Álgebra Linear
e Geometria analítica

→ Sistemas de equações lineares e Cálculo Matricial

definição 1.
Matrizes: Uma matriz A, do tipo $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{21} \Rightarrow$ a encontra-se na linha 2, na 1ª coluna

linha por coluna

A linha i de A é: $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$

Para cada $i = 1, \dots, m$
A coluna j de A é:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

→ Para cada $j = 1, \dots, n$, usa-se também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$ na qual a_{ij} é a entrada (i, j) da matriz A!

→ Se $m = n$, diz-se que A é uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ e as entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A.

exemplo 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

as seguintes matrizes são dos seguintes tipos:

$A = 2 \times 2$ (2 por 2) $\quad C = 1 \times 3$ (1 por 3)

$B = 2 \times 4$ (2 por 4) $\quad D = 4 \times 1$ (4 por 1)

Tem-se, por exemplo, $a_{21} = -2$, $b_{13} = 3$, $c_{12} = 0$ e $d_{41} = 1$

observação 1.
Uma matriz (real) A do tipo $m \times n$ é uma aplicação:

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i, j) \longmapsto a_{ij}$$

notação 1.
O conjunto de todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ é denotado por $Mat_{(m \times n)}(\mathbb{R})$.

Definição 2.

Duas matrizes são iguais se forem do mesmo tipo e se as entradas correspondentes forem iguais, isto é,

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são iguais se $m = p$, $n = q$, $a_{ij} = b_{ij}$ para, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

Definição 3.

A soma de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é a matriz

$$\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}}$$

exemplo 2.

sejam: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

e $D = [-2 \;\; \sqrt{3}]$

Tem-se que $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

$$A + B = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0) & (4-3) & (-1+2) \\ (-3+4) & (2-1) & (6-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é possível somar C em D, porque são de matrizes diferentes.

definição 4.

O produto escalar α por uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ será a matriz:

$$\boxed{\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}}$$

α (número)

notação 2.

A matriz $(-1)A$ será denotada por $-A$

exemplo 3.

seja, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. tem-se que $-2A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 6 & -4 & -12 \end{bmatrix}$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2(a_{11}) & -2(a_{12}) & -2(a_{13}) \\ -2(a_{21}) & -2(a_{22}) & -2(a_{23}) \end{bmatrix}$$

definição 5.

O produto AB de duas ~~matrizes~~ matrizes A e B só pode ser efetuado se o número de colunas da 1ª matriz, A, for igual ao número de linhas da 2ª matriz, B. Nesse caso, o produto AB de $A=(a_{ij})_{m\times p}$ por $B=(b_{ij})_{p\times n}$ é definido por:

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

exemplo 4

Seja A, B, C e D as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} a_{11}\times c_{11} & a_{12}\times c_{21} & a_{13}\times c_{31} \\ a_{21}\times c_{11} & a_{22}\times c_{21} & a_{23}\times c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$CD=\begin{bmatrix} c_{11}\times d_{11} & c_{11}\times d_{12} \\ c_{21}\times d_{11} & c_{21}\times d_{12} \\ c_{31}\times d_{11} & c_{31}\times d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -4 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}\times b_{11} & a_{12}\times b_{21} & a_{13}\times b_{31} \\ a_{21}\times b_{12} & a_{22}\times b_{22} & a_{23}\times b_{32} \end{bmatrix}$$ não é possível

observação 2.

O produto de matrizes não é comutativo.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se que $AB=\begin{bmatrix} a_{11}\times b_{11} & a_{12}\times b_{21} \\ a_{21}\times b_{12} & a_{22}\times b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix} b_{11}\times a_{11} & b_{12}\times a_{21} \\ b_{21}\times a_{12} & b_{22}\times a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

logo, $AB \neq BA$

definição 6.

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz $A^T = (a_{ji})_{m\times n}$ que se obtem trocando as linhas com as colunas de A.

exemplo 5.

sejam
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array} \quad e \quad C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{array} \end{array}$$
tem-se
$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$C^T = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 1:

Operações matriciais

→ comutativa da soma $A + B = B + A$

sendo A, B, C matrizes e α e β escalares

→ associativa da soma $A + (B+C) = (A+B)+C$

→ elemento neutro da soma: existe uma unica matriz 0 do tipo $m\times n$ tal que $A + 0 = A$, para toda a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$

: à matriz 0, cujas entradas são todas iguais a zero, chama-se matriz nula

→ Simétrico Para cada matriz A existe uma unica matriz B tal que $A + B = 0$. Esta matriz B denota-se por $-A$.

→ associativa do produto por escalares $\alpha(\beta A) = (A\alpha)\beta$

→ distributividade $A(B+C) = AB + AC$ e $(B+C)D = BD + CD$

→ $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

→ $(AB)^T = B^T A^T$

→ $(A^T)^T = A$

→ $(A_1 A_2 \ldots A_n)^T = A_n^T \ldots A_2^T A_1^T$

→ $(A+B)^T = A^T + B^T$

→ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

→ matriz do tipo $n\times n$ chama-se matriz identidade (de ordem n) e é tal que

· Para todas as matrizes: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$

$AI = A$ e $IB = B$,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

definição 7.

A diferença entre duas matrizes A e B do mesmo tipo é definida por

$A - B = A + (-B)$, ou seja é a soma da matriz A com o simétrico da matriz B.

ii) seja A uma matriz do tipo $n\times n$ e $p \in \mathbb{N}$. A potência p de uma matriz é definida por

$$A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p \text{ vezes}} \qquad A^0 = I \text{ para } p = 0$$

iii) À matriz do tipo $n\times n$ cujas entradas fora da diagonal principal são nulas chama-se matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

observação 3.

$1A = A$ $\quad$ $A + A = 2A$

$0A = 0$ $\quad$ $\underbrace{A + \ldots A}_{n \text{ vezes}} = nA$

definição 8. (i) • Seja $A=(a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz do tipo $n\times n$. Diz-se que A é simétrica se $A=A^T$, isto é, $a_{ij}=a_{ji}$ para $i,j=1,\dots,n$

• Diz-se que A é anti-simétrica se $A=-A^T$, isto é, se $a_{ij}=-a_{ji}$, para $i,j=1,\dots,n$

(ii) Para matrizes quadradas $A=(a_{ij})_{n\times n}$ define-se o traço de A, $tr(A)$, como sendo a soma de todas as entradas da diagonal principal de A, isto é,

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

observação 4. Sejam $A=(a_{ij})_{n\times n}$ e $B=(b_{ij})_{n\times n}$ duas matrizes do tipo $n\times n$ e α um escalar tem-se,

- $\to tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
- $\to tr(\alpha A)=\alpha\, tr(A)$
- $\to tr(A^T)=tr(A)$
- $\to tr(AB)=tr(BA)$

Sistema de equações lineares

definição 9. Uma equação linear com n incognitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são constantes reais ($\in\mathbb{R}$)

definição 10. Um sistema de m equações lineares com n incognitas é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes, para $i,k=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$

observação 5. Usando o produto de matrizes definido na secção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{AX=B}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

matriz dos coeficientes do sistema

$$X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

matriz coluna dos incognitas do sistema

$$B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

matriz dos termos independentes do sistema

Uma solução linear, de um sistema linear, é uma matriz $S=\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\\ s_n\end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos:

$$x_1=s_1,\ x_2=s_2, \dots, x_n=s_n$$

* conjunto de todas as soluções do sistema chama-se conjunto solução ou solução geral sistema

Exemplo 6.

Sistema linear de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Pode ser escrito de outra forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a solução (geral) do sistema é $x = -1/3$

$y = 2/3$ isto é $X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

matriz aumentada do sistema
ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

definição 11. Princípio da equivalência

As operações elementares que podem ser aplicadas às linhas de uma matriz são:

(i) trocar a posição de duas linhas da matriz;
(ii) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
(iii) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha;

Teorema 2. Se 2 sistemas lineares $AX=B$ e $CX=D$ são tais que a matriz aumentada $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ através de uma operação elementar, então os dois sistemas têm o mesmo conjunto solução, isto é, são equivalentes

definição 12.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ diz-se em escada de linhas se:

i) todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) estão por baixo das linhas não nulas;

ii) Por baixo (e na mesma coluna) do primeiro elemento não nulo de cada linha e por baixo dos elementos nulos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas. Esse primeiro elemento não nulo de cada linha é chamado de pivot.

definição 13.

Seja A uma matriz em escada de linhas. Ao nº de pivots de A matriz, isto é, ao nº de linhas não nulas de A, dá-se o nome de característica de A, car A. Se A for a matriz em escada de linhas obtida de C através de operações elementares então diz-se que a característica de C é car A, tendo-se car C = car A. Temos que car A = car A^T

exemplo 7.

As seguintes matrizes estão em escada de linhas

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot $A = 4$ — car $A = 1$

Pivot $B = 1 ; -5$ — car $B = 2$

Pivot $C = 2 ; -3 ; -5$ — car $C = 3$

definição 14.

O método de resolver sistemas lineares que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada do respetivo sistema de modo a que essa matriz fique em escada de linhas, chama-se método de eliminação de gauss.

exemplo 8.

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 6 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

forma matricial

matriz aumentada (ampliada)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1 + L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}L_2 + L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

logo, $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2y + z = 3 \\ \frac{3}{2} z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

o sistema tem solução única e diz-se possível e determinado

exemplo 9.

$$\begin{cases} 3z - 9w = 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w = -45 \\ x + 3y - z + 5w = -7 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -45 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{5}L_2 \to L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1 + L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{3L_2 + L_3 \to L_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x + 3y - z + 5w = -7 \\ -z + 3w = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 2w - 5 \\ z = 3w + 2 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y - 2w - 5 \\ y \\ 3w + 2 \end{bmatrix}$$

sistema possível e indeterminado

$S = \{(-3y - 2w - 5, y, 3w + 2, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$

exemplo 10. $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & (a^2-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[-l_1+l_3 \to l_3]{-l_1+l_2 \to l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-6 & a-3 \end{array}\right] \xrightarrow{-l_2+l_3 \to l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$$

incognita livre é a z
não livres são x e y

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z+1 \\ -2z+1 \\ z \end{bmatrix}$$

$S = \{ (3z+1, -2z+1, z) : z \in \mathbb{R} \}$

se $a = 2$, o sistema tem infinitas soluções $\Rightarrow$ possível e indeterminado

se $a = -2$, o sistema não tem solução $\Rightarrow$ impossível

se $a \neq \pm 2$, o sistema tem a solução única $\Rightarrow$ possível e determinado

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+5)/(a+2) \\ a/(a+2) \\ 1/(a+2) \end{bmatrix}$$

observação 8.

Seja $[A|B]$ a matriz aumentada (ampliada) associada a um sistema linear com n incognitas

i) se car A = car $[A|B] = n$ então o sistema é possível e determinado (tem uma única solução)

ii) se car A = car $[A|B] < n$ então o sistema é possível e indeterminado (tem um nº infinito de soluções).

iii) se car A < car $[A|B]$ então o sistema é impossível (não tem solução)

iv) car A = nº de linhas não nulas da matriz em escada de linhas obtida de A = nº de pivots = nº de incógnitas não livres

definição 15.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema linear homogénio}$$

todo o sistema linear homogénio admite pelo menos a solução trivial

$AX = 0$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \cdot (-1/8)]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 - 5L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 2 \\ -8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \times 2L_1 \\ L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2/3]{}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 4 & -1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 4L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -23/3 & 23/3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \times (-3/23)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 - 5/3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{0} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 + L_2 + L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

exercicio 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2/4 \\ L_3/4 \\ L_4/4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

sistema possível e indeterminado

$p = 4$, $n = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2/4 \\ L_3/4 \\ L_4/4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1/4 \end{cases}$$

impossível

Sistema possível e determinado: $r = n$ — r é igual ao nº de incógnitas
$b = 0$
$K > r$

$r < n$ — r é menor que o nº de incógnitas
$b = 0$
$K < r$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - z + w = -1 \\ 2x + y + 2z - w = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3/3]{L_2/2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} z = w + 2/5 \\ y = w - 2/5 \\ x = -w - 1/5 \end{cases}$$

$w \in \mathbb{R}$

possivel mas indetermin.

$$\begin{cases} 2a + b - c + d - 2e = 1 \\ a + 2b + 2c - d + e = -1 \\ -a - 2b + c - e = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 2 \\ 5x + y - z + 2w = -1 \\ 2x - y + z - 3w = 4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{(L_2 - L_1) \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 - 2L_1]{L_2 - 2L_1,\ L_3 - 5L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4/5} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2/5 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 - 7L_2]{L_3 - 16L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -19/5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4/2]{L_3/6} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -31/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -19/10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \neq 0 \end{array}\right]$$

sistema impossível

$$\begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3/46]{\ell_3 - 3\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

---

discussão de matrizes

$$\begin{cases} kx + y + z + kw = t \\ x + y - z + w = 1 \\ x + 2y + w = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & k & t \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & t \\ k & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 - k\ell_1]{\ell_3 - \ell_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 1+k & 0 & 1-k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1+k & 0 & t-k \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 - (1-k)\ell_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & t-k \end{array}\right]$$

Se $k = 0$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right]$ $\xrightarrow{t=0}$ possível indeterminado; $\xrightarrow{t \neq 0}$ impossível

Se $k \neq 0$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{t-k}{2k} \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + \ell_3]{\ell_2 - \ell_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{k+t}{2k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t-k}{2k} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{t-k}{2k} \end{array}\right]$ possível indeterminado

$$\begin{cases} y + az = 0 \\ x + by = 0 \\ by + az = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \to \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & b & a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 - b\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-ab & 1 \end{array}\right]$$

$a - ab = a(1-b)$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ sistema impossível $\Rightarrow a_{33} = 0 \Rightarrow a(1-b)$ $\wedge\ b = 1$

$a = 0$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \underset{a \neq 0}{a-ab} & 1 \end{array}\right]$ sistema possível e determinado $\Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 1$

Produto escalar entre matrizes

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_{11}\cdot y_1 + x_{12}\cdot y_2 + x_{13}\cdot y_3 \\ x_{21}\cdot y_1 + x_{22}\cdot y_2 + x_{23}\cdot y_3 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \end{bmatrix}} \quad a_{12} = x_{11}\cdot y_{12} + x_{12}\cdot y_{22} + x_{13}\cdot y_{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 5 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Produto de matrizes

2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C}$$

= logo há multiplicação

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A.B = \begin{bmatrix} 1 & 17 & -3 & -5 \\ & & & \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 12, & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_1 \quad x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1} + x_3 = \cancel{x_1} + x_2 \\ \cancel{x_2} + x_4 = x_1 + \cancel{x_2} \\ x_1 + \cancel{x_3} = \cancel{x_3} + x_4 \\ x_2 + \cancel{x_4} = x_3 + \cancel{x_4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$$

$$R. \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

2.11

f) CB^t

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C_{3\times3}$$

3×2

$$C \cdot B^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -7 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

3×2

2.13

$2\times2 \qquad 2\times2$

b) $A^n = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(AA)A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{array}{ccc} & a_{11} \quad a_{12} & & c_1 \quad c_2 \\ A^2 = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & a_{21} \quad a_{22} & & c_3 \quad c_4 \end{array}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.14

$X \cdot B + A^2 = C^T$

$$\underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{(2\times 2)}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_3 + x_4 & 3x_3 + 5x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 & 3x_1 + 5x_2 - 2 \\ 2x_3 + x_4 & 3x_3 + 5x_4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 + 5x_4 + 1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_4 = -2x_3 \\ 3x_3 + 5(-2x_3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \\ \\ 3x_3 - 10x_3 = 7 \end{cases}$$

$\underset{p\times n}{A} = (a_{ij})$ $\quad i = 1 \dots p, \; j = 1 \dots n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \boxed{C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

i, j

$C_{p\times m} = (c_{ij})$

$\underset{n\times m}{B} = (b_{ij})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \times & \circ & \checkmark \\ \bullet & \times & \circ & \checkmark \end{bmatrix}$$

2.29

b) $\begin{cases} AB_1 = B_1 A = I_n \\ AB_2 = B_2 A = I_n \end{cases}$

$I_n = AB_1 \Longrightarrow B_2 I_n = B_2 A \cdot B_1$

$\Leftrightarrow B_2 = I_n B_1 \Leftrightarrow B_2 = B_1$

$x_1 = x_2 \Rightarrow ax_1 = ax_2$

Teorema

$A \cdot B = I$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} b_{n1} = 1$ $\qquad Ax_1 = e_1$

$a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} = 0$ $\qquad Ax_2 = e_2$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$a_{n1} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} = 0$ $\qquad Ax_n = e_n$

ex 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(A on the left block, I_3 on the right block of the first matrix)

$$\xrightarrow[L_1 - 3L_3]{L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 46 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(I_3 on the left block, A^{-1} on the right block)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 46 & -9 & -6 \\ -9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 46 & -9 & -6 \\ -9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3)

a) $\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}\underset{I_2}{\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \underset{I_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{A^{-1}}{\left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{I_2}{\left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]}$ $\qquad A^{-1} = A$

c) $\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{L_1 \times (-1)}$

$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow[L_3 - 4L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 16 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{L_2 \times -1}$

$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 16 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{L_3 - 5L_2} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{L_3 \times (-1/9)}$

$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -5/9 & -1/9 \end{matrix}\right] \xrightarrow[L_1 + 4L_3]{L_2 - 5L_3} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} -5 & -20/9 & -4/9 \\ 4 & 16/9 & 5/9 \\ -1 & -5/9 & -1/9 \end{matrix}\right]$

$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -45 & -20 & \dots \\ 36 & 16 & \dots \\ -9 & -5 & \dots \end{bmatrix}}_{A'}$

$(A \cdot A')\, 1/9 = A \cdot (1/9\, A')$

2.38

a) $(AX)^T B = A^{-1} + I_n$

$(AX)^T \underbrace{BB^{-1}}_{Id} = (A^{-1} + I_n)B^{-1}$

$(AX)^T = (A^{-1}+I_n)B^{-1} \Leftrightarrow AX = [(A^{-1}+I_n)B^{-1}]^T$

$\Leftrightarrow X = [(A^{-1}+I_n)B^{-1}]^T A^{-1}$

b) $-AX = C + BX$

$-AX - BX = C$

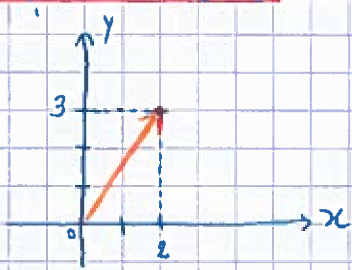
$-(A+B)X = C$

$(A+B)X = -C$

$X = (A+B)^{-1}(-C)$

Combinações lineares

exemplo 1



ex 1)

$(2,3) \in \mathbb{R}^2$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

exemplo 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

exemplo 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dependência linear

$(0,0) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Independência linear

$(0,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1) + \alpha_3(1,2)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

temos a solução não nula, por exemplo,

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$\alpha_3 = -1$

e escrevemos $(1,1) + \underbrace{(0,1)}_{u_2} - (1,2) = (0,0)$

$(0,1) = (0,0) - (1,1) + (1,2)$

$(0,1) = -(1,1) + (1,2)$

2.42

e) $\alpha_1(1011) + \alpha_2(1110) + \alpha_3(0111) + \alpha_4(1101) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 - L_1]{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - 2L_3} \left[\quad\right] \xrightarrow{L_3 \times 1/3} \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + L_4}$$

$\xrightarrow{L_3 - L_4}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

d) $\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Sistema indeterminado
dogo independe

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & - \\ 0 & 1 & 7 & \\ 0 & 0 & -65 & \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{66}{65} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_4 \\ \alpha_2 + 7\alpha_3 + 7\alpha_4 \\ \alpha_3 + \frac{66}{65}\alpha_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = -\frac{66}{65}\alpha_4 \\ \alpha_2 = 7 \times \left(-\frac{66}{65} - 1\right)\alpha_4 \\ \alpha_1 = \left[(2+7) \times \left(\frac{66}{65} - 1\right) - \frac{66}{65} + \right. \end{cases}$$

α_4

$M_1; M_2; M_3; M_4$

são dependentes

2.43

b) $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \dots + \alpha_k M_k = 0$

com pelo menos um $\alpha_i \neq 0$

Seja $\alpha_1 \neq 0$ sem perda de generalidade

$$\alpha_1 M_1 = -\alpha_2 M_2 - \alpha_3 M_3 \dots - \alpha_k M_k$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}}_{\beta_1} M_2 \underbrace{-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}_{\beta_2} M_3 - \dots \underbrace{-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}}_{\beta_{k-1}} M_k$$

matriz inversa

$$[\, A \,|\, I_n \,] \Rightarrow [\, A \,|\, A^{-1} \,]$$

linearmente independente

M_1, M_2, M_3

linearmente dependente

$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 \neq 0$ (matriz zero)

e um dos coeficientes lineares seja $\neq$ zero

combinações lineares

$\underbrace{(1, 2, 3)}_{M_1}$, $\underbrace{(8, 5, 1)}_{M_2}$, $\underbrace{(1, 0, 0)}_{M_3}$

e.l $\Rightarrow (1,2,3) - (8,5,1) + 2(1,0,0) = (-5,-3,2)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -3A_1 + 2A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

M é uma combinação linear de A_1 e A_2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

def. dados $M_1, M_2, \dots, M_K$ quaisquer, chamamos característica da lista de matrizes $M_1, M_2, \dots, M_K$ ao número máximo de matrizes linearmente independente entre as matrizes dadas.

