Física Geral I • FIS0703

Aula 24

14/12/2016

Propriedades ondulatórias das partículas

Para fotões obtivemos a relação $p = \dfrac{h}{\lambda}$

partículas ondas

Ligação entre propriedades características de partículas e de ondas.

Louis de Broglie (1923): se luz tem propriedades de partículas, talvéz partículas também tenham propriedades de ondas.

De Broglie propôs que partículas têm um comprimento de onda determinado pela mesma expressão, portanto

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}}$$

Comprimento de onda de de Broglie

(No caso de velocidades relativistas temos de usar $p = \gamma m v$)

De Broglie também postulou que a relação $E = hf$ de fotões vale para partículas, portanto

$$\boxed{f = \frac{E}{h}}$$

Frequência associada a uma partícula com energia E

O comprimento de onda de de Broglie

Exemplo: qual é o comprimento de onda de de Broglie dum grão de pó com massa de 1 μg e velocidade de 1 μm/s?

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s})}{(1.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{kg})(1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m/s})} = 6.626 \times 10^{-19}\ \mathrm{m}$$

Este comprimento de onda é demasiado pequeno para ser detetado.

Exemplo: qual é o comprimento de onda de de Broglie dum eletrão com massa de 9.11×10^{-31} kg e velocidade de 1.0×10^{7} m/s?

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s})}{(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.0 \times 10^{7}\ \mathrm{m/s})} = 7.27 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

Um comprimento de onda de quase 1 Å é acessível a experiências de difração de Bragg.

A experiência de Davisson-Germer

C. Davisson e L. Germer (1923-1927) efetuaram experiências para estudar propriedades da superfície de Níquel com um feixe de eletrões.

- Para remover uma camada de óxido aqueceram o Ni para temperaturas elevadas, sem saber que isso produz grandes regiões monocristalinas.
- Nas experiências subsequentes observaram máximos e mínimos de intensidade do feixe refletido de eletrões, como na difração de Bragg de raios-X por planos cristalinos.
- O comprimento de onda correspondente coincide com o de de Broglie dos eletrões usados.

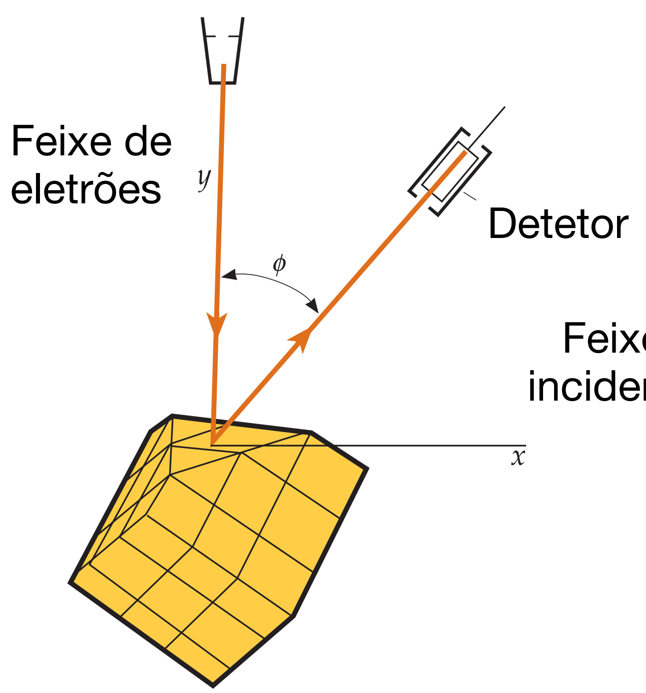
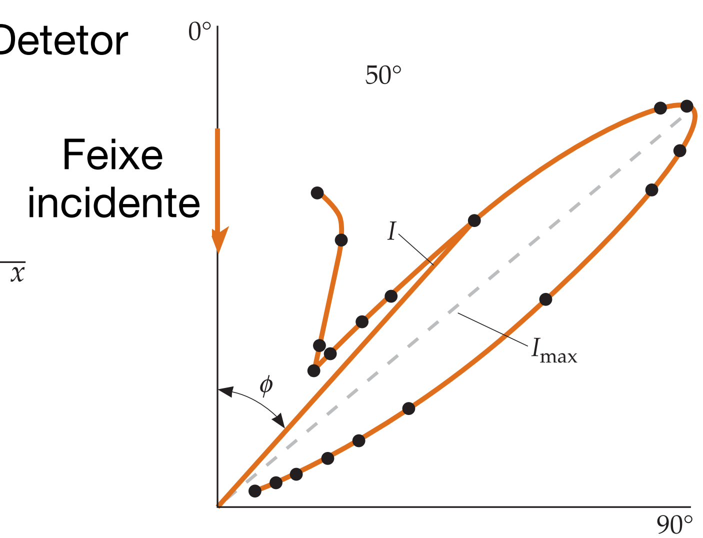


Gráfico polar da intensidade



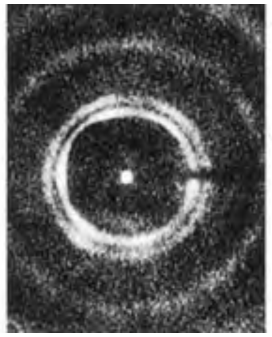
Estas experiências confirmaram pela primeira vez a hipótese de de Broglie do caracter ondulatório dos partículas.

