

# **Experimentalphysik C2**

## **Festkörperphysik II**

Markus Lippitz

11. Juni 2025

*cite as*

Lippitz, Markus, 2023.

Festkörperphysik II - Skript zur Vorlesung (Sommer 2023). Zenodo.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.8279873>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wärmeleitung und anharmonische Effekte</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Fermi-Gas</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Elektronen in Festkörpern</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Kristall-Elektronen im Magnetfeld</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Halbleiter</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Supraleiter</b>	<b>73</b>
<b>7</b>	<b>Magnetismus</b>	<b>87</b>
<b>8</b>	<b>Optische Eigenschaften</b>	<b>101</b>
<b>9</b>	<b>Nanostrukturen</b>	<b>113</b>
<b>Anhang</b>		<b>124</b>
<b>A</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Zustandsdichte</b>	<b>133</b>



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.



# Vorwort

Dies ist das Vorlesungsskript meiner Vorlesung 'Festkörperphysik II'. Sie ist eine Kursvorlesung für Studierende im dritten Jahr des Bachelorstudiums. Bei der Auswahl und Gewichtung der Themen folgt sie sehr stark dem in Bayreuth Üblichen. Ich danke an dieser Stelle insbesondere Werner Köhler und Anna Köhler, deren Vorlesungsskripte mir eine große Hilfe waren.

Neben dem Skript gibt es zu jedem Kapitel insgesamt circa eine Stunde 'Vorlesung' auf Video<sup>1</sup>, in der ich mündlich durch den Text führe und dabei an den Rand kritzele. Ich habe den Eindruck, dass es mir beim Sprechen leichter fällt, die Dinge in einen Zusammenhang zu bringen als beim Schreiben, da ich mich traue, schlampiger zu sein. Zur Vorbereitung gab es dann noch ein online multiple-choice Quiz, sowie die Möglichkeit, jederzeit anonym Fragen zu stellen.<sup>2</sup> Im Plenum besprechen wir offene Fragen und diskutierten Aufgaben ähnlich zu Eric Mazurs ConcepTests.<sup>3</sup> Schließlich gibt es die in der Physik üblichen Übungszettel und Kleingruppen-Übungen.

Dieses Skript ist 'work in progress', und wahrscheinlich nie wirklich fertig. Ich danke allen Studierenden des Jahrgangs 2023, die den Text und die Gleichungen aufmerksam gelesen haben, wodurch wir viele Fehler korrigieren konnten. Trotzdem wird es noch welche geben. Wenn Sie Fehler finden, sagen Sie es mir bitte. Die aktuellste Version des Vorlesungsskripts finden Sie auf github.<sup>4</sup> Ich habe alles unter eine CC-BY-SA-Lizenz gestellt (siehe Fußzeile). In meinen Worten: Sie können damit machen, was Sie wollen. Wenn Sie Ihre Arbeit der Öffentlichkeit zur Verfügung stellen, erwähnen Sie mich und verwenden Sie eine ähnliche Lizenz.

Der Text wurde mit der LaTeX-Klasse 'tufte-book' von Bil Kleb, Bill Wood und Kevin Godby<sup>5</sup> gesetzt, die sich der Arbeit von Edward Tufte<sup>6</sup> annähert. Ich habe viele der Modifikationen angewandt, die von Dirk Eddelbüttel im R-Paket 'tint' eingeführt wurden<sup>7</sup>. Die Quelle ist vorerst LaTeX, nicht Markdown.

Markus Lippitz  
Bayreuth, 24. August 2023

<sup>1</sup> [mms.uni-bayreuth.de](https://mms.uni-bayreuth.de)

<sup>2</sup> [frag.jetzt](https://frag.jetzt)

<sup>3</sup> [mazur.harvard.edu](https://mazur.harvard.edu)

<sup>4</sup> [Festkoerper-II](https://github.com/Festkoerper-II)

<sup>5</sup> [tufte-latex](https://tufte-latex)

<sup>6</sup> [edwardtufte.com](https://edwardtufte.com)

<sup>7</sup> [tint: tint is not Tufte](https://tint.tint.is)





# Kapitel 1

## Wärmeleitung und anharmonische Effekte

Markus Lippitz

18. März 2025

### Ziele

- Sie können die unten gezeigte Wärmeleitfähigkeit im Zusammenspiel von Wärmekapazität und Umklappprozessen erklären.
- Sie können die Konzepte Wechselwirkungsquerschnitt und mittlere freie Weglänge benutzen, um Streuprozesse zu beschreiben.

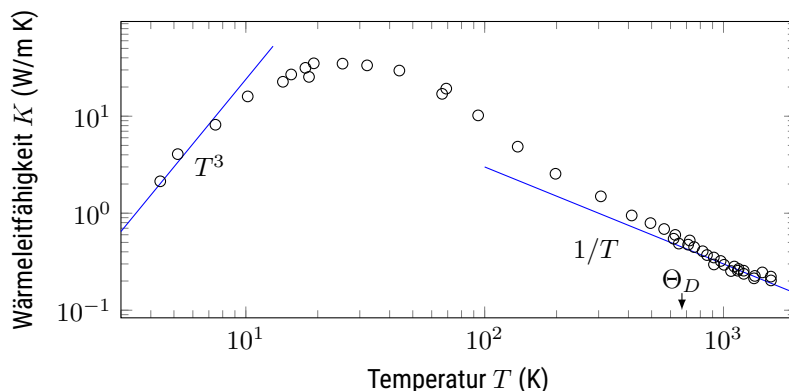


Abbildung 1.1: Wärmeleitfähigkeit  $K$  von Silizium (Glassbrenner und Slack, 1964).

### Überblick

Bis zu diesem Punkt wurden das Bindungspotential der Atome im Festkörper als harmonisch, also rein parabelförmig angenommen. In diesem Kapitel gehen wir darüber hinaus und betrachten, wie in der Molekülphysik, anharmonische höhere Terme in Bindungspotential. Dies führt zur thermischen Ausdehnung und zur Phonon-Phonon-Wechselwirkung. Mit ihr werden wir die oben gezeigte Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit erklären. Die makroskopischen, klassischen Größen Wärmeleitfähigkeit und thermische Ausdehnung stehen in direktem Zusammenhang mit den mikroskopischen Vorstellungen des Phonons als Quasiteilchen, das sich wie in der kinetischen Gastheorie bewegt.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

Dieses Kapitel stellt die Verbindung zum vorangegangenen Semester her. Sie haben Gelegenheit, die zentralen Konzepte der ersten Kapitel der Festkörperphysik aus dem letzten Semester zu wiederholen. Wir brauchen den reziproken Raum, die Dispersionsrelation und die sich daraus ergebende Zustandsdichte, wenn wir im nächsten Kapitel zu Elektronen wechseln.

### Wiederholung

Vergewissern Sie sich, dass Sie die folgenden Fragen beantworten können, und lesen Sie ggf. noch einmal in Ihren Aufzeichnungen des letzten Semesters oder in meinem Skript<sup>1</sup> nach.

<sup>1</sup> Lippitz, 2022.

### Kristallstruktur

- Was ist ein Bravais-Gitter, eine Basis, eine Kristallstruktur?
- Wie sehen häufig vorkommende Bravais-Gitter aus? Welche Symmetrien haben sie?
- Welche Arten von Bindungen gibt es in Festkörpern? Wo sind dabei die Elektronen, auch relativ zu 'ihrem' Atomkern?

### Reziproker Raum

- Was ist der reziproke Raum, die Brillouin-Zone, ein Miller'scher Index?
- Wie sehen die reziproken Gitter von häufig vorkommenden Bravais-Gittern aus?
- Wie bestimmt man Gitterparameter experimentell ?
- Was besagt die Laue-Theorie der Beugung? Und die Bragg-Theorie?
- Was ist ein Strukturfaktor und ein Atomformfaktor?

### Phononen

- Was ist ein Phonon, eine Dispersionsrelation, eine Zustandsdichte?
- Wie sieht die Dispersionsrelation einer ein- oder zwei-atomaren linearen Kette aus? Wie die zugehörige Zustandsdichte?
- Warum nennt man die Zweige optisch bzw. akustisch? Wie geht das im Dreidimensionalen?
- Wie kann man durch inelastische Neutronenstreuung diese Dispersionsrelation messen?

### Wärmekapazität der Phononen

- Wie erklärt man mikroskopisch die Wärmekapazität (von Isolatoren), insbesondere deren Temperaturabhängigkeit?
- Was ist der Unterschied zwischen den Modellen von Debye und Einstein? Wann stimmt welches besser mit den Messungen überein?



## Thermische Ausdehnung

Die thermische Ausdehnung von Festkörpern ist ein Beispiel dafür, wie mikroskopische Eigenschaften des Bindungspotentials und der Phononenstatistik direkt in makroskopischen, 'alltäglichen' Eigenschaften sichtbar werden. Insbesondere zeigt sich, dass ein harmonisches Bindungspotential eine zu grobe Näherung ist.

Bislang haben wir das Bindungspotential  $U(x)$  der Atome als harmonisch angenommen. Die Abhängigkeit von der Auslenkung  $x$  um die Ruheposition war also  $U(x) \propto x^2$ . Nun wollen wir betrachten, welchen Effekt höhere Terme im Potential haben. Bei den Molekül-Schwingungen hatten wir bereits das Morse-Potential besprochen, mit dem ebenfalls die Abweichungen von der harmonischen Form modelliert wurde. Damals hat dies zu Verschiebung der ansonsten äquidistanten Schwingungsniveaus und zu einer Änderung der Auswahlregel für Schwingungsübergänge geführt. Hier verwenden wir ein allgemeines polynomiales Modell, d.h. wir parametrisieren etwas anders.

Sei also<sup>2</sup>

$$U(x) = cx^2 - gx^3 - fx^4, \quad (1.1)$$

mit  $c, g$  und  $f$  als positive Konstanten. Die Nullpunktsenergie ist hier der Einfachheit halber weggelassen. Der ungerade  $x^3$ -Term flacht die positive  $x$  Seite ab und macht die negative Seite steiler. Der  $x^4$ -Term wirkt symmetrisch, macht aber das Potential bei hohen Energien bzw. großen  $x$  breiter und so die Bindung weicher.

Nun interessiert die mittlere Auslenkung  $\langle x \rangle$  aus der Ruheposition bei einer durch die Boltzmann-Verteilung gegebenen Besetzung der Schwingungszustände. Ein Zustand mit dem Bindungsabstand  $x$  tritt auf mit der Wahrscheinlichkeit<sup>3</sup>

$$\frac{e^{-\beta U(x)}}{\int e^{-\beta U(x')} dx'}, \quad (1.2)$$

wobei wie immer  $\beta = 1/k_B T$ . Damit ist die mittlere Auslenkung

$$\langle x \rangle = \frac{\int x e^{-\beta U(x)} dx}{\int e^{-\beta U(x')} dx'}. \quad (1.3)$$

Der Nenner hängt ja nicht von  $x$ , sondern nur von  $x'$  ab und kann so vor das  $dx$ -Integral gezogen werden.

Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, dass  $U(x)$  für typische thermische Energien  $\sim k_B T$  klein genug ist, sodass  $\beta U(x) \ll 1$  gilt. Dann können wir die Exponentialfunktion als Reihe darstellen. Der wesentliche Beitrag im Zähler kommt dabei von den ersten Termen der Exponentialreihe:

$$e^{-\beta U(x)} = e^{-\beta cx^2} e^{+\beta(gx^3 + fx^4)} \approx e^{-\beta cx^2} (1 + \beta gx^3 + \beta fx^4). \quad (1.4)$$

Im Nenner ignorieren wir gleich alle Terme jenseits von  $cx^2$ . Damit erhält man

$$\langle x \rangle = \frac{3g}{4c^2} k_B T. \quad (1.5)$$

Wie erwartet spielt der  $fx^4$ -Term keine Rolle für die Änderung des Bindungsabstands. Sobald aber ein kubischer Term im Potential vorhanden ist ( $g \neq 0$ ),

<sup>2</sup> Siehe auch Charles Kittel, 2006 eq. 5.38 und Kopitzki, 2017 eq. 2.57

<sup>3</sup> Siehe z.B. Gl. 22.8 in Fließbach, 2018.

dann ändert sich die mittlere Auslenkung hin zu größeren Werten, proportional zur Temperatur  $T$ .

Die Gitterkonstante  $R(T)$  ändert sich also linear mit der Temperatur

$$R(T) = R_0 + \langle x \rangle = R_0 + \frac{3g}{4c^2} k_B T \quad , \quad (1.6)$$

mit dem Bindungsabstand  $R_0$  bei  $T = 0$ . Der Wärme-Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  ist dann

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{dT} = \frac{d}{dT} \frac{\langle x \rangle}{R_0} = \frac{3gk_B}{4c^2 R_0} \quad . \quad (1.7)$$

### Zur Selbstkontrolle

1. Wie groß ist ein typischer Wärme-Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$ ? Wie könnte man damit die Koeffizienten  $c$  und  $g$  des Potentials vergleichen?
2. Warum nimmt man hier die Boltzmann-Verteilung, und nicht Bose-Einstein?

## Phonon-Phonon-Wechselwirkung

Die Anharmonizität des Potentials führt dazu, dass die Phononen miteinander wechselwirken. Die Einführung der Normalmoden in der Molekül- oder Festkörperphysik war möglich, weil dort das Potential als harmonisch angenommen wurde. Der  $x^3$ -Term führt dazu, dass die einzelnen Moden nicht mehr unabhängig voneinander sind, miteinander koppeln.<sup>4</sup> Ein Molekül im Vakuum kann so Energie von einer hoch angeregten Schwingungsmode auf alle anderen Moden verteilen.

Die Phonon-Phonon-Wechselwirkung unterstreicht die Beschreibung von Phononen als Quasi-Teilchen. Phononen wechselwirken miteinander wie Billardkugeln unter Beachtung der Energie- und Impulserhaltung. Das kann man experimentell nachweisen. Zwei sich kreuzende Ultraschallwellen erzeugen eine dritte Welle in der durch die Impulserhaltung erwarteten Richtung (Abb. 1.2). Phonon-Phonon-Streuung ist also ein direktes Ergebnis der Anharmonizität und spielt eine wichtige Rolle bei den unten besprochen Transportphänomenen wie der Wärmeleitung.

<sup>4</sup> Eine Rechnung findet sich in Gross und Marx, 2023.

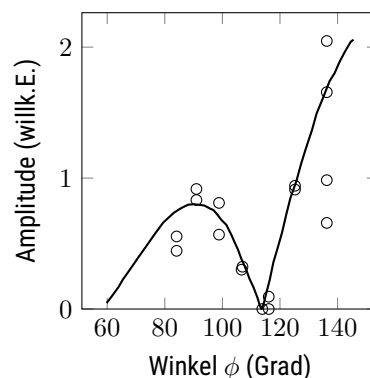
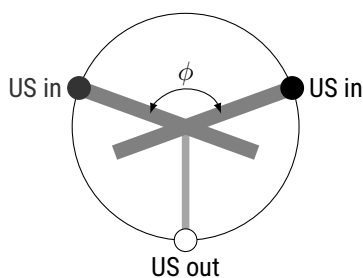


Abbildung 1.2: Phonon-Phonon-Wechselwirkung in polykristallinem Magnesium (Rollins Jr, L. H. Taylor und Todd Jr, 1964). Zwei Ultraschallwellen kreuzen sich unter dem Winkel  $\phi$ . Man detektiert im Winkel der Impulserhaltung die resultierende Amplitude. Falls eine der Wellen transversal, die andere longitudinal ist, dann beobachtet man eine Auslöschung unter einem charakteristischen Winkel.

### Zur Selbstkontrolle

3. Falls Sie die 'Moderne Optik' besucht haben: Könnte man diesen Effekt auch mit der nichtlinearen Optik im Wellen-Bild beschreiben? Wo steckt dabei die

Anharmonizität des Potentials?

## Wärmeleitfähigkeit

Bislang hatte der Festkörper überall die gleiche Temperatur. Nun betrachten wir beispielsweise einen (dielektrischen<sup>5</sup>) Stab, der an beiden Enden durch ein Wärmebad auf eine zeitliche konstante aber verschiedene Temperatur gehalten wird. Makroskopisch ist der Fluss der thermischen Energie, also die Wärmestromdichte  $\mathbf{j}_q$  abhängig von der Wärmeleitfähigkeit  $K$  und dem Gradienten der Temperatur  $T$ , also

$$\mathbf{j}_q = -K \nabla T \quad (1.8)$$

Wir modellieren den Wärmestrom analog zur kinetischen Gastheorie als Diffusion von Phononen. Wie auch schon bei der Wärmekapazität der Phononen steigt mit steigender Temperatur die Anzahl der Phononen bei den durch die Zustandsdichte erlaubten Frequenzen. Am warmen Ende des Stabes gibt es also mehr Phononen, die dann zum kalten Ende gelangen und so Energie transportieren. Dieser Transportprozess steckt in der Wärmeleitfähigkeit  $K$ . Die kinetische Gastheorie ergibt

$$K = \frac{1}{3} C v \ell \quad (1.9)$$

mit der Wärmekapazität pro Volumen  $C$ , der Teilchengeschwindigkeit  $v$  und der mittleren freien Weglänge  $\ell$ . Hier ist nun  $C$  die Wärmekapazität der Phononen aus dem letzten Semester,  $v$  deren Ausbreitungs- oder Schallgeschwindigkeit und  $\ell$  eine noch zu beschaffende mittlere freie Weglänge, also dem räumlichen Abstand zwischen zwei Stößen. Die Wechselwirkung mit anderen Phononen des letzten Abschnitts begrenzen also die mittlere freie Weglänge, ebenso Defekte im Kristall und die Kristalloberfläche.

In typischen Festkörpern liegen die Schallgeschwindigkeiten  $v$  bei einigen 1000 m/s und die mittlere freie Weglänge  $\ell$  bei einigen Nanometern bis Mikrometern. Die Wärmeleitfähigkeit variiert zwischen etwa 1 W/(m K) bei schlechten Wärmeleitern und über 2000 W/(m K) in Diamant.

Eigentlich sind alle drei Größen von der Frequenz und ggf. auch der Richtung abhängig. Dies ignorieren wir hier und verstehen sie als effektive Größen. Das ist die *Dominante-Phononen-Näherung*, ähnlich wie beim Einstein-Modell die optischen Phononen als deltaförmige Zustandsdichte angenommen wurden.

### Zur Selbstkontrolle

4. Inwiefern spielen Oberflächen- und Grenzflächeneffekte (z. B. bei dünnen Filmen oder nanostrukturierten Materialien) eine Rolle für die Wärmeleitfähigkeit, und wie könnte man theoretisch oder experimentell abschätzen, ab welcher Längenskala diese Effekte dominant werden?

## Mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge  $\ell$  kann rein geometrisch verstanden werden als Weglänge, bis zu der ein Strahl wieder auf eine Zielscheibe trifft. Die Fläche

<sup>5</sup> In Metallen dominiert die Wärmeleitung durch Elektronen.



Abbildung 1.3: Scheiben der Fläche  $\sigma$  mit einer Anzahl-Dichte  $n$  ergeben geometrisch die mittlere freie Weglänge  $\ell$ .

der Zielscheibe entspricht dabei dem Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma$ . Dazu benötigt man nur die Anzahl der Scheiben pro Volumen, also die Dichte  $n$ . Damit ist die mittlere freie Weglänge  $\ell$

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad . \quad (1.10)$$

In der Sprache der Streutheorie, wie beispielsweise bei der Röntgenstreuung, ist der Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma$  proportional zum Betragsquadrat  $|A|^2$  der Streuamplitude.

Dem Scheibchen-Bild nahe kommt die Streuung an Punktdefekten im Kristall. Punktdefekte können Atomfehlstellen, Substitutionsatome oder kleine Einschlüsse sein; jede Abweichung vom periodischen Gitter führt zu Streuung. Wenn die Ausdehnung  $a$  des Defekts viel kleiner als die Wellenlänge  $\lambda$  des Phonons ist, dann ist die Physik völlig analog zur Rayleigh-Streuung, beispielsweise von Licht an Luft-Molekülen. Der Streuquerschnitt ist in diesem Fall

$$\sigma \propto \frac{a^6}{\lambda^4} \quad \text{oder} \quad \propto a^6 \omega^4 \quad . \quad (1.11)$$

Dieser Effekt ist nicht temperaturabhängig, kann also nicht helfen, die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitung zu erklären. Er liefert vielmehr eine von der Qualität der Probe abhängenden konstanten Beitrag, der bei tiefen Temperaturen erreicht wird. In hochreinen Einkristallen kann die mittlere freie Weglänge dann sehr groß werden.

### Zur Selbstkontrolle

5. Worin unterscheiden und worin ähneln sich die Streuprozesse in Gasen und Festkörpern, insbesondere welche Prozesse führen zur Temperaturabhängigkeit der mittleren freien Weglänge?

## Phonon-Phonon-Streuung

Auch die Phonon-Phonon-Wechselwirkung kann die freie Weglänge begrenzen, indem zwei einfallende Phononen in ein neues umgewandelt werden. Aus der Sicht eines der einfallenden Phononen ist die Streuwahrscheinlichkeit proportional zur Dichte  $n(T)$  der anderen Phononen, also erwarten wir

$$\ell \propto \frac{1}{n(T)} \quad . \quad (1.12)$$

Bei der Streuung von Phononen in einem Kristall muss man allerdings den reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}$  berücksichtigen. In einem Kristall ist die Impulserhaltung

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{G}_{hkl} \quad . \quad (1.13)$$

Der reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}_{hkl}$  meint eine (unendliche) Menge von Vektoren, die sich aus den Linearkombinationen der primitiven Einheitsvektoren mit den Koeffizienten  $h, k, l$  zusammensetzt.

Bei der Impulserhaltung unterscheiden wir den *Normalprozess* ( $\mathbf{G} = 0$ ) vom *Umklappprozess* ( $\mathbf{G} \neq 0$ ). Im Normalprozess gilt die Impulserhaltung in der strengen Form wie im Vakuum. Bei einem Gas von Phononen bleibt der Gesamtimpuls dann aber erhalten. Die Drift-Geschwindigkeit der Phononen

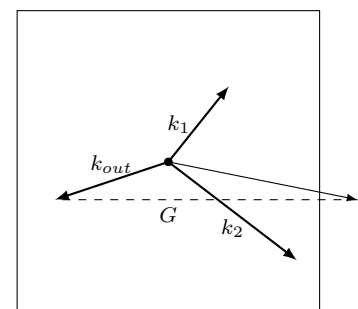


Abbildung 1.4: Skizze zum Umklappprozess. Wenn die Summe von zwei reziproken Vektoren außerhalb der Brillouin-Zone liegt, dann führt die Addition von  $\mathbf{G}$  zur Änderung der Richtung.

kann sich nicht ändern. Es wird keine Netto-Wärmestrom verhindert und dieser Fall trägt nicht zu einem Wärmewiderstand bei.

Beim Umklappprozess (U-Prozess) kann sich aber die Richtung ändern. Die Summe  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  kann gerade über die erste Brillouin-Zone hinaus reichen, wird durch  $\mathbf{G}$  zurück verschoben und kann dann entgegen der ursprünglichen Vektoren zeigen (siehe Abbildung 1.4). Damit ändert sich der Gesamtimpuls des Phononen-Gases, was einem Wärmewiderstand entspricht.

#### Zur Selbstkontrolle

6. Zeigt Abbildung den Realraum oder den reziproken Raum? Wie sieht das im anderen Raum aus?
7. Wie kommt es, dass hier die Impulserhaltung (scheinbar) verletzt ist?

### Temperaturabhängigkeit des Umklappprozesses

Damit der Umklappprozess stattfindet, muss

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{g}| \quad , \quad (1.14)$$

wobei  $\mathbf{g}$  hier den kürzesten reziproken Gittervektor aus  $\mathbf{G}_{hkl}$  meint.  $\mathbf{g}/2$  ist also gerade die Grenze der 1. Brillouin-Zone. Wir benötigen die Energie der Phononen mit solchen Impulsen  $\mathbf{k}_i$ . Dazu nehmen wir das Debye-Modell an, also einen linearen Zusammenhang zwischen dem Betrag des Impulses und der Frequenz des Phonons. Das Modell wird durch die Steigung der Dispersionsrelation bzw. die Debye-Temperatur  $\Theta$  parametrisiert, die materialabhängig ist. Am Rand der Brillouin-Zone haben die Phononen in diesem Modell die Energie  $k_B \Theta$ , so dass eine charakteristische Energie für den Einsatz des Umklappprozesses  $k_B \Theta/2$  ist. Die Besetzungsdichte bei dieser Energie ist in der Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle n \rangle \propto \frac{1}{e^{\Theta/2T} - 1} \quad (1.15)$$

und die mittlere freie Weglänge ist mit Gl. 1.12

$$\ell \propto e^{\Theta/2T} - 1 = \begin{cases} \Theta/2T & \text{für } T \gg \Theta \\ e^{\Theta/2T} & \text{für } T \ll \Theta \end{cases} \quad . \quad (1.16)$$

Bei sehr tiefen Temperaturen ist also die mittlere freie Weglänge nur durch die Streuung an Punktdefekten begrenzt. Dies nennt man 'ballistischen Transport'. Bei reinen Kristallen kann die freie Weglänge sehr lang werden. Sie fällt dann exponentiell mit steigender Temperatur ab, weil immer mehr Phononen als Streupartner hinzu kommen. Mit weiter steigender Temperatur geht der exponentielle Abfall oberhalb der Debye-Temperatur  $\Theta$  in einen  $1/T$ -Verlauf über.

Für die Wärmeleitfähigkeit benötigen wir noch die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität  $C$ . Diese ist nach dem Debye-Modell proportional zu  $T^3$  bei  $T \ll \Theta$ . Weit oberhalb  $\Theta$  gilt das Dulong-Petit-Gesetz und die Wärmekapazität ist konstant. Insgesamt erhalten wir damit

$$K = \frac{1}{3} c v \ell \propto \begin{cases} \Theta/T & \text{für } T \gg \Theta & \text{Phonon-Phonon} \\ T^n e^{\Theta/2T} & \text{für } T \ll \Theta & \text{Phonon-Phonon} \\ T^3 & \text{für } T \ll \Theta & \text{Phonon-Defekt} \end{cases} \quad . \quad (1.17)$$

Der Exponent  $n$  bei  $T \ll \Theta$  soll die genaue Temperaturabhängigkeit offen lassen. Dazu müsste man das Integral im Debye-Modell der Wärmekapazität im Bereich  $T \approx \Theta$  lösen.

Für Silizium finden wir in den gemessenen Daten (Abb. 1.1) sowohl die  $T^3$ -Abhängigkeit bei tiefen Temperaturen, als auch die  $T^{-1}$  oberhalb der Debye-Temperatur. Der Übergangsbereich ist aufwändiger zu modellieren. Natriumfluorid (NaF) verhält sich ähnlich (Abb. 1.5), wenn man die etwas andere Debye-Temperatur berücksichtigt.

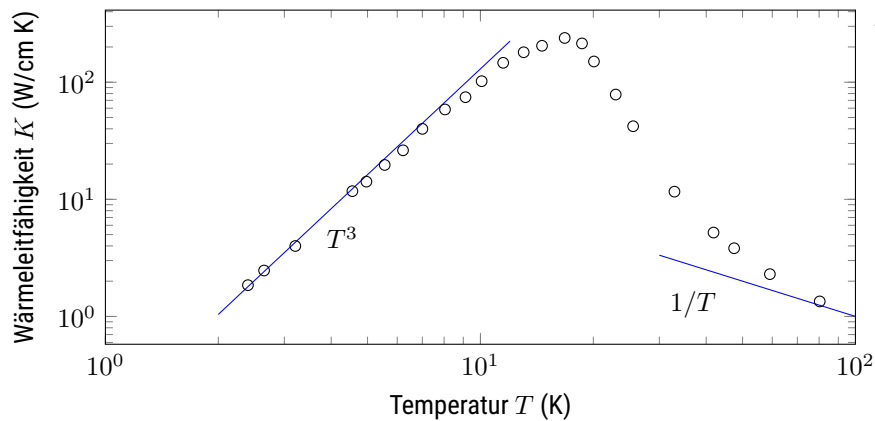


Abbildung 1.5: Wärmeleitfähigkeit  $K$  von Natriumfluorid (NaF) (Jackson, Walker und McNelly, 1970). Die Debye-Temperatur von NaF beträgt 491 K.

### Zur Selbstkontrolle

8. Beschreiben Sie in Ihren Worten, wie es zur Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit kommt, insbesondere bei hohen und niedrigen Temperaturen.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Fließbach, Thorsten (2018). *Statistische Physik*. Springer. [🔗](#).
- Glassbrenner, C Jo und Glen A Slack (1964). "Thermal conductivity of silicon and germanium from 3 K to the melting point". In: *Physical review* 134.4A, A1058. [🔗](#).
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [🔗](#).
- Jackson, Howard E, Charles T Walker und Thomas F McNelly (1970). "Second sound in NaF". In: *Phys. Rev. Lett.* 25.1, S. 26.
- Kittel, Charles (2006). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Siegfried Hunklinger. 14. Oldenbourg.
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [🔗](#).
- Lippitz, Markus (2022). *Lecture notes 'Molekülphysik und Festkörperphysik I'*. Version v22.2. CC-BY-SA 4.0. [🔗](#).
- Rollins Jr, Fred R, Lyle H Taylor und Paul H Todd Jr (1964). "Ultrasonic study of three-phonon interactions. II. Experimental results". In: *Physical Review* 136.3A, A597. [🔗](#).





# Kapitel 2

## Fermi-Gas

Markus Lippitz  
6. Mai 2025

### Ziele

- Sie können das Konzept der Fermi-Kugel benutzen, um den elektrischen Widerstand von Metallen zu erklären.
- Sie können den mikroskopischen Ursprung des Wiedemann-Franz-Gesetzes erklären, also warum die Temperaturabhängigkeit der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit in Metallen so ähnlich bis identisch ist.



Abbildung 2.1: Temperaturabhängigkeit der thermischen ( $K$ ) und elektrischen ( $\sigma$ ) Leitfähigkeit von Kupfer und die daraus abgeleitete Lorenz-Zahl  $L = K/\sigma T$ . Das Wiedemann-Franz-Gesetz besagt, dass diese konstant ist. Daten aus Hust und Lankford, 1984.

### Überblick

Mit diesem Kapitel beginnen wir mit den elektronischen Eigenschaften der Festkörper. Bislang hatten wir diese dadurch ignoriert, dass die Beispiele immer als Isolatoren gewählt waren, Elektronen also keine Rolle gespielt haben. Von nun an stehen die Elektronen im Mittelpunkt. Wie in der Molekülphysik auch machen wir die adiabatische Näherung. Wir nehmen also an, dass die Elektronen viel schneller sind als die Kerne, die Kerne aber das Potential vorgeben, in dem sich die Elektronen bewegen. Weiterhin machen wir die Ein-Elektron-Näherung. Wir betrachten also nur ein Elektron. Die Anwesenheit



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

aller anderen Elektronen beeinflusst nur das Potential, auch über das Pauli-Prinzip. Korrelationen zwischen Elektronen berücksichtigen wir erst in den Kapiteln zur Supraleitung und zum Magnetismus.

In diesem Kapitel bildet der Kristall ein großes Kastenpotential, aber die Kerne selbst kommen nicht vor. Im folgenden Kapitel wird dann das Kristallgitter wichtig werden.

## Freies Elektronengas

In beispielsweise Alkali-Metallen sind die meisten Elektronen an 'ihren' Atomkern gebunden und nur sehr wenige Elektronen pro Atomkern tragen zur Bindung bei. Diese Elektronen sehen nicht das vollständige Coulomb-Potential der stark positiv geladenen Atomrümpfe. Die gebundenen Elektronen schirmen dies ab, so dass nur ein schwaches und räumlich beinahe konstantes Potential verbleibt. In diesem Potential bewegen sich die Valenz-Elektronen der Alkali-Atome wie ein Gas. Man spricht daher von freiem Elektronengas oder auch Fermi-Gas.

Wir könnten die freien Elektronen als Teilchen im 3D-Kasten modellieren. Die Schrödingergleichung innerhalb des Kastens beinhaltet dann nur noch die kinetische Energie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

und ihre Lösung sind ebene Wellen

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und der Normierung auf das Volumen  $V$  des Kastens. Die Energie beträgt dann

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}|^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} \quad (2.3)$$

und ist von der Richtung natürlich unabhängig.

Die Gleichungen werden angenehm, wenn wir (wie bei den Phononen) periodische Randbedingungen einführen: alle Eigenschaften sollen im Ort periodisch mit der Kasten-Größe  $L$  sein, also

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + L\hat{\mathbf{e}}_i) \quad , \quad (2.4)$$

mit  $\hat{\mathbf{e}}_i$  einem kartesischen Einheitsvektor. Damit umgehen wir auch das Problem, was außerhalb des Kastens eigentlich passiert. Wie bei den Phononen sind die möglichen Werte des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  diskret

$$k_i = \frac{2\pi}{L} m_i \quad \text{mit} \quad i = x, y, z \quad . \quad (2.5)$$

## Zustandsdichte

Die Zustandsdichte beschreibt die Anzahl der Zustände pro Energie- oder Wellenvektor-Intervall ( $D(E) dE$  oder  $D(k) dk$ ). Manchmal findet man auch zusätzlich eine Normierung auf das Volumen, die wir hier aber nicht durchführen. Durch die Quantisierung der Wellenfunktion im Kasten sind nur

noch diskrete Energien möglich. Je größer der Kasten wird, desto dichter liegen diese diskreten Niveaus beieinander. Man kann sie dann abzählen und eine Dichte (Anzahl pro Energieintervall) angeben. Der Weg zur Berechnung einer Zustandsdichte ist eigentlich immer derselbe, den Sie schon bei den Phononen gesehen hatten: Man beginnt im reziproken Raum, weil es dort einfach ist, und wandelt das dann in eine Energie um.

Die Zustandsdichte im reziproken Raum ist konstant:

$$D(k)dk = \frac{V}{(2\pi)^3} dk \quad (2.6)$$

Um sie als Funktion der Energie zu erhalten benötigen wir wie bei den Phononen die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial(\hbar k)} = \frac{\hbar k}{m} \quad (2.7)$$

und erhalten<sup>1</sup>

$$D'(E)dE = \frac{V}{\hbar(2\pi)^3} dE \int_{E=\text{const.}} \frac{dS_E}{v_g} \quad (2.8)$$

wobei das Integral über eine Kugeloberfläche konstanter Energie im reziproken Raum läuft und  $4\pi k^2/v_g$  ergibt. Jetzt müssen wir noch berücksichtigen, dass wir jeden Zustand nach dem Pauli-Prinzip mit zwei Elektronen unterschiedlichen Spins besetzen können:

$$D(E)dE = 2D'(E)dE = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} V \sqrt{E} dE \quad (2.9)$$

Damit haben wir die Zustandsdichte von freien Elektronen.

### Zur Selbstkontrolle

1. Wie kann man den wurzelförmigen Verlauf der Zustandsdichte  $D(E)$  verstehen?

<sup>1</sup> Für 3 Dimensionen. Niedrigdimensionale Strukturen kommen später.

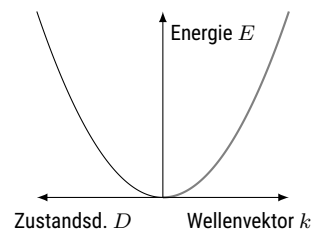


Abbildung 2.2: Dispersionsrelation  $E(k)$  und Zustandsdichte  $D(E)$  eines Fermi-Gases in 3 Dimensionen.

## Fermi-Energie und Fermi-Kugel

In Metallen, insbesondere Alkali-Metallen sind die Eigenschaften maßgeblich durch die freien Elektronen bestimmt. Elektronen sind Fermionen, haben einen halbzahligen Spin und unterliegen dem Pauli-Prinzip und der Fermi-Dirac-Statistik. Das macht die Besetzung der Zustände besonders. Im thermischen Gleichgewicht ist jeder Zustand besetzt wie

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (2.10)$$

mit dem chemischen Potential  $\mu$ . Die Fermi-Dirac-Verteilung ist (um das Pauli-Verbot zu erfüllen) maximal Eins. Wenn  $f(E) \ll 1$ , also  $E - \mu \gg k_B T$ , dann geht sie in die Boltzmann-Verteilung über. Dies wird später bei den Halbleitern wichtig werden, da dort die interessanten Energien  $E$  relativ weit weg von  $\mu$  sind.

Das chemische Potential  $\mu$  kommt aus der Ableitung beispielsweise der inneren Energie  $U$  nach der Stoffmenge  $n_i$ . Bei mehreren Stoffen gibt es also mehrere  $\mu_i$ .

$$\mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{V, S, n_j \neq n_i} \quad (2.11)$$

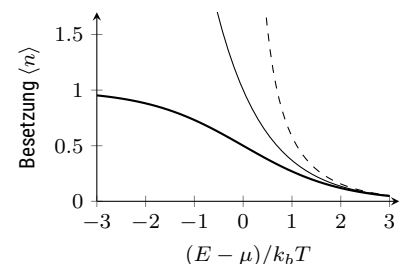


Abbildung 2.3: Fermi-Dirac-Statistik (fett) in Vergleich zur Bose-Einstein-Statistik (gestrichelt) und Boltzmann-Statistik (dünn).

bzw.

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dn_i \quad . \quad (2.12)$$

Bei uns ist der Stoff natürlich die Elektronen, daher brauchen wir im folgenden kein Index an  $\mu$ .

Bei  $E = \mu$  geht die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion immer durch 1/2. Am absoluten Nullpunkt ( $T = 0$ ) ist sie konstant Eins für  $E < \mu$  und konstant Null darüber. Wir bezeichnen als *Fermi-Energie*  $E_F$  die Energie, bis zu der alle Zustände lückenlos gefüllt sind. Das entspräche dem chemischen Potential, wenn letzteres nicht temperaturabhängig wäre. So definieren wir

$$E_F = \mu(T = 0) \quad . \quad (2.13)$$

Damit ist die Fermi-Energie *nicht* temperaturabhängig. Später werden wir den Begriff 'Fermi-Niveau' einführen, der nur ein anderes Wort für chemisches Potential ist und damit temperaturabhängig.

Wir berechnen die Fermi-Energie  $E_F$ , indem wir bei  $T = 0$  nach und nach Elektronen in unseren Kasten einfüllen. Bei  $T = 0$  füllen die Elektronen nach dem Pauli-Prinzip die tiefsten Zustände auf, so dass im Impulsraum eine gefüllte Kugel entsteht. Die Energie des höchsten gefüllten Zustandes ist die Fermi-Energie. Wir integrieren also die Zustandsdichte  $D(E)$  soweit auf, bis wir  $N$  Elektronen untergebracht haben. Die Elektronendichte  $n$  ist also<sup>2</sup>

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE \quad . \quad (2.14)$$

<sup>2</sup> Analog kann man ein temperaturabhängiges chemisches Potential ausrechnen. Siehe Hunklinger, 2014 oder Gross und Marx, 2023.

Damit erhalten wir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \quad . \quad (2.15)$$

Alle Komposita mit 'Fermi-' sind entsprechend definiert. Der Fermi-Impuls  $k_F$  ist einfach

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad . \quad (2.16)$$

Die *Fermi-Kugel* ist die Kugel im reziproken Raum mit dem Radius  $k_F$ . Am absoluten Nullpunkt sind also alle Elektronen innerhalb dieser Kugel. Während die Fermi-Fläche im freien Elektronengas kugelförmig ist, wird sie in realen Materialien durch die Bandstruktur des Kristalls verzerrt. Dies führt zu komplexen *Fermi-Flächen*, welche die elektronischen Transporteigenschaften bestimmen.

Bei Metallen trägt jedes Atom ein (oder mehr) Elektronen bei. Die Elektronendichte ist also etwa  $n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Die Fermi-Energie von den hier betrachteten Metallen liegt typischerweise im Bereich von einigen Elektronvolt und die Fermi-Temperatur damit bei einigen 10 000 K, weit jenseits der Schmelztemperatur. Für Elektronen im Festkörper besteht also kein so großer Unterschied zum absoluten Nullpunkt. Die Stufenfunktion der Fermi-Dirac-Verteilung wird etwas abgerundet. Wenn man es maßstabsgerecht zeichnen würde, dann könnte man aber bei Raumtemperatur keinen Unterschied erkennen. In Halbleitern später ist die Ladungsträgerdichte viel kleiner.

## Zur Selbstkontrolle

2. Woran liegt es, dass hier die Fermi-Fläche gerade eine Kugeloberfläche ist? Was ist notwendig, damit andere Formen entstehen?

3. Wieviel Elektronen pro Atom muss ein Material ungefähr besitzen, damit die Fermi-Kugel den Rand der Brillouinzone berührt?
4. Was bedeutet 'Für Elektronen im Festkörper besteht also kein so großer Unterschied zum absoluten Nullpunkt'?

## Wärmekapazität der freien Elektronen

Neben den Gitterschwingungen (Phononen) tragen auch Elektronen zur Wärmekapazität von Metallen bei. Da die Elektronendichte in Metallen hoch ist, würde man erwarten, dass dieser Beitrag groß ist. Es zeigt sich jedoch, dass nur ein kleiner Teil der Elektronen thermisch angeregt werden kann – eine direkte Folge der Fermi-Dirac-Statistik.

Analog zum Vorgehen bei den Phononen berechnen wir die Wärmekapazität der Elektronen als Ableitung der inneren Energie nach der Temperatur. Wir beginnen<sup>3</sup> mit der spezifischen inneren Energie  $u$

<sup>3</sup> Hunklinger, 2014 folgend

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{V} \int_0^\infty E D(E) f(E) dE \quad (2.17)$$

Am absoluten Nullpunkt geht  $f(E)$  in die Heavyside-Funktion über, so dass wir einfach das Integral nur bis  $E_F$  laufen lassen

$$u_0 = u(T = 0) = \frac{1}{V} \int_0^{E_F} E D(E) dE = \frac{3n}{5} k_B T_F \quad (2.18)$$

Bei einem klassischen freien Gas von Teilchen hätten wir

$$u_{\text{klassisch}} = \frac{3n}{2} k_B T \quad \text{und} \quad c_{\text{klassisch}} = \frac{3n}{2} k_B \quad (2.19)$$

Weil  $T_F \gg T$  sind viele Elektronen schon bei Energie deutlich größer als  $k_B T$ . Dies ist eine Konsequenz des Pauli-Verbots. Damit ist die innere Energie eines freien Elektronengases sehr hoch. Wir müssen zu sehr hochenergetischen Zuständen ausweichen, um noch Elektronen zufügen zu können.