2.44

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3 - C_1]{C_3 - C_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$r(a)) = 2$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2,\ \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -10 & 5 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 10L_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{bmatrix}$

$r(A) = 3$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = 1$

2.45

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - L_1]{L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(L_2 \times 1/2) \to L_4,\ L_4 \to L_3,\ L_3 \to L_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

se $\alpha = 2$
$r(A) = 3$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha \neq 2$
$r(A) = 4$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2\alpha}{\alpha - 2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

determinantes

$A_{1\times1} = [a_{11}]$

$\det(A) = |A| = a_{11}$

$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (3\times7) - (-5\times2) = 31 \qquad \det(A) = 31$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (3\times4) - (4\times3) = 0$

$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1\times1\times1) + (0\times0\times0) + (0\times0\times0) - (0\times1\times0) - (0\times0\times0) - (1\times0\times0)$
$= (1+0+0) - (0-0-0 = 1$

$B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$A_{n\times n}$ seja $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ onde A_{ij} é a matriz $(n-1)(n-1)$ que se obtém de A, retirando a linha i e a coluna j. Chamamos Δ_{ij} complemento algébrico do elemento a_{ij}.

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}|$

$\begin{matrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & & \end{matrix}$

$-\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-9-20) = 29$

Escolhendo arbitrariamente uma linha i definimos:

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \Delta_{ik}$$

De forma equivalente, ao escolhermos uma coluna j, definimos

$$\det(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \Delta_{kj}$$

nota: demonstra-se que a escolha da linha i ou da coluna j, é arbitr

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

escolhemos $j = 1$

$$|A| = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{41} \cdot \Delta_{41}$$

$$= 1\Delta_{11} + (-\Delta_{21}) + (0 \times \Delta_{31}) + (1 \times \Delta_{41})$$

$$= -27 - 9 - 9 = -45$$

$$\Delta_{11} \; (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2+2-18+2-12-3 = -27$$

$$\Delta_{21} \; (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2\times1\times1) + (1\times2\times3) + (-2\times1\times3) - (2\times1\times-2) - (3\times2\times2) - (1\times1\times1) = \cancel{2}\;\cancel{6} - 6 + 4 - 12 - 1 = -9 \times (-1)^3 = 9$$

$$\Delta_{41} \; (-1)^{4+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (18+4+1-6-2-6) = -9$$

1) $\det \begin{bmatrix} \vdots \\ \ell_i \\ \ell_j \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vdots \\ \ell_j \\ \ell_i \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2' + \ell_2'' \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2' \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2'' \\ \ell_3 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\ell_2 = (2, 1, 4) + (2, 0, 2)$

3) $\begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 + 5\ell_3 \\ \ell_3 \end{vmatrix}$

3.6 d)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 13 & 11 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 13 & 11 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (13 \times 4) - (11 \times 5) = -3$$

e)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(-1) \times (-3)^{3+1} \, |A_{31}|\right] \quad (- - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad (2)$$

3.10

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3 \times 3) - (2 \times 4) = 1 \qquad |A_1| = (5 \times 3) - (2 \times -2) = 19 \qquad \det(A_2) = (3 \times -2) - (5 \times 2) = -26$$

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{19}{1} = 19 \qquad y = -\frac{26}{1} = -26$$

a $|A_1|$ e no $|A_2|$ no 1° troca a 1ª col. o vetor b e o 2° c. do 2° caso o vetor

b)

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = B \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (1 \times -6) - (4 \times 2) = -6 - 8 = -14 \qquad \det(B_1) = (7 \times -6) - (4 \times 1) = -42 \qquad \det(B_2) = (1 \times 1) - (7 \times \ldots = -14$$

$$x = \frac{|B_1|}{|B|} = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{|B_2|}{|B|} = 1$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$|A| = (1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1) + (0 \times 0 \times 0) - [(1 \times 1 \times 0) + (0 \times 1 \times 1) + (1 \times 0 \ldots = 2$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= |A_1| = (2 \times 1 \times 1) + (3 \times 1 \times 1) + (4 \times 0 \times 0) - (4 \times 1 \times 1) - (2 \times 1 \times 0) - (3 \times 0 \ldots = \cancel{5} - 4 = 1$$

$$|A_2| = 5 \qquad x = 1/2$$

$$|A_3| = 3 \qquad y = 5/2$$

$$z = 3/2$$

3.13

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\hat{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$|\Delta_{11}| = 4$ $\quad adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$-|\Delta_{21}| = 2$

$-|\Delta_{12}| = 3$ $\quad |A| = -2$

$|\Delta_{22}| = 1$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad |D| = 2$ $\quad \hat{A} = \begin{array}{c|ccc} & + & - & + \\ + & -2 & 2 & -6 \\ - & -2 & 1 & -3 \\ + & 2 & -1 & 5 \end{array}$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}$

$adj(A) = \hat{A}^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{adj(A^t)}{|D|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

espaços vetoriais

Exemplo:

$E = \mathbb{R}^2$ com operações

$K = \mathbb{R}$

$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

e $\alpha \odot (x, y) = (\alpha . x, \alpha . y)$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial

$$\boxed{\alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot \vec{x} + \alpha \odot \vec{y}}$$

$\alpha \odot [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \alpha \odot (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$= \alpha (x_1 + y_1), \alpha (x_2 + y_2)$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)$

$\alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y} = \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \alpha \odot (y_1, y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2) \oplus (\alpha y_1, \alpha y_2)$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)$ $=$

Ex: $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} ; u_n \in \mathbb{R}\}$ define-se $w_K = u_K + v_K, \forall K$

$K = \mathbb{R}$ define-se $x_K = \alpha . u_K, \forall K$

$\oplus : (w_n)_{n \in \mathbb{N}} (u_n \oplus v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \odot : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha \odot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

exemplo:

$P_3[x]$ = conjunto dos polinómios de grau inferior ou igual a 3 na variável x.

$$3x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$P_3[x] = \{\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 \cdot 1\}$$

$$\oplus \; (\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \oplus (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) =$$
$$= (\alpha_3 + b_3)x^3 + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + b_1)x + (\alpha_0 + b_0)$$

$$\odot \; \alpha \odot (a_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) = \alpha\alpha_3 x^3 + \alpha\alpha$$

Verificação da distributividade (e.v.5)

$$\alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha(x_1, x_2) \oplus \alpha(y_1, y_2)$$

$$\Rightarrow \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\Rightarrow (\alpha(x_1 + y_1), 0)$$

$$= (\alpha x_1, 0) + (\alpha y_1, 0)$$
$$= (\alpha(x_1 + y_1), 0)$$

Verificação da distributividade (e.v. 8)

$$\vec{x} = (x_1, x_2)$$

não se verifica

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$$

$1^a \Rightarrow \; 0\vec{x} = \vec{0}, \; \forall \vec{x} \in E \;\; \rightarrow \;\; 0 = 0 + 0$ em K

então, $0\vec{x} = (0+0)\vec{x} \overset{e.v.6}{=} 0\vec{x} + 0\vec{x}$

$$\underset{e.v.4}{0\vec{x}} = 0\vec{x} + 0\vec{x}$$

$$-(0\vec{x}) + 0\vec{x} = -(0\vec{x}) + 0\vec{x} + 0\vec{x}$$
$$\vec{0} = \vec{0} + 0\vec{x}$$

e.v.3 $\boxed{\vec{0} = 0\vec{x}}$ c.q.d

$3^a \Rightarrow \; (-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x}), \; \forall \alpha \in K, \; \forall \vec{x} \in E$

$$(-\alpha + \alpha)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$$
$$(-\alpha)\vec{x} + \underbrace{\alpha\vec{x}}_{-(\alpha\vec{x})} = \vec{0}$$

$$(-\alpha)\vec{x} + \underbrace{\alpha\vec{x} + (-(\alpha\vec{x}))}_{\vec{0}} = \vec{0} + \underbrace{(-(\alpha\vec{x}))}_{-(\alpha\vec{x})}$$

$$(-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$$ c.q.d

Combinações lineares

$\vec{v}$ é c.l. de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$

$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_k \vec{v_k}$

Exemplo

em $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{(-6, 14, -4)}_{v} = 2\underbrace{(-3, 0, 5)}_{v_1} + 7\underbrace{(0, 2, -2)}_{v_2}$$

Exemplo

em $R_3[x]$

$\vec{v_1} = x^3 + 2x^2 \longleftarrow (1, 2, 0, 0)$

$\vec{v_2} = x^3 + x^2 + x \longleftarrow (1, 1, 1, 0)$

$\vec{v} = 2\vec{v_1} + 2\vec{v_2}$

$= (2x^3 + 4x^2) + (2x^3 + 2x^2 + 2x)$

$= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 0 \longleftarrow (4, 6, 2, 0) = 2(1,2,0,0) + 2(1,1,1,0)$

Exercício 1.7

a) $(2, -1) = \alpha_1 (1, 3) + \alpha_2 (-3, 4)$

$(2, -1) = (\alpha_1 - 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 4\alpha_2)$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 2 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = -1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & 5 \end{array}\right]$$

$\alpha_2 = \frac{}{13}$

$\alpha_1 = 3 \times \frac{5}{13} + 2$

b) $(1, 2) = \alpha_1 (2, 1) + \alpha_2 (1, -1) + \alpha_3 (-1, 3)$

$(1, 2) = (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/3 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{7}{3}\alpha_3 - 1 \\ \alpha_1 = \alpha_2 - 3\alpha_3 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{7}{3}\alpha_3 - 1 \\ \alpha_1 = -\frac{2}{3}\alpha_3 + 1 \end{cases}$$

h) $(1-3x+2x^2) = \alpha_1(2+x+x^2) + \alpha_2(1-x+3x^2) + \alpha_3(1+2x^2)$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -3 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & -13/3 \end{array}\right]$$

Sistema é possível, logo $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$

exerc. 1.8

$(-3, -1, a) = \alpha_1(1, 2, -3) + \alpha_2(3, 1, -1)$

$$\begin{cases} -3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ -1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ a = -3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 8 & a-9 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a-9}{8} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{a-9}{8}+1 \end{array}\right]$$

$\vec{v}$ é c.l de $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ sse $\frac{a-9}{8} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - 9 = 8 \Leftrightarrow a = 1$

exercício 1.10

e) $\vec{0} = \alpha_1(\vec{v_1}) + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_k \vec{v_k}$ para uma certa lista de vetores (fixa)

Dem. basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_k = 0$

exemplo em $\mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0)$
$v_2 = (0,1)$

$w_1 = (2,2)$
$w_2 = (1,2)$
$w_3 = (0,3)$

$(v_1 ; v_2) \approx (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{cases} \vec{v_1} = \alpha_1 . \vec{w_1} + \alpha_2 . \vec{w_2} + \alpha_3 . \vec{w_3} \\ \vec{v_2} = \beta_1 . \vec{w_1} + \beta_2 . w_2 + \beta_3 . \vec{w_3} \end{cases}$$

$\boxed{e}$

$$\begin{cases} \vec{w_1} = \gamma_1 \vec{w_1} + \gamma_2 . \vec{w_2} + \gamma_3 . \vec{w_3} \\ \vec{w_2} = \delta_1 . \vec{w_1} + \delta_2 . \vec{w_2} + \delta_3 . \vec{w_3} \\ \vec{w_3} = \theta_1 \vec{w_1} + \theta_2 . \vec{w_2} + \theta_3 . \vec{w_3} \end{cases}$$

$eq_1 \Rightarrow (1,0) = \alpha_1(2,2) + \alpha_2(1,2) + \alpha_3(0,3)$
$eq_2 \Rightarrow (0,1) = \beta_1(2,2) + \beta_2(1,2) + \beta_3(0,3)$

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$(2,2) = 2(1,0) + 2(0,1)$
$(1,3) = (1,0) + 2(0,1)$
$(0,3) = 0(1,0) + 3(0,1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -1 - 3\alpha_3 \\ \alpha_1 = 1 + \frac{3}{2}\alpha_3 \end{cases}$$

$\vec{v_1}$ é c.lin. de $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$

por exemplo $\alpha_3 = 0$

$\vec{v_1} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$

exercícios 1.11

b) $\begin{cases} v_1 = \alpha_1 . w_1 + \alpha_2 . w_2 + \alpha_3 . w_3 \\ v_2 = \beta_1 . w_1 + \beta_2 . w_2 + \beta_3 . w_3 \\ v_3 = \theta_1 . w_1 + \theta_2 . w_2 + \theta_3 . w_3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$\downarrow v_1 \quad \downarrow v_2 \quad \downarrow v_3$

$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 . v_2 + \alpha_3 . v_3$

$w_2 =$

$w_3 =$

$v_1 = w_1 - w_2 + w_3$

$v_2 = 0w_1 + w_2 + 0w_3$

$v_3 = w_1 + 0w_2 - w_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \text{etc.}$$

$\downarrow w_1 \quad \downarrow w_2 \quad \downarrow w_3$

$w_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$

$w_3 = 0 . v_1 + v_2 + 0 . v_3$

$w_3 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$

e) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \text{etc}$$

$1 + x + x^2 = \frac{5}{2}(2 + x) - \frac{3}{2}(2 - x) - (1 + 3x - x^2)$

$1 - x = -\frac{1}{4}(2 + x) + \frac{3}{4}(2 - x) + (1 + 3x - x^2)$

etc.

e vice-versa

exercício 1.12

b) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & K & 0 \\ 1 & K & K & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & K & 0 \\ 0 & K+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -K & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & K & 0 \\ 0 & K+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K/2 & 1/2 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \begin{array}{cccc} & & v_1 & v_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & K/2 & 1/2 \\ 0 & K+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K/2 & 1/2 \end{array}\right]$

$\Rightarrow v_1: \begin{cases} \alpha_1 = \frac{K}{2} \\ (K+1)\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{K}{2} \end{cases}$ o sistema é possível $K = -1$ ou $K = 0$

$\underline{K=-1}$ $\begin{cases} \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_1 = -1/2 \end{cases}$ $\underline{K \neq -1}$ $\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ K = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_2: \begin{cases} \alpha_1 = 1/2 \\ (K+1)\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ só é possível quando o $K = -1$

v_1 e v_2 são c.l de w_1, w_2 sse $K = -1$.

ao contrário

$\left[\begin{array}{cc|cc} K & 0 & 1 & -1 \\ K & 0 & 1 & K \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} K & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & K+1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/K & -1/K \\ 0 & 0 & 0 & K+1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{v_2} \quad \vec{v_2}$

$K \neq 0 \longrightarrow \alpha_1 = 1$ $\qquad K \neq 0$

$K = -1 \longrightarrow \alpha_2 = 1$ $\qquad \hookrightarrow \alpha_1 = 1/K$, $\hookrightarrow \alpha_2 = 1$

exercício 1.13

h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

linearmente independentes

exercício 1.18

a)

Sistema Maximal ($\vec{v}$ e $\vec{w}$)

$(3,5) = 2(1,0) + 4(0,1) + (1,1)$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

exercício 1.20

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 3\ell_5} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\ell_3 - 3\ell_5 - 2(\ell_4 - 4\ell_5)$

$\ell_3 - 2\ell_4 - 5\ell_5 = (0,0,0)$

Sistema maximal

$\{(2,-1,2), (4,1,2), (1,0,0)\}$

exercício 1.25

a) $\mathbb{R}^2 = ((1,3),(2,-1))$

$(a,b) = \alpha_1 (1,3) + \alpha_2 (2,-1)$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -7 & b-3a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \frac{-b+3a}{7} \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{7}a - 2\left(\frac{3a-b}{7}\right) \\ 0 & 1 & \frac{3}{7}a - \frac{1}{7}b \end{array}\right]$

$\alpha_1 = \frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b$

$\alpha_2 = \frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b$

b) $\mathbb{R}^2 = ((1,1),(1,2),(1,3))$

$(a,b) =$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-a \end{array}\right]$

