

# **Experimentalphysik C2**

## **Festkörperphysik II**

Markus Lippitz

26. Juni 2023



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wärmeleitung und anharmonische Effekte</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Fermi-Gas</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Elektronen in Festkörpern</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Kristall-Elektronen im Magnetfeld</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Halbleiter</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Supraleiter</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Magnetismus</b>	<b>79</b>
<b>Anhang</b>		<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Julia und Pluto</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Bandlücken</b>	<b>99</b>



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.



# Kapitel 1

## Wärmeleitung und anharmonische Effekte

Markus Lippitz

28. April 2023

### Ziele

- Sie können die unten gezeigte Wärmeleitfähigkeit im Zusammenspiel von Wärmekapazität und Umklappprozessen erklären.
- Sie können die Konzepte Wechselwirkungsquerschnitt und mittlere freie Weglänge benutzen, um Streuprozesse zu beschreiben.



Abbildung 1.1: Wärmeleitfähigkeit  $K$  von Silizium (Glassbrenner und Slack, 1964).

### Überblick

Bis zu diesem Punkt wurden das Bindungspotential der Atome im Festkörper als harmonisch, also rein parabelförmig angenommen. In diesem Kapitel gehen wir darüber hinaus und betrachten, wie in der Molekülphysik, anharmonische höhere Terme in Bindungspotential. Dies führt zur thermischen Ausdehnung und zur Phonon-Phonon-Wechselwirkung. Mit ihr werden wir die oben gezeigte Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit erklären.

Dieses Kapitel stellt die Verbindung zum vorangegangenen Semester her. Sie haben Gelegenheit, die zentralen Konzepte der ersten Kapitel der Festkörperphysik aus dem letzten Semester zu wiederholen. Wir brauchen den reziproken Raum, die Dispersionsrelation und die sich daraus ergebende Zustandsdichte, wenn wir im nächsten Kapitel zu Elektronen wechseln.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

## Wiederholung

Vergewissern Sie sich, dass Sie die folgenden Fragen beantworten können, und lesen Sie ggf. noch einmal in Ihren Aufzeichnungen des letzten Semesters oder in meinem Skript<sup>1</sup> nach.

<sup>1</sup> Lippitz, 2022.

### Kristallstruktur

- Was ist ein Bravais-Gitter, eine Basis, eine Kristallstruktur?
- Wie sehen häufig vorkommende Bravais-Gitter aus? Welche Symmetrien haben sie?
- Welche Arten von Bindungen gibt es in Festkörpern? Wo sind dabei die Elektronen, auch relativ zu 'ihrem' Atomkern?

### Reziproker Raum

- Was ist der reziproke Raum, die Brillouin-Zone, ein Miller'scher Index?
- Wie sehen die reziproken Gitter von häufig vorkommenden Bravais-Gittern aus?
- Wie bestimmt man Gitterparameter experimentell ?
- Was besagt die Laue-Theorie der Beugung? Und die Bragg-Theorie?
- Was ist ein Strukturfaktor und ein Atomformfaktor?

### Phononen

- Was ist ein Phonon, eine Dispersionsrelation, eine Zustandsdichte?
- Wie sieht die Dispersionsrelation einer ein- oder zwei-atomaren linearen Kette aus? Wie die zugehörige Zustandsdichte?
- Warum nennt man die Zweige optisch bzw. akustisch? Wie geht das im Dreidimensionalen?
- Wie kann man durch inelastische Neutronenstreuung diese Dispersionsrelation messen?

### Wärmekapazität der Phononen

- Wie erklärt man mikroskopisch die Wärmekapazität (von Isolatoren), insbesondere deren Temperaturabhängigkeit?
- Was ist der Unterschied zwischen den Modellen von Debye und Einstein? Wann stimmt welches besser mit den Messungen überein?

## Thermische Ausdehnung

Bislang haben wir das Bindungspotential  $U(x)$  der Atome als harmonisch angenommen. Die Abhängigkeit von der Auslenkung  $x$  um die Ruheposition war also  $U(x) \propto x^2$ . Nun wollen wir betrachten, welchen Effekt höhere Terme im Potential haben. Bei den Molekül-Schwingungen hatten wir bereits

das Morse-Potential besprochen, mit dem ebenfalls die Abweichungen von der harmonischen Form modelliert wurde. Damals hat dies zu Verschiebung der ansonsten äquidistanten Schwingungsniveaus und zu einer Änderung der Auswahlregel für Schwingungsübergänge geführt.

Sei also<sup>2</sup>

$$U(x) = cx^2 - gx^3 - fx^4, \quad (1.1)$$

mit  $c, g$  und  $f$  als positive Konstanten. Die Nullpunktsenergie ist hier der Einfachheit halber weggelassen. Der ungerade  $x^3$ -Term flacht die positive  $x$  Seite ab und macht die negative Seite steiler. Der  $x^4$ -Term wirkt symmetrisch, macht aber das Potential bei hohen Energien bzw. großen  $x$  breiter und so die Bindung weicher.

Nun interessiert die mittlere Auslenkung  $\langle x \rangle$  bei einer durch die Boltzmann-Verteilung gegebenen Besetzung der Schwingungszustände. Ein Zustand mit dem Bindungsabstand  $x$  tritt auf mit der Wahrscheinlichkeit<sup>3</sup>

$$\frac{e^{-\beta U(x)}}{\int e^{-\beta U(x')} dx'}, \quad (1.2)$$

wobei wie immer  $\beta = 1/k_B T$ . Damit ist die mittlere Auslenkung

$$\langle x \rangle = \frac{\int x e^{-\beta U(x)} dx}{\int e^{-\beta U(x')} dx'}. \quad (1.3)$$

Der Nenner hängt ja nicht von  $x$ , sondern nur von  $x'$  ab und kann so vor das  $dx$ -Integral gezogen werden. Nun machen wir die Annahme, dass  $U(x) \ll k_B T$ , also  $\beta U(x) \ll 1$  und schreiben im Zähler

$$e^{-\beta U(x)} = e^{-\beta cx^2} e^{+\beta(gx^3 + fx^4)} \approx e^{-\beta cx^2} (1 + \beta gx^3 + \beta fx^4). \quad (1.4)$$

Im Nenner ignorieren wir gleich alle Terme jenseits von  $cx^2$ . Damit erhält man

$$\langle x \rangle = \frac{3g}{4c^2} k_B T. \quad (1.5)$$

Wie erwartet spielt der  $fx^4$ -Term keine Rolle für die Änderung des Bindungsabstands. Sobald aber ein kubischer Term im Potential vorhanden ist ( $g \neq 0$ ), dann ändert sich die mittlere Auslenkung hin zu größeren Werten, proportional zur Temperatur  $T$ . Die Gitterkonstante ändert sich also linear in der Temperatur, bzw. der Wärme-Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  ist

$$\alpha = \frac{d}{dT} \frac{\langle x \rangle}{R_0} = \frac{3g k_B}{4c^2 R_0}, \quad (1.6)$$

mit dem mittleren Bindungsabstand  $R_0$  bei  $T = 0$ .

## Zur Selbstkontrolle

1. Wie groß ist ein typischer Wärme-Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$ ? Wie könnte man damit die Koeffizienten  $c$  und  $g$  des Potentials vergleichen?
2. Warum nimmt man hier die Boltzmann-Verteilung, und nicht Bose-Einstein?

<sup>2</sup> Siehe auch Charles Kittel, 2006 eq. 5.38 und Kopitzki, 2017 eq. 2.57

<sup>3</sup> Siehe z.B. Gl. 22.8 in Fließbach, 2018.

## Phonon-Phonon-Wechselwirkung

Die Anharmonizität des Potentials führt dazu, dass die Phononen miteinander wechselwirken. Die Einführung der Normalmoden in der Molekül- oder Festkörperphysik war möglich, weil dort das Potential als harmonisch angenommen wurde. Der  $x^3$ -Term führt dazu, dass die einzelnen Moden nicht mehr unabhängig voneinander sind, miteinander koppeln.<sup>4</sup> Ein Molekül im Vakuum kann so Energie von einer hoch angeregten Schwingungsmode auf alle anderen Moden verteilen. Im Bild der quantisierten Schwingungen, wenn man also Phononen als Teilchen betrachtet, dann bedeutet dies, dass Phononen miteinander unter Beachtung der Energie- und Impulserhaltung wechselwirken, wie Billardkugeln.

Das kann man experimentell nachweisen. Zwei sich kreuzende Ultraschallwellen erzeugen eine dritte Welle in der durch die Impulserhaltung erwarteten Richtung (Abb. 1.2).



<sup>4</sup> Eine Rechnung findet sich in Gross und Marx, 2023.

Abbildung 1.2: Phonon-Phonon-Wechselwirkung in polykristallinem Magnesium (Rollins Jr, L. H. Taylor und Todd Jr, 1964). Zwei Ultraschallwellen kreuzen sich unter dem Winkel  $\phi$ . Man detektiert im Winkel der Impulserhaltung die resultierende Amplitude. Falls eine der Wellen transversal, die andere longitudinal ist, dann beobachtet man eine Auslöschung unter einem charakteristischen Winkel.

### Zur Selbstkontrolle

- Falls Sie die 'Moderne Optik' besucht haben: Könnte man diesen Effekt auch im Wellen-Bild beschreiben?

## Wärmeleitfähigkeit

Bislang hatte der Festkörper überall die gleiche Temperatur. Nun betrachten wir beispielsweise einen Stab, der an beiden Enden durch ein Wärmebad auf eine zeitliche konstante aber verschiedene Temperatur gehalten wird. Makroskopisch ist der Fluss der thermischen Energie, also die Wärmestromdichte  $\mathbf{j}_q$  abhängig von der Wärmeleitfähigkeit  $K$  und dem Gradienten der Temperatur  $T$ , also

$$\mathbf{j}_q = -K \nabla T \quad . \quad (1.7)$$

Wir modellieren den Wärmestrom analog zur kinetischen Gastheorie als Diffusion von Phononen. Wie auch schon bei der Wärmekapazität der Phononen steigt mit steigender Temperatur die Anzahl der Phononen bei den durch die Zustandsdichte erlaubten Frequenzen. Am warmen Ende des Stabes gibt es also mehr Phononen, die dann zum kalten Ende gelangen und so Energie transportieren. Dieser Transportprozess steckt in der Wärmeleitfähigkeit  $K$ .



Die kinetische Gastheorie ergibt

$$K = \frac{1}{3} C v \ell \quad , \quad (1.8)$$

mit der Wärmekapazität pro Volumen  $C$ , der Teilchengeschwindigkeit  $v$  und der mittleren freien Weglänge  $\ell$ . Hier ist nun  $C$  die Wärmekapazität der Phononen,  $v$  deren Schallgeschwindigkeit und  $\ell$  eine noch zu beschaffende mittlere freie Weglänge. Eigentlich sind alle drei Größen von der Frequenz und ggf. auch der Richtung abhängig. Dies ignorieren wir hier und verstehen sie als effektive Größen. Das ist die *Dominante-Phononen-Näherung*, ähnlich wie beim Einstein-Modell die optischen Phononen als deltaförmige Zustandsdichte angenommen wurden.

### Mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge kann rein geometrisch verstanden werden als Weglänge, bis zu der ein Strahl wieder auf eine Zielscheibe trifft. Die Fläche der Zielscheibe entspricht dabei dem Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma$ . Dazu benötigt man nur die Anzahl der Scheiben pro Volumen, also die Dichte  $n$ . Damit ist die mittlere freie Weglänge  $\ell$

$$\ell = \frac{1}{n \sigma} \quad . \quad (1.9)$$

In der Sprache der Streutheorie, wie beispielsweise bei der Röntgenstreuung, ist der Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma$  proportional zum Betragsquadrat  $|A|^2$  der Streuamplitude.

Dem Scheibchen-Bild nahe kommt die Streuung an Punktdefekten im Kristall. Wenn die Ausdehnung  $a$  des Defekts viel kleiner als die Wellenlänge  $\lambda$  des Phonons ist, dann ist die Physik völlig analog zur Rayleigh-Streuung, beispielsweise von Licht an Luft-Molekülen. Der Streuquerschnitt ist in diesem Fall

$$\sigma \propto \frac{a^6}{\lambda^4} \quad \text{oder} \quad \propto a^6 \omega^4 \quad . \quad (1.10)$$

Dieser Effekt ist nicht temperaturabhängig, kann also nicht helfen, die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitung zu erklären. Er liefert vielmehr eine von der Qualität der Probe abhängenden konstanten Beitrag.

### Phonon-Phonon-Streuung

Auch die Phonon-Phonon-Wechselwirkung kann die freie Weglänge begrenzen, indem zwei einfallende Phononen in ein neues umgewandelt werden. Aus der Sicht eines der einfallenden Phononen ist die Streuwahrscheinlichkeit proportional zur Dichte  $n(T)$  der anderen Phononen, also erwarten wir

$$\ell \propto \frac{1}{n(T)} \quad . \quad (1.11)$$

Bei der Streuung von Phononen in einem Kristall muss man allerdings den reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}$  berücksichtigen. In einem Kristall ist die Impulserhaltung

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{G}_{hkl} \quad . \quad (1.12)$$



Abbildung 1.3: Scheiben der Fläche  $\sigma$  mit einer Anzahl-Dichte  $n$  ergeben geometrisch die mittlere freie Weglänge  $\ell$ .

Der reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}_{hkl}$  meint eine (unendliche) Menge von Vektoren, die sich aus den Linearkombinationen der primitiven Einheitsvektoren mit den Koeffizienten  $h, k, l$  zusammensetzt. Damit unterscheiden wir den *Normalprozess* ( $\mathbf{G} = 0$ ) vom *Umklappprozess* ( $\mathbf{G} \neq 0$ ). Im Normalprozess gilt die Impulserhaltung in der strengen Form wie im Vakuum. Bei einem Gas von Phononen bleibt der Gesamtimpuls dann aber erhalten. Die Drift-Geschwindigkeit der Phononen kann sich nicht ändern und dieser Fall trägt nicht zu einem Wärmewiderstand bei.

Beim Umklappprozess kann sich aber die Richtung ändern. Die Summe  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  kann gerade über die erste Brillouin-Zone hinaus reichen, wird durch  $\mathbf{G}$  zurück verschoben und kann dann entgegen der ursprünglichen Vektoren zeigen (siehe Abbildung 1.4). Damit ändert sich der Gesamtimpuls des Phononen-Gases, was einem Wärmewiderstand entspricht.



Abbildung 1.4: Skizze zum Umklappprozess. Wenn die Summe von zwei reziproken Vektoren außerhalb der Brillouin-Zone liegt, dann führt die Addition von  $\mathbf{G}$  zur Änderung der Richtung.

### Zur Selbstkontrolle

4. Zeigt Abbildung 1.4 den Realraum oder den reziproken Raum? Wie sieht das im anderen Raum aus?
5. Wie kommt es, dass hier die Impulserhaltung verletzt ist?

## Temperaturabhängigkeit des Umklappprozesses

Damit der Umklappprozess stattfindet, muss

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{G}|, \quad (1.13)$$

wobei  $\mathbf{G}$  hier den kleinsten reziproken Gittervektor meint. Wir benötigen die Energie der Phononen mit solchen Impulsen  $\mathbf{k}_i$ . Dazu nehmen wir das Debye-Modell an, also einen linearen Zusammenhang zwischen dem Betrag des Impulses und der Frequenz des Phonons und eine Debye-Temperatur  $\Theta$ . Am Rand der Brillouin-Zone haben die Phononen in diesem Modell die Energie  $k_B\Theta$ , so dass eine charakteristische Energie für den Einsatz des Umklappprozesses  $k_B\Theta/2$  ist. Die Besetzungsdichte bei dieser Energie ist in der Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle n \rangle \propto \frac{1}{e^{\Theta/2T} - 1} \quad (1.14)$$

und die mittlere freie Weglänge ist somit

$$\ell \propto e^{\Theta/2T} - 1 = \begin{cases} \Theta/2T & \text{für } T \gg \Theta \\ e^{\Theta/2T} & \text{für } T \ll \Theta \end{cases}. \quad (1.15)$$

Bei sehr tiefen Temperaturen ist also die mittlere freie Weglänge durch die Streuung an Punktdefekten begrenzt und fällt dann exponentiell mit der Temperatur ab, weil immer mehr Phononen als Streupartner hinzu kommen. Mit steigender Temperatur geht der exponentielle Abfall oberhalb der Debye-Temperatur  $\Theta$  in einen  $1/T$ -Verlauf über.

Für die Wärmeleitfähigkeit benötigen wir noch die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität  $C$ . Diese ist nach dem Debye-Modell proportional

zu  $T^3$  bei  $T \ll \Theta$ . Weit oberhalb  $\Theta$  gilt das Dulong-Petit-Gesetz und die Wärmekapazität ist konstant. Insgesamt erhalten wir damit

$$K = \frac{1}{3}cv\ell \propto \begin{cases} \Theta/T & \text{für } T \gg \Theta & \text{Phonon-Phonon} \\ T^n e^{\Theta/2T} & \text{für } T \ll \Theta & \text{Phonon-Phonon} \\ T^3 & \text{für } T \ll \Theta & \text{Phonon-Defekt} \end{cases} \quad (1.16)$$

Der Exponent  $n$  bei  $T \ll \Theta$  soll die genaue Temperaturabhängigkeit offen lassen. Dazu müsste man das Integral im Debye-Modell der Wärmekapazität im Bereich  $T \approx \Theta$  lösen.

Für Silizium finden wir in den gemessenen Daten (Abb. 1.1) sowohl die  $T^3$ -Abhängigkeit bei tiefen Temperaturen, als auch die  $T^{-1}$  oberhalb der Debye-Temperatur. Der Übergangsbereich ist aufwändiger zu modellieren. Natriumfluorid (NaF) verhält sich ähnlich (Abb. 1.5).

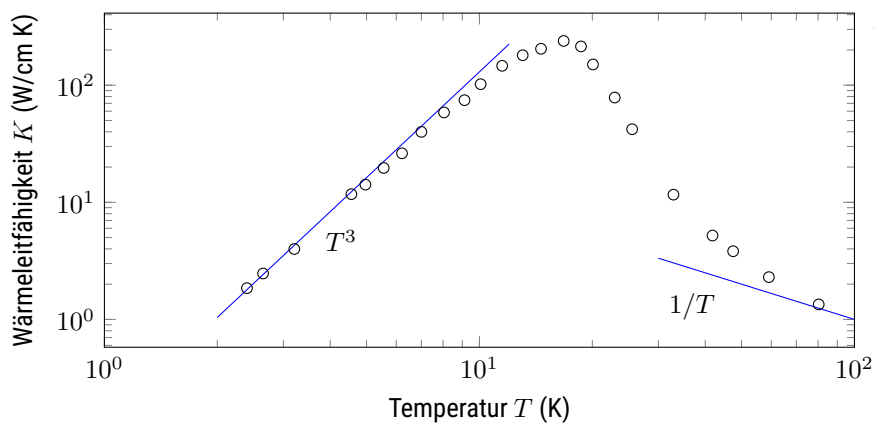


Abbildung 1.5: Wärmeleitfähigkeit  $K$  von Natriumfluorid (NaF) (Jackson, Walker und McNelly, 1970). Die Debye-Temperatur von NaF beträgt 491 K.

### Zur Selbstkontrolle

- Beschreiben Sie in Ihren Worten, wie es zur Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit kommt, insbesondere bei hohen und niedrigen Temperaturen.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Fließbach, Thorsten (2018). *Statistische Physik*. Springer. [🔗](#).
- Glassbrenner, C Jo und Glen A Slack (1964). "Thermal conductivity of silicon and germanium from 3 K to the melting point". In: *Physical review* 134.4A, A1058. [🔗](#).
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [🔗](#).
- Jackson, Howard E, Charles T Walker und Thomas F McNelly (1970). "Second sound in NaF". In: *Phys. Rev. Lett.* 25.1, S. 26.
- Kittel, Charles (2006). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Siegfried Hunklinger. 14. Oldenbourg.
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [🔗](#).
- Lippitz, Markus (2022). *Lecture notes 'Molekülphysik und Festkörperphysik I'*. Version v22.2. CC-BY-SA 4.0. [🔗](#).
- Rollins Jr, Fred R, Lyle H Taylor und Paul H Todd Jr (1964). "Ultrasonic study of three-phonon interactions. II. Experimental results". In: *Physical Review* 136.3A, A597. [🔗](#).

# Kapitel 2

## Fermi-Gas

Markus Lippitz  
6. Juni 2023

### Ziele

- Sie können den elektrischen Widerstand von Metallen erklären.
- Sie können den mikroskopischen Ursprung des Wiedemann-Franz-Gesetzes erklären, also warum die Temperaturabhängigkeit der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit in Metallen so ähnlich bis identisch ist.



Abbildung 2.1: Temperaturabhängigkeit der thermischen ( $K$ ) und elektrischen ( $\sigma$ ) Leitfähigkeit von Kupfer und die daraus abgeleitete Lorenz-Zahl  $L = K/\sigma T$ . Das Wiedemann-Franz-Gesetz besagt, dass diese konstant ist. Daten aus Hust und Lankford, 1984.

### Überblick

Mit diesem Kapitel beginnen wir mit den elektronischen Eigenschaften der Festkörper. Bislang hatten wir diese dadurch ignoriert, dass die Beispiele immer als Isolatoren gewählt waren, Elektronen also keine Rolle gespielt haben. Von nun an stehen die Elektronen im Mittelpunkt. Wie in der Molekülphysik auch machen wir die adiabatische Näherung. Wir nehmen also an, dass die Elektronen viel schneller sind als die Kerne, die Kerne aber das Potential vorgeben, in dem sich die Elektronen bewegen. Weiterhin machen wir die Ein-Elektron-Näherung. Wir betrachten also nur ein Elektron. Die Anwesenheit



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

aller anderen Elektronen beeinflusst nur das Potential, auch über das Pauli-Prinzip. Korrelationen zwischen Elektronen berücksichtigen wir erst in den Kapiteln zur Supraleitung und zum Magnetismus.

In diesem Kapitel bildet der Kristall ein großes Kastenpotential, aber die Kerne selbst kommen nicht vor. Im folgenden Kapitel wird dann das Kristallgitter wichtig werden.

## Freies Elektronengas

In beispielsweise Alkali-Metallen sind die meisten Elektronen an 'ihren' Atomkern gebunden und nur sehr wenige Elektronen pro Atomkern tragen zur Bindung bei. Diese Elektronen sehen nicht das vollständige Coulomb-Potential der stark positiv geladenen Atomrümpfe. Die gebundenen Elektronen schirmen dies ab, so dass nur ein schwaches und räumlich eher konstantes Potential verbleibt. In diesem Potential bewegen sich die Valenz-Elektronen der Alkali-Atome wie ein Gas. Man spricht daher von freiem Elektronengas oder auch Fermi-Gas.

Wir könnten die freien Elektronen als Teilchen im 3D-Kasten modellieren. Die Schrödingergleichung innerhalb des Kastens beinhaltet dann nur noch die kinetische Energie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

und ihre Lösung sind ebene Wellen

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und der Normierung auf das Volumen  $V$  des Kastens. Die Energie beträgt dann

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}|^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} \quad (2.3)$$

und ist von der Richtung natürlich unabhängig.

Die Gleichungen werden angenehmer, wenn wir (wie bei den Phononen) periodische Randbedingungen einführen: alle Eigenschaften sollen im Ort periodisch mit der Kasten-Größe  $L$  sein, also

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + L\hat{\mathbf{e}}_i) \quad , \quad (2.4)$$

mit  $\hat{\mathbf{e}}_i$  einem kartesischen Einheitsvektor. Wie bei den Phononen sind die möglichen Werte des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  diskret

$$k_i = \frac{2\pi}{L} m_i \quad \text{mit} \quad i = x, y, z \quad . \quad (2.5)$$

## Zustandsdichte

Die Zustandsdichte im reziproken Raum ist konstant:

$$D(k)dk = \frac{V}{(2\pi)^3}dk \quad . \quad (2.6)$$

Um sie als Funktion der Energie zu erhalten benötigen wir wie bei den Phononen die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial(\hbar k)} = \frac{\hbar k}{m} \quad (2.7)$$

und erhalten<sup>1</sup>

$$D'(E)dE = \frac{V}{\hbar(2\pi)^3} dE \int_{E=\text{const.}} \frac{dS_E}{v_g} \quad (2.8)$$

wobei das Integral über eine Kugeloberfläche konstanter Energie im reziproken Raum läuft und  $4\pi k^2/v_g$  ergibt. Jetzt müssen wir noch berücksichtigen, dass wir jeden Zustand nach dem Pauli-Prinzip mit zwei Elektronen unterschiedlichen Spins besetzen können:

$$D(E)dE = 2D'(E)dE = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} V \sqrt{E} dE \quad (2.9)$$

### Zur Selbstkontrolle

1. Wie kann man den wurzelförmigen Verlauf der Zustandsdichte  $D(E)$  verstehen?

<sup>1</sup> Für 3 Dimensionen. Niedrigdimensionale Strukturen kommen später.

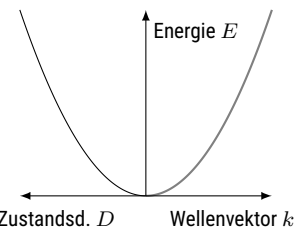


Abbildung 2.2: Dispersionsrelation  $E(k)$  und Zustandsdichte  $D(E)$  eines Fermi-Gases in 3 Dimensionen.

## Fermi-Energie und Fermi-Kugel

Elektronen sind Fermionen, haben einen halbzahligen Spin und unterliegen dem Pauli-Prinzip und der Fermi-Dirac-Statistik. Im thermischen Gleichgewicht ist also jeder Zustand besetzt wie

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (2.10)$$

mit dem chemischen Potential  $\mu$ . Die Fermi-Dirac-Verteilung ist (um das Pauli-Verbot zu erfüllen) maximal Eins. Wenn  $f(E) \ll 1$ , also  $E - \mu \gg k_B T$ , dann geht sie in die Boltzmann-Verteilung über.

Das chemische Potential  $\mu$  kommt aus der Ableitung beispielsweise der inneren Energie  $U$  nach der Stoffmenge  $n_i$ . Bei mehreren Stoffen gibt es also mehrere  $\mu_i$ .

$$\mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{V, S, n_j \neq n_i} \quad (2.11)$$

bzw.

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dn_i \quad (2.12)$$

Bei uns ist der Stoff natürlich die Elektronen, daher brauchen wir im folgenden kein Index an  $\mu$ .

Bei  $E = \mu$  geht die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion immer durch  $1/2$ . Am absoluten Nullpunkt ( $T = 0$ ) ist sie konstant Eins für  $E < \mu$  und konstant Null darüber. Wir bezeichnen als *Fermi-Energie*  $E_F$  die Energie, bis zu der alle Zustände lückenlos gefüllt sind. Das entspräche dem chemischen Potential, wenn letzteres nicht temperaturabhängig wäre. So definieren wir

$$E_F = \mu(T = 0) \quad (2.13)$$

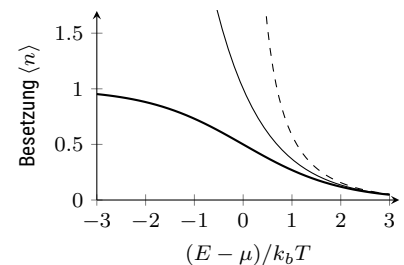


Abbildung 2.3: Fermi-Dirac-Statistik (fett) in Vergleich zur Bose-Einstein-Statistik (gestrichelt) und Boltzmann-Statistik (dünn).

Damit ist die Fermi-Energie *nicht* temperaturabhängig. Später werden wir den Begriff 'Fermi-Niveau' einführen, der nur ein anderes Wort für chemisches Potential ist und damit temperaturabhängig.

Wir berechnen die Fermi-Energie  $E_F$ , indem wir bei  $T = 0$  nach und nach Elektronen in unseren Kasten einfüllen, also die Zustandsdichte  $D(E)$  soweit aufintegrieren, bis wir  $N$  Elektronen untergebracht haben. Die Elektronendichte  $n$  ist also<sup>2</sup>

$$n = \frac{N}{V} = \int_0^{E_F} D(E) dE \quad . \quad (2.14)$$

Damit erhalten wir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \quad . \quad (2.15)$$

Alle Komposita mit 'Fermi-' sind entsprechend definiert. Der Fermi-Impuls  $k_F$  ist einfach

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad . \quad (2.16)$$

Die *Fermi-Kugel* ist die Kugel im reziproken Raum mit dem Radius  $k_F$ . Am absoluten Nullpunkt sind also alle Elektronen innerhalb dieser Kugel. Später werden wir Beispiele dafür sehen, dass die Form keine Kugel mehr ist, sondern durch eine mehr oder weniger komplexe *Fermi-Fläche* eingeschlossen wird.

Die Fermi-Energie von den hier betrachteten Metallen liegt typischerweise im Bereich von einigen Elektronvolt und die Fermi-Temperatur damit bei einigen 10 000 K, weit jenseits der Schmelztemperatur. Für Elektronen im Festkörper besteht also kein so großer Unterschied zum absoluten Nullpunkt. Die Stufenfunktion der Fermi-Dirac-Verteilung wird etwas abgerundet. Wenn man es maßstabsgerecht zeichnen würde, dann könnte man aber bei Raumtemperatur keinen Unterschied erkennen.

<sup>2</sup> Analog kann man ein temperaturabhängiges chemisches Potential ausrechnen. Siehe Hunklinger, 2014 oder Gross und Marx, 2023.

### Zur Selbstkontrolle

2. Woran liegt es, dass hier die Fermi-Fläche gerade eine Kugeloberfläche ist? Was ist notwendig, damit andere Formen entstehen?
3. Wieviel Elektronen pro Atom muss ein Material ungefähr besitzen, damit die Fermi-Kugel den Rand der Brillouinzone berührt?
4. Was bedeutet 'Für Elektronen im Festkörper besteht also kein so großer Unterschied zum absoluten Nullpunkt'?

## Wärmekapazität der freien Elektronen

Analog zum Vorgehen bei den Phononen berechnen wir die Wärmekapazität der Elektronen als Ableitung der inneren Energie nach der Temperatur. Wir beginnen<sup>3</sup> mit der spezifischen inneren Energie  $u$

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^\infty E D(E) f(E) dE \quad . \quad (2.17)$$

Am absoluten Nullpunkt läuft das Integral nur bis  $E_F$  und  $f(E)$  ist so einfach, dass wir es weglassen können

$$u_0 = u(T = 0) = \int_0^{E_F} E D(E) dE = \frac{3n}{5} k_B T_F \quad . \quad (2.18)$$

<sup>3</sup> Hunklinger, 2014 folgend



Bei einem klassischen freien Gas von Teilchen hätten wir

$$u_{\text{klassisch}} = \frac{3n}{2} k_B T \quad \text{und} \quad c_{\text{klassisch}} = \frac{3n}{2} k_B \quad . \quad (2.19)$$

Weil  $T_F \gg T$  ist die innere Energie eines freien Elektronengases sehr hoch, was am Ende ein Effekt des Pauli-Verbots ist. Wir müssen zu sehr hochenergetischen Zuständen ausweichen, um noch Elektronen zufügen zu können.

Die Ableitung  $\partial u / \partial T$  ist aufwändig. Lehrbücher zeigen ein paar Schritte. Ich möchte das hier abkürzen und so argumentieren: ein freies Elektronengas ist quasi ein klassisches Gas, nur kann aufgrund der Fermi-Dirac-Statistik nur der Anteil  $T/T_F$  weitere Energie aufnehmen und so zur Wärmekapazität beitragen. Zustände, die weiter von  $E_F$  entfernt sind, sind entweder vollständig besetzt, so dass im Abstand  $k_B T$  kein freier Zustand vorhanden ist, oder sie sind vollständig unbesetzt. Die Abschätzung ist also

$$c_{\text{geschätzt}} = c_{\text{klassisch}} \frac{T}{T_F} = \frac{3n k_B}{2} \frac{T}{T_F} \quad . \quad (2.20)$$

Eine etwas bessere Rechnung ergibt einen um den Faktor  $\pi^2/3$  größeren Wert

$$c_{\text{el}} = \frac{\pi^2 n k_B}{2} \frac{T}{T_F} = \gamma T \quad (2.21)$$

mit der Sommerfeld-Konstanten  $\gamma$ .

Zusammen mit dem Debye-Modell für die Phononen können wir so nun auch die Wärmekapazität von Metallen beschreiben. Wir erhalten

$$c_{\text{ges}} = \gamma T + \begin{cases} 3n_A k_B & \text{für } T \gg \Theta \\ \beta T^3 & \text{für } T \ll \Theta \end{cases} \quad (2.22)$$

mit  $\beta$  aus dem Debye-Modell und  $n_A$  der Teilchenzahl-Dichte der Atom-Kerne.

Dieses Modell beschreibt die Wärmekapazität von Alkali-Metallen und anderen 'einfachen' Metallen gut (Abb. 2.5). In anderen Fällen finden sich deutliche Abweichung, beispielsweise bei Nickel. Hier ist die gemessene Wärmekapazität um etwa den Faktor 15 höher als die wie oben berechnete. Bei den Alkali-Metallen ist die Annahme des freien Elektronengases gerechtfertigt. Bei Nickel tragen aber Elektronen zur Wärmekapazität bei, die aus atomaren d-Orbitalen stammen, daher eine Vorzugsrichtung haben und keine isotrope Zustandsdichte im Kristall besitzen. Dies führt zu einer hohen Zustandsdichte an der Fermi-Energie und so zu einer erhöhten Wärmekapazität.<sup>4</sup>

Zur Selbstkontrolle

5. Wo zeigt sich in Abb. 2.4 die Wärmekapazität?

## Drude-Modell

Lassen Sie uns zunächst das Drude-Modell besprechen. Dies liefert das Ohm'sche Gesetz, also ein richtiges Ergebnis, aber aus heutiger Sicht aus den falschen Gründen. Es wurde 1900 von Paul Drude eingeführt. Die Annahmen sind ein freies Elektronengas, das nur mit den Atomrümpfen, aber



Abbildung 2.4: Nur Zustände in der Nähe der Fermi-Energie tragen zur Wärmekapazität bei. Die graue Kurve ist um den Faktor 40 kühler und entspricht im etwa den realen Verhältnissen bei Raumtemperatur.



