# Física Geral I • FIS0703

| | |
|---|---|
| Aula prática 03 | 10/10/2016 |
| Revisão: análise de erros experimentais | 11/10/2016 |

# Análise de erros

- *Erro* no sentido de *incerteza* (não de *engano*)

  ("margem de erro")

- Erros experimentais são inevitáveis

  - Limitações da precisão dos instrumentos

  - Interação do sistema com o exterior (incluindo o observador)

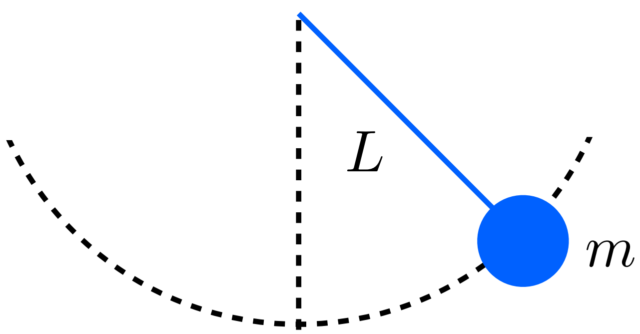
  - Limitações fundamentais

    (Mecânica Quântica: o princípio de incerteza, etc.)

O resultado duma experiência sem estimativa do erro associado é inútil!

# Exemplo: O período dum pêndulo

Período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$




Devíamos verficar que o período realmente não depende da massa.

Efetuar medições com

$L = 1.00 \text{ m}$ $\quad m = 1.00 \text{ kg}$ e $m = 2.00 \text{ kg}$

$g = 9.80 \text{ m/s}^2$

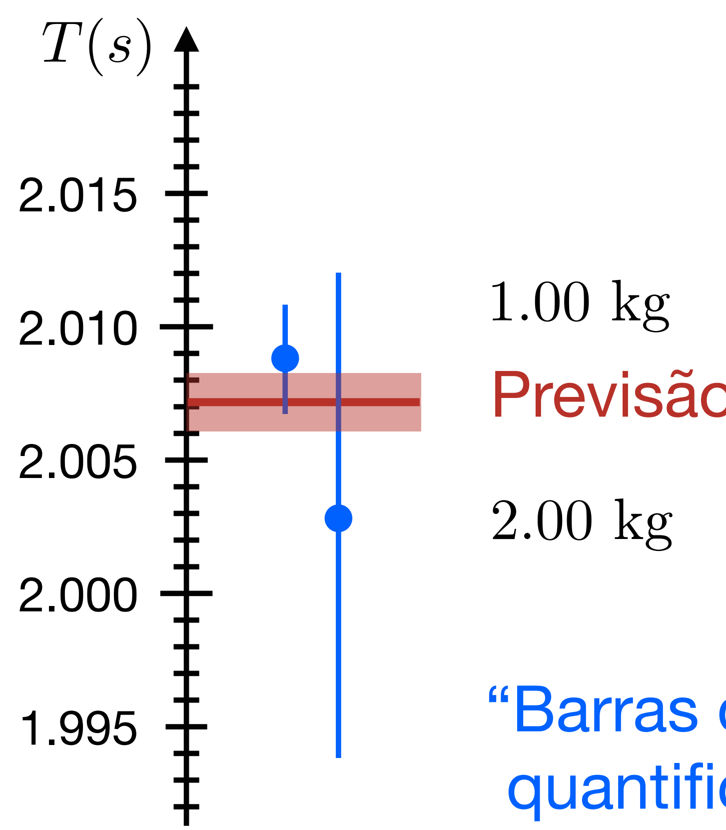
<u>Sem considerar erros:</u>

- inconclusivo

<u>Consideração com erros:</u>

- Ambas as medições consistentes com a previsão

- A estimativa dos erros tem de ser *justificada*




"Barras de erro" quantificam as incertezas

# Como escrever resultados com erros

Medida de x = $x_{melhor} \pm \delta x$ [unidades]

Melhor estimativa de x

Estimativa do erro

$\delta$x é estimado $\rightarrow$ erro arredondar para 1 algarismo significativo

$$g = 9.82 \pm 0.02385\, m/s^2 \quad \Rightarrow \quad g = 9.82 \pm 0.02\, m/s^2$$

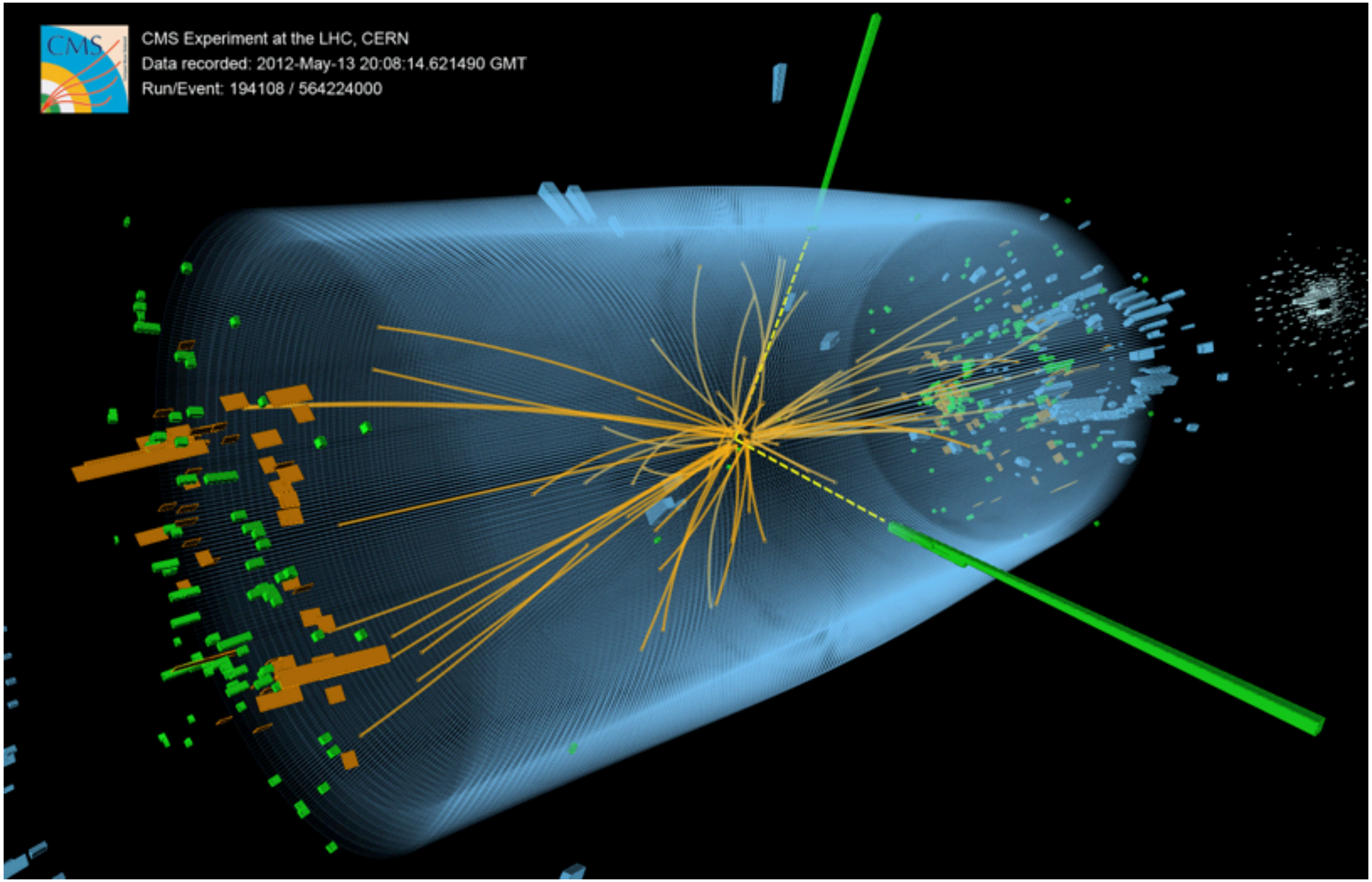
Relatar apenas algarismos significativos da medida

$$v = 6051.78 \pm 30\, m/s \quad \Rightarrow \quad v = 6050 \pm 30\, m/s$$

Escrever resultado de forma mais clara e simples

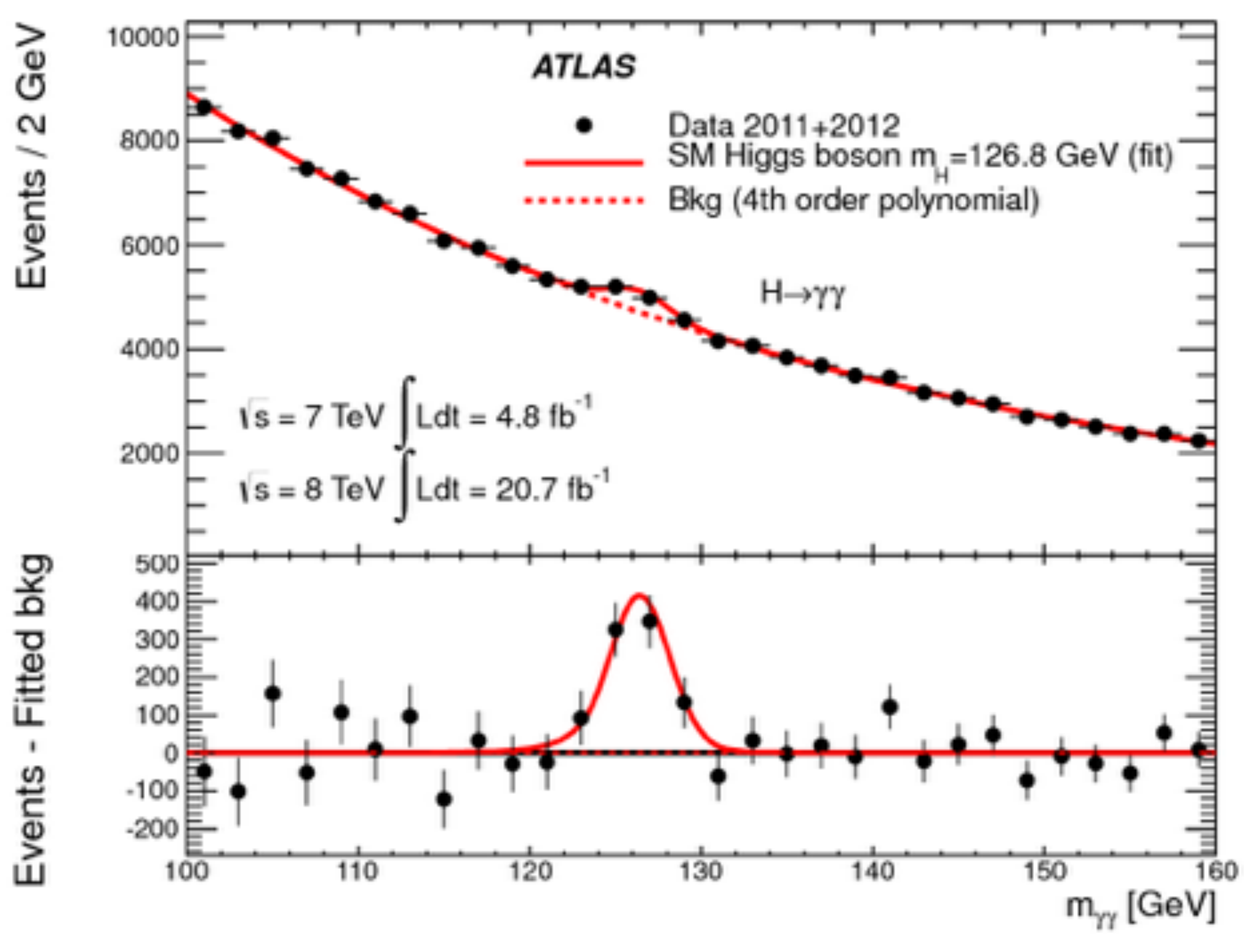
$$q = 1.61 \times 10^{-19}\, C \pm 5 \times 10^{-21}\, C \quad \Rightarrow \quad q = (1.61 \pm 0.05) \times 10^{-19}\, C$$