Difração de feixes de partículas

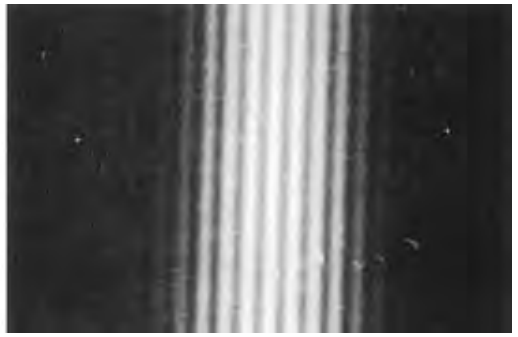
Entretanto há muitos outros exemplos da difração de feixes de partículas:

Raios-X (λ=0.071 nm) numa folha de Al.

Eletrões de 600 eV (λ=0.050 nm) numa folha de Al.



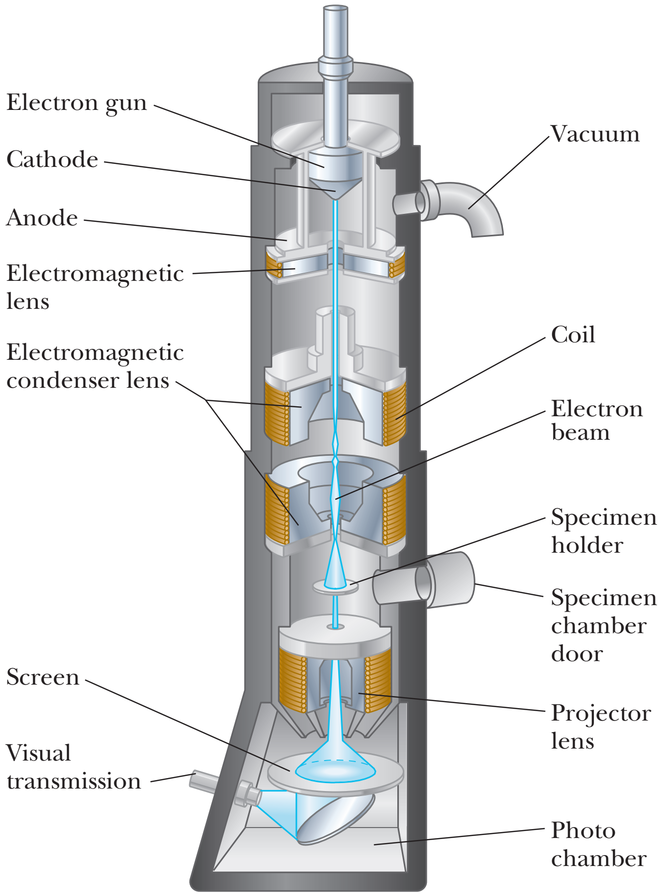
Neutrões de 0.0568 eV (λ=0.12 nm) numa folha de Cu.



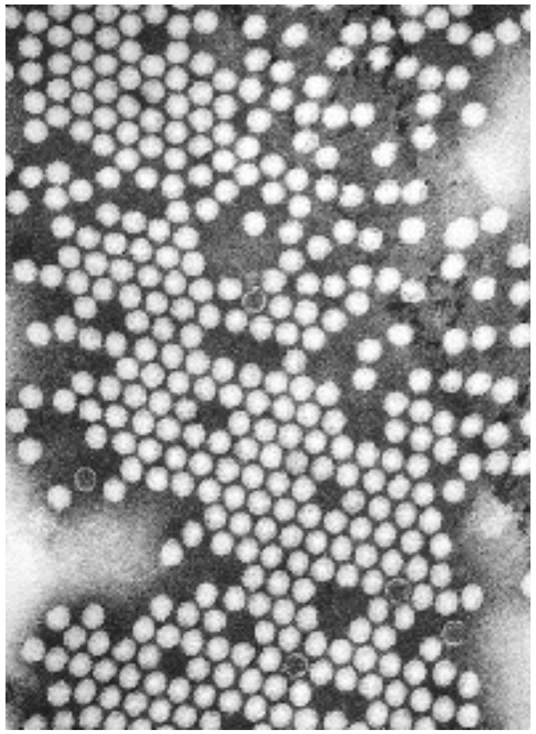
Difração dum feixe de eletrões numa fenda dupla.

Uma aplicação importante:
O microscópio eletrónico de transmissão (MET)

- Um feixe de eletrões atravessa uma amostra ultra-fina.
- Resolução muito melhor do que microscópios óticos (λ menor)
- Lentes eletromagnéticas



O vírus da poliomelite mede 30 nm (imagem MET)



