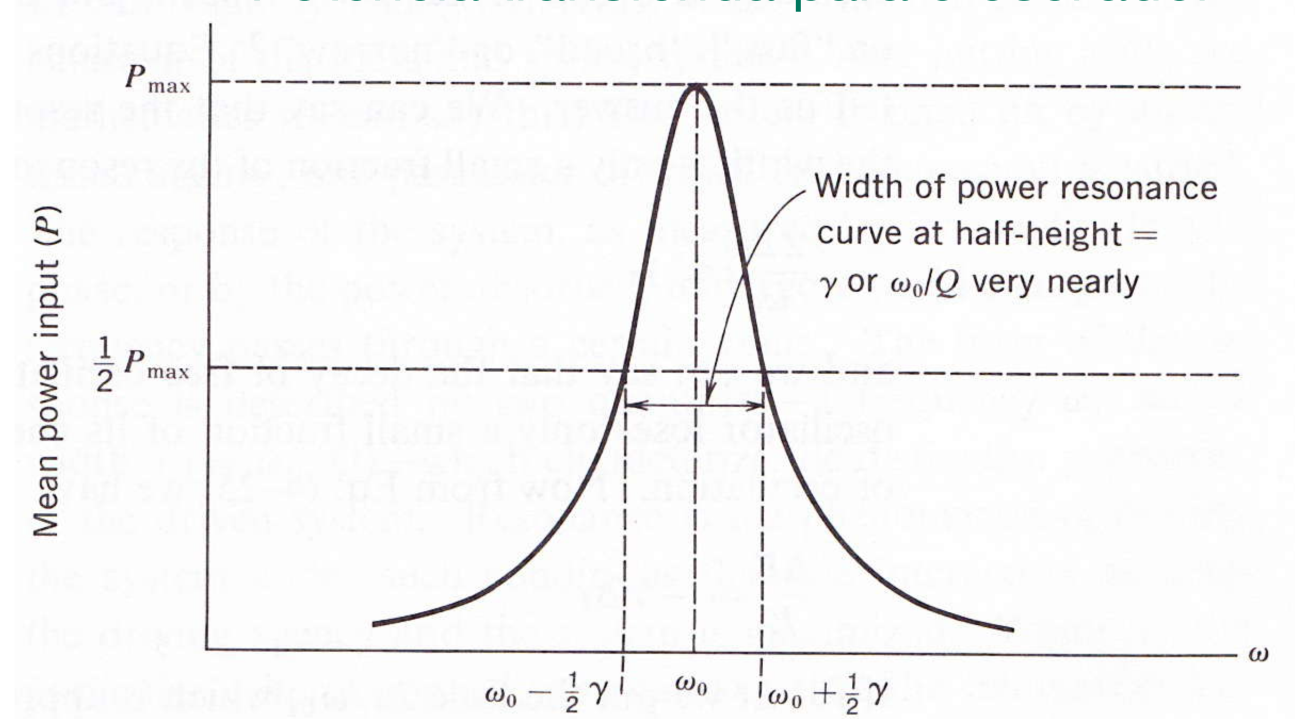
O vento tinha a velocidade certa para induzir ressonância na ponte.

Outros exemplos de ressonância

Em geral:

- Uma força periódica externa atua sobre um sistema, e a frequência desta força é variada
- A resposta do sistema (amplitude e fase) varia rapidamente quando a frequência passa por um determinado valor
- A forma da resposta é determinada pelos valores de ω_0 e γ .

Potência transferida para o oscilador



γ é a largura da curva da potência a metade do máximo

- Circuitos elétricos (e.g. RLC): telecomunicações (receptores de ondas de rádio)
- Absorção de luz: átomos absorvem radiação eletromagnética com certas frequências (espectro de absorção — linhas de Fraunhofer)
- Ressonâncias nucleares: absorção de raios gama
- Ressonância magnética nuclear: o spin de núcleos atómicos num campo magnético pode ser invertido por absorção de radiação e.m. com frequência certa