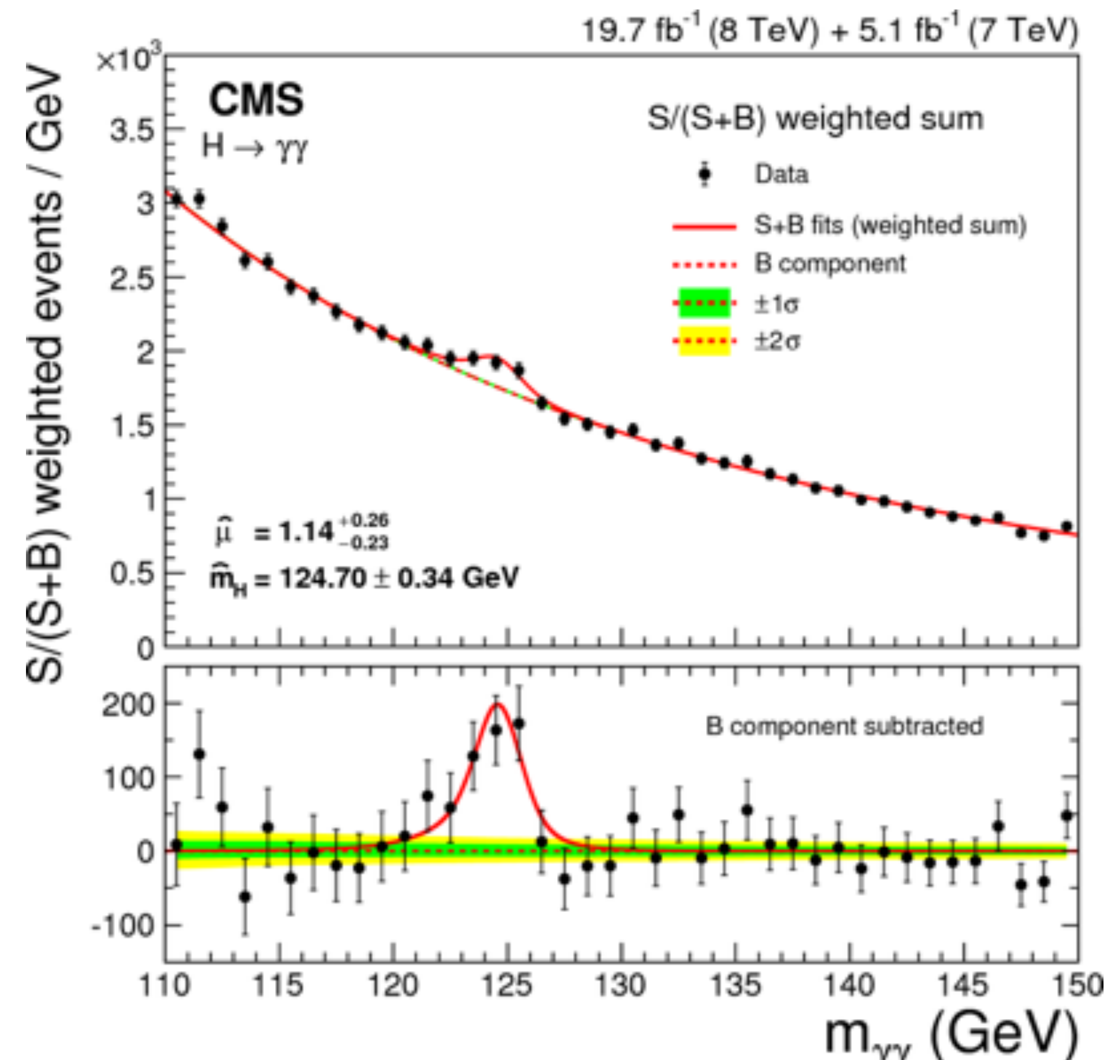
# Descoberta do bosão de Higgs no LHC (CERN)




Evento registado com o detector CMS em 2012 numa colisão protão-protão à energia no centro-de-massa de 8 TeV. O evento apresenta as características esperadas do decaimento do bosão de Higgs num par de fotões (linhas tracejadas amarelas e torres verdes). O evento também pode ser devido a outros processos de fundo.

# Descoberta do bosão de Higgs no LHC (CERN)




ATLAS:

$$m_H = 126.0 \pm 0.4 \text{ (stat)} \pm 0.4 \text{ (sys) GeV}$$

CMS:

$$m_H = 125.3 \pm 0.4 \text{ (stat)} \pm 0.5 \text{ (sys) GeV}$$

# Incertezas na leitura de escalas

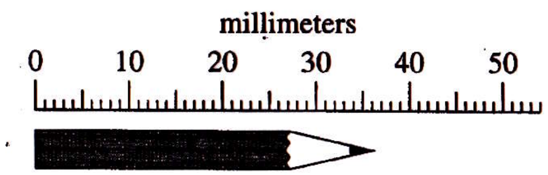



**Figure 1.2.** Measuring a length with a ruler.

Figure 1.2, we must first place the end of the pencil opposite the zero of the ruler and then decide where the tip comes to on the ruler's scale. To measure the voltage in Figure 1.3, we have to decide where the needle points on the voltmeter's scale. If we assume the ruler and voltmeter are reliable, then in each case the main prob-

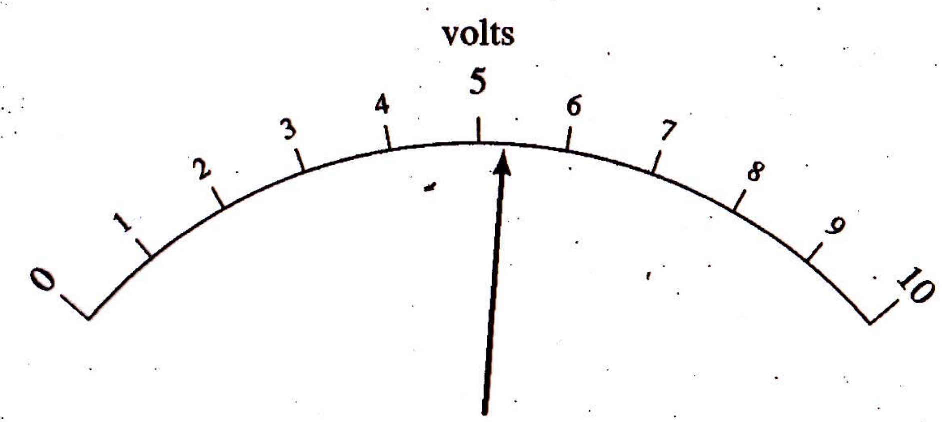



**Figure 1.3.** A reading on a voltmeter.

<u>Regra típica da leitura:</u>

Melhor estimativa = marca mais próxima

Incerteza = metade da menor divisão

Exemplo: $l = 36\,mm,\ \delta l = 0.5\,mm$

Escreve-se: $\boxed{l = 36.0 \pm 0.5\,mm}$

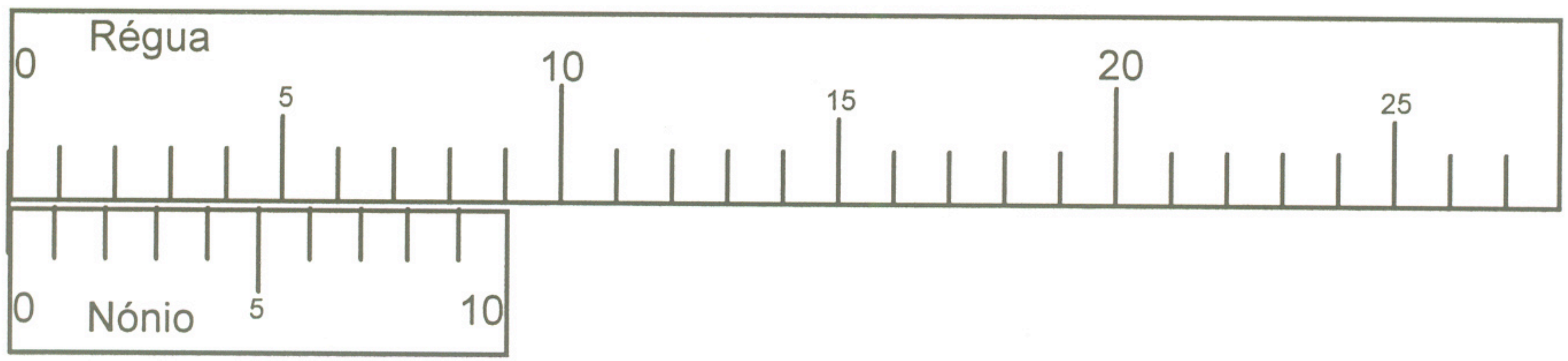
Aqui podemos fazer melhor
(a estimativa tem de ser razoável!)