Dualidade partícula-onda

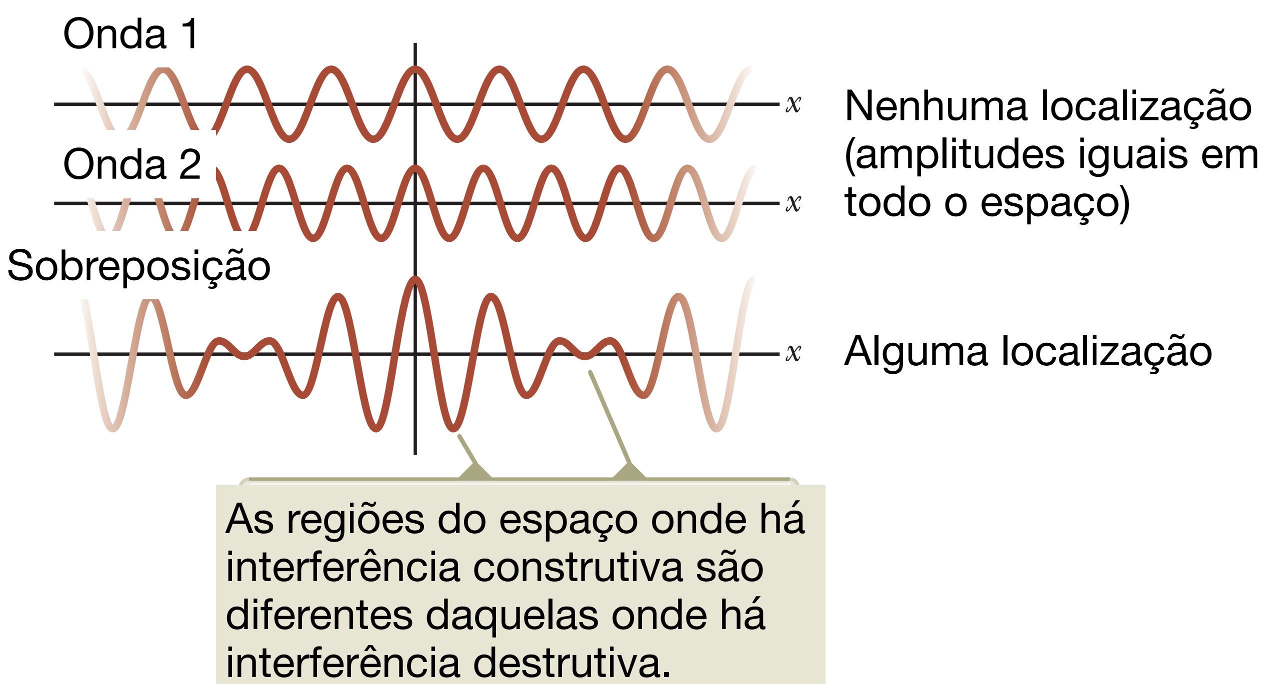
Em física clássica, partícula e onda são conceitos mutuamente exclusivos.

- No entanto, vimos exemplos de situações em que ondas se comportam como partículas, e partículas como ondas.
- A combinação das duas características é necessária para descrever matéria e radiação.
- Mas como é que se pode entender isso?

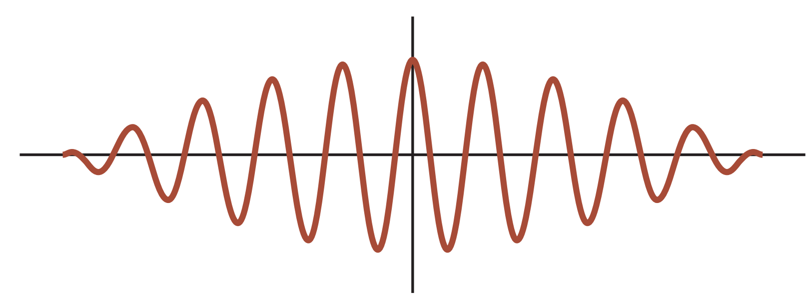
Como exemplo vamos explorar uma propriedade típica de partículas: a sua localização espacial.
A pergunta é: como é que ondas (deslocalizadas) podem descrever uma partícula localizada?

A solução: temos de construir sobreposições apropriadas de ondas.

Exemplo: duas ondas sinusoidais (cristas em x=0) com λ's ligeiramente diferentes



Sobreposição dum grande número de ondas com cristas em x=0



Interferência construtiva perto de x=0, e interferência destrutiva em todo o espaço restante.

→ Um pacote de ondas

Pacotes de ondas

Um pacote de ondas pode ser identificado com uma partícula porque é localizado.

Para além da localização, tem outras propriedades duma partícula?

Simplificação: consideremos a sobreposição de apenas duas ondas sinusoidais

$$y_1 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \qquad y_2 = A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \qquad \text{onde} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi f$$

Sobreposição: $y = y_1 + y_2 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$

Usando $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

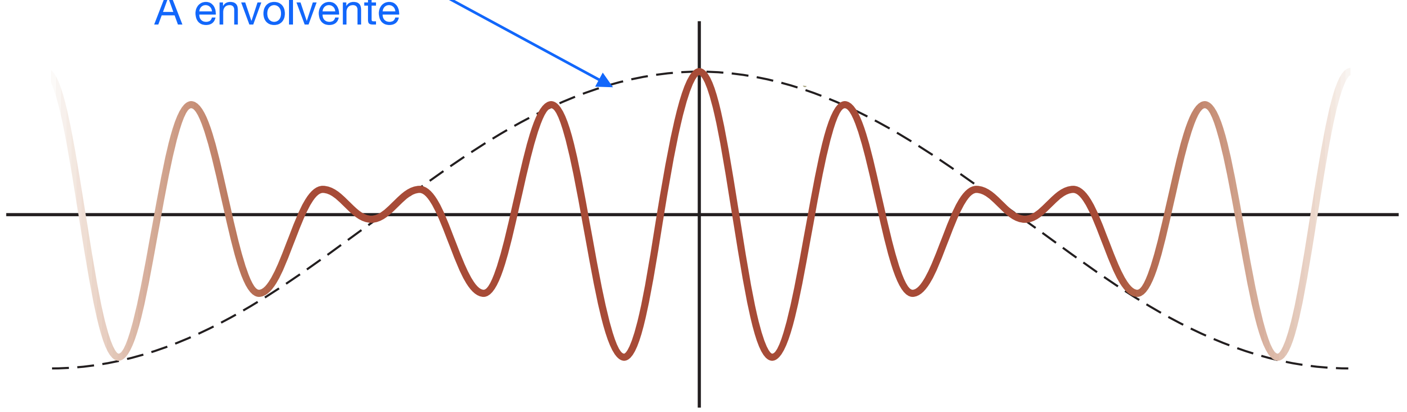
obtemos $y = 2A\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]$

$$y = \boxed{\left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]}\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$\Delta k = k_1 - k_2$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

