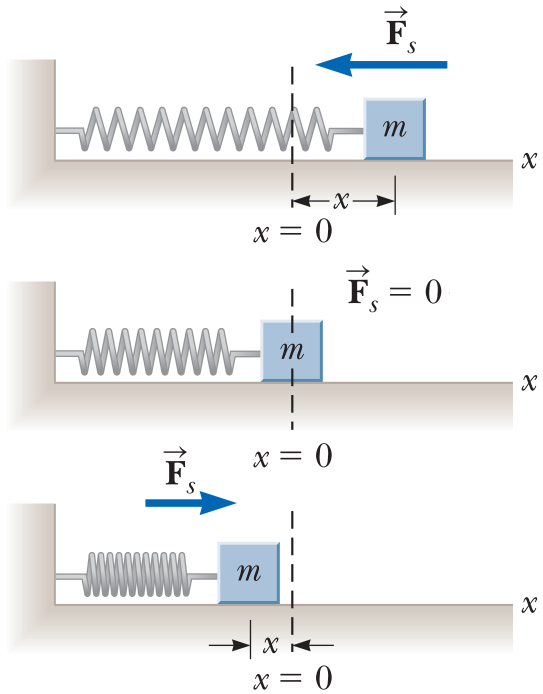
Física Geral I • FIS0703

Aula 03

28/09/2016

Equação do movimento duma massa numa mola

2ª lei de Newton: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$



Ao longo de x: $F_x = -kx$

$$ma = -kx \qquad a + \frac{k}{m}x = 0$$

mas $a = \ddot{x}$ $\longrightarrow$ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Isto é a equação dum MHS.

Comparação com $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ mostra que

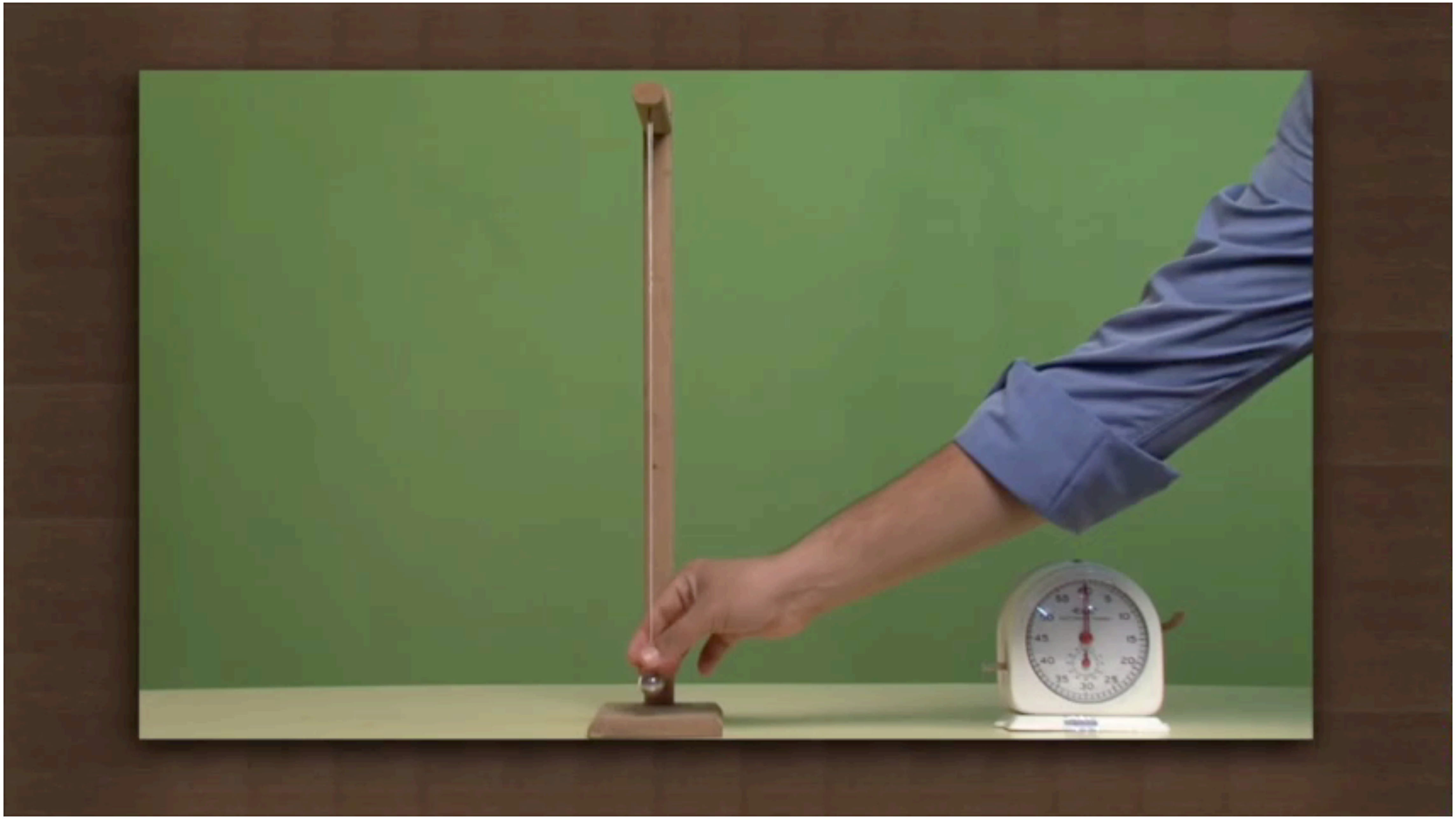
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ frequência angular da oscilação