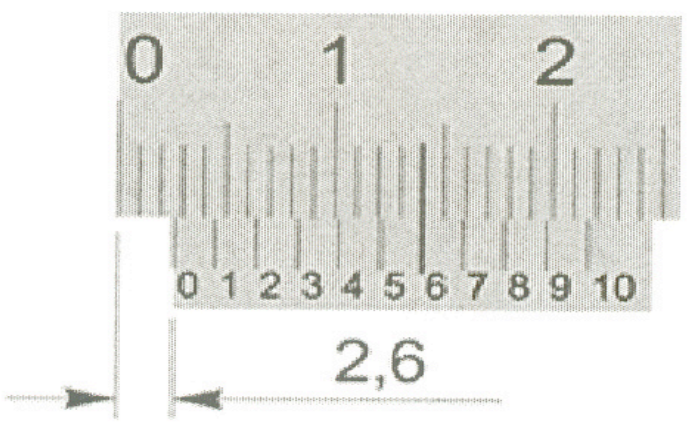
Exemplo: $U = 5.3 \pm 0.1\,V$

# O nónio

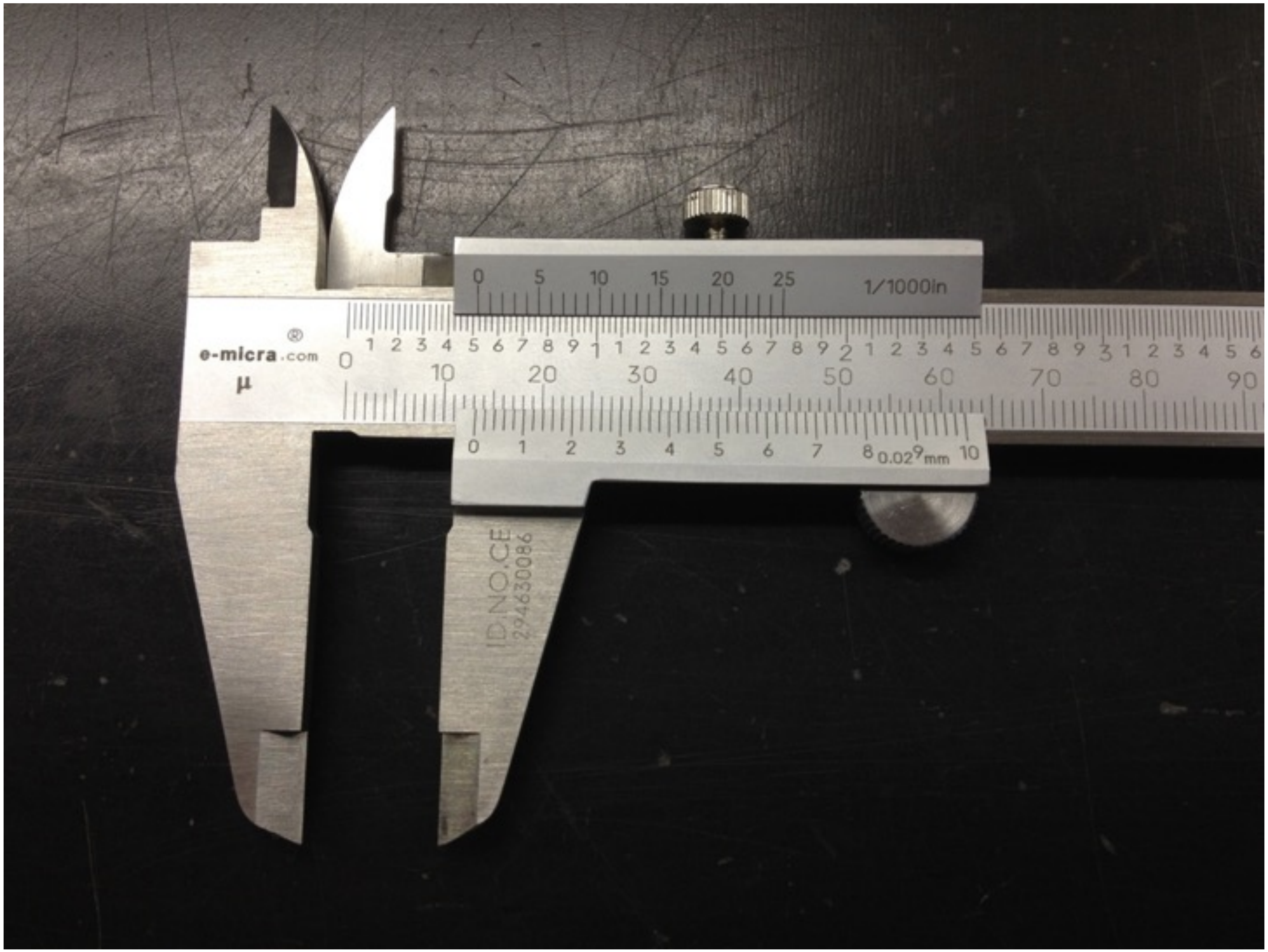
Permite fazer leituras mais precisas,

fracções da menor divisão da régua principal

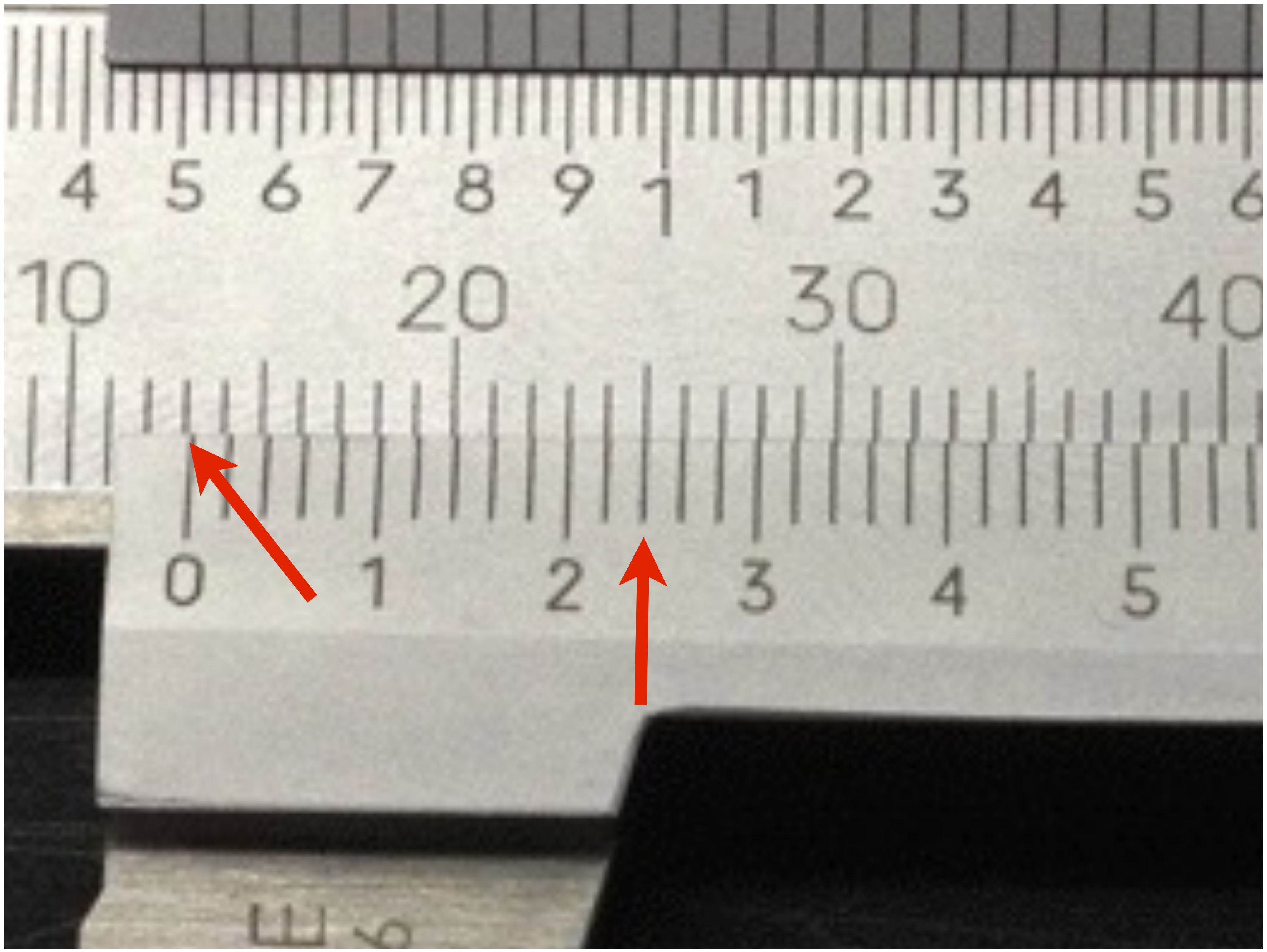


# A craveira

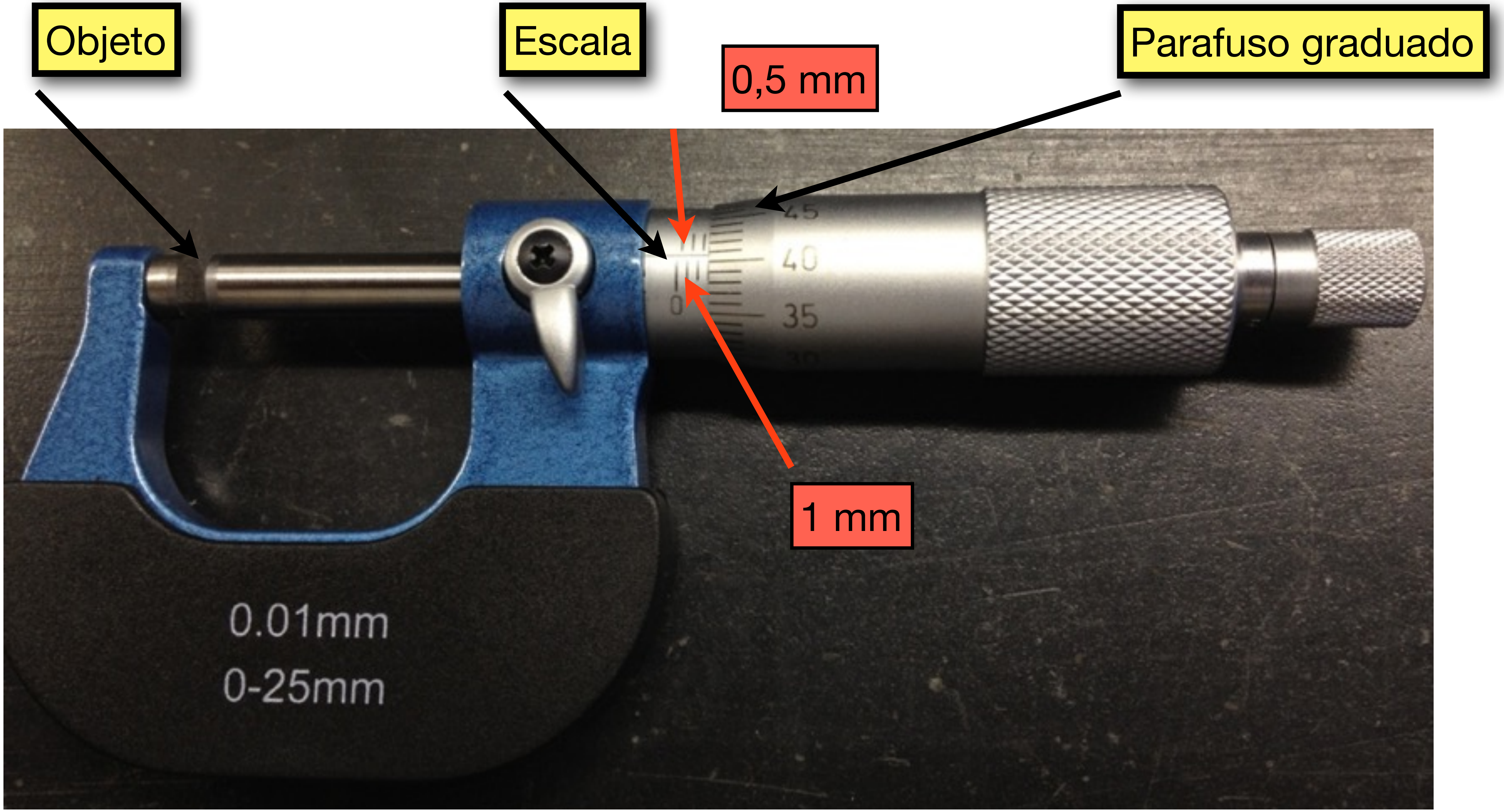


# Leitura da escala da craveira




Leitura: 13,24 ± 0,02 mm

# O palmer




Leitura: 2,91 ± 0,01 mm

# Erros em experiências de contagem

Contagem de eventos que ocorrem <u>aleatoriamente</u>, mas com <u>taxa média</u> bem definida

Exemplo: decaimentos radioactivos numa amostra

Regra muito simples:

$$\boxed{(\text{número médio de eventos durante } T) = \upsilon \pm \sqrt{\upsilon}}$$

número observado     incerteza da estimativa

---

Por exemplo: num hospital nasceram 14 bebes num período de 14 dias (observação)

⇩

(taxa média de partos em duas semanas) = 14 ± 4

# Medição de um só evento

- Estimar o erro de leitura
- Tomar em conta a precisão do instrumento
- Estimar os erros eventualmente cometidos pelo experimentalista

Exemplo:
Medição dum intervalo de tempo com um cronómetro

Erro da leitura ~ 0.01 s
Mas o erro devido o tempo da reacção do experimentalista é muito maior ~ 0.1 s (pelo menos!)