Die Ableitung  $\partial u / \partial T$  ist aufwändig. Lehrbücher zeigen ein paar Schritte. Ich möchte das hier abkürzen und so argumentieren: ein freies Elektronengas ist quasi ein klassisches Gas, nur kann aufgrund der Fermi-Dirac-Statistik nur der Anteil  $T/T_F$  weitere Energie aufnehmen und so zur Wärmekapazität beitragen. Zustände, die weiter von  $E_F$  entfernt sind, sind entweder vollständig besetzt, so dass im Abstand  $k_B T$  kein freier Zustand vorhanden ist, oder sie sind vollständig unbesetzt. Die Abschätzung ist also

$$c_{\text{geschätzt}} = c_{\text{klassisch}} \frac{T}{T_F} = \frac{3n k_B}{2} \frac{T}{T_F} \quad (2.20)$$

Eine etwas bessere Rechnung<sup>4</sup> ergibt einen um den Faktor  $\pi^2/3$  größeren Wert

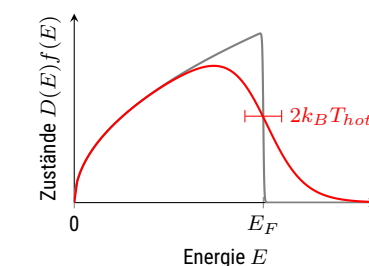


Abbildung 2.4: Nur Zustände in der Nähe der Fermi-Energie tragen zur Wärmekapazität bei. Die graue Kurve ist um den Faktor 40 kühler und entspricht im etwa den realen Verhältnissen bei Raumtemperatur.

$$c_{\text{el}} = \frac{\pi^2 n k_B}{2} \frac{T}{T_F} = \gamma T \quad (2.21)$$

mit der Sommerfeld-Konstanten  $\gamma$ .

In Metallen tragen sowohl Phononen als auch Elektronen zur Wärmekapazität bei. Während die Phononen bei niedrigen Temperaturen mit dem

<sup>4</sup> Integration der Fermi-Dirac-Statistik und Taylor-Reihe um  $E_F$

Debye-Modell  $T^3$ -abhängig sind und bei hohen Temperaturen das Dulong-Petit-Gesetz erreichen, ist der Beitrag der Elektronen linear mit  $T$ . Die gesamte Wärmekapazität ist somit die Summe dieser beiden Terme:

$$c_{\text{ges}} = \gamma T + \begin{cases} 3n_A k_B & \text{für } T \gg \Theta \\ \beta T^3 & \text{für } T \ll \Theta \end{cases} \quad (2.22)$$

mit  $\beta$  aus dem Debye-Modell und  $n_A$  der Teilchenzahl-Dichte der Atom-Kerne.

Dieses Modell beschreibt die Wärmekapazität von Alkali-Metallen und anderen 'einfachen' Metallen gut (Abb. 2.5). In anderen Fällen finden sich deutliche Abweichung, beispielsweise bei Nickel. Hier ist die gemessene Wärmekapazität um etwa den Faktor 15 höher als die wie oben berechnete. Bei den Alkali-Metallen ist die Annahme des freien Elektronengases gerechtfertigt. Bei Nickel tragen aber Elektronen zur Wärmekapazität bei, die aus atomaren d-Orbitalen stammen, daher eine Vorzugsrichtung haben und keine isotrope Zustandsdichte im Kristall besitzen. Dies führt zu einer hohen Zustandsdichte an der Fermi-Energie und einem größeren elektronischen Beitrag zur Wärmekapazität, da mehr Zustände in einem schmalen Energiebereich  $k_B T$  thermisch angeregt werden können.<sup>5</sup>

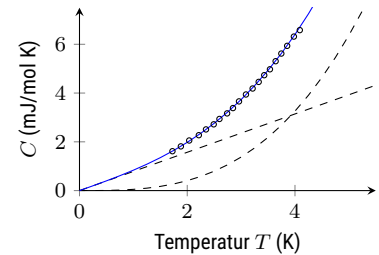


Abbildung 2.5: Wärmekapazität von Kupfer bei tiefen Temperaturen nach Rayne, 1956. Elektronen und Phononen tragen bei.

<sup>5</sup> siehe Hunklinger, 2014, Abbildung 8.9

## Zur Selbstkontrolle

5. Wo zeigt sich in Abb. 2.4 die Wärmekapazität?

## Drude-Modell

Die herausragende Eigenschaft der Metalle ist ihre elektrische Leitfähigkeit. Die Leitfähigkeit ist hoch, aber nicht unendlich. Die Frage ist also, was die Bewegung der Elektronen so einschränkt, dass die Leitfähigkeit begrenzt bleibt. Dies wurde erstmals von Paul Drude um 1900 erklärt. Das Drude-Modell liefert das Ohmsche Gesetz, also ein richtiges Ergebnis, aber aus heutiger Sicht aus den falschen Gründen. Erst Arnold Sommerfeld und Hans Bethe brachten um 1933 die Quantenmechanik ins Spiel und lieferten die moderne Erklärung.

Die Annahmen des Drude-Modells sind ein freies Elektronengas, das nur mit den Atomrümpfen, aber nicht miteinander stößt. Ohne externes Feld bewegen die Elektronen sich thermisch, aber ohne Vorzugsrichtung. Der Mittelwert über alle (vektoriellen) Geschwindigkeiten des Elektronengases ist also  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ . Das externe elektrische Feld  $\mathcal{E}$  überlagert der thermischen Bewegung eine Driftbewegung mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle$ . Nach einem Abschalten des Feldes würde die Driftbewegung durch die Stöße langsam zum Erliegen kommen. Die Bewegungsgleichung ist also<sup>6</sup>

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -e\mathcal{E} - m \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{\tau} \quad (2.23)$$

$\tau$  ist dabei die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, also ein Maß für die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter. Sie hängt von der Temperatur, dem Material und seiner Reinheit ab. In Metallen beträgt  $\tau \approx 10$  fs. Die Geschwindigkeit eines Elektrons bei  $E_F$  beträgt etwa  $10^6$  m/s, so dass die mittlere freie Weglänge einige 10 nm beträgt.

<sup>6</sup> Simon, 2013; Singleton, 2001.

Im stationären Fall der Driftbewegung ( $d\langle \mathbf{v} \rangle / dt = 0$ ) erhält man

$$\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\tau}{m}\mathcal{E} = -\mu\mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{|\mathbf{v}_d|}{|\mathcal{E}|} = \frac{e\tau}{m} \quad (2.24)$$

mit der Beweglichkeit  $\mu$ . Die Stromdichte ist dann

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = ne\mu\mathcal{E} = \sigma\mathcal{E} \quad \text{mit} \quad \sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (2.25)$$

mit der Elektronendichte  $n$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Damit haben wir den linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung des Ohm'schen Gesetzes erhalten. Der makroskopische Widerstand (bzw. dessen reziproker Wert, die Leitfähigkeit  $\sigma$ ) ist verknüpft mit zwei mikroskopischen Größen, der Elektronendichte  $n$  und der mittleren Stoßzeit  $\tau$ . Erstere ergibt sich aus der Zahl der Valenz-Elektronen pro Atom und der Gitterkonstanten des Kristalls. Letzte liegt wie oben schon erwähnt bei etwa 10 fs.

Dieses Modell ignoriert völlig das Pauli-Prinzip und dass es eine Fermi-Dirac-Verteilung gibt, bei der quasi alle Zustände besetzt sind. Die allermeisten Elektronen können gar nicht streuen, weil sie dazu einen leeren Endzustand bräuchten, den es nicht gibt. Wir werden aber sehen, dass ein besseres Modell das gleiche Ergebnis liefert.

## Drude-Sommerfeld-Modell

Arnold Sommerfeld und Hans Bethe entwickelten eine verbesserte Theorie. Die Elektronen sind quasi frei, es gilt die Schrödinger-Gleichung und das Pauli-Prinzip. Die Fermi-Fläche sei eine Kugel<sup>7</sup>. Ohne äußeres Feld fließt im thermischen Gleichgewicht kein Strom, da die Fermikugel um  $\mathbf{k} = 0$  zentriert ist. Da wir Isotropie angenommen haben gibt es für jedes Elektron mit  $\mathbf{k}$  eines mit  $-\mathbf{k}$ .

Eine externes Feld  $\mathcal{E}$  beschleunigt jedes Elektron, ändert also zeitlich kontinuierlich den Impuls der Elektronen. Damit bewegt sich die gesamte Fermikugel kontinuierlich immer weiter von der Gleichgewichtsposition weg:

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e\mathcal{E} = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

Streuprozesse können dann aber Elektronen von 'vorne' an der Fermikugel in den frei werdenden Bereich 'hinter' der Kugel umlagern. Die Stöße wirken also rückstellend auf die Bewegung der Fermikugel. Im sich einstellenden Gleichgewicht wird die Fermikugel bei einer mittleren Stoßzeit  $\tau$  um

$$\delta k = \frac{-e\tau\mathcal{E}}{\hbar} \quad (2.27)$$

aus dem Ursprung verschoben sein. Nur der kleine Anteil  $\delta k/k_F$  der Elektronen trägt zum Ladungstransport bei. Das sind aber die an der Fermi-Kante, also die schnellsten von allen. Für die Leitfähigkeit ergibt das Sommerfeld-Modell

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2}{m} \tau(E_F) \quad (2.28)$$

mit  $\tau(E_F)$  der Stoßzeit der Elektronen an der Fermi-Kante. Der Unterschied zum Drude-Modell besteht nur in einer etwas anderen Bedeutung zweier

<sup>7</sup> Was in diesem Kapitel trivial ist, später aber bedeutet, dass nur der Betrag des Wellenvektors  $k$  in die Energie eingeht und die Fermi-Fläche den Rand der Brillouinzone nicht berührt.

Parameter. Damit ist nicht überraschend, dass auch das Drude-Modell die experimentellen Ergebnisse richtig wiedergibt.

Obwohl das Sommerfeld-Modell die gleiche Formel für die Leitfähigkeit liefert, ist die physikalische Interpretation völlig unterschiedlich: Während das Drude-Modell davon ausgeht, dass alle Elektronen gleichermaßen zur Stromleitung beitragen, zeigt das Sommerfeld-Modell, dass nur die Elektronen an der Fermikante tatsächlich relevant sind.

### Zur Selbstkontrolle

6. Warum ergeben das Drude-Modell und das Sommerfeld-Modell trotz völlig unterschiedlicher physikalischer Annahmen die gleiche Formel für die elektrische Leitfähigkeit?

## Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  ist temperaturabhängig über die mittlere Stoßzeit  $\tau$ . Elektronen können mit verschiedenen anderen Partnern streuen (stoßen): mit Phononen, mit Defekten und mit der Probenoberfläche. Dabei addieren sich die Streu-Raten, also die reziproken Stoß-Zeiten. Nur die Streuung an Phononen ist temperaturabhängig. Die anderen Effekte führen zu einem konstanten Wert, der bei tiefen Temperaturen erreicht wird, wenn keine Phononen besetzt sind.

Bereits in Kapitel 1 hatten wir die mittlere freie Weglänge definiert als (Gl. 1.10)

$$\ell = \frac{1}{n_{ph} \sigma_{st}} = \tau v_F, \quad (2.29)$$

wobei wir hier den Streuquerschnitt  $\sigma_{st}$  genannt haben, um ihn von der Leitfähigkeit  $\sigma$  zu unterscheiden, und  $n_{ph}$  die Dichte der Phononen bezeichnet.  $\sigma_{st}$  ändert sich bei diesen Temperaturen kaum, ist also für unsere Zwecke konstant. Elektronen bewegen sich mit der Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$ , die so den Zusammenhang zwischen Stoßzeit und Weglänge herstellt.

Bei einer Temperatur  $T$  (viel) größer als der Debye-Temperatur  $\Theta$  ändert sich die Dichte  $n_{ph}$  der Phononen wie  $T/\Theta$ , so dass wir für die Leitfähigkeit  $\sigma$  erhalten

$$\sigma \propto \begin{cases} \text{const} & \text{für } T \ll \Theta \\ \frac{1}{T} & \text{für } T \gg \Theta \end{cases}. \quad (2.30)$$

Bei hohen Temperaturen ist die Leitfähigkeit also völlig durch die Dichte  $n_{ph}$  der Phononen bestimmt. Der Übergangsbereich ist wie immer aufwändig (Dichte der thermisch angeregten Phononen) und durch das Bloch-Grüneisen-Gesetz beschrieben, das einen  $T^{-5}$ -Term liefert.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Siehe z.B. Hunklinger, 2014

### Zur Selbstkontrolle

7. Warum nimmt die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  bei hohen Temperaturen ( $T \gg \Theta$ ) mit  $1/T$  ab, obwohl sich die Elektronendichte nicht ändert? Welche Rolle spielt die mittlere Stoßzeit  $\tau$  dabei



## Thermische Leitfähigkeit der Elektronen

Abschließend wollen wir noch die thermische Leitfähigkeit der Elektronen diskutieren, nachdem die anderen Kombinationen aus Elektronen oder Phononen mit Wärmekapazität oder Wärmeleitfähigkeit schon früher besprochen wurden. Im täglichen Leben machen wir die Erfahrung, dass Metalle Wärme besser leiten als Isolatoren. Elektronen scheinen also einen hohen Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit zu liefern.

Die Wärmeleitfähigkeit der Phononen hatten wir in Gl. 1.9 definiert. Hier gehen wir analog vor:

$$K = \frac{1}{3} C v \ell, \quad (2.31)$$

wobei jetzt alle Größen als elektronische zu verstehen sind, also  $K$  die elektronische Wärmeleitfähigkeit,  $C$  deren Wärmekapazität,  $v$  deren Geschwindigkeit und  $\ell = v_F \tau$  die mittlere freie Weglänge. Wir setzen Gl. 2.21 für  $C$  ein sowie die Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$  für  $v$  und erhalten

$$K = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 n k_B}{2} \frac{T}{T_F} v_F \ell = \frac{\pi^2 n k_B^2 \tau}{3 m} T \quad (2.32)$$

mit  $T_F = m v_F^2 / (2 k_B)$ . Die Temperaturabhängigkeit der Stoßzeit  $\tau$  der Elektronen mit Phononen muss aber wie oben mit berücksichtigt werden. Abgesehen davon ist die Wärmeleitfähigkeit  $K$  proportional zur Temperatur  $T$ .

Zur Selbstkontrolle

8. Warum tragen nur Elektronen nahe der Fermi-Energie  $E_F$  zur Wärmeleitung bei, obwohl die Gesamtheit der Elektronen die Energie speichert? Welche Parallelen gibt es zur elektrischen Leitfähigkeit?

## Wiedemann-Franz-Gesetz

Da in der Temperaturabhängigkeit der elektrischen und auch der thermischen Leitfähigkeit die Temperaturabhängigkeit der Elektron-Phonon-Streuung in der Stoßzeit  $\tau$  auftaucht, ist es nicht verwunderlich, dass beide Leitfähigkeiten miteinander in Beziehung stehen. Das ist das Wiedemann-Franz-Gesetz

$$\frac{K_{el}}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T = L T \quad (2.33)$$

mit der universellen Lorenz-Zahl  $L \approx 2.5 \cdot 10^{-8} \Omega \text{WK}^{-2}$ . Gute Wärmeleiter sind also auch gute elektrischer Leiter. In der Realität gewichten die beiden Transportprozesse die Streuung etwas unterschiedlich, so dass es zu Abweichungen bei mittleren Temperaturen kommt, siehe Abb. 2.1.

Das Drude-Modell sagt das Wiedemann-Franz-Gesetz richtig voraus. Dabei kompensieren sich allerdings der Fehler in der Wärmekapazität der Elektronen mit dem in ihrer Geschwindigkeit<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> siehe Gross und Marx, 2023, Kap. 7.3.2.1

Zur Selbstkontrolle

9. Warum bedeutet das Wiedemann-Franz-Gesetz, dass gute elektrische Leiter auch gute Wärmeleiter sind?

## Zusammenfassung

*Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.*

## Literatur

- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [🔗](#).
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [🔗](#).
- Hust, Jerome G und Alan B Lankford (1984). "Thermal conductivity of aluminum, copper, iron, and tungsten for temperatures from 1 K to the melting point". In: *NBSIR 84-3007*. [🔗](#).
- Rayne, JA (1956). "The Heat Capacity of Copper Below 4.2 °K". In: *Aust. J. Phys.* 9.2, S. 189–197. [🔗](#).
- Simon, Steven H. (2013). *The Oxford solid state basics*. Oxford Univ. Press. [🔗](#).
- Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.

# Kapitel 3

## Elektronen in Festkörpern

Markus Lippitz  
21. Mai 2025

### Ziele

- Sie können eine Bandstruktur wie die unten gezeigte erklären und die Schritte zu ihrer Berechnung darstellen.
- Sie können die Konzepte 'effektive Masse' und 'Loch' erklären.

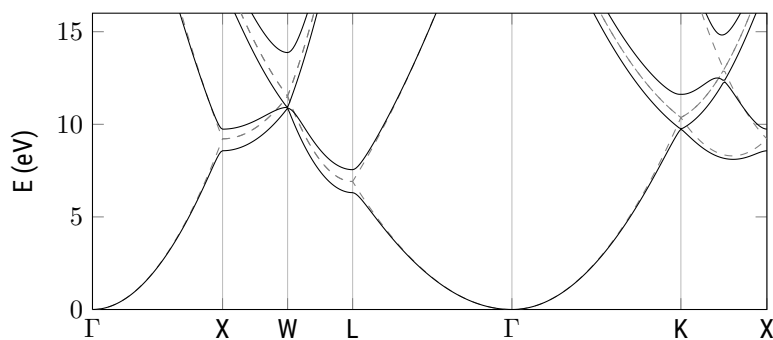


Abbildung 3.1: Die Bandstruktur von Aluminium in der Näherung quasi-freier Elektronen. Nur die Fourier-Koeffizienten  $V_g$  wurden als von Null verschieden angenommen. Das kommt der vollständigen Rechnung (Segall, 1961) schon ziemlich nahe. Wenn das Potential vollständig ignoriert und nur die Periodizität des Kristalls berücksichtigt wird, dann erhält man den gestrichelten Verlauf. Rechnung basierend auf Polakovic, 2022.

### Überblick

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist, wie das Coulomb-Potential der Atomkerne die Wellenfunktion und insbesondere die Energie-Eigenwerte der Elektronen beeinflusst. Im letzten Kapitel hatten wir schon das freie Elektronengas behandelt. Der Kristall bildet dabei ein großes Kastenpotential, aber die Kerne selbst kommen nicht vor. Wir betrachten nun zwei weitere Fälle:

- die Näherung des (beinahe) leeren Gitters (*empty lattice approximation*): die Kerne liefern ein periodisches, aber ansonsten sehr schwaches Potential
- die Näherung stark gebundener Elektronen (*tight binding*): die Kerne liefern ein quasi atomares Potential, mit einer schwachen Möglichkeit, doch ans benachbarte Atom zu wechseln



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

## Schrödinger-Gleichung im reziproken Raum

Wir wollen dem Potential der Elektronen etwas mehr Struktur als nur einen Kasten geben. Im letzten Kapitel hatten wir  $V(\mathbf{r}) = \text{const.}$  angenommen. Nun soll das Potential gitterperiodisch sein, also

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (3.1)$$

mit  $\mathbf{R}$  einem Gittervektor im Realraum, also einer ganzzahligen Linearkombination der primitiven Gittervektoren. Dieses Potential können wir über seine Fourier-Transformation beschreiben

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2)$$

mit  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{hkl} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$  einem reziproken Gittervektor mit den ganzzahligen Koeffizienten  $h, k, l$ .

Wir machen für die Wellenfunktion den Ansatz einer Linearkombination von ebenen Wellen mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.3)$$

Der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  kann wie immer (siehe beispielsweise Gl. 2.5) nur diskrete Werte annehmen. Anders als bei den Phononen kann er aber auch außerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen, da die Elektronen-Wellenfunktion nicht nur an Gitterpunkten physikalische Bedeutung hat sondern im ganzen Raum. Elektronen können an 'verschiedeneren' Orten des Kristalls sein als Kerne.

Nun setzen alles in die Schrödingergleichung ein

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \right) \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = E \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.5)$$

Wir multiplizieren die Klammer aus, leiten dabei die Wellenfunktion ab (was ein  $-|\mathbf{k}|^2$  liefert), und benennen übergangsweise den Summationsindex nach  $\mathbf{k}'$  um:

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = E \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.6)$$

Mit  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{G}$  erhalten wir

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[ \left( \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} - E \right) C_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k} - \mathbf{G}} \right] = 0 \quad (3.7)$$

Diese Gleichung muss für jedes  $\mathbf{r}$  gelten, also muss der Inhalt der Klammer für jedes  $\mathbf{k}$  Null sein:

$$\left( \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} - E \right) C_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k} - \mathbf{G}} = 0 \quad (3.8)$$

Dieser Gleichungssystem ist die *Schrödinger-Gleichung im reziproken Raum*, für Elektronen in einem gitterperiodischen Potential. Wir sehen den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  als Quantenzahl an. Für jedes  $\mathbf{k}$  findet man eine Energie  $E_{\mathbf{k}}$  und eine Wellenfunktion  $\Psi_{\mathbf{k}}$  als Lösung der Schrödingergleichung.

Das Gleichungssystem ist zunächst unendlich groß, weil die Summe über  $\mathbf{G}$  erst einmal nicht beschränkt ist. In der Praxis zeigt sich aber, dass bei Coulomb-artigen Potentials die Fourier-Koeffizienten  $V_{\mathbf{G}}$  des Potentials schnell mit  $|\mathbf{G}|$  abfallen, so dass letztendlich doch nicht so viele Gleichungen gekoppelt sind. Auch koppelt das Gleichungssystem nicht alle Koeffizienten  $C_i$  miteinander, sondern nur die, die um einen reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}$  auseinander liegen, also  $C_{\mathbf{k}}$  mit  $C_{\mathbf{k} \pm \mathbf{G}'}$ ,  $C_{\mathbf{k} \pm \mathbf{G}''}$ , etc.

Daher können wir die Wellenfunktion  $\psi$  etwas 'sparsamer' schreiben. Statt die Summe in Gl. 3.3 über den gesamten reziproken Raum laufen zu lassen, also reellwertige Koeffizienten für die Linearkombination von  $\mathbf{b}_i$  zuzulassen, summieren wir nun nur über Punkte des reziproken Raumes, die um ganzzahlige reziproke Gittervektoren auseinander liegen, also über viel weniger Punkte. Damit wird  $\psi$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} \quad (3.9)$$

### Zur Selbstkontrolle

1. Wie kommt es, dass aus einer Schrödingergleichung im Realraum jetzt ein ganzes Gleichungssystem (3.8) in reziproken Raum wird?
2. Skizzieren Sie eine Elektronen-Wellenfunktion für ein  $k$  innerhalb und außerhalb der ersten Brillouinzone.

## Bloch-Theorem

Bevor wir auf die Energien  $E_{\mathbf{k}}$  eingehen, betrachten wir die Wellenfunktionen  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  noch etwas genauer. Wie wir gleich sehen werden, können wir dabei  $\mathbf{k}$  auf die erste Brillouinzone beschränken. Wir klammern eine ebene Welle aus:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.10)$$

$$= u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.11)$$

Jede Wellenfunktion lässt sich also schreiben als Produkt einer ebenen Welle  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  aus der ersten Brillouinzone und einer gitterperiodischen Funktion  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , die diese räumlich moduliert. Diese Art der Aufteilung nennt man *Bloch-Wellen*. Das *Bloch-Theorem* besagt, dass allgemein Lösungen der Schrödingergleichung in einem periodischen Potential von dieser Form sein müssen<sup>1</sup>. Die Aufteilung zwischen ebener Welle und  $u(\mathbf{r})$  ist dabei nicht eindeutig, weil immer ein Phasenfaktor zwischen beiden verschoben werden kann.

Elektronen sind also in einem Kristall keine ebenen Wellen mehr wie im freien Raum. Die ebenen Wellen des freien Raumes werden durch die Funktionen  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  moduliert. Diese beschreiben den Einfluss des Gitters, insbesondere seine Periodizität.

Die  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  sind durch die Fourier-Darstellung gitterperiodisch, also

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (3.12)$$

<sup>1</sup> siehe z.B. Czycholl, 2016

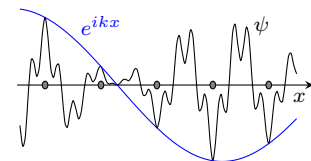


Abbildung 3.2: Die Wellenfunktion  $\psi$  ist das Produkt einer ebenen Welle  $e^{ikx}$  mit einer gitterperiodischen Funktion  $u_k(x)$ . Dargestellt ist jeweils der Realteil. Graue Kreise symbolisieren die Atomkerne.

Bloch-Wellen  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  sind periodisch im reziproken Raum:

$$\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{G}}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} C_{\mathbf{k}+\mathbf{G}-\mathbf{G}'} e^{-i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} \quad (3.13)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} C_{\mathbf{k}-(\mathbf{G}'-\mathbf{G})} e^{-i(\mathbf{G}'-\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (3.14)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}''} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}''} e^{-i\mathbf{G}''\cdot\mathbf{r}} \quad (3.15)$$

$$= \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad . \quad (3.16)$$

Daher reicht es aus  $\mathbf{k}$  aus der ersten Brillouinzone zu wählen. Man kann die räumlich schnelle Modulation durch Wellenvektoren außerhalb der ersten Brillouinzone so in die gitterperiodische Funktion  $u(\mathbf{r})$  verschieben, dass nur noch ein räumlich langsamer Anteil entsprechend einem Wellenvektor innerhalb der ersten Brillouinzone übrigbleibt.

Das bedeutet auch, dass  $\hbar\mathbf{k}$  nicht als Impuls verstanden werden kann. Noch deutlicher: Bloch-Wellen sind keine Eigenfunktionen des Impuls-Operators. Manchmal bezeichnet man  $\mathbf{k}$  als *Kristallimpuls*, eine Art verallgemeinertem Impuls. Da ein Kristall keine vollständige Translationsinvarianz mehr besitzt, gilt eben auch die Impulserhaltung nur noch eingeschränkt. Das ist hier völlig analog zu der Diskussion bei Phononen.

Wenn es für die Wellenfunktion  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  egal ist, ob man einen reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}$  addiert, dann ist es das auch für die Energie, also

$$E_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} \quad . \quad (3.17)$$

## Reduziertes Zonenschema

Zur Veranschaulichung machen wir nun eine sehr weitgehende Näherung: wir nehmen wie beim freien Elektronengas an, dass gar kein Potential vorhanden ist, aber die Periodizität des Raums weiterhin erhalten bleibt (ohne zu sagen, was da nun noch periodisch sein soll). Wir wenden also den Formalismus auf  $V = 0$  an. Damit verschwinden alle Fourier-Koeffizienten  $V_{\mathbf{G}}$  und das Gleichungssystem Gl. 3.8 zerfällt in einzelne Gleichungen mit der Lösung

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}|^2 \quad \text{und} \quad \psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad . \quad (3.18)$$

Im Eindimensionalen ist das wie erwartet ein parabelförmiger Zusammenhang zwischen Wellenvektor und Energie. Wenn wir  $\mathbf{k}$  über den ganzen reziproken Raum laufen lassen, nicht nur die erste Brillouinzone, dann nennt man diese Darstellung *ausgedehntes Zonenschema* (Abbildung 3.3 links).

Jetzt nehmen wir die Periodizität aus den Bloch-Wellen hinzu. Wir addieren jeweils einen reziproken Gittervektor, so dass wir wieder in der ersten Brillouin-Zone landen. Die Energie bleibt unverändert. Das nennt man *reduziertes Zonenschema*. Man kann sich auch vorstellen, dass die Dispersionsrelation immer wieder zurückgefaltet wird, wenn sie die Grenze der Brillouinzone erreicht. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Blochwellen, d.h. von Lösungen der Schrödingergleichung in einem periodischen Potential. So kann man auch den optischen Zweig der Phononen als zurückgefaltete akustische Phononen auffassen, wenn die Brillouin-Zone halb so groß ist.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Falls Sie diese Übungsaufgabe einmal gesehen haben

Es wird deutlich, dass der Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und der Energie nicht eindeutig ist. Man definiert einen *Band-Index*  $n$ , der die Energien in der ersten Brillouin-Zone aufsteigend sortiert. Was wir als 'Rückfaltung' beschreiben, ist eigentlich die Addition der reziproken Gittervektoren. Für jeden reziproken Gittervektor  $\mathbf{G}_n$  erhalten wir eine neue verschobene Parabel, also

$$E_{n,\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k} + \mathbf{G}_n|^2 \quad \text{und} \quad \psi_{n,\mathbf{k}} = e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.19)$$

Zeichnet man diese  $E_{n,\mathbf{k}}$  über den gesamten reziproken Raum und nicht nur über die erste Brillouin-Zone, so spricht man von einem *periodischen Zonenschema*. Man kann sich auch vorstellen, dass viele *reduziertes Zonenschema* nebeneinander periodisch wiederholt werden.

Im Eindimensionalen sind die  $E_{n,k}$  Parabeln, die von jedem Punkt  $\mathbf{G}_n$  im reziproken Raum starten. Im Dreidimensionalen zeichnet man die Energie entlang eines Pfades durch den reziproken Raum, beispielsweise entlang der  $x$ -Komponente des Wellenvektors. Dann kommt zu den Rück-Faltungen noch hinzu, dass es einen Offset aufgrund der  $y$  und  $z$ -Komponenten in  $\mathbf{G}_n$  gibt. Dies allein erklärt schon einen großen Teil der Dispersionsrelation, nämlich die gestrichelten Linien in Abb. 3.1.

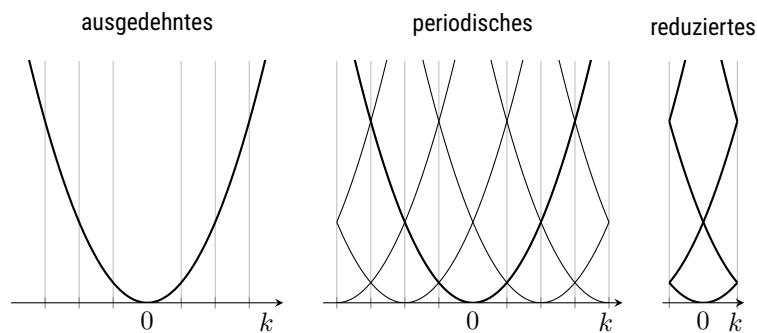


Abbildung 3.3: Zonenschemata. Die vertikalen Linien geben die Grenzen der Brillouin-zonen wieder (bei ganzzahligen Vielfachen von  $\pi/a$ , aber nicht  $k = 0$ ).

### Zur Selbstkontrolle

3. Skizzieren Sie für ein dreidimensionales kubisch-primitives Gitter die Dispersionsrelation entlang  $k_x$  in der Näherung  $V \approx 0$ .
4. Skizzieren Sie zwei Wellenfunktionen bei gleichem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  innerhalb der ersten Brillouinzone aber verschiedenem Band-Index  $n$ .

## Näherung der beinahe freien Elektronen

Nun wollen wir das Potential hinzunehmen, aber weiterhin als 'schwach' betrachten, eben 'beinahe freie' Elektronen. Im Englischen nennt man das *empty lattice approximation*. In der Schrödingergleichung 3.8 kommen die Fourier-Koeffizienten  $V_{\mathbf{G}}$  des Potentials vor. Im Eindimensionalen ist  $G_n = 2\pi n/a$ , mit der Gitterkonstante  $a$ . Das betragsmäßig kleinste  $G$  ist also  $g = 2\pi/a$ . Wir nehmen also an, dass nur  $V_{\pm g}$  von Null verschieden ist.  $V_0$  beschreibt einen konstanten Offset, den wir bei einer Energie-Achse immer zu Null wählen können. Alle höheren  $V_G$  sollen der Einfachheit halber ebenfalls Null sein.

Wenn die  $V_{\pm g}$  klein sind, dann wird die Lösung ähnlich dem vorangegangenen Abschnitt sein, also zurückgefaltete Parabeln innerhalb der ersten Brillouinzone:

$$E_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{bzw.} \quad E_{k \pm g}^0 = \frac{\hbar^2 (k \pm g)^2}{2m} . \quad (3.20)$$

Damit wird die Schrödingergleichung 3.8 zu<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} E_k^0 - E & V_g & V_{-g} \\ V_{-g} & E_{k-g}^0 - E & 0 \\ V_g & 0 & E_{k+g}^0 - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_k \\ C_{k-g} \\ C_{k+g} \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.21)$$

Die dreidimensionale Lösung dieses Gleichungssystems ist in Abb. 3.1 dargestellt und kommt der vollständigen Rechnung schon sehr nahe. Das Pluto-Skript<sup>4</sup> für diese Abbildung ist inspiriert von Polakovic, 2022.

Interessant wird es an der Grenze der Brillouinzone, also bei  $k = \pm g/2$ . Dort schneiden sich zwei Parabeln. Die Zustände sind ohne Potential also energetisch entartet. Lassen Sie uns diese Stelle im Fall von  $V_{\pm g} \neq 0$  genauer betrachten. Bei beispielsweise  $k = +g/2$  sind die ersten beiden Diagonalelemente von Gl. 3.21 nahe Null, das dritte betragsmäßig deutlich größer. Damit die dritte Zeile sich trotzdem zu Null summiert, muss also hier  $C_{k+g} \approx 0$  sein. Andersherum: An der rechten Grenze der Brillouinzone schneiden sich die Parabeln, die von  $G = 0$  und von  $G = +g$  ausgehen. Nur diese beiden Koeffizienten  $C_i$  bzw. diese ebenen Wellen<sup>5</sup> tragen bei. Das Gleichungssystem wird noch einfacher

$$\begin{pmatrix} E_k^0 - E & V_g \\ V_{-g} & E_{k-g}^0 - E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_k \\ C_{k-g} \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.22)$$

Wir nehmen weiterhin an, dass das Potential inversionssymmetrisch ist, also  $V_g = V_{-g}$ , bzw.  $V(x) \propto -\cos(gx)$ . Damit finden wir die Energie-Eigenwerte

$$E_{\pm} = \frac{E_k^0 + E_{k-g}^0}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{E_k^0 - E_{k-g}^0}{2}\right)^2 + V_g^2} . \quad (3.23)$$

An der Grenze der Brillouinzone bildet sich eine **Bandlücke**: während vorher alle Energiewerte (bei entsprechendem  $k$ ) möglich waren, so gibt es nun keine Zustände mehr mit Energien im Bereich  $E_k^0 \pm V_g$ . Die Größe der Bandlücke ist also  $2V_g$  und ihr Auftreten direkt verbunden mit den Fourier-Koeffizienten  $V_{\pm g}$  des Potentials. Die Dispersionsrelation  $E(k)$  nähert sich mit horizontaler Asymptote der Grenze der Brillouinzone, also ist die Gruppengeschwindigkeit Null, was einer stehenden Welle entspricht. In erster Näherung ist der Bandverlauf in der Nähe der Bandlücke parabelförmig.

### Zur Selbstkontrolle

5. Lesen Sie den Blog-Artikel Polakovic, 2022. Das sollten Sie jetzt alles gut verstehen.
6. Im periodischen Zonenschema (Abb. 3.3) kommt es an vielen Stellen zu einer Entartung. Skizzieren Sie dieses Schema für den Fall  $V \neq 0$ .

<sup>3</sup> in Gl. 3.8  $k$  in  $k'$  umbenennen und dann  $k' = k, k - g, k + g$  setzen.

<sup>4</sup> [download](#) [run on binder](#)

<sup>5</sup> Wir zeichnen die Energie in der Dispersionsrelation, aber es gehört immer eine Wellenfunktion  $\psi$  dazu, die eine Bloch-Welle ist.

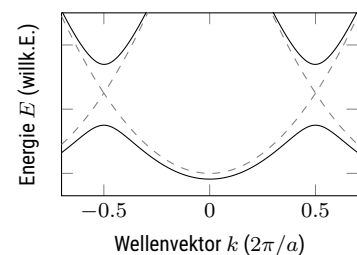


Abbildung 3.4: Das Potential  $V_g$  bewirkt eine Bandlücke an der Grenze der Brillouinzone. In der Nähe der Bandlücke verläuft die Dispersionsrelation parabelförmig.



## Anschauliche Interpretation I

Für die Koeffizienten  $C_k$  und  $C_{k-g}$  findet man durch Einsetzen der  $E_{\pm}$

$$\frac{C_{k-g}}{C_k} = \frac{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}{V_g} . \quad (3.24)$$

Bei  $k = g/2$  wird der Zähler also  $\pm|V_g|$  und damit die beiden Koeffizienten betragsmäßig gleich. An dieser Stelle sind die Eigenfunktionen also

$$\psi_+ \propto e^{igx/2} + e^{-igx/2} \propto \cos(gx/2) \quad (3.25)$$

$$\psi_- \propto e^{igx/2} - e^{-igx/2} \propto \sin(gx/2) . \quad (3.26)$$

Die Ladungsdichte ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion. Bei einer ebenen Welle ist die Ladungsdichte räumlich konstant. Durch die Überlagerung zweier ebener Wellen ergibt sich ein Interferenzmuster in der Ladungsdichte

$$|\psi_+|^2 \propto \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \text{und} \quad |\psi_-|^2 \propto \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) . \quad (3.27)$$

Die Atomkerne mit dem zugehörigen attraktiven Coulomb-Potential sitzen bei  $x = na$ . Die symmetrische Wellenfunktion  $\psi_+$  hat also eine erhöhte Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Nähe der Kerne, und damit eine reduzierte Energie  $E_+$ . Bei der antisymmetrischen Wellenfunktion  $\psi_-$  ist es gerade andersherum. Der symmetrische Fall erinnert an s-Orbitale des Wasserstoffatoms, der antisymmetrische an die p-Orbitale.

An der Grenze der Brillouinzone können zwei ebene Wellen also so hybridisieren, dass dadurch für eine der beiden neuen Eigenfunktionen die Energie abgesenkt wird. Im Gegenzug erhöht sich die Eigenenergie der anderen. Dies ist sehr ähnlich dem bindenden und anti-bindenden Potential bei  $\text{H}_2^+$  in der Molekülphysik. Fern der Grenzen der Brillouinzone sind die Energien der beiden Zustände so unterschiedlich, dass die Beschreibung durch die alten, ungekoppelten Zustände gültig bleibt: Der Term  $E_k^0 - E_{k-g}^0$  ist viel größer als  $V_g$ , so dass der Effekt von  $V_g$  vernachlässigt werden kann.

Eigenwert-Gleichungen der Form 3.22 sind ein häufig vorkommendes Motiv in der Physik. Zwei Zustände geringfügig unterschiedlicher Energie koppeln dann zu neuen, hybridisierten Zuständen, wenn ihre Energiedifferenz kleiner als die Kopplungsenergie ist. Wenn man die Energiedifferenz variiert (hier durch Ändern von  $k$ ) dann werden die Energien sich kreuzen (wie im letzten Abschnitt). Die Kopplungsenergie  $V_g$  führt zu einer Vermeidung der Kreuzung (engl. *avoided crossing*). Das ist kein quantenmechanischer Effekt. Auch gekoppelte Pendel koppeln nur, wenn die Eigenfrequenzen vor der Kopplung sehr ähnlich waren. Wenn sie dann aber koppeln, dann findet man zwei verschiedene Eigenfrequenzen, deren Abstand durch die Stärke der Kopplung bestimmt ist.

## Anschauliche Interpretation II

Man kann auch aus einem anderen Blickwinkel darauf schauen. Eine ebene Welle  $e^{ikx}$ , die in positive  $x$ -Richtung läuft, wird an dem Gitter der Atome mit der Gitterkonstante  $a$  gestreut. In der Laue-Streutheorie entspricht das der Addition eines reziproken Gittervektors  $G$ , hier der kleinste  $g = \pm 2\pi/a$ .

Dadurch entsteht eine auslaufende Welle mit dem Wellenvektor  $k - g$ , also in negative  $x$ -Richtung laufend. An der Stelle  $k = \pm g/2$ , also am Rand der Brillouinzone, hat diese nach links laufende Welle genau den gleichen Wellenvektor, wie die Welle, die zur Parabel bei  $G = +g$  gehört. Diese beiden interferieren also konstruktiv miteinander. Anders gesprochen: die Streuung führt bei Erfüllen der Laue-Bedingung  $\Delta k = G$  zur Interferenz der beiden Wellen. Dies entspricht dem Koppeln der Zustände wie oben besprochen.

### Zur Selbstkontrolle

7. Im periodischen Zonenschema (Abb. 3.3) kommt es an vielen Stellen zu einer Entartung. Welche Fourier-Koeffizienten des Potentials bewirken wo eine Bandlücke?

## Näherung stark gebundener Elektronen

In den letzten Abschnitten haben wir die Bandstruktur, insbesondere die Existenz einer Bandlücke, hergeleitet unter der Annahme, dass die Elektronen quasi frei sind und nur ein schwaches, periodisches Potential wirkt. Nun machen wir genau das Gegenteil und kommen zum gleichen Ergebnis. Wir nehmen an, dass die Elektronen stark gebunden sind, wie in einem Atom, und sie mit geringer Wahrscheinlichkeit zum Nachbaratom tunneln können. Das Modell nennt sich *tight binding* und ist analog zur *linear combination of atomic orbitals* (LCAO) in der Molekülphysik.

Im Folgenden bezeichnet die Tilde Variablen, die für ein einzelnes Atom gelten. Sei also  $\tilde{V}$  das Coulomb-artige Potential eines Atoms. Wir kennen die Lösungen  $\tilde{\psi}$  der Schrödingergleichung

$$H_A \tilde{\psi} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \tilde{V} \right) \tilde{\psi} = \tilde{E} \tilde{\psi} \quad . \quad (3.28)$$

Im Kristall gibt es nun an den Gitterpunkten  $\mathbf{R}_m$  Atomkerne, die einen zusätzlichen Störterm im Hamilton-Operator bewirken

$$H_S = \sum_{m \neq n} \tilde{V}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad , \quad (3.29)$$

wobei das Atom bei  $\mathbf{R}_n$  schon im ungestörten Operator berücksichtigt ist. Als Ansatz für die Wellenfunktion wählen wir wie in LCAO eine Superposition von Atom-Eigenfunktionen an den Orten  $\mathbf{R}_m$ , also

$$\psi = \sum_m a_m \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad . \quad (3.30)$$

Jetzt benutzen wir das Bloch-Theorem<sup>6</sup>: der gitter-periodische Anteil  $u_{\mathbf{k}}$  wird durch die Wellenfunktionen  $\tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)$  geliefert, also muss die ebene Welle in den Koeffizienten  $a_m$  stecken, also

$$a_m \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_m} \quad (3.31)$$

bei passender Normierung. Somit wird also die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_m} \quad . \quad (3.32)$$

<sup>6</sup> Es würde auch ohne gehen, macht es aber hier einfacher.