Abbildung 2.5: Wärmekapazität von Kupfer bei tiefen Temperaturen nach Rayne, 1956. Elektronen und Phononen tragen bei.

<sup>4</sup> siehe Hunklinger, 2014, Abbildung 8.9

nicht miteinander stößt. Ohne externes Feld bewegen die Elektronen sich thermisch, aber ohne Vorzugsrichtung. Der Mittelwert über alle (vektoriellen) Geschwindigkeiten des Elektronengases ist also  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ . Das externe elektrische Feld  $\mathcal{E}$  überlagert der thermischen Bewegung eine Driftbewegung mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle$ . Nach einem Abschalten des Feldes würde die Driftbewegung durch die Stöße langsam zum Erliegen kommen. Die Bewegungsgleichung ist also<sup>5</sup>

$$m \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -e \mathcal{E} - m \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{\tau} . \quad (2.23)$$

$\tau$  ist dabei die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen. Im stationären Fall ( $d \langle \mathbf{v} \rangle / dt = 0$ ) erhält man

$$\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\tau}{m} \mathcal{E} = -\mu \mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{|\mathbf{v}_d|}{|\mathcal{E}|} = \frac{e\tau}{m} \quad (2.24)$$

mit der Beweglichkeit  $\mu$ . Die Stromdichte ist dann

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = ne\mu\mathcal{E} = \sigma\mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (2.25)$$

mit der Elektronendichte  $n$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Damit haben wir den linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung des Ohm'schen Gesetzes erhalten. Der makroskopische Widerstand (bzw. dessen reziproker Wert, die Leitfähigkeit  $\sigma$ ) ist verknüpft mit zwei mikroskopischen Größen, der Elektronendichte  $n$  und der mittleren Stoßzeit  $\tau$ . Erstere ergibt sich aus der Zahl der Valenz-Elektronen pro Atom und der Gitterkonstanten des Kristalls. Letzte liegt wie oben schon erwähnt bei etwa 10 fs.

Dieses Modell ignoriert völlig das Pauli-Prinzip und dass es eine Fermi-Dirac-Verteilung gibt, bei der quasi alle Zustände besetzt sind. Die allermeisten Elektronen können gar nicht streuen, weil sie dazu einen leeren Endzustand bräuchten, den es nicht gibt. Wir werden aber sehen, dass ein besseres Modell das gleiche Ergebnis liefert.

## Drude-Sommerfeld-Modell

Arnold Sommerfeld entwickelte eine verbesserte Theorie. Die Elektronen sind quasi frei, es gilt die Schrödinger-Gleichung und das Pauli-Prinzip. Die Fermi-Fläche sei eine Kugel<sup>6</sup>. Ohne externes Feld fließt im thermischen Gleichgewicht kein Strom, weil die Fermi-Kugel um  $\mathbf{k} = 0$  zentriert ist. Weil wir Isotropie angenommen haben gibt es auch in nur teilweise gefüllten Bändern für jedes Elektron mit  $\mathbf{k}$  eines mit  $-\mathbf{k}$ .

Eine externes Feld  $\mathcal{E}$  bewegt jedes Elektron und damit die gesamte Fermikugel kontinuierlich immer weiter von der Gleichgewichtsposition weg:

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e\mathcal{E} = \mathbf{F} . \quad (2.26)$$

Streuprozesse können dann aber Elektronen von 'vorne' an der Fermikugel in den frei werdenden Bereich 'hinter' der Kugel umlagern. Die Stöße wirken also rückstellend auf die Bewegung der Fermikugel. Im sich einstellenden Gleichgewicht wird die Fermikugel bei einer mittleren Stoßzeit  $\tau$  um

$$\delta k = \frac{-e\tau\mathcal{E}}{\hbar} \quad (2.27)$$

<sup>5</sup> Simon, 2013; Singleton, 2001.

<sup>6</sup> Was in diesem Kapitel trivial ist, später aber bedeutet, dass nur der Betrag des Wellenvektors  $k$  in die Energie eingeht und die Fermi-Fläche den Rand der Brillouinzone nicht berührt.

aus dem Ursprung verschoben sein. Nur der Anteil  $\delta k/k_F$  der Elektronen trägt zum Ladungstransport bei. Das sind aber die an der Fermi-Kante, also die schnellsten von allen. Für die Leitfähigkeit ergibt das Sommerfeld-Modell

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2}{m} \tau(E_F) \quad (2.28)$$

mit  $\tau(E_F)$  der Stoßzeit der Elektronen an der Fermi-Kante. Der Unterschied zum Drude-Modell besteht nur in einer etwas anderen Bedeutung zweier Parameter. Damit ist nicht überraschend, dass auch das Drude-Modell die experimentellen Ergebnisse richtig wiedergibt.

Zur Selbstkontrolle

6. Erklären Sie, warum das Drude- und das Sommerfeld-Modell zum (scheinbar ?) gleichen Ergebnis kommen.

## Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  ist temperaturabhängig über die mittlere Stoßzeit  $\tau$ . Elektronen können mit verschiedenen anderen Partnern streuen (stoßen): mit Phononen, mit Defekten und mit der Probenoberfläche. Dabei addieren sich die Streu-Raten, also die reziproken Stoß-Zeiten. Nur die Streuung an Phononen ist temperaturabhängig. Die anderen Effekte führen zu einem konstanten Wert, der bei tiefen Temperaturen erreicht wird, wenn keine Phononen besetzt sind.

Bereits in Kapitel 1 hatten wir die mittlere freie Weglänge definiert als (Gl. 1.9)

$$\ell = \frac{1}{n \sigma_{st}} = \tau v_F \quad , \quad (2.29)$$

wobei wir hier den Streuquerschnitt  $\sigma_{st}$  genannt haben, um ihn von der Leitfähigkeit  $\sigma$  zu unterscheiden.  $\sigma_{st}$  ist für unsere Zwecke konstant. Elektronen bewegen sich mit der Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$ , die so den Zusammenhang zwischen Stoßzeit und Weglänge herstellt.

Bei einer Temperatur  $T$  (viel) größer als der Debye-Temperatur  $\Theta$  ändert sich die Dichte  $n$  der Phononen wie  $T/\Theta$ , so dass wir für die Leitfähigkeit  $\sigma$  erhalten

$$\sigma \propto \begin{cases} \text{const} & \text{für } T \ll \Theta \\ \frac{1}{T} & \text{für } T \gg \Theta \end{cases} \quad . \quad (2.30)$$

Der Übergangsbereich ist wie immer aufwändig und durch das Bloch-Grüneisen-Gesetz beschrieben, das einen  $T^{-5}$ -Term liefert.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Siehe z.B. Hunklinger, 2014

## Thermische Leitfähigkeit der Elektronen

Abschließend wollen wir noch die thermische Leitfähigkeit der Elektronen diskutieren, nachdem die anderen Kombinationen aus Elektronen oder Phononen mit Wärmekapazität oder Wärmeleitfähigkeit schon früher besprochen wurden. Im täglichen Leben machen wir die Erfahrung, dass Metalle Wärme besser leiten als Isolatoren. Elektronen scheinen also einen hohen Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit zu liefern.

Die Wärmeleitfähigkeit der Phononen hatten wir in Gl. 1.8 definiert. Hier gehen wir analog vor:

$$K = \frac{1}{3} C v \ell, \quad (2.31)$$

wobei jetzt alle Größen als elektronische zu verstehen sind, also  $K$  die elektronische Wärmeleitfähigkeit,  $C$  deren Wärmekapazität,  $v$  deren Geschwindigkeit und  $\ell = v_F \tau$  die mittlere freie Weglänge. Wir setzen Gl. 2.21 für  $C$  ein sowie die Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$  für  $v$  und erhalten

$$K = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 n k_B}{2} \frac{T}{T_F} v_F \ell = \frac{\pi^2 n k_B^2 \tau}{3 m} T \quad (2.32)$$

mit  $T_F = m v_F^2 / (2 k_B)$ . Die Temperaturabhängigkeit der Stoßzeit  $\tau$  der Elektronen mit Phononen muss aber wie oben mit berücksichtigt werden.

## Wiedemann-Franz-Gesetz

Da in der Temperaturabhängigkeit der elektrischen und auch der thermischen Leitfähigkeit die Temperaturabhängigkeit der Elektron-Phonon-Streuung auftaucht, ist es nicht verwunderlich, dass beide Leitfähigkeiten miteinander in Beziehung stehen. Das ist das Wiedemann-Franz-Gesetz

$$\frac{K_{el}}{\sigma} = \frac{\pi^2}{e} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T = L T \quad (2.33)$$

mit der universellen Lorenz-Zahl  $L \approx 2.5 \cdot 10^{-8} \Omega \text{WK}^{-2}$ . Gute Wärmeleiter sind also auch gute elektrischer Leiter. In der Realität gewichten die beiden Transportprozesse die Streuung etwas unterschiedlich, so dass es zu Abweichungen bei mittleren Temperaturen kommt, siehe Abb. 2.1.

Das Drude-Modell sagt das Wiedemann-Franz-Gesetz richtig voraus. Dabei kompensieren sich allerdings der Fehler in der Wärmekapazität der Elektronen mit dem in ihrer Geschwindigkeit<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> siehe Gross und Marx, 2023, Kap. 7.3.2.1

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [🔗](#).
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [🔗](#).
- Hust, Jerome G und Alan B Lankford (1984). "Thermal conductivity of aluminum, copper, iron, and tungsten for temperatures from 1 K to the melting point". In: *NBSIR 84-3007*. [🔗](#).
- Rayne, JA (1956). "The Heat Capacity of Copper Below 4.2 °K". In: *Aust. J. Phys.* 9.2, S. 189–197. [🔗](#).
- Simon, Steven H. (2013). *The Oxford solid state basics*. Oxford Univ. Press. [🔗](#).
- Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.



# Kapitel 3

## Elektronen in Festkörpern

Markus Lippitz  
11. Mai 2023

### Ziele

- Sie können eine Bandstruktur wie die unten gezeigte erklären und die Schritte zu ihrer Berechnung darstellen.
- Sie können die Konzepte 'effektive Masse' und 'Loch' erklären.



Abbildung 3.1: Die Bandstruktur von Aluminium in der Näherung quasi-freier Elektronen. Nur die Fourier-Koeffizienten  $V_g$  wurden als von Null verschieden angenommen. Das kommt der vollständigen Rechnung (Segall, 1961) schon ziemlich nahe. Wenn das Potential vollständig ignoriert und nur die Periodizität des Kristalls berücksichtigt wird, dann erhält man den gestrichelten Verlauf. Rechnung basierend auf Polakovic, 2022.

### Überblick

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist, wie das Coulomb-Potential der Atomkerne die Wellenfunktion und insbesondere die Energie-Eigenwerte der Elektronen beeinflusst. Im letzten Kapitel hatten wir schon das freie Elektronengas behandelt. Der Kristall bildet dabei ein großes Kastenpotential, aber die Kerne selbst kommen nicht vor. Wir betrachten nun zwei weitere Fälle:

- die Näherung des (beinahe) leeren Gitters (*empty lattice approximation*): die Kerne liefern ein periodisches, aber ansonsten sehr schwaches Potential
- die Näherung stark gebundener Elektronen (*tight binding*): die Kerne liefern ein quasi atomares Potential, mit einer schwachen Möglichkeit, doch ans benachbarte Atom zu wechseln



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

## Schrödinger-Gleichung im reziproken Raum

Wir wollen dem Potential der Elektronen etwas mehr Struktur als nur einen Kasten geben. Im letzten Kapitel hatten wir  $V(\mathbf{r}) = \text{const.}$  angenommen. Nun soll das Potential gitterperiodisch sein, also

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (3.1)$$

mit  $\mathbf{R}$  einem Gittervektor im Realraum, also einer ganzzahligen Linearkombination der primitiven Gittervektoren. Dieses Potential können wir über seine Fourier-Transformation beschreiben

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2)$$

mit  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{hkl}$  einem reziproken Gittervektor mit den ganzzahligen Koeffizienten  $h, k, l$ .

Wir machen für die Wellenfunktion den Ansatz einer Linearkombination von ebenen Wellen mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.3)$$

Der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  kann wie immer (siehe beispielsweise Gl. 2.5) nur diskrete Werte annehmen. Anders als bei den Phononen kann er aber auch außerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen, da die Elektronen-Wellenfunktion nicht nur an Gitterpunkten physikalische Bedeutung hat. Elektronen können an 'verschiedeneren' Orten des Kristalls sein als Kerne.

Nun setzen alles in die Schrödingergleichung ein

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \right) \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = E \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.5)$$

Wir multiplizieren die Klammer aus, leiten dabei die Wellenfunktion ab (was ein  $-|\mathbf{k}|^2$  liefert), und benennen übergangsweise den Summationsindex nach  $\mathbf{k}'$  um:

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = E \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.6)$$

Mit  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{G}$  erhalten wir

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[ \left( \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} - E \right) C_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k} - \mathbf{G}} \right] = 0 \quad (3.7)$$

Diese Gleichung muss für jedes  $\mathbf{r}$  gelten, also muss der Inhalt der Klammer für jedes  $\mathbf{k}$  Null sein

$$\left( \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} - E \right) C_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k} - \mathbf{G}} = 0 \quad (3.8)$$

Dieser Satz von Gleichung ist die *Schrödinger-Gleichung im reziproken Raum*, für Elektronen in einem gitterperiodischen Potential. Dies ist ein unendlich großes Gleichungssystem, weil die Summe über  $\mathbf{G}$  zunächst nicht beschränkt ist. In der Praxis zeigt sich aber, dass bei Coulomb-artigen Potentialen die Fourier-Koeffizienten  $V_{\mathbf{G}}$  des Potentials schnell mit  $|\mathbf{G}|$  abfallen, so



dass letztendlich doch nicht so viele Gleichungen gekoppelt sind. Auch koppelt das Gleichungssystem nicht alle Koeffizienten  $C_i$  miteinander, sondern nur die, die um einen reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}$  auseinander liegen, also  $C_{\mathbf{k}}$  mit  $C_{\mathbf{k} \pm \mathbf{G}'}, C_{\mathbf{k} \pm \mathbf{G}''}, \text{etc.}$

Oben in Gl. 3.3 hatten wir die Wellenfunktion  $\psi$  als Linearkombination von ebenen Wellen geschrieben. Die Summe lief dabei über den vollständigen reziproken Raum. Nun hat sich herausgestellt, dass nur manche Koeffizienten vorkommen, nämlich gerade die, die um  $\mathbf{G}$  auseinander liegen. Wir schreiben stattdessen mit weniger Summanden die Wellenfunktion  $\psi$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} \quad (3.9)$$

wobei der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  jetzt als Quantenzahl gesehen wird. Wir können ihn immer so wählen, dass er in der ersten Brillouinzone liegt.<sup>1</sup> Ebenso bekommt die Energie  $E$  aus Gl. 3.8 ein  $\mathbf{k}$  als Index

$$E_{\mathbf{k}} = E(\mathbf{k}) \quad (3.10)$$

Für Werte von  $\mathbf{k}$  außerhalb der ersten Brillouinzone braucht es eine gesonderte Behandlung. Für diese gibt es immer einen reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}_n$  so, dass damit  $\mathbf{k}$  wieder in die erste Brillouinzone verschoben würde. Wir definieren damit

$$E_n(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \quad (3.11)$$

mit  $\mathbf{k}$  innerhalb der ersten Brillouinzone. Der Index  $n$  nennt sich Band-Index und ist so sortiert, dass die Energien  $E_n$  aufsteigend sind.

### Zur Selbstkontrolle

1. Wie kommt es, dass aus einer Schrödingergleichung im Realraum jetzt ein ganzes Gleichungssystem (3.8) in reziproken Raum wird?
2. Skizzieren Sie eine Elektronen-Wellenfunktion mit  $k$  innerhalb und außerhalb der ersten Brillouinzone.

## Bloch-Theorem

Wir schreiben die Wellenfunktion noch einmal um

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.12)$$

$$= u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.13)$$

mit  $\mathbf{k}$  aus der ersten Brillouinzone und einer gitterperiodischen Funktion  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , die eine ebene Welle  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  räumlich moduliert. Diese Art der Aufteilung nennt man *Bloch-Wellen*. Das *Bloch-Theorem* besagt, dass Lösungen der Schrödingergleichung in einem periodischen Potential von dieser Form sein müssen. Unsere Rechnung oben ist eine Herleitung des Bloch-Theorems.<sup>2</sup> Die Aufteilung zwischen ebener Welle und  $u(\mathbf{r})$  ist dabei nicht eindeutig, weil immer ein Phasenfaktor zwischen beiden verschoben werden kann.

<sup>1</sup> Den Rest kann man immer in die Summe über  $\mathbf{G}$  verschieben.



Abbildung 3.2: Die Wellenfunktion  $\psi$  ist das Produkt einer ebenen Welle  $e^{ikx}$  mit einer gitterperiodischen Funktion  $u_k(x)$ . Dargestellt ist jeweils der Realteil. Graue Kreise symbolisieren die Atomkerne.

<sup>2</sup> Für Theoretiker siehe z.B. Czyczoll, 2016.

Bloch-Wellen sind periodisch im reziproken Raum:

$$\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} C_{\mathbf{k}+\mathbf{G}-\mathbf{G}'} e^{-i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} \quad (3.14)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} C_{\mathbf{k}-(\mathbf{G}'-\mathbf{G})} e^{-i(\mathbf{G}'-\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (3.15)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}''} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}''} e^{-i\mathbf{G}''\cdot\mathbf{r}} \quad (3.16)$$

$$= \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad . \quad (3.17)$$

Das bedeutet auch, dass  $\hbar\mathbf{k}$  nicht als Impuls verstanden werden kann. Noch deutlicher: Bloch-Wellen sind keine Eigenfunktionen des Impuls-Operators. Manchmal bezeichnet man  $\mathbf{k}$  als *Kristallimpuls*, eine Art verallgemeinertem Impuls. Da ein Kristall keine vollständige Translationsinvarianz mehr besitzt, gilt eben auch die Impulserhaltung nur noch eingeschränkt. Das ist hier völlig analog zu der Diskussion bei Phononen.

## Reduziertes Zonenschema

Zu Demonstrationszwecken machen wir nun eine sehr weitgehende Näherung: wir nehmen wie beim freien Elektronengas an, dass gar kein Potential vorhanden ist, aber die Periodizität des Raums weiterhin erhalten bleibt (ohne zu sagen, was da nun noch periodisch sein soll). Wir wenden also den Formalismus auf  $V = 0$  an. Damit verschwinden alle Fourier-Koeffizienten  $V_{\mathbf{G}}$  und das Gleichungssystem Gl. 3.8 zerfällt in einzelne Gleichungen mit der Lösung

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}|^2 \quad \text{und} \quad \psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad . \quad (3.18)$$

Im Eindimensionalen ist das wie erwartet ein parabelförmiger Zusammenhang zwischen Wellenvektor und Energie. Wenn wir  $\mathbf{k}$  über den ganzen reziproken Raum laufen lassen, nicht nur die erste Brillouinzone, dann nennt man diese Darstellung *ausgedehntes Zonenschema*.

Jetzt nehmen wir die Periodizität hinzu:

$$E_n(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k} + \mathbf{G}_n|^2 \quad \text{und} \quad \psi_n = e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}_n)\cdot\mathbf{r}} \quad . \quad (3.19)$$

Im Eindimensionalen sind das Parabeln, die von jedem Punkt  $\mathbf{G}_n$  im reziproken Raum starten. Diese Darstellung nennt man *periodisches Zonenschema*. Aufgrund der Periodizität ist aber alle Information schon in der ersten Brillouinzone enthalten. Man kann die Darstellung also auf diese beschränken. Dies nennt man *reduziertes Zonenschema*. Man kann sich das so vorstellen, dass die Parabel ausgehend von  $\mathbf{k} = 0$  an den Grenzen der Brillouinzone zurückgefaltet wird. Wenn sie dann später nochmals auf eine Grenze trifft, wird sie wieder gefaltet.

Im Dreidimensionalen zeichnet man die Energie entlang eines Pfades durch den reziproken Raum, beispielsweise entlang der  $x$ -Komponente des Wellenvektors. Dann kommt zu den Rück-Faltungen noch hinzu, dass es einen Offset aufgrund der  $y$  und  $z$ -Komponenten in  $\mathbf{G}_n$  gibt. Dies allein erklärt schon einen großen Teil der Dispersionsrelation, nämlich die gestrichelten Linien in Abb. 3.1.



Abbildung 3.3: Zonenschemata. Die vertikalen Linien geben die Grenzen der Brillouinzone wieder (bei ganzzahligen Vielfachen von  $\pi/a$ , aber nicht  $k = 0$ ).

### Zur Selbstkontrolle

3. Skizzieren Sie für ein dreidimensionales kubisch-primitives Gitter die Dispersionsrelation entlang  $k_x$  in der Näherung  $V \approx 0$ .

## Näherung der beinahe freien Elektronen

Nun wollen wir das Potential hinzunehmen, aber weiterhin als 'schwach' betrachten, eben 'beinahe freie' Elektronen. Im Englischen nennt man das *empty lattice approximation*. In der Schrödingergleichung 3.8 kommen die Fourier-Koeffizienten  $V_G$  des Potentials vor. Im Eindimensionalen ist  $G_n = 2\pi n/a$ , mit der Gitterkonstante  $a$ . Das betragsmäßig kleinste  $G$  ist also  $g = 2\pi/a$ . Wir nehmen also an, dass nur  $V_{\pm g}$  von Null verschieden ist.  $V_0$  beschreibt einen konstanten Offset, den wir bei einer Energie-Achse immer zu Null wählen können. Alle höheren  $V_G$  sollen der Einfachheit halber ebenfalls Null sein. Wenn die  $V_{\pm g}$  klein sind, dann wird die Lösung ähnlich dem vorangegangenen Abschnitt sein, also zurückgefaltete Parabeln innerhalb der ersten Brillouinzone:

$$E_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{bzw.} \quad E_{k \pm g}^0 = \frac{\hbar^2 (k \pm g)^2}{2m} . \quad (3.20)$$

Damit wird die Schrödingergleichung 3.8 zu

$$\begin{pmatrix} E_k^0 - E & V_g & V_{-g} \\ V_{-g} & E_{k-g}^0 - E & 0 \\ V_g & 0 & E_{k+g}^0 - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_k \\ C_{k-g} \\ C_{k+g} \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.21)$$

Die dreidimensionale Lösung dieses Gleichungssystems ist in Abb. 3.1 dargestellt und kommt der vollständigen Rechnung schon sehr nahe. Das Pluto-Skript<sup>3</sup> für diese Abbildung ist inspiriert von Polakovic, 2022.

Interessant wird es an der Grenze der Brillouinzone, also bei  $k = \pm g/2$ . Dort schneiden sich zwei Parabeln. Die Zustände sind ohne Potential also energetisch entartet. Lassen Sie uns diese Stelle im Fall von  $V_{\pm g} \neq 0$  genauer betrachten. Bei beispielsweise  $k = +g/2$  sind die ersten beiden Diagonalelemente von Gl. 3.21 nahe Null, das dritte betragsmäßig deutlich größer. Damit die dritte Zeile sich trotzdem zu Null summiert, muss also hier  $C_{k+g} \approx 0$  sein. Andersherum: An der rechten Grenze der Brillouinzone schneiden sich die Parabeln, die von  $G = 0$  und von  $G = +g$  ausgehen. Nur diese beiden Koeffizienten  $C_{k-g}$  bzw. diese ebenen Wellen tragen bei. Das

Gleichungssystem wird noch einfacher

$$\begin{pmatrix} E_k^0 - E & V_g \\ V_{-g} & E_{k-g}^0 - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_k \\ C_{k-g} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Wir nehmen weiterhin an, dass das Potential inversionssymmetrisch ist, also  $V_g = V_{-g}$ . Damit finden wir die Energie-Eigenwerte

$$E_{\pm} = \frac{E_k^0 + E_{k-g}^0}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{E_k^0 - E_{k-g}^0}{2}\right)^2 + V_g^2} \quad (3.23)$$

An der Grenze der Brillouinzone bildet sich eine **Bandlücke**: während vorher alle Energiewerte (bei entsprechendem  $k$ ) möglich waren, so gibt es nun keine Zustände mehr mit Energien im Bereich  $E_k^0 \pm V_g$ . Die Größe der Bandlücke ist also  $2V_g$  und ihr Auftreten direkt verbunden mit den Fourier-Koeffizienten  $V_{\pm g}$  des Potentials. Die Dispersionsrelation  $E(k)$  nähert sich mit horizontaler Asymptote der Grenze der Brillouinzone, also ist die Gruppengeschwindigkeit Null, was einer stehenden Welle entspricht. In erster Näherung ist der Bandverlauf in der Nähe der Bandlücke parabelförmig.



Abbildung 3.4: Das Potential  $V_g$  bewirkt eine Bandlücke an der Grenze der Brillouinzone. In der Nähe der Bandlücke verläuft die Dispersionsrelation parabelförmig.

Zur Selbstkontrolle

4. Lesen Sie den Blog-Artikel Polakovic, 2022. Das sollten Sie jetzt alles gut verstehen.

## Anschauliche Interpretation I

Für die Koeffizienten  $C_k$  und  $C_{k-g}$  findet man durch Einsetzen der  $E_{\pm}$

$$\frac{C_{k-g}}{C_k} = \frac{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}{V_g} \quad (3.24)$$

Bei  $k = g/2$  wird der Zähler also  $\pm|V_g|$  und damit die beiden Koeffizienten betragsmäßig gleich. An dieser Stelle sind die Eigenfunktionen also

$$\psi_+ \propto e^{igx/2} + e^{-igx/2} \propto \cos(gx/2) \quad (3.25)$$

$$\psi_- \propto e^{igx/2} - e^{-igx/2} \propto \sin(gx/2) \quad (3.26)$$

Die Ladungsdichte ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion. Bei einer ebenen Welle ist die Ladungsdichte räumlich konstant. Durch die Überlagerung zweier ebener Wellen ergibt sich ein Interferenzmuster in der Ladungsdichte

$$|\psi_+|^2 \propto \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \text{und} \quad |\psi_-|^2 \propto \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.27)$$

Die Atomkerne mit dem zugehörigen attraktiven Coulomb-Potential sitzen bei  $x = na$ . Die symmetrische Wellenfunktion  $\psi_+$  hat also eine erhöhte Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Nähe der Kerne, und damit eine reduzierte Energie  $E_+$ . Bei der antisymmetrischen Wellenfunktion  $\psi_-$  ist es gerade andersherum. Der symmetrische Fall erinnert an s-Orbitale des Wasserstoff-Atoms, der antisymmetrische an die p-Orbitale.

An der Grenze der Brillouinzone können zwei ebene Wellen also so hybridisieren, dass dadurch für eine der beiden neuen Eigenfunktionen die Energie

abgesenkt wird. Im Gegenzug erhöht sich die Eigenenergie der anderen. Dies ist sehr ähnlich dem bindenden und anti-bindenden Potential bei  $\text{H}_2^+$  in der Molekülphysik. Fern der Grenzen der Brillouinzone sind die Energien der beiden Zustände so unterschiedlich, dass die Beschreibung durch die alten, ungekoppelten Zustände gültig bleibt: Der Term  $E_k^0 - E_{k-g}^0$  ist viel größer als  $V_g$ , so dass der Effekt von  $V_g$  vernachlässigt werden kann.

Eigenwert-Gleichungen der Form 3.22 sind ein häufig vorkommendes Motiv in der Physik. Zwei Zustände geringfügig unterschiedlicher Energie koppeln dann zu neuen, hybridisierten Zuständen, wenn ihre Energiedifferenz kleiner als die Kopplungsenergie ist. Wenn man die Energiedifferenz variiert (hier durch Ändern von  $k$ ) dann werden die Energien sich kreuzen (wie im letzten Abschnitt). Die Kopplungsenergie  $V_g$  führt zu einer Vermeidung der Kreuzung (engl. *avoided crossing*). Das ist kein quantenmechanischer Effekt. Auch bei den gekoppelten Pendeln sieht man das, wenn man die Eigenfrequenz der Pendel verstimmt, um so die Eigenenergien unterschiedlich zu machen.

## Anschauliche Interpretation II

Man kann auch aus einem anderen Blickwinkel darauf schauen. Eine ebene Welle  $e^{ikx}$ , die in positive  $x$ -Richtung läuft, wird an dem Gitter der Atome mit der Gitterkonstante  $a$  gestreut. In der Laue-Streutheorie entspricht das der Addition eines reziproken Gittervektors  $G$ , hier der kleinste  $g = \pm 2\pi/a$ . Dadurch entsteht eine auslaufende Welle mit dem Wellenvektor  $k - g$ , also in negative  $x$ -Richtung laufend. An der Stelle  $k = \pm g/2$ , also am Rand der Brillouinzone, hat diese nach links laufende Welle genau den gleichen Wellenvektor, wie die Welle, die zur Parabel bei  $G = +g$  gehört. Diese beiden interferieren also konstruktiv miteinander. Anders gesprochen: die Streuung führt bei Erfüllen der Laue-Bedingung  $\Delta k = G$  zur Interferenz der beiden Wellen. Dies entspricht dem Koppeln der Zustände wie oben besprochen.

## Näherung stark gebundener Elektronen

In den letzten Abschnitten haben wir die Bandstruktur, insbesondere die Existenz einer Bandlücke, hergeleitet unter der Annahme, dass die Elektronen quasi frei sind und nur ein schwaches, periodisches Potential wirkt. Nun machen wir genau das Gegenteil und kommen zum gleichen Ergebnis. Wir nehmen an, dass die Elektronen stark gebunden sind, wie in einem Atom, und sie mit geringer Wahrscheinlichkeit zum Nachbaratom tunneln können. Das Modell nennt sich *tight binding* und ist analog zur *linear combination of atomic orbitals* (LCAO) in der Molekülphysik.

Im Folgenden bezeichnet die Tilde Variablen, die für ein einzelnes Atom gelten. Sei also  $\tilde{V}$  das Coulomb-artige Potential eines Atoms. Wir kennen die Lösungen  $\tilde{\psi}$  der Schrödingergleichung

$$H_A \tilde{\psi} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \tilde{V} \right) \tilde{\psi} = \tilde{E} \tilde{\psi} \quad . \quad (3.28)$$

Im Kristall gibt es nun an den Gitterpunkten  $\mathbf{R}_m$  Atomkerne, die einen zusätz-

lichen Störterm im Hamilton-Operator bewirken

$$H_S = \sum_{m \neq n} \tilde{V}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad , \quad (3.29)$$

wobei das Atom bei  $\mathbf{R}_n$  schon im ungestörten Operator berücksichtigt ist. Als Ansatz für die Wellenfunktion wählen wir wie in LCAO eine Superposition von Atom-Eigenfunktionen an den Orten  $\mathbf{R}_m$ , also

$$\psi = \sum_m a_m \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad . \quad (3.30)$$

Jetzt benutzen wir das Bloch-Theorem<sup>4</sup>: der gitter-periodische Anteil  $u_{\mathbf{k}}$  wird durch die Wellenfunktionen  $\tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)$  geliefert, also muss die ebene Welle in den Koeffizienten  $a_m$  stecken, also

$$a_m \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_m} \quad (3.31)$$

bei passender Normierung. Somit wird also die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_m} \quad . \quad (3.32)$$

Die Eigen-Energie ist wie immer

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi dV}{\int \psi^* \psi dV} \quad . \quad (3.33)$$

Der Nenner ist nahe bei Eins, weil die Atom-Wellenfunktionen sich nur sehr wenig überlappen. Der Zähler ist interessanter. Die Summen über die Atom-Positionen können wir vor das Integral ziehen

$$E = \frac{1}{N} \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)} \int \tilde{\psi}^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) [H_A + H_S(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)] \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad . \quad (3.34)$$

Wir können drei Beiträge unterscheiden

- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_A \tilde{\psi}_n$ . Das sind die Eigenenergien der Atome, die wir schon kennen.
- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_S \tilde{\psi}_n$ . Das ist der Einfluss der Potentiale der anderen Atome (in  $H_S$ ) auf 'unser' Atom  $n$ . Wir kürzen dieses Coulomb-Integral mit  $-\alpha$  ab.
- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_S \tilde{\psi}_m$ . Das ist der Einfluss des Überlapps mit den anderen Wellenfunktionen. Wir kürzen dieses Transfer-Integral mit  $-\beta_m$  ab.

Insgesamt haben wir damit<sup>5</sup>

$$E = \tilde{E} - \alpha - \sum_m \beta_m e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)} \quad . \quad (3.35)$$

Das Coulomb-Integral  $\alpha$  bewirkt einer Energie-Absenkung, weil auch die Nachbar-Atome etwas attraktives Coulomb-Potential beisteuern. Das Transfer-Integral  $\beta$  kann sowohl positiv als auch negativ sein, und auch richtungsabhängig, wie bei der kovalenten Bindung in der Molekülphysik. Auch da hatten wir gesehen, dass s- und p-Orbitale je nach Anordnung anziehende oder abstoßende Energiebeiträge liefern können. Genau das gleiche passiert hier. Dieses Integral liefert die Abhängigkeit von Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und damit die Dispersionsrelation.