$\begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_3 + b - a \\ \alpha_1 = \alpha_3 + 2a - b \end{cases}$

c) $\mathbb{R}^2 = ((2,-1),(-4,2))$

$(a,b) = \alpha_1(2,-1) + \alpha_2(-4,2)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & a \\ -1 & 2 & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a+2b \\ -1 & 2 & b \end{array}\right]$$

este sistema só é possível se $a + 2b = 0$

$(2;-1)$ e $(-4;2)$ não são geradores de $\mathbb{R}^2$

Bases de $\mathbb{R}^2$

a) $\{(1,3),(2,-1)\}$

b) $\boxed{\{(1,0),(0,1)\}}$

c) $\{(1,1)\}$

Bases de $\mathbb{R}^3$

b) $\boxed{\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}$

Exercício 1.29

a) $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$

$= (\alpha_1 \times 1) + (\alpha_2(1+x)) + \alpha_3(x+x^2) + \alpha_4(x^2+x^3) + \alpha_5(x^3+x^4)$

a_4

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) =$

$= \alpha_1(1,0,0,0,0) + \alpha_2(1,1,0,0,0) +$

$+ \alpha_3(0,1,1,0,0) + \alpha_4(0,0,1,1,0) +$

$+ \alpha_5(0,0,0,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ a_3 = \alpha_4 + \alpha_5 \\ \alpha_4 = \alpha_5 \end{cases}$$

$a_3 = \alpha_5 + \alpha_5 = 2\alpha_5$

$a_4 = \alpha_5$

$(7,8,9) = 6(1,1,0) - 5(0,1,1) + (1,7,14)$

$(7,8,9) = 7(1,0,0) + 8(0,1,0) + 9(0,0,1)$
$\quad\quad\quad\quad\quad \vec{e}_1 \quad\quad \vec{e}_2 \quad\quad \vec{e}_3$

$\vec{e}_i \ \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

exercício 1.36

$(1,7,2) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$

resolver em casa

$(1,7,2)_{\vec{e}_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\vec{s}_i}$

Subespaços vetoriais

$F_1 = \{(\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$

$F_2 = \{(0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$F_3 = \{(\alpha, 3\alpha) : \alpha \ \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , y = 3x\}$

$F_4 = \{(0,0)\}$

$F_5 = \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in G$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in G$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$3(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) + 7(x_3 + y_3) + 2(x_4, y_4) = 0$

2.1) b) $\vec{x}, \vec{y} \in F$

S_1 $F \neq \emptyset : (1,-1) \in F$

S_2 $\vec{x} \in F$ e $\vec{y} \in F$, então $\vec{x} + \vec{y} \in F$

$\vec{x} = (x_1 ; x_2) : x_1 + x_2 = 0$

$\vec{y} = (y_1 ; y_2) : y_1 + y_2 = 0$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1 ; x_2 + y_2)$ será elemento de F

se $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$ $=$

$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0$

S_3. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in F$, então $\alpha \vec{x} \in F$

$\vec{x} = (x_1, x_2) \in F$ sse $x_1 + x_2 = 0$

$\alpha \vec{x} = \alpha (x_1, x_2) = (\alpha . x_1, \alpha x_2)$

$\alpha \vec{x} \in F$ sse $\alpha x_1 + \alpha x_2 = 0$

e isso é verdade, porque $\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2) =$

$= \alpha . 0 = 0$

$\downarrow$ $\forall q$ $x \in F$

exercício 2.1

a)

S_1 $(0,0) \in F$

S_2 $\vec{x} = (a_1, a_1) \in F$

$\vec{y} = (a_2, a_2) \in F$

$\vec{x} + \vec{y} \in F$ sse $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$ o que é verdade

S_3 $\vec{x} = (a, a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \vec{x} = (\alpha a, \alpha a) \in F$ sse $\alpha a = \alpha a$, o que é verdade

c)

S_1 $(0,1) \in F$

S_2 $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$\vec{y} = (y_1, y_2)$

$\vec{x} + \vec{y} = [(x_1 + y_1), (x_2 + y_2)]$

pertence a F sse $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1, y_2) = 1$

o que não se verifica.

exercício 2.2

$\boxed{S_1}$ verifica-se para todo o K

$\boxed{S_2}$ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in W$

(x_1, y_1, k) (x_2, y_2, k)

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1 + y_1 + k) + (x_2 + y_2 + k)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2k)$

pertence a W sse $2k = k$

$\Leftrightarrow k = 0$

$\boxed{S_3}$ Falha

[redacted]

$v_1, v_2, \dots, v_k$

$\langle \underbrace{v_1, v_2, \dots, v_k}_{\text{vetores geradores}} \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$

$\{(\alpha_1, \beta_1) v_1 + (\alpha_2, \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_k, \beta_k) v_k\}$

é um espaço vetorial gerado por $v_1, v_2, \dots, v_k$

exemplo em $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,0,0)$

$v_2 = (0,1,0)$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \{\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\alpha_1, \alpha_2, 0) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}$ e $\vec{y}$ solução do sistema homogénio (sistema que nunca é impossível)

$A\vec{x} = 0$

$A\vec{y} = 0$

$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = \alpha\vec{0} = \vec{0}$

exercício 29

$a_1)$ $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(5y) + 3y = 0 \\ x = 5y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$S\{(0,0)\} = \langle \emptyset \rangle$

$a_2)$

$x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = 3y$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}$

$= \{(3y, y) \in \mathbb{R}^2\} = \langle (3,1) \rangle$

$(3y, y) = y(3,1)$

$a_3)$ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ -4x + 2(2x) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ -4x + 4x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ 0 = 0 \end{cases}$

$S = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2) \rangle$

$(x, 2x) = x(1,2)$

b_1) $2x - y + 6z = 0 \Leftrightarrow -y = -6z - 2x$
$y = 6z + 2x$

$S = \{(x, 2x+6z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,0), (0,6,1) \rangle$

$(x, 2x+6z, z) = (x, 2x, 0) + (0, 6z, z)$
$= x(1, 2, 0) + z(0, 6, 1)$

b_2)
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3(3x + 2z) - z \\ y = 3x + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 11x + 5z = 0 \\ y = 3x + 2z \end{cases}$$

nº parametros = nº incog - nº eq.
nº geradores = nº parametros

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{11} z \\ y = -\frac{15}{11} z + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{5}{11} z \\ y = \frac{7}{11} z \end{cases}$$

$S = \{((-5/11)z, \frac{7}{11} z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, 1) \rangle = \langle (-5, 7, 11) \rangle$

b_3)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & +2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3y - 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3} z \\ x = \frac{1}{3} z \end{cases}$$

$S = \{(4/3\, z, \frac{4}{3} z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1/3, 4/3, 1) \rangle$
$= \langle (1, 4, 3) \rangle$

exercício 2.10

$a_1)$ $F = \langle (2,1) \rangle = \{ \alpha(2,1) : \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \}$

$(x,y) = (2\alpha, \alpha)$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \alpha \end{cases}$$

$b_1)$ $F = \langle (2,1,1), (-1,1,3) \rangle$

$= \{ \alpha(2,1,1) + \beta(-1,1,3) \in \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$(x,y,z) \in F$

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ y = \alpha + 2\alpha - x \\ z = \alpha + 6\alpha - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ y = 3\alpha - x \\ z = 7\alpha - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ 3\alpha = y + x \\ \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{\beta = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}x - x} \\ \alpha = y/3 + x/3 \\ z = \frac{7}{3}y + \frac{7}{3}x - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ 3\alpha = y + x \\ \boxed{7y - 3z - 2x = 0} \end{cases}$$

$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 7y - 3z - 2x = 0 \}$

$b_3)$ $F = \langle (3,2,1) \rangle = \{ \alpha(3,2,1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$(x,y,z) \in F$

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3z \wedge y = 2z \}$$

$b_4)$ $F = \langle (0,3,4) \rangle = \{ \alpha(0,3,4) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$(x,y,z) \in F$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \alpha = \frac{y}{3} \\ z = \frac{4y}{3} \end{cases}$$

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge 3z = 4y \}$$

$E = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base de E

$\vec{v} \in E \Leftrightarrow v = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3}$

$v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

<u>Exercício 2.14</u>

a.) $G = \langle (3,2) \rangle = \{\alpha(3,2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= \{(3\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

para que $(3\alpha, 2\alpha) \in F$ temos

$2 \times (3\alpha) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$F \cap G = \{(0,0)\} = \langle \emptyset \rangle$

b.)
$G = \{\alpha(1,2,1) + \beta(2,-1,2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta) \in F$ sse

$3(\alpha + 2\beta) + 2\alpha - \beta + 2(\alpha + 2\beta) = 0$

$\alpha = -\frac{9}{7}\beta$

$F \cap G = \{(-\frac{9}{7}\beta + 2\beta), (-\frac{18}{7}\beta - \beta), (-\frac{9}{7}\beta + 2\beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\beta(5, -25, 5) : \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -5, 1) \rangle$

exercício 2.15

b)
$\begin{cases} x + 3y = z - y \\ z - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3y \\ z = y \end{cases}$

$F = \{(-3y, y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (-3, 1, 1) \rangle$

$G: x + ky - 2z = 0$

$\Leftrightarrow x = -ky + 2z$

$G = \{(-ky + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-k, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle$

$G \subseteq F$ é impossível pelas dimensões obtidas.
verifiquemos para que k temos $F \subseteq G$:

$(-3, 1, 1) = \alpha(-k, 1, 0) + \beta(2, 0, 1)$

$\begin{cases} -k\alpha + 2\beta = -3 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -k + 2 = -3 \\ \underline{} \\ \underline{} \end{cases} \quad \begin{cases} k = 5 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

exercícios 2.22

a) G é um s.e.v de $\mathbb{R}^4$ porque é o conjunto solução de um sistema de eq. homogéneas

dim F

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F = \langle (1,1,1,0), (-1,0,1,1) \rangle$

é, constituem uma base, logo dim F.

dim G

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x-y \\ w=-2x+x+y \end{cases} \quad \begin{cases} z=-x-y \\ w=-x+y \end{cases}$$

$$G=\{(x,y,-x-y,-x+y): x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,0,-x,-x)+(0,y,-y,y)$$

$$= \langle (1,0,-1,-1), (0,1,-1,1) \rangle$$

são lin. independentes, logo são uma base, logo dim = 2

Exercicio 2.1

a) $F = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$, em $\mathbb{R}^2$

$(0,0) \in F$ $\boxed{S_1}$

$\vec{x} = (a_1, a_1) \in F$

$\vec{y} = (a_2, a_2) \in F$

$\vec{x} + \vec{y} \in F$ se $(a_1, a_1) + (a_2, a_2) =$

$= a_1 + a_2 + a_1 + a_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 + a_2 = a_1 + a_2$

$\boxed{S_2}$ é verdade

$\vec{x} = (a, a)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha\vec{x} = \alpha(a, a) = (\alpha a, \alpha a)$

como $\alpha a = \alpha a$ então $\boxed{S_3}$ é verdadeira e $\in F$

b) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ em $\mathbb{R}^2$

$\boxed{S_1}$ $(0,0), (1,-1) \in F$

$\boxed{S_2}$ $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, x_2) \\ \vec{y} = (y_1, y_2) \end{array}\right\} \in F$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

$= (x_1 + y_1$

exercício 1.72

b) $v_1 = (1,1,2)$ $\quad u_1 = (0,0,1)$

$v_2 = (2,1,1)$ $\quad u_2 = (1,0,1)$

$v_3 = (-1,1,1)$

$u_1 = \alpha_1 (1,1,2) + \alpha_2 (2,1,1) + \alpha_3 (-1,1,1)$

$u_2 = \beta_1 (1,1,2) + \beta_2 (2,1,1) + \beta_3 (-1,1,1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

$\boxed{u_1 = v_1 - \frac{2}{3} v_2 - \frac{1}{3} v_3}$ $\quad \Leftrightarrow v_1 = u_1 + \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_3$

$u_2 = v_1 - \frac{1}{3} v_2 - \frac{2}{3} v_3$

$u_2 = u_1 + \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_3 - \frac{2}{3} v_2 - \frac{1}{3} v_3$

$= \frac{1}{3} v_2 - \frac{1}{3} v_3 + u_1$

$\langle (u_1, v_2, v_3) \rangle = \langle (u_1, u_2, v_3) \rangle$

Por transitividade

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle u_1, u_2, v_3 \rangle$

exercícios 2.22

f) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F = \langle (1,0,1,0)\ (0,1,-1,0)\ (0,1,1,2) \rangle$

sendo estes vetores uma base de F $\quad \dim F = 3$

$(1,1,1,1) = \alpha_1 (1,0,1,0) + \alpha_2 (0,1,-1,0) + \alpha_3 (0,1,1,2)$

$= (1,0,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,-1,0) + \frac{1}{2}(0,1,1,2)$

$F = \langle (1,1,1,1), (0,1,-1,0), (0,1,1,2) \rangle$

$F + G$ estão na soma de

$F \leq E$ $\qquad F+G = \{ v \in E : \exists f \in F, \exists g \in G : v = f+g \}$

$G \leq E$

exercício 2.35

a) $\begin{cases} x+y-z+w=0 \\ x+y+z-w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = z-w \\ z-w = w-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z-w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=w \end{cases}$

$F = \{ (x, -x, w, w) : x, w \in \mathbb{R} \}$

$\langle (1,-1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$ constituem uma base

b) Base canónica de $\mathbb{R}^4$

$e_1 = (1,0,0,0) \quad e_2 = (0,1,0,0)$

$e_3 = (0,0,1,0) \quad e_4 = (0,0,0,1)$

$(1,-1,0,0) = e_1 - e_2$

$(0,0,1,1) = e_3 + e_4$

$\mathbb{R}^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$

$= \langle (1,-1,0,0), e_2, e_3, e_4 \rangle$

$= \langle (1,-1,0,0), e_2, (0,0,1,1), e_4 \rangle$

d) $G = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$

e) $F^* = \langle e_2, e_4 \rangle$

Aplicações lineares

E e E' são e.v sobre um mesmo corpo de escalares K.

$\varphi : E \to E'$

(*) $\varphi(\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}) = \alpha\, \varphi(\vec{v_1}) + \beta\, \varphi(\vec{v_2})$

$\forall v_1, v_2 \in E, \ \forall \alpha, \beta \in K$

(*) $\Leftrightarrow$ (**) a) $\varphi(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \varphi(\vec{v_1}) + \varphi(\vec{v_2})$

b) $\varphi(\alpha \vec{v_1}) = \alpha\, \varphi(\vec{v_1})$

$\forall v_1, v_2 \in E, \ \forall \alpha \in K$

exemplo: 3.1

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$\varphi(x, y, z) = (3x - 7z; x - 5y + 8z)$

$\varphi(3, 2, 3) = (-18; 15)$

$\varphi(k, 2k, c) = (3k - 7c; k - 10k + 8z)$
$= (3k - 7c; -9k + 8z)$

a) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$= [[3(x_1 + x_2) - 7(z_1 + z_2)]; [(x_1 + x_2) - 5(y_1 + y_2) + 8(z_1 + z_2)]]$

$= (3x_1 + 3x_2 - 7z_1 - 7z_2), (x_1 + x_2 - 5y_1 - 5y_2 + 8z_1 + 8z_2)$

$= (3x_1 - 7z_1; x_1 - 5y_1 + 8z_1) + (3x_2 - 7z_2; x_2 - 5y_2 + 8z_2)$

$\varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ e.s.q.d

b) $\varphi(\alpha v_1) = \alpha \varphi(v_1)$

$\varphi(\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1) = (3\alpha x_1 - 7\alpha z_1; \alpha x_1 - 5\alpha y_1 + 8\alpha z_1)$

$= \alpha(3x_1 - 7z_1; x_1 - 5y_1 + 8z_1)$

$= \alpha . \varphi(v_1)$ e.s.d.

exemplo 3.3

$$R_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$p'(x) = a_1 x + 2a_2 x$

a) p_1 e $p_2 \in \mathbb{R}[x]$

$\varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$

$p_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$

$p_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots$

$\varphi(p_1 + p_2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + \ldots$

$= (a_1 + 2a_2 x + \ldots) + (b_1 + 2b_2 x + \ldots)$

$= \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$ e.s.d.

exercício 8.2

a) $\varphi(x,y) = x+y$

1. $\varphi(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = \varphi(\vec{v_1}) + \varphi(\vec{v_2})$
2. $\varphi(\alpha . \vec{v_1}) = \alpha(\varphi \vec{v_1})$

$v_1 = (x_1 ; y_1)$

$v_2 = (y_1 ; y_2)$

$\varphi(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \varphi(\vec{v_1}) + \varphi(\vec{v_2})$

$=$

$$\begin{cases} y = ax \\ \rho(x,y) = ax + by \end{cases}$$

<u>exemplo da aula</u>

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x,y,z) = (3x+y, k)$$

determine k de forma a ser uma aplicação linear.

$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \varphi(v_1 + v_2) =$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$$

$$= (3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), k)$$

$$= (3x_1 + 3x_2 + y_1 + y_2, k)^{**}$$

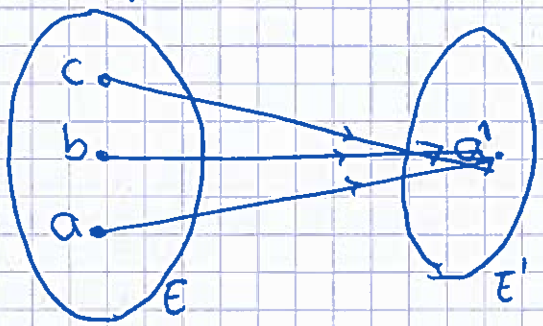
$$\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = (3x_1 + y_1, k) + (3x_2 + y_2, k)$$

$$= (3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2, 2k)^{*}$$

$$* = ** \text{ se } k = 2k \Leftrightarrow k = 0$$

$\varphi : E \to E$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{ v \in E : \varphi(v) = \vec{0}_E \}$



$\varphi^{-1}(a') = \{ v \in E : \varphi(a) = a' \}$

exercício 3.7 - 3.9

a) $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,-x) \overset{x}{\in} \mathbb{R}\}$ não pode ser monomorfismo

b) $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(0,0)\}$ monomorfismo

f) $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \langle(-25,-14,9)\rangle$ não pode ser monomorfismo

---

$F \subseteq E$

$\varphi(F) = \{ \varphi(v) \in E' : v \in F \}$

$F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\varphi(F) = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3) \rangle$

exercício 3.10

b) $\varphi^{-1}(4,-3,1) = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \varphi(v) = (4,-3,1) \} = *$

$\varphi(v) = (4,-3,1) \Leftrightarrow (x+z, y-z, x+y) = (4,-3,1)$

$$\begin{cases} x+z=4 \\ y-z=-3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-z \\ y=-3+z \\ 1=1 \end{cases}$$

$* = \{(4-z, -3+z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$

$= (4,-3,0,0) + (-z,z,z,0) + (0,0,0,0)$

$= (4,-3,0,0) + z(-1,1,1,0) + (0,0,0,0)$

nota:

$v_1 = (4-z_1, -3+z_1, z_1, w_1)$

$v_2 = (4-z_2, -3+z_2, z_2, w_2)$

$v_1 + v_2 = (8-z_1-z_2, -6+z_1+z_2, z_1+z_2, w_1+w_2)$

$\varphi(3,2,1) = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \varphi(v) = (3,2,1) \}$

$\varphi(v) = (3,2,1) \Leftrightarrow (x+z, y-z, x+y) = (3,2,1)$

$$\begin{cases} x+z=3 \\ y-z=2 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-z \\ y=2+z \\ 5=1 \end{cases}$$ impossível

$* \ \varphi^{-1}(3,2,1) = \emptyset$

exercício 3.11

$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \in E' : v \in E\} \subseteq E'$

a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \{(x+2y, x-3y, 2x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,1,2), (2,-3,1) \rangle$

$v = (x, x, 2x) + (2y, -3y, y)$

$= x(1,1,2) + y(2,-3,1)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ tem como dimensão 2 pois os vetores geradores são bases visto serem linearmente independentes.