A envolvente



Pacotes de ondas

$$y = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Para uma onda individual, a velocidade de propagação é

$$y = A\cos(kx - \omega t)$$

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\text{coeficiente de t}}{\text{coeficiente de x}}$$

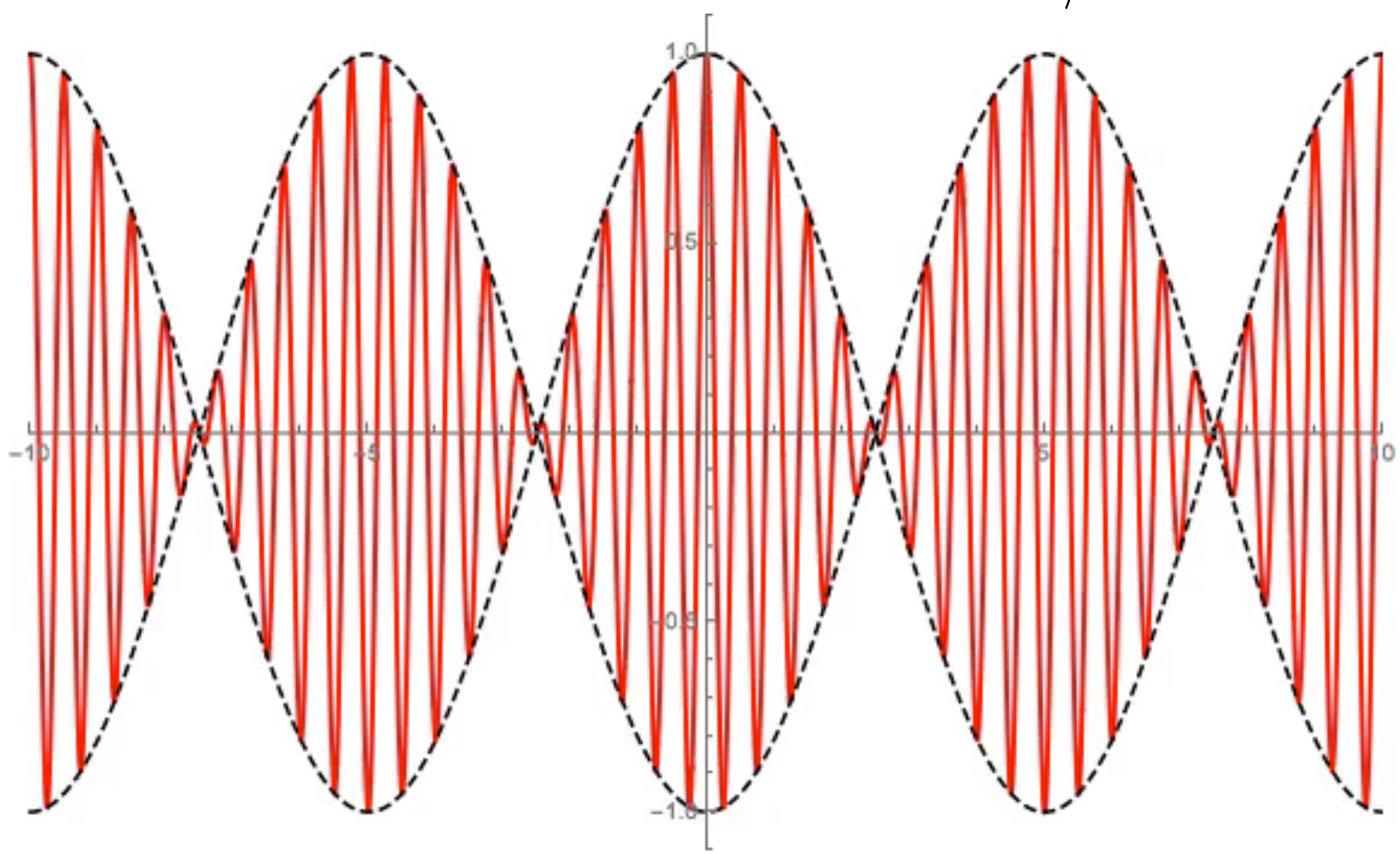
"fase" porque é a velocidade com a qual a fase da onda (e.g. uma crista) avança

A envolvente pode mover-se com uma velocidade diferente da velocidade de fase.

Para a onda $y = y_1 + y_2$ acima: $\frac{\text{coeficiente de t}}{\text{coeficiente de x}} = v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

Velocidade de grupo

(Um pacote de ondas é um "grupo de ondas")



Pacotes de ondas

No caso geral: $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$ Velocidade de grupo da sobreposição dum grande número de ondas

Multiplicar o numerador e denominador por $\hbar = \frac{h}{2\pi}$: $v_g = \frac{\hbar\, d\omega}{\hbar\, dk} = \frac{d(\hbar\,\omega)}{d(\hbar\, k)}$