A solução pode ser escrita da forma $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

As constantes A e ϕ são determinadas pelas condições iniciais.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ período da oscilação

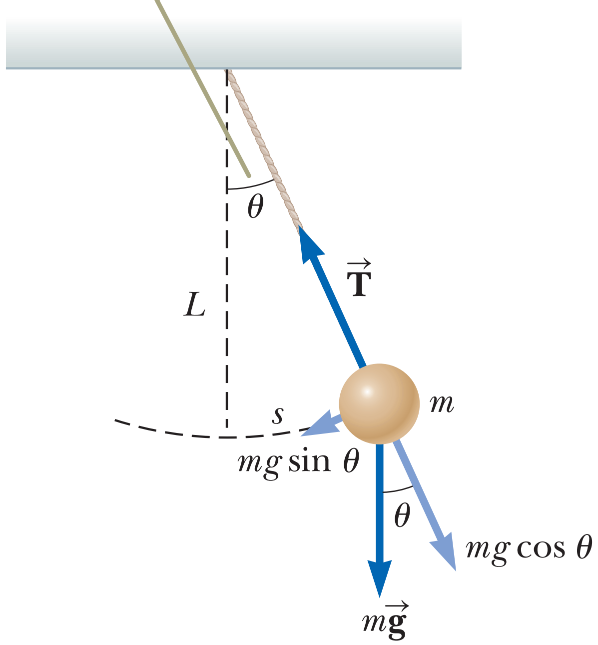
O pêndulo



O pêndulo

Uma massa m está suspensa num fio com comprimento L e massa desprezável.

Quando θ é pequeno, o movimento do pêndulo é aproximadamente um MHS em torno da posição de equilíbrio θ=0.



Direção tangencial: $F_t = ma_t \longrightarrow -mg \operatorname{sen} \theta = m\ddot{s}$

Comprimento do arco $s = L\theta \qquad \ddot{s} = L\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Isto é uma equação diferencial difícil de resolver!

Aproximação para ângulos pequenos:

$\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ (em radianos!)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0}$$

Equação do pêndulo simples

Compare com a equação do MHS $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$

Para ângulos pequenos (amplitude pequena!), o movimento dum pêndulo é um MHS.