Die Eigen-Energie ist wie immer

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi dV}{\int \psi^* \psi dV} . \quad (3.33)$$

Der Nenner ist nahe bei Eins, weil die Atom-Wellenfunktionen sich nur sehr wenig überlappen. Der Zähler ist interessanter. Die Summen über die Atom-Positionen können wir vor das Integral ziehen

$$E = \frac{1}{N} \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)} \int \tilde{\psi}^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) [H_A + H_S(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)] \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) . \quad (3.34)$$

Wir können drei Beiträge unterscheiden

- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_A \tilde{\psi}_n$ . Das sind die Eigenenergien der Atome, die wir schon kennen.
- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_S \tilde{\psi}_n$ . Das ist der Einfluss der Potentiale der anderen Atome (in  $H_S$ ) auf 'unser' Atom  $n$ . Wir kürzen dieses Coulomb-Integral mit  $-\alpha$  ab.
- Integranden der Form  $\tilde{\psi}_n^* H_S \tilde{\psi}_m$ . Das ist der Einfluss des Überlapps mit den anderen Wellenfunktionen. Wir kürzen dieses Transfer-Integral mit  $-\beta_m$  ab.

Insgesamt haben wir damit<sup>7</sup>

$$E = \tilde{E} - \alpha - \sum_m \beta_m e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)} . \quad (3.35)$$

<sup>7</sup> Die Summen über  $\tilde{E}$  und  $\alpha$  liefern ein  $N$ , was sich mit der Normierung kürzt.

Das Coulomb-Integral  $\alpha$  bewirkt einer Energie-Absenkung, weil auch die Nachbar-Atome etwas attraktives Coulomb-Potential beisteuern. Das Transfer-Integral  $\beta$  kann sowohl positiv als auch negativ sein, und auch richtungsabhängig, wie bei der kovalenten Bindung in der Molekülphysik. Auch da hatten wir gesehen, dass s- und p-Orbitale je nach Anordnung anziehende oder abstoßende Energiebeiträge liefern können. Genau das gleiche passiert hier. Dieses Integral liefert die Abhängigkeit von Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und damit die Dispersionsrelation.

Zur Selbstkontrolle

8. Schauen Sie sich noch einmal die quantenmechanische Behandlung von  $\text{H}_2^+$  in der Molekülphysik an und vergleichen das mit diesem 'tight-binding' Modell.

## Beispiel: kubisch-primitives Gitter

Als Beispiel betrachten wir ein kubisch-primitives Gitter, erlauben nur Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn, und nehmen die Wechselwirkung als richtungsunabhängig an, wie sie bei atomaren s-Orbitalen wäre. Für den Term  $\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n$  kommen damit nur die drei (kartesischen) Gittervektoren der Länge  $a$  jeweils mit beiden Vorzeichen in Frage. Das Skalarprodukt ausmultipliziert ergibt

$$E = \tilde{E} - \alpha - 2\beta [\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)] . \quad (3.36)$$

Insgesamt wird damit ein Band der Breite  $\tilde{E} - \alpha \pm 6\beta$  abgedeckt. Das Band hat einen Kosinus-förmigen Verlauf. Am  $\Gamma$ -Punkt und an der Grenze der Brillouinzone stimmt es somit mit dem parabelförmigen Verlauf der Näherung quasi-freier Elektronen überein.

Ein wichtiger Aspekt des 'tight binding'-Modells ist, dass die Zustände der Elektronen im Kristall mit den atomaren Zuständen der Energie  $\tilde{E}$  verknüpft sind. Damit verbunden sind 'vererbte' Eigenschaften der atomaren Zustände, wie z.B. die Form der atomaren Wellenfunktion oder die Spinorientierung, die sich in den Zuständen der Bandstruktur widerspiegeln.

## Vokabeln: Metalle, Halbleiter und Isolatoren

Sowohl in der Näherung der schwach gebundenen Elektronen (empty lattice approximation), als auch in der der stark gebundenen Elektronen (tight binding) haben wir eine Dispersionsrelation für die Elektronen<sup>8</sup> gefunden, die *Bandlücken* besitzt. Durch diese Lücken entstehen Bänder. Die entscheidende Frage für sehr viele Eigenschaften der Materialien ist nun, bis wohin Elektronen eingefüllt sind. Wo liegt die Fermi-Energie  $E_F$ , also welches ist das höchste besetzte Niveau bei  $T = 0$ ? Wie die Lage von  $E_F$  welche Eigenschaften beeinflusst werden wir im nächsten Kapitel besprechen.

<sup>8</sup> Evt. besser *das Elektron*, weil wir ja in der Ein-Elektron-Näherung sind.

Hier klassifizieren wir Materialien nach der Lage der Fermi-Energie  $E_F$  relativ zur Bandstruktur. Bei einem Metall liegt  $E_F$  in einem Band, bei einem Isolator in einer Bandlücke. Das Band, das vollständig unterhalb von  $E_F$  liegt, nennt man Valenzband, das (teilweise) über  $E_F$  Leitungsband. Als Halb-Metall bezeichnet man ein Material, bei dem  $E_F$  mit einem geringfügigen Überlapp von Bändern zusammenfällt. Ein Halbleiter unterscheidet sich eigentlich nicht von einem Isolator. Im Allgemeinen ist bei Halbleitern die Bandlücke kleiner, so dass Elektronen thermisch ins Leitungsband angeregt werden können. Der Übergang ist aber fließend.

## Elektron als Wellenpaket

Wir hatten oben die Wellenfunktion des Elektrons als (ebene) Bloch-Welle geschrieben

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad , \quad (3.37)$$

die zwar eine gitterperiodische Modulation  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  besitzt, aber ansonsten räumlich unendlich ausgedehnt ist. Das ist für *Transportprozesse* ungeeignet. Das Teilchen-Bild ist besser an die Fragestellung angepasst. Wir bauen also aus verschiedenen Bloch-Wellen ein Wellenpaket, das sich dann wie ein Teilchen benimmt:

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}') \phi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) e^{-iE_n(\mathbf{k}')t/\hbar} \quad (3.38)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}'} a(\mathbf{k}') u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - E_n(\mathbf{k}')t/\hbar)} \quad , \quad (3.39)$$

wobei die Summe in  $\mathbf{k}'$  über das Intervall  $\mathbf{k} \pm \delta\mathbf{k}/2$  läuft.  $E_n(\mathbf{k}')$  ist die Dispersionsrelation des  $n$ -ten Bandes. Die Idee ist, dem Wellenpaket des

Elektrons eine Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_n$  zuzuordnen, über

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (3.40)$$

Dazu muss aber  $\mathbf{k}$  gut genug definiert sein, also  $\delta \mathbf{k}$  klein genug, insbesondere gegenüber der Größe der Brillouinzone. Das geht dann, wenn der Gitterabstand im Realraum viel kleiner ist als die Ausdehnung des Wellenpakets, die wiederum viel kleiner sein muss als die Wellenlänge des externen elektrischen Feldes. Dies nennt man ein semi-klassisches Modell. Da sich der Bandindex  $n$  in unserem Modell nicht ändern kann lassen wir ihn zukünftig weg.

### Zur Selbstkontrolle

9. Vergleichen Sie die Bewegung eines Elektrons als Wellenpaket mit Wellen auf einem Seil. Was ist das Analogon zum Elektron? Was ist die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit?

## Effektive Masse

Wir verwenden nun diese Wellenpaketdarstellung des Teilchens, um seine Bewegung unter der Wirkung einer Kraft darzustellen, die aus elektromagnetischen Feldern resultiert. Die Bewegungsgleichung ist klassisch  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ . Analog gilt hier

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.41)$$

wobei  $\hbar \mathbf{k}$  als Quasi-Impuls zu verstehen ist, also jederzeit ein reziproker Gittervektor  $\mathbf{G}$  addiert werden kann. Die Ladung des Elektrons ist  $q = -e$ . Eine äußere Kraft führt also zu einer Bewegung des Elektrons im reziproken Raum.

Nun beschaffen wir uns einen Term für die Masse des so beschriebenen Elektrons. Die Masse ist die Proportionalitätskonstante zwischen Kraft und Beschleunigung und damit die zentrale Größe für die Bewegung eines Teilchens. Wir starten mit der zeitlichen Ableitung von Gl. 3.40

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial t \partial \mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{k}} \hbar \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{k}} \mathbf{F} \quad (3.42)$$

wobei wir im zweiten Schritt Zähler und Nenner mit  $\partial \mathbf{k}$  erweitert und dann die Ableitungen umsortiert haben. Das können wir in den cartesischen Komponenten schreiben

$$\dot{v}_i = \frac{1}{\hbar^2} \sum_j \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} F_j = \sum_j \left( \frac{1}{m^*} \right)_{ij} F_j \quad \text{mit} \quad \left( \frac{1}{m^*} \right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} \quad (3.43)$$

Den Tensor  $m^*$  nennt man *effektive Masse*. Er beschreibt die dynamischen Eigenschaften des Elektrons im Kristall und ist gegeben durch die Krümmung (also zweite Ableitung) der Dispersionsrelation. Der Tensor ist symmetrisch und lässt sich auf drei Hauptachsen transformieren. Wenn die alle gleich groß sind, dann vereinfacht sich alles zu

$$m^*(k) = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E(k) / \partial k^2} \quad (3.44)$$

Das ist beispielsweise in der Nähe der Ober- und Unterkanten eines Bandes der Fall, wo wir die Dispersionsrelation nähern können als

$$E_{\mathbf{k}} = E_0 \pm \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad . \quad (3.45)$$

Die effektive Masse ist also der Parameter, der die (inverse) Breite eines parabelförmigen Bandes beschreibt. Stark gekrümmte Bänder haben eine geringe effektive Masse, und andersherum.

Was ist hier passiert? Wir haben den Einfluss der vielen Coulomb-Potentiale um die Atomkerne im Kristall zusammengefasst und in eine Eigenschaft des Elektrons gesteckt. Die (effektive) Masse des Elektrons hängt nun vom Kristall ab, in dem es sich bewegt. Das erlaubt es uns aber, das komplizierte Problem 'Elektron zwischen vielen Kernen' in ein einfaches Teilchen-Modell zu überführen. Nur müssen wir uns von der klassischen Vorstellung einer Masse lösen. Die effektive Masse hängt von der Krümmung des Bandes ab. Die kann aber Null werden (die Masse dadurch unendlich), oder auch negativ. Im 'tight binding' Modell ist die Dispersionsrelation

$$E(k) = -\cos(ka) \quad \text{und somit} \quad m^*(k) = \frac{\hbar^2}{a^2 \cos(ka)} \quad (3.46)$$

an der Grenze der Brillouinzone ( $k = \pi/a$ ) ist also  $m^* = -\hbar^2/a^2$ . Die Masse ist nur der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung. Hier wirkt die Kraft in eine Richtung, die Beschleunigung geht in die entgegengesetzte.

#### Zur Selbstkontrolle

10. Man kann die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit als Analogon zur Bewegung eines Elektrons im Festkörper sehen. Die Reibung mit der Flüssigkeit ändert die effektive Masse der Kugel. Skizzieren Sie diese effektive Masse.
11. Tensorielle Massen sind gewöhnungsbedürftig. Beschreiben Sie die Wirkung des Kiels eines Segelschiffes als tensorielle Masse.

#### Nebenbemerkung: Bloch-Oszillationen

Das sich ändernde Vorzeichen der Masse führt zu Bloch-Oszillationen, zumindest in idealen Systemen. Ein konstantes äußeres elektrisches Feld führt via 3.41 zu einer gleichmäßigen Bewegung des Elektrons im reziproken Raum. Dabei werden auch Grenzen der Brillouinzonen überschritten. Alles ändert sich also periodisch, und damit auch die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Elektronen. Das sind die Bloch-Oszillationen. Die Periodendauer  $T_B$  lässt sich ausrechnen als die Zeit, die das Elektron braucht, einmal die Brillouinzone zu durchqueren, also

$$T_B = \frac{2\pi/a}{e\mathcal{E}/\hbar} = \frac{\hbar}{ae\mathcal{E}} \quad . \quad (3.47)$$

Bei einem elektrischen Feld  $\mathcal{E} = 1 \text{ kV/m}$  und einer Gitterkonstante  $a = 2 \text{ \AA}$  ergibt sich eine Periodendauer  $T_B = 20 \text{ ms}$ . Bei einer Fermi-Geschwindigkeit  $v = 10^6 \text{ m/s}$  beträgt die räumliche Amplitude der Bewegung etwa 5 mm.

Dieser Effekt tritt so nicht auf. Elektronen stoßen selbst in reinen Kristallen typischerweise alle 10 fs oder 10 nm Weglänge. Selbst in idealen Kristallen würde das Elektron noch mit anderen Elektronen stoßen. Man kann aber Modellsysteme herstellen, in denen Bloch-Oszillationen gezeigt wurden. Dazu baut man die Potentiale der Atome durch Kastenpotentiale in Halbleiter-Heterostrukturen auf einer größeren Längenskala nach. Damit wird die Gitterkonstante  $a$  viel größer und die Periodendauer  $T_B$  und somit auch die Auslenkung viel kleiner.

## Löcher

Wir hatten schon den Effekt von Coulomb-Potentialen in die Masse der Elektronen verschoben. Jetzt werden wir fehlende Elektronen mit einer positiven Ladung versehen und auch als Teilchen behandeln. Unser Ziel ist es, den Ladungstransport in einem Material zu beschreiben, dessen Bandstruktur wir kennen. Jedes Elektron trägt dazu mit seiner Geschwindigkeit (Gl. 3.40) bei. Wir integrieren einfach über alle Elektronen, um die Stromdichte<sup>9</sup>  $\mathbf{j}$  zu bekommen

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{V} \int_{1.BZ} \frac{2V}{(2\pi)^3} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(E, T) d\mathbf{k} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{1.BZ} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(E, T) d\mathbf{k} \quad (3.48)$$

mit dem Kristall-Volumen  $V$  und der Fermi-Dirac-Verteilung  $f(E, T)$ . Der erste Term im ersten Integral ist die Zustandsdichte im reziproken Raum. Wir vereinfachen die Gleichung weiter, indem wir  $T = 0$  annehmen, wodurch die Fermi-Verteilung eine Stufenfunktion wird

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{-e}{4\pi^3 \hbar} \int_{\text{besetzt}} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.49)$$

Dieses Integral wird Null, wenn das Band vollständig besetzt ist. Dann gibt es aufgrund der Punktsymmetrie des reziproken Gitters für jedes Elektron mit  $\mathbf{k}$  eines mit  $-\mathbf{k}$ , das also bei ansonsten gleicher Energie und Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung läuft. Ein voll besetztes Band trägt nicht zum Ladungstransport bei! Damit können wir aber schreiben

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{4\pi^3} \int_{\text{besetzt}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.50)$$

$$= \frac{-e}{4\pi^3} \left[ \int_{1.BZ} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \int_{\text{leer}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right] \quad (3.51)$$

$$= \frac{+e}{4\pi^3} \int_{\text{leer}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.52)$$

weil eben das Integral über die komplette erste Brillouinzone Null ergibt. Anstatt über alle besetzten Zustände zu integrieren und mit einer negativen Ladung zu multiplizieren können wir auch über alle unbesetzten Zustände integrieren und mit einer positiven Ladung multiplizieren. Wir nennen die unbesetzten Zustände für Elektronen *Löcher* und weisen ihnen eine positive Elementarladung zu.

Das hat große Vorteile, weil wir oft über nahezu volle Bänder integrieren müssen. Dann ist es einfacher, nur über den leeren Anteil der Löcher zu integrieren, insbesondere auch, weil wir dann in der Nähe des Maximums des Bandes<sup>10</sup> das Band wie in Gl. 3.45 parabolisch nähern können.

<sup>9</sup> Strom pro Fläche

<sup>10</sup> Löcher sind wie Luftblasen und steigen nach oben

Um Elektronen von Löchern zu unterscheiden kennzeichnen wir erstere mit dem Index 'n' (wie negativ geladen), letztere mit einem 'p' (wie positiv geladen). Weil  $\int_{\text{voll}} \mathbf{k} d\mathbf{k} = 0$  ist ein Loch immer das Gegenteil des Elektrons, dessen Stelle es einnimmt, also

$$\mathbf{k}_p = -\mathbf{k}_n \quad E_p(\mathbf{k}) = -E_n(\mathbf{k}) \quad m_p^* = -m_n^* \quad q_p = -q_n = +e \quad (3.53)$$

aber

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) \quad (3.54)$$

weil dabei zweimal das Vorzeichen gewechselt wird. Ein Loch wirkt wie ein Teilchen mit positiver Ladung. Bei einem angelegten elektrischen Feld haben wir also Ladungstransport durch Elektronen, die sich in die eine Richtung bewegen, und Löcher, die sich in die andere Richtung bewegen. Die Summe aus beiden bildet den beobachteten Strom.

Das Konzept 'Loch' sieht harmlos aus, ist aber für die Festkörperphysik von zentraler Bedeutung! Es vereinfacht die Beschreibung der  $10^{23}$  Elektronen in einem Festkörper erheblich.

### Zur Selbstkontrolle

12. Finden Sie Analogien zum 'Loch' in der Festkörperphysik und wie diese helfen, Dinge zu vereinfachen.

## Von Sommerfeld zu Bloch

Lassen Sie uns hier noch einmal die wesentlichen Eigenschaften des Elektrons als freies Elektron nach Sommerfeld und als Elektron im Kristall nach Bloch gegenüberstellen, inspiriert durch Kap. 9 von Gross und Marx, 2023.

	Sommerfeld	Bloch
	frei	im Kristall
Quantenzahlen	$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}, n$
Bedeutung von $\hbar\mathbf{k}$	Impuls	Kristallimpuls
Wertebereich $\mathbf{k}$	beliebig	1. BZ
Anzahl Zustände in 1. BZ	$N_{EZ}$	$N_{EZ}$
Energie	$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2  \mathbf{k} ^2}{2m}$	$E_n(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n)$
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}$	$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}}$
Masse	$m$	$m^*$
Wellenfunktion	ebene Welle $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{V}}$	Bloch-Welle $\psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ $u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung des freien Elektrons mit dem Kristall-Elektron.



## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#).

Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).

Polakovic, Tomas (2022). *Computational Physics for the Masses. Part 3: Solid Stuff*. CC-BY-NC 4.0. [↗](#).

Segall, Benjamin (1961). "Energy bands of aluminum". In: *Physical Review* 124.6, S. 1797.



# Kapitel 4

## Kristall-Elektronen im Magnetfeld

Markus Lippitz  
21. Mai 2025

### Ziele

- Sie können Methoden zur Vermessung der Fermi-Oberfläche wie beispielsweise die Zyklotron-Resonanz oder die De Haas-van Alphen-Oszillationen erklären und auf einfache Beispiele anwenden.
- Sie können das Konzept der Landau-Niveaus benutzen, um den hier dargestellten Quanten-Hall-Effekt phänomenologisch zu erklären.

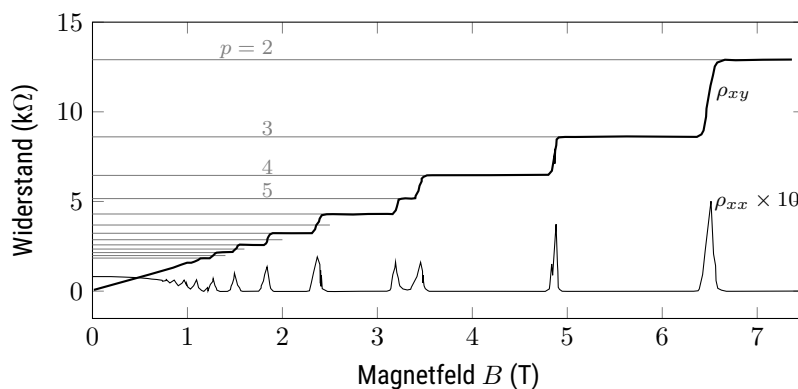


Abbildung 4.1: Quanten-Hall-Effekt in einem effektiv zweidimensionalen Elektronengas (Klaus v. Klitzing, 1984). Der Querwiderstand  $\rho_{xy}$  nimmt nur diskrete Werte  $25812 \Omega / p$  an, wobei  $p$  die Anzahl der voll besetzten Landau-Niveaus ist. An diesen Plateaus verschwindet der Längswiderstand  $\rho_{xx}$ .

### Überblick

Im vorigen Kapitel haben wir die Bandstruktur besprochen, die die möglichen Zustände eines Elektrons als Funktion des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  und des Bandindex  $n$  beschreibt. Mit Hilfe eines externen Magnetfeldes können wir bestimmte Eigenschaften der Bandstruktur experimentell bestimmen. Dieses Kapitel kann daher als experimentelle Verifizierung des vorangegangenen Kapitels angesehen werden. Außerdem führt ein starkes Magnetfeld zu einer weiteren Quantisierung der Elektronenzustände.

Für diese Phänomene würde man idealerweise die zeitabhängige Schrödingergleichung verwenden, aber diese ist zu komplex. Daher verwenden wir



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

semiklassische Modelle, die die Elektronenzustände quantenmechanisch beschreiben, während der Einfluss äußerer Kräfte klassisch behandelt wird. Ziel ist es zu verstehen, wie sich Elektronen in einem Magnetfeld bewegen und wie ihre Energieniveaus beeinflusst werden.

## Fermi-Flächen

Bevor wir uns der Bewegung der Elektronen unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes zuwenden, müssen wir die Form der Fermiflächen diskutieren, die dabei eine Rolle spielen. Nur Elektronen in der Nähe der Fermifläche tragen zum Transport bei, wie wir im Drude-Sommerfeld-Modell gesehen haben. In einem freien Elektronengas und  $T = 0$  sind alle Zustände unterhalb einer charakteristischen Energie  $E_F$  und damit auch unterhalb eines charakteristischen Wellenvektors  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  vollständig besetzt. Im reziproken Raum entspricht dies einer Kugel mit dem Radius  $k_F$ , der Fermi-Kugel.

Die Bandstruktur führt dazu, dass die Form von einer Kugel abweichen wird. Wir bezeichnen dann als *Fermi-Fläche* die Fläche im reziproken Raum, die genau alle besetzten Zustände bei  $T = 0$  einschließt. Die möglichen Werte des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  sind diskret. Die Gesamtzahl der  $\mathbf{k}$ -Werte in der ersten Brillouinzone entspricht der Anzahl primitiver Einheitszellen im Kristall. Weil ein Elektron zwei verschiedene Spin-Eigenwerte annehmen kann, gibt es in der ersten Brillouinzone also doppelt so viele Zustände für Elektronen wie Atome im Kristall, falls nur ein Atom in der Einheitszelle ist.

Falls jedes Atom ein Elektron zum quasi-freien Elektronengas beisteuert, dann ist das Band nur halb gefüllt und damit  $k_F$  knapp unterhalb der Grenze der Brillouinzone bei  $\pi/a$ . Wenn die Bandstruktur isotrop ist, dann nimmt die Fermi-Fläche auch hier die Form einer Kugel an. Ansonsten 'verbeult' die Form etwas. Beispiele sind die Alkali-Metalle.

Bei zwei Elektronen pro Atom würden zwar genügend Zustände innerhalb der ersten Brillouinzone existieren. Bei einer isotropen Bandstruktur ist der Kugel-Radius  $k_F$  aber größer als  $\pi/a$ . Eine Kugel reicht etwas über den Quader gleichen Volumens hinaus. Im reduzierten Zonenschema findet man also freie Zustände in den Ecken des ersten Bandes und besetzte Zustände in Taschen an den Kanten des zweiten Bandes (siehe Abbildung 4.2), die man sich durch Rückfaltung entstanden vorstellen kann.

An der Grenze der Brillouinzone, wo diese Rückfaltung stattfindet, entsteht durch das periodische Potential aber auch die Bandlücke. Dort ist die Komponente der Gruppengeschwindigkeit Senkrecht zur Zonengrenze Null, also

$$\mathbf{v}_{g,\perp} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_\perp} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}_\perp} E = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Der Gradient der Energie verläuft also parallel zur Grenze der Brillouinzone und damit die Linien konstanter Energie und so die Fermi-Fläche senkrecht auf die Grenze der Brillouinzone. Dies führt lokal zu einer Abweichung von der (zurückgefalteten) Kugelform.

Im ausgedehnten Zonenschema findet man so durch 'Hälsen' verbundene Flächen, die sich periodisch wiederholen.

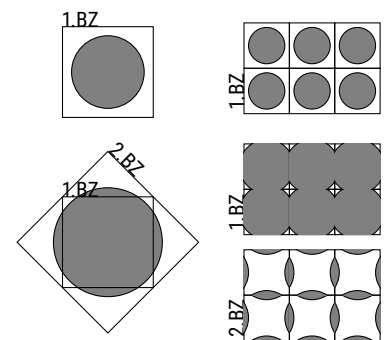


Abbildung 4.2: Wenn die Fermi-Kugel die Grenze der ersten Brillouinzone erreicht entstehen freie Zustände in den Ecken des ersten Bandes und besetzte Zustände in Taschen an den Kanten des zweiten Bandes.

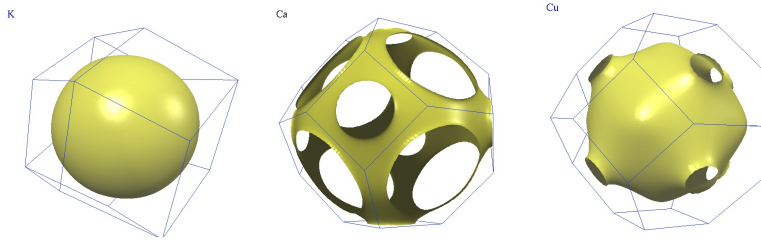


Abbildung 4.3: Fermi-Oberflächen von K, Ca und Cu (von links). Choy u. a., 2000

### Zur Selbstkontrolle

1. Machen Sie sich klar welche Formen von Fermi-Flächen durch den Kontakt mit der Grenze der Brillouinzone entstehen können, wenn man das periodische Zonenschema benutzt.

### Zyklotron-Resonanz

Die Zyklotron-Resonanz ist eine experimentelle Methode, mit der die Form der Fermi-Fläche bestimmt werden kann. Man legt ein statisches Magnetfeld  $\mathbf{B}$  an und bestimmt die Absorption einer Radiowelle variabler Frequenz.<sup>1</sup> Man findet charakteristische Frequenzen, bei denen die Absorption besonders hoch ist. Aus diesen Zyklotronresonanzfrequenzen kann man den Umfang der Fermi-Fläche bestimmen, die von einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld geschnitten wird.

<sup>1</sup> Eigentlich macht man es genau umgekehrt: konstante Frequenz, variables Feld. Aber so ist es einfacher zu erklären.

Betrachten wir zunächst klassische freie Elektronen im Magnetfeld. Die Bewegungsgleichung ist

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (4.2)$$

Wir haben hier kein elektrisches Feld und setzen  $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$ . Damit ist die Bewegung in  $z$ -Richtung frei und wir erhalten ein Gleichungssystem für die Bewegung in der  $xy$ -Ebene

$$m\dot{v}_x = -eB_0 v_y \quad (4.3)$$

$$m\dot{v}_y = +eB_0 v_x \quad (4.4)$$

Die Lösung ist eine kreisförmige Bahn mit der Zyklotron-Frequenz  $\omega_c$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (4.5)$$

Im Kristall wird nun aus der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  die Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_g$  und die Bewegungsgleichung

$$d\mathbf{k} = -\frac{e}{\hbar^2} [\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}] dt \quad (4.6)$$

Die Änderung des Wellenvektors steht also senkrecht auf dem Magnetfeld und dem Gradienten der Energie. Das Elektron bewegt sich auf einer Bahn, die senkrecht auf dem Magnetfeld steht und entlang konstanter Energie  $E(\mathbf{k}) = \text{const.}$  geht. Wir führen einen Vektor  $d\mathbf{k}_\perp$  ein, der senkrecht auf  $\mathbf{B}$  und  $d\mathbf{k}$  steht. Seine Länge ist  $dk_\perp$ . Damit erhalten wir wir

$$|d\mathbf{k}| = \frac{e}{\hbar^2} B |dE/dk_\perp| dt \quad (4.7)$$

Die Umlaufzeit  $T$  ist

$$T = \oint dt = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{|d\mathbf{k}|}{|dE/dk_{\perp}|} = \frac{\hbar^2}{eB} \oint \frac{dk_{\perp} |d\mathbf{k}|}{dE} = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{dS}{dE} \quad (4.8)$$

mit der Änderung der umschlossenen Fläche im reziproken Raum

$$dS = \oint dk_{\perp} |d\mathbf{k}| \quad (4.9)$$

Beim freien Elektron ändert sich die Länge des Wellenvektors  $k$  nicht. Die umschlossene Fläche ist also  $S = \pi k^2$  und die Energie  $E = (\hbar k)^2/2m$ .

Damit wird

$$\frac{dS}{dE} = \frac{2\pi m}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{\tilde{m}} \quad (4.10)$$

Nur im Fall freier Elektronen ist die Masse  $\tilde{m}$  die Ruhemasse des Elektrons. Ansonsten behält man aber diesen Zusammenhang bei und steckt das Ergebnis von Gl. 4.8 in die *Zyklotron-Masse*, die sich von der effektivem Masse  $m^*$  unterscheidet.

Bis hierher haben wir zwar Kreisfrequenzen, aber noch keine Absorption. Alle Elektronen bewegen sich auf geschlossenen Bahnen, nehmen aber keine Energie auf, weil eben  $E(\mathbf{k}) = \text{const.}$  gilt. Nun werden Mikrowellen mit der Frequenz  $\omega_{RF} = \omega_c$  eingestrahlt. Nur Elektronen in der Nähe der Fermikante können Energie aufnehmen. Die Zyklotronresonanz misst also die Länge der Bahnen auf der Fermifläche; je nach Orientierung des Magnetfeldes verlaufen die Bahnen in unterschiedlichen Bereichen. Scharfe Resonanzen erhält man nur, wenn die mittlere Stoßzeit groß gegenüber der Umlaufzeit ist, also mehrere Umläufe ungestört durchlaufen werden können. Man verwendet daher hohe Magnetfelder und damit hohe Umlauffrequenzen sowie tiefe Temperaturen und reine Substanzen.

Weiterhin tragen nur *extremale Bahnen* bei. Dies sind Bahnen, bei denen es viele Bahnen mit ähnlicher Frequenz gibt oder umgekehrt, bei denen sich die Frequenz nur wenig ändert, wenn sich die Komponenten des Wellenvektors parallel zum Magnetfeld ändern. Die Bahnen sind also stabil gegenüber Störungen.

Zur Selbstkontrolle

2. Welche extremale Bahnen erwarten Sie in den in Abb. 4.3 gezeigten Fermi-Flächen?

### Beispiel: Germanium

Germanium (Ge) ist ein indirekter Halbleiter mit kubisch-flächenzentrierter (fcc) Kristallstruktur. Die Fermi-Energie eines Halbleiters liegt in der Bandlücke, so dass eine Fermi-Fläche nicht definiert werden kann. Daher betrachten wir hier eine Isoenergiefläche für angeregte Elektronen im Leitungsband. Von der Idee her ist dies aber identisch mit der Spektroskopie von Fermi-Flächen. Die Bandstruktur von Germanium ist etwas speziell. Insbesondere liegt das Minimum des Leitungsbandes nicht am  $\Gamma$ -Punkt, sondern an den L-Punkten am Rand der Brillouin-Zone. Die iso-Energieflächen haben die Form

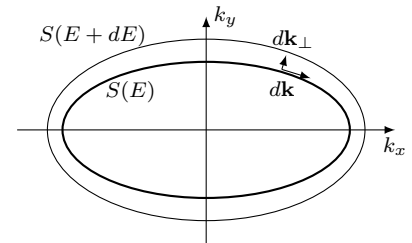


Abbildung 4.4: Die Fläche  $dS$  ist ein Kreisintegral über  $|d\mathbf{k}|$  mit der 'Dicke'  $dk_{\perp}$ .

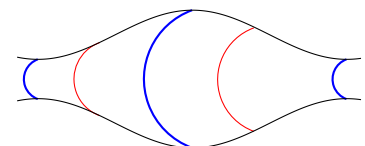


Abbildung 4.5: Nur extremale Bahnen (blau) entlang der Fermi-Oberfläche sind stabile tragen zur Zyklotron-Resonanz bei. Die rot gezeichneten Bahnen sind instabil.

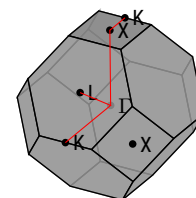


Abbildung 4.6: Brillouinzone eines fcc Kristalls.

von Ellipsoiden, deren Mittelpunkt in den L-Punkten liegt und deren lange Achse zum  $\Gamma$ -Punkt zeigt. Obwohl es 8 L-Punkte gibt, liegt die Hälfte der Ellipsoide außerhalb der ersten Brillouin-Zone, so dass effektiv nur 4 vollständige Ellipsoide betrachtet werden müssen.

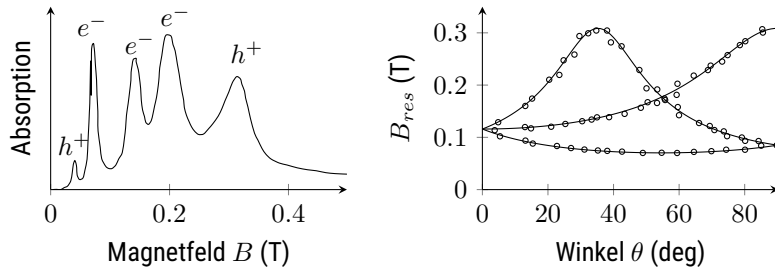


Abbildung 4.7: links: Zyklotron-Resonanz-Spektrum von Germanium bei einem Winkel  $\theta = 60^\circ$  zur  $[001]$ -Achse. rechts: Resonanzfeldstärke  $B$  als Funktion von  $\Theta$ .

Die Form dieser Iso-Energie-Fläche wurde von Dresselhaus, Kip und Kittel, 1955 durch Zyklotronresonanz bestimmt. Im Experiment ist es viel einfacher, den Mikrowellengenerator mit konstanter Frequenz zu betreiben und die Amplitude und Richtung des Magnetfeldes zu variieren. Die Frequenz ist dann immer  $\omega_c = 2\pi \cdot 24 \text{ GHz}$ . Abbildung 4.7(links) zeigt das Resonanzspektrum für eine bestimmte Orientierung des Magnetfeldes relativ zur Probe. Man findet fünf Resonanzen, von denen die drei mittleren den Elektronen im Leitungsband zugeordnet werden können. Bei der gewählten Anordnung von Probe und Magnetfeld sind zwei der vier Ellipsoide äquivalent, so dass effektiv drei verschiedene Ellipsoide sichtbar sind, die jeweils eine Resonanz im Spektrum ergeben.

Dann wird die Richtung des Magnetfeldes in der  $(110)$ -Ebene variiert.<sup>2</sup> Angegeben ist jeweils der Winkel  $\theta$  zur  $[001]$ -Achse. Mit dem Winkel ändert sich die Schnittebene, auf der die Zyklotronbahnen verlaufen, und damit ihre Fläche. Die Ellipsoide können durch zwei effektive Massen  $m_l, m_t$  in Längs- und Querrichtung beschrieben werden. Für einen Winkel  $\alpha$  zwischen dem Magnetfeld und der Längsachse des Ellipsoids ergibt sich eine effektive Masse  $m_{ell}$

$$\left(\frac{1}{m_{ell}}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{m_t m_l} \quad (4.11)$$

Diese effektive Masse bestimmt die Lage der Zyklotronresonanz. Der gesamte Datensatz in Abb. 4.7(rechts) kann daher durch  $m_l = 1.58 m_e$  und  $m_t = 0.082 m_e$  beschrieben werden, wobei  $m_e$  die Masse des freien Elektrons ist.

<sup>2</sup> Siehe Festkörperphysik I zur Definition von Ebenen und Richtungen. Insbesondere werden Richtungen in fcc-Kristallen mit sc-Koordinaten bezeichnet.

### Zur Selbstkontrolle

3. Wie hängt die effektive Masse mit der Form der Ellipsoiden zusammen?

## Landau-Niveaus

Bei der Zyklotronresonanz haben wir die Elektronenbahnen klassisch behandelt. In der Quantenmechanik erwartet man eine einzige Wellenfunktion pro Bahn, d.h. insbesondere, dass sich die Phase nur um ein Vielfaches von  $2\pi$  pro Umlauf ändert. Dies führt zu quantisierten Bahnen und einer Aufspaltung

der Zustände in Landau-Niveaus. Wir vernachlässigen den Energiebeitrag der Elektronenspins im Magnetfeld.

Wir müssen also das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  in die Schrödingergleichung einbeziehen<sup>3</sup>. Dies geschieht über das zugehörige Vektorpotential  $\mathbf{A}$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \psi = E\psi \quad . \quad (4.12)$$

Wir wählen die Eichung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & Bx & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad . \quad (4.13)$$

Damit ist die Schrödingergleichung separierbar in einen  $z$ -Anteil und einen für  $xy$ . Der  $z$ -Anteil entspricht einem freien Teilchen, also

$$\psi(z) \propto e^{\pm i k_z z} \quad \text{und} \quad E_z = \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \quad . \quad (4.14)$$

Für den  $xy$ -Anteil machen wir den Ansatz

$$\psi(x, y) \propto u(x) e^{i k_y y} \quad (4.15)$$

und erhalten eine eindimensionale Gleichung für  $u(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \left( \frac{eB}{m} x - \frac{\hbar k_y}{m} \right)^2 u = (E - E_z) u \quad . \quad (4.16)$$

Das ist ein eindimensionaler harmonischer Oszillator in einem parabolischen Potential, dessen Gleichgewichtslage bei

$$x_0 = \frac{\hbar^2 k_y}{m \omega_c} \quad (4.17)$$

liegt. Die Eigenfrequenz ist  $\omega = \omega_c = eB/m$ , mit  $m$  wieder der Zyklotron-Masse. Die Gesamtenergie hat die Eigenwerte

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \quad . \quad (4.18)$$

Insgesamt gibt es eine freie Bewegung in  $z$ -Richtung, d.h. in Richtung des Magnetfeldes, und eine quantisierte geschlossene Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene. Abbildung 4.8 zeigt die Dispersionsrelation entlang  $k_z$ . In Metallen liegen die Zustände jedoch viel dichter beieinander: Bei einem Magnetfeld von 1 T beträgt  $\hbar \omega_c$  etwa 0.1 meV, verglichen mit  $E_F \approx 10$  eV.

Die  $x$  und  $y$ -Komponente des Wellenvektors sind nicht mehr zeitlich konstant, und nicht mehr Eigenwerte des Hamilton-Operators. Dies sind keine 'guten' Quantenzahlen mehr. Die Energie ist gegeben durch die Komponente  $k_\perp$  senkrecht zum Magnetfeld

$$k_{\perp, n} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c} \quad . \quad (4.19)$$

Damit wird die Energie

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_{\perp, n}^2 + k_z^2) \quad . \quad (4.20)$$

<sup>3</sup> siehe Kap. 9.3.2 in Hunklinger, 2014 und Kap. 9.6.1 in Yu und Cardona, 2010

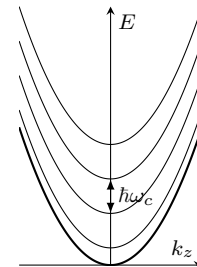


Abbildung 4.8: Dispersionsrelation entlang  $k_z$  ohne Magnetfeld (fett) und nach Quantisierung der Kreisbahnen (dünn).

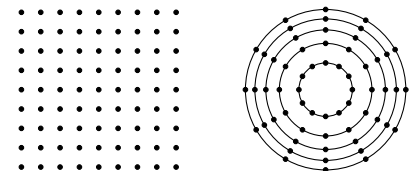


Abbildung 4.9: Durch das Magnetfeld in  $z$ -Richtung ändert sich die Anordnung der Zustände im reziproken Raum  $k_x - k_y$ .



In der  $xy$ -Ebene des reziproken Raums sind die Zustände also konzentrische Kreise, deren Durchmesser proportional zu  $\sqrt{n+1/2}$  ansteigt (Abb. 4.9). Der Kreis mit der Quantenzahl  $n$  hat im reziproken Raum die Fläche

$$S_n = \pi k_{\perp,n}^2 = \frac{2\pi eB}{\hbar} \left( n + \frac{1}{2} \right) . \quad (4.21)$$

Die Fläche zwischen zwei Kreisen ist im reziproken Raum für alle Kreise gleich

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n = \frac{2\pi eB}{\hbar} . \quad (4.22)$$

Ohne Magnetfeld sind Zustände im reziproken Raum homogen verteilt, die Zustandsdichte konstant. Mit Magnetfeld werden die Zustände so umverteilt, dass sie in der  $xy$ -Ebene auf Kreisen liegen, und zwar auf jedem Kreis gleich viele. Das sind gerade die, die innerhalb des Kreises bis zum vorangegangenen liegen würden. Der Entartungsgrad  $g_e$  lässt sich schreiben als

$$g_e = \Delta S \frac{L^2}{(2\pi)^2} = \frac{eBL^2}{h} = \frac{\Phi}{2\Phi_0} \quad (4.23)$$

mit der Fläche der Probe  $L^2$  senkrecht zum Magnetfeld, dem magnetischen Fluss  $\Phi = L^2 B$  und dem *magnetischen Flussquant*  $\Phi_0$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} . \quad (4.24)$$

Der Begriff *Flussquant* greift dem Kapitel über die Supraleitung vorweg. Dort wird auch der Faktor 2 deutlich, da die Elektronen dort paarweise auftreten. Die Stärke des Magnetfeldes kann (bei gegebener Probengröße) in Flussquanten gemessen werden. Genau diese Zahl bestimmt die Anzahl der Zustände auf den Landau-Kreisen, also deren Entartung.

In  $z$ -Richtung hat das Magnetfeld keinen Einfluss. Hier liegen die Zustände weiterhin homogen. Es bilden sich konzentrische Zylinder, die bis zur Fermi-Fläche mit Elektronen besetzt sind. Die Landau-Kreise sind also eigentlich Landau-Zylinder.

#### Zur Selbstkontrolle

4. Skizzieren Sie, wie in 3 Dimensionen die Landau-Zylinder in der Fermi-Kugel liegen, oder suche Sie solch ein Bild im Internet.