<sup>4</sup> Es würde auch ohne gehen, macht es aber hier einfacher.

<sup>5</sup> Die Summen über  $\tilde{E}$  und  $\alpha$  liefern ein  $N$ , was sich mit der Normierung kürzt.

## Beispiel: kubisch-primitives Gitter

Als Beispiel betrachten wir ein kubisch-primitives Gitter, erlauben nur Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn, und nehmen die Wechselwirkung als richtungsunabhängig an, wie sie bei atomaren s-Orbitalen wäre. Für den Term  $\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n$  kommen damit nur die drei (kartesischen) Gittervektoren der Länge  $a$  jeweils mit beiden Vorzeichen in Frage. Das Skalarprodukt ausmultipliziert ergibt

$$E = \tilde{E} - \alpha - 2\beta [\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)] \quad . \quad (3.36)$$

Insgesamt wird damit ein Band der Breite  $\tilde{E} - \alpha \pm 6\beta$  abgedeckt. Das Band hat einen Kosinus-förmigen Verlauf. Am  $\Gamma$ -Punkt und an der Grenze der Brillouinzone stimmt es somit mit dem parabelförmigen Verlauf der Näherung quasi-freier Elektronen überein.

## Metalle, Halbleiter und Isolatoren

Sowohl in der Näherung der schwach gebundenen Elektronen (empty lattice approximation), als auch in der der stark gebundenen Elektronen (tight binding) haben wir eine Dispersionsrelation für die Elektronen<sup>6</sup> gefunden, die *Bandlücken* besitzt. Durch diese Lücken entstehen Bänder. Die entscheidende Frage für sehr viele Eigenschaften der Materialien ist nun, bis wohin Elektronen eingefüllt sind. Wo liegt die Fermi-Energie  $E_F$ , also welches ist das höchste besetzte Niveau bei  $T = 0$ ? Wie die Lage von  $E_F$  welche Eigenschaften beeinflusst werden wir im nächsten Kapitel besprechen.

<sup>6</sup> Evtl. besser *das Elektron*, weil wir ja in der Ein-Elektron-Näherung sind.

Hier klassifizieren wir Materialien nach der Lage der Fermi-Energie  $E_F$  relativ zur Bandstruktur. Bei einem Metall liegt  $E_F$  in einem Band, bei einem Isolator in einer Bandlücke. Das Band, das vollständig unterhalb von  $E_F$  liegt, nennt man Valenzband, das (teilweise) über  $E_F$  Leitungsband. Als Halb-Metall bezeichnet man ein Material, bei dem  $E_F$  mit einem geringfügigen Überlapp von Bändern zusammenfällt. Ein Halbleiter unterscheidet sich eigentlich nicht von einem Isolator. Im Allgemeinen ist bei Halbleitern die Bandlücke kleiner, so dass Elektronen thermisch ins Leitungsband angeregt werden können. Der Übergang ist aber fließend.

## Elektron als Wellenpaket

Wir hatten oben die Wellenfunktion des Elektrons als (ebene) Bloch-Welle geschrieben

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad , \quad (3.37)$$

die zwar eine gitterperiodische Modulation  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  besitzt, aber ansonsten räumlich unendlich ausgedehnt ist. Das ist für Transportprozesse ungeeignet. Das Teilchen-Bild ist besser an die Fragestellung angepasst. Wir bauen also aus verschiedenen Bloch-Wellen ein Wellenpaket, das sich dann wie ein Teilchen benimmt:

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}') \phi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) e^{-iE_n(\mathbf{k}')t/\hbar} \quad (3.38)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}') u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - E_n(\mathbf{k}')t/\hbar)} \quad , \quad (3.39)$$

wobei die Summe in  $\mathbf{k}'$  über das Intervall  $\mathbf{k} \pm \delta\mathbf{k}/2$  läuft.  $E_n(\mathbf{k}')$  ist die Dispersionsrelation des  $n$ -ten Bandes. Die Idee ist, dem Wellenpaket des Elektrons eine Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_n$  zuzuordnen, über

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (3.40)$$

Dazu muss aber  $\mathbf{k}$  gut genug definiert sein, also  $\delta\mathbf{k}$  klein genug, insbesondere gegenüber der Größe der Brillouinzone. Das geht dann, wenn der Gitterabstand im Realraum viel kleiner ist als die Ausdehnung des Wellenpakets, die wiederum viel kleiner sein muss als die Wellenlänge des externen elektrischen Feldes. Dies nennt man ein semi-klassisches Modell. Da sich der Bandindex  $n$  in unserem Modell nicht ändern kann lassen wir ihn zukünftig weg.

## Effektive Masse

Die Bewegungsgleichung ist klassisch  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ . Analog gilt hier

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.41)$$

wobei  $\hbar\mathbf{k}$  als Quasi-Impuls zu verstehen ist, also jederzeit ein reziproker Gittervektor  $\mathbf{G}$  addiert werden kann. Die Ladung des Elektrons ist  $q = -e$ . Eine externe Kraft führt also zu einer Bewegung des Elektrons im reziproken Raum.

Nun beschaffen wir uns einen Term für die Masse des so beschriebenen Elektrons. Wir starten mit der zeitlichen Ableitung von Gl. 3.40

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial t \partial \mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{k}} \hbar \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{k}} \mathbf{F} \quad (3.42)$$

wobei wir im zweiten Schritt Zähler und Nenner mit  $\partial\mathbf{k}$  erweitert und dann die Ableitungen umsortiert haben. Das können wir in den cartesischen Komponenten schreiben

$$\dot{v}_i = \frac{1}{\hbar^2} \sum_j \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} F_j = \sum_j \left( \frac{1}{m^*} \right)_{ij} F_j \quad \text{mit} \quad \left( \frac{1}{m^*} \right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} \quad (3.43)$$

Den Tensor  $m^*$  nennt man *effektive Masse*. Er beschreibt die dynamischen Eigenschaften des Elektrons im Kristall und ist gegeben durch die Krümmung (also zweite Ableitung) der Dispersionsrelation. Der Tensor ist symmetrisch und lässt sich auf drei Hauptachsen transformieren. Wenn die alle gleich groß sind, dann vereinfacht sich alles zu

$$m^*(k) = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E(k)/\partial k^2} \quad (3.44)$$

Das ist beispielsweise in der Nähe der Ober- und Unterkanten eines Bandes der Fall, wo wir die Dispersionsrelation nähern können als

$$E_{\mathbf{k}} = E_0 \pm \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (3.45)$$

Die effektive Masse ist also der Parameter, der die (inverse) Breite eines parabelförmigen Bandes beschreibt. Stark gekrümmte Bänder haben eine geringe effektive Masse, und andersherum.



Was ist hier passiert? Wir haben den Einfluss der vielen Coulomb-Potentiale um die Atomkerne im Kristall zusammengefasst und in eine Eigenschaft des Elektrons gesteckt. Die (effektive) Masse des Elektrons hängt nun vom Kristall ab, in dem es steckt. Das erlaubt es uns aber, das komplizierte Problem 'Elektron zwischen vielen Kernen' in ein einfaches Teilchen-Modell zu überführen. Nur müssen wir uns von der klassischen Vorstellung einer Masse lösen. Die effektive Masse hängt von der Krümmung des Bandes ab. Die kann aber Null werden (die Masse dadurch unendlich), oder auch negativ. Im 'tight binding' Modell ist die Dispersionsrelation

$$E(k) = -\cos(ka) \quad \text{und somit} \quad m^*(k) = \frac{\hbar^2}{a^2 \cos(ka)} \quad (3.46)$$

an der Grenze der Brillouinzone ( $k = \pi/a$ ) ist also  $m^* = -\hbar^2/a^2$ . Die Masse ist nur der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung. Hier wirkt die Kraft in eine Richtung, die Beschleunigung geht in die entgegengesetzte.

### Nebenbemerkung: Bloch-Oszillationen

Das sich ändernde Vorzeichen der Masse führt zu Bloch-Oszillationen, zumindest in idealen Systemen. Ein konstantes äußeres elektrisches Feld führt via 3.41 zu einer gleichmäßigen Bewegung des Elektrons im reziproken Raum. Dabei werden auch Grenzen der Brillouinzonen überschritten. Alles ändert sich also periodisch, und damit auch die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Elektronen. Das sind die Bloch-Oszillationen. Die Periodendauer  $T_B$  lässt sich ausrechnen als die Zeit, die das Elektron braucht, einmal die Brillouinzone zu durchqueren, also

$$T_B = \frac{2\pi/a}{e\mathcal{E}/\hbar} = \frac{\hbar}{ae\mathcal{E}} \quad (3.47)$$

Bei einem elektrischen Feld  $\mathcal{E} = 1 \text{ kV/m}$  und einer Gitterkonstante  $a = 2 \text{ \AA}$  ergibt sich eine Periodendauer  $T_B = 20 \text{ ms}$ . Bei einer Fermi-Geschwindigkeit  $v = 10^6 \text{ m/s}$  beträgt die räumliche Amplitude der Bewegung etwa  $5 \text{ mm}$ .

Dieser Effekt tritt so nicht auf. Elektronen stoßen selbst in reinen Kristallen typischerweise alle  $10 \text{ fs}$  oder  $10 \text{ nm}$  Weglänge. Selbst in idealen Kristallen würde das Elektron noch mit anderen Elektronen stoßen. Man kann aber Modellsysteme herstellen, in denen Bloch-Oszillationen gezeigt wurden. Dazu baut man die Potentiale der Atome durch Kastenpotentiale in Halbleiter-Heterostrukturen auf einer größeren Längenskala nach. Damit wird die Gitterkonstante  $a$  viel größer und die Periodendauer  $T_B$  und somit auch die Auslenkung viel kleiner.

### Löcher

Wir hatten schon den Effekt von Coulomb-Potentialen in die Masse der Elektronen verschoben. Jetzt werden wir fehlende Elektronen mit einer positiven Ladung versehen und auch als Teilchen behandeln. Unser Ziel ist es, den Ladungstransport in einem Material zu beschreiben, dessen Bandstruktur wir kennen. Jedes Elektron trägt dazu mit seiner Geschwindigkeit (Gl. 3.40)

bei. Wir integrieren einfach über alle Elektronen, um die Stromdichte<sup>7</sup>  $\mathbf{j}$  zu bekommen

<sup>7</sup> Strom pro Fläche

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{V} \int_{1.BZ} \frac{2V}{(2\pi)^3} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(E, T) d\mathbf{k} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{1.BZ} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(E, T) d\mathbf{k} \quad (3.48)$$

mit dem Kristall-Volumen  $V$  und der Fermi-Dirac-Verteilung  $f(E, T)$ . Der erste Term im ersten Integral ist die Zustandsdichte im reziproken Raum. Wir vereinfachen die Gleichung weiter, indem wir  $T = 0$  annehmen, wodurch die Fermi-Verteilung eine Stufenfunktion wird

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{-e}{4\pi^3 \hbar} \int_{\text{besetzt}} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.49)$$

Dieses Integral wird Null, wenn das Band vollständig besetzt ist. Dann gibt es aufgrund der Punktsymmetrie des reziproken Gitters für jedes Elektron mit  $\mathbf{k}$  eines mit  $-\mathbf{k}$ , das also bei ansonsten gleicher Energie und Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung läuft. Ein voll besetztes Band trägt nicht zum Ladungstransport bei! Damit können wir aber schreiben

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.50)$$

$$= \frac{-e}{4\pi^3} \left[ \int_{1.BZ} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \int_{\text{leer}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right] = \frac{+e}{4\pi^3} \int_{\text{leer}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.51)$$

weil eben das Integral über die komplette erste Brillouinzone Null ergibt. Anstatt über alle besetzten Zustände zu integrieren und mit einer negativen Ladung zu multiplizieren können wir auch über alle unbesetzten Zustände integrieren und mit einer positiven Ladung multiplizieren. Wir nennen die unbesetzten Zustände für Elektronen *Löcher* und weisen ihnen eine positive Elementarladung zu.

Das hat große Vorteile, weil wir oft über nahezu volle Bänder integrieren müssen. Dann ist es einfacher, nur über den leeren Anteil der Löcher zu integrieren, insbesondere auch, weil wir dann in der Nähe des Maximums des Bandes<sup>8</sup> das Band wie in GL. 3.45 parabolisch nähern können.

<sup>8</sup> Löcher sind wie Luftblasen und steigen nach oben

Um Elektronen von Löchern zu unterscheiden kennzeichnen wir erstere mit dem Index 'n', letztere mit einem 'p'. Weil  $\int_{\text{voll}} \mathbf{k} d\mathbf{k} = 0$  ist ein Loch immer das Gegenteil des Elektrons, dessen Stelle es einnimmt, also

$$\mathbf{k}_p = -\mathbf{k}_n \quad E_p(\mathbf{k}) = -E_n(\mathbf{k}) \quad m_p^* = -m_n^* \quad q_p = -q_n = +e \quad (3.52)$$

aber

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) \quad (3.53)$$

weil dabei zweimal das Vorzeichen gewechselt wird. Ein Loch wirkt wie ein Teilchen mit positiver Ladung. Bei einem angelegten elektrischen Feld haben wir also Ladungstransport durch Elektronen, die sich in die eine Richtung bewegen, und Löcher, die sich in die andere Richtung bewegen. Die Summe aus beiden bildet den beobachteten Strom.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#).

Polakovic, Tomas (2022). *Computational Physics for the Masses. Part 3: Solid Stuff*. CC-BY-NC 4.0. [↗](#).

Segall, Benjamin (1961). "Energy bands of aluminum". In: *Physical Review* 124.6, S. 1797.



# Kapitel 4

## Kristall-Elektronen im Magnetfeld

Markus Lippitz  
2. Juni 2023

### Ziele

- Sie können Methoden zur Vermessung der Fermi-Oberfläche wie beispielsweise die Zyklotron-Resonanz oder die De Haas-van Alphen-Oszillationen erklären und auf einfache Beispiele anwenden.
- Sie können das Konzept der Landau-Niveaus benutzen, um den hier dargestellten Quanten-Hall-Effekt phänomenologisch zu erklären.

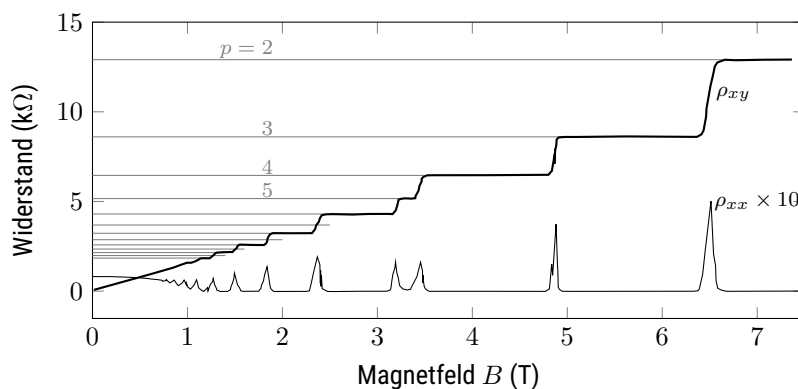


Abbildung 4.1: Quanten-Hall-Effekt in einem effektiv zweidimensionalen Elektronengas (Klaus v. Klitzing, 1984). Der Querwiderstand  $\rho_{xy}$  nimmt nur diskrete Werte  $25812 \Omega / p$  an, wobei  $p$  die Anzahl der voll besetzten Landau-Niveaus ist. An diesen Plateaus verschwindet der Längswiderstand  $\rho_{xx}$ .

### Überblick

Im letzten Kapitel haben wir die Bandstruktur diskutiert, also die möglichen Zustände eines Elektrons als Funktion der Quantenzahlen Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Band-Index  $n$ . Ein externes Magnetfeld erlaubt einerseits, bestimmte Eigenschaften der Bandstruktur zu bestimmen. Daher können wir dieses Kapitel auch sehen als experimentelle Überprüfung des vorangegangenen. Andererseits führt ein starkes Magnetfeld aber auch zu einer zusätzlichen Quantisierung der Elektronen-Zustände.

Eigentlich bräuchte man für diese Phänomene die zeitabhängige Schrödingergleichung. Dies wird aber zu aufwändig. Daher machen wir semi-



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

klassische Modelle und beschreiben die Zustände der Elektronen im Rahmen der Quantenmechanik, den Einfluss äußerer Kräfte aber klassisch.

## Fermi-Flächen

Bevor wir zur Bewegung der Elektronen unter Einfluss eines magnetischen Felds übergehen, müssen wir die Form der Fermi-Flächen diskutieren, die dabei eine Rolle spielen werden. Wir hatten im vorletzten Kapitel gesehen, dass bei einem freien Elektronengas und  $T = 0$  alle Zustände unterhalb einer charakteristischen Energie  $E_F$  und damit auch unterhalb eines charakteristischen Wellenvektors  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  vollständig besetzt sind. Im reziproken Raum entspricht dies einer Kugel mit dem Radius  $k_F$ , der Fermi-Kugel.

Die Bandstruktur führt dazu, dass die Form von einer Kugel abweichen wird. Wir bezeichnen dann als *Fermi-Fläche* die Fläche im reziproken Raum, die genau alle besetzten Zustände bei  $T = 0$  einschließt. Die möglichen Werte des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  sind diskret. Die Gesamtzahl der  $\mathbf{k}$ -Werte in der ersten Brillouinzone entspricht der Anzahl primitiver Einheitszellen im Kristall. Weil ein Elektron zwei verschiedene Spin-Eigenwerte annehmen kann, gibt es in der ersten Brillouinzone also doppelt so viele Zustände für Elektronen wie Atome im Kristall, falls nur ein Atom in der Einheitszelle ist.

Falls jedes Atom ein Elektron zum quasi-freien Elektronengas beisteuert, dann ist das Band nur halb gefüllt und damit  $k_F$  knapp unterhalb der Grenze der Brillouinzone bei  $\pi/a$ . Wenn die Bandstruktur isotrop ist, dann nimmt die Fermi-Fläche auch hier die Form einer Kugel an. Ansonsten 'verbeult' die Form etwas. Beispiele sind die Alkali-Metalle.

Bei zwei Elektronen pro Atom würden zwar genügend Zustände innerhalb der ersten Brillouinzone existieren. Bei einer isotropen Bandstruktur ist der Kugel-Radius  $k_F$  aber größer als  $\pi/a$ . Eine Kugel reicht etwas über den Quader gleichen Volumens hinaus. Im reduzierten Zonenschema findet man also freie Zustände in den Ecken des ersten Bandes und besetzte Zustände in Taschen an den Kanten des zweiten Bandes (siehe Abbildung 4.2), die man sich durch Rückfaltung entstanden vorstellen kann.

An der Grenze der Brillouinzone, wo diese Rückfaltung stattfindet, entsteht durch das periodische Potential aber auch die Bandlücke. Dort ist die Gruppengeschwindigkeit Null, also

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Der Gradient der Energie verläuft also parallel zur Grenze der Brillouinzone und damit die Linien konstanter Energie und so die Fermi-Fläche senkrecht auf die Grenze der Brillouinzone. Dies führt lokal zu einer Abweichung von der (zurückgefalteten) Kugelform.

Im ausgedehnten Zonenschema findet man so durch 'Hälsen' verbundene Flächen, die sich periodisch wiederholen.

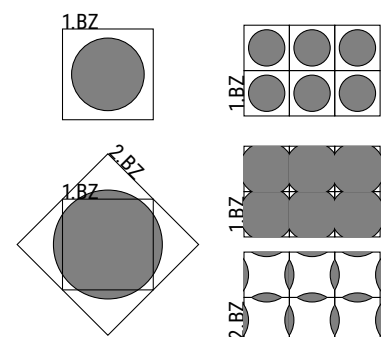


Abbildung 4.2: Wenn die Fermi-Kugel die Grenze der ersten Brillouinzone erreicht entstehen freie Zustände in den Ecken des ersten Bandes und besetzte Zustände in Taschen an den Kanten des zweiten Bandes.

## Zur Selbstkontrolle

1. Machen Sie sich klar welche Formen von Fermi-Flächen durch den Kontakt mit der Grenze der Brillouinzone entstehen können, wenn man das periodische Zonenschema benutzt.

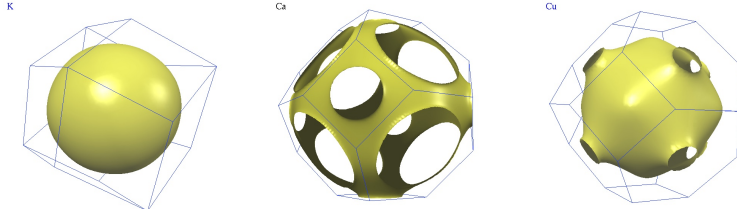


Abbildung 4.3: Fermi-Oberflächen von K, Ca und Cu (von links). Choy u. a., 2000

## Zyklotron-Resonanz

Die Zyklotron-Resonanz ist eine experimentelle Methode, mit der die Form der Fermi-Fläche bestimmt werden kann. Man legt ein statisches Magnetfeld  $\mathbf{B}$  an und bestimmt die Absorption einer Radiowelle variabler Frequenz.<sup>1</sup> Man findet charakteristische Frequenzen, bei denen die Absorption besonders hoch ist. Aus diesen Zyklotron-Resonanzfrequenzen kann man den Umfang der Fermi-Fläche geschnitten mit einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld bestimmen.

Betrachten wir zunächst klassische freie Elektronen im Magnetfeld. Die Bewegungsgleichung ist

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (4.2)$$

Wir haben hier kein elektrisches Feld und setzen  $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$ . Damit ist die Bewegung in  $z$ -Richtung frei und wir erhalten ein Gleichungssystem für die Bewegung in der  $xy$ -Ebene

$$m \dot{v}_x = -e B_0 v_y \quad (4.3)$$

$$m \dot{v}_y = e B_0 v_x \quad (4.4)$$

Die Lösung ist eine kreisförmige Bahn mit der Zyklotron-Frequenz  $\omega_c$

$$\omega_c = \frac{e B}{m} \quad (4.5)$$

Im Kristall wird nun aus der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  die Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_g$  und die Bewegungsgleichung

$$d\mathbf{k} = -\frac{e}{\hbar^2} [\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}] dt \quad (4.6)$$

Die Änderung des Wellenvektors steht also senkrecht auf dem Magnetfeld und dem Gradienten der Energie. Das Elektron bewegt sich auf einer Bahn, die senkrecht auf dem Magnetfeld steht und entlang konstanter Energie  $E(\mathbf{k}) = \text{const.}$  geht. Wir führen einen Vektor  $d\mathbf{k}_\perp$  ein, der senkrecht auf  $\mathbf{B}$  und  $d\mathbf{k}$  steht. Seine Länge ist  $dk_\perp$ . Damit erhalten wir

$$|d\mathbf{k}| = \frac{e}{\hbar^2} B |dE/dk_\perp| dt \quad (4.7)$$

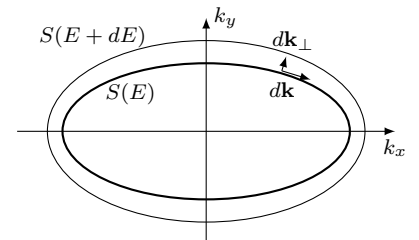
Die Umlaufzeit  $T$  ist

$$T = \oint dt = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{|d\mathbf{k}|}{|dE/dk_\perp|} = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{dk_\perp |d\mathbf{k}|}{dE} = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{dS}{dE} \quad (4.8)$$

mit der Änderung der umschlossenen Fläche im reziproken Raum

$$dS = \oint dk_\perp |d\mathbf{k}| \quad (4.9)$$

<sup>1</sup> Eigentlich macht man es genau andersherum: konstante Frequenz, variables Feld. Aber so rum erklärt es sich einfacher.


 Abbildung 4.4: Die Fläche  $dS$  ist ein Kreisintegral über  $|d\mathbf{k}|$  mit der 'Dicke'  $dk_\perp$ .

Beim freien Elektron ändert sich die Länge des Wellenvektors  $k$  nicht. Die umschlossene Fläche ist also  $S = \pi k^2$  und die Energie  $E = (\hbar k)^2/2m$ . Damit wird

$$\frac{dS}{dE} = \frac{2\pi m}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{\tilde{m}}. \quad (4.10)$$

Nur im Fall freier Elektronen ist die Masse  $\tilde{m}$  die Ruhemasse des Elektrons. Ansonsten behält man aber diesen Zusammenhang bei und steckt das Ergebnis von Gl. 4.8 in die Zyklotron-Masse, die sich von der effektivem Masse  $m^*$  unterscheidet.

Bislang haben wir zwar Kreisfrequenzen, aber noch keine Absorption. Alle Elektronen bewegen sich auf geschlossenen Bahnen, nehmen dabei aber keine Energie auf, weil ja gerade  $E(\mathbf{k}) = \text{const.}$  gilt. Nun strahlen wir Mikrowellen der Frequenz  $\omega_{RF} = \omega_c$  ein. Nur Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie also der Fermi-Fläche können Energie aufnehmen. Die Zyklotron-Resonanz misst also die Länge der Bahnen auf der Fermi-Fläche; je nach Orientierung des Magnetfeldes laufen die Bahnen in unterschiedlichen Flächen. Scharfe Resonanzen bekommt man nur, wenn die mittlere Stoßzeit groß gegenüber der Umlaufzeit ist, also mehrere Umläufe ungestört absolviert werden können. Man benutzt also hohe Magnetfelder und damit hohe Umlauf-Frequenzen sowie tiefe Temperaturen und reine Substanzen.

Weiterhin tragen nur *extremale Bahnen* bei. Das sind Bahnen, bei denen es viele Bahnen ähnlicher Frequenz gibt, oder andersherum sich die Frequenz nur geringfügig ändert, wenn die die Komponenten des Wellenvektors parallel zum Magnetfeld sich ändert, die Bahn also stabil gegen Störungen ist.



Abbildung 4.5: Nur extremale Bahnen entlang der Fermi-Oberfläche tragen zur Zyklotron-Resonanz bei.

## Beispiel: Germanium

Germanium (Ge) ist ein indirekter Halbleiter mit kubisch-flächenzentrierter (fcc) Kristallstruktur, mehr dazu im nächsten Kapitel. Die Fermi-Energie liegt bei einem Halbleiter in der Bandlücke und eine Fermi-Oberfläche lässt sich so nicht definieren. Wir betrachten darum hier eine Iso-Energie-Fläche für angeregte Elektronen im Leitungsband. Von der Idee her ist das aber identisch mit der Spektroskopie der Fermi-Flächen. Die Bandstruktur von Germanium ist etwas speziell. Insbesondere liegt das Minimum des Leitungsbandes nicht im  $\Gamma$ -Punkt, sondern an den L-Punkten am Rand der Brillouinzone. Die Iso-Energie-Fläche nehmen die Form von Ellipsoiden an, deren Mittelpunkt an den L-Punkten liegt und deren lange Achse in Richtung  $\Gamma$ -Punkt zeigt. Es gibt zwar 8 L-Punkte, aber die Hälfte der Ellipsoide liegt außerhalb der ersten Brillouinzone, so dass effektiv nur 4 vollständige Ellipsoide betrachtet werden müssen.



Abbildung 4.6: Brillouinzone eines fcc Kristalls.



Abbildung 4.7: links: Zyklotron-Resonanz-Spektrum von Germanium bei einem Winkel  $\theta = 60^\circ$  zur  $[001]$ -Achse. rechts: Resonanzfeldstärke  $B$  als Funktion von  $\Theta$ .



Die Form dieser Iso-Energie-Fläche haben Dresselhaus, Kip und Kittel, 1955 durch Zyklotron-Resonanz bestimmt. Es ist im Experiment viel einfacher, den Mikrowellengenerator bei konstanter Frequenz zu betreiben und die Amplitude und Richtung des Magnetfelds zu variieren. Es ist also immer  $\omega_c = 2\pi \cdot 24 \text{ GHz}$ . Abbildung 4.7(links) zeigt das Resonanz-Spektrum für eine bestimmtem Orientierung des Magnetfelds relativ zur Probe. Man findet fünf Resonanzen, von denen sich die mittleren drei den Elektronen im Leitungsband zuordnen lassen. In der gewählten Anordnung von Probe und Magnetfeld sind zwei der vier Ellipsoide äquivalent, so dass effektiv drei verschiedene Ellipsoide sichtbar sind, die jeder eine Resonanz im Spektrum ergeben.

Dann wird die Richtung des Magnetfelds in der (110)-Ebene variiert.<sup>2</sup> Angegeben ist jeweils der Winkel  $\theta$  zur [001]-Achse. Mit dem Winkel ändert sich die Schnittebene, auf der die Zyklotron-Bahnen laufen und somit deren Fläche. Man kann die Ellipsoide durch zwei effektive Massen  $m_l, m_t$  in longitudinaler und transversaler Richtung beschreiben. Bei einem Winkel  $\alpha$  zwischen Magnetfeld und langer Achse des Ellipsoiden ergibt sich eine effektive Masse  $m_{ell}$

$$\left(\frac{1}{m_{ell}}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{m_l m_t} \quad . \quad (4.11)$$

Diese effektive Masse bestimmt die Lage der Zyklotron-Resonanz. Der gesamte Datensatz in Abb. 4.7(rechts) kann daher beschrieben werden durch  $m_l = 1.58 m_e$  und  $m_t = 0.082 m_e$ , wobei  $m_e$  die freie Elektronenmasse ist.

<sup>2</sup> Siehe Festkörperphysik I zur Definition von Ebenen und Richtungen. Insbesondere benennt man Richtungen in fcc-Kristallen mit sc-Koordinaten.

## Zur Selbstkontrolle

2. Wie hängt die effektive Masse mit der Form der Ellipsoiden zusammen?

## Landau-Niveaus

Wir haben bei der Zyklotron-Resonanz die Elektronenbahnen klassisch behandelt. In der Quantenmechanik würde man eigentlich eine einzige Wellenfunktion pro Bahn erwarten, also insbesondere, dass sich die Phase nur um Vielfache von  $2\pi$  pro Umlauf ändert. Dies führt zu quantisierten Bahnen und einer Aufspaltung der Zustände in Landau-Niveaus. Den Energiebeitrag der Elektronenpins im Magnetfeld vernachlässigen wir.

Wir müssen also das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  mit in die Schrödingergleichung aufnehmen<sup>3</sup>. Die geschieht über das zugehörige Vektorpotential  $\mathbf{A}$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \psi = E\psi \quad . \quad (4.12)$$

Wir wählen die Eichung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & Bx & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad . \quad (4.13)$$

Damit ist die Schrödingergleichung separierbar in einen  $z$ -Anteil und einen für  $xy$ . Der  $z$ -Anteil entspricht einem freien Teilchen, also

$$\psi(z) \propto e^{\pm i k_z z} \quad \text{und} \quad E_z = \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \quad . \quad (4.14)$$

<sup>3</sup> siehe Kap. 9.3.2 in Hunklinger, 2014 und Kap. 9.6.1 in Yu und Cardona, 2010

Für den  $xy$ -Anteil machen wir den Ansatz

$$\psi(x, y) \propto u(x) e^{i k_y y} \quad (4.15)$$

und erhalten eine eindimensionale Gleichung für  $u(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \left( \frac{eB}{m} x - \frac{\hbar k_y}{m} \right)^2 u = (E - E_z) u \quad (4.16)$$

Das ist ein eindimensionaler harmonischer Oszillator in einem parabolischen Potential, dessen Gleichgewichtslage bei

$$x_0 = \frac{\hbar^2 k_y}{m \omega_c} \quad (4.17)$$

liegt. Die Eigenfrequenz ist  $\omega = \omega_c = eB/m$ , mit  $m$  wieder der Zyklotron-Masse. Die Gesamtenergie hat die Eigenwerte

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \quad (4.18)$$

Insgesamt gibt es eine freie Bewegung in  $z$ -Richtung, also die des Magnetfelds, in eine quantisierte geschlossene Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene. Abbildung 4.8 zeigt die Dispersionsrelation entlang  $k_z$ . In Metallen liegen die Zustände allerdings sehr viel dichter: Bei einem Magnetfeld von 1 T beträgt  $\hbar \omega_c$  etwa 0.1 meV, verglichen mit  $E_F \approx 10$  eV.

Die  $x$  und  $y$ -Komponente des Wellenvektors sind keine guten Quantenzahlen mehr, also nicht mehr zeitlich konstant, also kein Eigenwert des Hamilton-Operators. Die Energie ist gegeben durch die Komponente  $k_\perp$  senkrecht zum Magnetfeld

$$k_{\perp, n} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c} \quad (4.19)$$

Damit wird die Energie

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_{\perp, n}^2 + k_z^2) \quad (4.20)$$

In der  $xy$ -Ebene des reziproken Raums sind die Zustände also konzentrische Kreise, deren Durchmesser proportional zu  $\sqrt{n + 1/2}$  ansteigt (Abb. 4.9). Der Kreis mit der Quantenzahl  $n$  hat im reziproken Raum die Fläche

$$S_n = \pi k_{\perp, n}^2 = \frac{2\pi eB}{\hbar} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.21)$$

Die Fläche zwischen zwei Kreisen ist im reziproken Raum für alle Kreise gleich

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n = \frac{2\pi eB}{\hbar} \quad (4.22)$$

Ohne Magnetfeld sind Zustände im reziproken Raum homogen verteilt, die Zustandsdichte konstant. Mit Magnetfeld werden die Zustände so umverteilt, dass sie in der  $xy$ -Ebene auf Kreisen liegen, und zwar auf jedem Kreis gleich viele. Das sind gerade die, die innerhalb des Kreises bis zum vorangegangenen liegen. Der Entartungsgrad  $g_e$  lässt sich schreiben als

$$g_e = \Delta S \frac{L^2}{(2\pi)^2} = \frac{eBL^2}{h} = \frac{\Phi}{2\Phi_0} \quad (4.23)$$



Abbildung 4.8: Dispersionsrelation entlang  $k_z$  ohne Magnetfeld (fett) und nach Quantisierung der Kreisbahnen (dünn).