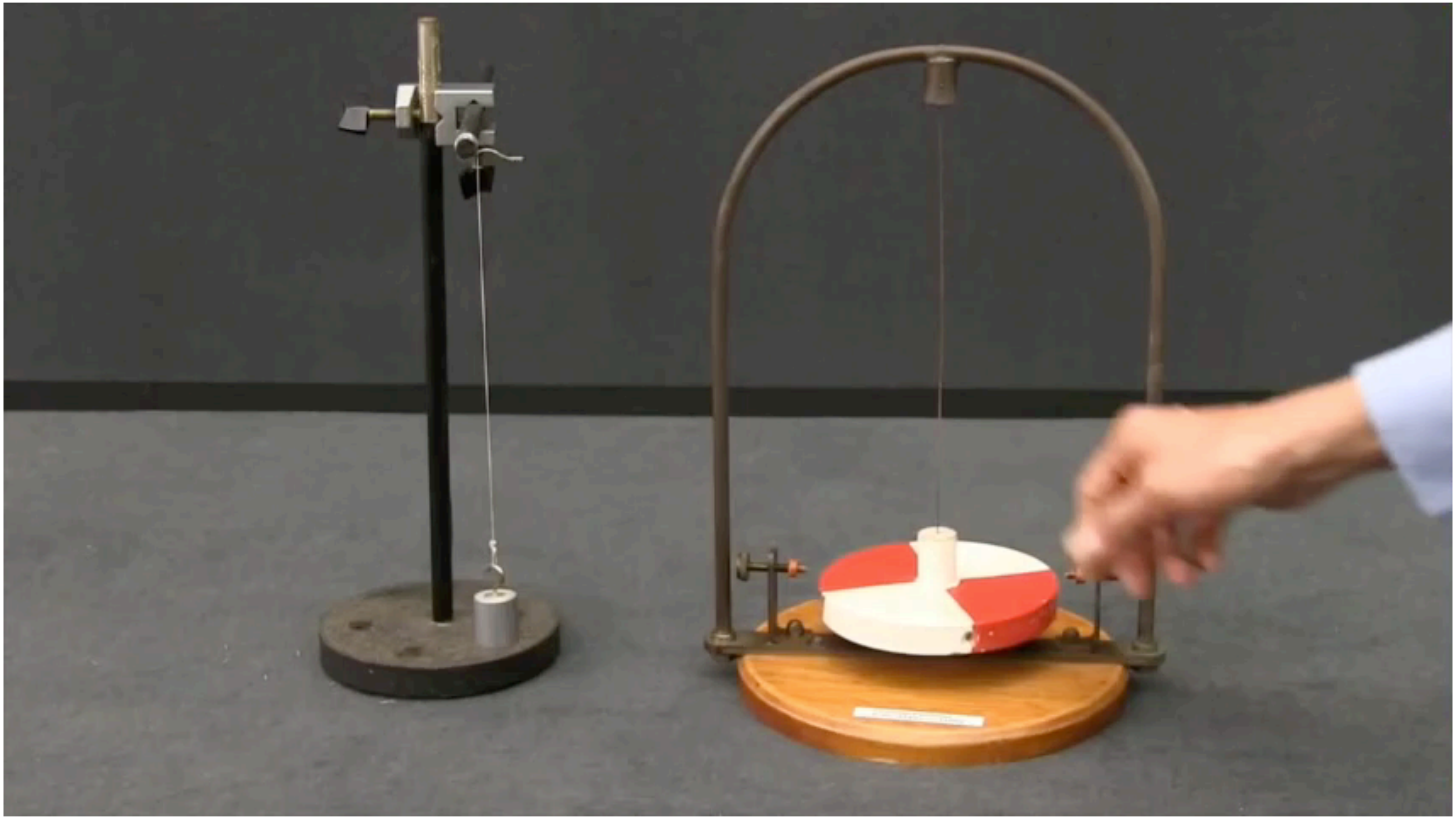
Frequência angular: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ Período: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

Repare que o período não depende da massa!

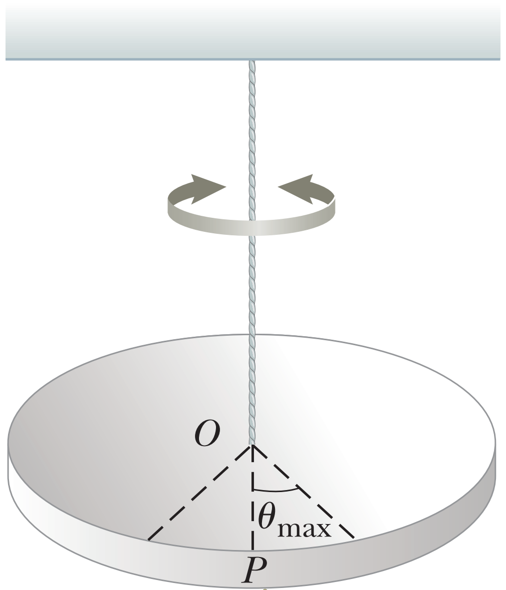
Aproximação para ângulos pequenos

Angle in Degrees	Angle in Radians	Sine of Angle	Percent Difference
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

Pêndulo de torção



Pêndulo de torção



O objeto oscila em torno da linha OP com amplitude θ_{max}.