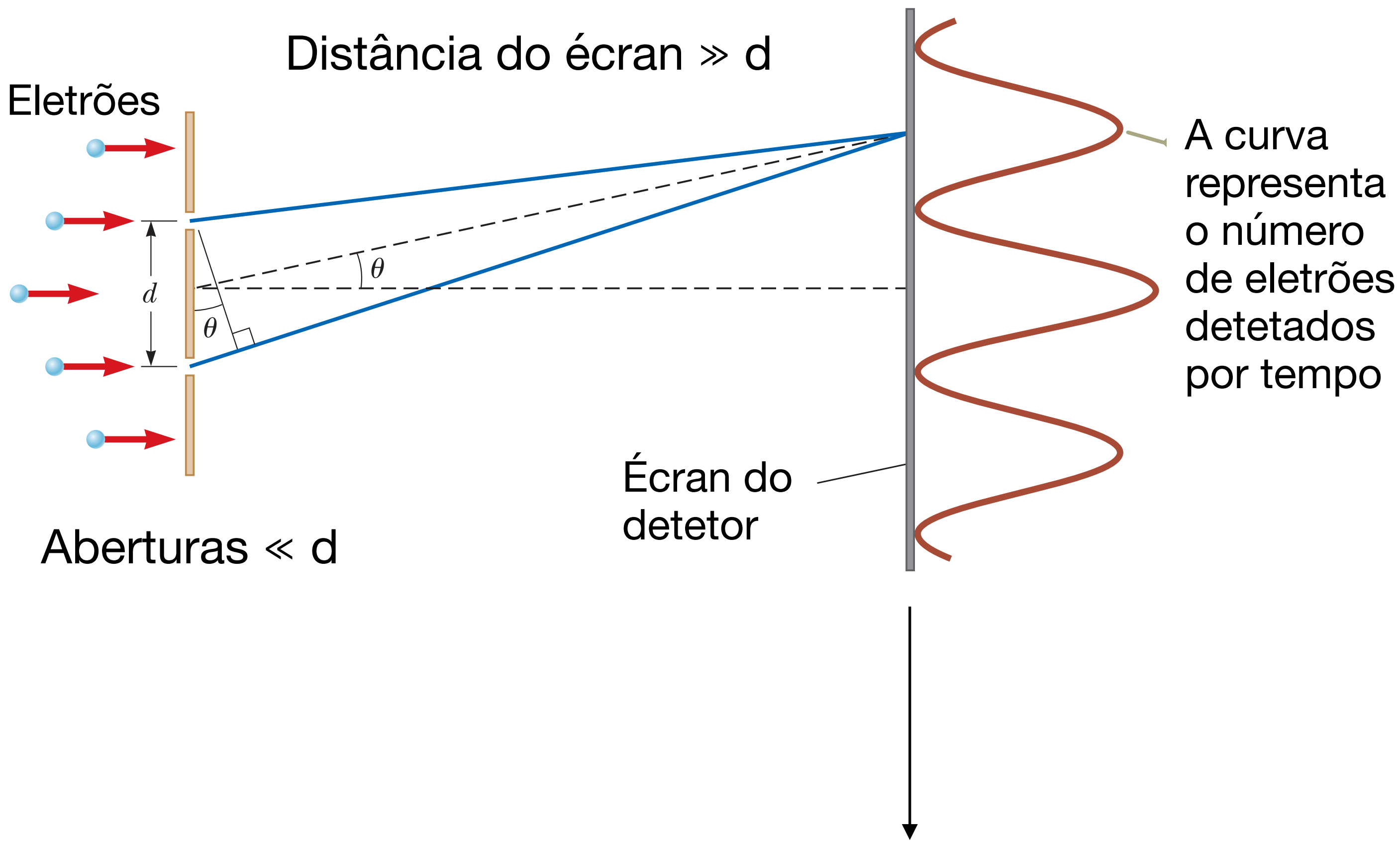
$$\hbar\,\omega = \frac{h}{2\pi}(2\pi f) = hf = E \qquad \hbar\, k = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = p \longrightarrow v_g = \frac{dE}{dp}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{2m}(2p) = v$$

→ A velocidade de grupo do pacote de ondas associada à partícula representa a velocidade do seu movimento.

A experiência da fenda dupla com partículas

Quando se efetua a experiência da fenda dupla com um feixe de eletrões, obtém-se o mesmo padrão de interferência como para um feixe de luz.



Máximos para

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

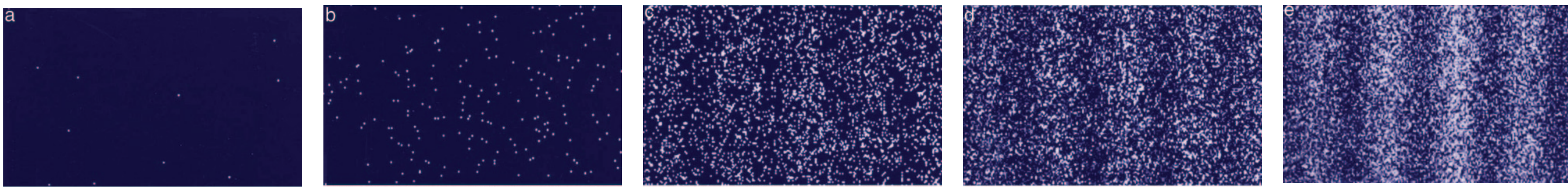
Resultado observado numa experiência

A experiência da fenda dupla com partículas

Feixe de eletrões: o padrão de interferência estabelece-se gradualmente, um ponto cada vez.