Abbildung 4.9: Durch das Magnetfeld in  $z$ -Richtung ändert sich die Anordnung der Zustände im reziproken Raum  $k_x$ - $k_y$ .

mit der Fläche der Probe  $L^2$  senkrecht zum Magnetfeld, dem magnetischen Fluss  $\Phi = L^2 B$  und dem *magnetischem Flussquant*  $\Phi_0$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} . \quad (4.24)$$

Der Begriff des *Flussquants* greift dem Kapitel zur Supraleitung vorweg. Dort wird auch der Faktor 2 klar, weil dort Elektronen gepaart auftreten werden. Man kann die Stärke des Magnetfelds in Anzahl Flussquanten messen (bei gegebener Probengröße). Genau diese Anzahl definiert die Anzahl der Zustände auf den Landau-Kreisen, also deren Entartung.

In  $z$ -Richtung hat das Magnetfeld keinen Einfluss. Hier liegen die Zustände weiterhin homogen. Es bilden sich konzentrische Zylinder, die bis zur Fermi-Fläche mit Elektronen besetzt sind. Die Landau-Kreise sind also eigentlich Landau-Zylinder.

### Zur Selbstkontrolle

3. Skizzieren Sie, wie in 3 Dimensionen die Landau-Zylinder in der Fermi-Kugel liegen, oder suche Sie solch ein Bild im Internet.

## Dimensionalität und Zustandsdichte

Lassen Sie uns zunächst die Zustandsdichte ohne Magnetfeld aber bei reduzierter Dimensionalität betrachten. Wir nehmen ein freies Elektronengas an. Die Gruppengeschwindigkeit ist  $v_g = \hbar k / m$ . Damit wird die Zustandsdichte in  $n$  Dimensionen

$$D(E)^{(n)} dE = 2 \frac{L^n}{\hbar (2\pi)^n} \frac{m}{\hbar k} dE \int_{E=\text{const.}} dS_E \quad (4.25)$$

und somit

$$D(E)^{(3)} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} L^3 E^{1/2} \quad (4.26)$$

$$D(E)^{(2)} = \frac{m}{\pi \hbar^2} L^2 = \text{const.} \quad (4.27)$$

$$D(E)^{(1)} = \frac{1}{\pi \hbar} L E^{-1/2} . \quad (4.28)$$

Für punktförmige Objekte, also null Dimensionen erhält man wie für Atome diskrete Zustände

$$D(E)^{(0)} = 2 \delta(E - E_0) . \quad (4.29)$$

Ein angelegtes Magnetfeld lässt eine freie Bewegung nur noch in der  $z$ -Richtung zu. Damit ändert sich effektiv die Dimensionalität der Probe. Nicht mehr alle drei Dimensionen sind relevant, sondern nur noch eine. Dies sieht man auch in der Zustandsdichte. Die Gesamtenergie jedes Zustands lässt sich aufspalten in die Energie der Kreisbewegung und die der freien Bewegung

$$E = E_n + E_z = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 . \quad (4.30)$$

Dann verschiebt  $E_z$  die Energieskala, die in  $D(E)^{(1)}$  eingeht. Die Gesamt-Zustandsdichte ist also<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Czycholl, 2016.

$$D(E)^{(3d+B)} = \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3} L^3 \sum_n \frac{\hbar\omega_c}{\sqrt{E - E_n}} \Theta(E - E_n) \quad (4.31)$$

wobei durch die Stufenfunktion  $\Theta$  nur Summanden mit  $E \geq E_n$  beitragen. Abbildung 4.10 zeigt diese Zustandsdichte im Vergleich zum Fall  $B = 0$ . Die Flächen unter den Kurven sind identisch. Bei kleiner werdendem Magnetfeld wird die Zyklotron-Frequenz  $\omega_c$  kleiner und damit der Abstand der Peaks kleiner. Wenn man dann über ein kleines Energieintervall mittelt<sup>5</sup> gehen beide Fälle ineinander über.

Wenn wir von einer zweidimensionalen Probe ausgehen, dann ist ohne Magnetfeld die Zustandsdichte konstant. Mit Magnetfeld bleibt nur eine äquidistante Reihe von Delta-Funktionen  $\delta(E - E_n)$  bei den Zyklotron-Energien  $E_n$ , da keine freie Bewegung mit variabler Energie mehr möglich ist.

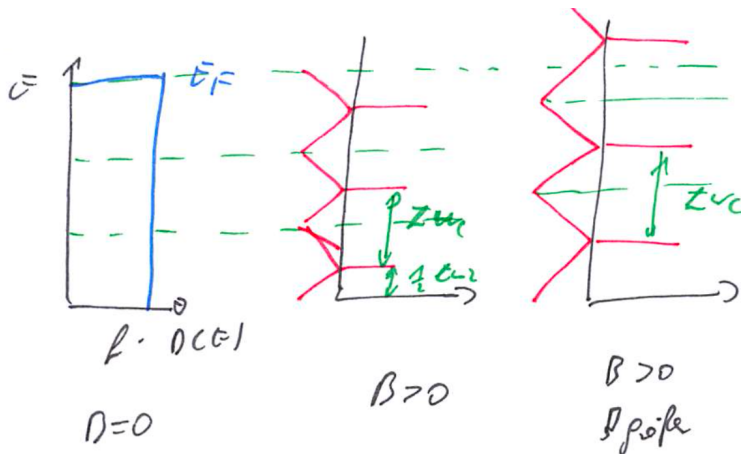
### Innere Energie

Die Änderung der Zustandsdichte durch das Magnetfeld hat einen überraschenden Einfluss auf die innere Energie. Wir diskutieren dies für eine zweidimensionale Probe. Man kann sich den dreidimensionalen Zustandsdichte aber als etwas ausgeschmiedete 2d Dichte vorstellen und erwartet somit ähnliche Ergebnisse.

Wenn kein Magnetfeld anliegt, sind alle Zustände bis zur Fermi-Energie  $E_F$  gefüllt (bei  $T = 0$ ), alle darüber leer. Jetzt schalten wir das Magnetfeld ein und wählen seine Stärke gerade so, dass die Entartung  $g_e$  (Gl. 4.23) passend ist (siehe Abb. 4.11), nämlich die Gesamtzahl  $N$  der Elektronen ein ganzzahliges Vielfaches des Entartungsgrads ist

$$N = p g_e \quad \text{mit} \quad p \in \mathcal{N} \quad . \quad (4.32)$$

In diesem Fall ändert sich die innere Energie nicht. Die Zustände ändern zwar ihre Energie, weil alle auf die Landau-Niveaus verschoben werden, aber gleich viele werden angehoben wie abgesenkt: die bis zum Abstand  $\hbar\omega_c/2$  unterhalb des Niveaus werden angehoben; die bis zu diesem Abstand darüber werden abgesenkt.



<sup>5</sup> beispielsweise durch thermische Einflüsse via  $k_B T$



Abbildung 4.10: Zustandsdichte in 2 und 3 Dimensionen ohne (fett) und mit (dünn) angelegtem Magnetfeld.

Abbildung 4.11: Zustandsdichte in zwei Dimensionen. Bei gewissen Feldstärken  $B$  ist die innere Energie größer als ohne Feld.

Falls die Feldstärke  $B$  aber anders ist, die Entartung  $g_e$  also nicht gerade

passt, dann gibt es ein nur teilweise besetztes Landau-Niveau. Bei schrittweise befüllen dieses letzten Niveaus werden aber zunächst nur Energien angehoben. Erst nach der Halbbesetzung werden Energie abgesenkt. In Summe ist bleibt unabhängig von  $B$  immer eine Anhebung übrig.

Die innere Energie oszilliert also mit der Zahl der besetzten Niveaus  $p$ , wobei ein nicht-ganzzahliges  $p$  nun eine teilweise Besetzung bedeutet. Das Minimum der inneren Energie ist bei  $E_F(B = 0)$ . Weil

$$E_F \approx p\hbar\omega_c = p \frac{e\hbar B}{m} \quad (4.33)$$

treten die Minima mit einer Periode des reziproken Feldes

$$\delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{e\hbar}{m E_F} \quad (4.34)$$

auf.

Interessanter ist aber die Größe  $S_F$  des höchsten besetzten Landau-Niveaus im reziproken Raum. Dies ist der Schnitt der Fermi-Fläche in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld und erlaubt und so, die Fermi-Fläche auszumessen. Sei bei einem Feld  $B_n$  gerade  $n$  Landau-Niveaus voll besetzt. Die Größe  $S_F$  des obersten Niveaus im reziproken Raums ist durch Gl. 4.21 gegeben:

$$S_F = \frac{2\pi e B_n}{\hbar} \left( n + \frac{1}{2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{2\pi e B_{n+1}}{\hbar} \left( n + 1 + \frac{1}{2} \right) \quad (4.35)$$

so dass

$$\delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar S_F} \quad (4.36)$$

Zur Selbstkontrolle

4. Machen Sie sich klar, was in Abb. 4.11 passiert. Wie ändert sich die Besetzung der Landau-Niveaus und die innere Energie, wenn man die magnetische Feldstärke variiert? Das ist der zentrale Punkt für den Rest des Kapitels.

## De Haas-van Alphen-Effekt

Viele messbaren Größen hängen mit der inneren Energie zusammen. Man findet diese Oszillationen mit  $1/B$  beispielsweise in der Wärmekapazität und in der Magnetisierung. Die Wärmekapazität ist

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (4.37)$$

und die Magnetisierung  $M$  ist die Ableitung der freien Energie  $F$  bzw. (bei  $T = 0$ ) der inneren Energie  $U$  nach  $B$ :

$$M = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial F}{\partial B} \right)_{T,V} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial B} \right)_{T=0,V} \quad (4.38)$$

Die Oszillation von  $M$  mit  $1/B$  nennt man De Haas-van Alphen-Effekt nach W.J. de Haas und P.M. van Alphen.

Im Fall von Wärmekapazität Beryllium (Abb. 4.12) misst man bei passender Orientierung des Magnetfeldes die Querschnittsfläche der zigarrenförmigen Fermi-Flächen am Rand der Brillouinzone.

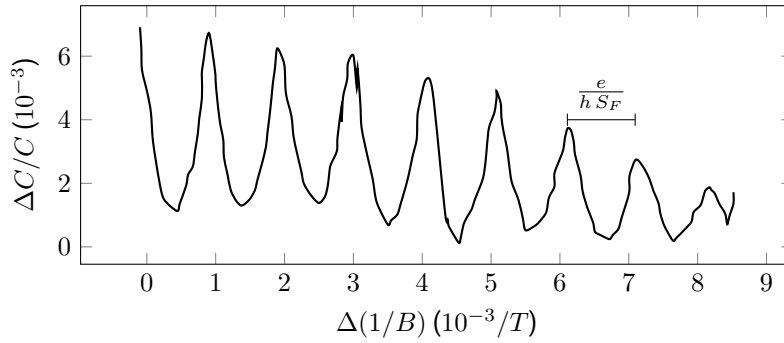


Abbildung 4.12: Relative Änderung der Wärmekapazität von Beryllium (Be) mit dem Magnetfeld (Sullivan und Seidel, 1968). Das Feld ist parallel zur kristallographischen c-Achse.

## Hall-Effekt

Wir verlassen für einen Augenblick die quantenmechanische Beschreibung und betrachten den klassischen Hall-Effekt. Er erlaubt es, die Ladungsträgerkonzentration zu bestimmen und zwischen Elektronen und Löchern zu unterscheiden. Er dient uns aber auch als Basis für den Quanten-Hall-Effekt im darauffolgenden Abschnitt.

Wir betrachten die Bewegung eines quasi-freien Elektrons ( $q = -e$ ) unter elektrischen und magnetischen Feldern und berücksichtigen Stöße wie im Drude-Modell. Relevant ist die mittlere Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle$ , bei der also die thermische Bewegung herausgemittelt ist. Für diese gilt

$$m^* \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -e [\mathcal{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}] - m^* \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{\tau} \quad (4.39)$$

Das Magnetfeld zeigt in  $z$ -Richtung und wir sind nur am stationären Fall interessiert ( $d\langle \mathbf{v} \rangle / dt = 0$ ). Dann erhalten wir

$$v_{d,x} = -\frac{e\tau}{m^*} (\mathcal{E}_x + v_{d,y} B) \quad (4.40)$$

$$v_{d,y} = -\frac{e\tau}{m^*} (\mathcal{E}_y - v_{d,x} B) \quad (4.41)$$

$$v_{d,z} = -\frac{e\tau}{m^*} \mathcal{E}_z \quad (4.42)$$

Mit der Definition der Stromdichte  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = \sigma\mathcal{E}$  und der Zyklotron-Frequenz  $\omega_c = eB/m^*$  bekommen wir den Leitfähigkeitstensor  $\sigma$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

wobei gerade  $\sigma_{zz} = \sigma_0 = ne^2\tau/m^*$  die Leitfähigkeit bei  $B = 0$  ist. Man benutzt immer flache Proben, ohne elektrisches Feld oder Stromfluss in  $z$ -Richtung. Aus Symmetriegründen reicht es aus  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$  zu betrachten.

Wir machen das Experiment so, dass nur Strom in  $x$ -Richtung fließt, also  $j_y = 0$ . Damit wird

$$\mathcal{E}_y = -\omega_c \tau \mathcal{E}_x = -\omega_c \tau \frac{j_x}{\sigma_0} = R_H B j_x \quad (4.44)$$

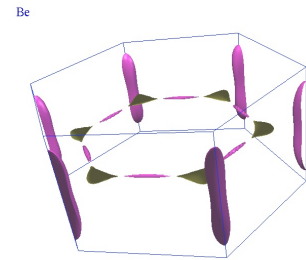


Abbildung 4.13: Fermi-Flächen von Beryllium (Choy u. a., 2000).

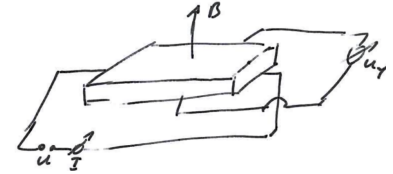


Abbildung 4.14: Geometrie zum Hall-Effekt.

Das Magnetfeld bewirkt also ein elektrisches Hall-Feld in  $y$ -Richtung, obwohl der Strom in  $x$ -Richtung fließt. Die Hall-Konstante  $R_H$  ist also

$$R_H = \frac{\mathcal{E}_y}{j_x B} = -\frac{1}{n e} . \quad (4.45)$$

Da sich  $\mathcal{E}_y$ ,  $j_x$  und  $B$  messen lassen, kann man so die Ladungsträgerdichte  $n$  bestimmen und auch ihr Vorzeichen.

Falls sowohl Elektronen als auch Löcher zum Ladungstransport beitragen, dann werden deren Konzentrationen  $n$  und  $p$  mit der Beweglichkeit<sup>6</sup>  $\mu_n$  und  $\mu_p$  gewichtet

$$R_H = \frac{p\mu_p - n\mu_n}{e(p\mu_p + n\mu_n)} . \quad (4.46)$$

Analog zum Querwiderstand  $\rho_{xy} = R_H B$  ist später auch der Längswiderstand

$$\rho_{xx} = \frac{\mathcal{E}_x}{j_x} = \frac{B}{ne} \frac{1}{\omega_c \tau} = \frac{m^*}{ne^2 \tau} \quad (4.47)$$

interessant.

## Quanten-Hall-Effekt

Beim klassischen Hall-Effekt hatten wir gefordert, dass die Probe flach ist, also kein Feld oder Stromfluss in  $z$ -Richtung geschieht. Das verschärfen wir jetzt und fordern eine quantenmechanisch-zweidimensionale Probe, also eine, bei der in  $z$ -Richtung keine Quantenzahlen mehr relevant sind, insbesondere kein  $k_z$ . Solche Strukturen nennt man zweidimensionales Elektronengas (2DEG) und kann sie an Grenzflächen zwischen zwei Halbleitern erzeugen.

Wenn wir ein starkes Magnetfeld anlegen und die Proben rein genug sind, so dass  $\omega_c \tau \gg 1$ , und die Temperatur  $T$  kalt genug, dann erhalten wir wie oben besprochen als Zustandsdichte eine äquidistante Reihe von Delta-Funktionen  $\delta(E - E_n)$ . Bei manchen Magnetfeldern  $B$  sind dann alle Landau-Niveaus vollständig gefüllt und das nächste  $\hbar\omega_c$  in der Energie entfernt. Damit sind keine Streuprozesse möglich und  $\tau$  wird unendlich. Damit werden im Leitfähigkeitstensor Gl. 4.43 die Einträge  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ . Der Einfachheit halber in zwei Dimensionen also

$$\sigma_{\tau \rightarrow \infty} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_\infty \\ \sigma_\infty & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.48)$$

Die Kreuz-Terme  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yx}$  bleiben von Null verschieden, weil auch  $\sigma_0 \propto \tau$ . Der Widerstandstensor ist das Inverse<sup>7</sup> des Leitfähigkeitstensors

$$\rho_{\tau \rightarrow \infty} = \sigma_{\tau \rightarrow \infty}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sigma_\infty \\ -1/\sigma_\infty & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.49)$$

Das Längsfeld  $\mathcal{E}_x$  verschwindet, weil zwar  $j_x \neq 0$  aber  $\sigma_{xx} = 0$  und wie immer  $j_y = 0$ . Damit wird auch der Längs-Widerstand  $\rho_{xx} = 0$ . Das Hall-Feld  $\mathcal{E}_y$  bewirkt den Stromfluss in  $x$ -Richtung.

Das hat Klaus von Klitzing 1980 auch genau so gefunden<sup>8</sup>. Etwas neuere Daten sind in Abbildung 4.1 gezeigt. An den Stellen, an denen der Längs-Widerstand  $\rho_{xx}$  verschwindet, also gerade alle Landau-Niveaus vollständig gefüllt sind, ist die Elektronendichte

$$n = \frac{N}{L^2} = \frac{p g_e}{L^2} = \frac{p e B}{h} \quad (4.50)$$

Element	Li	Na	Be	Al
Wertigkeit	1	1	2	3
$n/\text{Atom}$	0.8	1.2	-0.4	-0.9

Tabelle 4.1: Ladungsträgerdichte  $n$  bestimmt aus der Hall-Konstanten  $R_H$  (aus Hunklinger, 2014). Ein negatives Vorzeichen bedeutet Löcherleitung.

<sup>6</sup>  $\mu = e\tau/m$ , siehe Gl. 2.24.

<sup>7</sup> Man invertiert den Tensor (die Matrix), nicht jedes Element!

<sup>8</sup> siehe Klitzing, Dorda und Pepper, 1980. Nobelpreis K. von Klitzing 1985

mit ganzzahligem  $p$ . Der Quer-Widerstand wird somit

$$\rho_{xy} = R_H B = -\frac{B}{n e} = \frac{1}{p} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{p} R_K \quad (4.51)$$

mit der Naturkonstanten  $R_K = 25812,8 \dots \Omega$ . Dies wird heute als Widerstandsnormal genutzt, und auch um die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante  $\alpha$  zu bestimmen

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{e^2}{h} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{1}{R_K} \approx \frac{1}{137} \quad (4.52)$$

Überraschend war jedoch, dass sich *Plateaus* ausbilden, also  $\rho_{xx}$  und  $\rho_{xy}$  über ein gewisses Intervall von  $B$  einen konstanten Wert annehmen. Eigentlich sollte ja nur für genau einen Wert von  $B$  alle Landau-Niveaus gefüllt sein. Der Längswiderstand  $\rho_{xx}$  ist in Abbildung 4.1 aber beinahe durchgängig Null. Eine einfache phänomenologische Erklärung findet sich in der Zustandsdichte einer realen Probe. In Wirklichkeit wird die nicht allein eine Sequenz von Delta-Funktionen sein. Defekte und Verunreinigungen führen zu einer kontinuierlichen Verteilung von Zuständen auf der Energieskala. Diese Defekt-Zustände sind aber im Gegensatz zu den Landau-Niveaus im Raum lokalisiert und tragen nicht zur Leitfähigkeit bei, aber zur Fermi-Energie. Wenn das Magnetfeld etwas erhöht wird, sollte in einer idealen Probe sofort das nächst tiefer Landau-Niveau depopuliert werden, weil die Fermi-Energie direkt zu diesem Niveau springt. In einer realen Probe werden aber zunächst alle Defekt-Zustände dazwischen depopuliert und das Landau-Niveau bleibt vollständig besetzt. Solange es also noch besetzte Defekt-Zustände zwischen zwei Landau-Niveaus gibt, bleibt der Quanten-Hall-Effekt bestehen.

Tieferegehende Erklärungen benutzen 'skipping orbits' in Randkanälen (am Rand der Probe). Heutzutage wird der Quanten-Hall-Effekt als ein topologischer Effekt gesehen, der also unter stetigen Verformungen erhalten bleibt. Er wird auch als ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt bezeichnet, weil es auch einen 'fractional quantum Hall effect' gibt, bei dem  $p$  rationale Zahlen annimmt. Für diesen haben Robert Laughlin, Horst Störmer und Daniel Tsui 1998 den Nobelpreis bekommen.



## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Choy, T.-S. u. a. (2000). "A database of fermi surface in virtual reality modeling language (vrml)". In: *Bulletin of The American Physical Society* 45.1, S. L36–42. [↗](#)
- Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- Dresselhaus, G, AF Kip und C Kittel (1955). "Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals". In: *Physical Review* 98.2, S. 368. [↗](#)
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#)
- Klitzing, K, G Dorda und M Pepper (1980). "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance". In: *Phys. Rev. Lett.* 45.6, S. 494–497. [↗](#)
- Klitzing, Klaus v. (1984). "The quantized hall effect". In: *Physica B+C* 126.1, S. 242–249. [↗](#)
- Sullivan, Paul F. und G. Seidel (1968). "Steady-State, ac-Temperature Calorimetry". In: *Phys. Rev.* 173 (3), S. 679–685. [↗](#)
- Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [↗](#)



# Kapitel 5

## Halbleiter

Markus Lippitz  
20. Juni 2023

### Ziele

- Sie können die Ladungsträgerdichten in dotierten und undotierten Halbleitern im Zusammenspiel von Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilung erklären und so beispielsweise die unten gezeigten Messungen an Germanium interpretieren.
- Sie können die Strom-Spannungs-Kennlinie eines p-n-Kontakts und die zugrundeliegende Bandstruktur erklären.

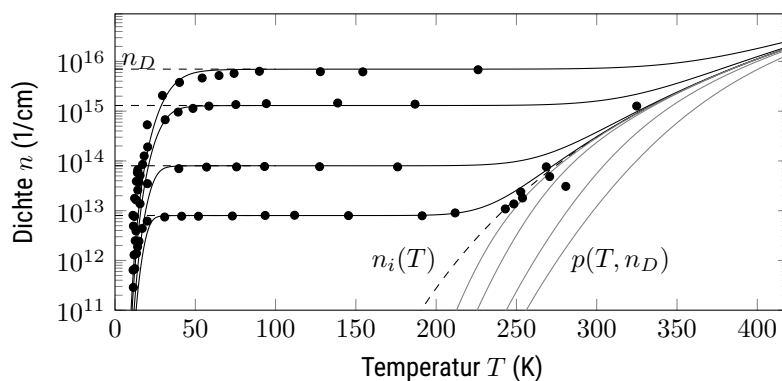


Abbildung 5.1: Dichte der Elektronen im Leitungsband von Germanium, gemessen mit dem Hall-Effekt, als Funktion der Konzentration der Arsen-Donatoren. Daten aus Conwell, 1952. Zum Vergleich ist  $p_i(T) = n_i(T)$  (gestrichelt) und  $p(T, n_D)$  (grau) eingezeichnet.

### Überblick

Wir hatten schon im Kapitel zur Bandstruktur bemerkt, dass der Übergang zwischen Isolator und Halbleiter fließend ist. Beide haben eigentlich in voll besetztes Valenzband und ein unbesetztes Leitungsband mit einer Bandlücke  $E_g$ . Thermische Anregung führt zu einer Besetzung im Leitungsband proportional zu  $\exp(-E_g/2k_bT)$ , wie wir weiter unten sehen werden. Damit sind bei Raumtemperatur je nach Bandlücke beispielsweise  $10^{-5}$  (bei  $E_g = 0.5$  eV) oder  $10^{-26}$  (bei  $E_g = 3$  eV) der Ladungsträger angeregt. Dies führt zu einer von Null verschiedenen Leitfähigkeit. Man definiert ein Material als Halbleiter,



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

wenn seine spezifische Leitfähigkeit bei Raumtemperatur zwischen  $10^{-2}$  und  $10^9 \Omega\text{m}$  liegt. Man klassifiziert Halbleiter nach verschiedenen Eigenschaften:

**intrinsisch oder dotiert** Wenn man ein Material gezielt mit einer Verunreinigung versieht, also dotiert, dann kann dies zu mehr freien Ladungsträgern führen, weil diese dann vom Fremdatom stammen. Bei intrinsischen Halbleitern stammen die Elektronen im Leitungsband immer aus dem Valenzband.

**direkt oder indirekt** Bei einem direkten Halbleiter liegt das Maximum des Valenzbandes am gleichen Ort im reziproken Raum wie das Minimum des Leitungsbandes. Dadurch sind Übergänge ohne Änderung des Wellenvektors bei einer niedrigen Energie möglich.

**kristallin oder amorph** Die perfekte periodische Kristallstruktur ist nicht unbedingt Voraussetzung ( $\alpha$ -Silizium ist für Solarzellen relevant), aber wir betrachten hier nur kristalline Materialien.

**organisch oder anorganisch** Wir betrachten hier anorganische Halbleiter, die aus ein oder zwei Elementen bestehen. Organische Halbleiter auf Basis von Kohlenstoff-Verbindungen organischer Moleküle sind ein Thema für sich.

### Intrinsische kristalline Halbleiter

Die Bandstruktur und die Lage der Fermi-Energie hängt sowohl in der 'empty lattice approximation' als auch im 'tight binding' Modell von der Elektronenkonfiguration der beteiligten Atome ab. Es ist daher nicht verwunderlich, dass Halbleiter von im Periodensystem benachbarten Atomen gebildet werden. Dies sind zum einen die Elemente der Gruppe IV, also Kohlenstoff (C), Silizium (Si) und Germanium (Ge). Die Bandlücken betragen 5.47 eV, 1.12 eV und 0.66 eV und sind jeweils indirekt. Diamant ist damit ein Isolator.

Verbindungshalbleiter bestehen aus zwei Elementen, deren Elektronenzahl sich gerade auf die Gruppe IV mittelt. III-V-Halbleiter sind beispielsweise GaP (2.26 eV, indirekt), GaAs (1.43 eV, direkt), InSb (0.18 eV, direkt). II-VI-Halbleiter sind beispielsweise ZnS (sc: 3.54 eV) und CdSe (1.74 eV).

### Optische Übergänge

Als Beispiel für den Unterschied zwischen direkten und indirekten Halbleitern möchte ich hier dem späteren Kapitel zu den optischen Eigenschaften vorweggreifen und optische Übergänge besprechen. Ein Photon wird absorbiert und befördert ein Elektron vom Valenzband ins Leitungsband. Dies nennt man Interband-Übergang. Gleichzeitig kann auch noch ein Phonon absorbiert oder emittiert werden. Die Energie- und Impulserhaltung lautet also

$$E_g = \hbar\omega_\gamma(\mathbf{k}_\gamma) \pm \hbar\Omega(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

$$\hbar\Delta\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}_\gamma \pm \hbar\mathbf{q} \quad (5.2)$$

Größen des Photons sind mit einem  $\gamma$  indiziert. Das eventuell beteiligte Phonon hat die Frequenz  $\Omega$  und den Impuls  $\mathbf{q}$ . Das Elektron ändert eine Energie um  $E_g$  und seinen Impuls um  $\Delta\mathbf{k}$ .

Betrachten wir zunächst *direkte Übergänge*, also *Prozesse ohne Beteiligung eines Phonons*. Der Impuls eines Photons ist viel kleiner als relevante Impulse von Elektronen in der Brillouinzone:

$$k_\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{2\pi}{500 \text{ nm}} \ll k_{BZ} = \frac{\pi}{a} \approx \frac{\pi}{0.5 \text{ nm}} \quad (5.3)$$

Photonen ermöglichen also nur senkrechte Übergänge in der Elektronen-Dispersionsrelation bei quasi konstantem Elektronen-Impuls  $\mathbf{k}$  ( $\hbar\Delta\mathbf{k} \approx 0$ ). Diese direkten Prozesse dominieren in direkten Halbleitern. Bei gegebenem  $\mathbf{k}$  ist die Energiedifferenz zwischen Valenz- und Leitungsband in der Nähe der Extrema

$$\Delta E = \hbar\omega_\gamma = E_c(\mathbf{k}) - E_v(\mathbf{k}) = \left( \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right) \frac{\hbar^2 k^2}{2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{komb}}^*} \quad (5.4)$$

mit der kombinierten effektiven Masse  $m_{\text{komb}}^*$  einer kombinierten Bandstruktur  $\Delta E(\mathbf{k})$ . Für diese können wir auch eine kombinierte Zustandsdichte angeben

$$D_{\text{komb}}(\Delta E) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m_{\text{komb}}^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\Delta E - E_g} \quad (5.5)$$

Diese Zustandsdichte bestimmt über Fermis Goldener Regel

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle f | \hat{H}' | i \rangle D(\Delta E) \quad (5.6)$$

die Übergangsrate  $\Gamma_{if}$  und damit den Absorptionskoeffizienten  $\alpha \propto \Gamma_{if}$ . Dieser beschreibt die verbleibende Intensität  $I$ , nachdem ein Lichtstrahl gegebener Frequenz eine Probe der Dicke  $L$  durchquert hat

$$I(\omega_\gamma) = I_0 e^{-\alpha(\omega_\gamma)L} \quad (5.7)$$

Insgesamt bekommen wir also mit

$$\alpha(\omega_\gamma) \propto (m_{\text{komb}}^*)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega_\gamma - E_g} \quad (5.8)$$

einen wurzelförmigen Verlauf des Absorptionsspektrums, der bei der Energie der Bandlücke einsetzt. Dabei haben wir die Annahme gemacht, dass das Übergangs-Dipolmoment  $\langle f | \hat{H}' | i \rangle$  im relevanten Frequenzbereich konstant ist.

Bei *indirekten Übergängen* unter Beteiligung eines Phonons wird die Rechnung aufwändiger. Man muss über alle Ausgangs- und Endzustände der Elektronen integrieren, die über irgendein Phonon verbunden sind. Außerdem kann die Reihenfolge der Wechselwirkung mit Photon und Phonon getauscht werden und beide Möglichkeiten interferieren in der Quantenmechanik.<sup>1</sup> Das Ergebnis der Rechnung ist

$$\alpha(\omega_\gamma) \propto (\hbar\omega_\gamma - (E_g \pm \hbar\Omega))^2 \quad \text{für} \quad \hbar\omega_\gamma > E_g \pm \hbar\Omega \quad (5.9)$$

je nachdem, ob ein Phonon absorbiert oder emittiert wird. Die Absorption setzt also mit einem quadratischen Verlauf bei der indirekten Bandlücke ein. Der Anstieg ist mit steigender Frequenz also viel flacher als bei einer direkten Bandlücke. Auch bei indirekten Halbleitern gibt es ab einer gewissen Energie direkte Übergänge. Diese benötigen keine Phononen und sind somit wahrscheinlicher. Ab der direkten Bandlücke dominiert dann also auch der wurzelförmige Verlauf.



Abbildung 5.2: Absorption von Indiumantimonid (InSb), einem direkten Halbleiter, in der Nähe der Bandkante (Johnson, 1967).



Abbildung 5.3: Absorption von Silizium (Si), einem indirekten Halbleiter, in der Nähe der Bandkante (Macfarlane und Roberts, 1955).

<sup>1</sup> siehe zB Yu und Cardona, 2010

## Thermische Besetzung der Bänder

Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist das Valenzband vollständig gefüllt, das Leitungsband vollständig leer. Durch thermische Anregung gelangen aber Elektronen von Valenz- ins Leitungsband. Wir berechnen nun, wie viele das sind. Dabei behandeln wir Elektronen und Löcher immer parallel zu einander.

Die Dichte  $n$  der Elektronen im Leitungsband bzw. die Dichte  $p$  der Löcher im Valenzband können wir einfach durch Integration über die Zustandsdichte  $D$  (im jeweiligen Band) und Fermi-Dirac-Funktion  $f_{FD}$  bestimmen

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f_{FD}(E, T) D_c(E) dE \quad (5.10)$$

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} (1 - f_{FD}(E, T)) D_v(E) dE \quad (5.11)$$

Die Energien  $E_{v,c}$  bezeichnen die jeweiligen Bandkanten ( $E_g = E_c - E_v$ ). Bei den Löchern integrieren wir über  $1 - f_{FD}$ , weil diese ja gerade unbesetzte Elektronenzustände sind. Die Zustandsdichte ist jeweils

$$D_c(E) = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c} \quad \text{für } E > E_c \quad (5.12)$$

$$D_v(E) = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_v - E} \quad \text{für } E < E_v, \quad (5.13)$$

wobei die Massen hier die jeweiligen effektiven Massen an der Bandkante sind.