### Dimensionalität und Zustandsdichte

Betrachten wir zunächst die Zustandsdichte ohne Magnetfeld, aber mit reduzierter Dimensionalität, bevor wir zum Magnetfeld zurückkehren. Der Einfachheit halber nehmen wir ein freies Elektronengas an. Die Gruppengeschwindigkeit ist  $v_g = \hbar k/m$ . Damit ist die Zustandsdichte in  $n$  Dimensionen

$$D(E)^{(n)} dE = 2 \frac{L^n}{\hbar (2\pi)^n} \frac{m}{\hbar k} dE \int_{E=\text{const.}} dS_E \quad (4.25)$$

und somit

$$D(E)^{(3d)} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} L^3 E^{1/2} \quad (4.26)$$

$$D(E)^{(2d)} = \frac{m}{\pi \hbar^2} L^2 = \text{const.} \quad (4.27)$$

$$D(E)^{(1d)} = \frac{1}{\pi \hbar} L E^{-1/2} . \quad (4.28)$$

Für punktförmige Objekte, also null Dimensionen erhält man wie für Atome diskrete Zustände

$$D(E)^{(0d)} = 2 \delta(E - E_0) \quad . \quad (4.29)$$

Nun kehren wir zum Magnetfeld zurück. Ein angelegtes Magnetfeld lässt auch im Dreidimensionalen eine freie Bewegung nur noch in der  $z$ -Richtung zu. Damit ändert sich effektiv die Dimensionalität der Probe. Nicht mehr alle drei Dimensionen sind relevant, sondern nur noch eine. Dies sieht man auch in der Zustandsdichte. Die Gesamtenergie jedes Zustands lässt sich aufspalten in die Energie der Kreisbewegung und die der freien Bewegung

$$E = E_n + E_z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \quad . \quad (4.30)$$

Dann verschiebt  $E_n$  die Energieskala, die in  $D(E)^{(1)}$  eingeht. Die Gesamt-Zustandsdichte für 3 Dimensionen plus Magnetfeld ist also<sup>4</sup>

$$D(E)^{(3d+B)} = \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} L^3 \sum_n \frac{\hbar \omega_c}{\sqrt{E - E_n}} \Theta(E - E_n) \quad (4.31)$$

wobei durch die Stufenfunktion  $\Theta$  nur Summanden mit  $E \geq E_n$  beitragen. Abbildung 4.10 zeigt diese Zustandsdichte im Vergleich zum Fall  $B = 0$ . Die Flächen unter den Kurven sind identisch. Bei kleiner werdendem Magnetfeld wird die Zyklotron-Frequenz  $\omega_c$  kleiner und damit der Abstand der Peaks kleiner. Wenn man dann über ein kleines Energieintervall mittelt<sup>5</sup> gehen beide Fälle ineinander über.

Wenn wir von einer zweidimensionalen Probe ausgehen, dann ist ohne Magnetfeld die Zustandsdichte konstant. Mit Magnetfeld bleibt nur eine äquidistante Reihe von Delta-Funktionen  $\delta(E - E_n)$  bei den Zyklotron-Energien  $E_n$ , da keine freie Bewegung mit variabler Energie mehr möglich ist

$$D(E)^{(2d+B)} \propto \sum_n \delta(E - E_n) \quad . \quad (4.32)$$

## Innere Energie

Die Änderung der Zustandsdichte durch das Magnetfeld hat einen überraschenden Einfluss auf die innere Energie. Wir diskutieren dies für eine zweidimensionale Probe. Man kann sich die dreidimensionale Zustandsdichte aber als etwas ausgeschmierte 2d Dichte vorstellen und erwartet somit ähnliche Ergebnisse.

Wenn kein Magnetfeld anliegt, sind alle Zustände bis zur Fermi-Energie  $E_F$  gefüllt (bei  $T = 0$ ), alle darüber leer. Jetzt schalten wir das Magnetfeld ein und wählen seine Stärke gerade so, dass die Entartung  $g_e$  (Gl. 4.23) passend ist (siehe Abb. 4.11), nämlich die Gesamtzahl  $N$  der Elektronen ein ganzzahliges Vielfaches des Entartungsgrads ist

$$N = p g_e \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{N} \quad . \quad (4.33)$$

In diesem Fall ändert sich die innere Energie nicht. Die Zustände ändern zwar ihre Energie, weil alle auf die Landau-Niveaus verschoben werden, aber gleich viele werden angehoben wie abgesenkt: die bis zum Abstand

<sup>4</sup> Czocholl, 2016.

<sup>5</sup> beispielsweise durch thermische Einflüsse via  $k_B T$

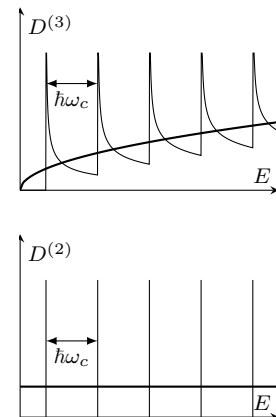


Abbildung 4.10: Zustandsdichte in 2 und 3 Dimensionen ohne (fett) und mit (dünn) angelegtem Magnetfeld.

$\hbar\omega_c/2$  unterhalb des Niveaus werden angehoben; die bis zu diesem Abstand darüber werden abgesenkt.

Ist aber die Feldstärke  $B$  anders, d.h. die Entartung  $g_e$  ist nicht genau gleich wie von Gl. 4.33 gefordert, so liegt ein nur teilweise besetztes Landau-Niveau vor. Beim allmählichen Füllen dieses letzten Niveaus werden jedoch zunächst nur Energien angehoben. Erst nach der halben Besetzung werden Energien abgesenkt. Insgesamt bleibt unabhängig von  $B$  immer eine Anhebung übrig.

Die innere Energie oszilliert also mit der Zahl der besetzten Niveaus  $p$ , wobei ein nicht-ganzzahliges  $p$  nun eine teilweise Besetzung bedeutet. Das Minimum der inneren Energie ist bei  $E_F(B = 0)$ . Weil

$$E_F \approx p\hbar\omega_c = p \frac{e\hbar B}{m} \quad (4.34)$$

treten die Minima mit einer Periode des reziproken Feldes

$$\delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{e\hbar}{m E_F} \quad (4.35)$$

auf.

Interessanter ist jedoch die Größe des höchsten besetzten Landau-Niveaus im reziproken Raum, die wir mit  $S_F$  bezeichnen. Dies ist der Schnitt durch die Fermi-Fläche in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld und erlaubt somit die Fermi-Fläche auszumessen. Für ein Feld  $B_n$  seien gerade  $n$  Landau-Niveaus besetzt. Die Größe  $S_F$  des obersten Niveaus im reziproken Raum wird durch Gl. 4.21 gegeben:

$$S_F = \frac{2\pi e B_n}{\hbar} \left( n + \frac{1}{2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{2\pi e B_{n+1}}{\hbar} \left( n + 1 + \frac{1}{2} \right) \quad (4.36)$$

so dass

$$\delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar S_F} \quad (4.37)$$

Die innere Energie variiert also periodisch im  $1/B$ . Die Periodenlänge  $\delta(1/B)$  erlaubt es, die Größe  $S_F$  der Fermi-Fläche geschnitten senkrecht zum Magnetfeld zu bestimmen.

### Zur Selbstkontrolle

5. Machen Sie sich klar, was in Abb. 4.11 passiert. Wie ändert sich die Besetzung der Landau-Niveaus und die innere Energie, wenn man die magnetische Feldstärke variiert? Das ist der zentrale Punkt für den Rest des Kapitels.

## De Haas-van Alphen-Effekt

Viele messbaren Größen hängen mit der inneren Energie zusammen. Man findet diese Oszillationen mit  $1/B$  beispielsweise in der Wärmekapazität und in der Magnetisierung. Die Wärmekapazität ist

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (4.38)$$

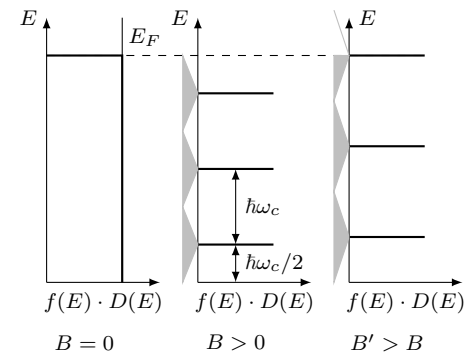
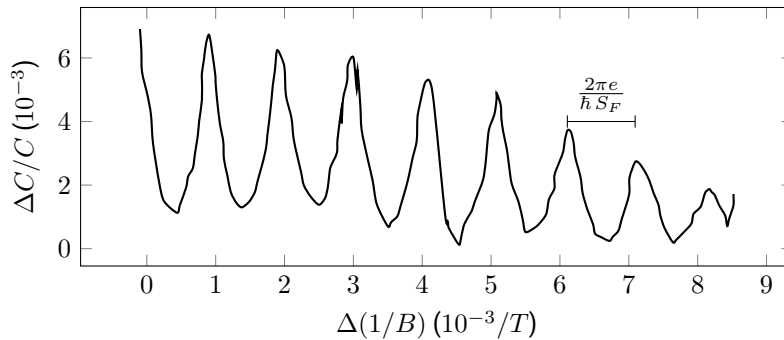


Abbildung 4.11: Zustandsdichte in zwei Dimensionen. Bei gewissen Feldstärken  $B$  ist die innere Energie größer als ohne Feld.

und die Magnetisierung  $M$  ist die Ableitung der freien Energie  $F$  bzw. (bei  $T = 0$ ) der inneren Energie  $U$  nach  $B$ :

$$M = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial F}{\partial B} \right)_{T,V} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial B} \right)_{T=0,V} . \quad (4.39)$$

Die Oszillation von  $M$  mit  $1/B$  nennt man De Haas-van Alphen-Effekt nach W.J. de Haas und P.M. van Alphen.



Im Fall von Wärmekapazität Beryllium (Abb. 4.12) misst man bei passender Orientierung des Magnetfeldes die Querschnittsfläche der zigarrenförmigen Fermi-Flächen am Rand der Brillouinzone.

Zur Selbstkontrolle

6. Wie hängt die Oszillation in der Wärmekapazität von der Orientierung des Magnetfeldes ab?

## Hall-Effekt

Im letzten Teil dieses Kapitels verlassen wir die Resonanzen an der Oberfläche der Fermi-Fläche und betrachten den Hall-Effekt, aber wieder bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern. Die Landau-Niveaus werden also weiterhin eine Rolle spielen. Ziel ist es, den Verlauf der Längs- und Querwiderstände in der Abbildung am Anfang des Kapitels zu erklären, eben den Quanten-Hall-Effekt.

Zunächst verlassen wir für einen Moment die quantenmechanische Beschreibung und betrachten den klassischen Hall-Effekt. Er erlaubt uns, die Ladungsträgerkonzentration zu bestimmen und zwischen Elektronen und Löchern zu unterscheiden. Er dient uns aber auch als Grundlage für den Quanten-Hall-Effekt im nächsten Abschnitt.

Wir betrachten die Bewegung eines quasi-freien Elektrons ( $q = -e$ ) unter elektrischen und magnetischen Feldern und berücksichtigen Stöße wie im Drude-Modell. Relevant ist die mittlere (Drift-) Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle$ , bei der also die thermische Bewegung herausgemittelt ist. Für diese gilt

$$m^* \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -e [\mathcal{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}] - m^* \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{\tau} . \quad (4.40)$$

Das Magnetfeld zeigt in  $z$ -Richtung und wir sind nur am stationären Fall

Abbildung 4.12: Relative Änderung der Wärmekapazität von Beryllium (Be) mit dem Magnetfeld (Sullivan und Seidel, 1968). Das Feld ist parallel zur kristallographischen  $c$ -Achse.

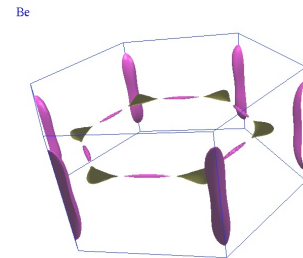


Abbildung 4.13: Fermi-Flächen von Beryllium (Choy u. a., 2000).

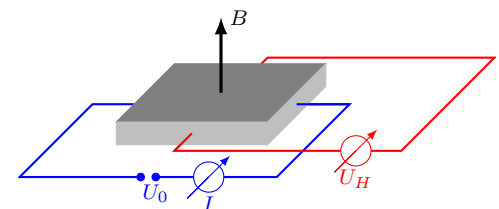


Abbildung 4.14: Geometrie zum Hall-Effekt.

interessiert ( $d\langle \mathbf{v} \rangle / dt = 0$ ). Dann erhalten wir

$$v_{d,x} = -\frac{e\tau}{m^*}(\mathcal{E}_x + v_{d,y}B) \quad (4.41)$$

$$v_{d,y} = -\frac{e\tau}{m^*}(\mathcal{E}_y - v_{d,x}B) \quad (4.42)$$

$$v_{d,z} = -\frac{e\tau}{m^*}\mathcal{E}_z \quad (4.43)$$

Mit der Definition der Stromdichte  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{E}}$  und der Zyklotron-Frequenz  $\omega_c = eB/m^*$  bekommen wir den Leitfähigkeitstensor  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2\tau^2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

wobei gerade  $\sigma_{zz} = \sigma_0 = ne^2\tau/m^*$  die Leitfähigkeit bei  $B = 0$  ist. Man benutzt immer flache Proben, ohne elektrisches Feld oder Stromfluss in  $z$ -Richtung. Aus Symmetriegründen reicht es aus  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$  zu betrachten.

Wir machen das Experiment so, dass nur Strom in  $x$ -Richtung fließt, also  $j_y = 0$ . Damit wird

$$\mathcal{E}_y = -\omega_c\tau\mathcal{E}_x = -\omega_c\tau\frac{j_x}{\sigma_0} = R_H B j_x \quad (4.45)$$

Das Magnetfeld bewirkt also ein elektrisches Hall-Feld in  $y$ -Richtung, obwohl der Strom in  $x$ -Richtung fließt. Die Hall-Konstante  $R_H$  ist definiert als

$$R_H = \frac{\mathcal{E}_y}{j_x B} = -\frac{1}{ne} \quad (4.46)$$

Da sich  $\mathcal{E}_y$ ,  $j_x$  und  $B$  messen lassen, kann man so die Ladungsträgerdichte  $n$  bestimmen und auch ihr Vorzeichen.

Falls sowohl Elektronen als auch Löcher zum Ladungstransport beitragen, dann werden deren Konzentrationen  $n$  und  $p$  mit der Beweglichkeit<sup>6</sup>  $\mu_n$  und  $\mu_p$  gewichtet

$$R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(p\mu_p + n\mu_n)^2} \quad (4.47)$$

Analog zum Querwiderstand  $\rho_{xy} = R_H B$  ist später auch der Längswiderstand

$$\rho_{xx} = \frac{\mathcal{E}_x}{j_x} = \frac{B}{ne} \frac{1}{\omega_c\tau} = \frac{m^*}{ne^2\tau} \quad (4.48)$$

interessant.

## Zur Selbstkontrolle

7. Wahrscheinlich ist Ihnen der klassische Hall-Effekt schon früher einmal begegnet. Vergleichen Sie die damalige Darstellung (unter Umständen ohne Leitfähigkeitstensor) mit dieser hier.

## Quanten-Hall-Effekt

Beim klassischen Hall-Effekt hatten wir gefordert, dass die Probe flach ist, also kein Feld oder Stromfluss in  $z$ -Richtung geschieht. Das verschärfen wir

Element	Li	Na	Be	Al
Wertigkeit	1	1	2	3
$n/\text{Atom}$	0.8	1.2	-0.4	-0.9

Tabelle 4.1: Ladungsträgerdichte  $n$  bestimmt aus der Hall-Konstanten  $R_H$  (aus Hunklinger, 2014). Ein negatives Vorzeichen bedeutet Löcherleitung.

<sup>6</sup>  $\mu = e\tau/m$ , siehe Gl. 2.24.

jetzt und fordern eine quantenmechanisch-zweidimensionale Probe, also eine, bei der in  $z$ -Richtung keine Quantenzahlen mehr relevant sind, insbesondere kein  $k_z$ . Solche Strukturen nennt man zweidimensionales Elektronengas (2DEG) und kann sie an Grenzflächen zwischen zwei Halbleitern erzeugen.

Wenn wir ein starkes Magnetfeld anlegen und die Proben rein genug sind, so dass  $\omega_c \tau \gg 1$ , und die Temperatur  $T$  kalt genug, dann erhalten wir wie oben besprochen (Gl. 4.32) als Zustandsdichte eine äquidistante Reihe von Delta-Funktionen  $\delta(E - E_n)$ . Bei manchen Magnetfeldern  $B$  sind dann alle Landau-Niveaus vollständig gefüllt und das nächste Niveau  $\hbar\omega_c$  in der Energie entfernt. Damit sind keine Streuprozesse möglich und  $\tau$  wird unendlich. Wir wiederholen hier die relevanten  $x$  und  $y$ -Komponenten des Leitfähigkeitstensors (Gl. 4.44)

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*(1 + \omega_c^2\tau^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Für  $\tau \rightarrow \infty$  wird daraus

$$\sigma_{\tau \rightarrow \infty} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_\infty \\ \sigma_\infty & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.50)$$

Die Diagonal-Einträge verschwinden.  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ . Die Kreuz-Terme  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yx}$  bleiben aber von Null verschieden. Der Widerstandstensor ist das Inverse<sup>7</sup> des Leitfähigkeitstensors

$$\rho_{\tau \rightarrow \infty} = \sigma_{\tau \rightarrow \infty}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sigma_\infty \\ -1/\sigma_\infty & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.51)$$

<sup>7</sup> Man invertiert den Tensor (die Matrix), nicht jedes Element!

Das Längsfeld  $\mathcal{E}_x$  verschwindet, weil zwar  $j_x \neq 0$  aber  $\sigma_{xx} = 0$  und wie immer  $j_y = 0$ . Damit wird auch der Längs-Widerstand  $\rho_{xx} = 0$ . Das Hall-Feld  $\mathcal{E}_y$  bewirkt den Stromfluss in  $x$ -Richtung.

Das hat Klaus von Klitzing 1980 auch genau so gefunden<sup>8</sup>. Etwas neuere Daten sind in Abbildung 4.1 gezeigt. An den Stellen, an denen der Längs-Widerstand  $\rho_{xx}$  verschwindet, also gerade alle Landau-Niveaus vollständig gefüllt sind, ist die Elektronendichte

<sup>8</sup> siehe Klitzing, Dorda und Pepper, 1980. Nobelpreis K. von Klitzing 1985

$$n = \frac{N}{L^2} = \frac{pg_e}{L^2} = \frac{peB}{h} \quad (4.52)$$

mit ganzzahligem  $p$ . Der Quer-Widerstand wird somit

$$\rho_{xy} = R_H B = -\frac{B}{ne} = \frac{1}{p} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{p} R_K \quad (4.53)$$

mit der Naturkonstanten  $R_K = 25812,8 \dots \Omega$ , die als von Klitzing-Widerstand bezeichnet wird. Dies wird heute als Widerstandsnormal genutzt, auch um die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante  $\alpha$  zu bestimmen

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{e^2}{h} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{1}{R_K} \approx \frac{1}{137} . \quad (4.54)$$

Überraschend war jedoch, dass sich Plateaus ausbilden, also  $\rho_{xx}$  und  $\rho_{xy}$  über ein gewisses Intervall von  $B$  einen konstanten Wert annehmen. Eigentlich sollte ja nur für genau einen Wert von  $B$  alle Landau-Niveaus gefüllt sein. Der Längswiderstand  $\rho_{xx}$  ist in Abbildung 4.1 aber beinahe durchgängig Null. Eine einfache phänomenologische Erklärung findet sich in der

Zustandsdichte einer realen Probe. In Wirklichkeit wird die nicht allein eine Sequenz von Delta-Funktionen sein. Defekte und Verunreinigungen führen zu einer kontinuierlichen Verteilung von Zuständen auf der Energieskala. Diese Defekt-Zustände sind aber im Gegensatz zu den Landau-Niveaus im Raum lokalisiert und tragen nicht zur Leitfähigkeit bei, aber zur Fermi-Energie. Wenn das Magnetfeld etwas erhöht wird, sollte in einer idealen Probe sofort das nächst tiefere Landau-Niveau depopuliert werden, weil die Fermi-Energie direkt zu diesem Niveau springt. In einer realen Probe werden aber zunächst alle Defekt-Zustände dazwischen depopuliert und das Landau-Niveau bleibt vollständig besetzt. Solange es also noch besetzte Defekt-Zustände zwischen zwei Landau-Niveaus gibt, bleibt der Quanten-Hall-Effekt bestehen.

Tiefergehende Erklärungen verwenden 'skipping orbits' in den Randkanälen (am Rand der Probe). In gewissem Sinne ist es auch hier die Abweichung von der unendlich ausgedehnten Idealform, die den Quanten-Hall-Effekt erzeugt. Heutzutage wird der Quanten-Hall-Effekt als ein topologischer Effekt gesehen, der also unter stetigen Verformungen erhalten bleibt. Er wird auch als ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt bezeichnet, weil es auch einen 'fractional quantum Hall effect' gibt, bei dem  $p$  rationale Zahlen annimmt. Für diesen haben Robert Laughlin, Horst Störmer und Daniel Tsui 1998 den Nobelpreis bekommen. Mehr zum Quanten-Hall-Effekt findet sich in Kapitel 10.5 von Gross und Marx, 2023 oder Kapitel 4.6 von Czycholl, 2017.

#### Zur Selbstkontrolle

8. Warum muss die Probe zweidimensional sein, damit der Quanten-Hall-Effekt auftritt?

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Choy, T.-S. u. a. (2000). "A database of fermi surface in virtual reality modeling language (vrml)". In: *Bulletin of The American Physical Society* 45.1, S. L36–42. [↗](#)
- Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- (2017). *Theoretische Festkörperphysik, Band 2*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- Dresselhaus, G, AF Kip und C Kittel (1955). "Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals". In: *Physical Review* 98.2, S. 368. [↗](#)
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#)
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#)
- Klitzing, K, G Dorda und M Pepper (1980). "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance". In: *Phys. Rev. Lett.* 45.6, S. 494–497. [↗](#)
- Klitzing, Klaus v. (1984). "The quantized hall effect". In: *Physica B+C* 126.1, S. 242–249. [↗](#)
- Sullivan, Paul F. und G. Seidel (1968). "Steady-State, ac-Temperature Calorimetry". In: *Phys. Rev.* 173 (3), S. 679–685. [↗](#)



Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [↗](#).



# Kapitel 5

## Halbleiter

Markus Lippitz  
3. Juni 2025

### Ziele

- Sie können die Ladungsträgerdichten in dotierten und undotierten Halbleitern im Zusammenspiel von Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilung erklären und so beispielsweise die unten gezeigten Messungen an Germanium interpretieren.
- Sie können die Strom-Spannungs-Kennlinie eines p-n-Kontakts und die zugrundeliegende Bandstruktur erklären.

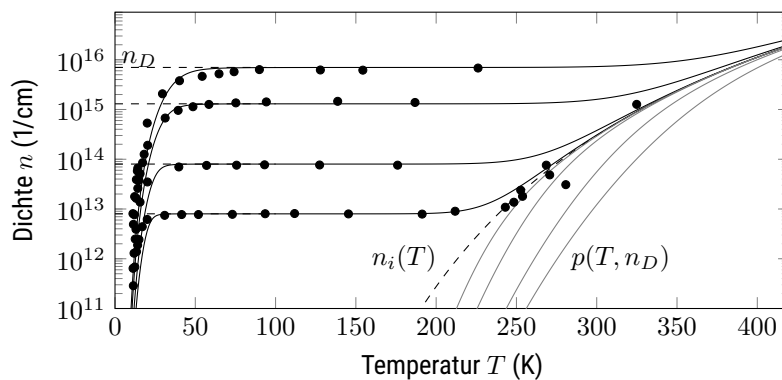


Abbildung 5.1: Dichte der Elektronen im Leitungsband von Germanium, gemessen mit dem Hall-Effekt, als Funktion der Konzentration der Arsen-Donatoren. Daten aus Conwell, 1952. Zum Vergleich ist  $p_i(T) = n_i(T)$  (gestrichelt) und  $p(T, n_D)$  (grau) eingezeichnet.

### Überblick

Wir haben bereits im Kapitel zur Bandstruktur gesehen, dass der Übergang zwischen Isolator und Halbleiter fließend ist. Beide haben ein voll besetztes Valenzband und ein unbesetztes Leitungsband mit der Bandlücke  $E_g$ . Thermische Anregung führt zu einer Besetzung des Leitungsbandes proportional zu  $\exp(-E_g/2k_bT)$ , wie wir weiter unten sehen werden. Beispielsweise werden bei Raumtemperatur je nach Bandlücke  $10^{-5}$  (bei  $E_g = 0.5$  eV) oder  $10^{-26}$  (bei  $E_g = 3$  eV) aller Ladungsträger angeregt sein. Dies führt zu einer von Null verschiedenen Leitfähigkeit. Als Halbleiter bezeichnet man ein Material, dessen spezifische Widerstand bei Raumtemperatur zwischen  $10^{-2}$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

und  $10^9 \Omega\text{m}$  liegt. Halbleiter können nach verschiedenen Eigenschaften klassifiziert werden:

**intrinsisch oder dotiert** Wenn man ein Material gezielt mit einer Verunreinigung versieht, also dotiert, dann kann dies zu mehr freien Ladungsträgern führen, weil diese dann vom Fremdatom stammen. Bei intrinsischen Halbleitern stammen die Elektronen im Leitungsband immer aus dem Valenzband.

**direkt oder indirekt** In einem direkten Halbleiter befindet sich das Maximum des Valenzbandes an der gleichen Stelle im reziproken Raum wie das Minimum des Leitungsbandes. Dies ermöglicht optische Übergänge ohne Änderung des Wellenvektors bei niedrigen Energien. Bei indirekten Halbleitern ist dies nicht der Fall. Optische Übergänge benötigen hier die Beteiligung eines Phonons.

**kristallin oder amorph** Eine perfekte periodische Kristallstruktur ist nicht unbedingt erforderlich ( $\alpha$ -Silizium ist für Solarzellen relevant), aber wir betrachten hier nur kristalline Materialien.

**organisch oder anorganisch** Wir betrachten hier anorganische Halbleiter, die aus einem oder zwei Elementen bestehen. Organische Halbleiter auf der Basis von Kohlenstoffverbindungen organischer Moleküle sind ein Thema für sich.

## Intrinsische kristalline Halbleiter

Die Bandstruktur und die Lage der Fermi-Energie hängt sowohl in der 'empty lattice approximation' als auch im 'tight binding' Modell von der Elektronenkonfiguration der beteiligten Atome ab. Es ist daher nicht verwunderlich, dass Halbleiter aus im Periodensystem benachbarten Atomen gebildet werden. Dies sind zum einen die Elemente der Gruppe IV, also Kohlenstoff (C), Silizium (Si) und Germanium (Ge). Die Bandlücken betragen 5.47 eV, 1.12 eV und 0.66 eV und sind jeweils indirekt. Diamant ist also ein Isolator.

Verbindungshalbleiter bestehen aus zwei Elementen, deren Elektronenzahl sich gerade auf die Gruppe IV mittelt. III-V-Halbleiter sind beispielsweise GaP (2.26 eV, indirekt), GaAs (1.43 eV, direkt), InSb (0.18 eV, direkt). II-VI-Halbleiter sind beispielsweise ZnS (sc: 3.54 eV) und CdSe (1.74 eV).

### Zur Selbstkontrolle

1. Warum ist die Bandlücke von Silizium größer als die von Germanium, obwohl beide Elemente in der gleichen Gruppe des Periodensystems stehen?

## Optische Übergänge

Als Beispiel für den Unterschied zwischen direkten und indirekten Halbleitern möchte ich hier dem späteren Kapitel über optische Eigenschaften vorgreifen und optische Übergänge diskutieren. Ein Photon wird absorbiert und transportiert ein Elektron vom Valenzband in das Leitungsband. Dies wird als

Interbandübergang bezeichnet. Gleichzeitig kann ein Phonon absorbiert oder emittiert werden. Die Energie- und Impulserhaltung lautet dann

$$E_g = \hbar\omega_\gamma(\mathbf{k}_\gamma) \pm \hbar\Omega(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

$$\hbar\Delta\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}_\gamma \pm \hbar\mathbf{q} \quad (5.2)$$

Größen des Photons sind mit  $\gamma$  gekennzeichnet. Das eventuell beteiligte Phonon hat die Frequenz  $\Omega$  und den Impuls  $\mathbf{q}$ . Das Elektron ändert seine Energie um  $E_g$  und seinen Impuls um  $\Delta\mathbf{k}$ .

Betrachten wir zunächst *direkte Übergänge*, also *Prozesse ohne Beteiligung eines Phonons*. Der Impuls eines Photons ist viel kleiner als relevante Impulse von Elektronen in der Brillouinzone:

$$k_\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{2\pi}{500 \text{ nm}} \ll k_{BZ} = \frac{\pi}{a} \approx \frac{\pi}{0.5 \text{ nm}} \quad (5.3)$$

Photonen ermöglichen also nur senkrechte Übergänge in der Elektronen-Dispersionsrelation bei quasi konstantem Elektronen-Impuls  $\mathbf{k}$  ( $\hbar\Delta\mathbf{k} \approx 0$ ). Diese direkten Prozesse dominieren in direkten Halbleitern. Bei gegebenem  $\mathbf{k}$  ist die Energiedifferenz zwischen Valenz- und Leitungsband in der Nähe der Extrema

$$\Delta E = \hbar\omega_\gamma = E_c(\mathbf{k}) - E_v(\mathbf{k}) = \left( \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right) \frac{\hbar^2 k^2}{2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{komb}}^*} \quad (5.4)$$

mit der kombinierten effektiven Masse  $m_{\text{komb}}^*$  einer kombinierten Bandstruktur  $\Delta E(\mathbf{k})$ . Für diese können wir auch eine kombinierte Zustandsdichte angeben

$$D_{\text{komb}}(\Delta E) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m_{\text{komb}}^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\Delta E - E_g} \quad (5.5)$$

Diese Zustandsdichte bestimmt über Fermis Goldener Regel

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle f | \hat{H}' | i \rangle D(\Delta E) \quad (5.6)$$

die Übergangsrate  $\Gamma_{if}$  und damit den Absorptionskoeffizienten  $\alpha \propto \Gamma_{if}$ . Dieser beschreibt die verbleibende Intensität  $I$ , nachdem ein Lichtstrahl gegebener Frequenz eine Probe der Dicke  $L$  durchquert hat

$$I(\omega_\gamma) = I_0 e^{-\alpha(\omega_\gamma)L} \quad (5.7)$$

Insgesamt bekommen wir also mit

$$\alpha(\omega_\gamma) \propto (m_{\text{komb}}^*)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega_\gamma - E_g} \quad (5.8)$$

einen wurzelförmigen Verlauf des Absorptionsspektrums, der bei der Energie der Bandlücke einsetzt. Dabei haben wir die Annahme gemacht, dass das Übergangs-Dipolmoment  $\langle f | \hat{H}' | i \rangle$  im relevanten Frequenzbereich konstant ist.

Bei *indirekten Übergängen* unter Beteiligung eines Phonons wird die Rechnung aufwändiger. Man muss über alle Ausgangs- und Endzustände der Elektronen integrieren, die über irgendein Phonon verbunden sind. Außerdem kann die Reihenfolge der Wechselwirkung mit Photon und Phonon getauscht

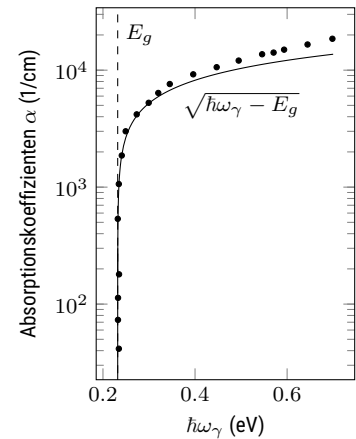


Abbildung 5.2: Absorption von Indiumantimonid (InSb), einem direkten Halbleiter, in der Nähe der Bandkante (Johnson, 1967).

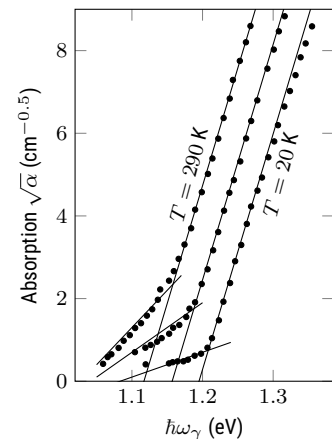


Abbildung 5.3: Absorption von Silizium (Si), einem indirekten Halbleiter, in der Nähe der Bandkante (Macfarlane und Roberts, 1955).

werden und beide Möglichkeiten interferieren in der Quantenmechanik.<sup>1</sup> Das Ergebnis der Rechnung ist

<sup>1</sup> siehe zB Yu und Cardona, 2010

$$\alpha(\omega_\gamma) \propto (\hbar\omega_\gamma - (E_g \pm \hbar\Omega))^2 \quad \text{für} \quad \hbar\omega_\gamma > E_g \pm \hbar\Omega, \quad (5.9)$$

je nachdem, ob ein Phonon absorbiert oder emittiert wird. Die Absorption setzt also mit einem quadratischen Verlauf bei der indirekten Bandlücke ein. Der Anstieg ist mit steigender Frequenz also viel flacher als bei einer direkten Bandlücke. Auch bei indirekten Halbleitern gibt es ab einer gewissen Energie direkte Übergänge. Diese benötigen keine Phononen und sind somit wahrscheinlicher. Ab der direkten Bandlücke dominiert dann also auch der wurzelförmige Verlauf.

Zur Selbstkontrolle

2. Warum ist die Absorption bei direkten Halbleitern bei der Bandkante so viel stärker als bei indirekten Halbleitern?

## Thermische Besetzung der Bänder

Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist das Valenzband vollständig gefüllt, das Leitungsband vollständig leer. Durch thermische Anregung gelangen aber Elektronen von Valenz- ins Leitungsband. Wir berechnen nun, wie viele das sind. Dabei behandeln wir Elektronen und Löcher immer parallel zu einander.

Die Dichte  $n$  der Elektronen im Leitungsband bzw. die Dichte  $p$  der Löcher im Valenzband können wir einfach durch Integration über die Zustandsdichte  $D$  (im jeweiligen Band) und die Fermi-Dirac-Funktion  $f_{FD}$  bestimmen

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f_{FD}(E, T) D_c(E) dE \quad (5.10)$$

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} (1 - f_{FD}(E, T)) D_v(E) dE. \quad (5.11)$$

Die Energien  $E_{v,c}$  bezeichnen die jeweiligen Bandkanten ( $E_g = E_c - E_v$ ). Bei den Löchern integrieren wir über  $1 - f_{FD}$ , weil diese ja gerade unbesetzte Elektronenzustände sind. Die Zustandsdichte ist jeweils

$$D_c(E) = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c} \quad \text{für} \quad E > E_c \quad (5.12)$$

$$D_v(E) = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_v - E} \quad \text{für} \quad E < E_v, \quad (5.13)$$

wobei die Massen hier die jeweiligen effektiven Massen an der Bandkante sind.

Nun müssen wir noch die Fermi-Dirac-Funktion  $f_{FD}$  geeignet nähern und dazu zunächst die Unterscheidung zwischen Fermi-Energie und Fermi-Niveau einführen. In der Fermi-Dirac-Funktion steht eigentlich das chemische Potential  $\mu$ . Die Fermi-Energie hatten wir als  $E_F = \mu(T = 0)$  definiert. Hier interessieren uns aber höhere Temperaturen. Gross und Marx, 2023 verwendet direkt das chemische Potential  $\mu(T)$ , Hunklinger, 2014 führt den Begriff des Fermi-Niveaus als Äquivalent zum chemischen Potential ein. Um

Verwechslungen mit der Beweglichkeit zu vermeiden, wird dort  $E_F(T)$  statt  $\mu$  verwendet. Ich folge hier Hunklinger.

Wir machen die Annahme, dass das Fermi-Niveau  $E_F(T)$  weit<sup>2</sup> von den Bandkanten entfernt ist. Dies ist die *Näherung der Nichtentartung* und gilt bei intrinsischen oder nur schwach dotierten Halbleitern. Sie gilt bei stark dotierten (entarteten) Halbleitern nicht. Dazu mehr unten. Wenn diese Näherung also gemacht werden kann, also  $|E - E_F| \gg k_b T$  für die relevanten Werte von  $E$  ist, dann können wir die Fermi-Dirac-Verteilungen als Boltzmann-Verteilungen nähern:

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/k_B T} \quad \text{für } E > E_F \quad (5.14)$$

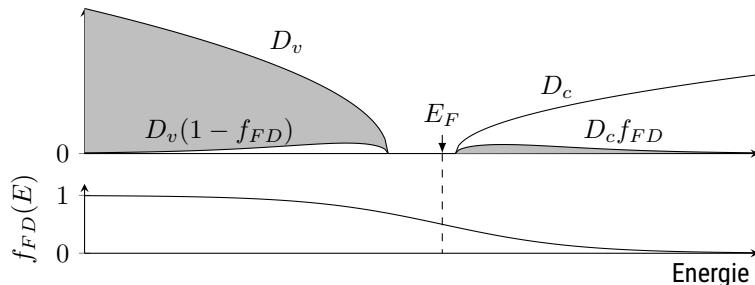
$$1 - f_{FD} = \frac{1}{e^{(E_F-E)/k_B T} + 1} \approx e^{-(E_F-E)/k_B T} \quad \text{für } E < E_F \quad (5.15)$$

Damit können wir nun alles einsetzen und die Integrale berechnen:<sup>3</sup>

$$n = 2 \left( \frac{k_b T m_n^*}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} \quad (5.16)$$

$$p = 2 \left( \frac{k_b T m_p^*}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{+(E_v - E_F)/k_b T} = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F)/k_b T} \quad (5.17)$$

Wir haben die effektiven ('zugänglichen') Zustandsdichten  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{P}$  eingeführt, die nur schwach von der Temperatur abhängen. Wenn wir sie als konstant annehmen, haben wir die beiden Bänder zu zwei diskreten Zuständen vereinfacht, die bei den Energien  $E_c$  bzw.  $E_v$  liegen. Dies wird im Folgenden vieles vereinfachen.



<sup>2</sup> auf einer  $k_b T$ -Skala

<sup>3</sup> Man integriert über  $x = (E - E_F)/k_b T$  und benutzt  $\int \sqrt{y} e^{-y} = \sqrt{\pi}/2$ .

Abbildung 5.4: Thermische Besetzung der Zustände eines intrinsischen Halbleiters mit  $m_p^* = 1.5 m_n^*$  und  $E_g = k_b T$ . Die besetzten Zustände sind grau unterlegt. Man erkennt  $n = p$ .

### Zur Selbstkontrolle

- Wie beeinflusst das Verhältnis der effektiven Massen  $m_p^*/m_n^*$  die Lage des Fermi-Niveaus  $E_F(T)$  im undotierten Halbleiter?

## Massenwirkungsgesetz

Interessant ist, dass sowohl  $n$  als auch  $p$  von der Lage des Fermi-Niveaus  $E_F$  abhängt, deren Produkt aber nicht

$$np = \mathcal{N} \mathcal{P} e^{-E_g/k_b T} = \mathcal{W} T^3 e^{-E_g/k_b T} \quad (5.18)$$

Das Produkt  $np$  hängt nur von Materialparametern und der Temperatur ab. Die Beziehung  $np = \text{const.}$  wird in Analogie zu einer chemischen Reaktion

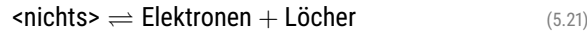
Massenwirkungsgesetz genannt. Bei einer Reaktion der Form



ergibt sich in stark verdünnter Lösung eine Gleichgewichtskonstante  $K$  mit

$$K = \frac{[C][D]}{[A][B]}, \quad (5.20)$$

wobei eckige Klammern hier die Konzentration der jeweiligen Stoffe bezeichnen. Man kann die Existenz von Elektronen im Leitungsband und Löchern im Valenzband als chemische Reaktion der Art



sehen. Durch thermische Anregung entstehen Elektronen (im Leitungsband) und Löcher (im Valenzband) aus dem Nichts. Die rechte Seite von Gl. 5.18 entspricht also der Gleichgewichtskonstante  $K$ .

Man beachte, dass zwar  $np = \text{const.}$ , aber bislang noch nicht  $n = p$  gefordert wurde. Das Massenwirkungsgesetz  $np = \text{const}$  gilt also auch für dotierte Halbleiter.

Zur Selbstkontrolle

4. Warum ist die Beziehung  $np = \text{const.}$  unabhängig von der Lage des Fermi-Niveaus  $E_F$ ?

## Intrinsische Ladungsträgerdichte

Bei dotierten Halbleitern (s.u.) kann ein Elektron nicht nur aus dem Valenzband, sondern auch von einem Fremdatom stammen. Für intrinsische, d.h. undotierte Halbleiter gilt jedoch, dass für jedes Elektron im Leitungsband ein Loch im Valenzband entstehen muss, d.h.  $n = p$ . Die Dichte der so paarweise erzeugten Ladungsträger wird als intrinsische Ladungsträgerdichte  $n_i = p_i$  bezeichnet. Sie ergibt sich aus dem Massenwirkungsgesetz

$$n_i = p_i = \sqrt{np} = \sqrt{\mathcal{N}\mathcal{P}} e^{-E_g/2k_bT}. \quad (5.22)$$

Diese Gleichung hatten wir in der Einführung schon verwendet, um Ladungsträgerdichten abzuschätzen. Man beachte hier die Zwei im Exponenten. Die Bandlücke erscheint nur halb so groß, weil wir gleichzeitig ein Elektron und ein Loch aus dem Nichts erzeugen.

## Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus

Wir können uns einen Zusammenhang für die Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus undotierter Halbleiter beschaffen, in dem wir  $n_i = p_i$  umformen zu

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{N}} = \left( \frac{m_n^*}{m_p^*} \right)^{3/2} = e^{(2E_F - E_c - E_v)/(k_bT)} \quad (5.23)$$

und dann nach  $E_F$  auflösen

$$E_F(T) = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right). \quad (5.24)$$



Bei  $T = 0$  liegt das Fermi-Niveau also in der Mitte der Bandlücke. Falls Leitungs- und Valenzband gleich stark gekrümmt sind, also Elektronen- und Loch-Masse identisch, dann bleibt es dort auch bei steigender Temperatur. Unterscheiden sich die Massen, dann bewegt sich das Fermi-Niveau leicht in Richtung der leichteren Ladungsträger. Da  $k_B T \ll E_g$  ist dies aber ein kleiner Effekt.

### Zur Selbstkontrolle

5. Warum ist die Temperaturabhängigkeit des Fermi-Niveaus  $E_F(T)$  bei Halbleitern mit stark unterschiedlichen effektiven Massen  $m_n^*$  und  $m_p^*$  größer als bei Halbleitern mit ähnlichen Massen?