Em equilíbrio, o objeto pendurado no fio está em repouso.

Ao rodar o objeto, o fio torcido exerce um momento de força restauradora τ proporcional ao ângulo de torção (ângulo relativo à linha de equilíbrio)

Constante de torção do fio

$$\tau = -\kappa\theta$$

2ª lei de Newton para movimento rotacional é $\tau = I\alpha$

momento de inércia

aceleração angular

Com $\alpha = \ddot{\theta}$ obtém-se $-\kappa\theta = I\ddot{\theta}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0}$$

O pêndulo de torção oscila na forma dum MHS

Frequência angular: $\omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}}$

Período: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\kappa}}$

Corpos flutuantes

Força restauradora (impulsão — Archimedes) sobre um objeto parcialmente submerso pode ser proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio
→ oscilações verticais (movimento harmónico simples).

Sobreposição de movimentos periódicos

Muitos sistemas físicos podem executar vários MHS simultaneamente.

Um exemplo importante é a acústica:

Os diafragmas de microfones e altifalantes, o tímpano no ouvido, instrumentos musicais, etc., vibram em forma de combinações complicadas de MHS's.

Princípio fundamental: o movimento resultante duma combinação de vibrações é a soma das vibrações individuais.

Sistemas em quais este pressuposto é válido são designados "lineares".

O batimento

Consideremos a sobreposição de dois MHS com a mesma amplitude.

(As fases iniciais não têm importância neste caso e são escolhidos iguais a zero.)

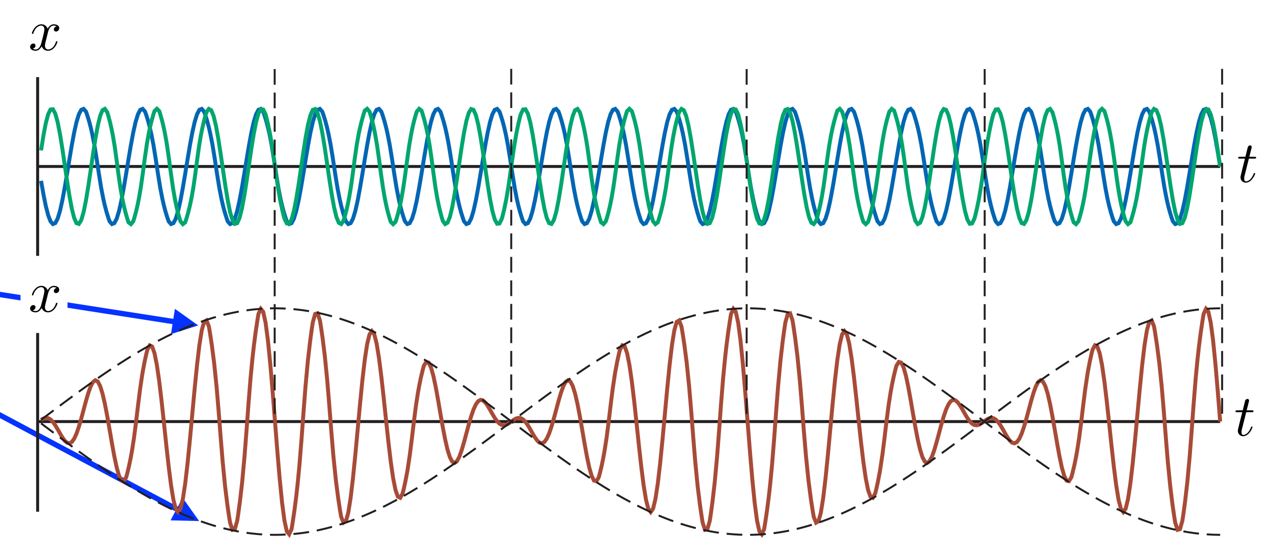
$$x_1(t) = A\cos\omega_1 t \qquad x_2(t) = A\cos\omega_2 t \qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} + \Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= \omega_1 t \\ \alpha-\beta &= \omega_2 t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \\ \beta &= \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t \end{aligned} \Longrightarrow \boxed{x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}$$