Nun müssen wir noch die Fermi-Dirac-Funktion  $f_{FD}$  passend nähern und dazu zunächst die Unterscheidung zwischen Fermi-Energie und Fermi-Niveau einführen. In der Fermi-Dirac-Funktion steht ja eigentlich das chemische Potential  $\mu$ . Wir hatten die Fermi-Energie definiert als  $E_F = \mu(T = 0)$ . Hier sind wir aber an höheren Temperaturen interessiert. Gross und Marx, 2023 verwenden das chemische Potential  $\mu(T)$  direkt, Hunklinger, 2014 führt den Begriff Fermi-Niveau als äquivalent zum chemischen Potential ein. Um eine Verwechslung mit der Beweglichkeit zu vermeiden wird dort  $E_F(T)$  und nicht  $\mu$  verwendet. Ich folge hier Hunklinger.

Wir machen die Annahme, dass das Fermi-Niveau  $E_F(T)$  weit<sup>2</sup> von den Bandkanten entfernt ist. Dies ist die *Näherung der Nichtentartung* und gilt bei intrinsischen oder nur schwach dotierten Halbleitern. Sie gilt bei entarteten (stark dotierten) Halbleitern nicht. Dazu mehr unten. Wenn also  $|E - E_F| \gg k_b T$  für die relevanten Werte von  $E$  ist, dann können wir die Fermi-Dirac-Verteilungen als Boltzmann-Verteilungen nähern:

<sup>2</sup> auf einer  $k_b T$ -Skala

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/k_B T} \quad \text{für } E > E_F \quad (5.14)$$

$$1 - f_{FD} = \frac{1}{e^{(E_F-E)/k_B T} + 1} \approx e^{-(E_F-E)/k_B T} \quad \text{für } E < E_F \quad (5.15)$$

Damit können wir nun alles einsetzen und die Integrale berechnen:<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Man integriert über  $x = (E - E_F)/k_b T$  und benutzt  $\int \sqrt{y} e^{-y} dy = \sqrt{\pi}/2$ .

$$n = 2 \left( \frac{k_b T m_n^*}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} \quad (5.16)$$

$$p = 2 \left( \frac{k_b T m_p^*}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{+(E_v - E_F)/k_b T} = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F)/k_b T} \quad (5.17)$$

Dabei haben wir die effektiven ('zugänglichen') Zustandsdichten  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{P}$  eingeführt, die nur schwach temperaturabhängig sind. Wenn man sie als konstant ansieht, dann haben wir die beiden Bänder zu zwei diskreten Zuständen vereinfacht, die bei den Energien  $E_c$  bzw.  $E_v$  liegen. Das wird im Folgenden vieles vereinfachen.



Abbildung 5.4: Thermische Besetzung der Zustände eines intrinsischen Halbleiters mit  $m_p^* = 1.5m_n^*$  und  $E_g = k_bT$ . Die besetzten Zustände sind grau unterlegt. Man erkennt  $n = p$ .

## Massenwirkungsgesetz

Interessant ist, dass sowohl  $n$  als auch  $p$  von der Lage des Fermi-Niveaus  $E_F$  abhängt, deren Produkt aber nicht

$$np = \mathcal{N}\mathcal{P} e^{-E_g/k_bT} = \mathcal{W}T^3 e^{-E_g/k_bT} \quad (5.18)$$

Das Produkt  $np$  hängt nur von Materialparametern und der Temperatur ab. Die Beziehung  $np = \text{const.}$  wird in Analogie zu einer chemischen Reaktion Massenwirkungsgesetz genannt. Bei einer Reaktion der Form



ergibt sich in stark verdünnter Lösung eine Gleichgewichtskonstante  $K$  mit

$$K = \frac{[C][D]}{[A][B]}, \quad (5.20)$$

wobei eckige Klammern hier die Konzentration der jeweiligen Stoffe bezeichnen. Man kann die Existenz von Elektronen im Leitungsband und Löchern im Valenzband als chemische Reaktion der Art



sehen. Durch thermische Anregung entstehen Elektronen (im Leitungsband) und Löcher (im Valenzband) aus dem Nichts. Die rechte Seite von Gl. 5.18 entspricht also der Gleichgewichtskonstante  $K$ .

Man beachte, dass zwar  $np = \text{const.}$ , aber bislang noch nicht  $n = p$  gefordert wurde.

## Intrinsische Ladungsträgerdichte

Bei dotierten Halbleitern (s.u.) könnte ein Elektron nicht nur aus dem Valenzband, sondern auch von einem Fremdatom stammen. Für intrinsische, also undotierte Halbleiter gilt aber, dass für jedes Elektron im Leitungsband ein Loch im Valenzband entstehen muss, also  $n = p$  sein muss. Die intrinsische

Ladungsträgerdichten  $n_i = p_i$  ergibt sich dann aus dem Massenwirkungsgesetz

$$n_i = p_i = \sqrt{n\mathcal{P}} = \sqrt{\mathcal{N}\mathcal{P}} e^{-E_g/2k_bT} . \quad (5.22)$$

Diese Gleichung hatten wir in der Einführung schon verwendet, um Ladungsträgerdichten abzuschätzen. Man beachte hier die Zwei im Exponenten. Die Bandlücke erscheint nur halb so groß, weil wir gleichzeitig ein Elektron und ein Loch aus dem Nichts erzeugen.

## Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus

Wir können uns einen Zusammenhang für die Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus beschaffen, in dem wir  $n_i = p_i$  umformen zu

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{N}} = \left( \frac{m_n^*}{m_p^*} \right)^{3/2} = e^{(2E_F - E_c - E_v)/(k_bT)} \quad (5.23)$$

und dann nach  $E_F$  auflösen

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) . \quad (5.24)$$

Bei  $T = 0$  liegt das Fermi-Niveau also in der Mitte der Bandlücke. Falls Leitungs- und Valenzband gleich stark gekrümmt sind, also Elektronen- und Loch-Masse identisch, dann bleibt es dort auch bei steigender Temperatur. Unterscheiden sich die Massen, dann bewegt sich das Fermi-Niveau leicht in Richtung der leichteren Ladungsträger. Da  $k_B T \ll E_g$  ist dies aber ein kleiner Effekt.

## Dotierung

Kein Halbleiter-Kristall ist wirklich rein, sondern beinhaltet immer Fremdatome. Diese anderen Atome verursachen zusätzliche Ladungsträger, Elektronen oder Löcher und beeinflussen so die Leitfähigkeit. In idealem GaAs ist die intrinsische Ladungsträgerdichte bei Raumtemperatur beispielsweise  $n_i \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}$ . Selbst in den besten GaAs Kristallen findet man aber  $n \approx 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Man kann einen Kristall also gezielt dotieren (eigentlich 'verunreinigen'), um so die Ladungsträgerdichte einzustellen. Man unterscheidet zwei Arten von Dotierung: n- und p-Dotierung, denn man kann ein Atom der Valenz  $V$  im Ausgangsmaterial durch ein Fremdatom der Valenz  $V + 1$  oder  $V - 1$  ersetzen. Im Fall  $V + 1$  spricht man von Donatoren, also Atomen, die Elektronen abgeben, oder n-Dotierung. Im Fall  $V - 1$  spricht man von Akzeptoren (Atome, die Elektronen aufnehmen), oder p-Dotierung.

Ein Donator-Atom ist für 'sein' Elektron ähnlich einem Proton für das Elektron im Wasserstoff-Atom, und analog ein Akzeptor für das Loch. Wir können also die Beschreibung des Wasserstoff-Atoms benutzen und müssen nur die effektive Masse des Ladungsträgers und die relative Permittivität  $\epsilon_r$  des Materials anpassen. Für einen Donator sind die Energie-Eigenwerte also

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e^* e^4}{(4\pi\epsilon_r\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e^*}{m_{\text{frei}}} \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad (5.25)$$



mit  $n$  hier der Quantenzahl und nicht der Ladungsträgerdichte. Der Bohr-Radius ist

$$r_{\text{Bohr}} = \frac{\epsilon_r}{m_e^*/m_{\text{frei}}} 0.53 \text{ \AA} . \quad (5.26)$$

Für Silizium findet man mit  $m_e^* = 0.1m_{\text{frei}}$  und  $\epsilon_r = 11.7$  die Werte  $E_1 = -10 \text{ meV}$  und  $r_{\text{Bohr}} = 62 \text{ \AA}$ . Der Betrag der Bindungsenergie ist also viel kleiner als die Bandlücke (1.14 eV) und kleiner als  $k_b T$  (25 meV) bei Raumtemperatur. Der Bohr-Radius ist viel größer als die Gitterkonstante (5.4 \AA). Es liegen also sehr viele Silizium-Atome innerhalb der Bahn des Elektrons um das eine Donator-Fremdatom.

Was bedeutet die Bindungsenergie des Donator-Elektrons für die Bandstruktur? Dem Ionisieren des Wasserstoff-Atoms entspricht ein Transfer des gebundenen Donator-Elektron ins Leitungsband. Dort ist es ja frei beweglich. Die Donator-Zustände liegen also im Abstand  $E_n$  unterhalb der Unterkante des Leitungsbandes. Analog liegen die Akzeptor-Zustände etwas oberhalb der Oberkante des Valenzbandes. In unserem Wasserstoff-Modell sind die Bindungsenergie (Abstände der Zustände von der Bandkante) vom Fremdatom unabhängig, nur Eigenschaften des Ausgangsmaterials gehen ein. Dies ist in Wirklichkeit auch beinahe so, weil der Bohr-Radius so groß ist, dass Details der Elektronenkonfiguration des Fremdatoms nur sehr schwach eingehen.

Bei Raumtemperatur sind die Störstellen mit großer Wahrscheinlichkeit ionisiert. Bei tiefen Temperaturen kann man durch Infrarotabsorption die Lage der Donator- und Akzeptor-Niveaus bestimmen.

## Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte

Durch die Dotierung lässt sich die Ladungsträgerdichte einstellen, die dann aber natürlich stark temperaturabhängig ist, weil die Bindungsenergie der Störstellen relativ klein ist. Dies werden wir nun etwas genauer betrachten. Wir machen weiterhin die Näherung der Nichtentartung, also dass das Fermi-Niveau<sup>4</sup> weit genug von der Bandkante entfernt ist, so dass wir die Fermi-Dirac-Verteilung mit einer Boltzmann-Verteilung nähern können. Die Ladungsträgerdichten im Leitungsband ( $n$ ) und Valenzband ( $p$ ) sind also wie oben

$$n = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} \quad \text{und} \quad p = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F)/k_b T} , \quad (5.27)$$

unabhängig davon, ob die Ladungsträger aus dem gegenüberliegenden Band oder aus Störstellen stammen. Die intrinsischen Dichten hatten wir erst später eingeführt.

Jedes Donator- und Akzeptor-Niveau kann nur mit einem Ladungsträger besetzt werden. Ein unterschiedlicher Spin reicht nicht aus, weil die Coulomb-Abstoßung der Ladungsträger größer ist als die Bindungsenergie.<sup>5</sup> Sei  $n_D$  also die Dichte der Donatoren, die entweder besetzt (neutral) sein können ( $n_D^0$ ) oder ionisiert ( $n_D^+$ ) und damit natürlich

$$n_D = n_D^0 + n_D^+ \quad \text{und} \quad n_A = n_A^0 + n_A^- . \quad (5.28)$$

Für deren Temperaturabhängigkeit kann man die Fermi-Dirac-Verteilung nicht

<sup>4</sup> =chemisches Potential  $\mu$

<sup>5</sup> Man darf nicht die Lage der Zustände im H-Atom vergleichen, sondern die zwischen H und  $H^-$  oder He und  $He^+$ .

mehr durch eine Boltzmann-Verteilung nähern, sondern muss schreiben

$$\frac{n_D^0}{n_D} = \frac{1}{e^{(E_D - E_F)/k_b T} + 1} \quad \text{und} \quad \frac{n_A^0}{n_A} = \frac{1}{e^{(E_F - E_A)/k_b T} + 1} \quad . \quad (5.29)$$

Alle Ladungen im Halbleiter müssen sich jederzeit neutralisieren, also

$$n + n_A^- = p + n_D^+ \quad . \quad (5.30)$$

Diese vier Gleichungen beschreiben zusammen die Temperaturabhängigkeit. Wir nehmen nun einen n-Halbleiter an, also dass viel mehr Donatoren als Akzeptoren vorhanden sind, also  $n_D \gg n_A$ . In diesem Fall findet sich sicherlich für jeden Akzeptor ein Elektron aus einem Donator, so dass alle Akzeptoren negativ geladen sind ( $n_A \approx n_A^-$ ). Und wir nehmen an, dass die Dotierung so stark ist, dass sie die Leitfähigkeit dominiert (*Störstellenleitung*). Dies ist dann der Fall, wenn  $n_D^+ \gg p$ , also viel mehr Donatoren ionisiert sind als Löcher vorhanden, oder die Mehrzahl der Elektronen im Leitungsband von Donatoren stammt, also die intrinsische Dichte vernachlässigt werden kann ( $n_i \ll n_D^+$ ). Damit wird die Dichte  $n$  der Elektronen im Leitungsband

$$n = p + n_D^+ - n_A^- \approx n_D^+ - n_A = (n_D - n_D^0) - n_A \quad (5.31)$$

$$= n_D \left( 1 - \frac{1}{e^{(E_D - E_F)/k_b T} + 1} \right) - n_A \quad . \quad (5.32)$$

Das Fermi-Niveau  $E_F$  können wir durch Umformen mit Gl. 5.27 entfernen

$$\frac{n(n_A + n)}{n_D - n_A - n} = \mathcal{N} e^{-E_d/k_b T} \quad , \quad (5.33)$$

wobei  $E_d = E_c - E_D$  der energetische Abstand der Donator-Niveaus von der Unterkante der Leitungsbandes ist. Aus dieser Gleichung kann man bei gegebener Fremdatom-Konzentrationen  $n_A$ ,  $n_D$  und Energien die Ladungsträgerdichte  $n$  berechnen. Zusammen mit Gl. 5.27 erhält man dann auch die Lage der Fermi-Niveaus  $E_F$ . Dies ist in Abb. 5.5 als Funktion der reziproken Temperatur  $T$  gezeigt und in der Abb. 5.1 am Anfang des Kapitels linear. Man findet vier Temperaturbereiche, die im Folgenden mit steigender Temperatur diskutiert werden.



Abbildung 5.5: Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte  $n$ . In dieser Darstellung ist  $E_d = E_g/10$  gewählt.

**Kompensationsbereich** Bei sehr tiefen Temperaturen ist  $k_b T \ll E_d$  und nur sehr wenige Ladungsträger sind im Leitungsband, also  $n \ll n_A \ll n_D$  und Gl. 5.33 wird

$$n \approx \frac{n_D \mathcal{N}}{n_A} e^{-E_d/k_b T} . \quad (5.34)$$

Das Fermi-Niveau wird mit Gl. 5.27

$$E_F \approx E_c - E_d + k_b T \ln \left( \frac{n_D}{n_A} \right) . \quad (5.35)$$

Wenn es nur kalt genug ist, liegt das Fermi-Niveau auf den Donator-Zuständen. Die Donatoren sind teilweise geladen, aber nicht so sehr, weil deren Ladungsträger im Leitungsband sind, sondern weil sie die Akzeptoren besetzt haben und diese keine Löcher mehr liefern können. Die Akzeptoren werden also kompensiert. Wenn  $T$  größer wird, dann verschiebt sich  $E_F$  in Richtung Bandkante und mehr Ladungsträger gelangen ins Leitungsband.

**Störstellenreserve** Mit steigender Temperatur ist dann der Punkt erreicht, dass  $n_A \ll n \ll n_D$ . Damit wird Gl. 5.33

$$n \approx \sqrt{n_D \mathcal{N}} e^{-E_d/2k_b T} \quad (5.36)$$

(man beachte die 2 im Exponenten) und das Fermi-Niveau wird

$$E_F \approx E_c - \frac{E_d}{2} - \frac{k_b T}{2} \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) . \quad (5.37)$$

Das Fermi-Niveau ist als in etwa in der Mitte zwischen Leitungsband-Unterkante und Donator-Niveau. Es sind noch nicht alle Donatoren ionisiert. Die Donatoren übernehmen die Rolle des Valenzbandes bei intrinsischen Halbleitern und  $E_d$  die Rolle der Bandlücke.

**Störstellenerschöpfung** Jetzt erreichen wir Raumtemperatur und  $k_b T \approx E_d$ . Damit wird Gl. 5.33

$$\frac{n^2}{n_D - n} \approx \mathcal{N} \quad \text{bzw.} \quad n \approx n_D = \text{const.} \quad (5.38)$$

weil  $n \ll \mathcal{N}$  und

$$E_F \approx E_c - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) . \quad (5.39)$$

Alle Störstellen sind ionisiert, aber die direkte Anregung von Elektronen aus dem Valenz- ins Leitungsband spielt noch keine Rolle.

**Eigenleitung** Die Temperatur ist schließlich so hoch, dass  $k_b T \gg E_d$ . Ladungsträger werden vom Valenz- ins Leitungsband angeregt und die Annahme  $p \ll n_D$  gilt nicht mehr. Die Dotierung spielt keine Rolle mehr und der Halbleiter benimmt sich wie ein intrinsischer Halbleiter mit den Gleichungen 5.17 und 5.24 für  $n$  und  $E_F$ .

## p-n-Übergang

Die Dotierung eines Halbleiter-Kristalls kann räumlich variieren. Dazu kann man beispielsweise durch UV-Lithographie eine Maske erzeugen, die das Eindringen von Fremdatomen an manchen Stellen verhindert. Wir betrachten hier

einen Kristall, bei dem sich auf einer Längenskala von wenigen Nanometern die Dotierung von p nach n ändert. Seien die Konzentration der Störstellen beispielsweise

$$n_A(x) = n_A \Theta(x) \quad \text{und} \quad n_D(x) = n_D \Theta(-x) \quad (5.40)$$

mit der Stufenfunktion  $\Theta$ . Der dabei entstehende p-n-Übergang besitzt einen charakteristischen Verlauf der Bandkanten und dient technologisch beispielsweise als Diode.

Stellen wir uns zunächst vor, dass die beiden Bereiche nicht miteinander in Verbindung stünden. Im p-dotierten Bereich gibt es bei Raumtemperatur viel mehr Löcher im Valenzband als Elektronen im Leitungsband, im n-dotierten Bereich ist es gerade anders herum. Wenn man die beiden Bereiche miteinander verbindet, dann diffundieren die Ladungsträger jeweils in den anderen Bereich, um die Konzentration auszugleichen. Dort rekombinieren aber Elektronen und Löcher und vernichten sich so gegenseitig. In den Ausgangsbereichen bleiben die gegenteilig geladenen immobilisierten Störstellen zurück. Dadurch bildet sich im p-dotierten Bereich eine negative Raumladung, im n-dotierten eine positive. Diese wirkt der Diffusion entgegen und ein Gleichgewicht stellt sich ein. Die dabei entstehende Potentialdifferenz nennt man *Diffusionsspannung*  $V_D$ . Diese verschiebt die Gesamtenergie der Elektronen um den Beitrag  $-e V_D$  und verbiegt so die Bänder, im n-dotierten Bereich hin zu niedrigeren Energien. Die Raumladungszone nennt man auch *Verarmungszone*, weil dort fast keine mobilen Ladungsträger mehr vorhanden sind.<sup>6</sup>

Man kommt zum gleichen Ergebnis auch mit einer anderen Argumentation. Vor dem Zusammenführen hat man im p-dotierten Bereich bei Raumtemperatur ein Fermi-Niveau etwas oberhalb des Akzeptor-Niveaus, weil wir im Bereich der Störstellenerzeugung sind. Im n-dotierten Teil ist die Bandlücke identisch, weil es dasselbe Halbleiter-Material ist. Nur liegt dort das Fermi-Niveau etwas unterhalb der Donator-Niveaus. Im thermischen Gleichgewicht kann es aber nur ein Fermi-Niveau (= chemisches Potential) geben.<sup>7</sup> Es bildet sich also ein Makropotential  $\phi(x)$ , das zur potentiellen Energie  $q\phi(x)$  der Ladungsträger ( $q = \pm e$ ) beiträgt, so dass das Fermi-Niveau wieder räumlich konstant ist.<sup>8</sup>

Die Diffusionsspannung  $V_D$  ergibt sich also aus der Differenz der Fermi-Niveaus im unverbundenen Zustand. In erster Näherung ist also  $eV_D \approx E_g$ . Im Bereich der Störstellenerzeugung ist sie durch Gl. 5.39 gegeben

$$eV_D = E_F^n - E_F^p \quad (5.41)$$

$$= E_c - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) - E_v - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{P}}{n_A} \right) \quad (5.42)$$

$$= E_g - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{N} \mathcal{P}}{n_D n_A} \right) \quad (5.43)$$

$$= k_b T \ln \left( \frac{n_D n_A}{n_i^2} \right) \quad (5.44)$$

Die Ladungsträgerdichten sind weiterhin durch die Lage des Fermi-Niveaus (Gl. 5.17) gegeben, nur dass sich dieses nun aus einem konstanten Anteil  $E_F$  und einem räumlich variablen Anteil  $e\phi(x)$  zusammensetzt. Wir

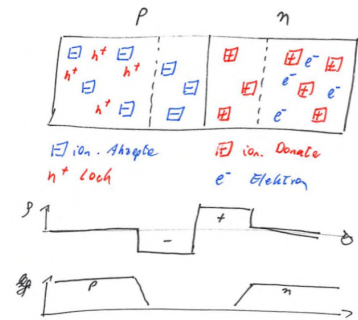


Abbildung 5.6: Räumliche Verteilung der festen und beweglichen Ladungen an einem p-n-Übergang und das sich daraus ergebende Potential.

<sup>6</sup> Das Massenwirkungsgesetz fordert  $n \cdot p = \text{const}$ , aber  $n + p$  kann stark variieren.



Abbildung 5.7: Bandstruktur und Lage des Fermi-Niveaus vor und nach dem Verbinden von zwei unterschiedlich dotierten Halbleitern.

<sup>7</sup> In der Chemie pro Stoff, hier aber alles Elektronen.

<sup>8</sup> Wenn man eine externe Spannung anlegt, so wird dieses externe Potential typischerweise als separat vom Fermi-Niveau angesehen. Dann ist das Fermi-Niveau nicht mehr räumlich konsant. Die Trennung zwischen Makropotential und externem Potential ist aber nur Konvention.

erhalten also

$$n(x) = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F - e\phi(x))/k_b T} \quad \text{und} \quad p(x) = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F - e\phi(x))/k_b T} . \quad (5.45)$$

Die Raumladungsdichte  $\rho(x)$  ist damit

$$\rho(x) = e (n_D(x) - n_A(x) - n(x) + p(x)) , \quad (5.46)$$

wenn man annimmt, dass alle Störstellen ionisiert sind. Zusammen mit der Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2 \phi(x) = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho(x) \quad (5.47)$$

haben wir ein nichtlineares gekoppeltes System von Differentialgleichungen für  $\rho(x)$  und  $\phi(x)$ , das sich nur numerisch lösen lässt.

## Schottky-Modell der Raumladungszone

Im Schottky-Modell nähert man den graduellen Verlauf der Ladungsträgerdichten durch Rechteck-Funktionen.<sup>9</sup> In einem Intervall der Breite  $d_p$  befinden sich nicht durch freie Ladungsträger kompensierte Akzeptoren der Konzentration  $n_A$  und andersherum für den n-dotierten Bereich. Wenn das Koordinatensystem so ist, dass  $x = 0$  an der p-n-Grenzfläche, dann ist beispielsweise  $\rho(x) = -en_A$  im Bereich  $-d_p < x < 0$  und  $\rho(x) = 0$  für  $x < -d_p$ . Durch Integration der Poisson-Gleichung bekommt man dann einen parabelförmigen Verlauf

$$\phi(x) = \phi_{-\infty} + \frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (d_p + x)^2 \quad \text{für} \quad -d_p < x < 0 , \quad (5.48)$$

wobei  $\phi_{-\infty}$  das konstante Makropotential tief im p-dotierten Bereich ist und  $V_D = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty}$ . Das Potential erfüllt so schon die Stetigkeitsbedingungen im Übergang zu  $\phi_{\pm\infty}$ . Bei  $x = 0$  muss ebenfalls die erste Ableitung stetig sein, also

$$n_D d_n = n_A d_p \quad (5.49)$$

was der Forderung nach Gesamt-Neutralität entspricht. Aus der Stetigkeit von  $\phi$  selbst ergibt sich eine weitere Bedingung

$$\frac{e}{2\epsilon_r \epsilon_0} (n_D d_n^2 + n_A d_p^2) = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty} = V_D . \quad (5.50)$$

Damit erhalten wir

$$d_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_A/n_D}{n_A + n_D}} \quad (5.51)$$

und  $d_p$  analog. typischerweise ist  $eV_D \approx E_g \approx 1 \text{ eV}$ , und  $n_{A,D} \approx 10^{14} \dots 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Also liegen  $d_{p,n}$  bei 10 bis 1000 nm.

<sup>9</sup> Das geht, weil die beweglichen Ladungsträger in ihrer Dichte exponentiell variieren, also sehr schnell irrelevant werden, siehe z.B. Ashcroft und Mermin, 2013.

## Externe Spannung und Strom-Spannungs-Kennlinie

Nun legen wir eine externe Spannung an den p-n-Übergang an. Wir nennen die Spannung  $U$  positiv, wenn sie das Potential der p-dotierten Seite anhebt. Nur innerhalb der Verarmungszone ist die Leitfähigkeit relativ niedrig, so dass

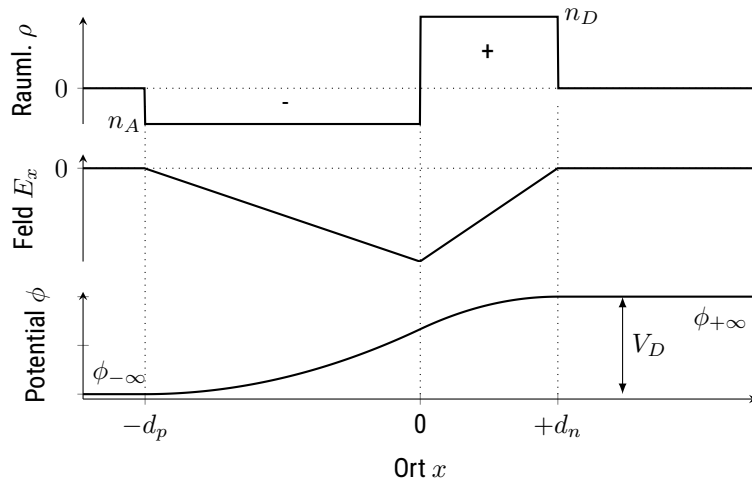


Abbildung 5.8: Schottky-Modell der Raumladungszone

die Spannung im Wesentlichen hier abfällt. Die Bänder ändern sich also nur im Bereich der Verarmungszone, außerhalb bleibt alles unverändert. Damit bleiben auch die Gleichungen aus dem letzten Abschnitt gültig, wenn wir jeweils  $V_D$  durch  $V_D - U$  ersetzen.

Durch Anlegen der externen Spannung ändert sich die Breite der Raumladungszone

$$d = d_p + d_n = d(U=0) \sqrt{1 - \frac{U}{V_D}} \quad (5.52)$$

Positive Spannungen (in Durchlassrichtung) reduzieren die Breite der Raumladungszone (=Verarmungszone), negative Spannung (Sperrrichtung) vergrößern sie.

Um die Wirkungsweise eines p-n-Übergangs als Diode zu verstehen sind die beteiligten Ströme<sup>10</sup> relevant.

**Rekombinationsstrom  $j^{\text{rec}}$**  Aufgrund des Konzentrationsunterschieds links und rechts der Grenzfläche diffundieren beispielsweise Elektronen aus dem n-dotierten Bereich in den p-dotierten und rekombinieren mit den dort in großer Zahl vorhandenen Löchern. Dieser Strom wird auch *Diffusionsstrom* genannt.

**Generationsstrom  $j^{\text{gen}}$**  Die Raumladungszone bildet einen Kondensator, in dem Ladungsträger beschleunigt werden. Thermisch erzeugte Elektronen im p-dotierten Bereich driften durch das Raumladungs-Feld in Richtung n-dotierten Bereich. Dieser Strom wird auch *Driftstrom* oder *Feldstrom* genannt.

Im thermischen Gleichgewicht sind beide Ströme gleich groß und kompensieren sich gerade  $j_n^{\text{rec}} = j_n^{\text{gen}}$ . Und natürlich kann man genau so mit Löchern argumentieren, so dass es beide Ströme auch mit dem Index  $p$  gibt. Die Gesamt-Ströme sind die Summe der beiden Ladungsträger.

Der Diffusionsstrom fließt entgegen der Raumladungs-Potentialschwelle. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies gelingt, enthält einen Boltzmann-Faktor

$$j_n^{\text{rec}}(U) = a(T) e^{-e(V_D - U)/k_b T} = j_n^{\text{rec}}(0) e^{eU/k_b T} = j_n^{\text{gen}} e^{eU/k_b T} \quad (5.53)$$

Bei angelegter Spannung besteht kein thermisches Gleichgewicht mehr, so

<sup>10</sup> Gross und Marx, 2023 unterscheidet zwei Paare von Strömen: diff & drift sowie gen & rec. Die Vorzeichen sind aber anders definiert: diff + drift = 0 aber gen = rec !

dass  $j_n^{\text{rec}} = j_n^{\text{gen}}$  nicht mehr gilt, sondern

$$j_n(U) = j_n^{\text{rec}}(U) - j_n^{\text{gen}} = j_n^{\text{gen}} \left( e^{eU/k_b T} - 1 \right) \quad , \quad (5.54)$$

beziehungsweise für beide Ladungsträger zusammen

$$j(U) = j_s \left( e^{eU/k_b T} - 1 \right) \quad (5.55)$$

mit dem Sättigungsstrom  $j_s = j_n^{\text{gen}} + j_p^{\text{gen}}$ .

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Ashcroft, Neil W. und N. David Mermin (2013). *Festkörperphysik*. München: Oldenbourg.
- Conwell, Esther M (1952). "Properties of silicon and germanium". In: *Proceedings of the IRE* 40.11, S. 1327–1337. [↗](#)
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#)
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#)
- Johnson, Earnest J. (1967). "Absorption near the Fundamental Edge". In: Hrsg. von R.K. Willardson und Albert C. Beer. Bd. 3. *Semiconductors and Semimetals*. Elsevier, S. 153–258. [↗](#)
- Macfarlane, GG und V Roberts (1955). "Infrared absorption of silicon near the lattice edge". In: *Physical Review* 98.6, S. 1865. [↗](#)

Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [🔗](#).



# Kapitel 6

## Supraleiter

Markus Lippitz  
20. Juni 2023

### Ziele

- Sie können das Konzept der Cooper-Paare im Rahmen der BCS-Theorie benutzen, um grundlegende Eigenschaften von Supraleitern zu erklären.
- Sie können das Konzept der makroskopischen Wellenfunktion benutzen, um die Flussquantisierung und die Quanteninterferenz in Josephson-Kontakten wie unten dargestellt zu beschreiben.



Abbildung 6.1: Quanteninterferenz des Stromes durch zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte ( $\text{Sn}/\text{SnO}_x/\text{Sn}$ ) als Funktion des Magnetfelds  $B$  im supraleitenden Zustand ( $T = 2\text{K}$ ). Daten aus Jaklevic u. a., 1965.

### Überblick

In diesem Kapitel gehen wir einen Schritt zurück in unserer Beschreibung der Festkörper und vernachlässigen Details der Bandstruktur, indem wir wieder von einem quasi-freien Elektronengas ausgehen. Dafür gehen wir dann aber auch einen Schritt weiter, indem wir nun erstmals Korrelationen zwischen Elektronen berücksichtigen. Es wird nicht mehr ausreichen, ein einziges Elektron zu betrachten, sondern 'synchronisierte' Paare von Elektronen werden wichtig werden.

Wir beginnen mit einem Überblick über experimentelle Beobachtungen an Supraleitern, um dann zunächst ein phänomenologisches Modell und schließlich ein mikroskopisches Modell zur Beschreibung einzuführen.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

## Idealer Leiter

Ein Supraleiter ist zunächst einmal ein idealer Leiter, in dem Strom widerstandsfrei fließt. Dies wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes entdeckt. Nachdem ihm 1908 die Verflüssigung von Helium gelungen war, wollte er eigentlich den Grenzwert der Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen untersuchen, analog zu unserem Kapitel 2. Er verwendete sehr reines Quecksilber (Hg) und fand bei 4.2 K einen sprunghaften Übergang zu einem dann von ihm supraleitend genannten Zustand.<sup>1</sup>

Im supraleitenden Zustand ist der Widerstand nicht nur sehr klein, sondern tatsächlich null. Man kann einen Ringstrom in einer geschlossenen Leiterschleife induzieren. Dieser würde mehr als 100 000 Jahre anhalten. Der Widerstand fällt um mehr als 14 Größenordnungen.

Sehr viele Materialien sind supraleitend. Reine Elemente zeigen eine Sprungtemperatur von unter 10 K, Legierungen liegen etwas höher. Oxyde mit vier oder fünf verschiedenen Elementen bilden sogenannte Hochtemperatur-Supraleiter mit einer Sprungtemperatur von bis zu 135 K. Bei sehr hohen Drücken werden noch höhere Werte erreicht.