# Medições repetíveis

- Uma maneira importante de estimar erros é a <u>repetição</u> de experiências
- Quando possível, uma experiência deve ser repetida (em condições idênticas – tanto quanto possível), para
  - obter uma medida mais acertada (a média)
  - determinar uma estimativa do erro

**Erros estatísticos**

Desvios aleatórios – podem ser tradados com métodos da estatística

**Erros sistemáticos**

Desvios sistematicamente numa direcção
Não podem ser tratados com a estatística
<u>Exemplos:</u>
-Régua deformada
-Cronômetro corre devagar
-Calibração incorrecta
-Paralaxe na leitura

*Uma vez identificados, erros sistemáticos podem ser eliminados*

# Erros estatísticos e sistemáticos

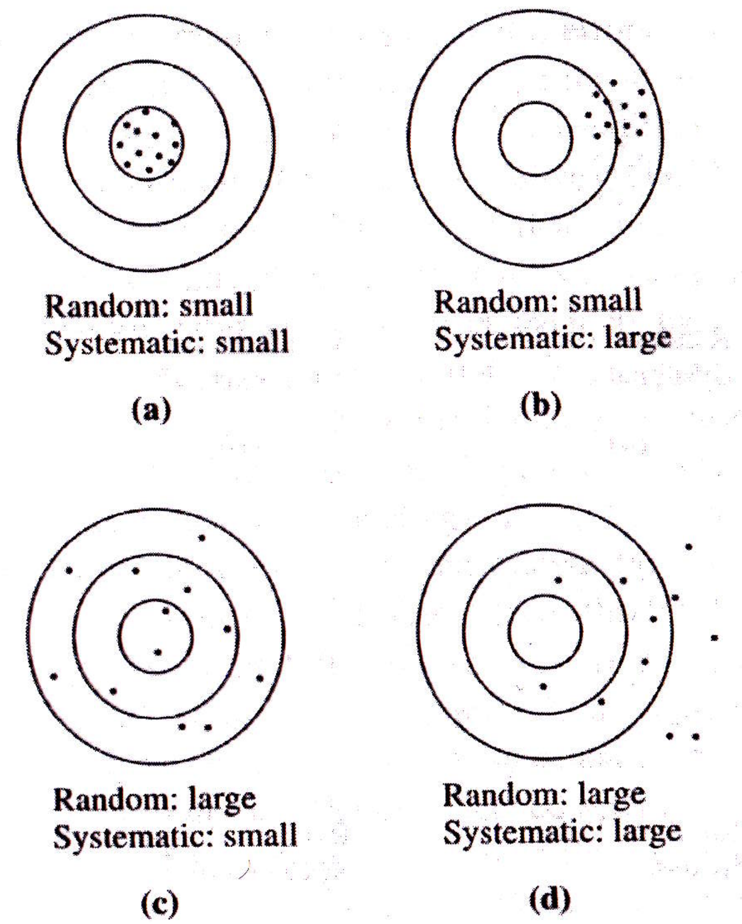



**Figure 4.1.** Random and systematic errors in target practice. **(a)** Because all shots arrived close to one another, we can tell the random errors are small. Because the distribution of shots is centered on the center of the target, the systematic errors are also small. **(b)** The random errors are still small, but the systematic ones are much larger—the shots are "systematically" off-center toward the right. **(c)** Here, the random errors are large, but the systematic ones are small—the shots are widely scattered but not systematically off-center. **(d)** Here, both random and systematic errors are large.

# Na prática, erros sistemáticos podem ser difíceis a detectar

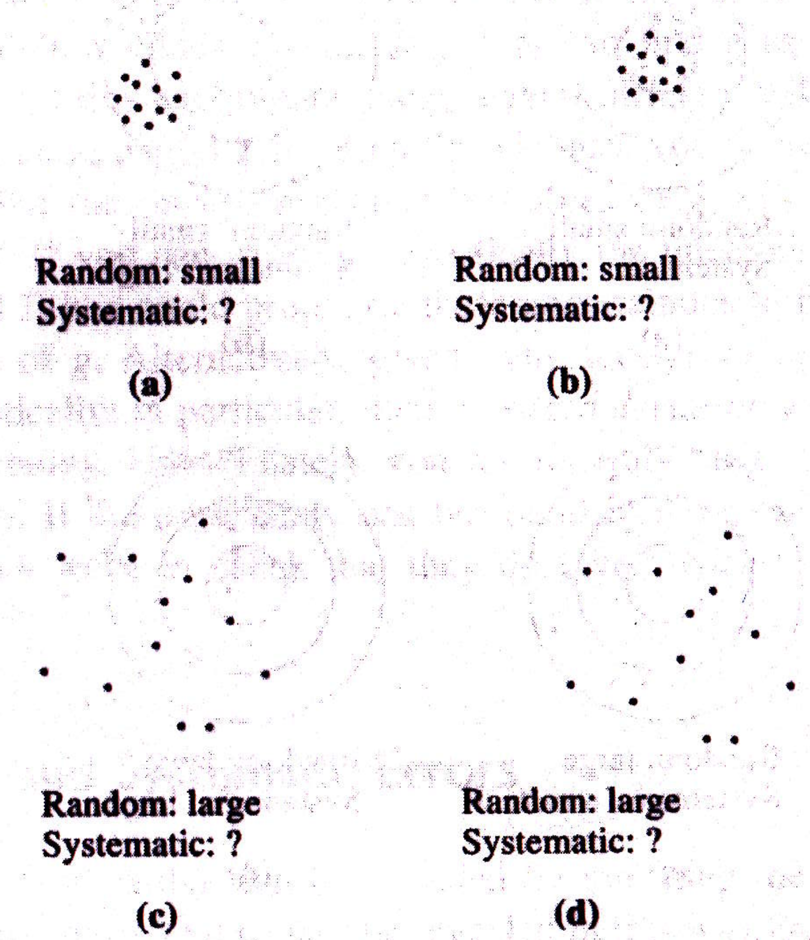
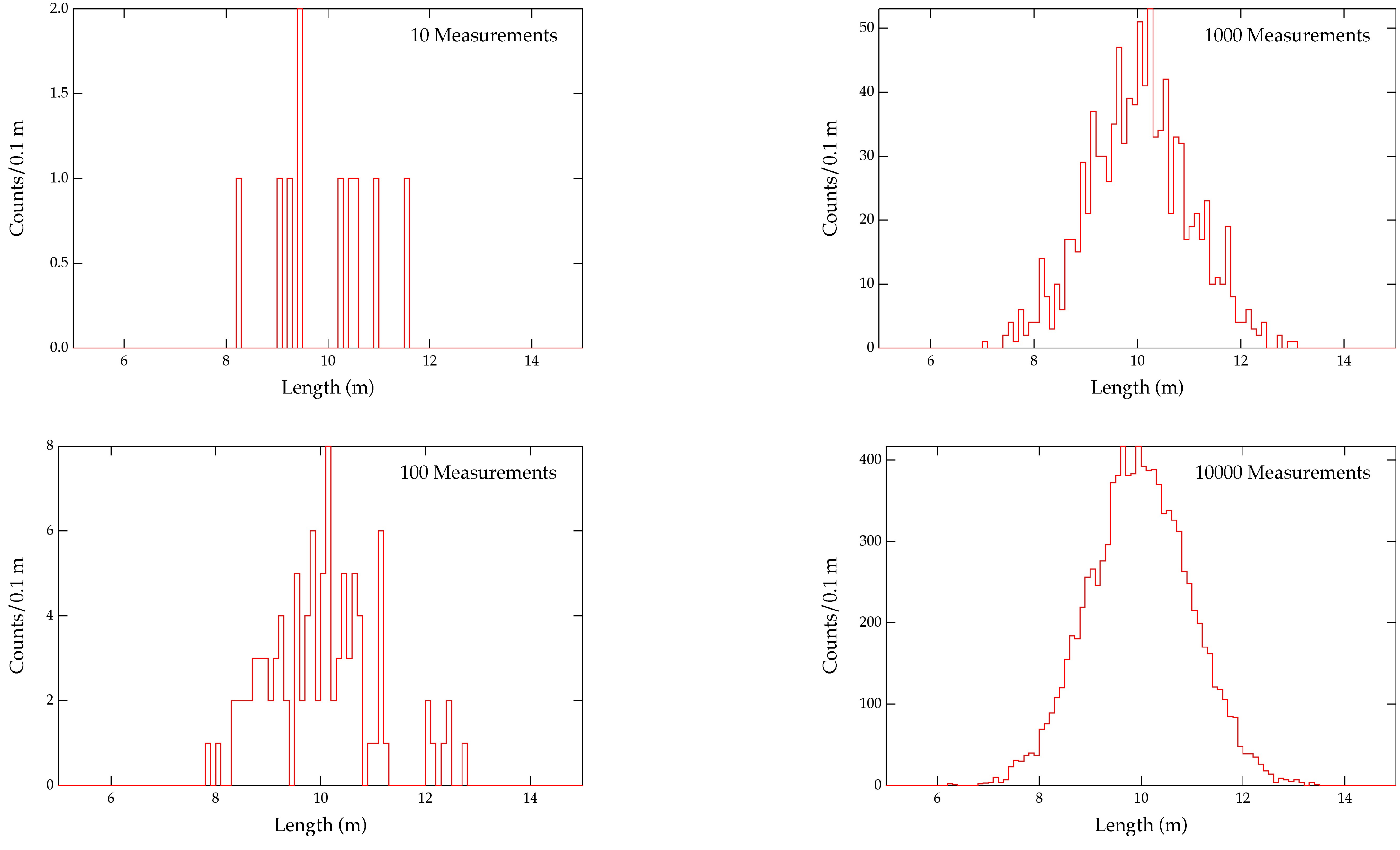



**Figure 4.2.** The same experiment as in Figure 4.1 redrawn without showing the position of the target. This situation corresponds closely to the one in most real experiments, in which we do not know the true value of the quantity being measured. Here, we can still assess the random errors easily but cannot tell anything about the systematic ones.