## Dotierung

Kein Halbleiterkristall ist wirklich rein, sondern enthält immer Fremdatome. Diese Fremdatome verursachen zusätzliche Ladungsträger, Elektronen oder Löcher und beeinflussen damit die Leitfähigkeit. In einem idealen GaAs beträgt die intrinsische Ladungsträgerdichte bei Raumtemperatur beispielsweise  $n_i \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}$ . Aber selbst in den besten GaAs-Kristallen findet man  $n \approx 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Daher kann man einen Kristall gezielt dotieren (eigentlich 'verunreinigen'), um die Ladungsträgerdichte einzustellen. Man unterscheidet zwischen n- und p-Dotierung, da man ein Atom der Valenz  $V$  im Ausgangsmaterial durch ein Fremdatom der Valenz  $V + 1$  oder  $V - 1$  ersetzen kann. Im Fall  $V + 1$  spricht man von Donatoren, also Atomen, die Elektronen abgeben, oder von n-Dotierung. Im Fall von  $V - 1$  spricht man von Akzeptoren (Atome, die Elektronen aufnehmen) oder p-Dotierung.

Ein Donator-Atom ist für 'sein' Elektron ähnlich einem Proton für das Elektron im Wasserstoff-Atom, und analog ein Akzeptor für das Loch. Wir können also die Beschreibung des Wasserstoff-Atoms benutzen und müssen nur die effektive Masse des Ladungsträgers und die relative Permittivität  $\epsilon_r$  des Materials anpassen. Für einen Donator sind die Energie-Eigenwerte also

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e^* e^4}{(4\pi\epsilon_r\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e^*}{m_{\text{frei}}} \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad (5.25)$$

mit  $n$  hier der Quantenzahl und nicht der Ladungsträgerdichte. Der Bohr-Radius ist

$$r_{\text{Bohr}} = \frac{\epsilon_r}{m_e^*/m_{\text{frei}}} 0.53 \text{ \AA} \quad (5.26)$$

Für Silizium findet man mit  $m_e^* = 0.1 m_{\text{frei}}$  und  $\epsilon_r = 11.7$  die Werte  $E_1 = -10 \text{ meV}$  und  $r_{\text{Bohr}} = 62 \text{ \AA}$ . Der Betrag der Bindungsenergie ist also viel kleiner als die Bandlücke (1.14 eV) und kleiner als  $k_B T$  (25 meV) bei Raumtemperatur. Der Bohr-Radius ist viel größer als die Gitterkonstante (5.4 \AA). Es liegen also sehr viele Silizium-Atome innerhalb der Bahn des Elektrons um das eine Donator-Fremdatom.

Welche Bedeutung hat die Bindungsenergie des Donator-Elektrons für die Bandstruktur? Die Ionisation des Wasserstoffatoms entspricht dem Übergang des gebundenen Donator-Elektrons in das Leitungsband. Dort kann es sich frei bewegen. Die Donatorzustände liegen daher im Abstand  $E_n$

unterhalb der Unterkante des Leitungsbandes. Analog dazu liegen die Akzeptorzustände etwas oberhalb der Oberkante des Valenzbandes. In unserem Wasserstoffmodell sind die Bindungsenergien (Abstände der Zustände von der Bandkante) unabhängig vom Fremdatom, es gehen nur die Eigenschaften des Ausgangsmaterials ein. Dies ist in der Realität auch fast so, da der Bohrradius so groß ist, dass Details der Elektronenkonfiguration des Fremdatoms nur sehr schwach eingehen.

Bei Raumtemperatur sind die Störstellen mit großer Wahrscheinlichkeit ionisiert. Bei tiefen Temperaturen kann man durch Infrarotabsorption die Lage der Donator- und Akzeptor-Niveaus bestimmen.

### Zur Selbstkontrolle

6. Warum ist die Bindungsenergie der Donatoren und Akzeptoren in Halbleitern so viel kleiner als die Bandlücke?
7. Warum ist sie unabhängig von der Art des Fremdatoms? Und warum ist sie unabhängig von der Temperatur?

## Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte

Durch die Dotierung lässt sich die Ladungsträgerdichte einstellen, die dann aber natürlich stark temperaturabhängig ist, weil die Bindungsenergie der Störstellen relativ klein ist. Dies werden wir nun etwas genauer betrachten. Wir machen weiterhin die Näherung der Nichtentartung, also dass das Fermi-Niveau<sup>4</sup> weit genug von der Bandkante entfernt ist, so dass wir die Fermi-Dirac-Verteilung mit einer Boltzmann-Verteilung nähern können. Die Ladungsträgerdichten im Leitungsband ( $n$ ) und Valenzband ( $p$ ) sind also wie oben

<sup>4</sup> =chemisches Potential  $\mu$

$$n = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F)/k_b T} \quad \text{und} \quad p = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F)/k_b T}, \quad (5.27)$$

unabhängig davon, ob die Ladungsträger aus dem gegenüberliegenden Band oder aus Störstellen stammen. Die intrinsischen Dichten hatten wir erst später eingeführt.

Jedes Donator- und Akzeptor-Niveau kann nur mit einem Ladungsträger besetzt werden. Ein unterschiedlicher Spin reicht nicht aus, weil die Coulomb-Abstoßung der Ladungsträger größer ist als die Bindungsenergie.<sup>5</sup> Sei  $n_D$  also die Dichte der Donatoren, die entweder besetzt (neutral) sein können ( $n_D^0$ ) oder ionisiert ( $n_D^+$ ) und damit natürlich

<sup>5</sup> Man darf nicht die Lage der Zustände im H-Atom vergleichen, sondern die zwischen H und H<sup>-</sup> oder He und He<sup>+</sup>.

$$n_D = n_D^0 + n_D^+ \quad \text{und} \quad n_A = n_A^0 + n_A^- . \quad (5.28)$$

Für deren Temperaturabhängigkeit kann man die Fermi-Dirac-Verteilung nicht mehr durch eine Boltzmann-Verteilung nähern, sondern muss schreiben

$$\frac{n_D^0}{n_D} = \frac{1}{e^{(E_D - E_F)/k_b T} + 1} \quad \text{und} \quad \frac{n_A^0}{n_A} = \frac{1}{e^{(E_F - E_A)/k_b T} + 1} . \quad (5.29)$$

Alle Ladungen im Halbleiter müssen sich jederzeit neutralisieren, also

$$n + n_A^- = p + n_D^+ . \quad (5.30)$$

Diese vier Gleichungen beschreiben zusammen die Temperaturabhängigkeit. Wir nehmen nun einen n-Halbleiter an, also dass viel mehr Donatoren als Akzeptoren vorhanden sind, also  $n_D \gg n_A$ . In diesem Fall findet sich sicherlich für jeden Akzeptor ein Elektron aus einem Donator, so dass alle Akzeptoren negativ geladen sind ( $n_A \approx n_A^-$ ). Und wir nehmen an, dass die Dotierung so stark ist, dass sie die Leitfähigkeit dominiert (*Störstellenleitung*). Dies ist dann der Fall, wenn  $n_D^+ \gg p$ , also viel mehr Donatoren ionisiert sind als Löcher vorhanden, oder die Mehrzahl der Elektronen im Leitungsband von Donatoren stammt, also die intrinsische Dichte vernachlässigt werden kann ( $n_i \ll n_D^+$ ). Damit wird die Dichte  $n$  der Elektronen im Leitungsband

$$n = p + n_D^+ - n_A^- \approx n_D^+ - n_A = (n_D - n_D^0) - n_A \quad (5.31)$$

$$= n_D \left( 1 - \frac{1}{e^{(E_D - E_F)/k_b T} + 1} \right) - n_A \quad (5.32)$$

Das Fermi-Niveau  $E_F$  können wir durch Umformen mit Gl. 5.27 entfernen

$$\frac{n(n_A + n)}{n_D - n_A - n} = \mathcal{N} e^{-E_d/k_b T}, \quad (5.33)$$

wobei  $E_d = E_c - E_D$  der energetische Abstand der Donator-Niveaus von der Unterkante der Leitungsbandes ist. Aus dieser Gleichung kann man bei gegebener Fremdatom-Konzentrationen  $n_A$ ,  $n_D$  und Energien die Ladungsträgerdichte  $n$  berechnen. Zusammen mit Gl. 5.27 erhält man dann auch die Lage der Fermi-Niveaus  $E_F$ . Dies ist in Abb. 5.5 als Funktion der reziproken Temperatur  $T$  gezeigt und in der Abb. 5.1 am Anfang des Kapitels linear. Man findet vier Temperaturbereiche, die im Folgenden mit steigender Temperatur diskutiert werden.

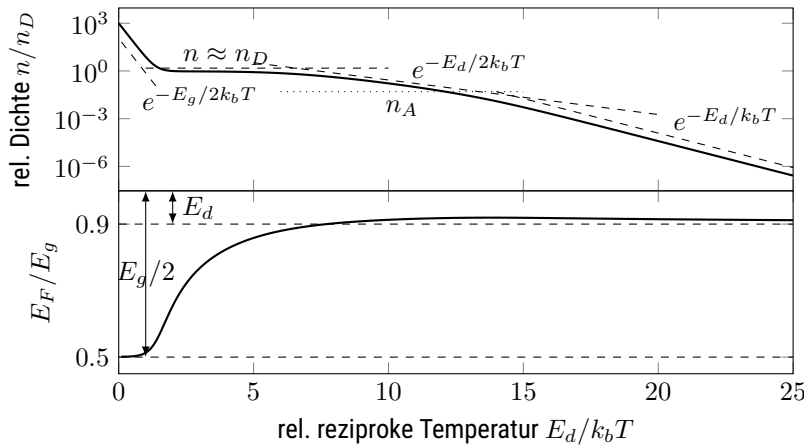


Abbildung 5.5: Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte  $n$ . In dieser Darstellung ist  $E_d = E_g/10$  gewählt.

**Kompensationsbereich** Bei sehr tiefen Temperaturen ist  $k_b T \ll E_d$  und nur sehr wenige Ladungsträger sind im Leitungsband, also  $n \ll n_A \ll n_D$  und Gl. 5.33 wird

$$n \approx \frac{n_D \mathcal{N}}{n_A} e^{-E_d/k_b T} \quad (5.34)$$

Das Fermi-Niveau wird mit Gl. 5.27

$$E_F \approx E_c - E_d + k_b T \ln \left( \frac{n_D}{n_A} \right) \quad (5.35)$$

Wenn es nur kalt genug ist, liegt das Fermi-Niveau auf den Donator-Zuständen. Die Donatoren sind teilweise geladen, aber nicht so sehr, weil deren Ladungsträger im Leitungsband sind, sondern weil sie die Akzeptoren besetzt haben und diese keine Löcher mehr liefern können. Die Akzeptoren werden also kompensiert. Wenn  $T$  größer wird, dann verschiebt sich  $E_F$  in Richtung Bandkante und mehr Ladungsträger gelangen ins Leitungsband.

**Störstellenreserve** Mit steigender Temperatur ist dann der Punkt erreicht, dass  $n_A \ll n \ll n_D$ . Damit wird Gl. 5.33

$$n \approx \sqrt{n_D \mathcal{N}} e^{-E_d/2k_bT} \quad (5.36)$$

(man beachte die 2 im Exponenten) und das Fermi-Niveau wird

$$E_F \approx E_c - \frac{E_d}{2} - \frac{k_bT}{2} \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) \quad (5.37)$$

Das Fermi-Niveau ist als in etwa in der Mitte zwischen Leitungsband-Unterkante und Donator-Niveau. Es sind noch nicht alle Donatoren ionisiert. Die Donatoren übernehmen die Rolle des Valenzbandes bei intrinsischen Halbleitern und  $E_d$  die Rolle der Bandlücke.

**Störstellenerschöpfung** Jetzt erreichen wir Raumtemperatur und  $k_bT \approx E_d$ . Damit wird Gl. 5.33

$$\frac{n^2}{n_D - n} \approx \mathcal{N} \quad \text{bzw.} \quad n \approx n_D = \text{const.} \quad (5.38)$$

weil  $n \ll \mathcal{N}$  und

$$E_F \approx E_c - k_bT \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) \quad (5.39)$$

Alle Störstellen sind ionisiert, aber die direkte Anregung von Elektronen aus dem Valenz- ins Leitungsband spielt noch keine Rolle.

**Eigenleitung** Die Temperatur ist schließlich so hoch, dass  $k_bT \gg E_d$ . Ladungsträger werden vom Valenz- ins Leitungsband angeregt und die Annahme  $p \ll n_D$  gilt nicht mehr. Die Dotierung spielt keine Rolle mehr und der Halbleiter verhält sich wie ein intrinsischer Halbleiter mit den Gleichungen 5.17 und 5.24 für  $n$  und  $E_F$ .

Zur Selbstkontrolle

8. Warum ist die Beziehung  $np = \text{const.}$  auch für dotierte Halbleiter gültig?

## p-n-Übergang

Die Dotierung eines Halbleiter-Kristalls kann räumlich variieren. Dazu kann man beispielsweise durch UV-Lithographie eine Maske erzeugen, die das Eindringen von Fremdatomen an manchen Stellen verhindert. Wir betrachten hier einen Kristall, bei dem sich auf einer Längenskala von wenigen Nanometern die Dotierung von p nach n ändert. Seien die Konzentration der Störstellen beispielsweise

$$n_A(x) = n_A \Theta(x) \quad \text{und} \quad n_D(x) = n_D \Theta(-x) \quad (5.40)$$

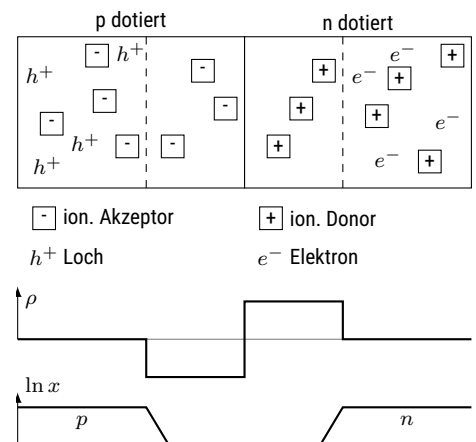


Abbildung 5.6: Räumliche Verteilung der festen und beweglichen Ladungen an einem p-n-Übergang und das sich daraus ergebende Potential.

mit der Stufenfunktion  $\Theta$ . Der dabei entstehende p-n-Übergang besitzt einen charakteristischen Verlauf der Bandkanten und dient technologisch beispielsweise als Diode.

Stellen wir uns zunächst vor, dass die beiden Bereiche nicht miteinander in Verbindung stünden. Im p-dotierten Bereich gibt es bei Raumtemperatur viel mehr Löcher im Valenzband als Elektronen im Leitungsband, im n-dotierten Bereich ist es gerade anders herum. Wenn man die beiden Bereiche miteinander verbindet, dann diffundieren die Ladungsträger jeweils in den anderen Bereich, um die Konzentration auszugleichen. Dort rekombinieren aber Elektronen und Löcher und vernichten sich so gegenseitig. In den Ausgangsbereichen bleiben die gegenteilig geladenen immobilisierten Störstellen zurück. Dadurch bildet sich im p-dotierten Bereich eine negative Raumladung, im n-dotierten eine positive. Diese wirkt der Diffusion entgegen und ein Gleichgewicht stellt sich ein. Die dabei entstehende Potentialdifferenz nennt man *Diffusionsspannung*  $V_D$ . Diese verschiebt die Gesamtenergie der Elektronen um den Beitrag  $-eV_D$  und verbiegt so die Bänder, im n-dotierten Bereich hin zu niedrigeren Energien. Die Raumladungszone nennt man auch Verarmungszone, weil dort fast keine mobilen Ladungsträger mehr vorhanden sind.<sup>6</sup>

Man kommt zum gleichen Ergebnis auch mit einer anderen Argumentation. Vor dem Zusammenführen hat man im p-dotierten Bereich bei Raumtemperatur ein Fermi-Niveau etwas oberhalb des Akzeptor-Niveaus, weil wir im Bereich der Störstellenerschöpfung sind. Im n-dotierten Teil ist die Bandlücke identisch, weil es dasselbe Halbleiter-Material ist. Nur liegt dort das Fermi-Niveau etwas unterhalb der Donator-Niveaus. Im thermischen Gleichgewicht kann es aber nur ein Fermi-Niveau (= chemisches Potential) geben.<sup>7</sup> Es bildet sich also ein Makropotential  $\phi(x)$ , das zur potentiellen Energie  $q\phi(x)$  der Ladungsträger ( $q = \pm e$ ) beiträgt, so dass das Fermi-Niveau wieder räumlich konstant ist.<sup>8</sup>

Die Diffusionsspannung  $V_D$  ergibt sich also aus der Differenz der Fermi-Niveaus im unverbundenen Zustand. In erster Näherung ist also  $eV_D \approx E_g$ . Im Bereich der Störstellenerschöpfung ist sie durch Gl. 5.39 gegeben

$$eV_D = E_F^n - E_F^p \quad (5.41)$$

$$= E_c - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{N}}{n_D} \right) - E_v - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{P}}{n_A} \right) \quad (5.42)$$

$$= E_g - k_b T \ln \left( \frac{\mathcal{N} \mathcal{P}}{n_D n_A} \right) \quad (5.43)$$

$$= k_b T \ln \left( \frac{n_D n_A}{n_i^2} \right) \quad (5.44)$$

Die Ladungsträgerdichten sind weiterhin durch die Lage des Fermi-Niveaus (Gl. 5.17) gegeben, nur dass sich dieses nun aus einem konstanten Anteil  $E_F$  und einem räumlich variablen Anteil  $e\phi(x)$  zusammensetzt. Wir erhalten also

$$n(x) = \mathcal{N} e^{-(E_c - E_F - e\phi(x))/k_b T} \quad \text{und} \quad p(x) = \mathcal{P} e^{+(E_v - E_F - e\phi(x))/k_b T} \quad (5.45)$$

Die Raumladungsdichte  $\rho(x)$  ist damit

$$\rho(x) = e (n_D(x) - n_A(x) - n(x) + p(x)) \quad (5.46)$$

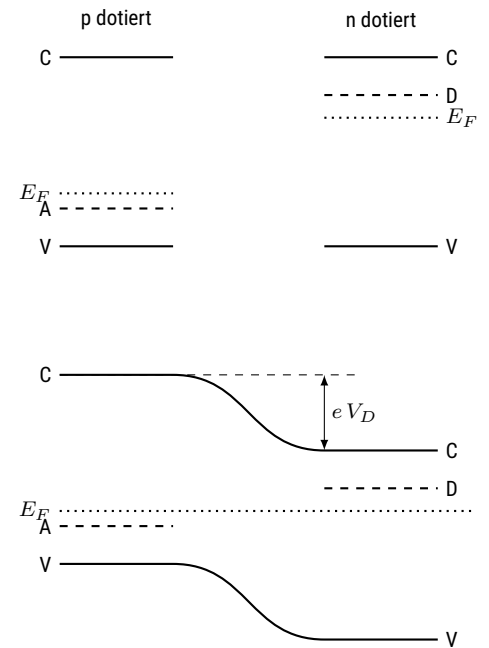


Abbildung 5.7: Bandstruktur und Lage des Fermi-Niveaus vor und nach dem Verbinden von zwei unterschiedlich dotierten Halbleitern.

<sup>6</sup> Das Massenwirkungsgesetz fordert  $n \cdot p = \text{const}$ , aber  $n + p$  kann stark variieren.

<sup>7</sup> In der Chemie pro Stoff, hier aber alles Elektronen.

<sup>8</sup> Wenn man eine externe Spannung anlegt, so wird dieses externe Potential typischerweise als separat vom Fermi-Niveau angesehen. Dann ist das Fermi-Niveau nicht mehr räumlich konstant. Die Trennung zwischen Makropotential und externem Potential ist aber nur Konvention.

wenn man annimmt, dass alle Störstellen ionisiert sind. Zusammen mit der Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2 \phi(x) = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho(x) \quad (5.47)$$

haben wir ein nichtlineares gekoppeltes System von Differentialgleichungen für  $\rho(x)$  und  $\phi(x)$ , das sich nur numerisch lösen lässt.

## Schottky-Modell der Raumladungszone

Im Schottky-Modell nähert man den graduellen Verlauf der Ladungsträgerdichten durch Rechteck-Funktionen.<sup>9</sup> In einem Intervall der Breite  $d_p$  befinden sich nicht durch freie Ladungsträger kompensierte Akzeptoren der Konzentration  $n_A$  und andersherum für den n-dotierten Bereich. Wenn das Koordinatensystem so ist, dass  $x = 0$  an der p-n-Grenzfläche, dann ist beispielsweise  $\rho(x) = -en_A$  im Bereich  $-d_p < x < 0$  und  $\rho(x) = 0$  für  $x < -d_p$ . Durch Integration der Poisson-Gleichung bekommt man dann einen parabelförmigen Verlauf

$$\phi(x) = \phi_{-\infty} + \frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (d_p + x)^2 \quad \text{für} \quad -d_p < x < 0, \quad (5.48)$$

wobei  $\phi_{-\infty}$  das konstante Makropotential tief im p-dotierten Bereich ist und  $V_D = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty}$ . Das Potential erfüllt so schon die Stetigkeitsbedingungen im Übergang zu  $\phi_{\pm\infty}$ . Bei  $x = 0$  muss ebenfalls die erste Ableitung stetig sein, also

$$n_D d_n = n_A d_p \quad (5.49)$$

was der Forderung nach Gesamt-Neutralität entspricht. Aus der Stetigkeit von  $\phi$  selbst ergibt sich eine weitere Bedingung

$$\frac{e}{2\epsilon_r \epsilon_0} (n_D d_n^2 + n_A d_p^2) = \phi_{+\infty} - \phi_{-\infty} = V_D. \quad (5.50)$$

Damit erhalten wir

$$d_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0 V_D}{e} \frac{n_A/n_D}{n_A + n_D}} \quad (5.51)$$

und  $d_p$  analog. typischerweise ist  $eV_D \approx E_g \approx 1 \text{ eV}$ , und  $n_{A,D} \approx 10^{14} \dots 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Also liegen  $d_{p,n}$  bei 10 bis 1000 nm.

Zur Selbstkontrolle

9. Warum ist die Breite der Raumladungszone  $d$  unabhängig von der Temperatur?

## Externe Spannung und Strom-Spannungs-Kennlinie

Nun legen wir eine externe Spannung an den p-n-Übergang an. Wir nennen die Spannung  $U$  positiv, wenn sie das Potential der p-dotierten Seite anhebt. Nur innerhalb der Verarmungszone ist die Leitfähigkeit relativ niedrig, so dass die Spannung im Wesentlichen hier abfällt. Die Bänder ändern sich also nur im Bereich der Verarmungszone, außerhalb bleibt alles unverändert. Damit bleiben auch die Gleichungen aus dem letzten Abschnitt gültig, wenn wir jeweils  $V_D$  durch  $V_D - U$  ersetzen.

<sup>9</sup> Das geht, weil die beweglichen Ladungsträger in ihrer Dichte exponentiell variieren, also sehr schnell irrelevant werden, siehe z.B. Ashcroft und Mermin, 2013.

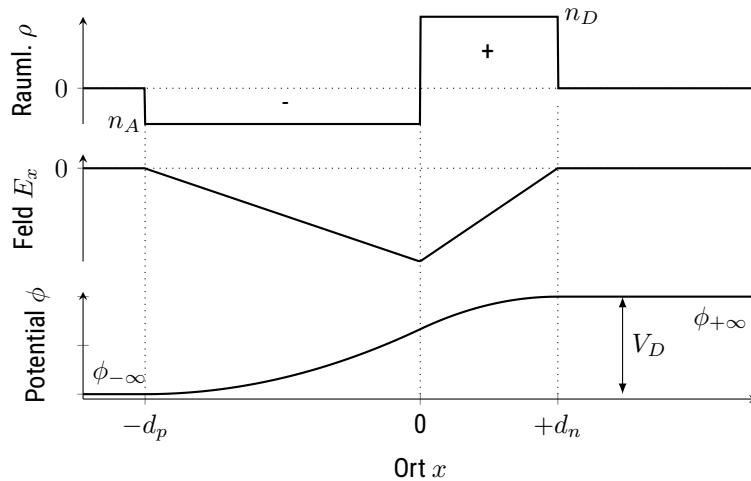


Abbildung 5.8: Schottky-Modell der Raumladungszone

Durch Anlegen der externen Spannung ändert sich die Breite der Raumladungszone

$$d = d_p + d_n = d(U=0) \sqrt{1 - \frac{U}{V_D}} \quad (5.52)$$

Positive Spannungen (in Durchlassrichtung) reduzieren die Breite der Raumladungszone (=Verarmungszone), negative Spannung (Sperrrichtung) vergrößern sie.

Um die Wirkungsweise eines p-n-Übergangs als Diode zu verstehen sind die beteiligten Ströme<sup>10</sup> relevant.

**Rekombinationsstrom  $j^{\text{rec}}$**  Aufgrund des Konzentrationsunterschieds links und rechts der Grenzfläche diffundieren beispielsweise Elektronen aus dem n-dotierten Bereich in den p-dotierten und rekombinieren mit den dort in großer Zahl vorhandenen Löchern. Dieser Strom wird auch *Diffusionsstrom* genannt.

**Generationsstrom  $j^{\text{gen}}$**  Die Raumladungszone bildet einen Kondensator, in dem Ladungsträger beschleunigt werden. Thermisch erzeugte Elektronen im p-dotierten Bereich driften durch das Raumladungsfeld in Richtung n-dotierten Bereich. Dieser Strom wird auch *Driftstrom* oder *Feldstrom* genannt.

Im thermischen Gleichgewicht sind beide Ströme gleich groß und kompensieren sich gerade  $j_n^{\text{rec}} = j_n^{\text{gen}}$ . Und natürlich kann man genau so mit Löchern argumentieren, so dass es beide Ströme auch mit dem Index  $p$  gibt. Die Gesamtströme sind die Summe der beiden Ladungsträger.

Der Diffusionsstrom fließt entgegen der Raumladungs-Potentialschwelle. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies gelingt, enthält einen Boltzmann-Faktor

$$j_n^{\text{rec}}(U) = a(T) e^{-e(V_D - U)/k_b T} = j_n^{\text{rec}}(0) e^{eU/k_b T} = j_n^{\text{gen}} e^{eU/k_b T} \quad (5.53)$$

Bei angelegter Spannung besteht kein thermisches Gleichgewicht mehr, so dass  $j_n^{\text{rec}} = j_n^{\text{gen}}$  nicht mehr gilt, sondern

$$j_n(U) = j_n^{\text{rec}}(U) - j_n^{\text{gen}} = j_n^{\text{gen}} (e^{eU/k_b T} - 1) \quad (5.54)$$

beziehungsweise für beide Ladungsträger zusammen

$$j(U) = j_s (e^{eU/k_b T} - 1) \quad (5.55)$$

<sup>10</sup> Gross und Marx, 2023 unterscheidet zwei Paare von Strömen: diff & drift sowie gen & rec. Die Vorzeichen sind aber anders definiert: diff + drift = 0 aber gen = rec !

mit dem Sättigungsstrom  $j_s = j_n^{\text{gen}} + j_p^{\text{gen}}$ .

Zur Selbstkontrolle

10. Warum ist der Diffusionsstrom exponentiell von der Spannung  $U$  abhängig?

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

Ashcroft, Neil W. und N. David Mermin (2013). *Festkörperphysik*. München: Oldenbourg.

Conwell, Esther M (1952). "Properties of silicon and germanium". In: *Proceedings of the IRE* 40.11, S. 1327–1337. [↗](#).

Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).

Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#).

Johnson, Earnest J. (1967). "Absorption near the Fundamental Edge". In: Hrsg. von R.K. Willardson und Albert C. Beer. Bd. 3. *Semiconductors and Semimetals*. Elsevier, S. 153–258. [↗](#).

Macfarlane, GG und V Roberts (1955). "Infrared absorption of silicon near the lattice edge". In: *Physical Review* 98.6, S. 1865. [↗](#).

Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [↗](#).



# Kapitel 6

## Supraleiter

Markus Lippitz  
11. Juni 2025

### Ziele

- Sie können das Konzept der Cooper-Paare im Rahmen der BCS-Theorie benutzen, um grundlegende Eigenschaften von Supraleitern zu erklären.
- Sie können das Konzept der makroskopischen Wellenfunktion benutzen, um die Flussquantisierung und die Quanteninterferenz in Josephson-Kontakten wie unten dargestellt zu beschreiben.



Abbildung 6.1: Quanteninterferenz des Stromes durch zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte ( $\text{Sn}/\text{SnO}_x/\text{Sn}$ ) als Funktion des Magnetfelds  $B$  im supraleitenden Zustand ( $T = 2\text{K}$ ). Daten aus Jaklevic u. a., 1965.

### Überblick

In diesem Kapitel gehen wir einen Schritt zurück in unserer Beschreibung der Festkörper und vernachlässigen Details der Bandstruktur, indem wir wieder von einem quasi-freien Elektronengas ausgehen. Dafür gehen wir dann aber auch einen Schritt weiter, indem wir nun erstmals Korrelationen zwischen Elektronen berücksichtigen. Es wird nicht mehr ausreichen, ein einziges Elektron zu betrachten, sondern 'synchronisierte' Paare von Elektronen werden wichtig werden.

Wir beginnen mit einem Überblick über experimentelle Beobachtungen an Supraleitern, um dann zunächst ein phänomenologisches Modell und schließlich ein mikroskopisches Modell zur Beschreibung einzuführen.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

## Idealer Leiter

Ein Supraleiter ist zunächst einmal ein idealer Leiter, in dem Strom widerstandsfrei fließt. Dies wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes entdeckt. Nachdem ihm 1908 die Verflüssigung von Helium gelungen war, wollte er eigentlich den Grenzwert der Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen untersuchen, analog zu unserem Kapitel 2. Er verwendete sehr reines Quecksilber (Hg) und fand bei 4.2 K einen sprunghaften Übergang zu einem dann von ihm supraleitend genannten Zustand.<sup>1</sup>

Im supraleitenden Zustand ist der Widerstand nicht nur sehr klein, sondern tatsächlich null. Man kann einen Ringstrom in einer geschlossenen Leiterschleife induzieren. Dieser würde mehr als 100 000 Jahre anhalten. Der Widerstand fällt um mehr als 14 Größenordnungen.

Sehr viele Materialien sind supraleitend. Reine Elemente zeigen eine Sprungtemperatur von unter 10 K, Legierungen liegen etwas höher. Oxyde mit vier oder fünf verschiedenen Elementen bilden sogenannte Hochtemperatur-Supraleiter mit einer Sprungtemperatur von bis zu 135 K. Bei sehr hohen Drücken werden noch höhere Werte erreicht.

Auffällig ist, dass gerade 'gute' Metalle keine hohe Sprungtemperatur besitzen. Eher ist die Tendenz so, das schlechte Leiter gute Supraleiter sind.

## Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Supraleiter sind perfekte Diamagnete. Ihr Inneres ist immer frei von einem magnetischen Feld. Dies wurde 1933 von Walter Meißner und Robert Ochsenfeld gefunden, als sie das magnetische Feld um einen supraleitenden Zylinder untersuchten<sup>2</sup>. Dies ist eine Eigenschaft, die über die eines idealen Leiters hinausgeht.

Wir betrachten den durch die Temperatur  $T$  und das Magnetfeld  $B$  aufgespannten Phasenraum. Oberhalb einer gewissen Temperatur  $T_c$  ist das Material normalleitend, darunter entweder supraleitend oder ideal leitend. Wir gehen von Zustand ( $T > T_c; B = 0$ ) zum Zustand ( $T < T_c; B > 0$ ). Dabei können wir aber die Reihenfolge von Temperatur- und Magnetfeld-Änderung vertauschen.

Beim idealen Leiter ist das Magnetfeld im inneren zeitlich konstant. Dies ergibt sich aus dem Induktionsgesetz

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (6.1)$$

weil  $\mathbf{E} = 0$  im Inneren eines idealen Leiter sein muss. Wenn man also zunächst das B-Feld einschaltet und dann die Temperatur reduziert, dann bleibt im Inneren ein Feld. Wenn man es andersherum macht, dann bleibt das Innere feldfrei. Beim Einschalten des B-Feldes wird ein Kreisstrom an der Oberfläche des idealen Leiters induziert, der gerade das B-Feld kompensiert.

Für Supraleiter haben nun Meißner und Ochsenfeld gemessen, dass das Innere immer feldfrei ist<sup>3</sup>, egal welchen der beiden Wege man geht. Für das Magnetfeld  $B_i$  im Inneren gilt also

$$B_i = B_{\text{ext}} + \mu_0 \mathbf{M} = B_{\text{ext}} (1 + \chi) = 0 \quad , \quad (6.2)$$

<sup>1</sup> Zur Geschichte der Helium-Verflüssigung und der Supraleitung siehe Van Delft, 2008 und Van Delft und Kes, 2010.

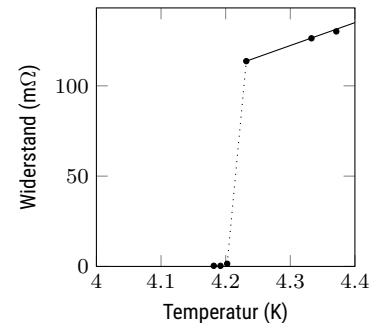


Abbildung 6.2: Sprung des Widerstands von Quecksilber (Hg) beim Übergang in den supraleitenden Zustand. Daten aus Kamerling Onnes, 1911.

<sup>2</sup> Meissner und Ochsenfeld, 1933.

<sup>3</sup> Eigentlich haben sie das Feld außerhalb des Zylinders gemessen und dann auf das innerhalb geschlossen.

also ist die magnetische Suszeptibilität  $\chi = -1$ , Supraleiter also perfekte Diamagnete.

Wir können aus dem Meißner-Ochsenfeld-Effekt weiterhin folgern, dass der supraleitende Zustand ein wirklicher thermodynamischer Zustand ist, also nur von den Zustandsgrößen abhängt und nicht vom Weg dahin.

### Zur Selbstkontrolle

1. Suchen Sie im Internet nach graphischen Darstellungen der Prozessführung im Meissner-Ochsenfeld-Effekt und vergewissern Sie sich, dass alle den gleichen Effekt zeigen, obwohl er manchmal etwas anders dargestellt ist.

## Kritisches Magnetfeld

Man beobachtet, dass die Abschirmung des externen Magnetfelds nur bis zu einer gewissen kritischen Feldstärke  $B_c$  gelingt und darüber der supraleitende Zustand zusammenbricht. Es gilt also

$$-\mu_0 \mathbf{M} = \begin{cases} B_{\text{ext}} & \text{falls } B_{\text{ext}} < B_c & \text{supraleitend} \\ 0 & \text{falls } B_{\text{ext}} \geq B_c & \text{normalleitend} \end{cases} \quad (6.3)$$

Für die kritische Feldstärke  $B_c$  findet man empirisch den Zusammenhang

$$B_c(T) = B_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

mit der Sprungtemperatur  $T_c$ .

Typische kritische Magnetfeldstärken reiner Metalle liegen im Bereich von 10 bis 100 mT. Das ist insbesondere für technische Anwendungen sehr wenig. Ein supraleitender Magnet wäre so nicht zu realisieren. Bei Übergangsmetallen und Legierungen findet man allerdings ein anderes Verhalten, das als *Typ-II-Supraleitung* bezeichnet wird. Dabei tritt eine sogenannte Shubnikov-Phase oder auch Vortex-Phase zwischen dem supraleitenden und normalleitenden Zustand auf. In dieser Phase bilden sich normalleitende Röhren innerhalb des Supraleiters, die das Magnetfeld hindurch leiten. Die eine kritische Feldstärke  $B_c$  wird also durch zwei Feldstärken  $B_{c1}$  und  $B_{c2}$  ersetzt, die die Grenze der Vortex-Phase beschreiben. Solche Typ-II-Supraleiter sind die, die heute technologisch verwendet werden. Zur Beschreibung benutzt man die Ginzburg-Landau-Theorie, auf die wir hier wie auf die Typ-II-Supraleitung insgesamt nicht näher eingehen können.



Abbildung 6.3: Kritisches Magnetfeld für verschiedene Supraleiter (Daten aus Hunklinger, 2014).

## Flussquantisierung

Der von einem supraleitenden Zylinder oder einer supraleitenden geschlossenen Leiterschleife umschlossene magnetische Fluss<sup>4</sup> ist quantisiert. Dies haben 1961 gleichzeitig R. Doll & M. Näbauer in München und B.S. Deaver & W.M. Fairbank in Stanford experimentell gefunden.

In den Experimenten bildete ein Bleifilm auf einem dünnen Quarz-Stäbchen einen supraleitenden Hohlzylinder. Ein axiales Magnetfeld war angelegt während der Zylinder unter die Sprungtemperatur abgekühlt wurde. Danach

<sup>4</sup> Feldstärke pro Fläche

wurde das externe Feld ausgeschaltet. Man beobachtet aber weiterhin ein magnetisches Moment in Zylinderichtung. Dessen Größe kann durch ein Testfeld bestimmt werden. Man findet die Quantisierung des Flusses mit dem Flussquant

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (6.5)$$

Wie wir unten sehen werden stammt die Zwei von den zwei Elektronen, die sich korreliert bewegen.

## Wärmekapazität und Entropie

Die spezifische Wärmekapazität eines Supraleiters weicht deutlich von der eines Normalleiters ab. Für ein gewöhnliches Metall hatten wir gefunden (Gl. 2.22), dass

$$c_V = \gamma T + AT^3 \quad (6.6)$$

mit dem Beitrag der Elektronen proportional zu  $T$  und dem der Phononen proportional zu  $T^3$ . Bei den hier betrachteten niedrigen Temperaturen spielt der Phononen-Beitrag keine Rolle. Aber auch der Elektronen-Beitrag ist anders. Man findet

$$c_V \propto \begin{cases} e^{-\Delta/k_b T} & \text{für } T < T_c \\ T & \text{für } T \geq T_c \end{cases} \quad (6.7)$$

mit einer charakteristischen Energie  $\Delta$ .

Durch Messung von  $dS/dT = c_p$  kann man die Entropie der supraleitenden Phase bestimmen. Man findet einen kleinen Unterschied im Vergleich zur normalleitenden Phase

$$\Delta S = S_{SC} - S_N < 0 \quad \text{und} \quad |\Delta S| \approx 10^{-4} k_b T / \text{Atom} \quad (6.8)$$

Die supraleitende Phase ist also geordneter als die normalleitende, aber diese Ordnung betrifft nur sehr wenige Elektronen.

## Isotopen-Effekt

Die Sprungtemperatur  $T_c$  hängt vom verwendeten Isotop ab. Solange das chemische Element (im Beispiel Zinn) das gleiche bleibt, ändert sich die elektronische Struktur nicht, sondern nur die Masse des Atomkerns und damit die Frequenz der Gitterschwingungen. Man findet

$$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \propto \omega_{\text{Debye}} \quad (6.9)$$

## London-Modell

Als erstes Modell zur Erklärung der Supraleitung besprechen wir hier das London-Modell, das 1935 von Fritz und Heinz London aufgestellt wurde<sup>5</sup>. Die Idee ist, die Maxwell-Gleichungen beizubehalten und nur die Materie-Gleichungen so zu modifizieren, dass sie den verschwindenden Widerstand und den perfekten Diamagnetismus erklären können.



Abbildung 6.4: Flussquantisierung in einem supraleitenden Blei-Zylinder (Doll und Näbauer, 1961).

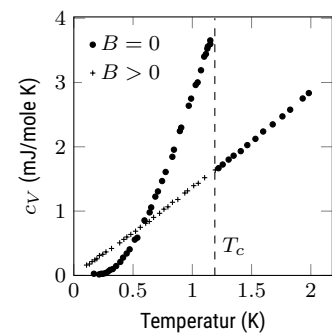


Abbildung 6.5: Wärmekapazität von Al. Durch das Magnetfeld kann der supraleitende Zustand unterdrückt werden, so dass das normalleitende Verhalten sichtbar wird (Phillips, 1959).

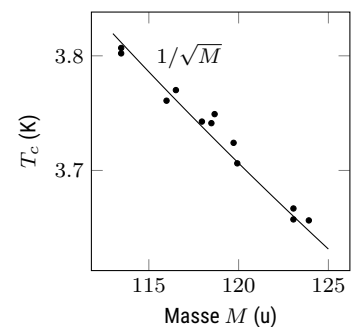


Abbildung 6.6: Isotopen-Effekt: Variation der kritischen Temperatur mit der Atommasse. Angegeben ist die mittlere Masse eines Isotopengemisches von Zinn (Sn). (Daten aus Hunklinger, 2014).

<sup>5</sup> F. London und H. London, 1935.

Für normalleitende Materie haben wir die Materie-Gleichungen

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad . \quad (6.10)$$

Das Postulat ist nun<sup>6</sup>, dass in Supraleitern gilt

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{A} \quad (6.11)$$

mit dem Vektorpotential<sup>7</sup>  $\mathbf{A}$  und der London-Länge

$$\lambda^2 = \frac{m_s}{n_s \mu_0 q_s^2} \quad . \quad (6.12)$$

Wie wir unten sehen werden sind es nicht direkt die Elektronen, die zur Supraleitung führen. Daher sind hier alle Größen mit dem Index 's' versehen, um die supraleitenden Teilchen zu kennzeichnen.

Die zeitliche Ableitung der Stromdichte ist dann<sup>8</sup>

$$\mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad . \quad (6.13)$$

Dies ist die 1. London-Gleichung. Nicht mehr die Stromdichte, sondern ihre zeitliche Ableitung ist proportional zum elektrischen Feld. Ohne Feld fließt also weiterhin Strom. Das ist Supraleitung.

Die Rotation der Stromdichte ist mit dem Magnetfeld verknüpft

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B} \quad . \quad (6.14)$$

Dies ist die 2. London-Gleichung.

Unter Zuhilfenahme der Maxwell-Gleichungen und ein paar weiteren Umformungen<sup>9</sup> findet man für das magnetische Feld

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad . \quad (6.15)$$

Betrachten wir dazu eine Grenzfläche zwischen Normalleiter ( $x < 0$ ) und Supraleiter ( $x > 0$ ) bei einem in z-Richtung orientierten Magnetfeld. Im Normalleiter sei das Feld homogen  $\mathbf{B}_0$ . Im Supraleiter ist die Lösung von Gl.6.15 dann

$$\mathbf{B}(x > 0) = \mathbf{B}_0 e^{-x/\lambda} \quad . \quad (6.16)$$

Das Magnetfeld fällt also im Supraleiter mit der London-Länge (auch London'sche Eindringtiefe) exponentiell ab. Das Innere eines Supraleiters ist feldfrei, wie es der Meissner-Ochsenfeld-Effekt zeigt. Typische Werte von  $\lambda$  liegen im Bereich von 10 bis einige 100 nm.

## Cooper-Paare

Die phänomenologische London-Theorie macht keine Aussage über die mikroskopische Begründung für die geänderte Materiegleichung. Dies kommt erst 1957 mit der BCS-Theorie, nach J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer. Ein zentraler Bestandteil der Theorie sind Cooper-Paare. Hier geben wir nun sowohl die Ein-Elektron-Näherung auf, weil wir zwei korrelierte Elektronen betrachten. Wir verlassen auch die Born-Oppenheimer-Näherung, weil Elektron-Phonon-Wechselwirkungen wichtig werden.