Auffällig ist, dass gerade 'gute' Metalle keine hohe Sprungtemperatur besitzen. Eher ist die Tendenz so, das schlechte Leiter gute Supraleiter sind.

## Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Supraleiter sind perfekte Diamagnete. Ihr Inneres ist immer frei von einem magnetischen Feld. Dies wurde 1933 von Walter Meißner und Robert Ochsenfeld gefunden, als sie das magnetische Feld um einen supraleitenden Zylinder untersuchten<sup>2</sup>. Dies ist eine Eigenschaft, die über die eines idealen Leiters hinausgeht.

Wir betrachten den durch die Temperatur  $T$  und das Magnetfeld  $B$  aufgespannten Phasenraum. Oberhalb einer gewissen Temperatur  $T_c$  ist das Material normalleitend, darunter entweder supraleitend oder ideal leitend. Wir gehen von Zustand ( $T > T_c; B = 0$ ) zum Zustand ( $T < T_c; B > 0$ ). Dabei können wir aber die Reihenfolge von Temperatur- und Magnetfeld-Änderung vertauschen.

Beim idealen Leiter ist das Magnetfeld im inneren zeitlich konstant. Dies ergibt sich aus dem Induktionsgesetz

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (6.1)$$

weil  $\mathbf{E} = 0$  im Inneren eines idealen Leiter sein muss. Wenn man also zunächst das B-Feld einschaltet und dann die Temperatur reduziert, dann bleibt im Inneren ein Feld. Wenn man es andersherum macht, dann bleibt das Innere feldfrei. Beim Einschalten des B-Feldes wird ein Kreisstrom an der Oberfläche des idealen Leiters induziert, der gerade das B-Feld kompensiert.

Für Supraleiter haben nun Meißner und Ochsenfeld gemessen, dass das Innere immer feldfrei ist<sup>3</sup>, egal welchen der beiden Wege man geht. Für das Magnetfeld  $B_i$  im Inneren gilt also

$$B_i = B_{\text{ext}} + \mu_0 \mathbf{M} = B_{\text{ext}} (1 + \chi) = 0 \quad , \quad (6.2)$$

<sup>1</sup> Zur Geschichte der Helium-Verflüssigung und der Supraleitung siehe Van Delft, 2008 und Van Delft und Kes, 2010.

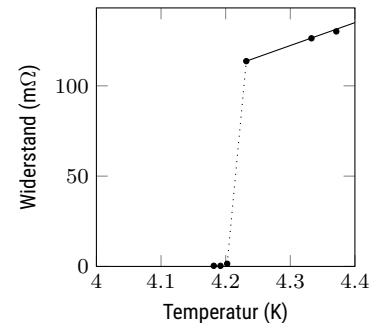


Abbildung 6.2: Sprung des Widerstands von Quecksilber (Hg) beim Übergang in den supraleitenden Zustand. Daten aus Kamerling Onnes, 1911.

<sup>2</sup> Meissner und Ochsenfeld, 1933.

<sup>3</sup> Eigentlich haben sie das Feld außerhalb des Zylinders gemessen und dann auf das innerhalb geschlossen.

also ist die magnetische Suszeptibilität  $\chi = -1$ , Supraleiter also perfekte Diamagnete.

Wir können aus dem Meißner-Ochsenfeld-Effekt weiterhin folgern, dass der supraleitende Zustand ein wirklicher thermodynamischer Zustand ist, also nur von den Zustandsgrößen abhängt und nicht vom Weg dahin.

### Zur Selbstkontrolle

1. Suchen Sie im Internet nach graphischen Darstellungen der Prozessführung im Meissner-Ochsenfeld-Effekt und vergewissern Sie sich, dass alle den gleichen Effekt zeigen, obwohl er etwas anders dargestellt ist.

## Kritisches Magnetfeld

Man beobachtet, dass die Abschirmung des externen Magnetfelds nur bis zu einer gewissen kritischen Feldstärke  $B_c$  gelingt und darüber der supraleitende Zustand zusammenbricht. Es gilt also

$$-\mu_0 \mathbf{M} = \begin{cases} B_{\text{ext}} & \text{falls } B_{\text{ext}} < B_c & \text{supraleitend} \\ 0 & \text{falls } B_{\text{ext}} \geq B_c & \text{normalleitend} \end{cases} \quad (6.3)$$

Für die kritische Feldstärke  $B_c$  findet man empirisch den Zusammenhang

$$B_c(T) = B_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

mit der Sprungtemperatur  $T_c$ .

Typische kritische Magnetfeldstärken reiner Metalle liegen im Bereich von 10 bis 100 mT. Das ist insbesondere für technische Anwendungen sehr wenig. Ein supraleitender Magnet wäre so nicht zu realisieren. Bei Übergangsmetallen und Legierungen findet man allerdings ein anderes Verhalten, das als Typ-II-Supraleitung bezeichnet wird. Dabei tritt eine sogenannte Shubnikov-Phase oder auch Vortex-Phase zwischen dem supraleitenden und normalleitenden Zustand auf. In dieser Phase bilden sich normalleitende Röhren innerhalb des Supraleiters, die das Magnetfeld hindurch leiten. Die eine kritische Feldstärke  $B_c$  wird also durch zwei Feldstärken  $B_{c1}$  und  $B_{c2}$  ersetzt, die die Grenze der Vortex-Phase beschreiben. Solche Typ-II-Supraleiter sind die, die heute technologisch verwendet werden. Zur Beschreibung benutzt man die Ginzburg-Landau-Theorie, auf die wir hier wie auf die Typ-II-Supraleitung insgesamt nicht näher eingehen können.



Abbildung 6.3: Kritisches Magnetfeld für verschiedene Supraleiter (Daten aus Hunklinger, 2014)

## Flussquantisierung

Der von einem supraleitenden Zylinder oder einer supraleitenden geschlossenen Leiterschleife umschlossene magnetische Fluss<sup>4</sup> ist quantisiert. Dies haben 1961 gleichzeitig R. Doll & M. Näbauer in München und B.S. Deaver & W.M. Fairbank in Stanford experimentell gefunden.

In den Experimenten bildete ein Bleifilm auf einem dünnen Quarz-Stäbchen einen supraleitenden Hohlzylinder. Ein axiales Magnetfeld war angelegt während der Zylinder unter die Sprungtemperatur abgekühlt wurde. Danach

<sup>4</sup> Feldstärke pro Fläche

wurde das externe Feld ausgeschaltet. Man beobachtet aber weiterhin ein magnetisches Moment in Zylinderichtung. Dessen Größe kann durch ein Testfeld bestimmt werden. Man findet die Quantisierung des Flusses mit dem Flussquant

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (6.5)$$

Wie wir unten sehen werden stammt die Zwei von den zwei Elektronen, die sich korreliert bewegen.

## Wärmekapazität und Entropie

Die spezifische Wärmekapazität eines Supraleiters weicht deutlich von der eines Normalleiters ab. Für ein gewöhnliches Metall hatten wir gefunden (Gl. 2.22), dass

$$c_V = \gamma T + AT^3 \quad (6.6)$$

mit dem Beitrag der Elektronen proportional zu  $T$  und dem der Phononen proportional zu  $T^3$ . Bei den hier betrachteten niedrigen Temperaturen spielt der Phononen-Beitrag keine Rolle. Aber auch der Elektronen-Beitrag ist anders. Man findet

$$c_V \propto \begin{cases} e^{-\Delta/k_b T} & \text{für } T < T_c \\ T & \text{für } T \geq T_c \end{cases} \quad (6.7)$$

mit einer charakteristischen Energie  $\Delta$ .

Durch Messung von  $dS/dT = c_p$  kann man die Entropie der supraleitenden Phase bestimmen. Man findet einen kleinen Unterschied im Vergleich zur Normalleitenden Phase

$$\Delta S = S_{SC} - S_N < 0 \quad \text{und} \quad |\Delta S| \approx 10^{-4} k_b T / \text{Atom} \quad (6.8)$$

Die supraleitende Phase ist also geordneter als die normalleitende, aber diese Ordnung betrifft nur sehr wenige Elektronen.

## Isotopen-Effekt

Die Sprungtemperatur  $T_c$  hängt vom verwendeten Isotop ab. Solange das chemische Element (im Beispiel Zinn) das gleiche bleibt, ändert sich die elektronische Struktur nicht, sondern nur die Masse des Atomkerns und damit die Frequenz der Gitterschwingungen. Man findet

$$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \propto \omega_{\text{Debye}} \quad (6.9)$$

## London-Modell

Als erstes Modell zur Erklärung der Supraleitung besprechen wir hier das London-Modell, das 1935 von Fritz und Heinz London aufgestellt wurde<sup>5</sup>. Die Idee ist, die Maxwell-Gleichungen beizubehalten und nur die Materie-Gleichungen so zu modifizieren, dass sie den verschwindenden Widerstand und den perfekten Diamagnetismus erklären können.

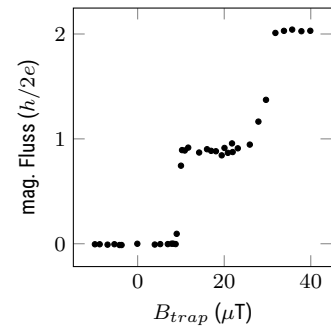


Abbildung 6.4: Flussquantisierung in einem supraleitenden Blei-Zylinder (Doll und Näbauer, 1961).

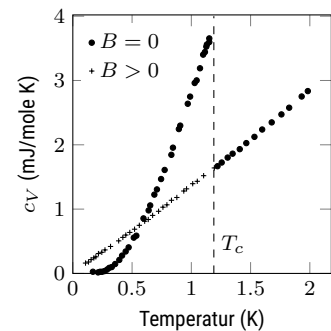


Abbildung 6.5: Wärmekapazität von Al. Durch das Magnetfeld kann der supraleitende Zustand unterdrückt werden, so dass das normalleitende Verhalten sichtbar wird (Phillips, 1959).

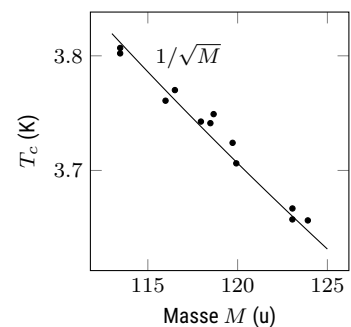


Abbildung 6.6: Isotopen-Effekt: Variation der kritischen Temperatur mit der Atommasse. Angegeben ist die mittlere Masse eines Isotopengemisches von Zinn (Sn). (Daten aus Hunklinger, 2014).

<sup>5</sup> F. London und H. London, 1935.

Für normal-leitende Materie haben wir die Materie-Gleichungen

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad . \quad (6.10)$$

Das Postulat ist nun<sup>6</sup>, dass in Supraleitern gilt

<sup>6</sup> siehe Anhang H.3 in Singleton, 2001

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{A} \quad (6.11)$$

mit dem Vektorpotential<sup>7</sup>  $\mathbf{A}$  und der London-Länge

<sup>7</sup> mit  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$\lambda^2 = \frac{m_s}{n_s \mu_0 q_s^2} \quad . \quad (6.12)$$

Wie wir unten sehen werden sind es nicht direkt die Elektronen, die zur Supraleitung führen. Daher sind hier alle Größen mit dem Index 's' versehen, um die supraleitenden Teilchen zu kennzeichnen.

Die zeitliche Ableitung der Stromdichte ist dann<sup>8</sup>

<sup>8</sup> siehe Gross und Marx, 2023 oder Czycholl, 2017

$$\mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad . \quad (6.13)$$

Dies ist die 1. London-Gleichung. Nicht mehr die Stromdichte, sondern ihre erste Ableitung ist proportional zum elektrischen Feld. Ohne Feld fließt also weiterhin Strom. Das ist Supraleitung.

Die Rotation der Stromdichte ist mit dem Magnetfeld verknüpft

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B} \quad . \quad (6.14)$$

Dies ist die 2. London-Gleichung.

Unter Zuhilfenahme der Maxwell-Gleichungen und ein paar weiteren Umformungen<sup>9</sup> findet man für das magnetische Feld

<sup>9</sup> siehe Singleton, 2001 Anhang H.3

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad . \quad (6.15)$$

Betrachten wir dazu eine Grenzfläche zwischen Normalleiter ( $x < 0$ ) und Supraleiter ( $x > 0$ ) bei einem in z-Richtung orientierten Magnetfeld. Im Normalleiter sei das Feld homogen  $\mathbf{B}_0$ . Im Supraleiter ist die Lösung von Gl.6.15 dann

$$\mathbf{B}(x > 0) = \mathbf{B}_0 e^{-x/\lambda} \quad . \quad (6.16)$$

Das Magnetfeld fällt also im Supraleiter mit der London-Länge (auch London'sche Eindringtiefe) ab. Das Innere eines Supraleiters ist feldfrei, wie es der Meissner-Ochsenfeld-Effekt zeigt. Typische Werte von  $\lambda$  liegen im Bereich von 10 bis einige 100 nm.

## Cooper-Paare

Die phänomenologische London-Theorie macht keine Aussage über die mikroskopische Begründung für die geänderte Materiegleichung. Dies kommt erst 1957 mit der BCS-Theorie, nach J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer. Ein zentraler Bestandteil der Theorie sind Cooper-Paare. Hier geben wir nun sowohl die Ein-Elektron-Näherung auf, weil wir zwei korrelierte Elektronen betrachten. Wir verlassen auch die Born-Oppenheimer-Näherung, weil Elektron-Phonon-Wechselwirkungen wichtig werden.

In einem Gedankenexperiment starten wir von einem freien Elektronengas bei  $T = 0$ . Es sind also alle Zustände für Elektronen bei Energien unterhalb der Fermi-Energie  $E_F$  besetzt, bzw. alle Zustände im reziproken Raum innerhalb der Fermi-Kugel mit dem Radius  $k_F$ . Dann fügen wir zwei weitere, aber besondere Elektronen hinzu. Zwischen diesen beiden besonderen Elektronen soll eine schwach attraktive Wechselwirkung bestehen. Der Isotopen-Effekt (Abb. 6.6) liefert die Begründung dazu, dass diese Wechselwirkung über Phononen erfolgt.

Ein anschauliches Bild ist folgendes: ein Elektron bewegt sich durch den Kristall aus positiven Ionen. Diese werden leicht angezogen und im Kielwasser des Elektrons entsteht eine etwas erhöhte Dichte an Atom-Rümpfen. Diese etwas höhere Ladung wirkt dann anziehend auf das zweite Elektron. Der Abstand der beiden Elektronen ist durch die Zeit bestimmt, die die Atom-Rümpfe brauchen, um sich zu bewegen, also die Phonon-Frequenz. Typische Werte sind eben in der Größe von 100 nm, wie die London-Länge, und so groß, dass die Coulomb-Abstoßung der Elektronen nicht ins Gewicht fällt.

Jenseits des anschaulichen Bildes kann man die Wechselwirkung als Austausch<sup>10</sup> von virtuellen Phononen mit dem Wellenvektor  $q$  modellieren. Vor dem Austausch haben die beiden Elektronen die Wellenvektoren  $k_1$  und  $k_2$ , nach dem Austausch  $k_1 + q$  und  $k_2 - q$ . Der Gesamtimpuls bleibt also erhalten. Wir sind weiterhin am absoluten Temperatur-Nullpunkt und alle Zustände unterhalb  $E_F$  durch die 'anderen' Elektronen besetzt. Die beiden besonderen Elektronen können also nur Zustände im Bereich  $E_F$  und  $E_F + \hbar\omega_D$  annehmen. Im reziproken Raum entspricht das einer Kugelschale zwischen  $k_F$  und  $k_F + m\omega_D/(\hbar k_F)$ . Der Überlapp zwischen den Kugelschalen der beiden Elektronen bestimmt also die Stärke der Wechselwirkung und die Energieabsenkung. Maximale Absenkung erhalten wir, wenn die Mittelpunkte der Kugelschalen übereinstimmen, also

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \quad . \quad (6.17)$$

Ein Cooper-Paar wird aus zwei Elektronen gebildet, deren Wellenvektoren sich gerade gegenüberstehen. Unser anschauliches Bild der beiden hintereinander fliegende Elektronen ist also nicht ganz richtig. Die Paare bilden sich im Impulsraum, nicht im Ortsraum.

Durch die attraktive Wechselwirkung wird die Energie des Paares um den Betrag  $\Delta$  gegenüber den Einzel-Energien abgesenkt. Die Energie eines Cooper-Paares ist also ungefähr

$$E \approx 2E_F - \Delta \quad . \quad (6.18)$$

Mit ein paar Annahmen über die Wechselwirkung kann man ausrechnen<sup>11</sup>, dass die Energie-Absenkung  $\Delta$

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-2/D(E_F)V_0} \quad (6.19)$$

beträgt.  $V_0$  beschreibt die Stärke der Elektron-Phonon-Wechselwirkung und  $D(E_F)$  die Zustandsdichte an der Fermi-Kante.

Ein Cooper-Paar besteht aus zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin, die zu einem Gesamtspin  $S = 0$  kombinieren. Von außen gesehen ist ein Cooper-Paar ein Boson, auch wenn es aus zwei Fermionen aufgebaut ist.

<sup>10</sup> siehe Austausch-Boson-Modell in der Kernphysik



Abbildung 6.7: Der Austausch eines Phonons ist möglich im Überlapp der Ringe. Dieser wird maximal, wenn  $\mathbf{K} = 0$ .

<sup>11</sup> siehe Hunklinger, 2014 oder Gross und Marx, 2023. Gross diskutiert auch den manchmal auftretenden Unterschied im Faktor 2 (oder 4) im Exponenten.

## Kondensation von Cooper-Paaren

Die Unterscheidung zwischen 'normalen' Elektronen und 'wechselwirkenden' Elektronen im letzten Abschnitt ist natürlich nur ein Gedankenexperiment. In Wirklichkeit wirkt die Elektron-Phonon-Wechselwirkung bei allen Elektronen. Für alle Elektronen im Abstand  $\Delta$  zur Fermi-Kante ist es energetisch sinnvoller, Cooper-Paare zu bilden. Die noch tieferliegenden nehmen nicht teil, weil für sie keine Zielzustände beim Phononen-Austausch vorhanden sind.

Da Cooper-Paare Bosonen sind, sind bei einer Streuung Ziel-Zustände um so mehr bevorzugt, um so stärker sie besetzt sind.<sup>12</sup> Das nennt man Kondensation. Immer mehr Cooper-Paare kommen zusammen, wenn man die Wechselwirkung einschaltet oder unter die Sprungtemperatur geht. Das ist völlig analog zur Bose-Einstein-Kondensation von kalten Atomen oder zur stimulierten Emission von Photonen (ebenfalls Bosonen) im Laser.

Das Kondensat von Cooper-Paaren wird durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben, den BCS-Grundzustand. Ich will hier nicht auf die Konstruktion der Wellenfunktion eingehen<sup>13</sup>, sondern sie nur allgemein schreiben als

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n} e^{i\Theta(\mathbf{r})} \quad (6.20)$$

mit der überall konstanten Dichte  $n = \langle \psi | \psi \rangle$  an Cooper-Paaren und der Phase  $\Theta(\mathbf{r})$ . Die Gesamtenergie reduziert sich bei der Kondensation um

$$E_{\text{Kondensat}} = -\frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2 \quad (6.21)$$

<sup>12</sup> ganz im Gegenteil zu Fermionen

<sup>13</sup> Siehe dazu Gross und Marx, 2023

## Fluss-Quantisierung

Die gemeinsame Wellenfunktion für alle Cooper-Paare kann die Quantisierung des magnetischen Flusses in einem supraleitenden Ring erklären. Dazu berechnen wir erst den elektrische Strom  $\mathbf{j}$  von Cooper-Paaren (=2 Elektronen) der Ladung  $q_s = -2e$  und Masse  $m_s = 2m_e$  als Erwartungswert des Geschwindigkeits-Operators

$$\mathbf{j} = \frac{q_s}{m_s} \langle \psi | \hat{\mathbf{v}} | \psi \rangle \quad (6.22)$$

mit

$$\hat{\mathbf{p}} = m_s \hat{\mathbf{v}} + q_s \mathbf{A} \quad \text{also} \quad m \hat{\mathbf{v}} = -i\hbar \nabla - q_s \mathbf{A} \quad (6.23)$$

Damit erhalten wir alles zusammen<sup>14</sup>

$$\lambda^2 \mu_0 \mathbf{j} = \frac{\hbar}{q_s} \nabla \Theta(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \quad (6.24)$$

<sup>14</sup> Der Gradient liefert das  $i$ , das sich somit aufhebt.

mit der London-Länge  $\lambda^2 = m/(n\mu_0 q)$  wie oben. Von hier kommt man also zur London-Theorie zurück. Eine makroskopische Wellenfunktion ist dazu ausreichend.

Nun betrachten wir einen supraleitenden Torus, der von einem Magnetfeld durchsetzt ist. Das Innere des Supraleiters ist frei von Feldern und Strömen,

also ist Gl. 6.24 Null und wir schreiben

$$\hbar \nabla \Theta(\mathbf{r}) = q_s \mathbf{A} \quad (6.25)$$

$$\hbar \oint \nabla \Theta(\mathbf{r}) = q_s \oint \mathbf{A} \quad (6.26)$$

$$\hbar(\Theta_2 - \Theta_1) = q_s \int \mathbf{B} \quad (6.27)$$

$$\hbar 2\pi s = q_s \Phi \quad s \in \mathbb{N} \quad , \quad (6.28)$$

wobei wir im zweiten Schritt den Satz von Stokes ausgenutzt haben und im dritten, dass  $|\Psi|$  nach einem Umlauf in Kreis eindeutig definiert sein muss, sich die Phase also nur um  $2\pi$  unterscheiden darf. Damit bekommen wir die Flussquantisierung ( $q_s = -2e$ )

$$\Phi = \frac{\hbar}{2e} s = s \Phi_0 \quad . \quad (6.29)$$

## Zustandsdichte

Die Zustandsdichte freier Elektronen in einem Normal-Leiter ist  $D_{NL} \propto \sqrt{E}$ . Weil aber der hier interessierende Energiebereich nur wenige meV um die Fermi-Energie beträgt, können wir  $D_{NL}$  als konstant annehmen. Welche Form hat die Zustandsdichte in einem Supraleiter? Dabei müssen wir aufpassen, welche Teilchen wir betrachten. Cooper-Paare bestehen aus zwei korrelierten Elektronen. Diese können wir nicht direkt mit einzelnen Elektronen vergleichen.<sup>15</sup> Wir sprechen von Einteilchen- und Zweiteilchen-Zustandsdichten.

Die Zweiteilchen-Zustandsdichte hat zunächst einen deltaförmigen Zustand an der BCS-Grundzustandsenergie, in dem sich alle Cooper-Paare befinden. Wenn man ein Cooper-Paar anregt, dann wird es zerstört. Es bleibt ein Elektron des Cooper-Paars zurück, jetzt zusammen mit einem Loch. Diese Elektron-Loch-Zweiteilchen nennt man manchmal Bogolonen<sup>16</sup>. Ein weiteres Bogolon entsteht aus dem angeregten Elektron. Die Mindest-Energie zur Anregung eines Cooper-Paares, bzw. zur Erzeugung eines Bogolon aus einem Cooper-Paar, ist gerade die Bindungsenergie  $\Delta$ . Näher an der Fermi-Energie ist kein Zustand für das angeregte Elektron frei.

Durch die Supraleitung darf sich die Summe der Zustände nicht ändern. Damit ergibt sich für die Bogolonen

$$D_{SL}(E_k) = \begin{cases} D_{NL} \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta^2}} & \text{für } E_k > \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.30)$$

mit der Zweiteilchen-Energie  $E_k$ . Die Cooper-Paare sind in dieser Darstellung eine Delta-Funktion bei  $E_k = 0$  (rot in Abb. 6.30).

Wenn man darauf verzichtet, die Cooper-Paare einzuzichnen, dann kann man auch eine Einteilchen-Zustandsdichte zeichnen, die dann eine Lücke im Bereich  $E_F - \Delta$  bis  $E_F + \Delta$  besitzt und außerhalb analog zu Gl. 6.30 verläuft.

<sup>15</sup> Die Wellenfunktion ist entweder eine Funktion von einer oder von zwei Ortskoordinaten

<sup>16</sup> Kopitzki, 2017.

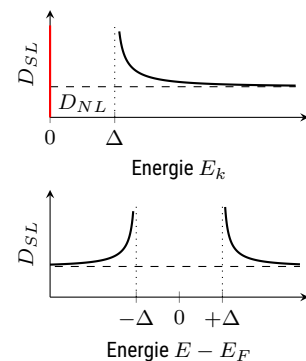


Abbildung 6.8: Zustandsdichten eines Supraleiters im Zweiteilchen-Modell (oben) und im Einteilchen-Modell (unten).



## Kritische Temperatur, Strom, Magnetfeld

Sobald wir nicht mehr am absoluten Nullpunkt der Temperatur sind, existieren Cooper-Paare und Bogolonen gleichzeitig. Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte der Cooper-Paare ab. Je weniger Cooper-Paare es aber gibt, desto schlechter ist die Kondensation, und die Energieabsenkung pro Paar wird geringer.  $\Delta$  wird temperaturabhängig. Man findet durch numerisches Lösen einer nichtlinearen Differentialgleichung<sup>17</sup> für  $T \approx T_c$

<sup>17</sup> Gross und Marx, 2023.

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(T=0)} \approx 1.74 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \quad (6.31)$$

und einen Zusammenhang zwischen kritischer Temperatur und Bandlücke bei  $T = 0$

$$2\Delta(0) = 3.52 k_b T_c \quad (6.32)$$

Ebenso bricht die Supraleitung zusammen, wenn der Strom im Supraleiter zu groß wird. Sobald die kinetische Energie der Cooper-Paare die durch die Kondensation gewonnene Energie (Gl. 6.21) übersteigt, lösen sich die Cooper-Paare selbst auf. Dann wird die kritische Geschwindigkeit  $v_c$  erreicht, bei der

$$E_{\text{kin}} = n_s \frac{m_s v_c^2}{2} = |E_{\text{Kondensat}}| = \frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2 \quad (6.33)$$

Der zugehörige kritische Strom ist

$$j_c = -n_s q_s v_c = \frac{\sqrt{6} e n_s}{\hbar k_F} \Delta \quad (6.34)$$

wobei wir  $D(E_F)$  durch  $k_F$  ausgedrückt haben. Dieser kritische Strom produziert ein Magnetfeld an der Oberfläche des Drahtes ( $R \gg \lambda$ ), wodurch wir eine kritische Feldstärke erhalten von<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Hunklinger, 2014.

$$B_c = \mu_0 \lambda j_c \propto \Delta \quad (6.35)$$

Die Bandlücke  $\Delta$  des Supraleiters in der BCS-RTheorie ist also ausreichend, um alle obengenannten kritischen Temperaturen, Ströme und Magnetfelder zu erklären.

## Tunneln von Elektronen

Die Zustandsdichte in der Nähe des Fermi-Niveaus und insbesondere die Lücke darin lässt sich sehr elegant durch die Tunnelspektroskopie untersuchen. Dazu benötigt man einen Tunnel-Kontakt zwischen zwei Leitern. Technisch einfach geht das, wenn man erst einen Streifen des ersten Materials aufdampft, dann einen dünnen (wenige nm) Isolator, und dann quer dazu einen Streifen des anderen Materials. So kann man beide Streifen einzeln kontaktieren, eine Potentialdifferenz  $U$  über den Isolator anlegen und einen Tunnel-Strom  $I$  fließen lassen. Man misst dann den Strom als Funktion der angelegten Potentialdifferenz.

Mikroskopisch gesehen verschiebt die Spannung  $U$  die Fermi-Niveaus rechts und links der Tunnel-Barriere gegeneinander. Dadurch kommen besetzte Niveaus auf der einen Seite energetisch auf die gleiche Höhe wie

unbesetzte Niveaus auf der anderen Seite. In diesem Fall können die Elektronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere tunneln und ein Strom fließt. Der Strom ist also das Integral über die gegeneinander verschobenen Zustandsdichten multipliziert mit ihrer jeweiligen Besetzung

$$I_{L \rightarrow R} \propto \int D_L(E) f(E) D_R(E + eU) [1 - f(E + eU)] dE \quad (6.36)$$

Genauso kann auch ein Strom von rechts nach links fließen, so dass der Netto-Strom die Differenz der beiden ist:

$$I \propto \int D_L(E) D_R(E + eU) [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.37)$$

Üblicherweise ist  $eU \ll E_F$ , und bei Normalleitern kann die Zustandsdichte im relevanten Energiebereich als konstant angesehen werden, also  $D_n(E_F) \approx D_n(E_F + eU)$ . Damit erhalten wir

$$I_{nn} \propto D_n(E_F) D_n(E_F) eU = G_{nn} U \quad (6.38)$$

Das ist ein Ohm'scher Verlauf mit dem konstanten Leitwert  $G_{nn}$  zwischen zwei Normalleitern.

Nun ersetzen wir einen der beiden Normalleiter durch einen Supraleiter mit der Zustandsdichte nach Gl. 6.30. Der Strom ist dann

$$I_{ns} \propto D_n(E_F) D_s(E_F) \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.39)$$

$$= \frac{G_{nn}}{e} \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.40)$$

Wir betrachten wieder den Leitwert, hier  $G_{ns}$

$$G_{ns} = \frac{dI_{ns}}{dU} = G_{nn} \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} \left[ -\frac{\partial f(E + eU)}{\partial(eU)} \right] dE \quad (6.41)$$

$$\approx G_{nn} \frac{D_s(eU)}{D_n(E_F)} = G_{nn} \Re \left\{ \frac{eU}{\sqrt{(eU)^2 - \Delta^2(eU)}} \right\} \quad (6.42)$$

Der Term in eckigen Klammern ist ähnlich einer Delta-Funktion bei  $eU$  mit einer Breite  $4k_b T$  und Fläche Eins und löst so das Integral auf. Im zweiten Schritt haben wir  $T \rightarrow 0$  angenommen. Der Leitwert beim Tunnel, also  $dI/dU$ , liefert somit bei tiefen Temperaturen direkt die Zustandsdichte, ggf. ausgeschmied mit  $2k_b T$ .

## Josephson-Effekt

Nun liegt es nahe, auch zwei Supraleitern durch einen Tunnelkontakt zu verbinden und dann nicht Elektronen, sondern Cooper-Paare tunneln zu lassen, wenn die Barriere dünn genug ist<sup>19</sup>. Dabei müssen wir dann aber die makroskopische Wellenfunktion berücksichtigen. Wir nehmen an, dass beide Supraleiter identisch sind. Jede Seite ( $i = 1, 2$ ) wird beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\Psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\Theta_i} \quad (6.43)$$

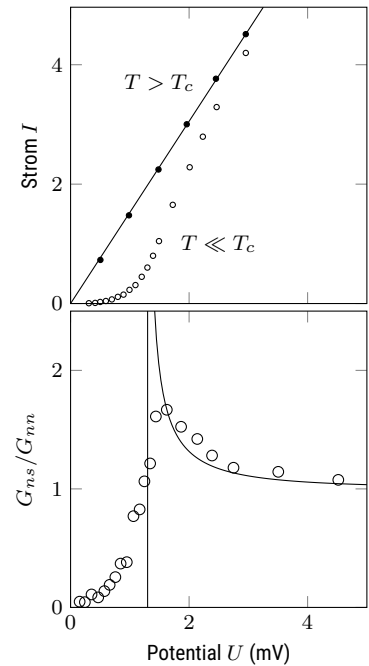


Abbildung 6.9: Tunnelstrom durch einen Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Pb - Tunnelkontakt bei 4.2K bzw 1.6K. Im zweiten Fall ist Pb supraleitend.  $dI/dU$  ist proportional zur Zustandsdichte, ausgeschmied mit  $k_b T$  (Giaever, 1960).

<sup>19</sup> Nobelpreis Brian David Josephson 1973

In der Schrödinger-Gleichung gibt es einen schwachen Kopplungsterm  $T$ , der die Wellenfunktionen nicht wesentlich ändern soll, so dass wir Störungstheorie betreiben können:

$$i\hbar\dot{\Psi}_1 = E_1\Psi_1 + T\Psi_2 \quad (6.44)$$

$$i\hbar\dot{\Psi}_2 = E_2\Psi_2 + T\Psi_1 \quad (6.45)$$

Die Potentialdifferenz über die Tunnelbarriere verschiebt die Energie-Eigenwerte, also  $E_2 - E_1 = eU$ . Das setzen wir alles ein und separieren nach Real- und Imaginärteil. Wir erhalten mit der Phasendifferenz  $\delta = \Theta_2 - \Theta_1$

$$\dot{n}_1 = \frac{2T}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\delta) \quad (6.46)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{2T}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\delta) \quad (6.47)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{T}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\delta) - \frac{E_1}{\hbar} \quad (6.48)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{T}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\delta) + \frac{E_2}{\hbar} \quad (6.49)$$

Die Differenz der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$\hbar\dot{\delta} = \hbar(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) = -(E_2 - E_1) = 2eU \quad (6.50)$$

Nehmen wir zunächst an, dass keine Potentialdifferenz  $U$  über die Barriere besteht. Damit wird die Phasendifferenz  $\delta$  zeitlich konstant und  $\dot{n}_1 = -\dot{n}_2$ . Es fließt ein Suprastrom (Strom von Cooper-Paaren), ohne dass ein Potential an der Barriere abfällt. Der Strom hängt periodisch von der Phasendifferenz der beiden makroskopischen Wellenfunktionen ab:

$$J_s(\delta) = J_c \sin \delta \quad (6.51)$$

Die Maximalstromstärke  $J_c$  ist durch die Stärke  $T$  des Tunnelkontakts gegeben. Dies ist der Josephson-Gleichstrom-Effekt. Die gemessene Stromstärke wird durch die Stromquelle bestimmt. Diese stellt also die Phasendifferenz  $\delta$  ein.