# Distribuição de Medidas repetidas

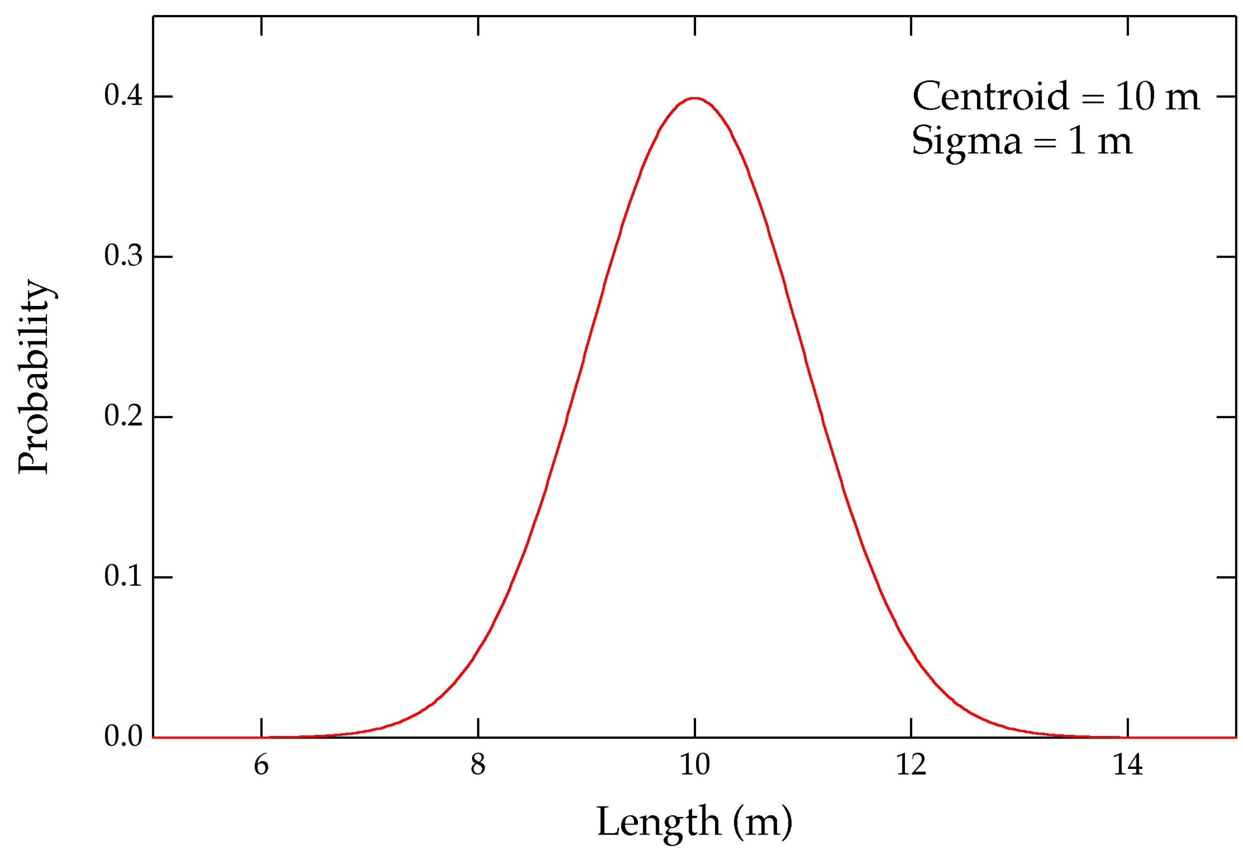
## Histograma de resultados



# Distribuição normal

(Distribuição de Gauss)

A distribuição mais comum em aplicações práticas



# Parâmetros da distribuição normal

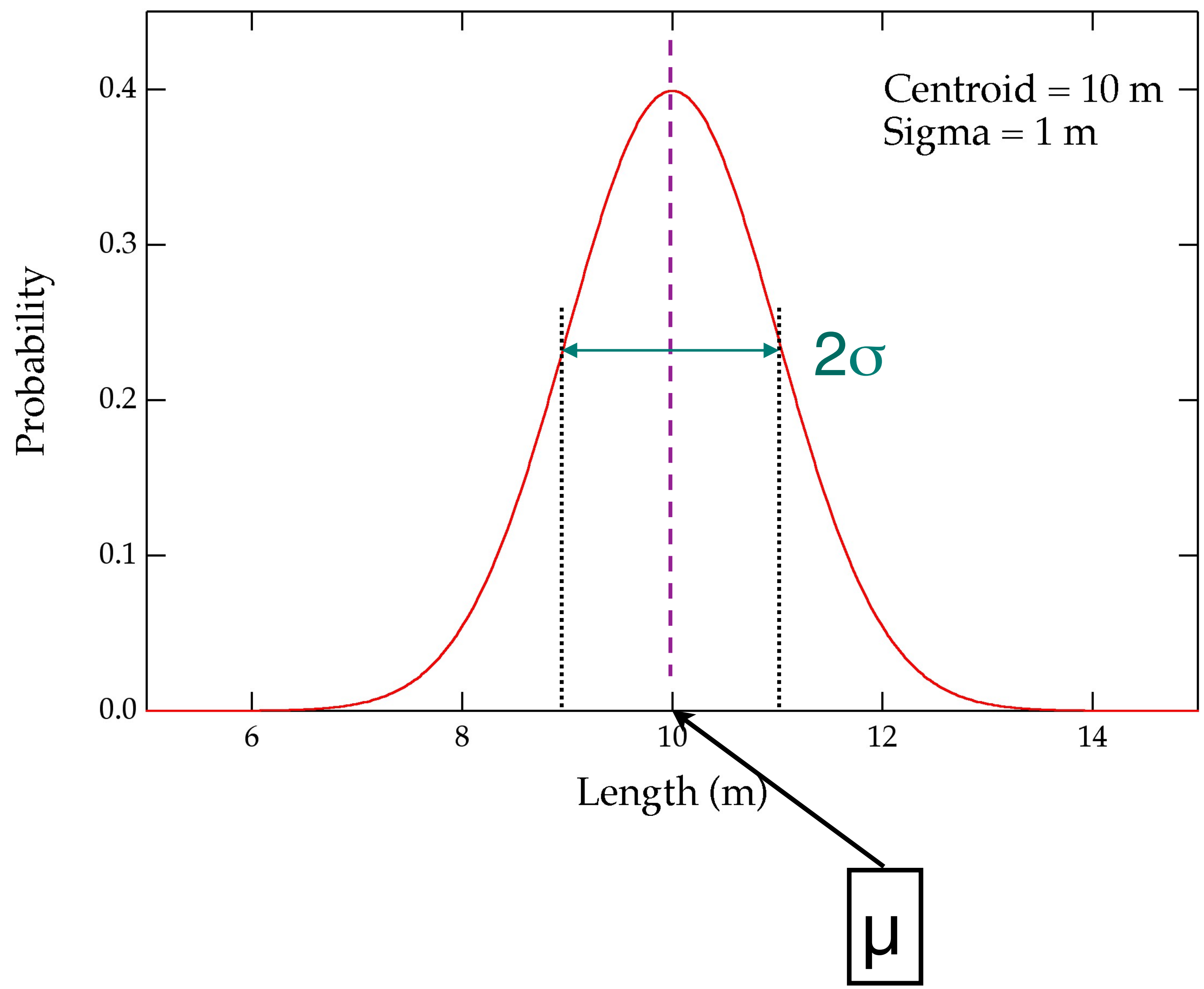
Média e desvio padrão (ou variância)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