Imagem no écran em função do número de eletrões:

10 | 200 | 6000 | 40000 | 140000

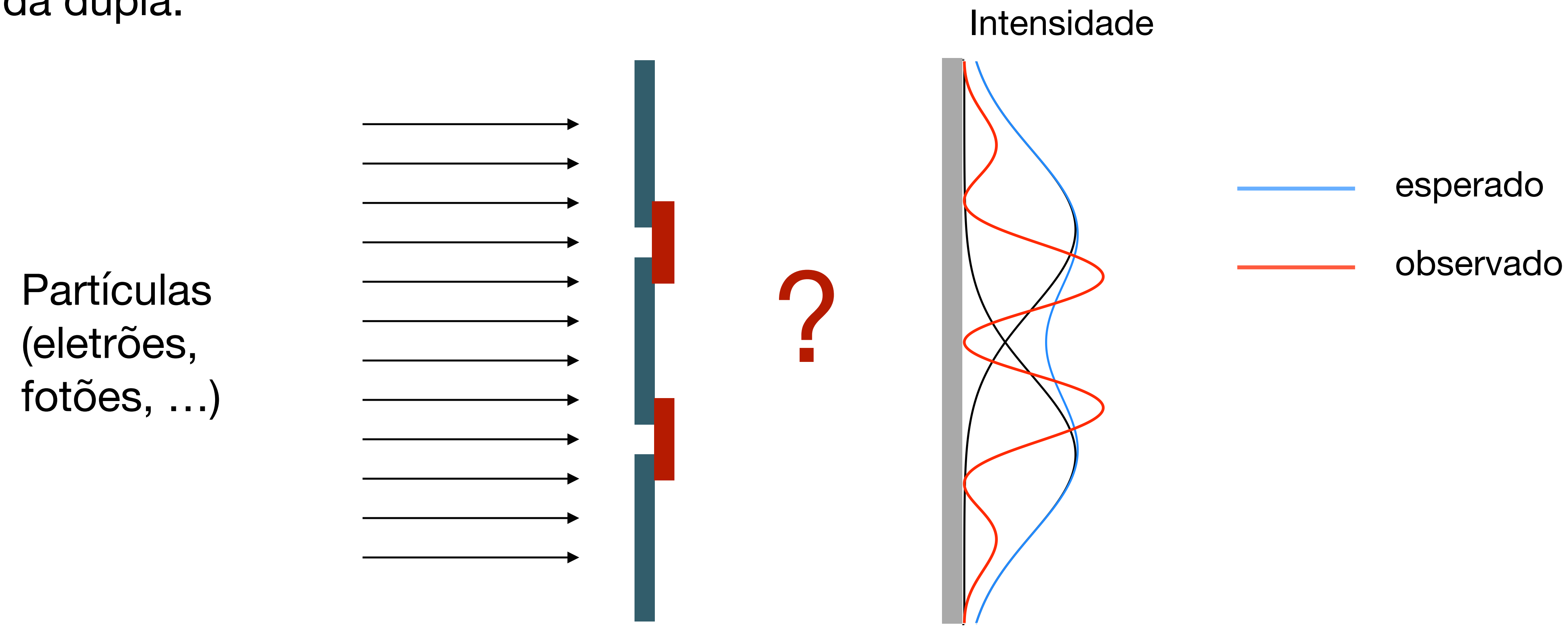


Imagens: Akira Tonomura

- Cada eletrão que passa pela fenda dupla produz um ponto no écran (→ partícula).
- A intensidade do feixe pode ser tão baixa que apenas 1 eletrão cada vez passa pelas fendas.

A experiência da fenda dupla com partículas

A estranheza da física quântica pode ser demostrada da forma mais clara na experiência da fenda dupla.



- Um eletrão deixa um ponto no écran (localizado como uma partícula).
- Parece plausível que o eletrão passou ou por uma ou por outra das duas fendas.
- Há pontos no écran onde eletrões chegam quando uma fenda está aberta, mas nenhum eletrão quando as duas estão abertas.
- Se um eletrão sempre passa por uma fenda só, como sabe se a outra está aberta ou não?
- Sempre que se faz uma medição para determinar por qual fenda um eletrão passa, o padrão de interferência desaparece.

Um eletrão tem de interagir de alguma forma com as duas fendas antes de chegar ao écran.

O princípio de incerteza

- Em física clássica é possível (em princípio) determinar a posição e o momento linear duma partícula simultaneamente com precisão arbitrária.
- Em física quântica isso é impossível por razões fundamentais.

Se Δx e Δp_x são as incertezas da posição e do momento linear na direção x duma partícula:

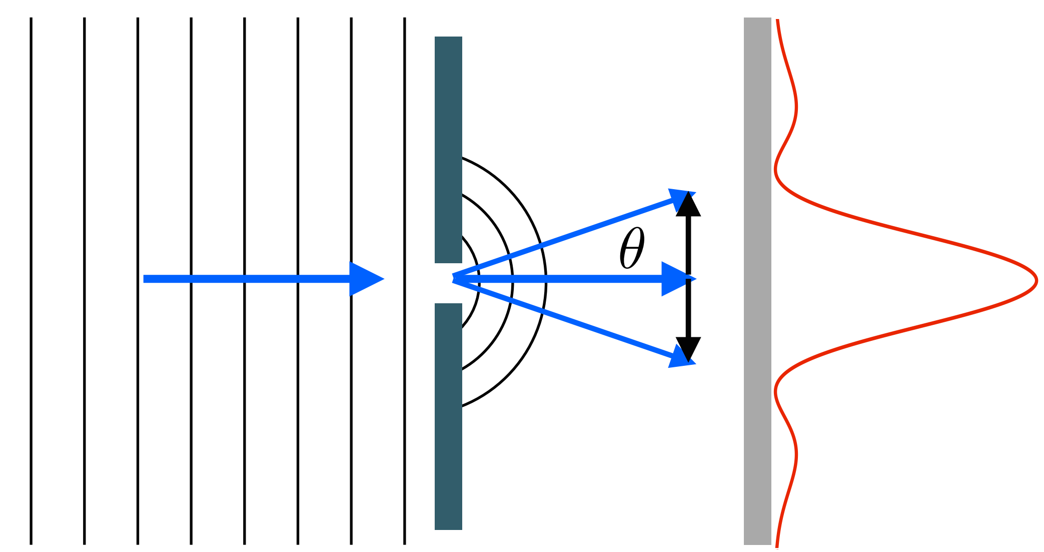
$$\boxed{\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