Nun erhöhen wir die externe Spannung und die Phasendifferenz  $\delta$  wird zeitabhängig:

$$\delta(t) = \frac{2eU}{\hbar}t + \delta(0) = \omega_J t + \delta(0) \quad (6.52)$$

Der Strom ist nun kein Strom von Cooper-Paaren mehr, sondern von Bogolonen, also unkorrelierten Elektronen-Paaren. Durch die kontinuierlich laufende Phase oszilliert nun via Gl. 6.51 der Strom

$$J_s(t) = J_c \sin(\omega_J t + \delta(0)) \quad (6.53)$$

Dies ist der Josephson-Wechselstrom-Effekt. Die auftretenden Frequenzen sind sehr hoch. Bei 100  $\mu\text{V}$  werden Frequenzen von 50 GHz erreicht. Dadurch kann man einerseits  $e/h$  bestimmen, andererseits kann man Spannung sehr genau über eine Frequenzmessung bestimmen. In Abb. 6.10 ist die Zeitaufösung des Amperemeters viel zu gering, so dass nur der Mittelwert Null gemessen wird.

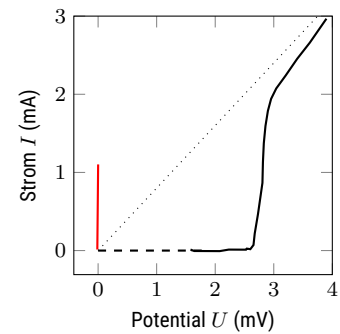


Abbildung 6.10: Strom durch einen Pb/PbO<sub>x</sub>/Pb Tunnelkontakt. Bei  $U = 0$  Suprastrom aus Cooper-Paaren (rot), bei  $U > 0$  Strom aus unkorrelierten Elektronen (Bogolonen) (Daten aus Langenberg, Scalapino und B. Taylor, 1966)

## Quanteninterferenz

Nun schalten wir zwei Josephson-Kontakte parallel: zwischen den Kontakten 1 und 2 gibt es zwei supraleitenden Pfade, je über die Tunnelkontakte A und B. Uns interessiert der (Tunnel-) Strom zwischen 1 und 2. Gleichzeitig durchsetzt ein Magnetfeld die so gebildete Leiterschleife.

Sei  $\delta_A$  der Phasenunterschied der makroskopischen Wellenfunktion der Cooper-Paare auf dem Pfad 1–A–2, und  $\delta_B$  analog über Tunnelkontakt B. Dann ist die Phasendifferenz entlang des geschlossenen Kreises 1–A–2–B–1  $\delta_A - \delta_B$  und die Flussquantisierung verlangt

$$\delta_A - \delta_B = \frac{2e}{\hbar} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (6.54)$$

mit dem magnetischen Fluss  $\Phi$  durch die Schleife. Damit können wir jede der beiden Phasen schreiben als

$$\delta_{A,B} = \delta_0 \pm \frac{e}{\hbar} \Phi = \delta_0 \pm \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (6.55)$$

mit einer mittleren Phase  $\delta_0$ . Der Gesamtstrom durch dieses Konstrukt ist nun die Summe der Ströme über die Tunnelkontakte A und B, wie im letzten Abschnitt, also

$$I = I_A + I_B = J_c (\sin \delta_A + \sin \delta_B) = 2J_c \sin \delta_0 \cos \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right) \quad (6.56)$$

Die Oszillationen im Strom zählen also die Flussquanten in der Schleife.

Abbildung 6.1 am Anfang des Kapitels zeigt ein Beispiel.

Diese Anordnung nennt man 'superconducting quantum interference device' (SQUID). Sie wird zur sehr empfindlichen Messung von Magnetfeldern benutzt, beispielsweise in der Medizin (Hirnströme!) oder der Archäologie.

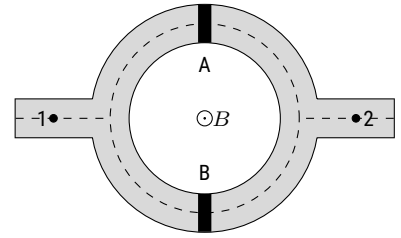


Abbildung 6.11: Zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Czycholl, Gerd (2017). *Theoretische Festkörperphysik, Band 2*. 4. Aufl. Springer. [↗](#).
- Doll, Robert und M Näbauer (1961). "Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring". In: *Phys. Rev. Lett.* 7.2, S. 51. [↗](#).
- Giaever, Ivar (1960). "Energy gap in superconductors measured by electron tunneling". In: *Phys. Rev. Lett.* 5.4, S. 147. [↗](#).
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#).
- Jaklevic, RC u. a. (1965). "Macroscopic quantum interference in superconductors". In: *Physical Review* 140.5A, A1628. [↗](#).
- Kamerling Onnes, Heike (1911). "Further experiments with Liquid Helium – VI. On the Sudden Change in the Rate at which the Resistance of Mercury Disappears." In: *Leiden Communications* 124c, S. 267–271.
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [↗](#).
- Langenberg, DN, DJ Scalapino und BN Taylor (1966). "Josephson-type superconducting tunnel junctions as generators of microwave and submillimeter wave radiation". In: *Proceedings of the IEEE* 54.4, S. 560–575. [↗](#).

- London, Fritz und Heinz London (1935). "The electromagnetic equations of the supraconductor". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 149.866, S. 71–88. [↗](#).
- Meissner, Walther und Robert Ochsenfeld (1933). "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit". In: *Naturwissenschaften* 21.44, S. 787–788. [↗](#).
- Phillips, Norman E (1959). "Heat capacity of aluminum between 0.1 K and 4.0 K". In: *Physical Review* 114.3, S. 676. [↗](#).
- Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.
- Van Delft, Dirk (2008). "Little cup of helium, big science". In: *Physics Today* 61.3, S. 36–42. [↗](#).
- Van Delft, Dirk und Peter Kes (2010). "The discovery of superconductivity". In: *Physics today* 63.9, S. 38–43. [↗](#).

# Kapitel 7

## Magnetismus

Markus Lippitz  
26. Juni 2023

### Ziele

- Sie können die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung und magnetische Ordnungsphänomene durch mikroskopische Modelle erklären.
- Sie können diese Modelle benutzen, um beispielsweise die unten gezeigten Beugungsmuster zu erklären.



Abbildung 7.1: Neutronenstreuung an MnO, das bei tiefen Temperaturen antiferromagnetisch ist, bei Raumtemperatur paramagnetisch. Die der kristallographischen Bezeichnung der Peaks zugrundeliegende Gitterkonstante ist  $a_0 = 8.85 \text{ \AA}$  bei 80 K, und  $4.43 \text{ \AA}$  bei Raumtemperatur. Daten aus Shull, Strauser und Wollan, 1951.

### Überblick

In diesem Kapitel soll Magnetismus mikroskopisch beschrieben werden, also unter Bezug auf die atomare Struktur der Materie. Die Maxwell-Gleichungen beschreiben auch Magnetismus, allerdings rein makroskopisch. Wie schafft es eine Ansammlung von Atomen, mal diamagnetisch, mal paramagnetisch, mal ferromagnetisch zu sein, je nach Element und Temperatur? Wir beginnen mit einem Rückblick auf die makroskopische Beschreibung und auf magnetische Momente in Atomen. Auf diese aufbauend werden wir zunächst Dia- und Paramagnetismus in Isolatoren und Metallen beschreiben. In diesen Fällen verhält sich ein Festkörper beinahe wie ein Ensemble von Atomen. Es gibt keine Wechselwirkung der magnetischen Momente untereinander, nur die Elektronen formen in Metallen Bänder. Im zweiten Teil erlauben wir



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

dann Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten, was zu räumlicher Ordnung in der Orientierung der Momente führen wird. Dies ist Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus.

## Makroskopische Beschreibung

Makroskopisch, also ohne die atomare Struktur der Materie zu berücksichtigen, kann man Magnetismus über die Maxwell-Gleichungen beschreiben. Es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (7.1)$$

mit der magnetischen Flussdichte<sup>1</sup>  $\mathbf{B}$ . Das Integral ist ein Oberflächenintegral über eine geschlossene Oberfläche mit dem Flächenelement  $d\mathbf{S}$ . Es gibt also keine magnetischen Monopole. Magnetischer Fluss geht von Dipolen aus. Über die Materie-Gleichungen besteht ein Zusammenhang mit dem Magnetfeld  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.2)$$

im Vakuum, mit der magnetischen Permeabilität  $\mu_0$ . In Materie wird dies

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_0 (1 + \chi) \quad (7.3)$$

mit der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  und der (magnetischen) Suszeptibilität  $\chi$ . Das Ziel dieses Kapitels ist es, mikroskopische Modelle für den Verlauf von  $\chi(\mathbf{B})$  zu finden.

<sup>1</sup> Die Nomenklatur Flussdichte  $\mathbf{B}$  und Magnetfeld  $\mathbf{H}$  ist historisch bedingt. Ich habe die Tendenz, auch  $\mathbf{B}$  Magnetfeld zu nennen, oder gleich B-Feld.

## Magnetisches Dipol-Moment

Magnetische Dipole sind die Quelle von magnetischem Fluss. Makroskopisch entstehen magnetische Dipole beispielsweise durch Strom in einer Leiterschleife:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2} \int_{\text{Schleife}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = I\mathbf{S} \quad (7.4)$$

mit dem Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$ , dem Strom  $I$  und der Fläche<sup>2</sup>  $\mathbf{S}$  der Leiterschleife. Die Ladungsträger besitzen eine Masse. Daher ist der Stromfluss durch die Schleife mit einem Drehimpuls  $\mathbf{L}$  verknüpft und wir können das Dipolmoment schreiben als

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad (7.5)$$

mit dem gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$ , das für Elektronen natürlich negativ ist.

Wir können auch die Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom als Leiterschleife auffassen. Sei der Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  quantisiert und in einem p-Zustand

$$|\mathbf{L}| = m_e \omega r^2 = \hbar \quad (7.6)$$

mit der Umlauffrequenz  $\omega$  und dem Bahnradius  $r$ . Der Strom ist in diesem Bild

$$I = \frac{-e}{T} = -e \frac{\omega}{2\pi} \quad (7.7)$$

<sup>2</sup> inkl. Richtung der Flächen-Normalen



mit der Umlaufzeit  $T$ . Alles zusammen ergibt das ein magnetisches Dipolmoment

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{-e}{2m_e} |\mathbf{l}| = -\frac{e\hbar}{2m_e} = -\mu_B \quad (7.8)$$

mit dem *Bohrschen Magneton*  $\mu_B \approx 5.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$ .

Damit können wir das (makroskopische) gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$  verknüpfen mit den (mikroskopischen) Bohrschen Magneton

$$\gamma = g \frac{\mu_B}{\hbar} \quad (7.9)$$

mit dem einheitenfreien Landé-g-Faktor. Für den Bahndrehimpuls eines Elektrons ist  $g_l = 1$ , für den Elektronen-Spin  $g_s \approx 2$ .

Die Kombination von magnetischem Moment und Drehimpuls ist der Grund für die Präzession. Die Energie  $E$  eines magnetischen Dipols  $\boldsymbol{\mu}_m$  im Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ist analog zur Energie eines elektrischen Dipols  $\boldsymbol{\mu}_e$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$

$$E = -\boldsymbol{\mu}_m \cdot \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad E = -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{E} \quad (7.10)$$

Ebenso wirkt auf beide Dipole ein Drehmoment  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}_m \times \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}_e \times \mathbf{E} \quad (7.11)$$

Aber im elektrischen Fall dreht dieses Drehmoment den Dipol einfach in Richtung der Feldlinien, und minimiert so die Energie. Bei einem magnetischen Dipol wirkt aber der assoziierte Drehimpuls

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{G} \quad (7.12)$$

so dass

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_m}{dt} = \gamma \boldsymbol{\mu}_m \times \mathbf{B} \quad (7.13)$$

Die Richtung des magnetischen Dipolmoments ändert sich senkrecht zu  $\boldsymbol{\mu}_m$  und  $\mathbf{B}$ . Dies entspricht einer Kreisbewegung der Spitze von  $\boldsymbol{\mu}_m$  um die Richtung, die durch  $\mathbf{B}$  vorgegeben ist, eben der Präzession.

## Klassifizierung

Wir unterscheiden verschiedene mikroskopischen Ursachen für Magnetismus:

**Diamagnetismus** Ohne äußeres Magnetfeld zeigen diamagnetische Materialien kein magnetisches Moment. Wenn man dann ein Feld anlegt, dann wirkt die induzierte Magnetisierung dem externen Feld entgegen. Die induzierten Momente sind entgegen dem externen Feld ausgerichtet. Die magnetische Suszeptibilität ist negativ

$$\chi_{\text{dia}} < 0 \quad (7.14)$$

Diamagnetismus tritt in allen Materialien auf, weil er durch die gebundenen (Isolatoren) und freien (Metalle) Elektronen verursacht wird. Er ist allerdings ein schwacher Effekt, so dass die folgenden dominieren können.

**Paramagnetismus** In paramagnetischen Materialien gibt es permanent vorhandene magnetische Dipolmomente, ebenfalls wieder aufgrund der gebundenen oder freien Elektronen. Ein externes Magnetfeld richtet diese Dipolmomente in Richtung des Feldes aus, so dass die magnetische Suszeptibilität positiv ist

$$\chi_{\text{para}} > 0 \quad . \quad (7.15)$$

Die magnetischen Momente wechselwirken aber nicht miteinander. Nur das thermische Gleichgewicht bestimmt die Verteilung der Ausrichtung.

**Ferro-, Antiferro- und Ferri-Magnetismus** In diesen Materialien wirkt es eine quantenmechanische Austausch-Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten. Es stellt sich eine Ordnung in der Orientierung ein, wenn die Temperatur unterhalb eines kritischen Wertes liegt.

Wir betrachten zunächst Dia- und Paramagnetismus in Isolatoren und Metallen, der also auf die gebundenen oder freien Elektronen zurückgeht. Danach beschäftigen wir uns mit den Ordnungsphänomenen aufgrund der Austausch-Wechselwirkung.

	Isolator	Metall
Diamagnetismus	Joseph Larmor	Lev Landau
Paramagnetismus	Paul Langevin	Wolfgang Pauli

Tabelle 7.1: Die Modelle zum Dia- und Para-Magnetismus sind oft nach den Wissenschaftlern benannt.

## Atome im Magnetfeld

Uns interessiert die Energie eines Atoms mit  $Z$  Elektronen im Magnetfeld, verglichen mit demselben Atom ohne Feld. Das externe Magnetfeld  $\mathbf{B}$  gibt eine Richtung vor, die wie immer  $z$  ist.

Die Energie des Gesamt-Elektronen-Spins  $\mathbf{S}$  im Magnetfeld ist

$$\hat{H}_{\text{spin}} = g \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad . \quad (7.16)$$

Der Gesamt-Hamilton-Operator mit dem kanonischen Impuls und dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ist

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{spin}} + \sum_{i=1}^Z \frac{[\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2}{2m_e} + V_i \quad , \quad (7.17)$$

wobei  $V_i$  das für das  $i$ -te Elektron relevante Potential bezeichnet. Die Coulomb-Eichung des Vektorpotentials liefert

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} \quad . \quad (7.18)$$

Dies setzen wir ein und multiplizieren aus

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{spin}} + \sum_{i=1}^Z \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e} + V_i + \frac{e}{2m_e} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r}_i + \frac{e^2 [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2}{8m_e} \quad . \quad (7.19)$$

Den mittleren Term kann man durch den Gesamt-Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  als Summe der Einzel-Drehimpulse

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (7.20)$$

ersetzen, so dass wir erhalten

$$\hat{H} - \hat{H}_0 = \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m_e} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2 \quad (7.21)$$

Der erste Term der Abweichung von der feldfreien Energie  $\hat{H}_0$  hängt von den atomaren Spin- und Bahndrehimpulsen ab, bzw. von den damit verknüpften magnetischen Momenten. Er beschreibt also atomaren Paramagnetismus. Der zweite Term beschreibt atomaren Diamagnetismus, weil hier kein Dipolmoment eingeht.

Die Suszeptibilität  $\chi$  kann man über eine thermodynamische Betrachtung erhalten. Die freie Energie  $F$  ist

$$F = U - TS \quad (7.22)$$

Das Differential der inneren Energie ist, wenn man den magnetischen Beitrag hier berücksichtigt,

$$dU = TdS - pdV - V\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.23)$$

so dass

$$dF = dU - SdT - TdS = -SdT - pdV - V\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.24)$$

also

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{N}{V} \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_0)}{\partial \mathbf{B}} \quad (7.25)$$

und (falls  $\chi \ll 1$ )

$$\chi = \frac{M}{H} \approx \mu_0 \frac{M}{B} = -\frac{\mu_0 N}{BV} \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_0)}{\partial B} \quad (7.26)$$

Die magnetische Suszeptibilität ist also proportional zur Ableitung der Energie nach dem Magnetfeld.

## Larmor-Diamagnetismus

Wir betrachten zunächst einen rein atomaren Effekt. Es ist also egal, ob das Atom in der Gasphase oder in einem Kristall vorliegt. Wir verlangen nur vollständig gefüllte Schalen. Dann ist ein Festkörper ein Isolator. Für das Atom gilt  $\mathbf{S} = \mathbf{L} = 0$  und nur der diamagnetische Term in Gl. 7.21 trägt bei. Weil  $\mathbf{B}$  in z-Richtung orientiert ist, vereinfacht sich das zu

$$\hat{H}_{\text{dia}} = \frac{e^2}{8m_e} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2 = \frac{e^2}{8m_e} B^2 \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2) \quad (7.27)$$

Die Wellenfunktion ist aufgrund der gefüllten Schalen kugelsymmetrisch, so dass

$$\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_i^2 \rangle \quad (7.28)$$

Alles zusammen also

$$\chi = -\frac{N}{V} \frac{e^2 \mu_0}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle \approx -\frac{N}{V} \frac{e^2 \mu_0}{6m_e} Z_a r_a^2 \quad (7.29)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass durch die  $r^2$ -Abhängigkeit die  $Z_a$  Elektronen in der äußeren Schale mit dem Radius  $r_a$  dominieren. Dies beschreibt die experimentell gefundenen Werte erstaunlich gut.

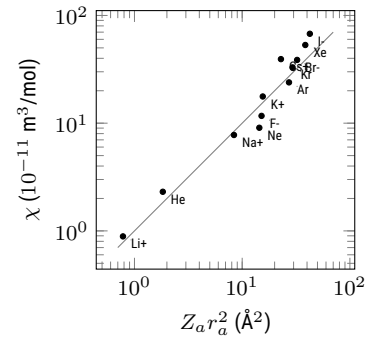


Abbildung 7.2: Atomare diamagnetische Suszeptibilität im Vergleich mit Gl. 7.29. Daten aus Gross und Marx, 2023 und Blundell, 2006.

## Langevin-Paramagnetismus

Wir bleiben bei der atomaren Betrachtung, erlauben aber teilweise gefüllte Schalen. Dann wird die Bestimmung von  $S$ ,  $L$  und  $J$  notwendig. Die Spin-Bahn-Kopplung muss berücksichtigt werden und die Hund'schen Regeln liefern den Zustand mit der niedrigsten Energie. Bei vielen Atomen ist die Spin-Bahn-Wechselwirkung schwach und die L-S-Kopplung (Russel-Saunders-Kopplung) ein passendes Modell. Dabei werden erst alle  $L_i$  und  $s_i$  zu einem  $L$  bzw.  $S$  addiert, bevor diese sich zu  $J$  addieren.

In der L-S-Kopplung berechnet sich der Landé-g-Faktor für den Gesamt-Drehimpuls  $J$  nach

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} . \quad (7.30)$$

Das magnetische Moment ist also

$$\boldsymbol{\mu}_J = -g_J \mu_B \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \quad (7.31)$$

bzw.

$$\mu_J = |\boldsymbol{\mu}_J| = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)} . \quad (7.32)$$

Hier ist nun also ein permanentes magnetisches Moment  $\mu_J \neq 0$  vorhanden. Die Ausrichtung von diesem Moment im externen Magnetfeld dominiert die Magnetisierung über den ebenfalls vorhandenen Diamagnetismus der tieferliegenden gefüllten Schalen. Das ist also der Term in Gl. 7.21, der linear in  $B$  ist.

## Semi-klassische Beschreibung

Wir ignorieren für einen Augenblick die Quantisierung von  $J_z$  und damit die von  $\mu_z$  und nehmen ein klassisches Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$  an. Dessen Energie im externen Feld ist

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta = E(\theta) . \quad (7.33)$$

Verschiedene Winkel  $\theta$  zwischen magnetischem Moment und Magnetfeldrichtung liefern also verschiedene Energien. Diese Zustände sind bei einer Temperatur  $T$  nach der Boltzmann-Statistik besetzt. Die Wahrscheinlichkeit  $p(\theta)$  ist

$$p(\theta) d\Omega = \frac{1}{Z} e^{-E(\theta)/k_B T} \quad (7.34)$$

mit dem Raumwinkelement  $d\Omega$  und der Zustandssumme  $Z$ , die dafür sorgt, dass  $p(\theta)$  normiert ist. Das mittlere magnetische Moment in z-Richtung  $\langle \mu_z \rangle$  ist also

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu}{4\pi} \int p(\theta) \cos \theta d\Omega . \quad (7.35)$$

Mit der Abkürzung

$$y = \frac{\mu B}{k_B T} \quad (7.36)$$

erhält man durch Integration<sup>3</sup> die *Langevin-Funktion*  $\mathcal{L}(y)$

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{\mu} = \coth y - \frac{1}{y} = \mathcal{L}(y) . \quad (7.37)$$

<sup>3</sup> siehe Gross und Marx, 2023 oder Blundell, 2006

Die Magnetisierung ist dann

$$M = \frac{N}{V} \langle \mu_z \rangle = n \langle \mu_z \rangle = n \mu \mathcal{L}(y) \quad (7.38)$$

Für kleine  $y$  kann man den  $\coth$  nähern und erhält die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_0 n \mu^2}{3 k_B T} \propto \frac{1}{T} \quad (7.39)$$

Wir haben damit das Curie-Gesetz<sup>4</sup> gefunden, nach dem die Suszeptibilität reziprok mit der Temperatur fällt. Wie wir unten sehen werden, gilt dies bei miteinander wechselwirkenden Dipolmomenten nicht mehr.

<sup>4</sup> Pierre Curie, 1959–1906, Nobelpreis 1903

## Quantenmechanische Behandlung

In der Quantenmechanik kann ein Drehimpuls nicht mehr jede beliebige Orientierung relativ zur Vorzugsachse einnehmen. Damit sind die Werte von  $\mu_z$  quantisiert und es gibt nur noch  $2J + 1$  verschiedene Möglichkeiten

$$m_J = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J \quad (7.40)$$

Die Rechnung ist analog zum klassischen Fall, nur dass Integrale über  $\theta$  durch Summen über  $m_J$  ersetzt werden. Mit den Abkürzungen<sup>5</sup>

$$y = \frac{g_J \mu_B B}{k_B T} J \quad \text{und} \quad M_{\text{sat}} = n g_J \mu_B J \quad (7.41)$$

<sup>5</sup>  $\mu_B / k_B \approx 2/3 \text{ K/T}$ .

erhält man für die Magnetisierung  $M$

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \mathcal{B}_J(y) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{J} y\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J} y\right) \quad (7.42)$$

mit der *Brillouin-Funktion*  $\mathcal{B}_J(y)$ . Für  $J \rightarrow \infty$  geht sie in die Langevin-Funktion über. Wir können wieder den  $\coth$  für  $y \ll 1$  nähern, um die Suszeptibilität zu erhalten

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_0 n J(J+1) g_J^2 \mu^2}{3 k_B T} = \frac{\mu_0 n p^2 \mu^2}{3 k_B T} \propto \frac{1}{T} \quad (7.43)$$

mit der effektiven Magnetonenzahl

$$p = g_J \sqrt{J(J+1)} \quad (7.44)$$

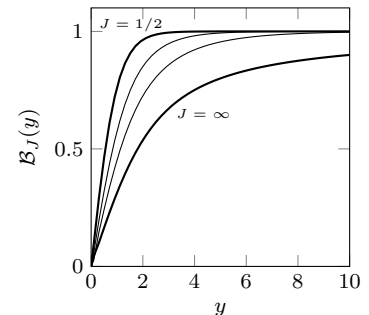


Abbildung 7.3: Brillouin-Funktion  $\mathcal{B}_J(y)$  für  $J = 1/2, 1, 2, \infty$ . Der letzte Fall entspricht der Langevin-Funktion  $\mathcal{L}(y)$ .

## Pauli-Paramagnetismus

Bislang haben wir nur Effekte der einzelnen Atome betrachtet und können damit nur Isolatoren beschreiben. Nun kommen freie Elektronen und damit Metalle hinzu. Wir hatten bereits in Kapitel 4 freie Elektronen im Magnetfeld behandelt und die Landau-Niveaus eingeführt. Die Energie der Elektronen-Zustände ist in diesem Formalismus

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 \pm \mu_B B \quad (7.45)$$

wobei wir  $g_s m_s \approx 1$  angenommen haben. Die Niveaus spalten also je nach Spin-Richtung der Elektronen noch einmal auf.

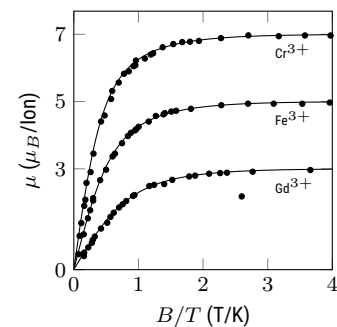


Abbildung 7.4: Paramagnetische Antwort einiger Ionen im Vergleich zur Brillouin-Funktion. Daten aus Henry, 1952.

Wir könnten jetzt argumentieren, dass Elektronen Spin-1/2-Systeme sind und darum Gl. 7.43 mit  $J = 1/2$  verwendet werden kann. Dies würde  $\chi \propto 1/T$  liefern, was aber experimentell nicht gefunden wird. Der Grund liegt in der Fermi-Statistik. Bei üblichen Magnetfeldern ist  $\mu_B B \ll k_b T \ll k_b T_F$ . Die Magnetisierung, also die Verteilung der Elektronen auf spin-up ( $n_+$ ) und spin-down ( $n_-$ ), bzw.

$$M = (n_+ - n_-)\mu_B \quad (7.46)$$

kann sich nur sehr wenig ändern, wenn sich das Magnetfeld ändert. Es sind schlicht alle Zustände besetzt, so dass die Elektronen ihren Spin nicht umdrehen können. Der Anteil der Elektronen in passender Entfernung zur Fermi-Energie ist in etwa  $T/T_F$ , so dass

$$\chi \propto \frac{1}{T} \frac{T}{T_F} = \frac{1}{T_F} = \text{const.} \quad (7.47)$$

Etwas genauer als diese Abschätzung ist es, wenn wir  $n_{\pm}$  ausrechnen

$$n_{\pm} = \frac{1}{2V} \int_0^{\infty} D(E \pm \mu_B B) f(E) dE \quad (7.48)$$

mit der Zustandsdichte  $D$ . Man bildet also für die Magnetisierung die Differenz der Zustandsdichte über ein kleines Energieintervall  $\pm \mu_B B \ll k_b T$ . Dort können wir die Zustandsdichte Taylor-entwickeln und schreiben

$$M = (n_+ - n_-)\mu_B = \frac{\mu_B^2 B}{V} \int_0^{\infty} \frac{\partial D}{\partial E} f(E) dE \quad (7.49)$$

$$= - \frac{\mu_B^2 B}{V} \int_0^{\infty} D(E) \frac{\partial f}{\partial E} dE \quad (7.50)$$

$$\approx \frac{\mu_B^2 B}{V} D(E_F) \quad (7.51)$$

wobei wir im zweiten Schritt partielle Integration verwendet haben. Im dritten haben wir angenommen, dass  $T \ll T_F$  und damit die Ableitung von  $f$  quasi eine Deltafunktion bei  $E_F$  ist. Zusammen mit der Zustandsdichte freier Elektronen erhalten wir

$$\chi_{\text{Pauli}} = \mu_0 \mu_B^2 \frac{D(E_F)}{V} = n \frac{3\mu_0 \mu_B^2}{2k_b T_F} = \text{const.} \quad (7.52)$$

Die überschlägige Abschätzung zuvor war also nicht so schlecht. Nur der Faktor  $T/T_F$  ist der Unterschied zu Gl. 7.43. Auch bei höheren Temperaturen, wenn die Näherung als Delta-Funktion nicht mehr ganz so gut ist, ändert sich wenig. Insbesondere bleibt die Suszeptibilität temperaturunabhängig.

## Landau-Diamagnetismus

Der Vollständigkeit halber soll nicht unerwähnt bleiben, dass auch freie Elektronen Diamagnetismus zeigen. In Kapitel 4 hatten wir bereits gesehen, dass die innere Energie eines freien Elektronengases periodisch mit dem Magnetfeld variiert und deswegen diverse von der inneren Energie abgeleitete Größen ebenfalls. Für die Magnetisierung ist dies der de Haas-van Alphen-Effekt. Die damit verbundene Suszeptibilität ist gerade  $-1/3$  des Pauli-Paramagnetismus. Weil beides ja immer zusammen auftritt, beobachtet man effektiv  $2/3 \chi_{\text{Pauli}}$ . Die effektive Masse der Elektronen  $m^*$  geht als zusätzlicher Faktor  $(m_e/m^*)^2$  ein.

## Magnetische Ordnung

Manche Materialien zeigen ohne anliegendes externes Magnetfeld unterhalb einer kritischen Temperatur eine Ordnung in der Orientierung der magnetischen Momente und damit fast immer auch eine Magnetisierung. Um dieses Phänomen zu erklären werden wir im nächsten Abschnitt eine Wechselwirkung zwischen den mikroskopischen magnetischen Momenten einführen. Wir unterscheiden verschiedene Muster in der Ordnung:

**Ferromagnetismus** Alle magnetischen Momente zeigen in dieselbe Richtung. Die Amplitude kann unterschiedlich sein, oder nur eine Vektor-Komponente ist identisch. In Summe ergibt das einen von Null verschiedenen Wert, also eine Magnetisierung.

**Antiferromagnetismus** Die Momente summieren sich zu Null, sind aber trotzdem geordnet. Nach außen hin erscheint das Material paramagnetisch.

**Ferrimagnetismus** Die magnetischen Momente sind ebenfalls antiparallel ausgerichtet, aber unterschiedlich groß, so dass die Summe nicht Null ergibt und Magnetisierung ohne externes Feld sichtbar ist.

**Helikale Ordnung** Magnetische Ordnungsphänomene sind sehr vielfältig. Die magnetischen Momente können beispielsweise auf einer Helix (Schraubenlinie) liegen.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> wie der Propeller eines fliegenden Flugzeugs mit einem Stroboskop fotografiert

### Zur Selbstkontrolle

1. Suchen Sie in Lehrbüchern oder im Internet nach grafischen Darstellungen magnetischer Ordnung und sortieren Sie diese in obigen Kategorien ein.

## Austauschwechselwirkung

Die für die Ordnung verantwortliche Wechselwirkung ist die Austauschwechselwirkung, die schon beim  $\text{H}_2^+$ -Molekül für die Bindung gesorgt hatte. Magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung wäre zwar auch denkbar, ist aber viel zu schwach. Typische Energien entsprechen einer Temperatur von 1 K, so dass so Ordnung bei Raumtemperatur nicht beobachtbar wäre.

Wir diskutieren ein einfaches Modell: Zwei Elektronen ( $i = 1, 2$ ) sind an den Orten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$ , und in den Zuständen  $\phi_A$  und  $\phi_B$ . Daraus können wir wie in der Molekülphysik einen symmetrischen (+) und antisymmetrischen (−) Orts-Anteil der Gesamt-Wellenfunktion herstellen.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> zusammen mit dem Spin-Teil dann immer anti-symmetrisch

$$\Psi_{\pm} \propto \phi_a(\mathbf{r}_1)\phi_b(\mathbf{r}_2) \pm \phi_a(\mathbf{r}_2)\phi_b(\mathbf{r}_1) \quad . \quad (7.53)$$

Die Eigen-Energien sind dann

$$E_{\pm} = \langle \Psi_{\pm} | \hat{H} | \Psi_{\pm} \rangle \quad (7.54)$$

und die Energie-Differenz ist die Austausch-Konstante  $J_A$

$$J_A = E_+ - E_- \propto \iint \phi_a^*(\mathbf{r}_1)\phi_b^*(\mathbf{r}_2) \hat{H} \phi_a(\mathbf{r}_2)\phi_b(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad . \quad (7.55)$$

Nun nehmen wir den Spin der Elektronen hinzu. Damit die Gesamt-Wellenfunktion antisymmetrisch ist, muss die symmetrische Wellenfunktion  $\Psi_+$  eine antisymmetrische (Singulett,  $S = 0$ ) Spin-Wellenfunktion besitzen. Ebenso muss  $\Psi_-$  ein Triplet-Zustand ( $S = 1$ ) sein. Die Unterscheidung kann man mit den Einzel-Spin-Operatoren  $s_i$  des  $i$ -ten Elektrons schreiben. Durch Ausmultiplizieren von  $S^2 = (s_1 + s_2)^2$  findet man, dass

$$\frac{s_1 \cdot s_2}{\hbar^2} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{für Singulett} \quad S = 0 \\ +\frac{1}{4} & \text{für Triplet} \quad S = 1 \end{cases} \quad (7.56)$$

Damit können wir die Gesamtenergie kompakt schreiben als

$$\hat{H} = \frac{1}{4}(E_+ + 3E_-) - J_A \frac{s_1 \cdot s_2}{\hbar^2} \quad (7.57)$$

Wenn  $J_A$  positiv ist, dann sind Triplet-Zustände energetisch bevorzugt, also eine parallele Anordnung der Spins wie im Ferromagnetismus. Bei negativen  $J_A$  spricht man von antiferromagnetischer Kopplung.