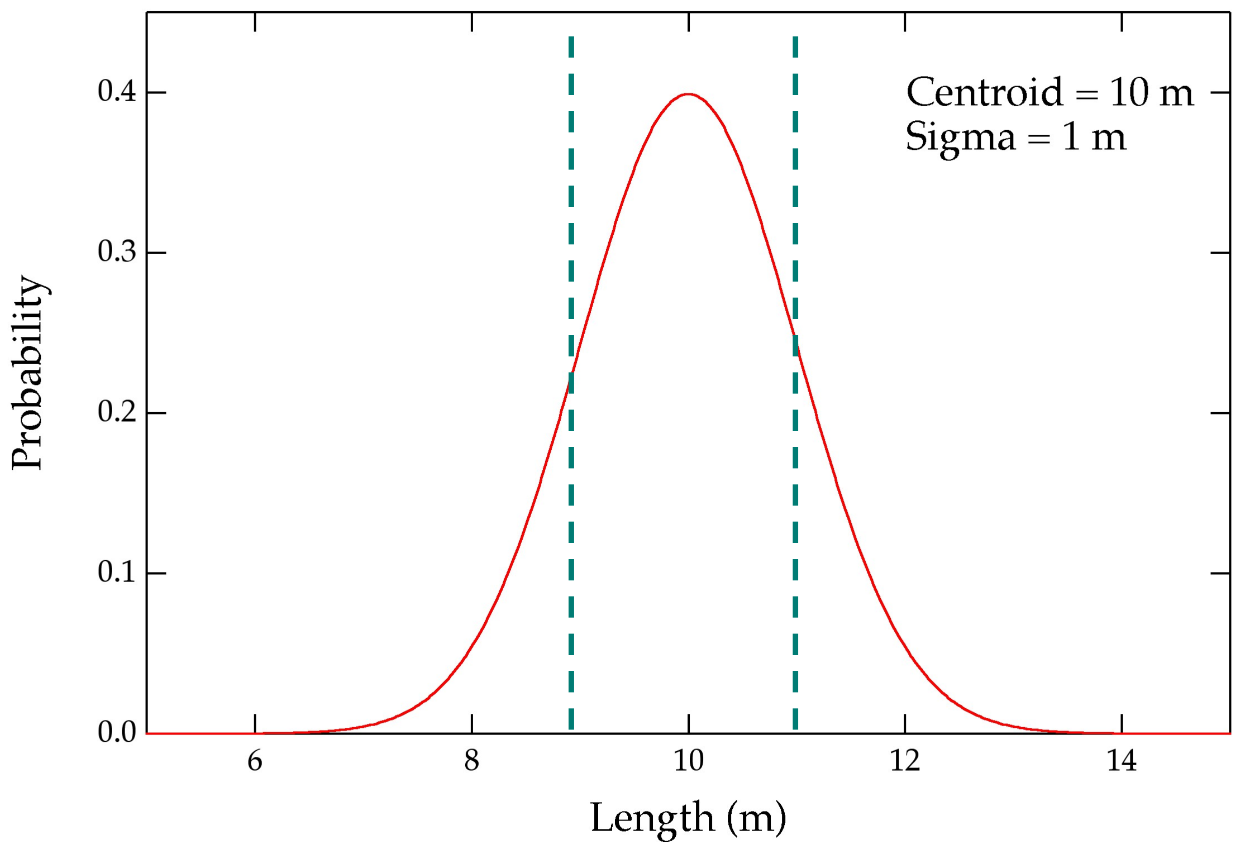
média **μ**

desvio padrão **σ**

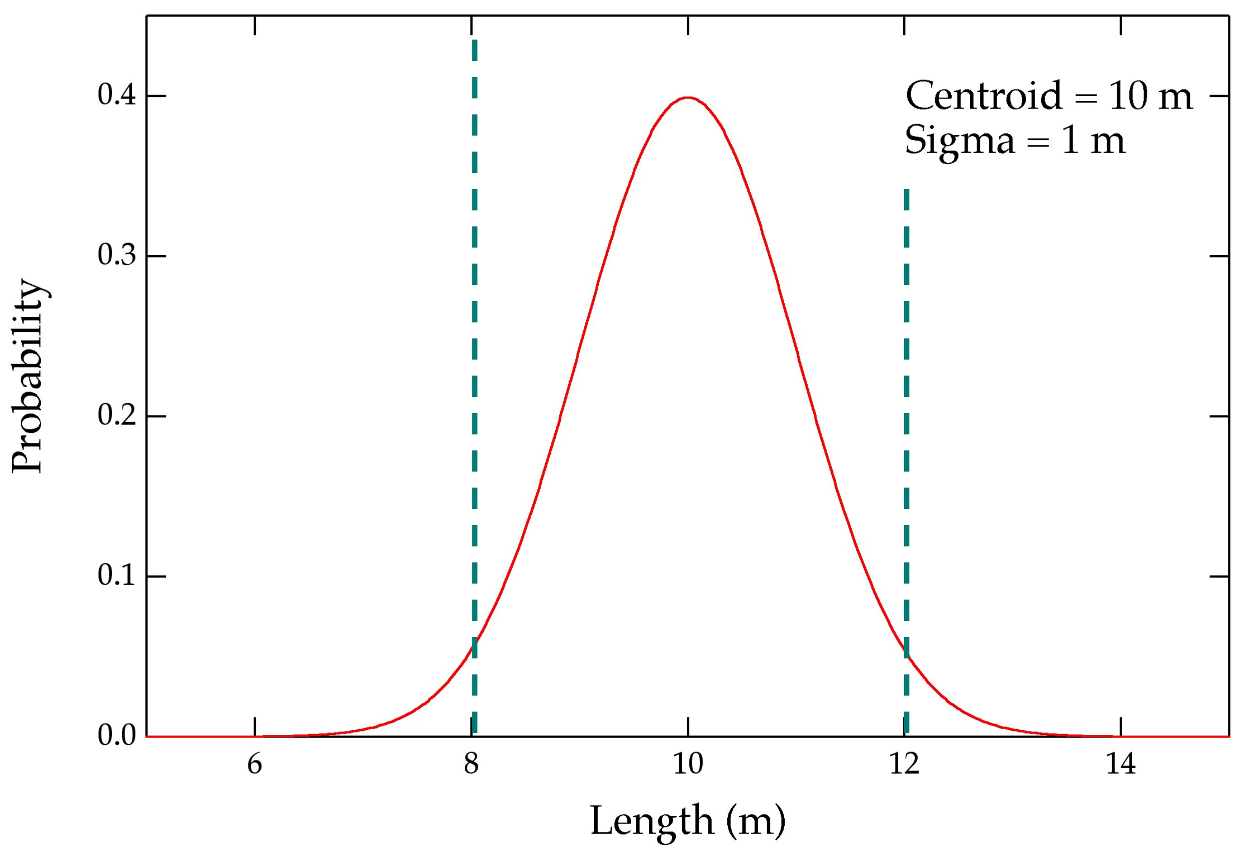
variância **σ²**



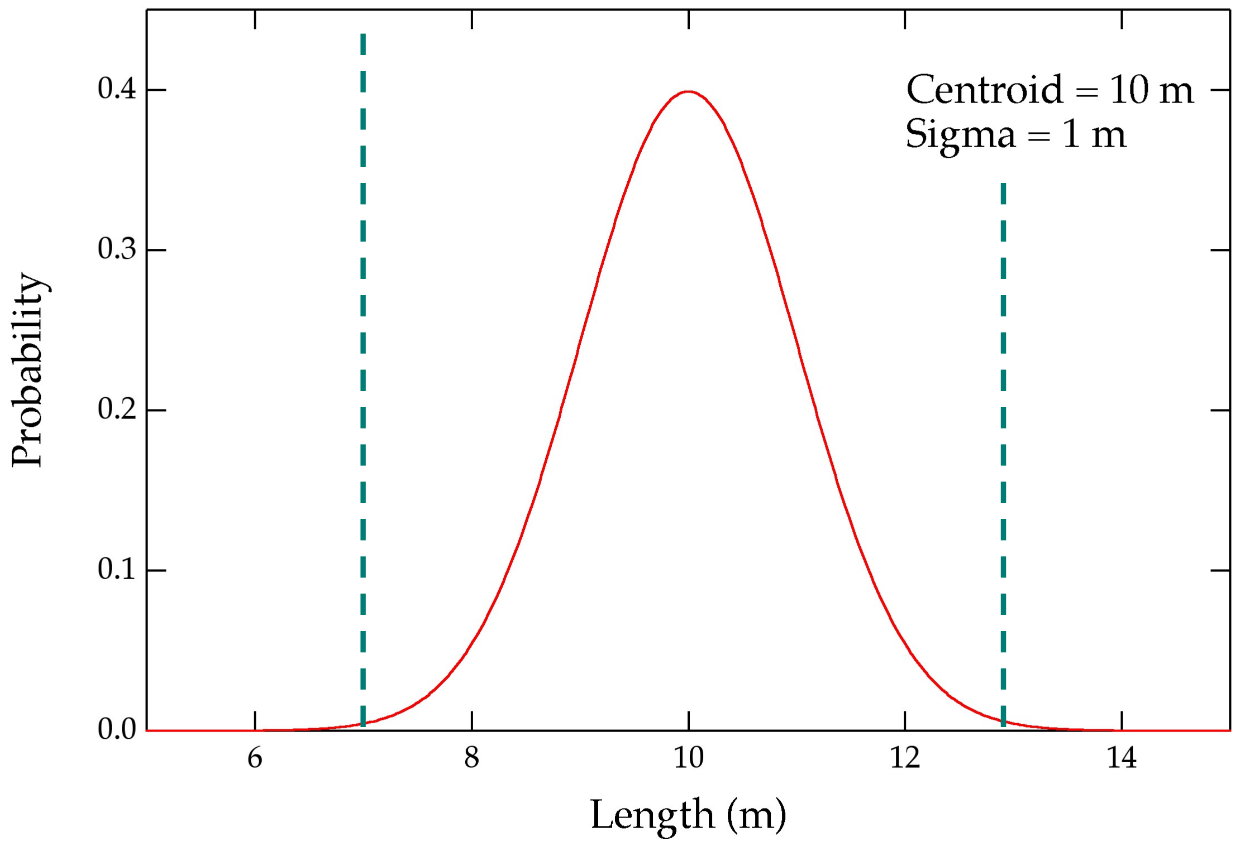
# A probabilidade do resultado de uma medição individual cair dentro de ±1 σ da média é 0.683



# A probabilidade do resultado de uma medição individual cair dentro de ±2 σ da média é 0.954



# A probabilidade do resultado de uma medição individual cair dentro de ±3 σ da média é 0.997



## Como determinar a média e o desvio padrão duma distribuição a partir de *N* medições?

Estatística e teoria da probabilidade:

Estimativas:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma \approx \delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

# Média e desvio padrão

Exemplo: determinação da constante duma mola através do período de oscilação
10 ensaios

Resultados: $k[N/m]: 86,85,84,89,85,89,87,85,82,85$

A média $\bar{k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$ $\quad \bar{k} = 85.7\ N/m$

O desvio padrão
("d.p. da amostra") $\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(k_i - \bar{k})^2}$ $\quad \sigma_k = 2.16\ N/m \approx 2\ N/m$

Atenção: existe também uma definição com *N*

Significa: erro individual de cada $k_i$
i.e., $k_1 = 86 \pm 2\ N/m$

$k_2 = 85 \pm 2\ N/m$

etc.

Interpretação: uma medição (individual) duma outa mola semelhante com o mesmo método terá a mesma incerteza $\sigma_k$

# Desvio padrão da média

A melhor estimativa de k é $\bar{k}$

Mas $\bar{k}$ depende dos $k_i \pm \sigma_k$ → Propagação destes erros para $\bar{k}$

Resultado para k: $\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}}$

$$\boxed{\sigma_{\bar{k}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{N}}}$$

Desvio padrão da média

Conclusão das 10 medições da constante da mola:

$$k = 85.7 \pm 0.7\ N/m$$

$$\sigma_{\bar{k}} = \frac{2.16\ N/m}{\sqrt{10}} = 0.7\ N/m$$

# Propagação de erros

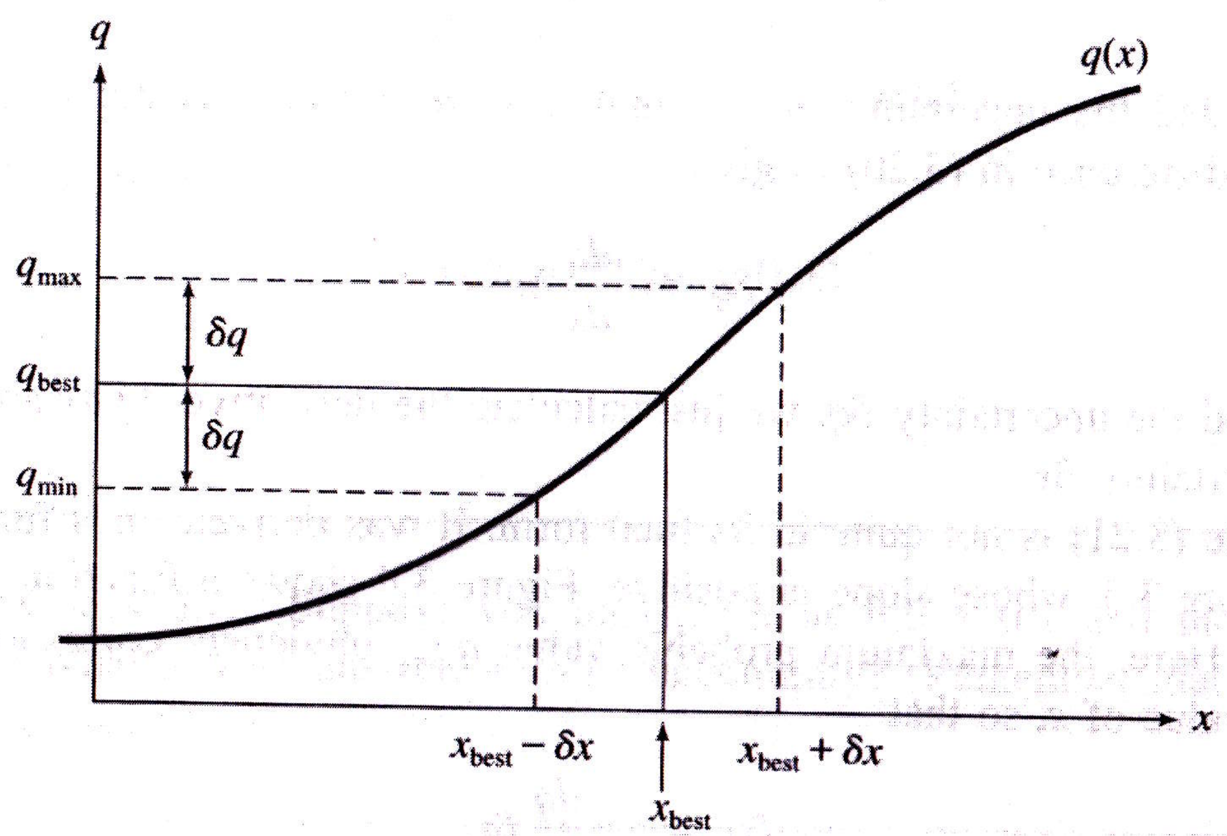



**Figure 3.3.** Graph of $q(x)$ vs $x$. If $x$ is measured as $x_{best} \pm \delta x$, then the best estimate for $q(x)$ is $q_{best} = q(x_{best})$. The largest and smallest probable values of $q(x)$ correspond to the values $x_{best} \pm \delta x$ of $x$.