O princípio de incerteza de Heisenberg
(Relações análogas valem para os componentes *y* e *z*)

Também existem relações de incerteza para outras grandezas: $\boxed{\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$

Um exemplo:

Abertura a



Primeiro mínimo de difração:

$$a \,\mathrm{sen}\, \theta = \lambda$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_y &\approx p \,\mathrm{sen}\, \theta = p\frac{\lambda}{a} \\ \Delta y &\approx a \end{aligned}\right\} \text{Estimativas}$$

$$\Delta y \, \Delta p_y \approx p\lambda \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

Onda plana: $p_y = 0 \quad \Delta p_y = 0$

$y = ? \quad \Delta y = \infty$

$$\longrightarrow \quad \Delta y \, \Delta p_y \approx h$$

A função de onda

- Em física quântica, partículas com momento linear *p* têm um c.d.o. λ associado.
- Mas a que tipo de onda pertence este λ? O que está a oscilar?

em geral complexa

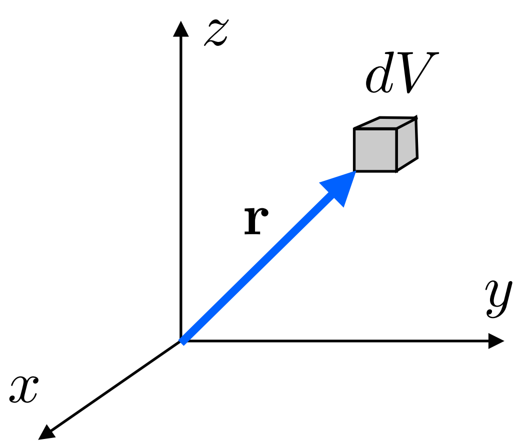
O estado quântico duma partícula é descrito por uma função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$

Em muitas situações a função de onda fatoriza: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$

A interpretação da função de onda:

$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV$

= a probabilidade de encontrar a partícula dentro do volume infinitesimal dV na posição **r**.



conjugação complexa

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

a densidade de probabilidade

ψ também é chamada a amplitude da densidade de probabilidade.

A probabilidade de encontrar a partícula em qualquer sítio do espaço deve ser 1.

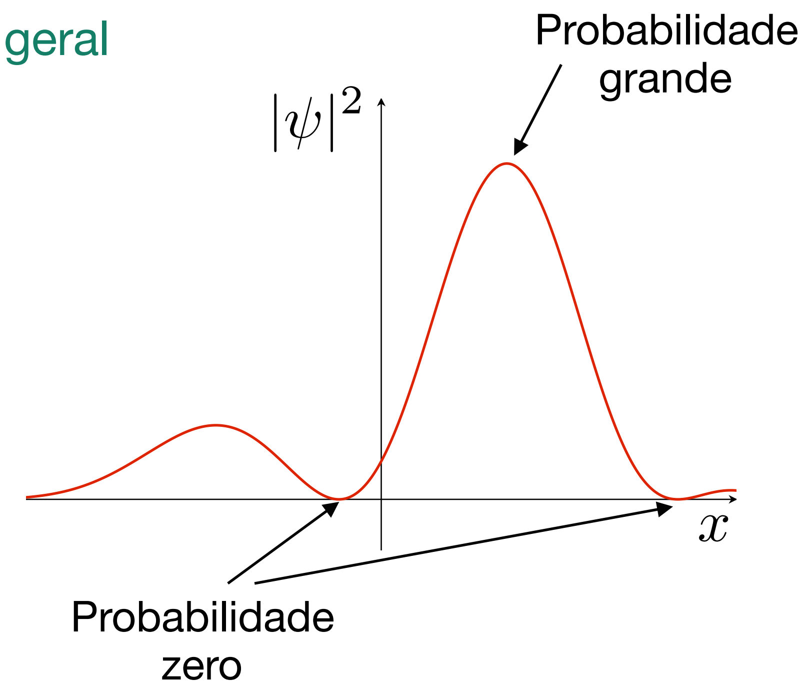
$$\int_{\text{Todo o espaço}} |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = 1$$

condição de normalização

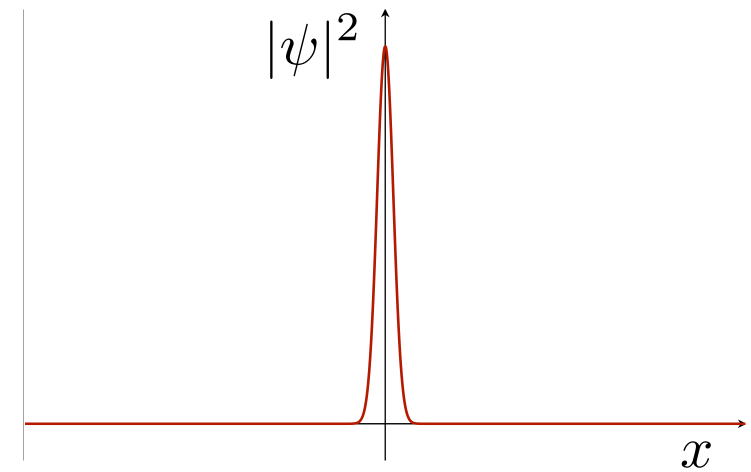
Partículas a uma dimensão

Consideremos uma partícula que se pode mover apenas ao longo do eixo dos *x*.