Interpretação:

- Oscilação harmónica com frequência angular média
- Amplitude modulada



"Envolvente"

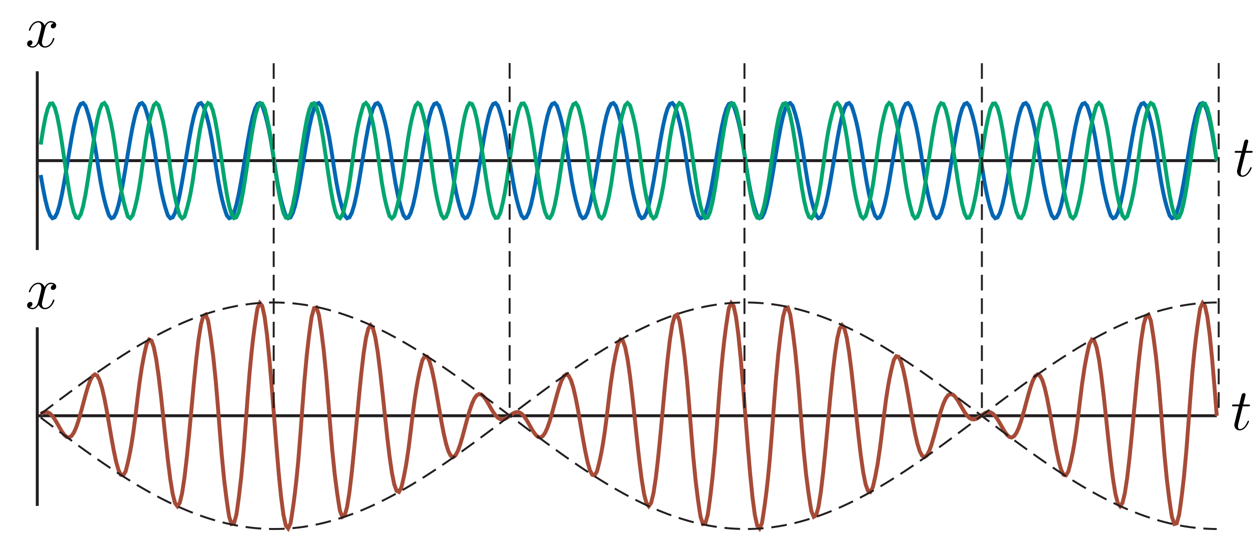
$$x_{\text{env}}(t) = \pm 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

Frequência angular do batimento: $\omega_{\text{bat}} = \omega_1 - \omega_2$

(2 nós em cada período)