$\boxed{\text{au}}$

$\dim \varphi = \mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \langle \varphi(1,0), \varphi(0,1) \rangle$

$= \langle (1,1,2), (2,-3,1) \rangle$

d)

$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^3)$

$= \{\varphi(v) : v \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(x+2y-z, 2x-y+3z, 3x+y+2z)) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle \underset{v_2+v_3}{(1,7,3)}; \underset{v_2}{(2,-1,1)}; \underset{v_3}{(-1,3,2)} \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$

(linearmente dependente)

exercício 3.12

b) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

$x+y+z=0$

$z = -x-y$

$F = \{(-y-z, y, z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$

$\varphi(F) = \langle \varphi(-1,1,0), \varphi(-1,0,1) \rangle$

$= \langle (-2,1,2), (-3,3,-1) \rangle$

$-1+(-0)$

exercício 3.13

$$\mathrm{Nuc}(\theta) = \{ v \in E : \theta(v) = 0_{E'} \}$$

$$= \{ (2x - y + z,\ x - z + w) = (0,0) \} \ *$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 2x \\ w = -x + z \end{cases}$$

$$\overset{*}{=} \{ (x, z+2x, z, -x+z) : x, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1, 2, 0, -1)\ (0, 1, 1, 1) \rangle$$

$$\mathrm{Im}(\theta) = \{ \theta(v) : v \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \langle \theta(1,0,0,0), \theta(0,1,0,0), \theta(0,0,1,0), \theta(0,0,0,1) \rangle$$

$$= \langle (2,1); (-1,0); (1,-1); (0,1) \rangle$$

$$= \mathbb{R}^2$$

R: é um epimorfismo

exercício

Parte I

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

$$f(x,y,z,w) = (x - y + z - w,\ y - z + w,\ z,\ x - z)$$

$$g(x,y,z,w) = (x + z + w,\ y - w,\ -x - y - z + w,\ z - w)$$

$$f \circ g(x,y,z,w) = f\,g(x,y,z,w)$$

$$= f(\underbrace{x+z+w}_{x}, \underbrace{y-w}_{y}, \underbrace{-x-y-z+w}_{z}, \underbrace{z-w}_{w})$$

$$= (x + z + w - y + w - x - y - z + w - z + w,$$
$$y - w + x + y + z - w + z - w,$$
$$-x - y - z + w,$$
$$x + z + w + x + y + z - w)$$

$$= [4w - 2y - z,\ x + 2y + 2z - 3w,\ -x - y - z + w,\ 2x + y + 2z)$$

Exemplo

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\varphi(1,0) = (4,3,1)$

$\varphi(0,1) = (1,2,5)$

$\varphi(5,2) = \varphi(5(1,0) + 2(0,1))$
$= 5(4,3,1) + 2(1,2,5)$
$= (22,19,15)$

$\varphi(x,y) = x\,\varphi(1,0) + y\,\varphi(0,1)$
$= x(4,3,1) + y(1,2,5)$
$= (4x+y,\ 3x+2y,\ x+5y)$

$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matriz cujas colunas são as imagens dos vetores da base de $\mathbb{R}^2$ escritos na base canónica de $\mathbb{R}^3$; denota-se $M(\varphi, c, c)$

$M.\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+y \\ 3x+2y \\ x+5y \end{bmatrix}$

consideremos $B = ((1,1)_e, (0,2)_c)$, uma base de $\mathbb{R}^2$

$(x,y)_c = x(1,0) + y(0,1)$
$= x(1,1) + y(0,2)$
$= \left(x, \frac{y-x}{2}\right)_B$

$(x,y) = (\alpha, \alpha + 2\beta)$

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,2)$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 2\beta \end{cases}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & \frac{y-x}{2} \end{array}\right]$

$\varphi(\alpha,\beta)_B = \varphi(\alpha(1,1) + \beta(0,2))$
$= \alpha(\varphi(1,1)) + \beta\varphi(0,2)$
$= \alpha(5,5,6) + \beta(2,4,10)$
$= (5\alpha + 2\beta,\ 5\alpha + 4\beta,\ 6\alpha + 10\beta)$

$\varphi(1,1) = (5,5,6)_e$

$\varphi(0,2) = (2,4,10)_c$

$M(\varphi, B, C).\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha + 2\beta \\ 5\alpha + 4\beta \\ 6\alpha + 10\beta \end{bmatrix}$

$(-1,5)_e = -(1,1) + 3(0,2) = (-1,3)_B$

$M(\varphi, c, c).\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 24 \end{bmatrix}$

$M(\varphi, B, c).\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 24 \end{bmatrix}_c$

Seja $\mathcal{U}$ de E' uma a.p. Fixando em $E = (e_1, e_2, e_3)$ uma base B ~~em~~ $B' (e'_1, e'_2, e'_3)$ e p em E' uma base a

matriz cujas colunas sejam as
são as imagens

a matriz cujas colunas são as imagens dos vetores de B, escritos na base B' é chamada matriz da aplicação linear $\mathcal{U}$ em relação às bases consideradas. Denota-se $M(\mathcal{U}, B, B') = M(\mathcal{U}, (e_i)_i, (e'_j))$

com a matriz M assim definida, para obter $\mathcal{U}(v)$ (com $v \in E$ dado na base B) na base B', basta multiplicar M pelo vector v

exercício 3.17

b) $(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1)$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \gamma = z - y \end{cases} \qquad (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x,y,z) &= \Psi(x(1,0,0) + y(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)) \\ &= x\Psi(1,0,0) + y\Psi(0,1,1) + (z-y)\Psi(0,0,1) \\ &= x(1,0,2,0) + y(0,1,-2,0) + (z-y)(1,1,0,0) \\ &= (x - y + z;\ z;\ 2x - 2y;\ 0) \end{aligned}$$

b_2)

$$\begin{aligned} Nuc(\Theta) &= \{ v \in \mathbb{R}^3 : \Psi(v) = (0,0,0,0) \} \\ &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y + z;\ z;\ 2x - 2y;\ 0) = (0,0,0,0) \} \\ &= \{ (x,x,0) \in \mathbb{R}^3 \} = \langle (1,1,0) \rangle \end{aligned}$$

b_3)

$$\begin{aligned} Im(\Psi) &= \langle \mathcal{U}(e_1); \mathcal{U}(e_2); \mathcal{U}(e_3) \rangle \\ &= \langle (1,0,2,0); (0,1,-2;0), (1,1,0,0) \rangle \end{aligned}$$

sendo e_1, e_2, e_3 uma base $\mathbb{R}^3$

$\varphi : E \to E'$

$B \to B'$

(v_1, v_2, v_3)

$$M(\varphi, B, B') = \begin{bmatrix} \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

$\varphi(v_2)$ $\qquad$ φ

$\varphi(v_1)$

escritos na base B'

Exercício 4.1

a) $M(\varphi, C_2, C_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$\varphi(1,0) = (2,4)$

$\varphi(0,1) = (3,-5)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$M(\varphi, C_3, C_2) = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

e)

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$M(\varphi, C_4, C_1) = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$\varphi(\mathbb{R}^4) = (1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)$

h) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$ base canónica $\mathbb{R}[x]$

(a_0, a_1, a_2)

$$M(\varphi, B, C_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

c)

$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$

escrever um vetor na base B é o mesmo que escrever a combinação linear dos vetores de B desse vetor.

<u>exercício 4.2</u>

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\boxed{\mathcal{C}_2 \rightarrow B}$ $\qquad M(\varphi, \mathcal{C}_2, B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = ((1,1,1);(1,1,0),(1,0,0))$

$\varphi(1,0) = (2,1,3)_c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_B = (3,-2,1)_B$

$\varphi(0,1) = (1,-2,0)_c = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_B = (0,-2,3)_B$

- $\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) = (2,1,3)$
- $\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) = (1,-2,0)$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3_B \rightarrow \mathbb{R}^3_B$

$\varphi(1,-1,1) = (4,3,-3)_c$ $\qquad B = ((1,-1,1);(2,1,1);(1,1,0))$

$\varphi(2,1,1) = (3,5,4)_c$ $\qquad M(\varphi, B, B)$

$\varphi(1,1,0) = (0,2,-2)_c$

Para encontrar as componentes destas imagens na base B, resolvemos os 3 sistemas em simultaneo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 13 & 4 \end{array}\right]$$

$M(\varphi, B, B)$

$\varphi(1) \to 0$

$\varphi(x) \to 1$

$\varphi(x^2) \to 2x$

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}[x]$

$(1, x, x^2) \qquad (1, x)$

$$M(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercicio 4.3

a) $(5,7) = \alpha_1(1,3) + \alpha_2(2,-1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 19/7 \\ \alpha_2 = 8/7 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19/7 \\ 8/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/7 \\ 73/7 \\ 51/7 \end{bmatrix}$$

exercicio 4.4

$(0,0,0)_\mathcal{E} = (0,0,0)_B \qquad \mathbb{R}^3 = B \curvearrowright \mathbb{R}^4 = B'$

Para calcular $Nuc(\varphi)$ resolvemos o sistema homogénio

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

então $Nuc(\varphi) = \{(0,0,0)\}$, logo φ é um monomorfismo

$F = \langle x \rangle$, então $Im(F) = \langle \varphi(x) \rangle$

$F = \{(-2y+z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-2,1,0); (1,0,1) \rangle$

$x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x = -2y + z$ então $\varphi(F) = \langle \varphi(-2,1,0); \varphi(1,0,1) \rangle$

$(-2,1,0)_\mathcal{E} = \alpha_1(B) + \alpha_2(B) + \alpha_3(B) = (-1,1,-1)_B$

$(1,0,1)_\mathcal{E} = (2/5, 1/5, 1/5)_B$

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{B'} \qquad \varphi(-2,1,0) = (-4,-1,-4,1)_{B'}$$

$= -4(1,2,0,0) - (1,1,1,1) - 4(2,-1,1,0) + (0,1,1,$

$= (\qquad)_\mathcal{E}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \\ 6 \end{bmatrix}_{B'}$$

$\varphi : E \to E'$

$\quad\ B \to B'$

$(e_1, \dots, e_k) \quad (e_1', \dots, e_k')$

$$\varphi(e_i) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \dots + \alpha_k e_k'$$

$$M(\varphi; B, B') = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{bmatrix}}_{\text{escritos na base } B'}$$

$\varphi_1 \longleftrightarrow M_1$

$\varphi_2 \longleftrightarrow M_2$

então $\varphi_1 + \varphi_2 \longleftrightarrow M_1 + M_2$

e $\lambda \varphi_1 \leftrightarrow \lambda M_1$

$$E_v \xrightarrow{\varphi_1} E' \xrightarrow{\varphi_2} E''$$

$$\xrightarrow{M_1} \varphi_1(v) \xrightarrow{M_2} \varphi_2(\varphi_1(v))$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)v = \varphi_2(\underset{v \in E}{\varphi_1(v)}) \in E''$$

$\varphi_1 : E \to E'$

$\varphi_2 : E' \to E''$

$\varphi_2 \circ \varphi_1 \leftrightarrow M_2 \cdot M_1$

$\varphi_1 \leftrightarrow M_1$

$\varphi_2 \leftrightarrow M_2$

$$M_{(3\times2)} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$C_{3\times2} = M_{3\times2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{etc } (6) \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = aM_1 + b.M_2 + c \times M_3 + d.M_4 + e.M_5 + f.M_6$$

$$= (a, b, c, d, e, f)_{C_{M(3\times2)}}$$

exercício 4.7

a)

P_1. $\varphi(M_1 + M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad M_2 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(M_1 + M_2) = \varphi\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} = (a_1+a_2 + 2(b_1+b_2);\ b_1+b_2+2(c_1+c_2);\ (c_1+c_2)+2(d_1+d_2)$$

$$= (a_1 + 2b_1;\ b_1+2c_1;\ c_1+2d_1) + (a_2+2b_2;\ b_2+2c_2;\ c_2+2d_2)$$

$$= \varphi(M_1) + \varphi(M_2).$$

Portanto P_1 verifica-

P_2.

$\varphi(\lambda M) = \lambda \varphi(M)$ $\quad \forall M \in M_{2\times 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(\lambda M) = \varphi\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = (\lambda a + 2\lambda b;\ \lambda b + 2\lambda c;\ \lambda c + 2\lambda d)$$

$$= \lambda \varphi(M)$$

como P_1 e P_2 .

P_2 verifica-se

b)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{C}_{M_{2\times 2}} = \left(\underset{M_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}; \underset{M_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}; \underset{M_3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}; \underset{M_4}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\right)$$

$\varphi(M_1) = (1,0,0)_{C_3}$ $\qquad \varphi(M_3) = (0,2,1)_{C_3}$

$\varphi(M_2) = (2,1,0)_{C_3}$ $\qquad \varphi(M_4) = (0,0,2)_{C_3}$

Agora resolvendo o Pedido:

$$B_3 = ((1,1,1);(1,1,0);(1,0,0))$$

conversão da forma canónica para Base B_3

$(1,0,0)_C = (0,0,1)_{B_3}$ $\qquad \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) = (1,0,0)_C$

$(2,1,0)_C = (0,1,1)_{B_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$(0,2,1)_C = (1,1,-2)_{B_3}$

$(0,0,2)_C = (2;-2;0)_{B_3}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

c) φ é um epimorfismo sse $Im(\varphi) \in IR^3$

$\Leftrightarrow \varphi(M_{2\times2}) = IR^3$

$= \langle (\varphi(M_1); \varphi(M_2); \varphi(M_3); \varphi(M_4)) \rangle$

neste caso haveria 3 vetores lin. indep. e φ será um epimorfismos porque constitui um espaço de IR^3;

d)

$\varphi^{-1}(-1;3;1) = \{A \in M_{2\times2} : \varphi(A) = (-1,3,1)\}$

$A = (a,b,c,d)_{C_{M_{2\times2}}}$

$$M \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.8

$\varphi: IR^3 \to M_{3\times2}$

$(B_3) \to (C)$

a) $B_3 = ((1,1,0);(1,0,1);(0,1,1))$

$$M = (\varphi; B_3; C_{M_{3\times2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{M_{3\times2}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_4}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_5}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_6} \right)$$

b)

$Nuc(\varphi) = \{(x,y,z) \in IR^3 : \varphi(x,y,z) = (0,0,0,0,0,0)\}$

$= \{(0,0,0)\} = \langle \vec{0} \rangle$

é um monomorfismo

e)

$\varphi(W) = \langle \varphi(1,1,1); \varphi(2,1,-1) \rangle$

$\varphi(1,1,1) = M . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ onde $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ são as componentes de $(1,1,1)_c$ na base B_3

Igualmente,

$\varphi(2,1,-1) = M . \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{B_3}$

Banho - Maria

Mudança de base

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "id"] & E \\ B \arrow[r, "M"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ (e_1, e_2, \dots, e_n) & (e_1', e_2', \dots, e_n') \end{tikzcd}$$

$$M = (id; B; B') = \Bigg[\underbrace{e_1 \quad e_2 \quad e_3 \ \dots \ e_n}_{\text{escritos na base } e_1', e_2', \dots, e_n'} \Bigg]$$

$$C_3 = ((1,0,0); (0,1,0); (0,0,1))$$

$$B_3 = ((1,1,0); (1,0,1); (0,1,0))$$

$M =$

$$(1,0,0)_c = \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (1,0,1) + \alpha_3 (0,1,1)$$

$$(0,1,0)_c = \beta_1 (\ '' \ ) + \beta_2 (\ '' \ ) + \beta_3 (0,1,1)$$

$$(0,0,1)_c = \theta_1 (\ '' \ ) + \theta_2 (\ '' \ ) + \theta_3 (\ '' \ )$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A} \longrightarrow \left[\, Id \;\middle|\; A^{-1} \,\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ Id & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

dado um vetor na base canónica de $\mathbb{R}^3$, as suas componentes na Base B_3 obtêm-se multiplicando esse vetor pela matriz A^{-1}.

$$id: \mathbb{R}^3_{C_3} \xrightarrow{A^{-1}} \mathbb{R}^3_{B_3}$$

Retomamos o banho-maria de 4.8.c)

$$(1,1,1)_e = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_{B_3} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{B_3}$$

$$(2,1,-1)_c = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_3}$$

$$\varphi(1,1,1)_C = M \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(2,1,-1)_C = M \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(W) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
E_{B_1} \arrow[r, "\varphi"', "A"] & E'_{B_1'} \arrow[d, "Id.\ Q"] \\
E_{B_2} \arrow[u, "Id.\ P"] \arrow[r, "\varphi", "B"'] & E'_{B_2'}
\end{tikzcd}$$

$B.v = Q A P v$

esquema melhorado

$$\begin{tikzcd}
E_{B_1} \arrow[r, "\varphi", "A"'] \arrow[d, "P"'] & F_{B_2} \arrow[d, "Q"] \\
E_{D_1} \arrow[u, bend right, "P^{-1}"'] \arrow[r, "\varphi", "B"'] & F_{D_2}
\end{tikzcd}$$

Q (matriz de mudança base)

$B = Q . A . P^{-1}$

$B . v = Q . A . P^{-1} . v$

- transforma o vetor v dado na base D_1 para o mesmo vetor v na base B_1
- imagem de v escrita na base B_2;
- imagem de v escrita na base D_2;

- P será a matriz que "aceita" vetores escritos na base B_1 e "devolve-os" escritos na base D_1
- Q é a matriz que "aceita" vetores escritos na base B_2 e "devolve-os" escritos na base D_2.
- As colunas da matriz P são os vetores da base B_1, escritos na base D_1

As colunas da matriz Q são os vetores da base de B_2 escritos na base D_2

As matrizes P e Q, quando alguma das bases é a canónica, obtem-se muito facilmente:

$$\underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{\ P\ } \underset{\mathcal{C}_3}{\mathbb{R}^3}$$

$$B_3 = ((1,1,1);(1,1,0);(1,0,0))$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ao contrário, a matriz que "passa" de $\mathcal{C}_3$ para B_3 será a matriz P^{-1}

$\boxed{4.13}$

a) $\varphi(1,0) = (1,1,2)$

$\varphi(0,1) = (1,-1,3)$

$$A = (\varphi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{C}_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "\varphi"', "A"] & \underset{\mathcal{C}_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{B_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\varphi", "B"'] & \underset{B_3}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

P terá por coluna os vetores de B_2 escritos na base $\mathcal{C}_2$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Q terá por colunas os vetores de $\mathcal{C}_3$ escritos na B_3. Mas podemos considerar o inverso Q^{-1} que terá como colunas os vetores de B_3, escritos na base $\mathcal{C}_3$.