Caso geral

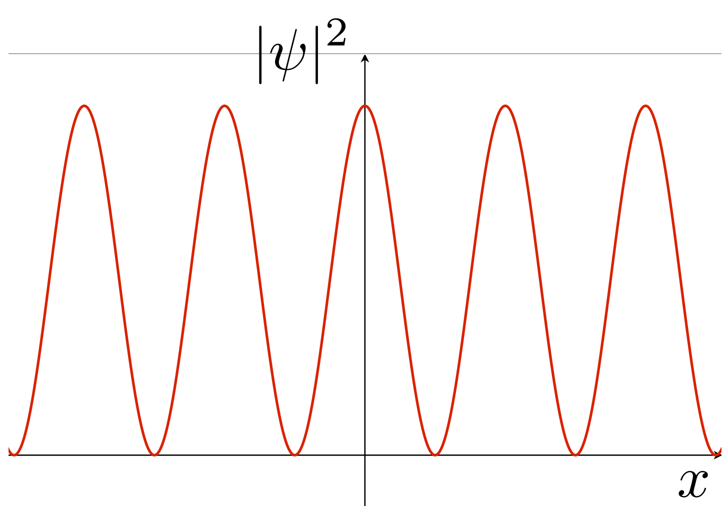


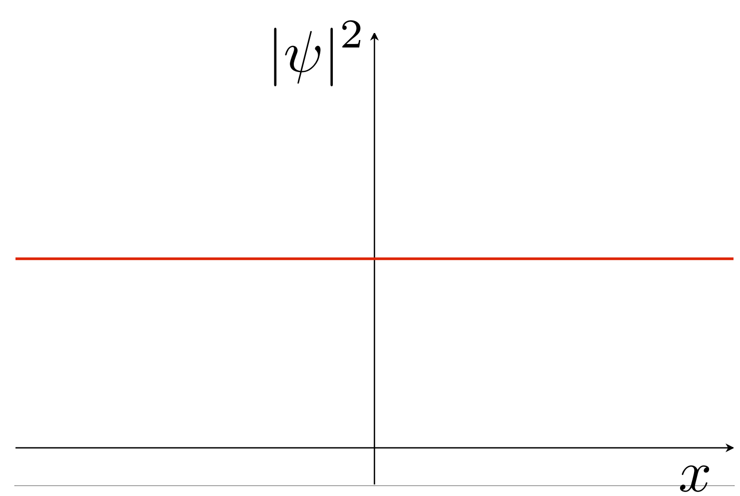
Partícula localizada



- Qual é a função duma partícula com determinado momento linear $p = h/\lambda$? $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{p}{\hbar}$

$\psi(x) = A\cos(kx)$? Não, porque a probabilidade devia ser igual em todo o espaço (princípio de incerteza)!



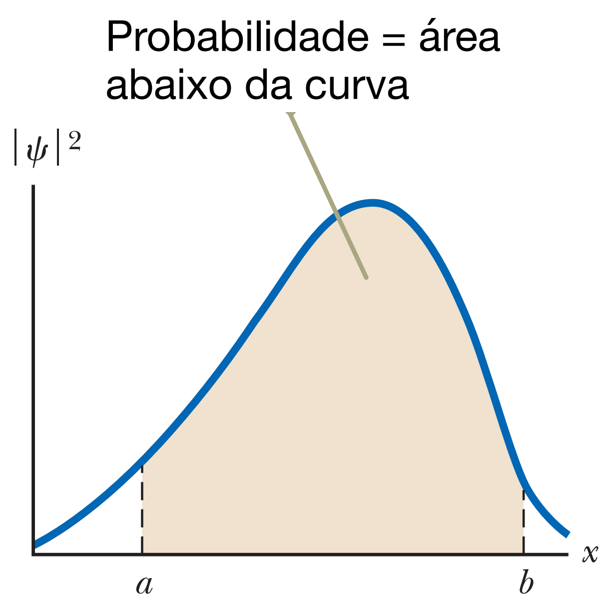


Qual função tem o c.d.o. λ e produz um $|\psi|^2$ constante?

$$\psi(x) = Ae^{ikx} = Ae^{ipx/\hbar}$$

Observáveis

- Toda a informação sobre um sistema está contida na sua função de onda.
- Como é que se pode extrair esta informação?



A probabilidade de encontrar a partícula entra x=a e x=b é $$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

Valores médios: $$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x\, \psi\, dx$$

(o valor espectável da posição no estado quântico ψ)

Qualquer função $f(x)$: $$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* f(x)\, \psi\, dx$$

- Os valores médios (ou "valores expectáveis") correspondem a médias ponderadas.
- A fórmula para $\langle f(x) \rangle$ também é válida quando f é um operador diferencial.

Por exemplo, para o momento linear temos $$p \to -i\hbar \frac{d}{dx}$$ este operador diferencial "representa" o momento linear

Com $\psi_p(x) = Ae^{ipx/\hbar}$ podemos verificar esta afirmação:

$$-i\hbar \frac{d}{dx}\psi_p(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} Ae^{ipx/\hbar} = -i\hbar(ip/\hbar)Ae^{ipx/\hbar} = pAe^{ipx/\hbar} = p\psi_p(x)$$