<sup>6</sup> siehe Anhang H.3 in Singleton, 2001

<sup>7</sup> mit  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

<sup>8</sup> siehe Gross und Marx, 2023 oder Czycholl, 2017

<sup>9</sup> siehe Singleton, 2001 Anhang H.3

In einem Gedankenexperiment starten wir von einem freien Elektronengas bei  $T = 0$ . Es sind also alle Zustände für Elektronen bei Energien unterhalb der Fermi-Energie  $E_F$  besetzt, bzw. alle Zustände im reziproken Raum innerhalb der Fermi-Kugel mit dem Radius  $k_F$ . Dann fügen wir zwei weitere, aber besondere Elektronen hinzu. Zwischen diesen beiden besonderen Elektronen soll eine schwach attraktive Wechselwirkung bestehen. Der Isotopen-Effekt (Abb. 6.6) liefert die Begründung dazu, dass diese Wechselwirkung über Phononen erfolgt.

Ein anschauliches Bild ist folgendes: ein Elektron bewegt sich durch den Kristall aus positiven Ionen. Diese werden leicht angezogen und im Kielwasser des Elektrons entsteht eine etwas erhöhte Dichte an Atom-Rümpfen. Diese etwas höhere Ladung wirkt dann anziehend auf das zweite Elektron. Der Abstand der beiden Elektronen ist durch die Zeit bestimmt, die die Atom-Rümpfe brauchen, um sich zu bewegen, also die Phonon-Frequenz. Typische Werte sind eben in der Größe von 100 nm, wie die London-Länge, und so groß, dass die Coulomb-Abstoßung der Elektronen nicht ins Gewicht fällt, auch weil alle anderen Elektronen das Coulomb-Potential abschirmen.

Jenseits des anschaulichen Bildes kann man die Wechselwirkung als Austausch<sup>10</sup> von virtuellen Phononen mit dem Wellenvektor  $q$  modellieren. Vor dem Austausch haben die beiden Elektronen die Wellenvektoren  $k_1$  und  $k_2$ , nach dem Austausch  $k_1 + q$  und  $k_2 - q$ . Der Gesamtimpuls bleibt also erhalten. Wir sind weiterhin am absoluten Temperatur-Nullpunkt und alle Zustände unterhalb  $E_F$  durch die 'anderen' Elektronen besetzt. Die beiden besonderen Elektronen können also nur Zustände im Bereich  $E_F$  und  $E_F + \hbar\omega_D$  annehmen. Im reziproken Raum entspricht das einer Kugelschale zwischen  $k_F$  und  $k_F + m\omega_D/(\hbar k_F)$ . Der Überlapp zwischen den Kugelschalen der beiden Elektronen bestimmt also die Stärke der Wechselwirkung und die Energieabsenkung. Maximale Absenkung erhalten wir, wenn die Mittelpunkte der Kugelschalen übereinstimmen, also

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \quad . \quad (6.17)$$

Dabei ist  $k_i$  der Wellenvektor der Wellenfunktion des  $i$ -ten Elektrons, nicht sein Impuls. Ein Cooper-Paar wird also aus zwei Elektronen gebildet, deren Wellenvektoren sich gerade gegenüberstehen.

Durch die attraktive Wechselwirkung wird die Energie des Paares um den Betrag  $\Delta$  gegenüber den Einzel-Energien abgesenkt. Die Energie eines Cooper-Paares ist also ungefähr

$$E \approx 2E_F - \Delta \quad . \quad (6.18)$$

Mit ein paar Annahmen über die Wechselwirkung kann man ausrechnen<sup>11</sup>, dass die Energie-Absenkung  $\Delta$

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-2/D(E_F)V_0} \quad (6.19)$$

beträgt.  $V_0$  beschreibt die Stärke der Elektron-Phonon-Wechselwirkung und  $D(E_F)$  die Zustandsdichte an der Fermi-Kante.

Ein Cooper-Paar besteht aus zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin, die zu einem Gesamtspin  $S = 0$  kombinieren. Von außen gesehen ist ein Cooper-Paar ein Boson, auch wenn es aus zwei Fermionen aufgebaut ist.

<sup>10</sup> siehe Austausch-Boson-Modell in der Kernphysik



Abbildung 6.7: Der Austausch eines Phonons ist möglich im Überlapp der Ringe. Dieser wird maximal, wenn  $\mathbf{K} = 0$ .

<sup>11</sup> siehe Hunklinger, 2014 oder Gross und Marx, 2023. Gross diskutiert auch den manchmal auftretenden Unterschied im Faktor 2 (oder 4) im Exponenten.

## Der BCS-Grundzustand

Die Unterscheidung zwischen „normalen“ und „wechselwirkenden“ Elektronen im letzten Abschnitt ist natürlich nur ein Gedankenexperiment. In Wirklichkeit wirkt die Elektron-Phonon-Wechselwirkung bei allen Elektronen. Der Abstand der beiden Elektronen in einem Cooper-Paar ist jedoch viel größer als der mittlere Abstand zwischen allen Elektronen. An dieser Stelle bricht das Bild der Cooper-Paare eigentlich zusammen. Man braucht Vielteilchen-Quantenmechanik.<sup>12</sup> Dabei stellt man fest, dass sehr viele Elektronen einen gemeinsamen Quantenzustand besetzen. Das ähnelt der Kondensation von Bosonen, beispielsweise bei der Bose-Einstein-Kondensation von kalten Atomen oder der stimulierten Emission von Photonen (ebenfalls Bosonen) im Laser. Es ist aber nicht völlig dasselbe, weil natürlich alle Elektronen mit allen wechselwirken und nicht nur paarweise.

<sup>12</sup> siehe z.B. Czycholl, 2016

Es sind also alle Elektronen an der Supraleitung beteiligt und die Temperatur ist am absoluten Nullpunkt. Das ist der BCS-Grundzustand. Ich will hier nicht auf die Konstruktion der Wellenfunktion eingehen<sup>13</sup>, sondern sie nur allgemein schreiben als

<sup>13</sup> Siehe dazu Gross und Marx, 2023

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n} e^{i\Theta(\mathbf{r})} \quad (6.20)$$

mit der überall konstanten Dichte  $n = \langle \psi | \psi \rangle$  an Cooper-Paaren und der Phase  $\Theta(\mathbf{r})$ . Die Gesamtenergie reduziert sich bei der Kondensation um

$$E_{\text{Kondensat}} = -\frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2 \quad (6.21)$$

## Fluss-Quantisierung

Die gemeinsame Wellenfunktion für alle Cooper-Paare kann die Quantisierung des magnetischen Flusses in einem supraleitenden Ring erklären. Dazu berechnen wir erst den elektrische Strom  $\mathbf{j}$  von Cooper-Paaren (=2 Elektronen) der Ladung  $q_s = -2e$  und Masse  $m_s = 2m_e$  als Erwartungswert des Geschwindigkeits-Operators

$$\mathbf{j} = \frac{q_s}{m_s} \langle \psi | \hat{\mathbf{v}} | \psi \rangle \quad (6.22)$$

mit

$$\hat{\mathbf{p}} = m_s \hat{\mathbf{v}} + q_s \mathbf{A} \quad \text{also} \quad m \hat{\mathbf{v}} = -i\hbar \nabla - q_s \mathbf{A} \quad (6.23)$$

Damit erhalten wir alles zusammen<sup>14</sup>

<sup>14</sup> Der Gradient liefert das  $i$ , das sich somit aufhebt.

$$\lambda^2 \mu_0 \mathbf{j} = \frac{\hbar}{q_s} \nabla \Theta(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \quad (6.24)$$

mit der London-Länge  $\lambda^2 = m/(n\mu_0 q)$  wie oben. Von hier kommt man also zur London-Theorie zurück. Eine makroskopische Wellenfunktion ist dazu ausreichend.

Nun betrachten wir einen supraleitenden Torus, der von einem Magnetfeld durchsetzt ist. Das Innere des Supraleiters ist frei von Feldern und Strömen,

also ist Gl. 6.24 Null und wir schreiben

$$\hbar \nabla \Theta(\mathbf{r}) = q_s \mathbf{A} \quad (6.25)$$

$$\hbar \oint \nabla \Theta(\mathbf{r}) = q_s \oint \mathbf{A} \quad (6.26)$$

$$\hbar(\Theta_2 - \Theta_1) = q_s \int \mathbf{B} \quad (6.27)$$

$$\hbar 2\pi s = q_s \Phi \quad s \in \mathbb{N} \quad , \quad (6.28)$$

wobei wir im zweiten Schritt den Satz von Stokes ausgenutzt haben und im dritten, dass  $|\Psi|$  nach einem Umlauf in Kreis eindeutig definiert sein muss, sich die Phase also nur um  $2\pi$  unterscheiden darf. Damit bekommen wir die Flussquantisierung ( $q_s = -2e$ )

$$\Phi = \frac{\hbar}{2e} s = s \Phi_0 \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{N} \quad . \quad (6.29)$$

## Zustandsdichte

Die Zustandsdichte freier Elektronen in einem Normal-Leiter ist  $D_{NL} \propto \sqrt{E}$ . Weil aber der hier interessierende Energiebereich nur wenige meV um die Fermi-Energie beträgt, können wir  $D_{NL}$  als konstant annehmen. Welche Form hat die Zustandsdichte in einem Supraleiter? Dabei müssen wir aufpassen, welche Teilchen wir betrachten. Cooper-Paare bestehen aus zwei korrelierten Elektronen. Diese können wir nicht direkt mit einzelnen Elektronen vergleichen.<sup>15</sup> Wir sprechen von Einteilchen- und Zweiteilchen-Zustandsdichten.

Die Zweiteilchen-Zustandsdichte hat zunächst einen deltaförmigen Zustand an der BCS-Grundzustandsenergie, in dem sich alle Cooper-Paare befinden. Wenn man ein Cooper-Paar anregt, dann wird es zerstört. Es bleibt ein Elektron des Cooper-Paars zurück, jetzt zusammen mit einem Loch. Dieses Elektron-Loch-Zweiteilchen ist ein Quasiteilchen, das man manchmal Bogolon nennt<sup>16</sup>. Ein weiteres Bogolon entsteht aus dem angeregten Elektron. Die Mindest-Energie zur Anregung eines Cooper-Paars, bzw. zur Erzeugung eines Bogolon aus einem Cooper-Paar, ist gerade die Bindungsenergie  $\Delta$ . Näher an der Fermi-Energie ist kein Zustand für das angeregte Elektron frei.

Durch die Supraleitung darf sich die Summe der Zustände nicht ändern. Damit ergibt sich für die Bogolonen

$$D_{SL}(E_k) = \begin{cases} D_{NL} \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta^2}} & \text{für } E_k > \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.30)$$

mit der Zweiteilchen-Energie  $E_k$ . Die Cooper-Paare sind in dieser Darstellung eine Delta-Funktion bei  $E_k = 0$  (rot in Abb. 6.30).

Wenn man darauf verzichtet, die Cooper-Paare einzuzichnen, dann kann man auch eine Einteilchen-Zustandsdichte zeichnen, die dann eine Lücke im Bereich  $E_F - \Delta$  bis  $E_F + \Delta$  besitzt und außerhalb analog zu Gl. 6.30 verläuft.

<sup>15</sup> Die Wellenfunktion ist entweder eine Funktion von einer oder von zwei Ortskoordinaten

<sup>16</sup> Kopitzki, 2017.

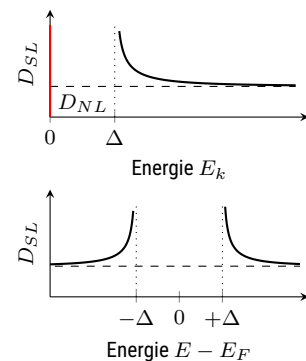


Abbildung 6.8: Zustandsdichten eines Supraleiters im Zweiteilchen-Modell (oben) und im Einteilchen-Modell (unten).



## Kritische Temperatur, Strom, Magnetfeld

Sobald wir nicht mehr am absoluten Nullpunkt der Temperatur sind, existieren Cooper-Paare und Bogolonen gleichzeitig. Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte der Cooper-Paare ab. Je weniger Cooper-Paare es aber gibt, desto schlechter ist die Kondensation, und die Energieabsenkung pro Paar wird geringer.  $\Delta$  wird temperaturabhängig. Man findet durch numerisches Lösen einer nichtlinearen Differentialgleichung<sup>17</sup> für  $T \approx T_c$

<sup>17</sup> Gross und Marx, 2023.

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(T=0)} \approx 1.74 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \quad (6.31)$$

und einen Zusammenhang zwischen kritischer Temperatur und Bandlücke bei  $T = 0$

$$2\Delta(0) = 3.52 k_b T_c \quad (6.32)$$

Ebenso bricht die Supraleitung zusammen, wenn der Strom im Supraleiter zu groß wird. Sobald die kinetische Energie der Cooper-Paare die durch die Kondensation gewonnene Energie (Gl. 6.21) übersteigt, lösen sich die Cooper-Paare selbst auf. Dann wird die kritische Geschwindigkeit  $v_c$  erreicht, bei der

$$E_{\text{kin}} = n_s \frac{m_s v_c^2}{2} = |E_{\text{Kondensat}}| = \frac{1}{4} D(E_F) \Delta^2 \quad (6.33)$$

Der zugehörige kritische Strom ist

$$j_c = -n_s q_s v_c = \frac{\sqrt{6} e n_s}{\hbar k_F} \Delta \quad (6.34)$$

wobei wir  $D(E_F)$  durch  $k_F$  ausgedrückt haben. Dieser kritische Strom produziert ein Magnetfeld an der Oberfläche des Drahtes ( $R \gg \lambda$ ), wodurch wir eine kritische Feldstärke erhalten von<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Hunklinger, 2014.

$$B_c = \mu_0 \lambda j_c \propto \Delta \quad (6.35)$$

Die Bandlücke  $\Delta$  des Supraleiters in der BCS-Theorie ist also ausreichend, um alle obengenannten kritischen Temperaturen, Ströme und Magnetfelder zu erklären.

## Tunneln von Elektronen

Die Zustandsdichte in der Nähe des Fermi-Niveaus und insbesondere die Lücke darin lässt sich sehr elegant durch die Tunnelspektroskopie untersuchen. Dazu benötigt man einen Tunnel-Kontakt zwischen zwei Leitern. Technisch einfach geht das, wenn man erst einen Streifen des ersten Materials aufdampft, dann einen dünnen (wenige Nanometer) Isolator, und dann quer dazu einen Streifen des anderen Materials. So kann man beide Streifen einzeln kontaktieren, eine Potentialdifferenz  $U$  über den Isolator anlegen und einen Tunnel-Strom  $I$  fließen lassen. Man misst dann den Strom als Funktion der angelegten Potentialdifferenz.

Mikroskopisch gesehen verschiebt die Spannung  $U$  die Fermi-Niveaus rechts und links der Tunnel-Barriere gegeneinander. Dadurch kommen besetzte Niveaus auf der einen Seite energetisch auf die gleiche Höhe wie

unbesetzte Niveaus auf der anderen Seite. In diesem Fall können die Elektronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere tunneln und ein Strom fließt. Der Strom ist also das Integral über die gegeneinander verschobenen Zustandsdichten multipliziert mit ihrer jeweiligen Besetzung

$$I_{L \rightarrow R} \propto \int D_L(E) f(E) D_R(E + eU) [1 - f(E + eU)] dE \quad (6.36)$$

Genauso kann auch ein Strom von rechts nach links fließen, so dass der Netto-Strom die Differenz der beiden ist:

$$I \propto \int D_L(E) D_R(E + eU) [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.37)$$

Üblicherweise ist  $eU \ll E_F$ , und bei Normalleitern kann die Zustandsdichte im relevanten Energiebereich als konstant angesehen werden, also  $D_n(E_F) \approx D_n(E_F + eU)$ . Damit erhalten wir

$$I_{nn} \propto D_n(E_F) D_n(E_F) eU = G_{nn} U \quad (6.38)$$

Das ist ein Ohm'scher Verlauf mit dem konstanten Leitwert  $G_{nn}$  zwischen zwei Normalleitern.

Nun ersetzen wir einen der beiden Normalleiter durch einen Supraleiter mit der Zustandsdichte nach Gl. 6.30. Der Strom ist dann

$$I_{ns} \propto D_n(E_F) D_s(E_F) \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.39)$$

$$= \frac{G_{nn}}{e} \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} [f(E) - f(E + eU)] dE \quad (6.40)$$

Wir betrachten wieder den Leitwert, hier  $G_{ns}$

$$G_{ns} = \frac{dI_{ns}}{dU} = G_{nn} \int \frac{D_s(E)}{D_n(E_F)} \left[ -\frac{\partial f(E + eU)}{\partial(eU)} \right] dE \quad (6.41)$$

$$\approx G_{nn} \frac{D_s(eU)}{D_n(E_F)} = G_{nn} \Re \left\{ \frac{eU}{\sqrt{(eU)^2 - \Delta^2(eU)}} \right\} \quad (6.42)$$

Der Term in eckigen Klammern ist ähnlich einer Delta-Funktion bei  $eU$  mit einer Breite  $4k_b T$  und Fläche Eins und löst so das Integral auf. Im zweiten Schritt haben wir  $T \rightarrow 0$  angenommen. Der Leitwert beim Tunnel, also  $dI/dU$ , liefert somit bei tiefen Temperaturen direkt die Zustandsdichte, ggf. ausgeschmied mit  $2k_b T$ .

## Josephson-Effekt

Nun liegt es nahe, auch zwei Supraleitern durch einen Tunnelkontakt zu verbinden und dann nicht Elektronen, sondern Cooper-Paare tunneln zu lassen, wenn die Barriere dünn genug ist<sup>19</sup>. Dabei müssen wir dann aber die makroskopische Wellenfunktion berücksichtigen. Wir nehmen an, dass beide Supraleiter identisch sind. Jede Seite ( $i = 1, 2$ ) wird beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\Psi_i = \sqrt{n_i} e^{i\Theta_i} \quad (6.43)$$

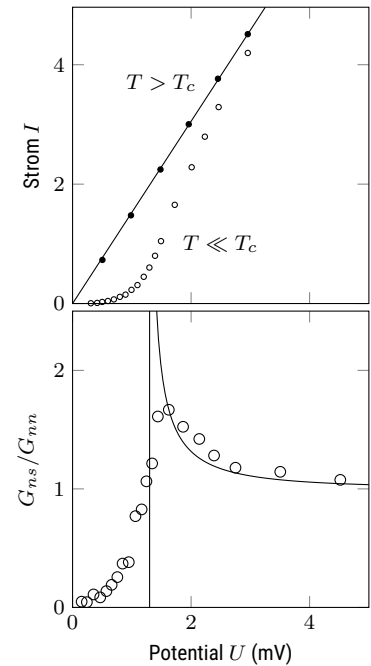


Abbildung 6.9: Tunnelstrom durch einen Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Pb - Tunnelkontakt bei 4.2 K bzw 1.6 K. Im zweiten Fall ist Pb supraleitend.  $dI/dV$  ist proportional zur Zustandsdichte, ausgeschmied mit  $k_b T$  (Giaever, 1960).

<sup>19</sup> Nobelpreis Brian David Josephson 1973

In der Schrödinger-Gleichung gibt es einen schwachen Kopplungsterm  $T$ , der die Wellenfunktionen nicht wesentlich ändern soll, so dass wir Störungstheorie betreiben können:

$$i\hbar\dot{\Psi}_1 = E_1\Psi_1 + T\Psi_2 \quad (6.44)$$

$$i\hbar\dot{\Psi}_2 = E_2\Psi_2 + T\Psi_1 \quad (6.45)$$

Die Potentialdifferenz über die Tunnelbarriere verschiebt die Energie-Eigenwerte, also  $E_2 - E_1 = eU$ . Das setzen wir alles ein und separieren nach Real- und Imaginärteil. Wir erhalten mit der Phasendifferenz  $\delta = \Theta_2 - \Theta_1$

$$\dot{n}_1 = \frac{2T}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\delta) \quad (6.46)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{2T}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\delta) \quad (6.47)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{T}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\delta) - \frac{E_1}{\hbar} \quad (6.48)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{T}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\delta) + \frac{E_2}{\hbar} \quad (6.49)$$

Die Differenz der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$\hbar\dot{\delta} = \hbar(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) = -(E_2 - E_1) = 2eU \quad (6.50)$$

Beim Experiment in Abbildung 6.10 wird die Spannung  $U_{ext}$  einer Stromquelle variiert und dabei der Strom  $I$  durch den Tunnelkontakt und die Potentialdifferenz  $U$  über den Kontakt gemessen. Der Stromkreis und die Spannungsquelle besitzen einen (Innen-) Widerstand, der den Strom limitiert.

Betrachten wir zunächst die Situation, dass keine Potentialdifferenz  $U$  über die Barriere gemessen wird. Damit ist die Phasendifferenz  $\delta$  zeitlich konstant und  $\dot{n}_1 = -\dot{n}_2$ . Es fließt ein Suprastrom (Strom von Cooper-Paaren), ohne dass ein Potential an der Barriere abfällt. Der Strom hängt periodisch von der Phasendifferenz der beiden makroskopischen Wellenfunktionen ab:

$$J_s(\delta) = J_c \sin \delta \quad (6.51)$$

Dies ist der Josephson-Gleichstrom-Effekt (Josephson-DC-Effekt). Die Maximalstromstärke  $J_c$  ist durch die Stärke  $T$  des Tunnelkontakts gegeben. Die beobachtete Stromstärke  $I$  wird von der Stromquelle bestimmt. Diese stellt die Phasendifferenz  $\delta$  ein. Gleichung 6.51 ist also kausal rückwärts zu verstehen.

Nun erhöhen wir die externe Spannung  $U_{ext}$ , der Strom steigt und übersteigt irgendwann  $J_c$ . Ab dann ist die gemessene Potentialdifferenz  $U$  nicht mehr Null, und die Phasendifferenz  $\delta$  wird zeitabhängig:

$$\delta(t) = \frac{2eU}{\hbar}t + \delta(0) = \omega_J t + \delta(0) \quad (6.52)$$

Es fließen nun zwei Ströme gleichzeitig durch den Tunnelkontakt: weiterhin ein Suprastrom aus Cooper-Paaren, der zeitlich oszilliert mit

$$J_s(t) = J_c \sin(\omega_J t + \delta(0)) \quad (6.53)$$

Hinzu kommt ein Strom aus Quasiteilchen (Bogolonen). Dieser berechnet sich analog zu Gleichung 6.40, wenn man für jeden Kontakt die Zustandsdichte des Supraleiters einsetzt. Die Kante in der Strom-Spannungs-Kennlinie

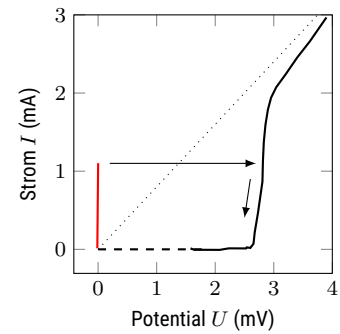


Abbildung 6.10: Strom durch einen Pb/PbO<sub>x</sub>/Pb Tunnelkontakt (Daten aus Langenberg, Scalapino und B. Taylor, 1966)

liegt daher bei  $eU = 2\Delta$ . In Abbildung 6.10 ist nur dieser zeitlich konstante Strom zu sehen, da die zeitliche Oszillation des Suprastroms viel zu schnell ist. Im Experiment muss berücksichtigt werden, dass der Tunnelkontakt zusätzlich eine Kapazität und einen ohmschen Widerstand aufweist. Dies führt zur Hysterese in der Kennlinie. Die schnelle zeitliche Oszillation des Suprastroms wird als Josephson-Wechselstrom-Effekt (Josephson-AC-Effekt) bezeichnet. Dabei treten sehr hohe Frequenzen auf. Bei 100  $\mu\text{V}$  werden beispielsweise Frequenzen von 50 GHz erreicht. Dadurch kann einerseits  $e/h$  bestimmt werden und andererseits kann die Spannung sehr genau über eine Frequenzmessung ermittelt werden.

Beschleunigte Ladungen emittieren Strahlung. Ein hochfrequenter Wechselstrom ist demnach ein Emitter. Die tunnelnden Cooper-Paare im Josephson-AC-Effekt werden in der Potentialdifferenz  $U$  über die Tunnelbarriere beschleunigt. Da die Zustandsdichte deltaförmig ist, können sie diese Energie jedoch nicht aufnehmen. Daher strahlen sie die Energiedifferenz als Radiofrequenz-Photon ab.

## Quanteninterferenz

Nun schalten wir zwei Josephson-Kontakte parallel: zwischen den Kontakten 1 und 2 gibt es zwei supraleitenden Pfade, je über die Tunnelkontakte A und B. Uns interessiert der (Tunnel-) Strom zwischen 1 und 2. Gleichzeitig durchsetzt ein Magnetfeld die so gebildete Leiterschleife.

Sei  $\delta_A$  der Phasenunterschied der makroskopischen Wellenfunktion der Cooper-Paare auf dem Pfad 1–A–2, und  $\delta_B$  analog über Tunnelkontakt B. Dann ist die Phasendifferenz entlang des geschlossenen Kreises 1–A–2–B–1  $\delta_A - \delta_B$  und die Flussquantisierung verlangt

$$\delta_A - \delta_B = \frac{2e}{\hbar} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (6.54)$$

mit dem magnetischen Fluss  $\Phi$  durch die Schleife. Damit können wir jede der beiden Phasen schreiben als

$$\delta_{A,B} = \delta_0 \pm \frac{e}{\hbar} \Phi = \delta_0 \pm \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (6.55)$$

mit einer mittleren Phase  $\delta_0$ . Der Gesamtstrom durch dieses Konstrukt ist nun die Summe der Ströme über die Tunnelkontakte A und B, wie im letzten Abschnitt, also

$$I = I_A + I_B = J_c (\sin \delta_A + \sin \delta_B) = 2J_c \sin \delta_0 \cos \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right) \quad (6.56)$$

Die Oszillationen im Strom zählen also die Flussquanten in der Schleife.

Abbildung 6.1 am Anfang des Kapitels zeigt ein Beispiel.

Diese Anordnung nennt man 'superconducting quantum interference device' (SQUID). Sie wird zur sehr empfindlichen Messung von Magnetfeldern benutzt, beispielsweise in der Medizin (Hirnströme!) oder der Archäologie.

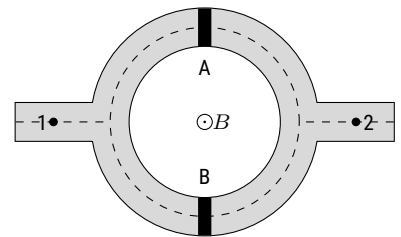


Abbildung 6.11: Zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#).
- (2017). *Theoretische Festkörperphysik, Band 2*. 4. Aufl. Springer. [↗](#).
- Doll, Robert und M Näbauer (1961). "Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring". In: *Phys. Rev. Lett.* 7.2, S. 51. [↗](#).
- Giaever, Ivar (1960). "Energy gap in superconductors measured by electron tunneling". In: *Phys. Rev. Lett.* 5.4, S. 147. [↗](#).
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#).
- Jaklevic, RC u. a. (1965). "Macroscopic quantum interference in superconductors". In: *Physical Review* 140.5A, A1628. [↗](#).
- Kamerling Onnes, Heike (1911). "Further experiments with Liquid Helium – VI. On the Sudden Change in the Rate at which the Resistance of Mercury Disappears." In: *Leiden Communications* 124c, S. 267–271.
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [↗](#).
- Langenberg, DN, DJ Scalapino und BN Taylor (1966). "Josephson-type superconducting tunnel junctions as generators of microwave and submil-

limeter wave radiation". In: *Proceedings of the IEEE* 54.4, S. 560–575.



London, Fritz und Heinz London (1935). "The electromagnetic equations of the supraconductor". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 149.866, S. 71–88.

Meissner, Walther und Robert Ochsenfeld (1933). "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit". In: *Naturwissenschaften* 21.44, S. 787–788.

Phillips, Norman E (1959). "Heat capacity of aluminum between 0.1 K and 4.0 K". In: *Physical Review* 114.3, S. 676.

Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.

Van Delft, Dirk (2008). "Little cup of helium, big science". In: *Physics Today* 61.3, S. 36–42.

Van Delft, Dirk und Peter Kes (2010). "The discovery of superconductivity". In: *Physics today* 63.9, S. 38–43.

# Kapitel 7

## Magnetismus

Markus Lippitz  
26. Juni 2023

### Ziele

- Sie können die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung und magnetische Ordnungsphänomene durch mikroskopische Modelle erklären.
- Sie können diese Modelle benutzen, um beispielsweise die unten gezeigten Beugungsmuster zu erklären.



Abbildung 7.1: Neutronenstreuung an MnO, das bei tiefen Temperaturen antiferromagnetisch ist, bei Raumtemperatur paramagnetisch. Die der kristallographischen Bezeichnung der Peaks zugrundeliegende Gitterkonstante ist  $a_0 = 8.85 \text{ \AA}$  bei 80 K, und  $4.43 \text{ \AA}$  bei Raumtemperatur. Daten aus Shull, Strauser und Wollan, 1951.

### Überblick

In diesem Kapitel soll Magnetismus mikroskopisch beschrieben werden, also unter Bezug auf die atomare Struktur der Materie. Die Maxwell-Gleichungen beschreiben auch Magnetismus, allerdings rein makroskopisch. Wie schafft es eine Ansammlung von Atomen, mal diamagnetisch, mal paramagnetisch, mal ferromagnetisch zu sein, je nach Element und Temperatur? Wir beginnen mit einem Rückblick auf die makroskopische Beschreibung und auf magnetische Momente in Atomen. Auf diese aufbauend werden wir zunächst Dia- und Paramagnetismus in Isolatoren und Metallen beschreiben. In diesen Fällen verhält sich ein Festkörper beinahe wie ein Ensemble von Atomen. Es gibt keine Wechselwirkung der magnetischen Momente untereinander, nur die Elektronen formen in Metallen Bänder. Im zweiten Teil erlauben wir



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](#) Lizenz.

dann Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten, was zu räumlicher Ordnung in der Orientierung der Momente führen wird. Dies ist Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus.

## Makroskopische Beschreibung

Makroskopisch, also ohne die atomare Struktur der Materie zu berücksichtigen, kann man Magnetismus über die Maxwell-Gleichungen beschreiben. Es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (7.1)$$

mit der magnetischen Flussdichte<sup>1</sup>  $\mathbf{B}$ . Das Integral ist ein Oberflächenintegral über eine geschlossene Oberfläche mit dem Flächenelement  $d\mathbf{S}$ . Es gibt also keine magnetischen Monopole. Magnetischer Fluss geht von Dipolen aus. Über die Materie-Gleichungen besteht ein Zusammenhang mit dem Magnetfeld  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.2)$$

im Vakuum, mit der magnetischen Permeabilität  $\mu_0$ . In Materie wird dies

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_0 (1 + \chi) \quad (7.3)$$

mit der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  und der (magnetischen) Suszeptibilität  $\chi$ . Das Ziel dieses Kapitels ist es, mikroskopische Modelle für den Verlauf von  $\chi(\mathbf{B})$  zu finden.

<sup>1</sup> Die Nomenklatur Flussdichte  $\mathbf{B}$  und Magnetfeld  $\mathbf{H}$  ist historisch bedingt. Ich habe die Tendenz, auch  $\mathbf{B}$  Magnetfeld zu nennen, oder gleich B-Feld.

## Magnetisches Dipol-Moment

Magnetische Dipole sind die Quelle von magnetischem Fluss. Makroskopisch entstehen magnetische Dipole beispielsweise durch Strom in einer Leiterschleife:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2} \int_{\text{Schleife}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = I\mathbf{S} \quad (7.4)$$

mit dem Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$ , dem Strom  $I$  und der Fläche<sup>2</sup>  $\mathbf{S}$  der Leiterschleife. Die Ladungsträger besitzen eine Masse. Daher ist der Stromfluss durch die Schleife mit einem Drehimpuls  $\mathbf{L}$  verknüpft und wir können das Dipolmoment schreiben als

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad (7.5)$$

mit dem gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$ , das für Elektronen natürlich negativ ist.

Wir können auch die Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom als Leiterschleife auffassen. Sei der Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  quantisiert und in einem p-Zustand

$$|\mathbf{L}| = m_e \omega r^2 = \hbar \quad (7.6)$$

mit der Umlauffrequenz  $\omega$  und dem Bahnradius  $r$ . Der Strom ist in diesem Bild

$$I = \frac{-e}{T} = -e \frac{\omega}{2\pi} \quad (7.7)$$

<sup>2</sup> inkl. Richtung der Flächen-Normalen



mit der Umlaufzeit  $T$ . Alles zusammen ergibt das ein magnetisches Dipolmoment

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{-e}{2m_e} |\mathbf{l}| = -\frac{e\hbar}{2m_e} = -\mu_B \quad (7.8)$$

mit dem *Bohrschen Magneton*  $\mu_B \approx 5.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$ .

Damit können wir das (makroskopische) gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$  verknüpfen mit den (mikroskopischen) Bohrschen Magneton

$$\gamma = g \frac{\mu_B}{\hbar} \quad (7.9)$$

mit dem einheitenfreien Landé-g-Faktor. Für den Bahndrehimpuls eines Elektrons ist  $g_l = 1$ , für den Elektronen-Spin  $g_s \approx 2$ .

Die Kombination von magnetischem Moment und Drehimpuls ist der Grund für die Präzession. Die Energie  $E$  eines magnetischen Dipols  $\boldsymbol{\mu}_m$  im Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ist analog zur Energie eines elektrischen Dipols  $\boldsymbol{\mu}_e$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$

$$E = -\boldsymbol{\mu}_m \cdot \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad E = -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{E} \quad (7.10)$$

Ebenso wirkt auf beide Dipole ein Drehmoment  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}_m \times \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}_e \times \mathbf{E} \quad (7.11)$$

Aber im elektrischen Fall dreht dieses Drehmoment den Dipol einfach in Richtung der Feldlinien, und minimiert so die Energie. Bei einem magnetischen Dipol wirkt aber der assoziierte Drehimpuls

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{G} \quad (7.12)$$

so dass

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_m}{dt} = \gamma \boldsymbol{\mu}_m \times \mathbf{B} \quad (7.13)$$

Die Richtung des magnetischen Dipolmoments ändert sich senkrecht zu  $\boldsymbol{\mu}_m$  und  $\mathbf{B}$ . Dies entspricht einer Kreisbewegung der Spitze von  $\boldsymbol{\mu}_m$  um die Richtung, die durch  $\mathbf{B}$  vorgegeben ist, eben der Präzession.

## Klassifizierung

Wir unterscheiden verschiedene mikroskopischen Ursachen für Magnetismus:

**Diamagnetismus** Ohne äußeres Magnetfeld zeigen diamagnetische Materialien kein magnetisches Moment. Wenn man dann ein Feld anlegt, dann wirkt die induzierte Magnetisierung dem externen Feld entgegen. Die induzierten Momente sind entgegen dem externen Feld ausgerichtet. Die magnetische Suszeptibilität ist negativ

$$\chi_{\text{dia}} < 0 \quad (7.14)$$

Diamagnetismus tritt in allen Materialien auf, weil er durch die gebundenen (Isolatoren) und freien (Metalle) Elektronen verursacht wird. Er ist allerdings ein schwacher Effekt, so dass die folgenden dominieren können.

**Paramagnetismus** In paramagnetischen Materialien gibt es permanent vorhandene magnetische Dipolmomente, ebenfalls wieder aufgrund der gebundenen oder freien Elektronen. Ein externes Magnetfeld richtet diese Dipolmomente in Richtung des Feldes aus, so dass die magnetische Suszeptibilität positiv ist

$$\chi_{\text{para}} > 0 \quad . \quad (7.15)$$

Die magnetischen Momente wechselwirken aber nicht miteinander. Nur das thermische Gleichgewicht bestimmt die Verteilung der Ausrichtung.

**Ferro-, Antiferro- und Ferri-Magnetismus** In diesen Materialien wirkt es eine quantenmechanische Austausch-Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten. Es stellt sich eine Ordnung in der Orientierung ein, wenn die Temperatur unterhalb eines kritischen Wertes liegt.

Wir betrachten zunächst Dia- und Paramagnetismus in Isolatoren und Metallen, der also auf die gebundenen oder freien Elektronen zurückgeht. Danach beschäftigen wir uns mit den Ordnungsphänomenen aufgrund der Austausch-Wechselwirkung.

	Isolator	Metall
Diamagnetismus	Joseph Larmor	Lev Landau
Paramagnetismus	Paul Langevin	Wolfgang Pauli

Tabelle 7.1: Die Modelle zum Dia- und Para-Magnetismus sind oft nach den Wissenschaftlern benannt.

## Atome im Magnetfeld

Uns interessiert die Energie eines Atoms mit  $Z$  Elektronen im Magnetfeld, verglichen mit demselben Atom ohne Feld. Das externe Magnetfeld  $\mathbf{B}$  gibt eine Richtung vor, die wie immer  $z$  ist.

Die Energie des Gesamt-Elektronen-Spins  $\mathbf{S}$  im Magnetfeld ist

$$\hat{H}_{\text{spin}} = g \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad . \quad (7.16)$$

Der Gesamt-Hamilton-Operator mit dem kanonischen Impuls und dem Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ist

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{spin}} + \sum_{i=1}^Z \frac{[\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2}{2m_e} + V_i \quad , \quad (7.17)$$

wobei  $V_i$  das für das  $i$ -te Elektron relevante Potential bezeichnet. Die Coulomb-Eichung des Vektorpotentials liefert

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} \quad . \quad (7.18)$$

Dies setzen wir ein und multiplizieren aus

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{spin}} + \sum_{i=1}^Z \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e} + V_i + \frac{e}{2m_e} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r}_i + \frac{e^2 [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2}{8m_e} \quad . \quad (7.19)$$

Den mittleren Term kann man durch den Gesamt-Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  als Summe der Einzel-Drehimpulse

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (7.20)$$

ersetzen, so dass wir erhalten

$$\hat{H} - \hat{H}_0 = \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m_e} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2 \quad (7.21)$$

Der erste Term der Abweichung von der feldfreien Energie  $\hat{H}_0$  hängt von den atomaren Spin- und Bahndrehimpulsen ab, bzw. von den damit verknüpften magnetischen Momenten. Er beschreibt also atomaren Paramagnetismus. Der zweite Term beschreibt atomaren Diamagnetismus, weil hier kein Dipolmoment eingeht.

Die Suszeptibilität  $\chi$  kann man über eine thermodynamische Betrachtung erhalten. Die freie Energie  $F$  ist

$$F = U - TS \quad (7.22)$$

Das Differential der inneren Energie ist, wenn man den magnetischen Beitrag hier berücksichtigt,

$$dU = TdS - pdV - V\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.23)$$

so dass

$$dF = dU - SdT - TdS = -SdT - pdV - V\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.24)$$

also

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{N}{V} \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_0)}{\partial \mathbf{B}} \quad (7.25)$$

und (falls  $\chi \ll 1$ )

$$\chi = \frac{M}{H} \approx \mu_0 \frac{M}{B} = -\frac{\mu_0 N}{BV} \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_0)}{\partial B} \quad (7.26)$$

Die magnetische Suszeptibilität ist also proportional zur Ableitung der Energie nach dem Magnetfeld.

## Larmor-Diamagnetismus

Wir betrachten zunächst einen rein atomaren Effekt. Es ist also egal, ob das Atom in der Gasphase oder in einem Kristall vorliegt. Wir verlangen nur vollständig gefüllte Schalen. Dann ist ein Festkörper ein Isolator. Für das Atom gilt  $\mathbf{S} = \mathbf{L} = 0$  und nur der diamagnetische Term in Gl. 7.21 trägt bei. Weil  $\mathbf{B}$  in z-Richtung orientiert ist, vereinfacht sich das zu

$$\hat{H}_{\text{dia}} = \frac{e^2}{8m_e} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{B} \times \mathbf{r}_i]^2 = \frac{e^2}{8m_e} B^2 \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2) \quad (7.27)$$

Die Wellenfunktion ist aufgrund der gefüllten Schalen kugelsymmetrisch, so dass

$$\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_i^2 \rangle \quad (7.28)$$

Alles zusammen also

$$\chi = -\frac{N}{V} \frac{e^2 \mu_0}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle \approx -\frac{N}{V} \frac{e^2 \mu_0}{6m_e} Z_a r_a^2 \quad (7.29)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass durch die  $r^2$ -Abhängigkeit die  $Z_a$  Elektronen in der äußeren Schale mit dem Radius  $r_a$  dominieren. Dies beschreibt die experimentell gefundenen Werte erstaunlich gut.

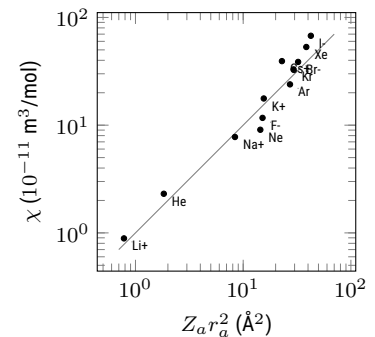


Abbildung 7.2: Atomare diamagnetische Suszeptibilität im Vergleich mit Gl. 7.29. Daten aus Gross und Marx, 2023 und Blundell, 2006.

## Langevin-Paramagnetismus

Wir bleiben bei der atomaren Betrachtung, erlauben aber teilweise gefüllte Schalen. Dann wird die Bestimmung von  $S$ ,  $L$  und  $J$  notwendig. Die Spin-Bahn-Kopplung muss berücksichtigt werden und die Hund'schen Regeln liefern den Zustand mit der niedrigsten Energie. Bei vielen Atomen ist die Spin-Bahn-Wechselwirkung schwach und die L-S-Kopplung (Russel-Saunders-Kopplung) ein passendes Modell. Dabei werden erst alle  $L_i$  und  $s_i$  zu einem  $L$  bzw.  $S$  addiert, bevor diese sich zu  $J$  addieren.

In der L-S-Kopplung berechnet sich der Landé-g-Faktor für den Gesamt-Drehimpuls  $J$  nach

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} . \quad (7.30)$$

Das magnetische Moment ist also

$$\boldsymbol{\mu}_J = -g_J \mu_B \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \quad (7.31)$$

bzw.

$$\mu_J = |\boldsymbol{\mu}_J| = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)} . \quad (7.32)$$

Hier ist nun also ein permanentes magnetisches Moment  $\mu_J \neq 0$  vorhanden. Die Ausrichtung von diesem Moment im externen Magnetfeld dominiert die Magnetisierung über den ebenfalls vorhandenen Diamagnetismus der tieferliegenden gefüllten Schalen. Das ist also der Term in Gl. 7.21, der linear in  $B$  ist.