$\boxed{4.14}$

$$\begin{tikzcd}
\underset{B_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\varphi"', "A"] & \underset{\mathcal{C}_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{\mathcal{C}_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\varphi", "B"'] & \underset{B_2}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

$B_3 = [(2,1,1),(-1,2,1),(1,1,0)]$

$B_2 = [(-1,1);(2,3)]$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$B = QAP$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & -5/4 \end{array}\right]$$

(the right-hand block is marked P)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cap. 4 [Matrizes]

Valores e vetores próprios

Seja $(E, K, +, \cdot)$ um espaço vetorial e seja $\varphi : E \to E$ um endomorfismo chamamos a $\lambda \in K$, valor próprio de φ, sse existir $v \in E$, $v \neq 0$, tal que $\varphi(v) = \lambda . v$

ao vetor v que verifica a igualdade chamamos vetor próprio de φ associado ao valor próprio λ.

$$\varphi(5v) = \lambda(5v)$$
$$\Leftrightarrow 5\varphi(v) = 5\lambda . v$$

associada a cada endomorfismo, está uma matriz quadrada, que o representa em relação a certas bases.
Seja A a matriz que representa φ. chamamos valor próprio de A aos valores próprios de φ, isto é, λ é valor próprio de A sse existir

$$v \in E,\ v \neq \vec{0},\ \text{tal que } A.v = \lambda . v$$

Igualmente, definimos vector próprio de A associados a λ.

como calculá-los?

Para λ ser valor próprio de A, terá de existir $v \neq \vec{0}$ tal que

$$A.v = \lambda . v \Leftrightarrow A.v - \lambda . v = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\, v = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$\downarrow$

visto $v \neq \vec{0}$

4.1

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)^2 - 1$$
$$= (2-\lambda-1).(2-\lambda+1)$$
$$= (-\lambda+1).(-\lambda+3) = (\lambda-1).(\lambda-3)$$

$x(1,-1)$, x_0

$\lambda_1 = (x, -x$

os valores próprios de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$

agora os vetores próprios associados aos valores próprios

$\boxed{\lambda = 1}$ $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} . v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x + y = 0$

$x + y = 0$

$x = -y$

6.1

b) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

não tem valores próprios em $\mathbb{R}$

d)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

vetores próprios

$v \neq 0 : (A - \lambda I) v = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

todos os vetores próprios são vetores de $\mathbb{R}^2$.

f) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + 1 + 0 - (1-\lambda)$$

$= \lambda^2(2-\lambda)$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2$

Vetores próprios

$(A - \lambda I) v = 0$

$\underline{\lambda = 0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$$

$\{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$\underline{\lambda = 2}$

$(A - \lambda I) v = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$$

$\{(z, -z, z) : z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

diz-se que r, uma raiz de um polinómio $p(\lambda)$, tem multiplicidade algébrica m, quando $p(\lambda) = (\lambda - r)^m \cdot q(\lambda)$, onde $q(\lambda)$ não admite r como raiz.

def: sendo um valor próprio de uma matriz A, raiz da sua equação característica $|A - \lambda I| = 0$, ou seja, raiz do seu polinómio característico, diremos que λ tem multiplicidade algébrica m se for raiz do polinómio carac. com a mesma multiplicidade m. Denota-se $m_a(\lambda) = m$

def: dada uma matriz $A_{n\times n}$, com valor próprio λ. Os vetores próprios associados a λ serão soluções de um sistema linear homogénio e, por tal, se considerarmos juntamente o vetor $\vec{0}$, constitui um subespaço vectorial. A dimensão desse subespaço denotamo-la $m_g(\lambda)$
multiplicidade geométrica

4.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & k \end{bmatrix} : |A - \lambda I| = (1-\lambda^2)\cdot(k-\lambda) + 4 - 2k$$

para que $\lambda = -1$ seja val. prop. A terá de ser raiz deste polinómio

$$(1+1^2)(k+1) + 4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = -4$$

agora para $k = -4$, calculemos as raízes do polinómio

$$(1-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda) + 4 + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda + 8 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -2 & 7 & 8 \\ -1 & \downarrow & 1 & 1 & -8 \\ \hline & -1 & -1 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)\cdot(-\lambda^2 - \lambda + 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \lor \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \lor \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \lor \lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$$

$$m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$$

vetores próprios associados a $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A+I)v = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$$

$$\{(-y, y, -y) : y \neq 0\} = \langle(-1, 1, 1)\rangle \setminus \{\vec{0}\}$$

$$m_g(-1) = 1$$

4.7

a) $\underbrace{A_{n \times n} \text{ é invertível}}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{A \text{ não admite } \lambda = 0 \text{ como valores próprios}}_{B}$

"A" $\Rightarrow$ "B"

A invertível, para que 0 seja val. prop. de A, $A\vec{v} = 0$ para algum $\vec{v} \neq \vec{0}$ mas como A é invertível

$$A\vec{v} = 0 \Rightarrow A^{-1} . A . \vec{v} = A^{-1} \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$, o que contraria o facto de $\vec{v}$ ser vetor próprio

$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}, \ \vec{v} \neq 0}$

"B" $\Rightarrow$ "A" A não admite V.p 0, quer dizer que não existe $\vec{v} \neq 0$ tal que $A . \vec{v} \neq \vec{0}$. ou seja, $A\vec{v} = \vec{0}$ tem solução única $\vec{v} = \vec{0}$, então o endomorfismo φ, representado pela matriz, teria $Nuc(\varphi) = 0$, φ é injetiva (monomorfismo) logo tem inverso. A matriz A tem, então tbm A é invertível.

4.8.

a)

$\vec{v}$ é vetor próprio de A $\Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda . \vec{v}$ para algum λ
$\Rightarrow AA\vec{v} = A \lambda \vec{v}$
$\Leftrightarrow A^2 \vec{v} = A \lambda \vec{v}$
$\Leftrightarrow A^2 \vec{v} = \lambda^2 \vec{v}$ ou seja, $\vec{v}$ é vetor próprio de A^2 associado a λ^2

4.10

$A_{n \times n}$ tem n valores próprios distintos, $m_a(\lambda_i) = 1 \ \forall_i$

como $mg(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$

obtemos $mg(\lambda_i) = 1$

então $mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) + \dots + mg(\lambda_n)$
$= 1 + 1 + \dots + 1 = n$

exercício 4.4

a) $p(\lambda) = |A - \lambda . I|$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$

$= (2-\lambda).(3-\lambda-1).(3-\lambda+1)$

$= (2-\lambda).(2-\lambda).(4-\lambda)$

$= \lambda_1 = 2 \lor \lambda_2 = 4$

$ma(\lambda_1) = 2$

$ma(\lambda_2) = 1 \Rightarrow mg(\lambda_2) = 1$

vetores próprios

$\lambda_1 = 2$

$(A - \lambda . I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x = y + z \end{array}$$

$\{(y+z; y; z) : y, z \in \mathbb{R}\} \setminus \{\vec{0}\}$

$= \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$

$mg(\lambda_1) = 2$

$mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) = 2 + 1 = 3$ é diagonizável

apesar de não ser pedido, calcular a matriz D tal que $A' = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Precisamos dos vetores próprios associados a $\lambda_2 = 4$

$(A - \lambda . I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ x = -y \end{array}$$

$\{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \setminus \{\vec{0}\}$

$= \langle (-1,1,0) \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{\lambda_1} \quad \lambda_2 \end{array} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

exercício 6.14

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - (-1-\lambda) + (-1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda).(2-\lambda).(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \lor \lambda_2 = 2 \lor \lambda_3 = -1$

$ma(\lambda_i) = 1 \quad \forall_i$

$mg(\lambda_i) = 1$, logo $\sum_{i=3}^{3} mg(\lambda_i) = 3$

$\Rightarrow A$ é diagonalizável

vetores próprios

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} y = 2z \\ x = 3z \end{cases}$$

$E_{\lambda_1} = \{(3z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (3, 2, 1) \rangle$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} y = 3z \\ x = z \end{cases}$$

$E_{\lambda_2} = \langle (1, 3, 1) \rangle$

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$E_{\lambda_3} = \langle (1, 0, 1) \rangle$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = 1/6 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A' = 1/6 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A' = P^{-1} A . P \Leftrightarrow A = P . A' . P^{-1}$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} 1/6 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \text{T.p.c}$$

$\downarrow$
$(A')^5$

$$A^{-1} = (P . A' . P^{-1})^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . P = \text{T.p.c}$$

exercício 1.5

Teorema 1.2 manual 3

$$\rho(x, \vec{0}) = \rho(\vec{x}, \vec{0} + \vec{0}) = \rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{x}, \vec{0})$$

$$\rho(x, \vec{0}) = \rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{x}, \vec{0}) - \rho(x, \vec{0}) + \rho(\vec{x}, \vec{0}) =$$
$$= -\rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{x}, \vec{0})$$
$$= \rho(\vec{x}, \vec{0})$$

$$A = \begin{bmatrix} \rho(e_1; e_1) & \rho(e_1; e_2) & \rho(e_1; e_3) \\ \rho(e_2; e_1) & \rho(e_2; e_2) & \rho(e_2; e_3) \\ \rho(e_3; e_1) & \rho(e_3; e_2) & \rho(e_3; e_3) \end{bmatrix}$$

base composta por os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ é a base considerada no exemplo demonstrado no 1º Manual

exercício 1.11

a)

$$\rho((u_1, u_2); (v_1, v_2)) = u_1 v_1 - 3u_1 v_2 + 5 u_2 v_1 - 7 u_2 v_2$$

A representa ρ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2 = ((1,0);(0;1))$

$$A = \begin{bmatrix} \rho(e_1; e_1) & \rho(e_1; e_2) \\ \rho(e_2; e_1) & \rho(e_2; e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

a) $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad P^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 64 \\ -24 & -71 \end{bmatrix}$$

a_2)

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^T$ $\quad A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ base canónica

$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \end{matrix}$

Exercício 1.12

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (\Sigma a_{ij} \cdot x_i y_i, \dots, \dots, \dots)$$

$\vec{e}_1 = (0,-1,1)$

$\vec{e}_2 = (2,1,1)$

$\vec{e}_3 = (-1,1,2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $\underbrace{A'}_{\text{relativa à base canónica}} = P^T A \underbrace{P}_{\text{matriz que tem os vetores da base canónica escritos na base B.}}$

P^{-1} será a inversa de P mas facilmente a obtemos porque é a matriz que tem os vetores da base B escritos na base canónica.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calculemos P

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & -5/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

(the right-hand block is P)

$$A' = P^T \cdot A \cdot P = 1/64 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 3/4 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & -3/8 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b)

$$f((x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2,y_3)) = 1/8\,(x_1,x_2,x_3) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 1/8 \cdot (-x_1 + 6x_2 ;\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 ;\ x_1 - 2x_2 + 4x_3) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 1/8\,(-x_1y_1 + 6x_2y_1 + 4x_1y_2 - x_2y_2 - 3x_3y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_3 + 4x_3y_3)$$

c) escrevendo u na base B para podermos usar a matriz A.

$(1,2,3) = \alpha_1(0,-1,1) + \alpha_2(2,1,1) + \alpha_3(-1,1,2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$f(\vec{u},\vec{v}) = U^T \cdot A \cdot V$

$\vec{v} = (4, 2, 4)$

exercício 1.17 . 1.19

em $\mathbb{R}^2$

$a_1)$

$$\rho((y_1;y_2),(x_1;x_2)) = 5y_1x_1 + 3y_1x_2 + 3y_2x_1 - 2y_2x_2$$
$$= 5x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 - 2x_2y_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_i \\ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall_i = 1,\dots,n \quad \text{simétrica} \\ a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall_i = 1,\dots,n \quad \text{anti-simétrica} \end{array}}$$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ simétrica

$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$a_3)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ anti-simétrica

$a_2)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra

$b_1)$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra

$b_2)$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ simétrica

Formas quadráticas

$a_1)$

$$Q(x) = \rho(x,x) = 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 - 2x_2^2 = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2$$

$b_1)$ $Q(x) = 4x_1^2 - 2x_1x_3 - 7x_2^2 + 2x_3x_1 + x_3x_2 = 4x_1^2 - 7x_2^2 + x_3x_2$

$b_5)$ $Q(x) = \underbrace{-3x_1x_2 + 7x_1x_3 + 3x_2x_1 - x_2x_3 - 7x_3x_1 + x_3x_2}_{=0}$

exercício 1.22

$a_1)$ $Q(x) = 5x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_2^2$

FP: $5x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 2x_2y_2$

f aplicação linear

$$\left.\begin{aligned} f &: E \times E' \longrightarrow F \\ f &: E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{Forma linear}$$

matriz de f, relativa à base $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{ij} &= f(e_i, e_j) \\ f(\vec{x}, \vec{y}) &= X^T A Y = (x_1, \dots, x_n).[A].\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se B_1 e B_2 bases de E. Se A representa f na base B_1, $A' = P^T A P$ representa f na base b. B_2, sendo P a matriz que tem por colunas os vetores de B_2 escritos na base B_1.

$$u_{B_2}^T A' v_{B_2} = u_{B_2}^T . P^T A P v_{B_2} = u_{B_1}^T A v_{B_2}$$

Forma bilinear simétrica

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$\Rightarrow$ A matriz correspondente é tb simétrica, $A = A^T$

Forma quadrática associada a uma forma bilinear

$$Q(x) = f(x, x)$$

exer. 1.23

$$Q(x) = f(x, x) = 5x_1^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 9x_3^2$$

$$g(x; y) = 5x_1y_1 + 8x_2y_2 + 9x_3y_3 + \underbrace{x_1y_2 + 2x_2y_1}_{3x_1x_2} + \underbrace{x_1y_3}_{-x_1x_3} + \underbrace{2x_2y_3 + 2x_3y_2}_{4x_2x_3}$$

exer. 1.22

Em termos de matrizes. Escreva a matriz de f em relação à base canónica e a matriz da sua forma polar

a.) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad Q(x) = 5x_1^2 + 10x_1y_2 - 2x_2^2$

$$FP = \frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

b.)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad f.p = \begin{bmatrix} 5 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & 8 & 2 \\ -1/2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Teorema

Seja f uma forma bilinear simétrica e A a matriz que a representa (se f não for simétrica usamos a sua forma polar)

a) f é definida positiva sse todos os valores próprios de A forem positivos; (>0)

b) f é def. negativa sse todos os valores próprios de A forem negativos; (<0)

c) f é semidefinida positiva se todos os valores próprios de A forem não negativos; (≥ 0)

d) f é semidefinida negativa se todos os valores próprios de A forem não positivos (≤ 0)

e) f é indefinida se A tiver valores próprios ~~p~~ negativos e positivos

1.24

- menores principais
- valores próprios

a$_1$) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ F.P $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0$ def. positiva

valores próprios

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda).(3-\lambda) - 1 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5$

$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2}$ → $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 0$; $\frac{5-\sqrt{5}}{2} > 0$

b$_5$)

F.P $= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -2 < 0$

$\Delta_2 = 3 > 0$ semi-definida negativa

$\Delta_3 = 0$

Exercício 2.9 — Encontrar geradores de subespaços em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 13y = 0 \\ x = 5y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$S = \{(0,0)\} = \langle \emptyset \rangle$

2. $x - 3y = 0$

$x = 3y$

$S = \{(3y, y) : y \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (3,1) \rangle$

$(3y, y) = y(3,1)$

3. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x \\ 0x = 0 \end{cases}$ $(x, 2x) = x(1,2)$

$S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1,2) \rangle$

---

1. $2x - y + 6z = 0$

$y = 2x + 6z$

$S = \{(x, 2x+6z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1,2,0); (0,6,1) \rangle$

2. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{\ }{11} z \\ y = 3x + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5/11\, z \\ y = -7/11\, z \end{cases}$

$S = \{(-5/11\, z, -7/11\, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (-5/11; -7/11; 1) \rangle$
$= \langle (-5; -7; 11) \rangle$

3. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -8/3\, z + 3z \\ y = \frac{4z}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1/3\, z \\ y = \frac{4}{3} z \end{cases}$

$S = \{(1/3\, z, 4/3\, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1; 4; 3) \rangle$

4. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

$S = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ $\langle (1,-1,0) \rangle$

---

1. $2x + y - 3z + 2w = 0$ $y = -2x + 3z - 2w$

$S = \{(x, -2x + 3z - 2w, z, w) : x, z, w \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-2,0,0); (0,3,1,0), (0,-2,0,1) \rangle$

2. $\begin{cases} 3x - 4y + z - 2w = 0 \\ x + 3y + 2z + 5w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -9y - 6z - 15w - 4y + z - 2w = 0 \\ x = -3y - 2z - 5w \end{cases}$ $\begin{cases} z = -\frac{13}{5} y - \frac{17w}{5} \\ x = -3y + \frac{26}{5} y + \frac{34}{5} w - 5w \end{cases}$

$S = \{(11/5\, y - 34w, y, -\frac{13}{5} y - 17/5\, w, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$ $\begin{cases} z = -13/5\, y - \frac{17}{5} w \\ x = 11/5\, y - 34w \end{cases}$

$= \langle (11/5, 1, -13/5, 0); (-34, 0, -17/5, 1) \rangle$
$= \langle (11, 5, -13, 0); (-170, 0, -17, 5) \rangle$

3. $\begin{cases} 2x - y - z + 2w = 0 \\ x + 3w = 0 \\ y - 2z + 4w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = -3w \\ y = 2z - 4w \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = -3w \\ y = -4w \end{cases}$

$S = \{(-3w, -4w, 0, w) : w \in \mathbb{R}\}$
$= \langle(-3, -4, 0, 1)\rangle$

4. $\begin{cases} x + y + z - 2w = 0 \\ 2y - z - w = 0 \\ x + 3y - 3w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0y = 0 \\ z = 2y - w \\ x = -3y + 3w \end{cases}$ $\begin{cases} 0y = 0 \\ z = 2y - w \\ x = -3y + 3w \end{cases}$