## Heisenberg- und Ising-Modell

Wir haben die Austausch-Wechselwirkung mit Elektronen-Spins eingeführt, aber man kann analog natürlich mit allen magnetischen Momenten bzw. Drehimpuls-Äquivalenten arbeiten, und auch auf mehr als zwei Spins erweitern. Der erste Summand in Gl. 7.57 liefert nur einen konstanten Energie-Offset, den wir nun weglassen. Für allgemeine Drehimpuls-artige Größen  $S_i$  ergibt der zweite Teil das *Heisenberg-Modell der magnetischen Ordnung* mit

$$\hat{H}_A = - \sum_{i>j} J_A^{ij} \frac{S_i \cdot S_j}{\hbar^2} \quad (7.58)$$

Die Summe läuft dabei so, dass alle Paare von Indizes  $i$  und  $j$  einmal genommen werden. Man nimmt an, dass die magnetischen Dipole auf einem Gitter angeordnet sind, und der Index den Gitterplatz bezeichnet. Die Austausch-Konstante  $J_A^{ij}$  hängt dann beispielsweise vom räumlichen Abstand der Gitterplätze  $i$  und  $j$  ab.

Das *Ising-Modell* nimmt wieder Elektronen-Spins als Drehimpuls-artige Größe, erlaubt also nur die Möglichkeit 'up' und 'down'. Dadurch wird das Skalarprodukt von Vektoren in Gl. 7.58 eine Multiplikation von Skalaren.

## Molekularfeldnäherung

Im Ising- oder Heisenberg-Modell koppelt die Austauschwechselwirkung alle magnetischen Momente miteinander, was die Rechnung aufwändig macht. Einfacher wird es, wenn man den Beitrag aller anderen magnetischen Momente zum Magnetfeld am Ort  $i$  zusammenfasst zu einem effektiven mittleren Austausch- oder Molekularfeld. Dieser Ansatz von Pierre Weiss ist historisch älter als die Austauschwechselwirkung.

Wir nehmen an, dass die Austauschwechselwirkung nur zwischen den nächsten Nachbarn wirkt, und dass sie für alle  $z$  Nachbarn identisch ist. Dann ist der Energiebeitrag am Ort  $i$

$$E_i = -\frac{J_a}{\hbar} \sum_{j=1}^z S_i \cdot S_j \approx -z \frac{J_a}{\hbar} \langle S_j \rangle \cdot S_i \quad (7.59)$$



mit dem mittleren Drehimpuls  $\langle S_j \rangle$  aller Nachbarn. Wir gehen zu makroskopischen Größen über, indem wir dies umschreiben als Produkt der Magnetisierung  $M$  und des magnetischen Momentes  $\mu$  via

$$M = -n g_J \mu_B \frac{\langle S_j \rangle}{\hbar} \quad \text{und} \quad \mu_i = -g_J \mu_B \frac{S_i}{\hbar} \quad (7.60)$$

und erhalten

$$E_i = -z \frac{J_a}{n g_J^2 \mu_B^2} \mu_i \cdot M = -\mu_i \cdot B_A \quad (7.61)$$

mit dem *Molekularfeld*  $B_A$  und der Molekularfeld-Konstante  $\gamma$

$$B_A = \frac{z J_a}{n g_J^2 \mu_B^2} M = \mu_0 \gamma M \quad (7.62)$$

## Ferromagnetismus

In der Molekularfeldnäherung ist das effektive Feld in der Probe die Summe aus dem extern angelegten Feld und dem Molekularfeld

$$B_{\text{eff}} = B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M \quad (7.63)$$

Wir berücksichtigen die Austauschwechselwirkung also, indem wir überall  $B$  durch  $B_{\text{eff}}$  ersetzen. Ferromagnetismus ist damit ein System von nicht wechselwirkenden magnetischen Momenten (durch die Brillouin-Funktion beschrieben) plus Molekularfeld. Die Magnetisierung  $M$  ist nach Gl. 7.42

$$M = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J(y) = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J \left( \frac{g_J \mu_B J (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)}{k_B T} \right) \quad (7.64)$$

nur dass für  $y$  jetzt  $B_{\text{eff}}$  statt  $B$  verwendet wird. Leider erscheint  $M$  auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Wir lösen das grafisch, indem wir beides

$$M(y) = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J(y) \quad (7.65)$$

$$M(y) = \frac{k_B T}{\mu_0 \gamma g_J \mu_B J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma} \quad (7.66)$$

als Funktion von  $y$  zeichnen und Schnittpunkte suchen.

Bei  $B_{\text{ext}} = 0$  hängt es von der Steigung der beiden Kurven ab, ob diese sich schneiden. Bei hohen Temperaturen  $T > T_C$  ist Gl. 7.65 steiler als die Asymptote an Gl. 7.66 und nur der triviale Schnittpunkt bei  $M = 0$  bleibt. Es gibt also spontane Magnetisierung nur unterhalb einer bestimmten Temperatur. Die charakteristische Temperatur  $T_C$  nennt man ferromagnetische Curie-Temperatur

$$T_C = n \gamma \frac{\mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B} = \gamma C \quad (7.67)$$

mit der Curie-Konstanten  $C$ .

Bei angelegtem externen Feld  $B_{\text{ext}} > 0$  findet sich immer ein Schnittpunkt, also eine von Null verschiedene Magnetisierung, unabhängig von der Temperatur. Das unterscheidet sich nicht von einem Paramagneten. Aus  $\chi \approx \mu_0 M / B_{\text{ext}}$  erhält man im paramagnetischen Bereich  $T > T_C$  das Curie-Weiss'schen Gesetz der magnetischen Suszeptibilität

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (7.68)$$

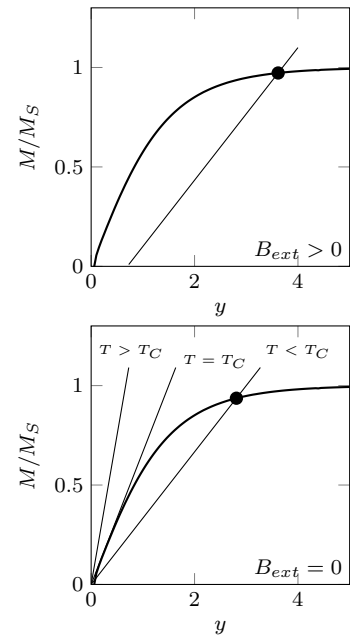


Abbildung 7.5: Grafische Bestimmung der Magnetisierung eines Ferromagneten.

Für Temperaturen  $T < T_C$  im ferromagnetischen Bereich hängt die Magnetisierung von der Vorgeschichte der Probe ab und nicht nur vom aktuellen externen Magnetfeld. Daher hilft hier die Beschreibung durch eine Suszeptibilität nicht.

Material	$T_C$ (K)	$\mu/\mu_B$
Fe	1043	2.2
Co	1394	1.7
Ni	631	0.6
Gd	289	7.5
EuO	70	6.9

Tabelle 7.2: Ferromagnete (Daten aus Blundell, 2006)

## Untergitter: Ferri- und Antiferromagnetismus

Um Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus zu beschreiben führen wir zwei Untergitter ein. Ähnlich einem Schachbrett gehört jede Position des physikalischen Gitters entweder zu dem einen oder dem anderen Untergitter, gerade so, dass die nächsten Nachbarn immer dem anderen Untergitter angehören. Für jedes Untergitter definieren wir eine Magnetisierung  $M_{A,B}$  und Molekularfeld-Konstanten  $\gamma_{ij}$ , die die Wechselwirkung innerhalb und zwischen den Untergittern beschreiben. Die jeweiligen Molekularfeld  $B^a$  sind also

$$B_A^a = \mu_0 \gamma_{AA} M_A + \mu_0 \gamma_{AB} M_B \quad (7.69)$$

$$B_B^a = \mu_0 \gamma_{BA} M_A + \mu_0 \gamma_{BB} M_B \quad (7.70)$$

Aus Symmetriegründen ist  $\gamma_{AB} = \gamma_{BA}$ . Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus unterscheiden sich in den  $\gamma_{ij}$ , die aber alle negativ sind, weil die zugehörige Austauschwechselwirkung  $J_A$  im Gegensatz zum Ferromagnetismus negativ ist.

**Ferrimagnetismus** Der Name wurde durch Louis Néel bei der Beschreibung des Magnetismus von Ferriten (eine Form der Eisen-Oxyde) geprägt. In diesen Materialien sind die beiden Untergitter nicht identisch. Es gibt zweimal soviel B-Gitterpunkte wie A-Gitterpunkte, und beide Gitter sind durch unterschiedliche Atome besetzt. Wir beschreiben die magnetischen Eigenschaften jedes Untergitters durch seine Curie-Konstante  $C_{A,B}$  (Gl. 7.67). Analog zu Gl. 7.67 ergibt<sup>8</sup> sich dann eine ferrimagnetische Curie-Temperatur

$$T_C = |\gamma_{AB}| \sqrt{C_A C_B} \quad (7.71)$$

und eine Suszeptibilität oberhalb von  $T_C$  zu

$$\chi = \frac{(C_A + C_B)T - 2|\gamma_{AB}|C_A C_B}{T^2 - T_C^2} \quad (7.72)$$

Ferrimagnete zeigen also einen besonderen, charakteristischen Temperaturverlauf der Suszeptibilität, der deutlich von dem Curie-Weiss-Gesetz abweicht. Unterhalb von  $T_C$  verbleibt eine beobachtbare spontane Magnetisierung, weil die beiden Untergitter sich nicht vollständig kompensieren.

**Antiferromagnetismus** Hier sind die beiden Untergitter identisch ( $\gamma_{AA} = \gamma_{BB}$ ), aber die magnetischen Momente antiparallel orientiert, also  $M_A = -M_B$ . Die kritische Temperatur, hier Néel-Temperatur, ist

$$T_N = |\gamma_{AB} - \gamma_{AA}|C \quad (7.73)$$

wobei  $C$  die Curie-Konstante eines der Untergitter ist. Oberhalb der Néel-Temperatur  $T_N$  ist die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{2C}{T + T_N} \quad (7.74)$$

<sup>8</sup> siehe Gross und Marx, 2023

Material	$T_C$ (K)	$\mu/\mu_B$
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	858	4.1
CoFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	793	3.7
Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	560	5.0
Ho <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	567	15.2

Tabelle 7.3: Ferrimagnete (Daten aus Blundell, 2006)

Material	$T_N$ (K)	$J$
MnF <sub>2</sub>	67	5/2
MnO	122	5/2
CoO	292	3/2
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	307	3/2
$\alpha$ -Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	950	5/2

Tabelle 7.4: Antiferromagnete (Daten aus Blundell, 2006)

Es gibt auch unterhalb von  $T_N$  keine spontane Magnetisierung, weil die beiden Untergitter sich vollständig kompensieren. Die Suszeptibilität ist in diesem Bereich<sup>9</sup> abhängig von der Orientierung des Magnetfelds,

Magnetische Ordnung und Suszeptibilität Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität ist für Para-, Ferro- und Antiferromagnete ähnlich. Sie folgt

$$\chi \propto \frac{1}{T - \Theta} \quad (7.75)$$

Man kann diese Gleichung an den experimentell gefundenen Verlauf anpassen und so die kritische Temperatur  $\Theta$  bestimmen. Falls  $\Theta = 0$ , so ist das Material ein Paramagnet. Falls  $\Theta > 0$ , dann liegt ein Ferromagnet vor und  $T_C = \Theta$ . Falls  $\Theta < 0$ , dann ist es ein Antiferromagnet und  $T_N = -\Theta$ .

## Neutronenstreuung

Neutronenstreuung ist die Methode der Wahl, um magnetische Ordnung zu detektieren. Die (de Broglie-) Wellenlänge ist viel kleiner als der Gitterabstand. Beugung am Kristall-Gitter ist also möglich. Gleichzeitig hat das Neutron auch einen Spin  $1/2$ , d.h. es wechselwirkt mit den magnetischen Momenten. Es gibt im Beugungsmuster also nicht nur einen Beitrag der Kerne des Gitters, sondern auch der Elektronen, wenn diese ein magnetisches Moment besitzen. Beide Effekte addieren sich.

Im Experiment<sup>10</sup> von Shull<sup>11</sup>, Strauser und Wollan, das in Abbildung 7.1 gezeigt ist, wurden Neutronen an MnO gebeugt. Oberhalb der Néel-Temperatur ist das Material paramagnetisch. Man findet Peaks entsprechend dem Mn-Mn Abstand von  $4.43 \text{ \AA}$  bei einer NaCl-Kristallstruktur (fcc).

Unterhalb der Néel-Temperatur stellt sich antiferromagnetische Ordnung ein. Die magnetischen Momente der Mangan-Ionen sind alternierend antiparallel orientiert. Der Streuquerschnitt der magnetischen Neutronenstreuung hängt von der Orientierung der Spins relativ zur Bahnebene der Neutronen ab. Daher erscheinen nun die Mn-Ionen unterschiedlich und das Gitter wird effektiv doppelt so groß mit  $a_0 = 8.85 \text{ \AA}$ . Die zusätzlichen Peaks können in der neuen Gitterkonstante indiziert werden, in der alten benötigten sie halbzahlige Indizes.

Man erkennt in Abbildung 7.1 auch, dass die neu hinzukommenden Peaks in der Amplitude mit steigendem Streuwinkel  $\theta$  kleiner werden. Eine solche Winkelabhängigkeit im Formfaktor gibt es bei Streuung an den Kernen nicht. Die Winkelabhängigkeit ergibt sich aus der Fourier-Transformation der räumlichen Verteilung der Streudichte. Bei den Kernen ist diese stark lokalisiert, nach Fourier-Transformation also quasi konstant. Bei den Elektronen ist dies nicht mehr der Fall. Der Amplitudenabfall spiegelt also die Ausdehnung der Elektronenwolke um das Mn-Ion wider.

<sup>9</sup> siehe bspw. Gross und Marx, 2023



Abbildung 7.6: Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität  $\chi$  für Paramagnete (fett), Ferromagnete (obere Kurven) und Antiferromagnete (untere Kurve). Unterhalb von  $T = \Theta$  liegt die geordnete Phase des (Anti-)Ferromagnets vor. Oberhalb sind beide paramagnetisch.

<sup>10</sup> Shull, Strauser und Wollan, 1951.

<sup>11</sup> Clifford Glenwood Shull, 1915–2001, Nobelpreis 1994

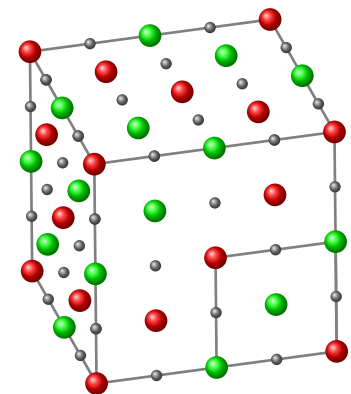


Abbildung 7.7: Kristallstruktur von MnO. In der antiferromagnetischen Phase sind die Spins der Mangan-Ionen entweder parallel (rot) oder antiparallel (grün) zur Feldrichtung orientiert. Die Sauerstoff-Ionen (grau) tragen nicht zum Signal bei. Bei höheren Temperaturen verschwindet die Spin-Orientierung. Die Unterscheidung zwischen rot und grün fällt weg. Die Einheitszelle wird dadurch kleiner.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

Blundell, Stephen (2006). *Magnetism in condensed matter*. Oxford Univ. Press.

Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).

Henry, Warren E (1952). "Spin paramagnetism of  $\text{Cr}^{+++}$ ,  $\text{Fe}^{+++}$ , and  $\text{Gd}^{+++}$  at liquid helium temperatures and in strong magnetic fields". In: *Physical Review* 88.3, S. 559. [↗](#).

Shull, C Gi, WA Strauser und EO Wollan (1951). "Neutron diffraction by paramagnetic and antiferromagnetic substances". In: *Physical Review* 83.2, S. 333. [↗](#).

# Anhang



# Anhang A

## Julia und Pluto

Markus Lippitz  
4. April 2023

Wir benutzen in dieser Veranstaltung die Programmiersprache *Julia*<sup>1</sup> für graphische Veranschaulichungen und numerische 'Experimente'. Ich bin überzeugt, erst wenn man einen Computer überreden kann, etwas zu tun, ein Model darzustellen, einen Wert auszurechnen, erst dann hat man es wirklich verstanden. Vorher hat man nur die ganzen Probleme noch nicht gesehen.

<sup>1</sup><https://julialang.org>

Man kann Julia mit verschiedenen Benutzeroberflächen verwenden. Wir benutzen *Pluto*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup><https://github.com/fonsp/Pluto.jl>

### Julia

Julia ist eine Programmiersprache, die für Numerik und wissenschaftliches Rechnen entwickelt wurde. Sie ist ein Mittelding zwischen Matlab, Python und R. Aus meiner Sicht übernimmt sie jeweils das Beste aus diesen Welten und eignet sich so gerade für Einsteiger. Wir werden im Laufe des Semesters verschiedene Beispiel-Skripte zusammen besprechen, und es wird auch numerische Übungsaufgaben geben.

### Ein Beispiel

Lassen Sie uns zunächst ein einfaches Beispiel betrachten.

```
using Plots
x = range(0, 2 * pi; length=100)
plot(x, sin.(x); label="ein Sinus")
```

Für manche Dinge benötigt man Bibliotheken, die man mit `using` laden kann. Halten sie sich bei der Auswahl der Bibliotheken zunächst an die Beispiele, die ich zeige.

Dann definieren wir eine Variable `x` (einfach durch benutzen) als äquidistanter 'Zahlenstrang' zwischen 0 und  $2\pi$  mit 100 Werten. Funktionen wie `range` haben immer benötigte Parameter, die über ihre Position in der Parameterliste definiert sind (hier: Anfangs- und End-Wert), sowie weitere optionale. Diese folgen nach einem Semikolon in der Form `<Parameter>=<Wert>`.

Schließlich zeichnen wir die Sinus-Funktion über diesen Wertebereich. Beachten sie den Punkt in `sin.(x)`. Er bedeutet 'wende `sin` auf alle Elemente von `x` an'. Das ist sehr praktisch.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

## Informationsquellen

Aktuell ist die Version 1.8.5. Mit der Version 1.0 hat sich einiges geändert. Ignorieren sie Webseiten, die älter als 3 Jahre sind, bzw. die sich auf eine Version vor 1.0 beziehen.

*Offizielle Dokumentation* auf der website<sup>3</sup>. Oder fragen Sie google mit 'Julia' als Stichwort oder mit der Bibliothek / Funktion und angehängter Endung '.jl'.

<sup>3</sup> <https://docs.julialang.org/en/v1/>

*Beispiele* Julia by example<sup>4</sup>, Think julia<sup>5</sup>, Introduction to Computational Thinking<sup>6</sup>

<sup>4</sup> <https://juliabyexample.helpmanual.io/>

<sup>5</sup> <https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html>

<sup>6</sup> <https://computationalthinking.mit.edu/Fall22/>

*Unterschiede* Vergleich<sup>7</sup> mit Matlab, Python und anderen Sprachen. Und als Übersichtstabelle<sup>8</sup>

<sup>7</sup> <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/noteworthy-differences/>

<sup>8</sup> <https://cheatsheets.quantecon.org/>

*Cheat Sheets* Allgemein<sup>9</sup> und für Plots<sup>10</sup>

<sup>9</sup> <https://juliadocs.github.io/Julia-Cheat-Sheet/>

<sup>10</sup> <https://github.com/sswatson/cheatsheets/>

## Benutzeroberflächen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man kürzere oder längere Programme in Julia schreiben kann. Hier eine Auswahl

*Kommandozeile und Editor* Man kann Julia interaktiv an der Kommandozeile (REPL, read-eval-print loop) benutzen. In einem externen Editor könnte man wiederholende Kommandos in Skript-Dateien schreiben.

*IDE* Das geht komfortabler mit einer integrierten Umgebung, beispielsweise einer Julia-Erweiterung<sup>11</sup> für Visual Studio Code. Das ist sicherlich die Herangehensweise bei größeren Projekten.

<sup>11</sup> <https://www.julia-vscode.org/>

*Jupyter notebook* Jupyter<sup>12</sup> setzt sich zusammen aus Julia, Python und R. Diese drei Sprachen kann man in einem Notebook-Format benutzen. Programmcode steht dabei in Zellen, die Ausgabe und auch beschreibender Text und Grafiken dazwischen. Das eignet sich besonders, wenn Rechnungen von Beschreibungen oder Gleichungen begleitet werden sollen, beispielsweise in (Praktikums-)Protokollen oder Übungsaufgaben.

<sup>12</sup> <https://jupyter.org/>

Mathematica hat ein ähnliches Zellen-Konzept. Ein Nachteil ist, dass Zellen den Zustand des Kernels in der Reihenfolge ihrer Ausführung beeinflussen. Die Reihenfolge muss aber nicht der in der Datei entsprechen; insbesondere ändert ein Löschen der Zellen den Kernel nicht. Das kann sehr verwirrend sein, oder man muss der Kernel oft neu starten.

*Pluto* Man kann auch in Pluto<sup>13</sup> Programmcode, Text und Grafik mischen. Das Zellen-Konzept von Pluto ist das aber von Excel, limitiert auf eine Excel-Spalte. Die Anordnung der Gleichungen in den Zellen spielt keine Rolle. Alles wird nach jeder Eingabe neu evaluiert. Eine Logik im Hintergrund sorgt dafür, dass nur unbedingt notwendige Berechnungen neu ausgeführt werden. Aus meiner Sicht sollte das für Anfänger intuitiv zu bedienen sein und für kleiner Projekte völlig ausreichen sein. *Wir benutzen Pluto als Oberfläche in dieser Veranstaltungen.*

<sup>13</sup> <https://github.com/fonsp/Pluto.jl>



## Installation

Installieren Sie Julia und Pluto auf ihrem Computer. Eine gute Anleitung ist am MIT<sup>14</sup>. Kurzfassung: Julia vom website installieren, dann in Julia das Pluto-Paket installieren (`import Pkg; Pkg.add("Pluto")`) und aufrufen via `using Pluto; Pluto.run()`.

<sup>14</sup> <https://computationalthinking.mit.edu/Fall22/installation/>

## Benutzung von Pluto

Eine schöne Einführung in Pluto (und Julia) gibt es auf der Pluto homepage<sup>15</sup>, am MIT (hier<sup>16</sup> bzw. eigentlich die ganze site) und am WIAS.<sup>17</sup>

<sup>15</sup> <https://github.com/fonsp/Pluto.jl/wiki>

<sup>16</sup> [https://computationalthinking.mit.edu/Fall22/basic\\_syntax/](https://computationalthinking.mit.edu/Fall22/basic_syntax/)

<sup>17</sup> <https://www.wias-berlin.de/people/fuhrmann/SciComp-WS2021/assets/nb01-first-contact-pluto.html>

- Shift-Enter führt eine Zelle aus
- Der Ausführungs-Optimierer verlangt, dass jede Zelle einen geschlossenen Block bildet. Also darf da nur ein Kommando stehe, oder mehrere müssen mit `begin ... end` geschachtelt werden.
- Jede Zelle hat nur eine Ausgabe, die der letzten Zeile. Die Ausgabe steht über der Zelle selbst.
- Pluto verwaltet Bibliotheken selbständig, einfach mit `using` benutzen, installiert wird automatisch.
- Pluto speichert automatisch alles. Man kann aber die Datei umbenennen / bewegen.



# Anhang B

## Bandlücken

Markus Lippitz  
11. Juni 2023

### Was bisher geschah

Im Kapitel 3 zur Bandstruktur hatten wir die Bandlücke anhand der energetisch am tiefsten liegende Kreuzung zweier Parabeln diskutiert. Wir haben Gl. 3.8 eingeschränkt auf nur drei Koeffizienten  $C$ , nämlich  $C_k$ ,  $C_{k-g}$  und  $C_{k+g}$  und sind so bei Gl. 3.21 gelandet. Dann haben wir festgestellt, dass in der Nähe der Grenze der Brillouinzone eine Resonanz in der Energie auftritt und nur zwei der 3 Koeffizienten wirklich relevant sind. Das führte dann zu Gl. 3.22, die nur noch  $C_k$  und  $C_{k-g}$  enthält. Die haben wir schließlich gelöst und eine Aufspaltung der Breite  $2V_g$  gefunden.

Im darauf folgenden Abschnitt 'Anschauliche Interpretation II' haben wir die Analogie zur Beugung von Wellen an Gittern und zur Laue-Bedingung gezogen: Die Koeffizienten  $C_x$  beschreiben ja gerade ebene Wellen mit dem Wellenvektor  $x$ . Die Laue-Beugung addiert dann einen reziproken Gittervektor des Kristalls auf diese Welle. Wenn das Potential also einen Koeffizienten  $V_g$  besitzt, dann kann das Gitter einen Vektor  $g$  addieren oder subtrahieren. Genau dies koppelt die ebene Wellen bei  $k$  und  $k + g$ .

### Verallgemeinerung

Der Koeffizient  $V_g$  koppelt in diesem Argument aber nicht nur ebene Wellen mit  $k_1 = k$  und  $k_2 = k + g$ , sondern alle Paare von ebenen Wellen mit

$$|k_1 - k_2| = g \quad (\text{B.1})$$

also beispielsweise  $k + 17g$  mit  $k + 16g$ .

In Analogie damit ist es naheliegend, dass ein Fourier-Koeffizient des Potentials  $V_{ng}$  gerade solche ebenen Wellen miteinander koppelt, die  $ng$  auseinander liegen, also

$$|k_1 - k_2| = ng \quad (\text{B.2})$$

Das sieht man auch, wenn man Gl. 3.8 für ein paar mehr als die drei Koeffizienten in Gl. 3.21 hinschreibt<sup>1</sup>. Das ist eine quadratische Matrix, die auf

<sup>1</sup> Tun Sie das!



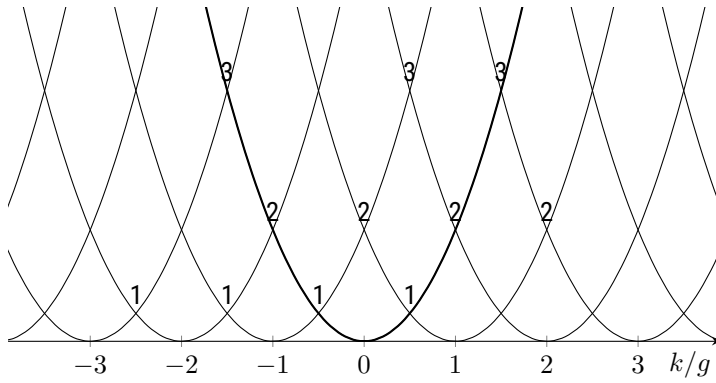


Abbildung B.1: Dispersionsrelation freier Elektronen. Manche Kreuzungen sind mit dem  $n$  aus Gl. B.2 bezeichnet.

ihrer Diagonalen Einträge der Form

$$E_{k+ng}^2 - E \quad (\text{B.3})$$

hat, wobei  $n$  hier von  $-N$  bis  $+N$  läuft (und  $N = 1$  in Gl. 3.21). In der beiden Diagonalen darüber und darunter steht ein  $V_g$ , in den beiden Diagonalen nochmals darüber und darunter steht ein  $V_{2g}$  und so weiter.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Achtung: Gl. 3.21 ist anders sortiert.

# Literatur

- Ashcroft, Neil W. und N. David Mermin (2013). *Festkörperphysik*. München: Oldenbourg.
- Blundell, Stephen (2006). *Magnetism in condensed matter*. Oxford Univ. Press.
- Choy, T.-S. u. a. (2000). "A database of fermi surface in virtual reality modeling language (vrml)". In: *Bulletin of The American Physical Society* 45.1, S. L36–42. [↗](#)
- Conwell, Esther M (1952). "Properties of silicon and germanium". In: *Proceedings of the IRE* 40.11, S. 1327–1337. [↗](#)
- Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- (2017). *Theoretische Festkörperphysik, Band 2*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- Doll, Robert und M Näbauer (1961). "Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring". In: *Phys. Rev. Lett.* 7.2, S. 51. [↗](#)
- Dresselhaus, G, AF Kip und C Kittel (1955). "Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals". In: *Physical Review* 98.2, S. 368. [↗](#)
- Fließbach, Thorsten (2018). *Statistische Physik*. Springer. [↗](#)
- Giaever, Ivar (1960). "Energy gap in superconductors measured by electron tunneling". In: *Phys. Rev. Lett.* 5.4, S. 147. [↗](#)
- Glassbrenner, C Jo und Glen A Slack (1964). "Thermal conductivity of silicon and germanium from 3 K to the melting point". In: *Physical review* 134.4A, A1058. [↗](#)
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#)
- Henry, Warren E (1952). "Spin paramagnetism of  $\text{Cr}^{+++}$ ,  $\text{Fe}^{+++}$ , and  $\text{Gd}^{+++}$  at liquid helium temperatures and in strong magnetic fields". In: *Physical Review* 88.3, S. 559. [↗](#)
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#)
- Hust, Jerome G und Alan B Lankford (1984). "Thermal conductivity of aluminum, copper, iron, and tungsten for temperatures from 1 K to the melting point". In: *NBSIR 84-3007*. [↗](#)
- Jackson, Howard E, Charles T Walker und Thomas F McNelly (1970). "Second sound in NaF". In: *Phys. Rev. Lett.* 25.1, S. 26.
- Jaklevic, RC u. a. (1965). "Macroscopic quantum interference in superconductors". In: *Physical Review* 140.5A, A1628. [↗](#)
- Johnson, Earnest J. (1967). "Absorption near the Fundamental Edge". In: Hrsg. von R.K. Willardson und Albert C. Beer. Bd. 3. Semiconductors and Semimetals. Elsevier, S. 153–258. [↗](#)



- Kamerling Onnes, Heike (1911). "Further experiments with Liquid Helium – VI. On the Sudden Change in the Rate at which the Resistance of Mercury Disappears." In: *Leiden Communications* 124c, S. 267–271.
- Kittel, Charles (2006). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Siegfried Hunklinger. 14. Oldenbourg.
- Klitzing, K, G Dorda und M Pepper (1980). "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance". In: *Phys. Rev. Lett.* 45.6, S. 494–497. [↗](#).
- Klitzing, Klaus v. (1984). "The quantized hall effect". In: *Physica B+C* 126.1, S. 242–249. [↗](#).
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [↗](#).
- Langenberg, DN, DJ Scalapino und BN Taylor (1966). "Josephson-type superconducting tunnel junctions as generators of microwave and submillimeter wave radiation". In: *Proceedings of the IEEE* 54.4, S. 560–575. [↗](#).
- Lippitz, Markus (2022). *Lecture notes 'Molekülphysik und Festkörperphysik I'*. Version v22.2. CC-BY-SA 4.0. [↗](#).
- London, Fritz und Heinz London (1935). "The electromagnetic equations of the supraconductor". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 149.866, S. 71–88. [↗](#).
- Macfarlane, GG und V Roberts (1955). "Infrared absorption of silicon near the lattice edge". In: *Physical Review* 98.6, S. 1865. [↗](#).
- Meissner, Walther und Robert Ochsenfeld (1933). "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit". In: *Naturwissenschaften* 21.44, S. 787–788. [↗](#).
- Phillips, Norman E (1959). "Heat capacity of aluminum between 0.1 K and 4.0 K". In: *Physical Review* 114.3, S. 676. [↗](#).
- Polakovic, Tomas (2022). *Computational Physics for the Masses. Part 3: Solid Stuff*. CC-BY-NC 4.0. [↗](#).
- Rayne, JA (1956). "The Heat Capacity of Copper Below 4.2 °K". In: *Aust. J. Phys.* 9.2, S. 189–197. [↗](#).
- Rollins Jr, Fred R, Lyle H Taylor und Paul H Todd Jr (1964). "Ultrasonic study of three-phonon interactions. II. Experimental results". In: *Physical Review* 136.3A, A597. [↗](#).
- Segall, Benjamin (1961). "Energy bands of aluminum". In: *Physical Review* 124.6, S. 1797.
- Shull, C Gi, WA Strauser und EO Wollan (1951). "Neutron diffraction by paramagnetic and antiferromagnetic substances". In: *Physical Review* 83.2, S. 333. [↗](#).
- Simon, Steven H. (2013). *The Oxford solid state basics*. Oxford Univ. Press. [↗](#).
- Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.
- Sullivan, Paul F. und G. Seidel (1968). "Steady-State, ac-Temperature Calorimetry". In: *Phys. Rev.* 173 (3), S. 679–685. [↗](#).
- Van Delft, Dirk (2008). "Little cup of helium, big science". In: *Physics Today* 61.3, S. 36–42. [↗](#).
- Van Delft, Dirk und Peter Kes (2010). "The discovery of superconductivity". In: *Physics today* 63.9, S. 38–43. [↗](#).

Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [🔗](#).