O batimento

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

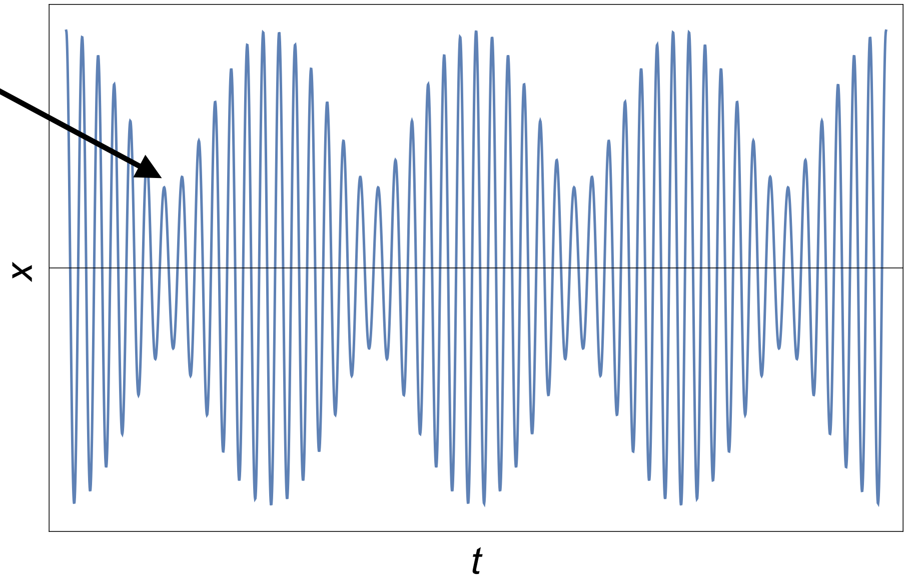


440 Hz | 450 Hz | 448 Hz | 446 Hz | 444 Hz | 442 Hz | 441 Hz

460 Hz | 470 Hz

“Envolvente” não vai para zero
(mas isso não se ouve)

Amplitudes diferentes



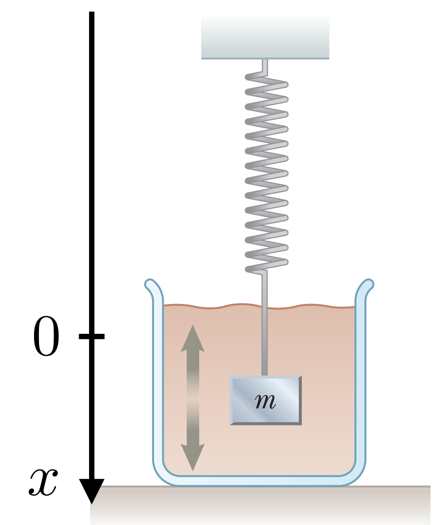
O ouvido humano consegue resolver batimento com frequências ~20 Hz
(depois é sentido como um som dissonante).

Oscilações amortecidas

Oscilações harmónicas de sistemas físicos reais sempre terminam após algum tempo finito.

A energia das oscilações é dissipada devido a forças não conversativas.

Exemplo: massa numa mola move-se num líquido com viscosidade



É muito difícil descrever a força resistiva $\mathbf{R}$ exatamente.

Modelo simples: $\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$

2ª lei de Newton: $ma = -kx - bv$

$$a = \ddot{x} \qquad v = \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Para simplificar: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a frequência angular do oscilador sem atrito ($b=0$)

$\gamma = \frac{b}{m}$ caracteriza o amortecimento (mesma dimensão que ω_0)

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ Equação do oscilador amortecido

Solução da equação do oscilador amortecido

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \xrightarrow[\text{do número complexo } z]{x \text{ é parte real}} \quad \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Tentativa: $z = Ae^{i(pt+\phi)}$ $\qquad \dot{z} = ipAe^{i(pt+\phi)} = ipz$ $\qquad \ddot{z} = (ip)^2 Ae^{i(pt+\phi)} = -p^2 z$

Substituir na equação diferencial: $(-p^2 + ip\gamma + \omega_0^2)z(t) = 0$ $\qquad$ (para qualquer t !)

$-p^2 + ip\gamma + \omega_0^2 = 0$ $\qquad$ p também é complexo: $\quad p = p_r + ip_i \qquad (p_r\,,\, p_i \in \mathbb{R})$

$$-(p_r + ip_i)^2 + i(p_r + ip_i)\gamma + \omega_0^2 = 0 \qquad -p_r^2 + p_i^2 - 2ip_r p_i + ip_r\gamma - p_i\gamma + \omega_0^2 = 0$$

$$-p_r^2 + p_i^2 - p_i\gamma + \omega_0^2 + i(-2p_r p_i + p_r\gamma) = 0$$

→ Duas equações (partes real e imaginária separadamente).

Parte real: $-p_r^2 + p_i^2 - p_i\gamma + \omega_0^2 = 0$ $\qquad$ Parte imaginária: $-2p_r p_i + p_r\gamma = 0$

$$p_i = \frac{\gamma}{2}$$

$$-p_r^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{2} + \omega_0^2 = 0$$

$$p_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$z = Ae^{i(pt+\phi)} = Ae^{i(p_r + ip_i)t + i\phi} = Ae^{-p_i t} e^{i(p_r t + \phi)} \quad \xrightarrow{x = \mathrm{Re}(z)} \quad x = Ae^{-p_i t}\cos(p_r t + \phi)$$