$S = \{(-3y + 3w, y, 2y - w, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$
$= \langle(-3, 1, 2, 0); (3, 0, -1, 1)\rangle$

5. $\begin{cases} 2y - 2z + w = 0 \\ x + z - 3w = 0 \\ x - 2y + 2w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3/2\, w \\ z = -2y + 5w \\ x = 2y - 2w \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3/2\, w \\ z = 2w \\ x = w \end{cases}$

$S = \{(w, 3/2\, w, 2w, w) : w \in \mathbb{R}\}$
$= \langle(1, 3/2, 2, 1)\rangle = \langle(2, 3, 4, 2)\rangle$

Encontrar expressões cartesianas para subespaços $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

1. $F = \langle(2, 1)\rangle = \{\alpha(2, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$

$(x, y) = \alpha(2, 1)$ $\Rightarrow x - 2y = 0$

$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ y = \alpha \end{cases}$

2. $F = \langle(-3, 5)\rangle = \{\alpha(-3, 5) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{3}{5}y\}$

$(x, y) = \alpha(-3, 5)$ $\Rightarrow 5x + 3y = 0$

$\begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 5\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3/5\, y \\ \alpha = y/5 \end{cases}$

3. $F = \{\vec{0}\} = \{\alpha(0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ tal que a equação cartesiana seja a possível determinada

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4. $F = \mathbb{R}^2$ equação universal do género $0x + 0y = 0$

Teorema de Steinitz

exercício 1.22

a) construir, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, um sistema de vetores equivalentes a

$$<(1,1,0);(0,1,1);(1,0,1)>$$

que inclua os vetores

$$(1,2,3) \text{ e } (3,2,1)$$

$\vec{v}_1 = (1,1,0)$ $\quad \vec{u}_1 = (1,2,3)$ $\quad u_1 = \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2) + \alpha_3(v_3)$

$\vec{v}_2 = (0,1,1)$ $\quad \vec{u}_2 = (3,2,1)$ $\quad u_2 = \beta_1(v_1) + \beta_2(v_2) + \beta_3(v_3)$

$\vec{v}_3 = (1,0,1)$

$(1,2,3) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$

$(3,2,1) = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(1,0,1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\vec{u}_1 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ $\quad$ u_1 pode substituir v_2 ou v_3

$\vec{u}_2 = -2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ $\quad$ u_2 pode substituir v_1, v_2 ou v_3

$<(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_1)> \approx <(\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1)>$

por transitividade $\quad <(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)> \approx <(v_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1)>$

b) construir, no espaço vetorial $\mathbb{R}[x]$, um sistema de vetores equivalente $(1+2x^2, 2-x-x^2, 1+x-x^2)$ que inclua os vetores $1+x$ e $2-x$

$u_1 = 1+x$ $\quad v_1 = 1+2x^2$ $\quad u_1 = \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2) + \alpha_3(v_3)$

$u_2 = 2-x$ $\quad v_2 = 2-x-x^2$ $\quad u_2 = \beta_1(v_1) + \beta_2(v_2) + \beta_3(v_3)$

$v_3 = 1+x-x^2$

1. $F = \langle (2,1,1),(-1,1,3) \rangle = \{ \alpha(2,1,1) + \beta(-1,1,3) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 7y + 3z = 0 \}$

$(x,y,z) = \alpha(2,1,1) + \beta(-1,1,3)$

$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 3\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ y = 3\alpha - x \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ \alpha = y/3 - x/3 \\ z = y/3 - x/3 + 6\alpha - 3x \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ \alpha = y/3 - x/3 \\ z = y/3 - x/3 + \frac{6y}{3} \quad 6x/3 - 3x \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 2\alpha - x \\ \alpha = y/3 - x/3 \\ \boxed{-2x + 7y - 3z = 0} \end{cases}$

2. $F = \langle (1,0,2);(-3,1,0) \rangle = \{ \alpha(1,0,2) + \beta(-3,1,0) \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 6y + z = 0 \}$

$(x,y,z) = \alpha(1,0,2) + \beta(-3,1,0)$

$\begin{cases} x = \alpha - 3\beta \\ y = \beta \\ z = 2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = z/2 - 3y \\ \beta = y \\ \alpha = z/2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 6y + z = 0 \\ \beta = y \\ \alpha = z/2 \end{cases}$

3. $F = \langle (3,2,1) \rangle = \{ \alpha(3,2,1) : \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3z \wedge y = 2z$

$(x,y,z) = \alpha(3,2,1)$

$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ \alpha = z \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

4. $F = \langle (0,3,4) \rangle = \{ \alpha(0,3,4) : \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge 3z - 4y = 0 \}$

$(x,y,z) = \alpha(0,3,4)$

$\begin{cases} x = 0\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ \alpha = y/3 \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases}$

---

1. $F = \langle (1 - x + x^2),(2 + x - x^2) \rangle$

$= \{ \alpha(1 - x + x^2) + \beta(2 + x - x^2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$ax^2 + bx + c = \alpha(1 - x + x^2) + \beta(2 + x - x^2)$

$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = -\alpha + \beta \\ c = \alpha + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \beta - a \end{cases}$

$\mathcal{l}(1,0) = (4,3,1)$

$\mathcal{l}(0,1) = (1,2,5)$

$\mathcal{l}(5,2) = \mathcal{l}(5(1,0)) + \mathcal{l}(2(0,1))$

$= 5(4,3,1) + 2(1,2,5)$

$= (22, 19, 15)$

ou seja,

$\mathcal{l}(x,y) = x\,\mathcal{l}(1,0) + y\,\mathcal{l}(0,1)$

$= x(4,3,1) + y(1,2,5)$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$= (4x+y \,;\, 3x+2y \,;\, x+5y)$

$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matriz cujas colunas são as imagens dos vetores da base de $\mathbb{R}^2$ escritos na base canónica de $\mathbb{R}^3$, denota-se $M(\mathcal{l}, c, c)$

$M.\vec{v} = M.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+y \\ 3x+2y \\ x+5y \end{bmatrix}$

Considerando $B = ((1,1)_c \,;\, (0,2)_c)$, uma base $\mathbb{R}^2$

$(x,y)_c = x(1,0) + y(0,1)$

$= x(1,1) + y(0,2)$

$= \left(x \,;\, \frac{y-x}{2}\right)_B$

$(x,y) = (\alpha \,;\, \alpha + 2\beta)$

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,2)$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 2\beta \end{cases}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & \frac{y-x}{2} \end{array}\right]$

$\mathcal{l}(\alpha,\beta)_B = \mathcal{l}(\alpha(1,1)) + \mathcal{l}(\beta(0,2))$

$= \alpha\,\mathcal{l}(1,1) + \beta\,\mathcal{l}(0,2)$

$= \alpha(5,5,6) + \beta(2,4,10)$

$= (5\alpha + 2\beta \,;\, 5\alpha + 4\beta \,;\, 6\alpha + 10\beta)$

$\mathcal{l}(1,1) = (5,5,6)_c$

$\mathcal{l}(0,2) = (2,4,10)_c$

$M(\mathcal{l}, B, C).\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha + 2\beta \\ 5\alpha + 4\beta \\ 6\alpha + 10\beta \end{bmatrix}$

$(-1,5)_c = -(1,1) + 3(0,2) = (-1, 3)_B$

$M(\mathcal{l}, C, C).\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 24 \end{bmatrix}$

$M(\mathcal{l}, B, C).\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 24 \end{bmatrix}_C$

2^a Frequência/Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Departamento de Matemática, Universidade de Évora

14 de Janeiro de 2017 - Teste A

2^a Frequência: Resolva os Grupos III e IV (em folhas de teste separadas) - 1h30+30m de tolerância

Exame: Resolva os Grupos I, II e III (em folhas de teste separadas) - 2h30+30m de tolerância

Grupo I

1. Para os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = c \\ x + 3y + z + aw = 0 \\ 2x + 6y + bz + 3w = -c \end{cases}$$

   a) Para $c = 0$, este sistema de equações pode ser impossível? E possível e determinado? Justifique as afirmações convenientemente.

   b) Para $a = b = c = 1$, determine o conjunto solução do sistema de equações, apresentando todos os cálculos.

2. Para A, B e C matrizes quadradas arbitrárias da mesma dimensão, com $C \neq 0$, considere a afirmação

$$AC = BC \Rightarrow A = B.$$

Demonstre-a, se for verdadeira, ou dê um exemplo de três matrizes A, B e C que não verifiquem a afirmação.

3. Considere a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcule $|D|$ e a característica da matriz D.

Grupo II

4. Considere a operação "$\oplus$", definida por

$$\oplus : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z, yw).$$

"$\oplus$" é associativa? Justifique.

5. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, se existirem, são os vectores

$$x - x^2 - x^3, -1 - 2x + kx^2 + x^3, \; -1 + x^2, \; 2 + x - x^2 + x^3$$

linearmente dependentes no espaço vectorial $R_3[x]$? Justifique.

6. Sejam $v = (1, 0, 3)$, $t = (0, 1, 1)$ e $w = (1, -1, 2)$. Considere as afirmações seguintes e diga quais são falsas e quais são verdadeiras. Justifique cada uma das respostas.

   a) Os vectores v, w não geram $\mathbb{R}^3$.

   b) O vector v pode ser obtido como combinação linear dos vectores t e w.

   c) Os vectores v, t, w formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Grupo III

7. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ os subespaços $F = \langle (1,-1,-2,1),(0,1,-2,0)\rangle$ e $G = \{(x,y,z,w) \ : \ x+2y-z-w=0, y-z-w=0\}$.

   a) Determine uma base para G.

   b) Determine uma base para $F+G$ e dim $(F \cap G)$.

8. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(x,y,z) = (x+y-z, x+3y+z).$$

   a) Mostre que φ é linear.

   b) Determine $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$.

   c) φ é um monomorfismo? φ é um epimorfismo? Justifique ambas as respostas.

9. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

   em relação à base $(1,2,0),(0,1,0),(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $(1,1),(-1,1)$ de $\mathbb{R}^2$.

   Determine a matriz da aplicação linear φ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

10. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Determine os valores próprios de B.

   b) Determine os seus vectores próprios.

   c) Diga se B é ou não diagonalizável. Justifique.

P. A. P

Grupo IV

Atenção: das perguntas 11 e 12, responda apenas a uma das questões.

11. Considere a matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule e^C.

12. Considere a aplicação bilinear $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada pela seguinte matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   (a) Determine a forma quadrática associada a f.

   (b) Classifique, justificando, f quanto à positividade (definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa ou indefinida).

EXAME DE RECURSO DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA I
Departamento de Matemática, Universidade de Évora
23 de Janeiro de 2017 - Teste A

Resolva cada grupo em folhas de teste separadas.
Duração: 2h30+30m de tolerância

Grupo I

1. Para os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} -x & -y & +4z & = & a \\ & -y & +bz & = & 1 \\ -x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$$

   a) Discuta, em função de a e b, o sistema de equações dado.

   b) Considere $a = 3$ e $b = 2$. Determine o conjunto solução do sistema.

2. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, se existirem, são os vectores

$$1 + kx^2,\ x + x^2 + x^3,\ 1 + x^2 - x^3$$

linearmente independentes no espaço vectorial real $R_3[x]$? Justifique.

3. Considere a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

-1
-3
1
-2

Calcule $|D|$ e a característica da matriz D.

Grupo II

4. Considere a operação "$\oplus$", definida por

-1 + (-3) + 1 + (-2)
= -1 - 3 - 2 + 1
-6 + 1

$$\oplus : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \oplus (z, w) = (xz, y + w).$$

"$\oplus$" admite elemento neutro? Justifique.

5. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ invertíveis e que 1 não é valor próprio de C. Resolva a equação matricial

$$(B + X^T C)^T - A = X,$$

isto é, determine a matriz X. Justifique.

6. Seja A uma matriz quadrada invertível. Mostre que se u é um vector próprio de A então u é vector próprio de A^{-1}.

Grupo III

7. Sejam $u = (2,1,5)$, $v = (1,0,1)$ e $s = (1,-1,-2)$, $t = (3,1,0)$. Considere as afirmações seguintes e diga quais são falsas e quais são verdadeiras. Justifique cada uma das respostas.

   a) Os vectores u, v, s e t são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$.

   b) O vector s pode ser obtido como combinação linear dos vectores u e v.

   c) Os vectores u, v, s, t formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

8. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ os subespaços $F = \langle(1,-1,0,1),(1,0,-2,1)\rangle$ e $G = \{(x,y,z,w) \ : \ x + 2y - z - 3w = 0\}$.

   a) Determine uma base para G.

   b) Determine uma base para $F \cap G$ e $\dim(F+G)$.

9. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x,y) = (x-y, x+3y, x+y).$$

   a) Mostre que φ é linear.

   b) Determine a matriz da aplicação linear φ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   c) Determine $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$.

   d) φ é um monomorfismo? φ é um epimorfismo? Justifique ambas as respostas.

   e) Determine a matriz da aplicação linear φ relativamente à base $(1,2),(1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ e à base $(1,-1,0),(0,2,0),(0,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

10. Considere a matriz $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Determine os valores próprios de E.

   b) Determine os seus vetores próprios.

   c) Diga se existe uma matriz invertível P, tal que $A = P^{-1}EP$ é uma matriz diagonal. Se for possível, determine P e A. Justifique.

a
b
c

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{2 \times (-1)}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

Combinações lineares

- $(2,-1)$ é combinação linear de $(1,3)$, $(-3,4)$ em $\mathbb{R}^2$

$$(2,-1) = \alpha_1(1,3) + \alpha_2(-3,4)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 2 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5/13 \\ \alpha_2 = -7/13 \end{cases} \qquad (2,-1) = 5/13\,(1,3) - 7/13\,(-3,4)$$

- $(3,-1,2)$ é combinação linear de $(1,1,-1)$, $(-1,0,2)$, $(1,1,3)$ em $\mathbb{R}^3$

$$(3,-1,2) = \alpha_1(1,1,-1) + \alpha_2(-1,0,2) + \alpha_3(1,1,3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \alpha_3 = \end{cases}$$

} sistema possível indeterminado $\Rightarrow$ infinidade de soluções

- $5 - 7x + 4x^3$ é combinação linear de $1+x+x^3$, $1+x+x^2$; $x+x^2+x^3$, $1-x+2x^2-x^3$ em $\mathbb{R}[x]$

$$5 - 7x + 4x^3 = \alpha_1(1+x+x^3) + \alpha_2(1+x+x^2) + \alpha_3(x+x^2+x^3) + \alpha_4(1-x+2x^2-x^3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = -7 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 4 \end{cases}$$

sistema possível indeterminado } infinidade de soluções

dependência linear

combinações linearmente independentes: quando há apenas uma única de escrever o vetor zero ($\vec{0}$) como combinação linear em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = 0$

combinações linearmente dependentes: quando os coeficientes não necessitam de ser obrigatoriamente zero para que se consiga construir a combinação linear do vetor zero ($\vec{0}$).

Base

Base: num espaço vetorial em que os vetores geradores deste são independentes;

base canónica $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0);(0,1)\}$

$\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$

Subespaço vetorial

S1 $F \neq \emptyset$

S2 $\vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$

S3 $\vec{x} \in F \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F \quad \forall_\alpha \in K$

nº de geradores = nº de parametros = nº de incognitas - nº equações

$F + G = \langle F \cup G \rangle$

$\langle F \cup G \rangle = \langle (F) + (G) \rangle$

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

- a dimensão corresponde ao nº de bases

encontrar geradores do subespaço de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

$x - 3y = 0 \iff x = 3y$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}$
$= \{(3y, y) \in y \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (3,1) \rangle$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 10y = 0 \\ x = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$S = \{(0,0)\} = \langle \emptyset \rangle$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y = 0\}$

encontrar geradores do subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

$2x - y + 6z = 0 \quad y = 6z + 2x \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 6z + 2x\}$

$= \{(x, 6z + 2x, z) \in x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,2,0) ; (0,6,1) \rangle$

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 2w = 0 \\ x + 3y + 2z + 5w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -3x + 4y + 2w \\ x = -3y - 2z + 5w \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -\frac{13}{5}y - \frac{17}{5}w \\ x = \frac{11}{5}y - 34w \end{cases}$$

$S = \{(\frac{11}{5}y - 34w ; y, -\frac{13}{5}y - \frac{17}{5}w, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (11, 5, -13, 0) ; (-170, 0, -17, 5) \rangle$

3. Encontrar (escrever) expressões cartesianas

$F = \langle (1,3,0,1) ; (2,0,-1,3) \rangle$

$(x,y,z,w) = \alpha(1,3,0,1) + \beta(2,0,-1,3)$

$$\begin{cases} x = y/3 - 2z \\ \alpha = y/3 \\ \beta = -z \\ w = y/3 - 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x - y/3 + 2z = 0 \\ w = y/3 + 3z = 0 \end{cases}$$

$F = \{\alpha(1,3,0,1) + \beta(2,0,-1,3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y/3 + 2z = 0 \wedge w - y/3 + 3z = 0\}$

$F = \langle 1 - x + x^2, 2 + x - x^2 \rangle$

$F = a + bx + cx^2 = \alpha(1 + x + x^2) + \beta(2 + x - x^2)$

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = -\alpha + \beta \\ c = \alpha - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 3\beta \\ \boxed{b + c = 0} \end{cases}$$

$F = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}[x] ; b + c = 0\}$

Aplicações lineares

- monomorfismo => nuc(φ) = 0
- epimorfismo => sobrejectiva
- isomorfismo => bijetiva
- endomorfismo => im(E) = E'
- automorfismo => endo e iso

imagem φ

- $Im(E) = \varphi(E)$

determinar os nucleos das aplicações lineares

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = x+y$

$$Nuc(\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = \vec{0}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=-y\} = \{(-y,y) : y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle(-1,1)\rangle$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (y,x)$

$$Nuc(\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = \vec{0}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,x) = \vec{0}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \wedge y=0\}$$
$$= \langle(0,0)\rangle$$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z,w) = (2x+y+3z-8w, 0, y-z)$

$$Nuc(\varphi) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \varphi(x,y,\dots) = \vec{0}\}$$
$$= \{ \quad '' \quad '' \quad (2x \quad) = (0,0,0)\}$$

$$\begin{cases} 2x+y+3z-8w=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2z+4w \\ y=z \end{cases}$$

$\{(-2z+4w, z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$

$\langle(-2,1,1,0);(4,0,0,1)\rangle$

Vetores e Valores Próprios

como calcular?