## Semi-klassische Beschreibung

Wir ignorieren für einen Augenblick die Quantisierung von  $J_z$  und damit die von  $\mu_z$  und nehmen ein klassisches Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$  an. Dessen Energie im externen Feld ist

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta = E(\theta) . \quad (7.33)$$

Verschiedene Winkel  $\theta$  zwischen magnetischem Moment und Magnetfeldrichtung liefern also verschiedene Energien. Diese Zustände sind bei einer Temperatur  $T$  nach der Boltzmann-Statistik besetzt. Die Wahrscheinlichkeit  $p(\theta)$  ist

$$p(\theta) d\Omega = \frac{1}{Z} e^{-E(\theta)/k_B T} \quad (7.34)$$

mit dem Raumwinkelement  $d\Omega$  und der Zustandssumme  $Z$ , die dafür sorgt, dass  $p(\theta)$  normiert ist. Das mittlere magnetische Moment in z-Richtung  $\langle \mu_z \rangle$  ist also

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu}{4\pi} \int p(\theta) \cos \theta d\Omega . \quad (7.35)$$

Mit der Abkürzung

$$y = \frac{\mu B}{k_B T} \quad (7.36)$$

erhält man durch Integration<sup>3</sup> die *Langevin-Funktion*  $\mathcal{L}(y)$

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{\mu} = \coth y - \frac{1}{y} = \mathcal{L}(y) . \quad (7.37)$$

<sup>3</sup> siehe Gross und Marx, 2023 oder Blundell, 2006

Die Magnetisierung ist dann

$$M = \frac{N}{V} \langle \mu_z \rangle = n \langle \mu_z \rangle = n \mu \mathcal{L}(y) \quad (7.38)$$

Für kleine  $y$  kann man den  $\coth$  nähern und erhält die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_0 n \mu^2}{3 k_b T} \propto \frac{1}{T} \quad (7.39)$$

Wir haben damit das Curie-Gesetz<sup>4</sup> gefunden, nach dem die Suszeptibilität reziprok mit der Temperatur fällt. Wie wir unten sehen werden, gilt dies bei miteinander wechselwirkenden Dipolmomenten nicht mehr.

<sup>4</sup> Pierre Curie, 1859–1906, Nobelpreis 1903

## Quantenmechanische Behandlung

In der Quantenmechanik kann ein Drehimpuls nicht mehr jede beliebige Orientierung relativ zur Vorzugsachse einnehmen. Damit sind die Werte von  $\mu_z$  quantisiert und es gibt nur noch  $2J + 1$  verschiedene Möglichkeiten

$$m_J = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J \quad (7.40)$$

Die Rechnung ist analog zum klassischen Fall, nur dass Integrale über  $\theta$  durch Summen über  $m_J$  ersetzt werden. Mit den Abkürzungen<sup>5</sup>

$$y = \frac{g_J \mu_B B}{k_b T} J \quad \text{und} \quad M_{\text{sat}} = n g_J \mu_B J \quad (7.41)$$

<sup>5</sup>  $\mu_B / k_b \approx 2/3 \text{ K/T}$ .

erhält man für die Magnetisierung  $M$

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \mathcal{B}_J(y) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{J} y\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J} y\right) \quad (7.42)$$

mit der *Brillouin-Funktion*  $\mathcal{B}_J(y)$ . Für  $J \rightarrow \infty$  geht sie in die Langevin-Funktion über. Wir können wieder den  $\coth$  für  $y \ll 1$  nähern, um die Suszeptibilität zu erhalten

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_0 n J(J+1) g_J^2 \mu^2}{3 k_b T} = \frac{\mu_0 n p^2 \mu^2}{3 k_b T} \propto \frac{1}{T} \quad (7.43)$$

mit der effektiven Magnetonenzahl

$$p = g_J \sqrt{J(J+1)} \quad (7.44)$$

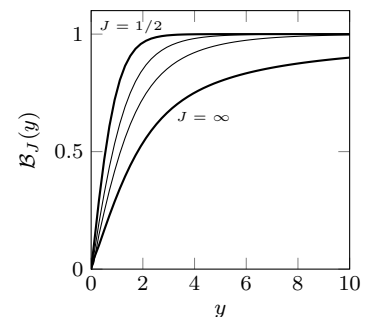


Abbildung 7.3: Brillouin-Funktion  $\mathcal{B}_J(y)$  für  $J = 1/2, 1, 2, \infty$ . Der letzte Fall entspricht der Langevin-Funktion  $\mathcal{L}(y)$ .

## Pauli-Paramagnetismus

Bislang haben wir nur Effekte der einzelnen Atome betrachtet und können damit nur Isolatoren beschreiben. Nun kommen freie Elektronen und damit Metalle hinzu. Wir hatten bereits in Kapitel 4 freie Elektronen im Magnetfeld behandelt und die Landau-Niveaus eingeführt. Die Energie der Elektronen-Zustände ist in diesem Formalismus

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 \pm \mu_B B \quad (7.45)$$

wobei wir  $g_s m_s \approx 1$  angenommen haben. Die Niveaus spalten also je nach Spin-Richtung der Elektronen noch einmal auf.

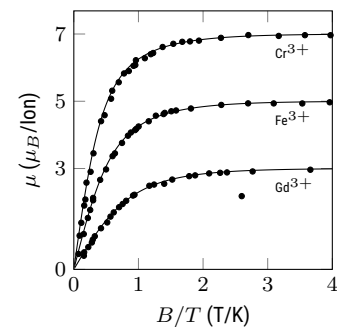


Abbildung 7.4: Paramagnetische Antwort einiger Ionen im Vergleich zur Brillouin-Funktion. Daten aus Henry, 1952.

Wir könnten jetzt argumentieren, dass Elektronen Spin-1/2-Systeme sind und darum Gl. 7.43 mit  $J = 1/2$  verwendet werden kann. Dies würde  $\chi \propto 1/T$  liefern, was aber experimentell nicht gefunden wird. Der Grund liegt in der Fermi-Statistik. Bei üblichen Magnetfeldern ist  $\mu_B B \ll k_b T \ll k_b T_F$ . Die Magnetisierung, also die Verteilung der Elektronen auf spin-up ( $n_+$ ) und spin-down ( $n_-$ ), bzw.

$$M = (n_+ - n_-)\mu_B \quad (7.46)$$

kann sich nur sehr wenig ändern, wenn sich das Magnetfeld ändert. Es sind schlicht alle Zustände besetzt, so dass die Elektronen ihren Spin nicht umdrehen können. Der Anteil der Elektronen in passender Entfernung zur Fermi-Energie ist in etwa  $T/T_F$ , so dass

$$\chi \propto \frac{1}{T} \frac{T}{T_F} = \frac{1}{T_F} = \text{const.} \quad (7.47)$$

Etwas genauer als diese Abschätzung ist es, wenn wir  $n_{\pm}$  ausrechnen

$$n_{\pm} = \frac{1}{2V} \int_0^{\infty} D(E \pm \mu_B B) f(E) dE \quad (7.48)$$

mit der Zustandsdichte  $D$ . Man bildet also für die Magnetisierung die Differenz der Zustandsdichte über ein kleines Energieintervall  $\pm \mu_B B \ll k_b T$ . Dort können wir die Zustandsdichte Taylor-entwickeln und schreiben

$$M = (n_+ - n_-)\mu_B = \frac{\mu_B^2 B}{V} \int_0^{\infty} \frac{\partial D}{\partial E} f(E) dE \quad (7.49)$$

$$= -\frac{\mu_B^2 B}{V} \int_0^{\infty} D(E) \frac{\partial f}{\partial E} dE \quad (7.50)$$

$$\approx \frac{\mu_B^2 B}{V} D(E_F) \quad (7.51)$$

wobei wir im zweiten Schritt partielle Integration verwendet haben. Im dritten haben wir angenommen, dass  $T \ll T_F$  und damit die Ableitung von  $f$  quasi eine Deltafunktion bei  $E_F$  ist. Zusammen mit der Zustandsdichte freier Elektronen erhalten wir

$$\chi_{\text{Pauli}} = \mu_0 \mu_B^2 \frac{D(E_F)}{V} = n \frac{3\mu_0 \mu_B^2}{2k_b T_F} = \text{const.} \quad (7.52)$$

Die überschlägige Abschätzung zuvor war also nicht so schlecht. Nur der Faktor  $T/T_F$  ist der Unterschied zu Gl. 7.43. Auch bei höheren Temperaturen, wenn die Näherung als Delta-Funktion nicht mehr ganz so gut ist, ändert sich wenig. Insbesondere bleibt die Suszeptibilität temperaturunabhängig.

## Landau-Diamagnetismus

Der Vollständigkeit halber soll nicht unerwähnt bleiben, dass auch freie Elektronen Diamagnetismus zeigen. In Kapitel 4 hatten wir bereits gesehen, dass die innere Energie eines freien Elektronengases periodisch mit dem Magnetfeld variiert und deswegen diverse von der inneren Energie abgeleitete Größen ebenfalls. Für die Magnetisierung ist dies der de Haas-van Alphen-Effekt. Die damit verbundene Suszeptibilität ist gerade  $-1/3$  des Pauli-Paramagnetismus. Weil beides ja immer zusammen auftritt, beobachtet man effektiv  $2/3 \chi_{\text{Pauli}}$ . Die effektive Masse der Elektronen  $m^*$  geht als zusätzlicher Faktor  $(m_e/m^*)^2$  ein.

## Magnetische Ordnung

Manche Materialien zeigen ohne anliegendes externes Magnetfeld unterhalb einer kritischen Temperatur eine Ordnung in der Orientierung der magnetischen Momente und damit fast immer auch eine Magnetisierung. Um dieses Phänomen zu erklären werden wir im nächsten Abschnitt eine Wechselwirkung zwischen den mikroskopischen magnetischen Momenten einführen. Wir unterscheiden verschiedene Muster in der Ordnung:

**Ferromagnetismus** Alle magnetischen Momente zeigen in dieselbe Richtung. Die Amplitude kann unterschiedlich sein, oder nur eine Vektor-Komponente ist identisch. In Summe ergibt das einen von Null verschiedenen Wert, also eine Magnetisierung.

**Antiferromagnetismus** Die Momente summieren sich zu Null, sind aber trotzdem geordnet. Nach außen hin erscheint das Material paramagnetisch.

**Ferrimagnetismus** Die magnetischen Momente sind ebenfalls antiparallel ausgerichtet, aber unterschiedlich groß, so dass die Summe nicht Null ergibt und Magnetisierung ohne externes Feld sichtbar ist.

**Helikale Ordnung** Magnetische Ordnungsphänomene sind sehr vielfältig. Die magnetischen Momente können beispielsweise auf einer Helix (Schraubenlinie) liegen.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> wie der Propeller eines fliegenden Flugzeugs mit einem Stroboskop fotografiert

### Zur Selbstkontrolle

1. Suchen Sie in Lehrbüchern oder im Internet nach grafischen Darstellungen magnetischer Ordnung und sortieren Sie diese in obigen Kategorien ein.

## Austauschwechselwirkung

Die für die Ordnung verantwortliche Wechselwirkung ist die Austauschwechselwirkung, die schon beim  $H_2^+$ -Molekül für die Bindung gesorgt hatte. Magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung wäre zwar auch denkbar, ist aber viel zu schwach. Typische Energien entsprechen einer Temperatur von 1 K, so dass so Ordnung bei Raumtemperatur nicht beobachtbar wäre.

Wir diskutieren ein einfaches Modell: Zwei Elektronen ( $i = 1, 2$ ) sind an den Orten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$ , und in den Zuständen  $\phi_A$  und  $\phi_B$ . Daraus können wir wie in der Molekülphysik einen symmetrischen (+) und antisymmetrischen (−) Orts-Anteil der Gesamt-Wellenfunktion herstellen.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> zusammen mit dem Spin-Teil dann immer anti-symmetrisch

$$\Psi_{\pm} \propto \phi_a(\mathbf{r}_1)\phi_b(\mathbf{r}_2) \pm \phi_a(\mathbf{r}_2)\phi_b(\mathbf{r}_1) \quad . \quad (7.53)$$

Die Eigen-Energien sind dann

$$E_{\pm} = \langle \Psi_{\pm} | \hat{H} | \Psi_{\pm} \rangle \quad (7.54)$$

und die Energie-Differenz ist die Austausch-Konstante  $J_A$

$$J_A = E_+ - E_- \propto \iint \phi_a^*(\mathbf{r}_1)\phi_b^*(\mathbf{r}_2) \hat{H} \phi_a(\mathbf{r}_2)\phi_b(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad . \quad (7.55)$$

Nun nehmen wir den Spin der Elektronen hinzu. Damit die Gesamt-Wellenfunktion antisymmetrisch ist, muss die symmetrische Wellenfunktion  $\Psi_+$  eine antisymmetrische (Singulett,  $S = 0$ ) Spin-Wellenfunktion besitzen. Ebenso muss  $\Psi_-$  ein Triplett-Zustand ( $S = 1$ ) sein. Die Unterscheidung kann man mit den Einzel-Spin-Operatoren  $s_i$  des  $i$ -ten Elektrons schreiben. Durch Ausmultiplizieren von  $S^2 = (s_1 + s_2)^2$  findet man, dass

$$\frac{s_1 \cdot s_2}{\hbar^2} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{für Singulett} \quad S = 0 \\ +\frac{1}{4} & \text{für Triplett} \quad S = 1 \end{cases} \quad (7.56)$$

Damit können wir die Gesamtenergie kompakt schreiben als

$$\hat{H} = \frac{1}{4}(E_+ + 3E_-) - J_A \frac{s_1 \cdot s_2}{\hbar^2} \quad (7.57)$$

Wenn  $J_A$  positiv ist, dann sind Triplett-Zustände energetisch bevorzugt, also eine parallele Anordnung der Spins wie im Ferromagnetismus. Bei negativen  $J_A$  spricht man von antiferromagnetischer Kopplung.

## Heisenberg- und Ising-Modell

Wir haben die Austausch-Wechselwirkung mit Elektronen-Spins eingeführt, aber man kann analog natürlich mit allen magnetischen Momenten bzw. Drehimpuls-Äquivalenten arbeiten, und auch auf mehr als zwei Spins erweitern. Der erste Summand in Gl. 7.57 liefert nur einen konstanten Energie-Offset, den wir nun weglassen. Für allgemeine Drehimpuls-artige Größen  $S_i$  ergibt der zweite Teil das *Heisenberg-Modell der magnetischen Ordnung* mit

$$\hat{H}_A = - \sum_{i>j} J_A^{ij} \frac{S_i \cdot S_j}{\hbar^2} \quad (7.58)$$

Die Summe läuft dabei so, dass alle Paare von Indizes  $i$  und  $j$  einmal genommen werden. Man nimmt an, dass die magnetischen Dipole auf einem Gitter angeordnet sind, und der Index den Gitterplatz bezeichnet. Die Austausch-Konstante  $J_A^{ij}$  hängt dann beispielsweise vom räumlichen Abstand der Gitterplätze  $i$  und  $j$  ab.

Das *Ising-Modell* nimmt wieder Elektronen-Spins als Drehimpuls-artige Größe, erlaubt also nur die Möglichkeit 'up' und 'down'. Dadurch wird das Skalarprodukt von Vektoren in Gl. 7.58 eine Multiplikation von Skalaren.

## Molekularfeldnäherung

Im Ising- oder Heisenberg-Modell koppelt die Austauschwechselwirkung alle magnetischen Momente miteinander, was die Rechnung aufwändig macht. Einfacher wird es, wenn man den Beitrag aller anderen magnetischen Momente zum Magnetfeld am Ort  $i$  zusammenfasst zu einem effektiven mittleren Austausch- oder Molekularfeld. Dieser Ansatz von Pierre Weiss ist historisch älter als die Austauschwechselwirkung.

Wir nehmen an, dass die Austauschwechselwirkung nur zwischen den nächsten Nachbarn wirkt, und dass sie für alle  $z$  Nachbarn identisch ist. Dann ist der Energiebeitrag am Ort  $i$

$$E_i = -\frac{J_a}{\hbar} \sum_{j=1}^z S_i \cdot S_j \approx -z \frac{J_a}{\hbar} \langle S_j \rangle \cdot S_i \quad (7.59)$$



mit dem mittleren Drehimpuls  $\langle S_j \rangle$  aller Nachbarn. Wir gehen zu makroskopischen Größen über, indem wir dies umschreiben als Produkt der Magnetisierung  $M$  und des magnetischen Momentes  $\mu$  via

$$M = -n g_J \mu_B \frac{\langle S_j \rangle}{\hbar} \quad \text{und} \quad \mu_i = -g_J \mu_B \frac{S_i}{\hbar} \quad (7.60)$$

und erhalten

$$E_i = -z \frac{J_a}{n g_J^2 \mu_B^2} \mu_i \cdot M = -\mu_i \cdot B_A \quad (7.61)$$

mit dem *Molekularfeld*  $B_A$  und der Molekularfeld-Konstante  $\gamma$

$$B_A = \frac{z J_a}{n g_J^2 \mu_B^2} M = \mu_0 \gamma M \quad (7.62)$$

## Ferromagnetismus

In der Molekularfeldnäherung ist das effektive Feld in der Probe die Summe aus dem extern angelegten Feld und dem Molekularfeld

$$B_{\text{eff}} = B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M \quad (7.63)$$

Wir berücksichtigen die Austauschwechselwirkung also, indem wir überall  $B$  durch  $B_{\text{eff}}$  ersetzen. Ferromagnetismus ist damit ein System von nicht wechselwirkenden magnetischen Momenten (durch die Brillouin-Funktion beschrieben) plus Molekularfeld. Die Magnetisierung  $M$  ist nach Gl. 7.42

$$M = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J(y) = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J \left( \frac{g_J \mu_B J (B_{\text{ext}} + \mu_0 \gamma M)}{k_B T} \right) \quad (7.64)$$

nur dass für  $y$  jetzt  $B_{\text{eff}}$  statt  $B$  verwendet wird. Leider erscheint  $M$  auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Wir lösen das grafisch, indem wir beides

$$M(y) = n g_J \mu_B J \mathcal{B}_J(y) \quad (7.65)$$

$$M(y) = \frac{k_B T}{\mu_0 \gamma g_J \mu_B J} y - \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \gamma} \quad (7.66)$$

als Funktion von  $y$  zeichnen und Schnittpunkte suchen.

Bei  $B_{\text{ext}} = 0$  hängt es von der Steigung der beiden Kurven ab, ob diese sich schneiden. Bei hohen Temperaturen  $T > T_C$  ist Gl. 7.65 steiler als die Asymptote an Gl. 7.66 und nur der triviale Schnittpunkt bei  $M = 0$  bleibt. Es gibt also spontane Magnetisierung nur unterhalb einer bestimmten Temperatur. Die charakteristische Temperatur  $T_C$  nennt man ferromagnetische Curie-Temperatur

$$T_C = n \gamma \frac{\mu_0 g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3 k_B} = \gamma C \quad (7.67)$$

mit der Curie-Konstanten  $C$ .

Bei angelegtem externen Feld  $B_{\text{ext}} > 0$  findet sich immer ein Schnittpunkt, also eine von Null verschiedene Magnetisierung, unabhängig von der Temperatur. Das unterscheidet sich nicht von einem Paramagneten. Aus  $\chi \approx \mu_0 M / B_{\text{ext}}$  erhält man im paramagnetischen Bereich  $T > T_C$  das Curie-Weiss'schen Gesetz der magnetischen Suszeptibilität

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (7.68)$$

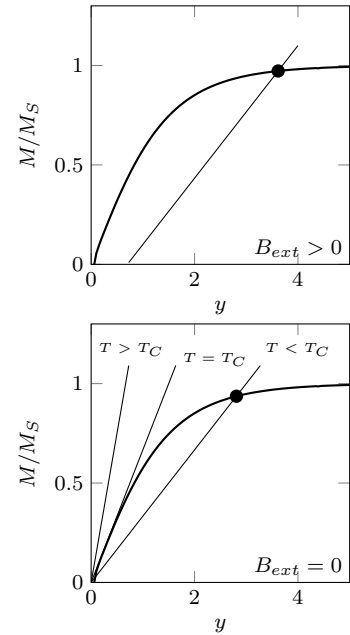


Abbildung 7.5: Grafische Bestimmung der Magnetisierung eines Ferromagneten.

Für Temperaturen  $T < T_C$  im ferromagnetischen Bereich hängt die Magnetisierung von der Vorgeschichte der Probe ab und nicht nur vom aktuellen externen Magnetfeld. Daher hilft hier die Beschreibung durch eine Suszeptibilität nicht.

Material	$T_C$ (K)	$\mu/\mu_B$
Fe	1043	2.2
Co	1394	1.7
Ni	631	0.6
Gd	289	7.5
EuO	70	6.9

Tabelle 7.2: Ferromagnete (Daten aus Blundell, 2006)

## Untergitter: Ferri- und Antiferromagnetismus

Um Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus zu beschreiben führen wir zwei Untergitter ein. Ähnlich einem Schachbrett gehört jede Position des physikalischen Gitters entweder zu dem einen oder dem anderen Untergitter, gerade so, dass die nächsten Nachbarn immer dem anderen Untergitter angehören. Für jedes Untergitter definieren wir eine Magnetisierung  $M_{A,B}$  und Molekularfeld-Konstanten  $\gamma_{ij}$ , die die Wechselwirkung innerhalb und zwischen den Untergittern beschreiben. Die jeweiligen Molekularfeld  $B^a$  sind also

$$B_A^a = \mu_0 \gamma_{AA} M_A + \mu_0 \gamma_{AB} M_B \quad (7.69)$$

$$B_B^a = \mu_0 \gamma_{BA} M_A + \mu_0 \gamma_{BB} M_B \quad (7.70)$$

Aus Symmetriegründen ist  $\gamma_{AB} = \gamma_{BA}$ . Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus unterscheiden sich in den  $\gamma_{ij}$ , die aber alle negativ sind, weil die zugehörige Austauschwechselwirkung  $J_A$  im Gegensatz zum Ferromagnetismus negativ ist.

**Ferrimagnetismus** Der Name wurde durch Louis Néel bei der Beschreibung des Magnetismus von Ferriten (eine Form der Eisen-Oxyde) geprägt. In diesen Materialien sind die beiden Untergitter nicht identisch. Es gibt zweimal soviel B-Gitterpunkte wie A-Gitterpunkte, und beide Gitter sind durch unterschiedliche Atome besetzt. Wir beschreiben die magnetischen Eigenschaften jedes Untergitters durch seine Curie-Konstante  $C_{A,B}$  (Gl. 7.67). Analog zu Gl. 7.67 ergibt<sup>8</sup> sich dann eine ferrimagnetische Curie-Temperatur

$$T_C = |\gamma_{AB}| \sqrt{C_A C_B} \quad (7.71)$$

und eine Suszeptibilität oberhalb von  $T_C$  zu

$$\chi = \frac{(C_A + C_B)T - 2|\gamma_{AB}|C_A C_B}{T^2 - T_C^2} \quad (7.72)$$

Ferrimagnete zeigen also einen besonderen, charakteristischen Temperaturverlauf der Suszeptibilität, der deutlich von dem Curie-Weiss-Gesetz abweicht. Unterhalb von  $T_C$  verbleibt eine beobachtbare spontane Magnetisierung, weil die beiden Untergitter sich nicht vollständig kompensieren.

**Antiferromagnetismus** Hier sind die beiden Untergitter identisch ( $\gamma_{AA} = \gamma_{BB}$ ), aber die magnetischen Momente antiparallel orientiert, also  $M_A = -M_B$ . Die kritische Temperatur, hier Néel-Temperatur, ist

$$T_N = |\gamma_{AB} - \gamma_{AA}|C \quad (7.73)$$

wobei  $C$  die Curie-Konstante eines der Untergitter ist. Oberhalb der Néel-Temperatur  $T_N$  ist die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{2C}{T + T_N} \quad (7.74)$$

<sup>8</sup> siehe Gross und Marx, 2023

Material	$T_C$ (K)	$\mu/\mu_B$
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	858	4.1
CoFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	793	3.7
Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	560	5.0
Ho <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	567	15.2

Tabelle 7.3: Ferrimagnete (Daten aus Blundell, 2006)

Material	$T_N$ (K)	$J$
MnF <sub>2</sub>	67	5/2
MnO	122	5/2
CoO	292	3/2
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	307	3/2
$\alpha$ -Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	950	5/2

Tabelle 7.4: Antiferromagnete (Daten aus Blundell, 2006)

Es gibt auch unterhalb von  $T_N$  keine spontane Magnetisierung, weil die beiden Untergitter sich vollständig kompensieren. Die Suszeptibilität ist in diesem Bereich<sup>9</sup> abhängig von der Orientierung des Magnetfelds,

Magnetische Ordnung und Suszeptibilität Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität ist für Para-, Ferro- und Antiferromagnete ähnlich. Sie folgt

$$\chi \propto \frac{1}{T - \Theta} \quad (7.75)$$

Man kann diese Gleichung an den experimentell gefundenen Verlauf anpassen und so die kritische Temperatur  $\Theta$  bestimmen. Falls  $\Theta = 0$ , so ist das Material ein Paramagnet. Falls  $\Theta > 0$ , dann liegt ein Ferromagnet vor und  $T_C = \Theta$ . Falls  $\Theta < 0$ , dann ist es ein Antiferromagnet und  $T_N = -\Theta$ .

## Neutronenstreuung

Neutronenstreuung ist die Methode der Wahl, um magnetische Ordnung zu detektieren. Die (de Broglie-) Wellenlänge ist viel kleiner als der Gitterabstand. Beugung am Kristall-Gitter ist also möglich. Gleichzeitig hat das Neutron auch einen Spin  $1/2$ , d.h. es wechselwirkt mit den magnetischen Momenten. Es gibt im Beugungsmuster also nicht nur einen Beitrag der Kerne des Gitters, sondern auch der Elektronen, wenn diese ein magnetisches Moment besitzen. Beide Effekte addieren sich.

Im Experiment<sup>10</sup> von Shull<sup>11</sup>, Strauser und Wollan, das in Abbildung 7.1 gezeigt ist, wurden Neutronen an MnO gebeugt. Oberhalb der Néel-Temperatur ist das Material paramagnetisch. Man findet Peaks entsprechend dem Mn-Mn Abstand von  $4.43 \text{ \AA}$  bei einer NaCl-Kristallstruktur (fcc).

Unterhalb der Néel-Temperatur stellt sich antiferromagnetische Ordnung ein. Die magnetischen Momente der Mangan-Ionen sind alternierend antiparallel orientiert. Der Streuquerschnitt der magnetischen Neutronenstreuung hängt von der Orientierung der Spins relativ zur Bahnebene der Neutronen ab. Daher erscheinen nun die Mn-Ionen unterschiedlich und das Gitter wird effektiv doppelt so groß mit  $a_0 = 8.85 \text{ \AA}$ . Die zusätzlichen Peaks können in der neuen Gitterkonstante indiziert werden, in der alten benötigten sie halbzahlige Indizes.

Man erkennt in Abbildung 7.1 auch, dass die neu hinzukommenden Peaks in der Amplitude mit steigendem Streuwinkel  $\theta$  kleiner werden. Eine solche Winkelabhängigkeit im Formfaktor gibt es bei Streuung an den Kernen nicht. Die Winkelabhängigkeit ergibt sich aus der Fourier-Transformation der räumlichen Verteilung der Streudichte. Bei den Kernen ist diese stark lokalisiert, nach Fourier-Transformation also quasi konstant. Bei den Elektronen ist dies nicht mehr der Fall. Der Amplitudenabfall spiegelt also die Ausdehnung der Elektronenwolke um das Mn-Ion wider.

<sup>9</sup> siehe bspw. Gross und Marx, 2023



Abbildung 7.6: Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität  $\chi$  für Paramagnete (fett), Ferromagnete (obere Kurven) und Antiferromagnete (untere Kurve). Unterhalb von  $T = \Theta$  liegt die geordnete Phase des (Anti-)Ferromagnets vor. Oberhalb sind beide paramagnetisch.

<sup>10</sup> Shull, Strauser und Wollan, 1951.

<sup>11</sup> Clifford Glenwood Shull, 1915–2001, Nobelpreis 1994

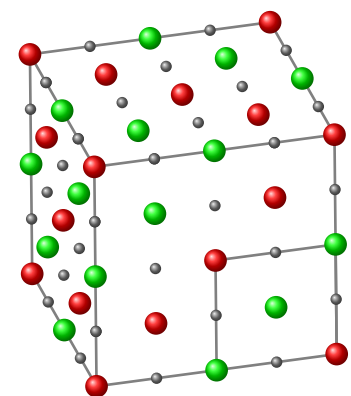


Abbildung 7.7: Kristallstruktur von MnO. In der antiferromagnetischen Phase sind die Spins der Mangan-Ionen entweder parallel (rot) oder antiparallel (grün) zur Feldrichtung orientiert. Die Sauerstoff-Ionen (grau) tragen nicht zum Signal bei. Bei höheren Temperaturen verschwindet die Spin-Orientierung. Die Unterscheidung zwischen rot und grün fällt weg. Die Einheitszelle wird dadurch kleiner.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

Blundell, Stephen (2006). *Magnetism in condensed matter*. Oxford Univ. Press.

Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).

Henry, Warren E (1952). "Spin paramagnetism of  $\text{Cr}^{+++}$ ,  $\text{Fe}^{+++}$ , and  $\text{Gd}^{+++}$  at liquid helium temperatures and in strong magnetic fields". In: *Physical Review* 88.3, S. 559. [↗](#).

Shull, C Gi, WA Strauser und EO Wollan (1951). "Neutron diffraction by paramagnetic and antiferromagnetic substances". In: *Physical Review* 83.2, S. 333. [↗](#).

# Kapitel 8

## Optische Eigenschaften

Markus Lippitz

10. Juli 2023

### Ziele

- Sie können die Quasiteilchen Phonon, Plasmon und Exziton sowie die zugehörigen Polaritonen benutzen, um optische Eigenschaften von Festkörpern wie die unten dargestellte Messung zu erklären.



Abbildung 8.1: Dispersion der Phonon-Polaritonen in  $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$ , gemessen via THz-Spektroskopie. Für bestimmte Frequenzen (grau unterlegt) können elektromagnetische Wellen nicht in diesem Medium propagieren. Die Dispersionsrelation ergibt sich aus der Kopplung von freier elektromagnetischer Strahlung (diagonal, strichliert) mit optischen Phononen (waagrecht, grau). Daten aus Kojima u. a., 2003.

### Überblick

Das verbindende Thema dieses Kapitels ist die Wechselwirkung von Festkörpern mit elektromagnetischer Strahlung, also die optischen Eigenschaften der Materie. Genauso gut hätte man das Kapitel auch 'Quasiteilchen' oder 'Quasiteilchen aus Quasiteilchen' nennen können. Wir werden neben den Phononen noch zwei weitere Quasiteilchen einführen, und diese dann jeweils mit Photonen zu einem neuen Teilchen verbinden. Wir gehen hier beim Photon analog zum Kristall-Elektron vor, in das wir die Wechselwirkung mit dem Feld der Kerne projiziert hatten.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International" Lizenz](#).

## Wiederholung

Optische Eigenschaften kondensierter Materie wurden schon einmal im Zusammenhang mit der Molekülspektroskopie besprochen. Schauen Sie noch einmal in Ihre Notizen zur Vorlesung EPC1, oder alternativ in mein Skript<sup>1</sup> in Kapitel 4.

<sup>1</sup> Lippitz, 2022.

**Makroskopische Maxwell-Gleichungen** Wir beschreiben die Wechselwirkung von Licht mit Materie durch die Maxwell-Gleichungen und die zugehörigen Materie-Gleichungen. Interessante Größen sind die Polarisierung  $\mathbf{P}$ , die Suszeptibilität  $\chi$  und die dielektrische 'Konstante' (besser: Funktion)  $\epsilon$ . Ich benutze die Form  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ , also ein einheitenfreies  $\epsilon$ . Manche Bücher machen das aber auch anders.

**Verschiebungs- und Orientierungs-Polarisation** Ladungsträger können sich verschieben und Moleküle umorientieren, wenn ein elektrisches Feld anliegt. Die Umorientierung ist identisch mit unserer Beschreibung des Paramagnetismus, also ebenfalls mit der Langevin-Funktion.

**Lorentz-Oszillator-Modell** Dieses Modell der geladenen Masse an einer Feder ist zentral für viele Vorstellungen. Es liefert insbesondere die Lorentzförmige Linienform einer Absorptionslinie.

**Lokales Feld** Ein externes elektrisches Feld  $E_{\text{ext}}$  verschiebt die umgebenden Ladungen und ändert so das lokale Feld  $E_{\text{loc}}$  an dem Ort, der uns eigentlich interessiert. Dies wird durch die Lorentz-Beziehung beschrieben und mündet in der Clausius-Mossotti-Beziehung.

**Kramers-Kronig-Beziehung** Real- und Imaginärteil vieler Größen, insbesondere der dielektrischen Funktion oder der Suszeptibilität, sind nicht unabhängig voneinander sondern ineinander umrechenbar. Dies liegt an der Kausalität, dass also Materie erst nach Einschalten des elektrischen Feldes antworten kann, und wird in den Kramers-Kronig-Beziehungen zusammengefasst.

**Messbare Größen** Wir diskutieren die Phänomene oft im Rahmen der komplexwertigen dielektrischen Funktion  $\epsilon(\omega)$ . Messbar ist aber eigentlich der (komplexwertige) Brechungsindex  $\tilde{n}(\omega)$ , die Reflektivität  $R$  bei senkrechtem Einfall und der Absorptionskoeffizient  $K$ . Schauen Sie sich die Zusammenhänge noch einmal an.

## Lokales Feld

Wir gehen noch etwas auf das lokale Feld in einer Probe ein. In der Lorentz-Methode werde alle Moleküle zusammen als ein homogenes Medium mit der dielektrischen Konstante  $\epsilon$  angesehen. Aus diesem Medium schneidet man eine Kugel aus, die gerade das einzelne, zu betrachtende Molekül oder Atom umschließt. In die so entstandene Aushöhlung setzt man das Molekül in Vakuum. Das externe elektrische Feld induziert eine Polarisierung  $\mathbf{P}$ , nur kennen

wir deren Größe noch nicht. Diese Polarisierung bewirkt Oberflächenladungen am Rand der Kugel, die das lokale Feld in der Kugel modifizieren<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Die Rechnung ist typischerweise eine Übungsaufgabe in der Elektrodynamik.

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} . \quad (8.1)$$

In Festkörpern müssen wir aber auch berücksichtigen, dass die Probe irgendwo endet. Auch an dieser Oberfläche können Ladungen induziert werden, die dem internen Feld entgegenstehen. Dieses Feld von der Oberfläche nennt man Depolarisationsfeld  $\mathbf{E}_N$ . Man schreibt es auch in der Form

$$\mathbf{E}_N = -\frac{N}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (8.2)$$

mit dem Depolarisationsfaktor  $N$ , der von der Form der Probe abhängt. Für Kugeln ist  $N = 1/3$ , für eine dünne Scheibe senkrecht bzw. parallel zum elektrischen Feld ist  $N = 1$  bzw.  $N = 0$ . Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \left( N - \frac{1}{3} \right) . \quad (8.3)$$

## Optische Phononen

Im ersten Teil der Festkörperphysik hatten Sie optische Phononen kennengelernt, also Schwingungen der Atomrümpfe in einem Gitter mit einer mindestens zweiatomigen Basis. Als Modell wird eigentlich immer die lineare zweiatomige Kette diskutiert. Im Grenzfall  $k \rightarrow 0$  bzw. unendlich langer Wellenlängen bewegen sich einfach zwei Ebenen von Atomen gegeneinander. Die Frequenz der Bewegung ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{\mu}} \quad (8.4)$$

mit der reduzierten Masse  $\mu$  und der Kraftkonstanten  $c$ . Da alle Ionen gleicher Ladung  $q$  derselben Bewegung folgen ist die Differentialgleichung einfach und kommt ohne Index für das Atom aus

$$M_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 - 2c(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = +q\mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (8.5)$$

$$M_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 - 2c(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = -q\mathbf{E}_{\text{loc}} . \quad (8.6)$$

Wir komprimieren dies auf eine Gleichung für den Abstand der Ebenen  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$

$$\mu \ddot{\mathbf{u}} + \mu \omega_0^2 \mathbf{u} = q\mathbf{E}_{\text{loc}} . \quad (8.7)$$

Diese Bewegung  $\mathbf{u}$  ist mit Ladung verknüpft und bewirkt so eine sich ändernde Polarisierung  $\mathbf{P}$ , die wiederum auf das lokale elektrische Feld wirkt. Mit der Dichte  $n$  der Ionen-Paaren ist die Polarisierung aufgrund der Ionen selbst

$$\mathbf{P}_{\text{ion}} = nq\mathbf{u} = \epsilon_0 n \alpha_{\text{ion}} \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (8.8)$$

mit der Polarisierbarkeit der Ionen  $\alpha_{\text{ion}}$ . Weiter unten werden wir diese Polarisierbarkeit im statischen Grenzfall benötigen, also für Frequenzen gegen Null. Dazu lösen wir zunächst nach  $\alpha_{\text{ion}}$  auf, und setzen dann die Lösung der Differentialgleichung für  $\omega = 0$  ein, um  $\mathbf{u}$  zu entfernen. Das ergibt

$$\alpha_{\text{ion}}(0) = \frac{qu}{\epsilon_0 E_{\text{loc}}} = \frac{q^2}{\epsilon_0 \omega_0^2 \mu} . \quad (8.9)$$

Zusätzlich gibt es aber auch noch Elektronenwolken um jedes Ion. Auch diese sind polarisierbar mit der Polarisierbarkeit je Ion  $\alpha_{el}^+$  und  $\alpha_{el}^-$ . Wir führen eine effektive Polarisierbarkeit des Ionenpaars ein  $\alpha_{el} = \alpha_{el}^+ + \alpha_{el}^-$  und erhalten

$$\mathbf{P}_{el} = \epsilon_0 n \alpha_{el} \mathbf{E}_{loc} \quad . \quad (8.10)$$

Insgesamt ergibt dies

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{ion} + \mathbf{P}_{el} = nq\mathbf{u} + \epsilon_0 n \alpha_{el} \mathbf{E}_{loc} \quad . \quad (8.11)$$

Nun fehlt noch ein Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Polarisations  $\mathbf{P}$  und lokalem elektrischen Feld  $\mathbf{E}_{loc}$ . Dazu betrachten wir hier zunächst *Eigenschwingungen*, legen also kein externes Feld an. Im nächsten Abschnitt kommt dann das externe Feld hinzu.

Das Schwingungsmuster der Ionen im Kristall wird durch die Phasenfronten der ebenen Wellen bestimmt. Wir betrachten nun eine dünne Scheibe des Kristalls, die parallel zur Phasenfront, also senkrecht zum Wellenvektor ist.

**Longitudinale Schwingungen** Bei einer longitudinalen Schwingung bewegen sich die Ionen in Richtung Scheibenoberfläche. Die Polarisation  $\mathbf{P}$  steht also senkrecht auf der Scheibe. Damit ist der Depolarisationsfaktor  $N = 1$  und das lokale Feld ist nach Gl. 8.3

$$\mathbf{E}_{loc} = -\frac{2}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad . \quad (8.12)$$

Dies setzen wir in Gl. 8.11 ein und eliminieren  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_{loc} = -\frac{2}{3} n \alpha_{el} \mathbf{E}_{loc} - \frac{2}{3\epsilon_0} nq\mathbf{u} \quad . \quad (8.13)$$

Mittels der Definition von  $\alpha_{ion}(0)$  lässt sich dies schreiben als

$$\mathbf{E}_{loc} = -\frac{1}{q} \mu \omega_0^2 \frac{\frac{2}{3} n \alpha_{ion}(0)}{1 + \frac{2}{3} n \alpha_{el}} \mathbf{u} \quad . \quad (8.14)$$

Damit haben wir den 'treibenden' Term in der Differentialgleichung gefunden, die hier eine freie Schwingung beschreibt, weil wir ja oben  $\mathbf{E}_{ext} = 0$  gesetzt haben. Die Eigenfrequenz dieser Schwingung ist

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\frac{2}{3} n \alpha_{ion}(0)}{1 + \frac{2}{3} n \alpha_{el}(0)}} \quad . \quad (8.15)$$

Hier wurde auch der statische Grenzfall der elektronischen Polarisierbarkeit eingesetzt, weil die sich ergebenden Frequenz im infraroten Spektralbereich für Elektronen schon quasi Null sind, diese also instantan folgen.

**Transversale Schwingungen** Bei einer transversalen Schwingung bewegen sich die Ionen in parallel zur Scheibenoberfläche. Die Polarisation  $\mathbf{P}$  ist parallel zur Scheibe. Damit ist der Depolarisationsfaktor  $N = 0$  und das lokale Feld ist nach Gl. 8.3

$$\mathbf{E}_{loc} = +\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad . \quad (8.16)$$

Die analoge Rechnung zu oben ergibt

$$\omega_T = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{3} n \alpha_{ion}(0)}{1 - \frac{1}{3} n \alpha_{el}(0)}} \quad . \quad (8.17)$$



Die Eigenfrequenz optischer Phononen spaltet sich also in der Nähe von  $k \approx 0$  auf in zwei verschiedene Werte für die transversale und longitudinale Mode, wenn die sich bewegenden Massen geladen sind. Dann erzeugen diese Ladungen nämlich eine Polarisierung, die durch ein lokales Feld zurückwirkt auf die Ladungen selbst. Diese Rückwirkung hängt von der Orientierung der Polarisierung relativ zur Phasenfront ab. Dies macht die rückstellende Feder effektiv weicher bzw. härter. Optische Phononen ungeladener Massen beispielsweise in Gittern mit zweiatomiger Basis aber nur einer Atomsorte zeigen diese Aufspaltung nicht.