Incerteza em *x* "propaga-se" para uma incerteza em qualquer função de *x*

$\delta q$ pode ser estimado através da derivada da função *q(x)* no ponto $x_{best}$

$$\delta q = \frac{dq}{dx}\delta x$$

# A derivada pode ser negativa

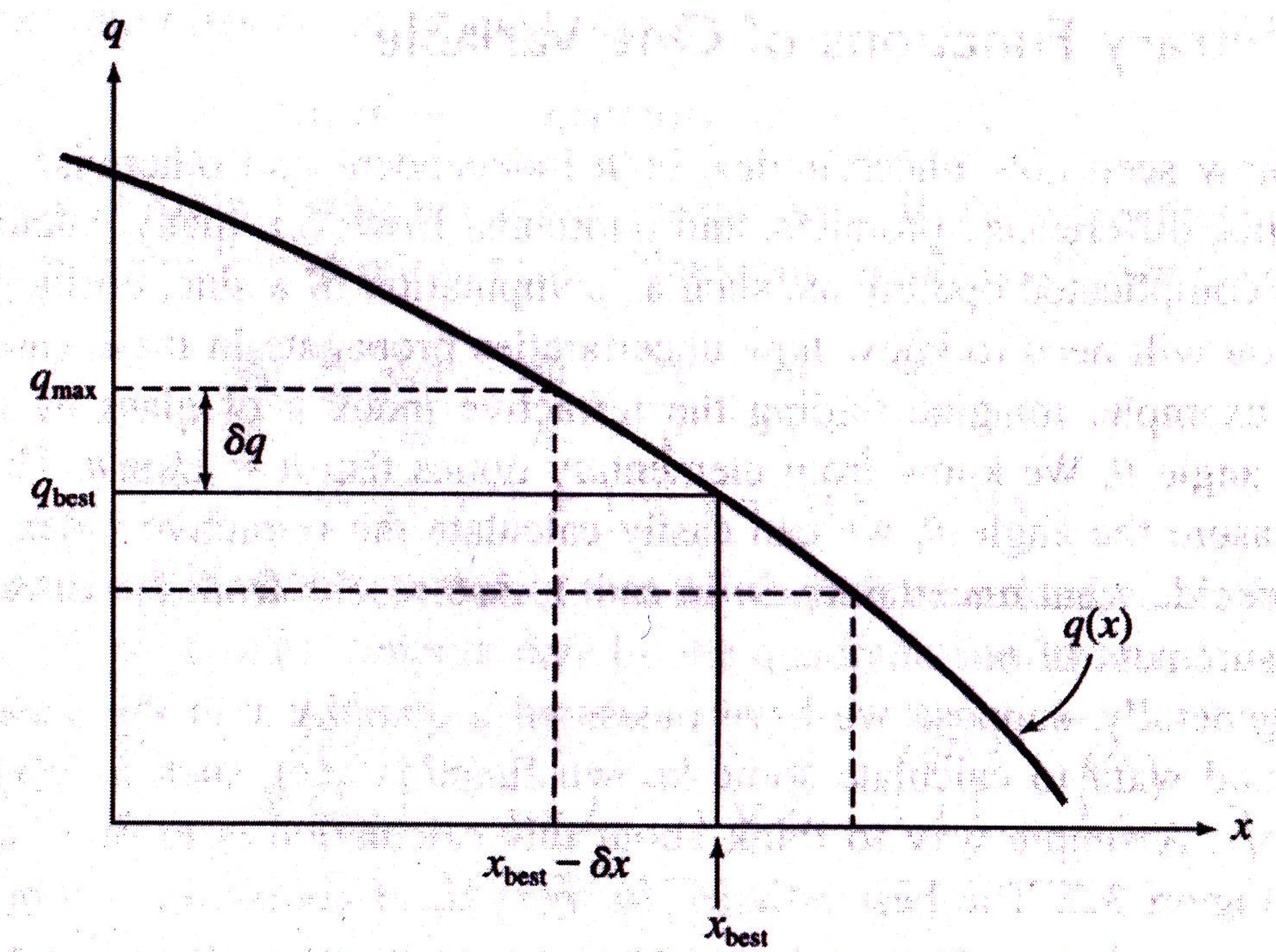



**Figure 3.4.** If the slope of $q(x)$ is negative, the maximum probable value of $q$ corresponds to the minimum value of $x$, and vice versa.

Apenas o módulo do erro interessa → regra mais geral:

$$\boxed{\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x}$$

(para função de <u>uma</u> variável)

# Propagação de erros para funções de mais variáveis

$q = q(x, \ldots, z)$ função dum número arbitrário de variáveis

$\delta x, \ldots, \delta z$ erros nas variáveis

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

Erro em q quando os erros nas variáveis *x,…,z* são *independentes* e aleatórios

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \delta z$$

"Erro máximo":
Sempre válido, mesmo quando os erros nos variáveis *x,…,z* não são independentes
(não admite ocorrência de cancelamentos)

$\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x \longleftarrow$ contribuição de $\delta x$ para a incerteza total $\delta q$

É muito útil comparar as várias contribuições!

# Regras para funções simples

$\delta q$ Erro absoluto

$\dfrac{\delta q}{|q|}$ Erro relativo

<u>Somas e diferenças</u>

$$q = x + \ldots + z - u - \ldots - w$$

Combinar erros absolutos

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2}$$

$$\delta q \leq \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w$$

<u>Produtos e quocientes</u>

$$q = \frac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w}$$

Combinar erros relativos

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}$$

$$\frac{\delta q}{|q|} \leq \left|\frac{\delta x}{x}\right| + \ldots + \left|\frac{\delta z}{z}\right| + \left|\frac{\delta u}{u}\right| + \ldots + \left|\frac{\delta w}{w}\right|$$

Medida vezes número exacto

$$q = Bx \qquad (B \text{ conhecido})$$

$$\delta q = |B|\delta x \quad \text{ou} \quad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|}$$

Potência

$$q = x^n \qquad (n \text{ conhecido})$$

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|}$$

# Regressão linear

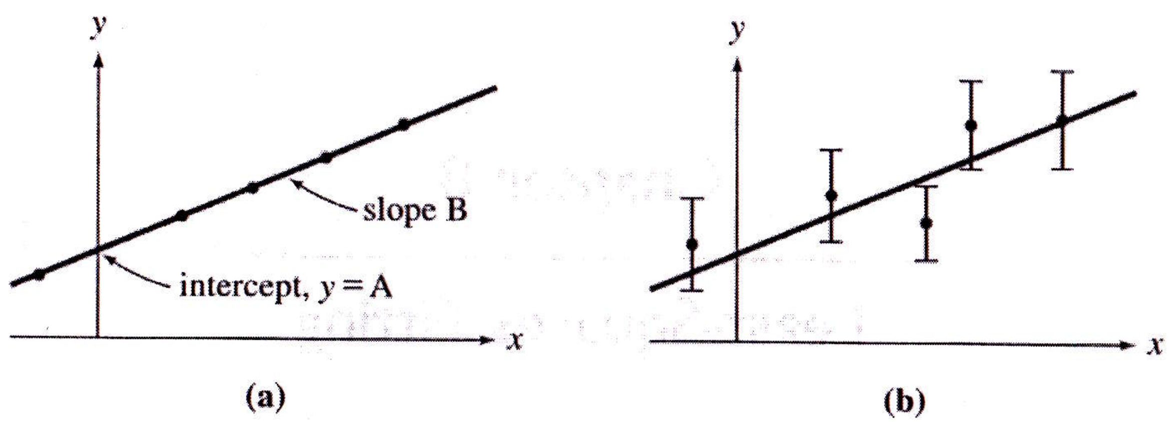



**Figure 8.1.** (a) If the two variables $y$ and $x$ are linearly related as in Equation (8.1), and if there were no experimental uncertainties, then the measured points $(x_i, y_i)$ would all lie exactly on the line $y = A + Bx$. (b) In practice, there always are uncertainties, which can be shown by error bars, and the points $(x_i, y_i)$ can be expected only to lie reasonably close to the line. Here, only $y$ is shown as subject to appreciable uncertainties.