$\det(A - \lambda I) = 0$ matriz identidade

- polinómio dos valores próprios que é os valores de λ $\boxed{p(\lambda) = 0}$

$$\boxed{(A - \lambda I) \cdot v = \vec{0}}$$

multiplicidade algébrica $\Rightarrow$ $ma(\lambda) = m$

$p(\lambda) = (\lambda - r)^m g(\lambda)$, onde g não admite raiz r.

multiplicidade geométrica $\Rightarrow$ $mg(\lambda) =$ nº de vetores indep. geradores do espaço

Matriz diagonizável:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{vetores} & \text{próprios} & \\ \text{de} & \text{cada} & \lambda \end{bmatrix}$$

sendo os valores de λ aparecem tantas vezes quanto a sua mg

Calcular vetores e valores próprios das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 3/2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1/2 & -4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (3-\lambda).(2-\lambda) - (4 \times 5)$$
$$= (3-\lambda)(2-\lambda) - 20$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda).(2-\lambda) - 20 = 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 6 - 2\lambda - 20 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$
$$\lambda_1 = 7 \wedge \lambda_2 = -2$$

valores próprios $\{\lambda_1 = 7 \wedge \lambda_2 = -2$

$ma(\lambda_1) = 1$

$ma(\lambda_2) = 1$

Para $\lambda = 7$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-x + y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\{(y, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} =$

$\Rightarrow E = \langle (1,1) \rangle$

$mg(\lambda_1) = 1$

Para $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x + \frac{4}{5}y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}y$ $\quad mg(\lambda_2) = 1$

$\{(-\frac{4}{5}y, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \Rightarrow E = \langle (-\frac{4}{5}; 1) \rangle$

$= \langle (-4, 5) \rangle$

Formas bilineares

$$A = \begin{bmatrix} \rho(e_1 ; e_1) & \cdots & \rho(e_1 ; e_n) \\ \rho(e_2 ; e_1) & \cdots & \rho(e_2 ; e_n) \\ \vdots & & \\ \rho(e_p ; e_1) & \cdots & \rho(e_p ; e_n) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matriz de uma função bilinear

Mudança de base

$$\boxed{A' = P^T A P}$$

Matriz de ρ da nova base

transposta da matriz da nova base

matriz de ρ em relação à base canônica

matriz com os vetores da nova base (da canônica para base B)

$P^{-1} \Rightarrow$ será a matriz que tem os vetores da base B escritos na base canônica

$$\underbrace{\rho((\vec{u}),(\vec{v}))}_{} = u^T . A . v$$

Têm que estar na mesma base

Formas bilineares simétricas $\rightarrow \rho(\vec{x},\vec{y}) = \rho(\vec{y},\vec{x}) \rightarrow \boxed{A^T = A}$

anti-simétricas $\rightarrow \rho(\vec{x},\vec{y}) = -\rho(\vec{y},\vec{x}) \rightarrow \boxed{A^T = -A}$

Formas bilineares quadráticas:

$\rho(x,y) = 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_2y_2$

$\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,x)$ $\quad Q(x) = \rho(x,x) = 5x_1 . x_1 + 3x_1 . x_2 + 3x_2 . x_1 - 2x_2x_2$

$= 5x_1^2 + 6x_1 . x_2 - 2x_2^2$

$\rho(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_3 - 7x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_3y_2$

$Q(x) = \rho(x,x) = 4x_1x_1 - 2x_1x_3 - 7x_2x_2 + \cancel{2x_3x_1} + x_3x_2$

$= 4x_1^2 - 7x_2^2 + x_3x_2$

Forma polar: $\dfrac{A + A^T}{2} = \frac{1}{2} \times (A + A^T)$

Teorema

seja f uma função bilinear simétrica e A a matriz que a representa, no caso de não ser simétrica, usa-se a sua forma polar:

1) f é definida positiva sse todos os valores próprios de A forem positivos (>0);

2) f é definida negativa sse todos os valores próprios de A forem negativos (<0);

3) f é semi-definida positiva sse todos os valores próprios de A forem não negativos (≥ 0);

4) f é semi-definida negativa sse todos os valores próprios de A forem não positivos (≤ 0);

5) f é indefinida sse A tiver valores próprios negativos e positivos;

- menores Principais
- valores próprios

$$\Delta_1 = \qquad \Delta_2 \left[\quad\right]_{(2\times 2)} \qquad \Delta_3 = \left[\quad\right]_{(3\times 3)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_p & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

1. Considerar a forma bilinear definida no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ por

$$P((u_1, u_2);(v_1, v_2)) = u_1 \cdot v_1 - 3u_1 \cdot v_2 + 5u_1 \cdot v_2 - 7u_2 \cdot v_2$$

Escrever a matriz P em relação 'as bases:

a) (3,1) ; (2,-3)

b) (0,1) ; (1,0)

c) (1,1) ; (1,0)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$ base canónica $\mathbb{R}^2$ de P

a)

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 64 \\ -24 & -71 \end{bmatrix}$$

b)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Considere a função bilinear definida no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ por

$$P((u_1, u_2, u_3);(v_1, v_2, v_3)) = u_1 \cdot v_1 - 7u_1 \cdot v_3 + u_2 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 - 2u_2 \cdot v_3 + 4u_3 \cdot v_1 + 6u_3 \cdot v_2 - u_3 \cdot v_3$$

Escrever a matriz P em relação à base:

a) (1,1,1) ; (1,1,0) ; (1,0,0)

b) (1,1,0) ; (0,1,1) ; (1,0,1)

c) (1,-1,3) ; (2,1,1) ; (3,0,1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

a)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 12 & 4 & 2 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -29 & 33 & 28 \\ -51 & 4 & 4 \\ -65 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. φ é uma forma bilinear no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, em relação à base

$\hat{e}_1 = (0,-1,1)$
$\hat{e}_2 = (2,1,1)$ definida pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
$\hat{e}_3 = (-1,1,2)$

$$\underset{\mathbb{R}^3}{e} \xrightarrow{\quad} \underset{\mathbb{R}^3}{B}$$

$$P \qquad P^{-1}$$

a) escrever a matriz ~~de~~ f em relação à base canónica.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & -5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-T} \cdot A \cdot P^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/64 & 31/64 & 7/64 \\ 3/4 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & -3/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) escrever a ~~matriz~~ expressão de $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ para dois vetores genéricos do espaço

$$\varphi((x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3$$

c) $\vec{u} = (1,2,3)$

$\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ calcular $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{\alpha}_3$$

$$(1,2,3) = \alpha_1(0,-1,1) + \alpha_2(2,1,1) + \alpha_3(-1,1,2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 3 \end{cases} \quad =$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = -1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 1 + 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_2 - 2 = 3 \end{cases} \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = U^T \cdot A \cdot V = [0\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

4. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - 7\cancel{x_1}y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_3 + 4x_3y_1 + 6x_3y_2 - x_3y_3$

em relação à base $(1,0,1);(1,-1,0);(0,1,2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

a) escrever a matriz de φ em relação à base canónica

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 12 & 19 & -15 \\ 9 & 17 & -13 \\ -3 & -10 & 7 \end{bmatrix}$$

b) determinar os valores do parâmetro real α tais que:

$$P((1,2,-1);(2-\alpha,0,2\alpha-1))=0$$

$$P((1,2,-1);(2-\alpha,0,2\alpha-1)) = u^T.A.v = [1,2,-1]\cdot\begin{bmatrix}1&0&-7\\1&1&-2\\4&0&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2-\alpha\\0\\2\alpha-1\end{bmatrix} =$$

$$= [1\ 2\ -1]\cdot\begin{bmatrix}-42\alpha+39\\-35\alpha+31\\17\alpha-13\end{bmatrix} = 129\alpha+144$$

$$P((1,2,-1);(2-\alpha,0,2\alpha-1))=0 \Leftrightarrow 129\alpha+144=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{38}{43}$$

Simétricas e Anti-simétricas

em $\mathbb{R}^2$

) $5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_2y_2$

) $x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

) $7x_1y_2 - 7x_2y_1$

) $2x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$

em $\mathbb{R}^3$

α) $4x_1y_1 - 2x_1y_3 - 7x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_3y_2$

β) $5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 8x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 9x_3y_3$

θ) $3x_1y_2 + 6x_1y_3 - 3x_2y_1 + 5x_2y_3 - 6x_3y_1 - 5x_3y_2$

λ) $x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$

φ) $-3x_1y_2 + 7x_1y_3 + 3x_2y_1 - x_2y_3 - 7x_3y_1 + x_3y_2$

ψ) $2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 9x_3y_3$

) $\begin{bmatrix}5&3\\3&-2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}5&3\\3&-2\end{bmatrix}$ simétrica

) $\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1&-2\\2&3\end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra

) $\begin{bmatrix}0&7\\-7&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&-7\\7&0\end{bmatrix}$ anti-simétrica

) $\begin{bmatrix}2&-4\\3&-1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2&3\\-4&-1\end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra

α) $\begin{bmatrix}4&0&-2\\0&-7&0\\2&0&1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}4&0&2\\0&-7&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra

β) $\begin{bmatrix}5&-1&0\\-1&8&2\\0&2&9\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}5&-1&0\\-1&8&2\\0&2&9\end{bmatrix}$ simétrica

θ) $\begin{bmatrix}0&3&6\\-3&0&5\\-6&-5&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&-3&-6\\3&0&-5\\6&5&0\end{bmatrix}$ anti-simétrica

λ) $\begin{bmatrix}1&4&0\\4&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1&4&0\\4&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

simétrica

φ) $\begin{bmatrix}0&-3&7\\3&0&-1\\-7&1&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&3&-7\\-3&0&1\\7&-1&0\end{bmatrix}$ anti-simétrica

ψ) $\begin{bmatrix}2&3&0\\3&-1&2\\0&0&9\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2&3&0\\3&-1&0\\0&2&9\end{bmatrix}$ nem uma coisa nem outra escrever a forma quadrática e a forma polar :

em $\mathbb{R}^2$

a) $5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 7x_2y_1 - 2x_2y_2$

b) $-4x_1y_2 + 6x_2y_1 + x_2y_2$

c) $5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_2y_2$

$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ $F.P = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$Q(x) = P(x,x) = 5x_1x_1 + 3x_1x_2 + 7x_2x_1 - 2x_2x_2$
$= 5x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_2^2$

$F.P = 5x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2$

$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $F.P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$Q(x) = P(x,x) = -4x_1x_2 + 6x_2x_1 + x_2x_2$
$= 2x_2x_1 + x_2^2$

$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ $F.P = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_2y_2$

$P(x,x) = Q(x) = 5x_1x_1 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 - 5x_2x_2$
$= 5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

classificação de formas bilineares

em $\mathbb{R}^2$

a) $2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 7x_2y_1 + 3x_2y_2$

b) $-2x_1y_2 + 4x_2y_1 - 3x_2y_2$

c) $4x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

d) $-x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2$

e) $-x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $F.P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

menores principais

$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \\ \Delta_2 &= (2\times3)-(-1\times1) = 7 \end{aligned}\right\} > 0$ definida positiva

b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $F.P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

menores principais

$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= 0 \\ \Delta_2 &= (1\times1) = -1 \end{aligned}\right\}$ semi-definida negativa

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $(3,-2)$; $(4,1)$ de $\mathbb{R}^2$ e determinar a imagem do vetor $(1,2,3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(1,2,3) = 7(3,-2) + 11(4,1) = (65;-3)$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ em relação às bases canónicas de ambos os espaços e determine a imagem do vetor $(2,5,-3)$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(2,5,-3) = (-4;-3)$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, em relação à base $(1,1,0)$; $(1,0,1)$; $(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ como espaço de partida, e à base $(1,1,1)$; $(1,1,0)$; $(1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$, como espaço de chegada e determine as imagem vetor $(1,4,-1)$

$$(1,4,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \theta(0,1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+\theta = 4 \\ \beta+\theta = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 1-\alpha \\ \alpha = 4+1+\beta \\ \theta = -1-\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 1-\alpha \\ \alpha = 5+1-\alpha \\ \theta = -1-\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 3 \\ \theta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \theta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(1,4,-1) = 6(1,1,1) + 4(1,1,0) - 6(1,0,0) = (6,6,6)+(4,4,0)-(6,0,0) = (4;10;6)$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ em relação à base $(1,1,1)$; $(1,1,0)$; $(1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $(1,1,1,1)$; $(1,1,1,0)$; $(1,1,0,0)$; $(1,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^4$ e determine a imagem do vetor $(2,-3,1)$.

$$(2,-3,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\theta = 2 \\ \alpha+\beta = -3 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 5 \\ \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ \theta = 5 \end{cases} \quad \varphi(2,-3,1) = (1;-4;5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(2,-3,1) = 3(1,1,1,1) - 4(1,1,1,0) + 4(1,1,0,0) + 5(1,0,0,0) = (8,3,-1,3)$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em relação à base $(1,2);(2,1)$ de $\mathbb{R}^2$ e à base $1+2x, 2+x, 1-x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ e determine a imagem do vetor $(1,0)$

$(1,0) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 1-2\beta \\ \beta = -2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 1+4\alpha \\ \beta = -2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} -3\alpha = 1 \\ \beta = -2\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -1/3 \\ \beta = 2/3 \end{cases}$

componentes da imagem vetor $(1,0)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$\varphi(1,0) = 0(1+2x) + \frac{5}{3}(2+x) + \frac{1}{3}(1-x^2)$

$= \frac{11}{3} + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}x^2$

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ em relação à base $1+x-x^2; 1+x+x^2; 2-x+x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ e à base $(1,-1,1,1)$;

construir matriz de $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base $(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{C}_2 \qquad B$

$\varphi(x,y) = (2x+y; x-2y; 3x)$

$\varphi(1,0) = (2,1,3)_{\mathcal{C}} = (3;-2;-1)_B$

$\varphi(0,1) = (1;-2;0)_{\mathcal{C}} = (0,-2,3)_B$

$\varphi(1,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$

$\begin{cases} \alpha+\beta+\theta = 2 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = -1 \\ \beta = -2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$

$\varphi(0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$

$\begin{cases} \alpha+\beta+\theta = 1 \\ \alpha+\beta = -2 \\ \alpha = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = 3 \\ \beta = -2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

$$M(\varphi, \mathcal{C}_2, B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

construir matriz de $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y,z) = (x-y+2z; 2x+z; -3x+y+z)$ em relação à base $(1,-1,1);(2,1,1);(1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ tanto de chegada como de partida

$\varphi(1,-1,1) = (4;3;-3)_{\mathcal{C}} = (4, -\cancel{12}; 14)_B$

$\varphi(2,1,1) = (3,5,4)_{\mathcal{C}} = (2;-6;13)_B$

$\varphi(1,1,0) = (0,2,-2)_{\mathcal{C}} = (0;-2,4)_B$

$(4,3,-3)_{\mathcal{C}} = \alpha(1,-1,1) + \beta(2,1,1) + \theta(1,1,0)$

$(3,5,4)_{\mathcal{C}} = \alpha(1,-1,1) + \beta(2,1,1) + \theta(1,1,0)$

$(0,2,-2)_{\mathcal{C}} = \alpha(1,-1,1) + \beta(2,1,1) + \theta(1,1,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 13 & 4 \end{array}\right]$$

$$M(\varphi, B, B) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -7 & -6 & -2 \\ 14 & 13 & 4 \end{bmatrix}$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y,z) = (x+z; x-z; x+y+z)$

em relação base canónica à partida e à base $(1,-1,2);(2,1,-1);(1,3,1)$ à chegada.

$\varphi(1,0,0) = (1;1;1)_{\mathcal{C}} =$

$\varphi(0,1,0) = (0,0,1)_{\mathcal{C}} =$

$\varphi(0,0,1) = (1;-1,1)_{\mathcal{C}} =$

$(1,1,1) = \alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,-1) + \theta(1,3,1)$

$(0,0,1) = \alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,-1) + \theta(1,3,1)$

$(1,-1,1) = \alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,-1) + \theta(1,3,1)$

$$M(\varphi, \mathcal{C}, B) = \begin{bmatrix} -8/17 & 5/17 & 17/7 \\ 2/17 & -4/17 & 9/7 \\ [illegible]/17 & 3/17 & [illegible] \end{bmatrix}$$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y) = (x+3y;\ 2x+4y;\ x-y)$

em relação à base $(2,3);(-1,4)$ de $\mathbb{R}^2$ e à base $(1,0,1);(0,1,1);(1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$

$\varphi(2,3) = (11;16;-1)_{B_2} = (-3;2;14)_{B_3}$

$\varphi(-1;4) = (11;14;-5)_{B_2} = (-4;-1;15)_{B_3}$

$(11,16,-1)_c = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \theta(1,1,0)$

$$\begin{cases} \alpha + \theta = 11 \\ \beta + \theta = 16 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1-\beta+\theta = 11 \\ \beta+\theta = 16 \\ \alpha = -1-\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 12+\beta \\ \beta + 12 + \beta = 16 \\ \alpha = -1-\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 14 \\ \beta = 2 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

$(11,14,-5)_c = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \theta(1,1,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -30 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \qquad M(\varphi; B_2; B_3) = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -1 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -12 & -16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -28 & -30 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 15 \end{array}\right]$$

$M(\varphi, B_2, B_3)$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base $(1,3);(2,-1)$ do espaço $\mathbb{R}^2$ e à base canónica do espaço $\mathbb{R}^3$ e determinar a imagem do vetor $(5,7)$

$(5,7) = \alpha(1,3) + \beta(2,-1)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 5 \\ 3\alpha - \beta = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 5 - 2(3\alpha - 7) \\ \beta = 3\alpha - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 7\alpha = 19 \\ \beta = 3\alpha - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 19/7 \\ \beta = 8/7 \end{cases}$$

$$\underset{(3\times 2)}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{(2\times 1)}{\begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ 8/7 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times 1)}{\begin{bmatrix} 30/7 \\ 73/7 \\ 51/7 \end{bmatrix}} \qquad \varphi(5,7) = \left(\tfrac{30}{7};\ \tfrac{73}{7};\ \tfrac{51}{7}\right)$$

Matrizes e aplicações

$$\varphi : M_{(2\times 2)}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2b,\ b+2c,\ c+2d)$$

a) Verificar que φ é uma aplicação linear

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad M_2 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 \quad \varphi(M_1 + M_2) = \varphi\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a_1+a_2) + 2(b_1+b_2);\ (b_1+b_2) + 2(c_1+c_2);\ (c_1+c_2) + 2(d_1+d_2)$$

$$= (a_1 + 2b_1;\ b_1 + 2c_1;\ c_1 + 2d_1) + (a_2 + 2b_2;\ b_2 + 2c_2;\ c_2 + 2d_2)$$

$$= \varphi(M_1) + \varphi(M_2) \ //$$

$$P_2 \quad \varphi(\lambda . M) = \varphi\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda . b \\ \lambda . c & \lambda d \end{bmatrix} = (\lambda a + 2\lambda b;\ \lambda b + 2\lambda c;\ \lambda c + 2\lambda d)$$

$$= \lambda(a + 2b;\ b + 2c;\ c + 2d)$$

$$= \lambda . \varphi(M) \ //$$

$\therefore \varphi$ é uma aplicação linear

b) construir Matriz φ em relação à base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e à base $((1,1,1);(1,1,0);(1,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$.

$$M \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz canónica

$$C_{M_{2\times 2}} = \left(\underset{M_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}};\ \underset{M_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}};\ \underset{M_3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}};\ \underset{M_4}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\right)$$

$$\varphi(M_1) = (1,0,0)_C$$
$$\varphi(M_2) = (2,1,0)_C$$
$$\varphi(M_3) = (0,2,1)_C$$
$$\varphi(M_4) = (0,0,2)_C$$

$$(1,0,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$$
$$(2,1,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$$
$$(0,2,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$$
$$(0,0,2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \theta(1,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$M(\varphi, B_{2\times 2}, B_3)$

c) Verifique que φ é ou não um epimorfismo.

φ é um epimorfismo se $Im(\varphi) \in IR^3$

$\varphi(M_{2\times 2}) = IR^3$

$< \varphi(M_1); \varphi(M_2); \varphi(M_3); \varphi(M_4) >$

neste caso há 3 vetores linearmente independentes.

logo φ será um epimorfismo porque estes vetores irão construir um espaço em IR^3.

d) determinar $\varphi^{-1}(-1,3,1)$

$\varphi^{-1}(-1,3,1) = \{(A \in M_{2\times 2} : \varphi(A) = (-1,3,1)\}$

$M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi : IR^3 \to M_{3\times 2}(IR)$

$B_3 \to C$

$\varphi(1,1,0)_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\varphi(1,0,1)_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\varphi(0,1,1)_B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Escrever a matriz de φ em relação à base considerada em IR^3 e à base canónica do $M_{3\times 2}(IR)$

$B_3 = ((1,1,0);(1,0,1);(0,1,1))$

$C_{M_{3\times 2}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) determinar a imagem de $\omega < (1,1,1); (2,1,...$ de IR^3

$(1,1,1)_C = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{B_3}$

$(2,1,-1)_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_3}$

$\varphi(1,1,1) = M \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) determinar núcleo de φ e dizer se é um monomorfismo.

$Nuc(\varphi) = <\emptyset>$

$Nuc(\varphi) = \{(x,y,z) \in IR^3 : \varphi(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(0,0,0)\} = <\vec{0}>$ é um monomorfismo

$\varphi(2,1,-1)_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi(\omega) = <$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Mudanças de base

$\varphi(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 2x+3y)$

a) escrever a matriz de φ em relação às bases canonicas de ambos os espaços.

$\varphi(1,0) = (1;1;2)_C$

$\varphi(0,1) = (1;-1;3)_C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) escrever a matriz de φ em relação à base $(1,2);(-3,1)$ do $\mathbb{R}^2$ e à base $(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2_{C_2} \arrow[r, "\varphi"', "A"] & \mathbb{R}^3_{C_3} \arrow[d, "Q"] \\ \mathbb{R}^2_{B_2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\varphi"', "B"] & \mathbb{R}^3_{B_3} \end{tikzcd}$$

$$P = \begin{bmatrix} \text{base } b_2 \text{ escrita em } C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \text{vetores } C_3 \text{ escritos na forma da base } B_3 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad}_{Q}$

$B = Q \cdot A \cdot P$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 12 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ em relação à base $(2,1,1); (-1,2,1); (1,1,0)$ $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathbb{R}^2$.

Determinar a matriz de φ em relação base canónica $\mathbb{R}^3$ e à base $(-1,1)$ e $(2,3)$ $\mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{B_3} \arrow[r, "\varphi", "A"'] & \mathbb{R}^2_{C_2} \arrow[d, "Q"] \\
\mathbb{R}^3_{C_3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\varphi", "B"'] & \mathbb{R}^2_{B_2}
\end{tikzcd}$$

$B_3 = [(2,1,1); (-1,2,1); (1,1,0)]$

$B_2 = [(-1,1); (2,3)]$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & -5/4 \end{array}\right]$ P

$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/4 \end{array}\right]$ Q

$B = Q \cdot A \cdot P$

$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\varphi(x,y) = x\varphi(1,0) + y\varphi(0,1)$$
$$= x(4,3,1) + y(1,2,5)$$
$$= (4x; 3x; x) + (y; 2y; 5y)$$
$$= (4x+y; 3x+2y; x+5y)$$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad M(\varphi, e, e)$$

- colunas são as imagens dos vetores da base;

Para escrever um vetor na base B estando este na base canónica basta fazer a combinação linear:

$$(-1,5)_e = \alpha(\ ;\ ) + \beta(\ ;\ ) = (\ ;\ )_B$$

constituem base B

$$\varphi: E \to E'$$
$$B \to B'$$

$$M(\varphi, B, B') = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{bmatrix}}_{\text{escritos na base } B'}$$

<u>ser aplicação linear:</u>

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi(x))$$

$$\varphi(M_1 + M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$$
$$\varphi(\lambda . M) = \lambda . \varphi(M)$$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{B_1}{E} \arrow[r, "\varphi"', "A"] \arrow[d, "P"'] & \underset{B_2}{F} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{D_1}{E} \arrow[r, "\varphi", "B"'] & \underset{D_2}{F}
\end{tikzcd}
$$

$B = Q \cdot A \cdot P^{-1}$

$B \cdot v = Q \cdot A \cdot P^{-1} \cdot v$

transforma o vetor v dado na base D_1 para o mesmo vetor v na base B_1.

~~transforma~~) Imagem de v escrita na base B_2.

imagem de v escrita na base D_2.

- P será a matriz que "aceita" vetores escritos na base B_1 e "devolve-os" na base D_1
- P^{-1} será o contrário.
- Q será a matriz que "aceita" vetores escritos na base B_2 e os "devolve" na base D_2.
- Q^{-1} é o contrário

→ as colunas da matriz P são os vetores na base B_1, escritos na base D_1

→ as colunas da matriz Q são os vetores na base B_2, escritos na base D_2.

$\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\eta(1,2) = (2,3)$ e $\eta(0,1) = (1,4)$

$\text{Im}(\eta(x,y))$

$v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,1)$

$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - 2x \end{cases}$

$\eta(x,y) = x\eta(1,2) + (y-2x)\eta(0,1)$

$= x(2,3) + (y-2x)(1,4)$

$= (2x, 3x) + (y-2x, 4y-8x)$

$= (y ; 4y - 5x)$

$\text{Im}(\eta(x,y)) = \text{Im}(\eta(\mathbb{R}^2)) = \langle \eta(1,0) ; \eta(0,1) \rangle$

$= \langle (0;-5) ; (1;4) \rangle$

$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$\psi(1,0,0) = (1,0,2,0)$

$\psi(0,1,1) = (0,1,-2,0)$

$\psi(0,0,1) = (1,1,0,0)$

a) determinar $\psi(x,y,z)$ para (x,y,z) qualquer;

b) base para $\text{Nuc}(\psi)$

c) base de $\psi(\mathbb{R}^3)$

a) $(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \theta(0,0,1)$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta + \theta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \theta = z - y \end{cases}$

$\psi(x,y,z) = x\psi(\ ,\ ,\ ) + y\eta(0,1,1) + (z-y)\psi(0$

$= x(1,0,2,0) + y(0,1,-2,0) + (z-y)(1,\ ,\ ,0)$

$= (x,0,2x,0) + (0,y,-2y,0) + (z-y, z-y$

$\psi(x,y,z) = (x+z-y ; z ; 2x-2y ; 0)$

b)

$\text{Nuc}(\psi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x,y,z) = \vec{0}\}$

$= \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,1,0) \rangle$

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\text{Im}(\psi(\mathbb{R}^3)) = \langle \psi(1,0,0) ; \psi(0,1,0) ; \psi(0,0,1) \rangle$

$= \langle \psi(1,0,0) , \psi(0,0,1) \rangle$

$= \langle (1,0,2,0) , (1,1,0,0) \rangle$

Construção de matrizes de aplicações lineares, em relação a bases canónicas

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x,y) = (2x+3y; 4x-5y)$

$C_1 \to C_2$

$M(\varphi, C, C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y) = (3x-y; x+2y; 6y)$

$M(\varphi, C_2, C_3) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x,y,z) = (x-7y+2z; 4x-3y)$

$M(\varphi, C_3, C_2) = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z) = (2x-z; x+3y+7z; -3y+z)$

$M(\varphi, C_3, C_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \quad \varphi(x,y,z,w) = (4x-5y+9z-3w)$

$M(\varphi, C_4, C_1) = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z,w) = (x-y-z; y+2z+w; x-z+3w)$

$M(\varphi, C_4, C_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = (-4x, 0, 7x)$ $\quad M(\varphi, C_1, C_3) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (3a_0 - a_2; a_1 + 7a_2)$

$B \to C_2$

$M(\varphi, B, C_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$\varphi(a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3) = (3a_0 + a_1)x + (2a_1 - a_2 + 5a_3)x^3$

$(3a_0x + a_1x); (2a_1x - a_2x^2 + 5a_3x^3)$

$M(\varphi, B_4, B_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

determinar $\varphi(F)$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y,\ 2x-y+z)$

$F = \langle (1,-1,2);(3,2,1) \rangle$

$\varphi(F) = \langle \varphi(1,-1,2), \varphi(3,2,1) \rangle$

$= \langle (1,1,2),(3,3,6);(-1;1;1),(2,2,-2),(2;0;2);(2,0;1) \rangle$

$= \langle (3;2;5);(6;1;5) \rangle$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x,y,z) = (2z,\ x+3y,\ y+2z)$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x-y\}$

$= \{(x,y,-x-y),\ x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1),(0,1,-1) \rangle$

$\varphi(F) = \langle \varphi(1,0,-1); \varphi(0,1,-1) \rangle$

$= \langle (0,1,0);(0,0,0);(-2;0;-2),(0,0,0),(0;3;1);(-2;0;-2) \rangle$

$= \langle (-2;1;-2);(-2;3;-1) \rangle$

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x,y,z,w) = (x+y-w,\ y+z+w,\ x+z-w)$

$F = \langle (1,1,1,0);(0,2,1,1);(2,-1,-1,0) \rangle$

$\varphi(F) = \langle \varphi(1,1,1,0), \varphi(0,2,1,1), \varphi(2,-1,-1,0) \rangle$

$= \langle (1,0,1);(1,1,0);(0,1,1);(0,0,0,0)$
$(0,0,0);(2,2,0);(0,1,1);(-1,1,-1)$
$(2,0,2);(-1,-1,0);(0,-1,-1);(0,0,0) \rangle$

$= \langle (2,2,2);(1,4,0);(1,-2,1) \rangle$

Conclusão:

$\theta: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad \theta(x,y,z,w) = (2x-y+z,\ x-z+w)$

$\mathrm{Nuc}(\theta) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (2x-y+z,\ x-z+w) = (0,0)\}$

$2x-y+z=0$
$x-z+w=0$

$= \{(z-w,\ 3z-2w,\ z,\ w) : z,w \in \mathbb{R}\} = \langle (1,3,1,0);(-1,-2,0,1) \rangle$

$\begin{cases} x = z-w \\ 2z-2w-y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z-w \\ y = 3z-2w \end{cases}$

$\mathrm{Im}(\theta) = \theta(\mathbb{R}^4) = \langle \theta(1,0,0,0), \theta(0,1,0,0), \theta(0,0,1,0), \theta(0,0,0,1) \rangle$

$= \langle (2,1);(-1,0);(1,-1);(0,1) \rangle$

$= \langle (-1,0);(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

R: é um epimorfismo
mas não é monomorfismo

$\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\theta(x,y,z) = (x-y+z,\ x+y+2z)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \varphi(x,y) = 2x - 3y$

a) calcular o núcleo $Nuc(\varphi)$ e $\varphi^{-1}(6)$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z,w) = (x+z, y-z, x+y)$

b) determinar $\varphi^{-1}(4,-3,1)$ e $\varphi^{-1}(3,2,1)$

a) $Nuc(\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = +\frac{3}{2}y\}$

$= \{(+\frac{3}{2}y ; y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle(+\frac{3}{2} ; 1)\rangle = \langle(3 ; 2)\rangle$

$\varphi^{-1}(6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 6\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 + \frac{3}{2}y\} = \{(3 + \frac{3}{2}y ; y) : y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(3,0) + (\frac{3}{2} ; 1)\rangle$

$= \langle(3,0) + (3 ; 2)\rangle$

b) $\varphi^{-1}(4,-3,1) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x+z, y-z, x+y) = (4,-3,1)\}$

$\begin{cases} x + z = 4 \\ y - z = -3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - z \\ y = -3 + z \\ 4 - z - 3 + z = 1 \end{cases}$

$= \{(4-z, -3+z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(4, -3, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0) ; (0, 0, 0, 1)\rangle$

$\begin{cases} x = 4 - z \\ y = -3 + z \\ 1 = 1 \end{cases}$

$\varphi^{-1}(3,2,1) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x+z, y-z, x+y) = (3,2,1)\}$

$= \emptyset$

$\begin{cases} x + z = 3 \\ y - z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - z \\ y = 2 + z \\ 3 - z + 2 + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - z \\ y = 2 + z \\ 5 = 1 \end{cases}$ impossível

determinar o espaço imagem φ

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (x+2y,\ x-3y,\ 2x+y)$

$Im(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \{(x+2y,\ x-3y,\ 2x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{au}$ $= \langle (1,1,2),(2,-3,1) \rangle$

$dim(\varphi) = \mathbb{R}^2 = \langle (1,0),(0,1) \rangle$

$dim(Im(\varphi)) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \langle (\varphi(1,0) ; \varphi(0,1) \rangle$

$= \langle (1,1,2);(2,-3,1) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (4x+5y,\ 4x+5y,\ 4x+5y)$

$Im(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \langle \varphi(1,0),\ \varphi(0,1) \rangle$
$= \langle (4,4,4),(5,5,5) \rangle$
$= \langle (1,1,1) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (3x-7y,\ 2x+9y)$

$Im(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \{(3x-7y,\ 2x+9y) : x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (3,2);(-7,9) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (x+2y-z,\ 2x-y+3z,\ 3x+y+2z)$

$Im(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^3) = \langle (1,0,0);(0,1,0);(0,0,1) \rangle$
$= \langle (1,2,3);(2,-1,1);(-1,3,2) \rangle$
$= \langle (1,2,3),(2,-1;1) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x,y,z) = (x-z,\ 2x+z,\ x+y,\ x-y-z)$

$Im(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^3) = \{(x-z,\ 2x+z,\ x+y,\ x-y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{au}$ $= \langle (1,2,1,1);(0,0,1,-1),(-1,1,0,-1) \rangle$

$\varphi(\mathbb{R}^3) = \varphi \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$
$= \langle \varphi(1,0,0) ; \varphi(0,1,0) ; \varphi(0,0,1) \rangle$

$= \langle (1,2,1,1);(0,0,1,-1);(-1,1,0,-1) \rangle$

determinar núcleos de aplicações lineares

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = x+y$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = \vec{0}\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=-x\}\\ &= \{(x,-x) \in \mathbb{R}\} = \langle(1;-1)\rangle\end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = (y,x)$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,x) = \vec{0}\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \wedge y=0\}\\ &= \langle(0;0)\rangle\end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = (x-y,0)$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y,0) = (0,0)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=0 \wedge 0=0\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=x\} = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\} = \langle(1,1)\rangle\end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = (y,y,x+y)$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,y,x+y) = (0,0,0)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \wedge y=0 \wedge x=0\}\\ &= \langle(0,0,0)\rangle = \langle(0,0)\rangle\end{aligned}$$

$(y,y,x+y)=(0,0,0)$

$\begin{cases} y=0\\ y=0\\ x+y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ y=0\\ x=0\end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = (x-2y, 2x+y, 3x+9y)$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2y, 2x+y, 3x+9y) = (0,0,0)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \wedge y=0\} = \langle(0,0)\rangle\end{aligned}$$

$\begin{cases} x-2y=0\\ 2x+y=0\\ 3x+9y=0\end{cases} \quad \begin{cases} x=2y\\ 4y+y=0\\ 6y+9y=0\end{cases} \quad \begin{cases} x=0\\ y=0\\ y=0\end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y,z) = (2x-y+4z, 5x-7y+3z)$

$$\begin{aligned}Nuc(\varphi) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x-y+4z; 5x-7y+3z) = (0,0)\}\\ &= \{(-\tfrac{28}{9}z; -\tfrac{14}{9}z; z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(-\tfrac{28}{9}, -\tfrac{14}{9}, 1)\rangle = \langle(-28,-14,9)\rangle\\ &= \langle(28,14,9)\rangle\end{aligned}$$

$\begin{cases} 2x-y+4z=0\\ 5x-7y+3z=0\end{cases} \quad \begin{cases} y=2x+4z\\ 5x-7(2x+4z)=0\end{cases} \quad \begin{cases} y=2x+4z\\ 5x-14x-28z=0\end{cases} \quad \begin{cases} y=-\tfrac{14}{9}z\\ x=-\dfrac{28z}{9}\end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = (x,y,0)$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,0) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,z,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \wedge y=0\} = \langle (0,0,0) \rangle$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z,w) = (-x+z,\ y+z-2w,\ 5x+w)$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (-x+z,\ y+z-2w,\ 5x+w) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} -x+z=0 \\ y+z-2w=0 \\ 5x+w=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cancel{z} \\ y = -z+2w \\ 5z = -w \end{cases} \quad \begin{cases} x = -w/5 \\ y = 11w/5 \\ z = -w/5 \end{cases} \quad = \{(-w/5,\ 11w/5,\ -w/5,\ w) : w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1/5;\ 11/5;\ -1/5;\ 1) \rangle$

$= \langle (-1;\ 11;\ -1;\ 5) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z,w) = (2x+y+3z-8w,\ 0,\ y-z)$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (2x+y+3z-8w,\ 0,\ y-z) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} 2x+y+3z-8w=0 \\ 0=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad = \{(-2z+4w,\ z,\ z,\ w) : z,w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-2;1;1;0);\ (4;0;0;1) \rangle$

$\begin{cases} 2x+4z-8w=0 \\ y=z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2z+4w \\ y=z \end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(x,y,z) = 2x-y,\ x+3z,\ 4x+5z,\ z)$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x-y,\ x+3z,\ 4x+5z,\ z) = (0,0,0,0)\}$

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3z=0 \\ 4x+5z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases} \quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \wedge y=0 \wedge z=0\}$

$= \langle (0,0,0) \rangle$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(x,y,z,w) = -x+3w,\ y-2w,\ z+5w,\ 2x$

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (-x+3w,\ y-2w,\ z+5w,\ 2x) = (0,0,0,0)\}$

$\begin{cases} -x+3w=0 \\ y-2w=0 \\ z+5w=0 \\ 2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} w=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \quad = \{(0,0,0,0)\} = \langle (0,0,0,0) \rangle$