Modelo: relação da forma

$$y = A + Bx$$

Problema: encontrar $A$ e $B$ assim que a recta passa "de melhor forma" pelos pontos experimentais

Dados $(x_i, y_i)\,, \quad i = 1, N$

Método dos mínimos quadrados: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2$ minimizar!

medida da diferença entre modelo e dados

Condições $\dfrac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0\,, \quad \dfrac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0$

As condições para o mínimo de $\chi^2$ determinam:

$$\boxed{A = \frac{S_{x^2} S_y - S_x S_{xy}}{\Delta} \qquad B = \frac{N S_{xy} - S_x S_y}{\Delta}}$$

com

$$\Delta = N S_{x^2} - (S_x)^2 \qquad S_x = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad S_y = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \quad S_{x^2} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

*A* e *B* dependem dos pontos observados ⇨ erros em $x_i$ e $y_i$ propagam-se para *A* e *B*

$$\boxed{\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{S_{x^2}}{\Delta}} \qquad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}$$

<u>Caso simples: recta pela origem</u>

$$y = Bx$$

$$\boxed{B = \frac{S_{xy}}{S_{x^2}} \qquad \sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{S_{x^2}}}}$$

com $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - Bx_i)^2}$

# Equação de estado dum gás perfeito

Exemplo: determinar a temperatura zero absoluta através de medições da pressão de um gás a volume constante e temperaturas diferentes

$$pV = NkT \longrightarrow T = A + Bp$$

**Table 8.2.** Pressure (in mm of mercury) and temperature (°C) of a gas at constant volume.

| Trial number $i$ | "x" Pressure $P_i$ | "y" Temperature $T_i$ | $A + BP_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 65 | −20 | −22.2 |
| 2 | 75 | 17 | 14.9 |
| 3 | 85 | 42 | 52.0 |
| 4 | 95 | 94 | 89.1 |
| 5 | 105 | 127 | 126.2 |

*T* medido em °C
*p* medido em mm de mercúrio

*A* é a temperatura zero absoluta em °C

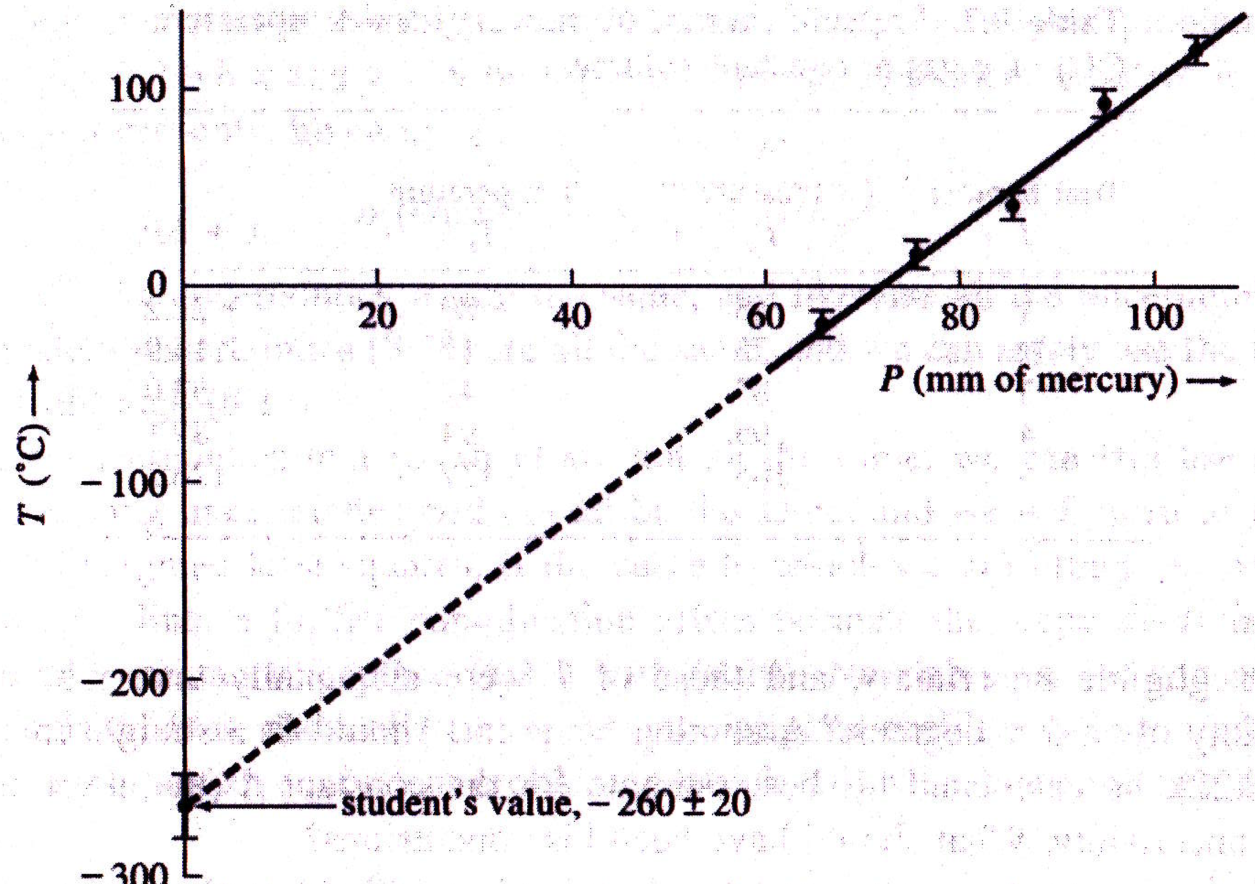



**Figure 8.4.** Graph of temperature $T$ vs pressure $P$ for a gas at constant volume. The error bars extend one standard deviation, $\sigma_T$, on each side of the five experimental points, and the line is the least-squares best fit. The absolute zero of temperature was found by extrapolating the line back to its intersection with the $T$ axis.

A partir das 5 medições obtem-se

$A = -260 \pm 20$ ℃

(consistente com o valor conhecido de $-273$ ℃)

# Regressão de funções não lineares

Certas funções não lineares podem ser transformadas numa forma linear

Exemplos: (a) $y = ae^{Bx} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + Bx$

$$z = \ln y\,, \quad A = \ln a \quad \rightarrow \quad z = A + Bx$$

Atenção: $\sigma_a \neq \sigma_A$

(b) $y = A + Bx^2\,, \quad u = x^2 \quad \rightarrow \quad y = A + Bu$

(c) $y = A + \dfrac{B}{x^2}\,, \quad u = \dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad y = A + Bu$

Em geral: $\chi^2 \rightarrow$ min

(i) funções lineares dos parâmetros livres
$\rightarrow$ sistema linear de equações para os parâmetros

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^n$$
$$y = A \sin x + B \cos x$$

(ii) funções não lineares dos parâmetros livres
$\rightarrow$ minimização numérica

$$y = Ae^{Bx} + Ce^{-Dx}$$
$$y = A + Bx^C$$

# Algarismos significativos

Algarismos significativos indicam a precisão duma grandeza

"Significativos" são todos os algarismos certos + o primeiro incerto

Não contam como significativos:
•Zeros à esquerda
•Zeros à direita que apenas indicam a ordem de grandeza

| | | |
|---|---|---|
| Exemplos: | 92 | 2 alg. sig. |
| | 317.23 | 5 alg. sig. |
| | 101.1203 | 7 alg. sig. |
| | 0.00052 | 2 alg. sig. |
| | 12.2300 | 6 alg. sig. |
| | 12.230 | 5 alg. sig. |
| | 12.23 | 4 alg. sig. |
| | 1300 | 2, 3, ou 4 alg. sig. (ambíguo!) |
| Para eliminar a ambiguidade: •Usar a notação científica | $1.300\times10^3$ | 4 alg. sig. |
| | $1.30\times10^3$ | 3 alg. sig. |
| | $1.3\times10^3$ | 2 alg. sig. |
| •Indicar a incerteza explicitamente | $1300\pm30$ | 3 alg. sig. |

# Algarismos significativos

**Algarismos não significativos são removidos por arredondamento**

Primeiro algarismo não significativo é
- maior que 5: último algarismo significativo aumenta em 1
- menor que 5: último algarismo significativo permanece inalterado
- igual a 5
  - seguido por algarismos maior que 0: último algarismo significativo aumenta em 1
  - seguido por um ou mais zeros: existem convenções diferentes

mais simples: sempre arredondar para cima
(mais sofisticado: arredondar de forma que o último algarismo significativo seja par)

Exemplos:

| Número original | Algarismos significativos | Resultado arredondado |
|---|---|---|
| 32,436 | 4 | 32,44 |
| 32,436 | 3 | 32,4 |
| 32,43512 | 4 | 32,44 |
| 32,435 | 4 | 32,44 |
| 32,445 | 4 | 32.45 (ou 32.44) |

# Algarismos significativos

**Regras** para determinar aproximadamente os algarismos significativos de resultados de operações aritméticas

**Produto (quociente)**: o número de algarismos significativos é igual ao menor dos números de algarismos significativos dos fatores

Exemplo: $16{,}\underline{3} \times 4{,}\underline{5} = 73{,}\underline{35} \to 7\underline{3}$

**Soma (diferença)**: o número de casas decimais é igual ao menor dos números de casas decimais dos termos da soma

Exemplo: $12\underline{3}+5{,}3\underline{5} = 12\underline{8{,}35} \to 128$

Exemplo: 1,0001+0,0003 = 1,0004 (5 alg. sig.)

Exemplo: 1,002-0,998 = 0,004 (1 alg. sig.)

# Algarismos significativos

Qual é a área deste retângulo?

Comprimentos medidos com régua
(menor divisão 0,1 cm)

*b*=6,75 cm

*a*=8,45 cm

“Significativos”: todos os algarismos certos + o primeiro incerto

*a* e *b* têm 3 algarismos significativos
quantos algarismos significativos tem a área?

$$A = ab = (8.45\text{cm})(6.75\text{cm}) = 57,0\underline{375}\text{cm}^2$$

$$\boxed{A = 57,0\,\text{cm}^2}$$

não significativos

O número de algarismos significativos de um produto é igual ao menor dos números de algarismos significativos dos fatores

# Exemplo: erro da área dum retângulo

Área $A(a,b) = ab$

$b$=6,75 cm

$a$=8,45 cm

$$A = 57.0375 \text{ cm}^2$$

Comprimentos medidos com uma régua (menor divisão 0,1 cm)

$$\delta a = \delta b = 0.05 \text{ cm}$$

Erro máximo

$$\delta A_{\max} = \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right| \delta a + \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right| \delta b$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = a$$

$$\delta A_{\max} = (6.75)(0.05) \text{ cm}^2 + (8.45)(0.05) \text{ cm}^2$$
$$= 0.76 \text{ cm}^2 \approx 0.8 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A = 57.0 \pm 0.8 \text{ cm}^2}$$

Erro estatístico

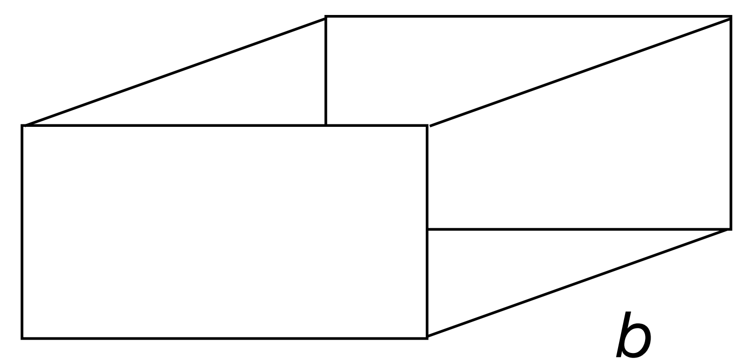
$$\delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\delta b\right)^2}$$

$$\delta A = \sqrt{(6.75 \times 0.05)^2 + (8.45 \times 0.05)^2} \text{ cm}^2$$
$$= 0.54 \text{ cm}^2 \approx 0.5 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A = 57.0 \pm 0.5 \text{ cm}^2}$$

# Volume de um paralelepípeto retângulo

$$V(a,b,c) = abc$$




$$\delta V_{\max} = \left|\frac{\partial V}{\partial a}\right| \delta a + \left|\frac{\partial V}{\partial b}\right| \delta b + \left|\frac{\partial V}{\partial c}\right| \delta c$$

Erro máximo

$$\delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\delta c\right)^2}$$

Erro estatístico

$$\frac{\partial V}{\partial a} = bc \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = ac \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = ab$$