## Lyddane-Sachs-Teller-Relation

Die Terme für die beiden neuen Eigenfrequenzen sind sehr ähnlich. Das Verhältnis  $\omega_L^2/\omega_T^2$  ist

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \left[ 1 + \frac{n[\alpha_{el}(0) + \alpha_{ion}(0)]}{1 - \frac{1}{3}n[\alpha_{el}(0) + \alpha_{ion}(0)]} \right] \left[ 1 + \frac{n\alpha_{el}(0)}{1 - \frac{1}{3}n\alpha_{el}(0)} \right]^{-1} \quad (8.18)$$

Beide Terme sind ähnlich zur nach  $\epsilon$  aufgelösten Clausius-Mossotti-Beziehung<sup>3</sup> <sup>3</sup> siehe z.B. EPC1

$$\epsilon = 1 + \frac{n\alpha}{1 - \frac{1}{3}n\alpha} \quad (8.19)$$

und unterscheiden sich nur darin, dass im zweiten der Beitrag  $\alpha_{ion}(0)$  fehlt. Wir identifizieren also den ersten Term als dielektrische Funktion bei der Frequenz 0, also  $\epsilon(0)$ . Für Frequenzen im sichtbaren Spektralbereich, also oberhalb der der optischen Phononen ( $\omega \gg \omega_0$ ), trägt die ionische Polarisierbarkeit nicht mehr bei. Die schweren Kerne können dem Feld nicht mehr folgen. Diese Frequenz ist aber immer noch klein gegen die Eigenfrequenz der Elektronenwolke im Ultraviolett, so dass  $\alpha_{el}(0)$  immer noch gerechtfertigt ist. Wir identifizieren den zweiten Term also mit der dielektrischen Funktion im Sichtbaren  $\epsilon(\omega_s)$ . Damit erhalten wir die Lyddane-Sachs-Teller-Relation (LST-Relation)

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon(\omega_s)} \quad (8.20)$$

Da  $\epsilon(\omega_s) \approx 1$  bedeutet ein kleines  $\omega_T$  ein sehr hohes  $\epsilon(0)$ . Für PbTe wird beispielsweise  $\epsilon(0) \approx 1500$  erreicht.

## Erzwungene Schwingungen von Ionenkristallen

Mit der Lyddane-Sachs-Teller-Relation haben wir eigentlich schon den Bereich  $E_{\text{ext}} = 0$  verlassen, weil die dielektrische Funktion natürlich die Wechselwirkung von externen elektromagnetischen Wellen mit der Materie beschreibt. Dies soll hier etwas genauer betrachtet werden. Wir wiederholen also die Argumentation von oben, nur verlangen jetzt  $E_{\text{ext}} \neq 0$ . Elektromagnetische Wellen sind transversale Wellen, die auch nur mit transversalen optischen Phononen koppeln. Wir ersetzen also Gl. 8.16 durch

$$E_{\text{loc}} = E_{\text{ext}} + \frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (8.21)$$

und erhalten dann analog zur mit longitudinalen Phononen vorgeführten Rechnung

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}n\alpha_{el}} \mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{1}{q} \mu \omega_0^2 \frac{\frac{1}{3}n\alpha_{ion}(0)}{1 - \frac{1}{3}n\alpha_{el}} . \quad (8.22)$$

In der Differentialgleichung verbleibt damit ein treibender Term mit  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  und man bekommt die Lösung

$$\mathbf{u} = \frac{q}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}n\alpha_{el}} \frac{1}{\omega_T^2 - \omega^2} \mathbf{E}_{\text{ext}} \quad (8.23)$$

wenn  $\omega$  die Frequenz des Lichtfeldes  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  ist. Über

$$\mathbf{P}_{\text{ion}} = nq\mathbf{u} = \epsilon_0 \chi_{\text{ion}} \mathbf{E}_{\text{ext}} \quad (8.24)$$

erhalten wird die optische Suszeptibilität der Ionen

$$\chi_{\text{ion}} = \frac{nq^2}{\epsilon_0 \mu} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}n\alpha_{el}} \frac{1}{\omega_T^2} \frac{\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} = \chi_{\text{ion}}(0) \frac{\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} . \quad (8.25)$$

Die dielektrische Funktion für Elektronen und Ionen zusammen ist

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi_{\text{el}} + \chi_{\text{ion}} = \epsilon(\omega_s) + [\epsilon(0) - \epsilon(\omega_s)] \frac{\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \quad (8.26)$$

$$= \epsilon(\omega_s) \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \quad (8.27)$$

wobei wir im ersten Schritt die Definition von  $\epsilon(\omega_s) = 1 + \chi_{\text{el}}(0)$  und im zweiten die Lyddane-Sachs-Teller-Relation ausgenutzt haben. Die dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  hat zwei Nullstellen, bei  $\omega = \omega_T$  und bei  $\omega_L$ . Dazwischen ist sie negativ. Der Reflexionskoeffizient bei senkrechtem Einfall ist

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon} - 1}{\sqrt{\epsilon} + 1} \right|^2 . \quad (8.28)$$

Für das Bereich zwischen  $\omega_T$  und  $\omega_L$  ist also  $R = 1$ . Eine elektromagnetische Welle kann nicht in die Probe eindringen sondern wird vollständig reflektiert. Diesen Bereich nennt man *Reststrahlenbande*. Außerhalb dieses Bereichs fällt die Reflektivität ab. Bei  $\epsilon(\omega) = 1$  ist sie Null und eine Welle dringt verlustfrei in das Medium ein.

Die Ausgangs-Differentialgleichung hatte keinen Dämpfungsterm. Wenn wir den einführen<sup>4</sup>, dann erhalten wir

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega_s) \left( 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right) . \quad (8.29)$$

Abbildung 8.2 zeigt den Real- und Imaginärteil. Die Beschreibung ändert sich nicht wesentlich. Wir erhalten einen stark absorbierenden Bereich bei  $\omega_T$  und die Reflektivität in der Reststrahlenbande ist nicht perfekt.

Typische Werte von  $\omega_L$  und  $\omega_T$  liegen bei einigen  $10^{13}$  Hz, also im Infraroten. Man kann die hohe und spektral schmale Reflektivität der optischen Phononen ausnutzen, um sie als selektive Spiegel zu verwenden. Nach mehrfacher Reflektion an solch einem Material wird ein ursprünglich breites infrarotes Schwarzkörper-Spektrum spektral schmal. Diese Reststrahlen hat man früher zur Spektroskopie anderer Materialien verwendet.

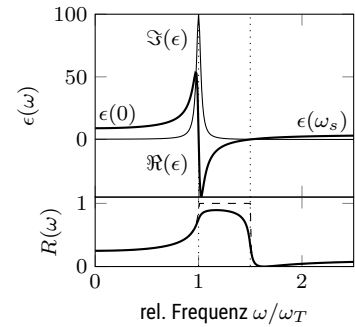


Abbildung 8.2: Dielektrische Funktion (oben) und Reflektivität (unten) aufgrund optischer Phononen in einem ionischen Kristall. strichliert:  $R$  für  $\Gamma = 0$ . Hier ist  $\omega_L = 1.5\omega_T$  und  $\gamma = 0.1\omega_T$  gewählt.

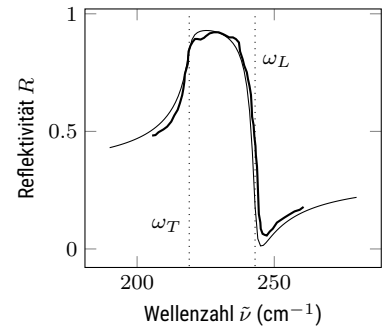


Abbildung 8.3: Reflektivität von InAs bei  $T = 4$  K im Vergleich zum Modell. Daten aus Yu und Cardona, 2010

<sup>4</sup> siehe Gross und Marx, 2023 und Yu und Cardona, 2010

## Phonon-Polariton

Wir wollen die Ausbreitung von Licht in einem Ionen-Kristall noch etwas genauer betrachten und dabei ein weiteres Quasiteilchen einführen, das Polariton, genauer das Phonon-Polariton. Die Dispersionsrelation von Licht in einem Medium mit der dielektrischen Funktion  $\epsilon(\omega)$  ist

$$\omega = ck = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} k \quad . \quad (8.30)$$

Wir setzen für  $\epsilon(\omega)$  den dämpfungsfreien Ausdruck Gl. 8.27 ein und quadrieren der Einfachheit halber

$$\omega^2 = \frac{\omega_T^2 - \omega^2}{\epsilon(\omega_s)(\omega_L^2 - \omega^2)} c_0^2 k^2 \quad . \quad (8.31)$$

Abbildung 8.4 zeigt die Dispersionsrelation  $\omega(k)$ . In der Reststrahlenbande wird  $\omega^2$  negativ, ist also kein reelwertiges  $\omega$  möglich. Dies beschreibt den exponentiellen Abfall der Welle an der Grenzfläche. Außerhalb dieser Bandlücke finden wir zwei Äste, das untere und obere Polariton. Diese folgen streckenweise der linearen Dispersionsrelation von Licht mit  $\omega = \frac{c_0}{n} k$ , streckenweise der konstanten horizontalen Dispersionsrelation der Phononen  $\omega \approx \text{const.}$  Der hier dargestellte Bereich des Wellenvektor  $k$  ist ja viel kleiner als  $\pi/a$  der Phononen. Das untere Polariton wechselt also mit steigendem  $k$  von Photon-ähnlich zu Phonon-ähnlich, das obere andersherum. In den Übergangsbereichen, in denen Frequenz und Wellenlänge von Phonon und Photon gut übereinstimmen, da koppeln diese und bilden ein neues, hybrides System, das durch das Quasiteilchen Polariton beschrieben wird.

Allgemein sind Polaritonen Quasiteilchen aus Photonen und einer Anregung, die an elektromagnetischen Wellen koppelt, also Ladung oder magnetische Momente besitzt. Wir werden unten noch das Plasmon-Polariton diskutieren. Ähnlich wie bei der effektiven Masse des Kristall-Elektrons werden nun dem Photon Eigenschaften des Kristalls zugeschrieben, nämlich die aus der Oszillation der geladenen Ionen, die an sich ja schon als Phonon quantisiert waren.

### Beispiel: $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$

Als Beispiel für Phonon-Polaritonen ist in Abb. 8.1 am Anfang des Kapitels Bismut-Titanat ( $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$ ) gezeigt. Die Dispersionsrelation von Photonen  $\omega \propto k$  ist, im Vergleich zu Phononen, sehr steil, weil die Wellenlänge viel größer als die Gitterkonstante ist. Die Abbildung zeigt also nur einen Ausschnitt in der Nähe von  $k \approx 0$ .

Um die Dispersionsrelation experimentell zu bestimmen muss man eigentlich nur nach Gl. 8.30 die dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  kennen, bzw. den Brechungsindex  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Allerdings ist der Realteil, der dispersive Teil des Brechungsindex relevant, nicht die Absorption, die durch den Imaginärteil beschrieben wird. Der interessante Frequenzbereich ist im Infraroten, bei  $\omega \approx 1 \text{ THz}$  bzw. einer Wellenzahl  $\tilde{\nu} = 50 \text{ cm}^{-1}$ . Kojima et al. verwenden darum THz-Spektroskopie.

Ein gepulster Laser (100 fs Pulsdauer, 780 nm Wellenlänge, entspricht 385 THz) erzeugt über einen nichtlinearen optischen Prozess infrarote Strah-

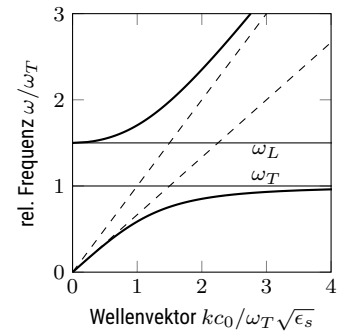


Abbildung 8.4: Dispersionsrelation von Phonon-Polaritonen (fett) als Kopplung von Licht (diagonal) und optischen Phononen (waagrecht). Hier ist  $\omega_L = 1.5\omega_T$  gewählt.

lung einer Frequenz von etwa 1 THz. Bei dieser Frequenz ist die Wellenlänge so lang, dass innerhalb der Pulslänge quasi nur eine Oszillation des elektrischen Feldes stattfindet. Dieser THz-Puls wird durch die Probe geleitet und dann durch den inversen nichtlinearen Prozess abgetastet. Besonders dabei ist, dass so das Feld  $E(t)$  und nicht die Intensität  $I(t) \propto |E(t)|^2$  des transmittierten THz-Pulses bestimmt werden kann. Durch Fourier-Transformation erhält man

$$E(\omega) = |E(\omega)|e^{i\phi(\omega)} \quad (8.32)$$

und daraus die Phasendifferenz  $\phi(\omega)$  des Wegs durch die Probe verglichen mit Vakuum (siehe Abbildung 8.5). Diese beinhaltet gerade die Zeitverzögerung der Transmission durch die Probe, also den Brechungsindex, und so  $k(\omega)$ :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d - \frac{2\pi}{\lambda_0}d = \left(k(\omega) - \frac{\omega}{c_0}\right)d \quad (8.33)$$

In Abbildung Abb. 8.1 ist also  $\omega$  über  $k(\omega)$  aufgetragen.

Das eingezeichnete Modell ist in Wesentlichen Gl. 8.31, nur dass berücksichtigt werden muss, dass zwei optische Phonon-Moden in  $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$  existieren. Die Dispersionsrelation ist dann

$$\omega^2 = \frac{c_0^2 k^2}{\epsilon(\omega_s)} \cdot \frac{(\omega_T^{(1)})^2 - \omega^2}{(\omega_L^{(1)})^2 - \omega^2} \cdot \frac{(\omega_T^{(2)})^2 - \omega^2}{(\omega_L^{(2)})^2 - \omega^2} \quad (8.34)$$

Obwohl das zweite Phonon höherenergetisch ist, beeinflusst es noch die Messung. Wenn man es vernachlässigen würde müsste der obere Polariton-Ast steiler ansteigen (gepunktet).

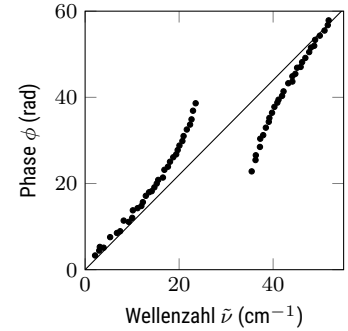


Abbildung 8.5: Phase des durch die Probe transmittierten THz-Feldes.

## Optische Antwort freier Elektronen in Metallen

Wir können die freien Elektronen in Metallen analog zu den optischen Phononen beschreiben. Da bei freien Elektronen die Rückstellkraft Null ist verschwindet  $\omega_T$ . Die Rolle von  $\omega_L$  übernimmt hier die Plasma-Frequenz  $\omega_P$ . Der konstante Beitrag der gebundenen Elektronen wird hier  $\epsilon_\infty$  genannt. Damit wird Gl. 8.29 zu

$$\epsilon = \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega + i\gamma)}\right) \quad (8.35)$$

Für kleine Dämpfung bzw. genügend hohe Frequenzen kann der Imaginärteil vernachlässigt werden

$$\epsilon \approx \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right) \quad (8.36)$$

Für Frequenzen  $\omega < \omega_P$  ist auch hier  $\epsilon$  negativ und somit die Reflektivität  $R = 1$ , falls  $\gamma = 0$  angenommen wurde. Metalle reflektieren Licht über einen breiten Spektralbereich. Typische Werte von  $\omega_P$  liegen im Ultraviolett, beispielsweise bei 7.5 eV für Kupfer. Gleichzeitig gibt es in Metallen auch noch Interband-Übergänge, die zu einer charakteristischen Absorption und somit beispielsweise zur Farbe von Gold oder Kupfer verglichen mit Silber führen.

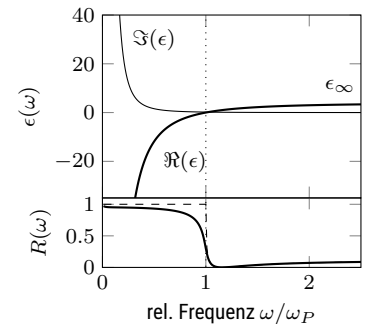


Abbildung 8.6: Dielektrische Funktion und Reflektivität eines freien Elektronengases

Die Bedeutung der Plasma-Frequenz  $\omega_P$  als Analogon zur longitudinalen Resonanz in ionischen Kristallen ergibt sich aus folgender Überlegung: Wir betrachten eine dünne Metallplatte im langwelligen Grenzfall einer longitudinalen Welle. Das bedeutet, dass wir alle Leitungs-Elektronen gleichförmig um die Distanz  $s$  in Richtung Plattenoberseite auslenken. Da die positiv geladenen Atom-Rümpfe stehen bleiben, ergibt sich oben eine Flächenladung

$$\rho_A = -n e s \quad (8.37)$$

und unten gerade die gegenteilige Ladung. Dadurch entsteht ein elektrisches Feld

$$E = \frac{n e s}{\epsilon_\infty \epsilon_0} \quad (8.38)$$

wobei  $\epsilon_\infty$  die dielektrische Antwort der gebundenen Elektronen beschreibt. Das Feld bewirkt eine rückstellende Kraft. Die Bewegungsgleichung der freien Elektronen ist also

$$m^* \ddot{s} + \frac{n e^2}{\epsilon_\infty \epsilon_0} s = 0 \quad (8.39)$$

mit der Eigenfrequenz  $\omega_P$

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_\infty \epsilon_0 m^*}} \quad (8.40)$$

Dies ist die charakteristische Frequenz aus Gl. 8.35. Bei dieser Resonanz bewegen sich alle freien Elektronen kollektiv in Phase, ähnlich zu den Atomrümpfen bei den Phononen. Die Anregung ist wiederum quantisiert und die Quanten werden *Plasmon* genannt. Plasmonen sind Longitudinalwellen und dadurch, zumindest in der hier beschriebenen Form der Volumen-Plasmonen, nicht durch Licht anregbar. Sie wechselwirken aber mit den Elektronen eines Elektronenstrahls, beispielsweise in einem Transmissions-Elektronenmikroskop. Dadurch entsteht ein charakteristischer Energieverlust im Elektronenstrahl, der spektroskopiert<sup>5</sup> werden kann. Abb. 8.7 zeigt ein solches Energie-Verlust-Spektrum. Man sieht den Peak beim Volumen-Plasmon (15.3 eV) und das unten eingeführte Oberflächen-Plasmon bei 10.8 eV.

Plasmonen existieren nicht nur in Metallen, sondern auch in anderen freien Elektronengasen, beispielsweise in hoch dotierten Halbleitern (Abb. 8.8). Dann hängt die Plasma-Frequenz  $\omega_P$  von der Ladungsträgerdichte bzw. Dotierung und der effektiven Elektronenmasse ab.

Analog zur Diskussion der Phonon-Polaritonen können wir auch Plasmon-Polaritonen einführen. Abb. 8.9 zeigt die Dispersionsrelation von Licht in einem Metall, dass durch die dielektrische Funktion Gl. 8.35 beschrieben ist. Wir finden wieder eine Bandlücke unterhalb von  $\omega_P$  und die Kopplung zwischen dem Plasmon bei  $\omega = \omega_P = \text{const.}$  und dem Photon mit  $\omega = c_0 k / \sqrt{\epsilon_\infty}$ .

## Oberflächen- und Partikel-Plasmon-Polaritonen

Kollektive Bewegungen der freien Elektronen gibt es nicht nur im Volumen eines Metalls, sondern auch an seiner Oberfläche. Man findet diese als Lösung der Maxwell-Gleichung, die an die Oberfläche gebunden sind, bei

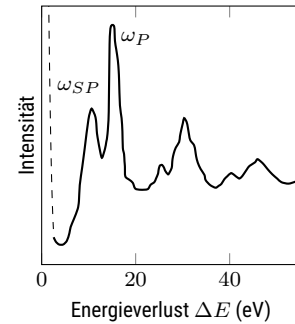


Abbildung 8.7: Energieverlust eines Elektronenstrahls beim Durchgang durch Al. Daten aus Powell und Swan, 1959.

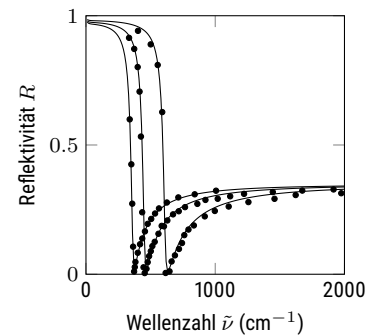


Abbildung 8.8: Reflektivität von verschieden stark n-dotierten InSb. Daten aus Spitzer und Fan, 1957.

<sup>5</sup> electron energy loss spectroscopy, EELS

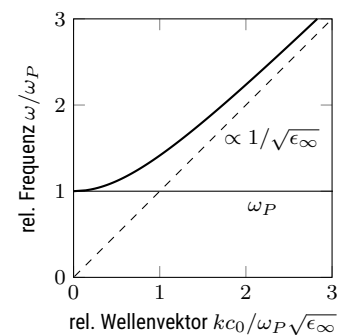


Abbildung 8.9: Dispersionsrelation eines (Volumen-)Plasmon-Polaritons.

denen das Feld also exponentiell mit dem Abstand abfällt. Die Rechnung ist beispielsweise in Maier, 2007 dargestellt.

Hier will ich es kürzer machen. Die Resonanz des Volumen-Plasmons haben wir oben bei der Frequenz  $\omega_P$  gefunden, bei der gerade die dielektrische Funktion des Metalls  $\epsilon^{(m)}$  nach Gl. 8.35 Null wurde, also

$$\epsilon^{(m)}(\omega_P) = 0 \quad . \quad (8.41)$$

Bei einer Oberfläche sollte aber auch die dielektrische Funktion des anderen, dielektrischen Halbraums eingehen. Es verwundert darum nicht, dass die Bedingung für die Oberflächen-Plasmon-Resonanz ist

$$\epsilon^{(m)}(\omega_{SP}) + \epsilon^{(d)}(\omega_{SP}) = 0 \quad . \quad (8.42)$$

Bei einem Dielektrikum ändert sich  $\epsilon^{(d)}$  nur sehr langsam mit der Frequenz. Wir nehmen es hier als konstant an. Wenn wir die dämpfungsfreie metallische dielektrische Funktion einsetzen finden wir

$$\omega_{SP} = \frac{\omega_P}{\sqrt{1 + \epsilon^{(d)}/\epsilon_\infty}} \quad . \quad (8.43)$$

Die Dispersionsrelation lautet

$$\omega = kc_0 \sqrt{\frac{\epsilon^{(m)} + \epsilon^{(d)}}{\epsilon^{(m)}\epsilon^{(d)}}} \quad . \quad (8.44)$$

An Oberflächen kommt also ein erlaubter Zustand, eine erlaubte optische Mode unterhalb von  $\omega_P$  hinzu. Wieder finden wir die charakteristische Kopplung zwischen Plasmon bei konstantem  $\omega_{SP}$  und Licht bei  $\omega = kc_0/\sqrt{\epsilon^{(d)}}$ .

Der Vollständigkeit halber seien noch Partikel-Plasmonen erwähnt, eben gebundene Lösungen der Maxwell-Gleichungen an metallischen Partikeln. Für Durchmesser (viel) kleiner als die optische Wellenlänge kann man das quasi-statisch rechnen. Die Resonanzbedingung ist dann

$$\epsilon^{(m)}(\omega_{PP}) + 2\epsilon^{(d)}(\omega_{PP}) = 0 \quad (8.45)$$

was

$$\omega_{PP} = \frac{\omega_P}{\sqrt{1 + 2\epsilon^{(d)}/\epsilon_\infty}} \quad (8.46)$$

ergibt. Eine Dispersionsrelation macht bei einem punktförmigen System keinen Sinn mehr. Das Streu-Spektrum ist durch die Rayleigh-Streuung gegeben

$$\sigma_{scat}(\omega) = \frac{8\pi c_0^4 \omega^4}{3} R^6 \left| \frac{\epsilon^{(m)} - \epsilon^{(d)}}{\epsilon^{(m)} + 2\epsilon^{(d)}} \right|^2 \quad (8.47)$$

die wie erwartet eine Resonanz bei  $\omega_{PP}$  zeigt.

## Exzitonen in Halbleitern

Bereits bei der Einführung der Halbleiter hatten wir das Absorptionsspektrum besprochen und den Absorptionskoeffizient Gl. 5.8

$$\alpha(\omega_\gamma) \propto (m_{\text{komb}}^*)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega_\gamma - E_g} \quad (8.48)$$

gefunden. Die Absorption sollte also mit der Bandkante einsetzen und steil ansteigen.

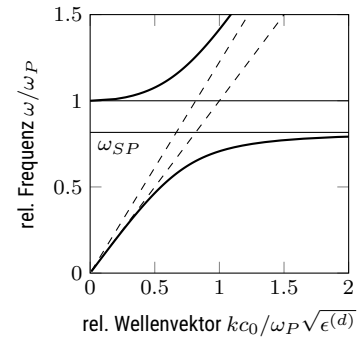


Abbildung 8.10: Dispersionsrelation eines Oberflächen-Plasmon-Polaritons.

Im Experiment findet sich aber insbesondere bei tiefen Temperaturen ein oder mehrere Peaks in der Absorption bereits bei etwas niedrigeren Energien. Der Grund dafür sind *Exzitonen*. Dies sind Quasiteilchen aus einem gebundenen Elektron-Loch-Paar. Bei der Beschreibung in Kapitel 5 hatten wir ja die Ein-Elektron-Näherung verwendet, also insbesondere Wechselwirkungen und Korrelationen zwischen Elektronen vernachlässigt. In dieser Näherung gibt es Exzitonen nicht.

Man unterscheidet stark gebundene Exzitonen, sogenannte Frenkel-Exzitonen, und schwach gebundene Wannier-Mott-Exzitonen. Der erste Fall tritt vorwiegend bei organischen Halbleitern mit kleiner dielektrischer Funktion auf. Hier sind Elektron und Loch am gleichen Gitterpunkt (= Molekül). Bei anorganischen Halbleitern ist die dielektrische Abschirmung zwischen Elektron und Loch viel größer ( $\epsilon \approx 10$ ), so dass die Bindung schwächer ist, typischerweise einige meV. Hier betrachten wir nur die Wannier-Mott-Exzitonen.

Nun erlauben wir also eine Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektronen und Löchern. Die Konsequenzen sind wie beim Wasserstoff-Atom oder bei der Dotierung: Elektron und Loch kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Die Aufteilung Relativ- und Schwerpunkt-Koordinaten liefert die Energien

$$E_{n,K} = E_g - E_x + E_{kin} = E_g - \frac{1}{2} \frac{\mu^* e^4}{(4\pi\epsilon\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} + \frac{\hbar^2 K^2}{2(m_e^* + m_h^*)} \quad (8.49)$$

mit der effektiven reduzierten Masse  $\mu^*$ , dem Schwerpunkts-Impuls  $K$  und der Quantenzahl  $n = 1, 2, \dots$ . Exzitonen-Zustände liegen also unterhalb der Bandkante und folgen der parabelförmigen Dispersionsrelation.

Wie bei den Cooper-Paaren muss man auch hier vorsichtig sein, wie man das darstellt. Exzitonen sind Zwei-Teilchen-Zustände, die man nicht in Ein-Teilchen-Dispersionsrelation von Elektronen und Löchern einzeichnen kann bzw. sollte. Man zeichnet also eine Zwei-Teilchen-Dispersionsrelation von unkorrelierten Elektronen und Löchern, mit der kombinierten effektiven Masse  $m_{\text{komb}}^*$  von oben und um die Exziton-Bindungsenergie  $E_x$  darunter die Parabeln der Exzitonen. Eine genauere Diskussion findet sich in Yu und Cardona, 2010.

Dies erklärt in erster Näherung die gemessenen Absorptionsspektren. Wenn man genauer hinschaut, dann sieht man, dass nicht nur exzitonische Peaks der direkten Absorption vorgelagert sind, sondern dass auch der eigentlich wurzelförmige Verlauf modifiziert wird. Dies ist eine Folge von den Exziton-Polaritonen. Wieder gibt es Hybride aus Exzitonen und Photonen und die Dispersionsrelation spaltet an den Kreuzungspunkten auf. Dadurch verändert sich das Absorptionsspektrum.<sup>6</sup>

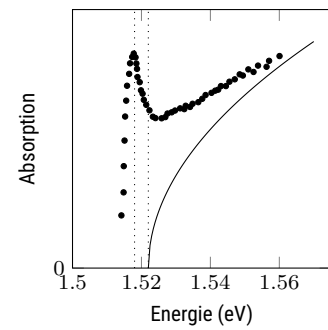


Abbildung 8.11: Absorption von GaAs bei 21 K, im Vergleich zum  $\sqrt{E - E_g}$ -Modell. Daten aus Sturge, 1962.

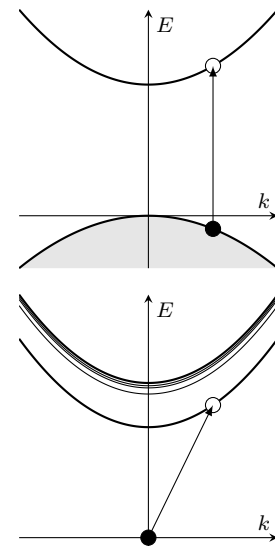


Abbildung 8.12: Einteilchen (oben) und Zweiteilchen (unten) Dispersionsrelation im Halbleiter. Unten sind die Exziton-Zustände eingezeichnet.

<sup>6</sup> siehe Yu und Cardona, 2010

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).
- Kojima, Seiji u. a. (2003). "Far-infrared phonon-polariton dispersion probed by terahertz time-domain spectroscopy". In: *Physical Review B* 67.3. [↗](#).
- Lippitz, Markus (2022). *Lecture notes 'Molekülphysik und Festkörperphysik I'*. Version v22.2. CC-BY-SA 4.0. [↗](#).
- Maier, Stefan A. (2007). *Plasmonics*. New York, NY: Springer. [↗](#).
- Powell, CJ und JB Swan (1959). "Origin of the characteristic electron energy losses in aluminum". In: *Physical Review* 115.4, S. 869. [↗](#).
- Spitzer, WG und HY Fan (1957). "Determination of optical constants and carrier effective mass of semiconductors". In: *Physical Review* 106.5, S. 882. [↗](#).
- Sturge, M.D. (1962). "Optical absorption of gallium arsenide between 0.6 and 2.75 eV". In: *Physical Review* 127.3, S. 768. [↗](#).
- Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [↗](#).



# Kapitel 9

## Nanostrukturen

Markus Lippitz  
10. Juli 2023

### Ziele

- Sie können Beispiele von durch reduzierte Dimensionalität verursachte Effekte der Festkörperphysik nennen, beschreiben und in groben Zügen erklären.
- Sie können erklären, wie es in einem Zwei-Niveau-System zum unten gezeigten *anti-bunching* im Photonenstrom kommt und Beispiele für die Anwendung dieses Phänomens nennen.

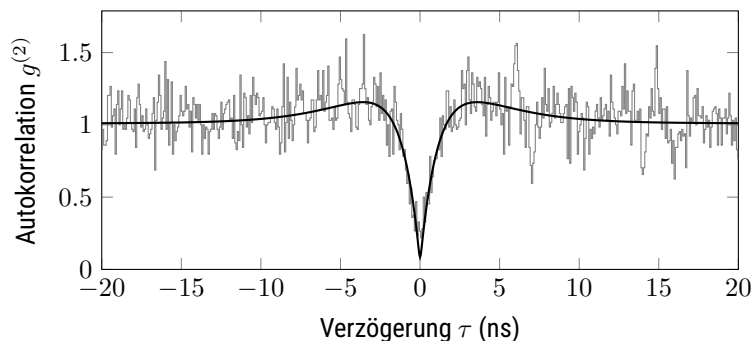


Abbildung 9.1: Photon-Antibunching eines GaAs Quantenpunkts. Das Modell berücksichtigt die Abweichung zum Zwei-Niveau-System. Daten ähnlich zu Wu u. a., 2017

### Überblick

In den letzten Kapiteln haben wir Festkörper besprochen, die in drei oder zumindest zwei Dimensionen unendlich ausgedehnt sind. Hier sollen Strukturen niedrigerer Dimension besprochen werden, nämlich null- oder eindimensionale Nanostrukturen. Das findet natürlich weiterhin in einem dreidimensionalen Raum statt, so dass die Ausdehnung in zwei oder drei Raumrichtungen 'klein' ist. Was als 'klein' gilt hängt vom betrachteten Phänomen ab, das eine charakteristische Längenskala besitzt. Typischerweise sind dies hier etwa 1 bis 100 nm.

Wir werden optische und elektronische Eigenschaften diskutieren, die durch die niedrige Dimensionalität verursacht werden. In anderen Fällen spie-



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons "Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International"](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) Lizenz.

len die Atome an der Oberfläche der Nanostruktur eine besondere Rolle, weil diese zum Beispiel weniger stark gebunden sind, oder weil sie besonders gute Katalysatoren sind. Bei Nanostrukturen gibt es besonders viel Oberfläche:

$$\frac{N_{\text{surface}}}{N_{\text{total}}} \approx \frac{3a}{R} \quad (9.1)$$

mit der Gitterkonstanten  $a$  und dem Kugelradius  $R$ . Bei einer Kugel von  $R = 1 \text{ nm}$  sind etwa 50 % der Atome an der Oberfläche!

## Herstellung von Nanostrukturen

Man unterscheidet generell zwei Wege zur Herstellung von Nanostrukturen. Im *top-down* Verfahren werden Strukturen von außen durch passende Maschinen quasi ingenieurwissenschaftlich vorgegeben. Beispiele sind die optische Lithographie oder die Elektronenstrahl-Lithographie. Dabei wird ein Lack durch Licht bzw. Elektronen belichtet und die so entstehenden Strukturen dann durch weitere Schritte (ätzen, aufdampfen, abscheiden) in das Ziel-Material übersetzt. Strukturgrößen sind durch die Strahlen auf ca. 10 nm (Elektronen) bzw. 100 nm (UV-Licht) gegeben. Im *bottom-up* Verfahren werden Nanostrukturen wie in der Chemie synthetisiert. Atome beginnen in einem Lösemittel beispielsweise Kristallite zu bilden, die dann wachsen. Wenn man die Randbedingungen passend einstellt, können verschiedenen Formen entstehen (Kugel, Stäbchen, Platten). Die Reaktion bricht ab, wenn das Ausgangsmaterial aufgebraucht ist oder beispielsweise die Temperatur geändert wird. Dieser Ansatz erlaubt sehr kleine Strukturen. Ordnung auf langen Skalen (ca.  $> 100 \text{ nm}$ ) ist aber schwierig zu erreichen.

## Zweidimensionales Elektronengas

Insbesondere für elektrische Messungen an niedrigdimensionalen Halbleiter-Strukturen ist das zweidimensionale Elektronengas (2DEG) von besonderer Bedeutung. Man schränkt damit die freien Elektronen in einem Halbleiter zunächst einmal auf zwei Dimensionen ein, um dann in weiteren Schritten zu noch kleineren Strukturen überzugehen. Die Grundidee ist, an einer Grenzfläche gleichzeitig die Dotierung und die Bandlücke zu ändern. Dies ist in Abb. 9.2 dargestellt. Links befindet sich ein nur schwach dotiertes Material mit kleiner Bandlücke, so dass sich das Fermi-Niveau in der Mitte der Lücke befindet. Rechts verwendet man ein Material mit größerer Bandlücke, das stark n-dotiert ist, das Fermi-Niveau sich also in der Nähe des Leitungsbands befindet. Dann bewirkt die Ladungsträger-Diffusion wie beim pn-Übergang eine Verbiegung des Bandes. Zusammen mit der abrupten Änderung der Bandlücke führt dies dazu, dass ein in eine Dimension kleiner Bereich unter das Fermi-Niveau fällt. Dort befindet sich also metallische Elektronen. Die Ausdehnung in Wachstumsrichtung ist allein durch die Materialparameter gegeben, nicht durch technische Strukturgrößen. So können sehr dünne, also zweidimensionale Elektronengase hergestellt werden.

Im nächsten Schritt schneidet man aus diesem 2d Elektronengas willkürliche Formen aus, in dem man Elektroden auf der Oberfläche des Halbleiters durch Nanostrukturierung anbringt. Diese bilden zusammen mit einem im

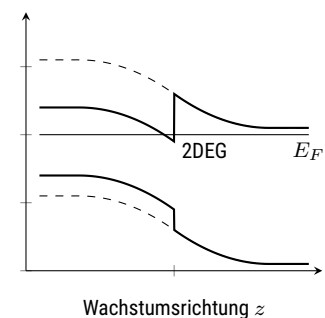


Abbildung 9.2: Am Übergang zwischen zwei Halbleitern verschiedener Bandlücke und Dotierung bildet sich ein 2DEG.

Vergleich zu Abb. 9.2 tiefer in der Probe liegenden Bereich eine Art Plattenkondensator, mit dem die Energie der Elektronen im 2DEG angehoben oder abgesenkt werden kann. Insbesondere kann so an manchen Positionen das 2DEG komplett über das Fermi-Niveau angehoben also beseitigt werden. Auf diese Weise können beliebige Drähte, Punkte und Kontakte aus dem 2DEG ausgeschnitten werden.

## Elektronische Struktur von eindimensionalen Drähten

Wir betrachten einen dünnen metallischen Draht, beispielsweise aus einem 2deg 'ausgeschnitten'. Dünn bedeutet, dass seine Ausdehnung in  $xy$ -Richtung vergleichbar mit der de Broglie-Wellenlänge der Elektronen ist, also nur wenige Nanometer beträgt. In diese Richtung nimmt die Elektronen-Wellenfunktion dann die Form von stehenden Wellen an. Die Quantenzahlen sind die Anzahl der Knoten  $i$  und  $j$  in  $x$  und  $y$ -Richtung und  $E_{ij}$  die zugehörige Energie. In Richtung des Drahtes sind die Elektronen nicht eingeschränkt und weiterhin durch ebene Wellen und deren kinetische Energie beschrieben. Gesamtenergie und Wellenfunktion sind

$$E_{\text{ges}} = E_{ij} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{und} \quad \Psi(x, y, z) = \Psi_{ij}(x, y) e^{ikz} . \quad (9.2)$$

Das hatten wir bereits völlig analog in Kapitel 4 im Zusammenhang mit den Landau-Zylindern gesehen, nur dass dort die Quantisierung in  $xy$ -Richtung durch das Magnetfeld bewirkt wurde. Die Dispersionsrelation ist darum ebenfalls eine Schar von um  $E_{ij}$  versetzte Parabeln und die Zustandsdichte

$$D(E)^{(1)} = \frac{2}{\hbar} \frac{L}{2\pi} \sum_{ij} \sqrt{\frac{2m}{E - E_{ij}}} \Theta(E - E_{ij}) = \frac{4L}{\hbar} \sum_{ij} \frac{1}{v_{ij}} \Theta(E - E_{ij}) \quad (9.3)$$

mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_{ij}$

$$v_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{(E - E_{ij}) \frac{2}{m}} . \quad (9.4)$$

In einer Dimension ist die Zustandsdichte also reziprok zur Gruppengeschwindigkeit und divergiert bei den  $E_{ij}$ . Diese charakteristische Form der Zustandsdichte kann man beispielsweise durch Tunnelspektroskopie in Kohlenstoff-Nanoröhrchen (CNT) nachweisen.

## Quantisierung der Leitfähigkeit

Nun kontaktieren wir solch einen eindimensionalen metallischen Draht der Länge  $L$  an beiden Seiten mit 'normalen' dreidimensionalen Leitern, die als Elektronen-Reservoirs bei den Fermi-Energie  $E_{F,1}$  und  $E_{F,2}$  dienen.<sup>1</sup> Die Länge des Drahts  $L$  sei kleiner als die mittlere freie Weglänge der Elektronen. Dadurch stoßen die Elektronen im Draht nicht. Jedes Elektron, dass links eintritt, verlässt den Draht recht mit Sicherheit. Dies nennt man *ballistischen Transport*. Wegen der fehlenden Streuung sind die Elektronen auf ihrem Weg durch den Draht auch nicht im thermischen Gleichgewicht. Sie behalten daher die Fermi-Energie des Reservoirs, von dem sie stammen, und die

<sup>1</sup> siehe Kap. 7.5.1 in Gross und Marx, 2023 oder Kap. 18 in Charles Kittel, 2006

Potentialdifferenz  $eU = E_{F,1} - E_{F,2}$  fällt an den Kontakten Draht-Reservoir ab. Schließlich nehmen wir noch an, dass der Draht so dünn ist, dass nur die niedrigste Parabel in der Zustandsdichte besetzt ist und so die Summe über  $ij$  wegfallen kann.

Der Strom durch den Draht von links nach rechts ist mit der mittleren Gruppengeschwindigkeit  $\langle v \rangle$

$$I_{LR} = -en \langle v \rangle = -\frac{e}{2L} \int_0^\infty v(E) D(E) f(E - E_F) dE \quad (9.5)$$

$$= -\frac{2e}{h} \int_0^\infty f(E - E_F) dE \quad , \quad (9.6)$$

wobei ein Faktor  $1/2$  in der Zustandsdichte nur die von links nach rechts zeigenden Wellenvektoren berücksichtigt.<sup>2</sup> Der Gesamtstrom ist die Differenz der gegenläufigen Ströme, die aber eine unterschiedliche Fermi-Energie besitzen:

$$I = -\frac{2e}{h} \int_0^\infty f(E - E_{F,1}) - f(E - E_{F,2}) dE = \frac{2e^2}{h} U = \frac{2}{R_K} U \quad , \quad (9.7)$$

wobei das Integral über die Differenz der leicht verschiedenen Fermi-Funktionen gerade  $-eU$  ergibt. Damit haben wir wieder das Widerstands-Quantum oder von Klitzing-Konstante  $R_K$  gefunden, die wir beim Quanten-Hall-Effekt schon gesehen hatten

$$R_K = 25\,812.807 \dots \Omega \quad . \quad (9.8)$$

Zur Bestimmung von  $R_K$  bzw.  $2e^2/h$  braucht es also kein hohes Magnetfeld. Ein eindimensionaler Leiter reicht aus. Weil ohne Magnetfeld aber die Spins entartet sind, tritt ein zusätzlicher Faktor 2 in Gl. 9.7 auf. Wenn die Wahrscheinlichkeit der Transmission eines Elektrons durch den Draht nicht genau eins sondern  $\mathcal{T}$  ist, also Elektronen auch an den Kontakten reflektiert werden, dann ist der Widerstand

$$R = \frac{R_K}{\mathcal{T}} \quad . \quad (9.9)$$

## Resonantes Tunneln

Bislang war der eindimensionale Leiter an beiden Enden ideal kontaktiert. Nun nehmen wir an, dass die Kontakte durch Tunneln von Elektronen durch beispielsweise eine dünne Oxidschicht gebildet werden. In diesem Abschnitt nehmen wir wie oben an, dass die Elektronen im dünnen Draht nicht streuen, also durch eine kohärente Wellenfunktion beschrieben werden können. Da Wellenfunktionen und elektromagnetische Wellen sich sehr ähnlich verhalten ist der Weg und das Ergebnis identisch zum Fabry-Perot-Interferometer.

Wir beschreiben das Tunneln der Elektronen durch die dünne Isolatorschicht durch einen komplexwertigen Transmissionskoeffizienten  $t_i$  ( $i = 1, 2$ ) der Wellenfunktion. Analog gibt es einen komplexwertigen Reflexionskoeffizienten  $r_i$ . Da aber nicht Amplituden von Wellenfunktionen, sondern nur deren Quadrate physikalische Bedeutung haben, gilt nicht  $r_t + t_i = 1$ , sondern

$$|r_i|^2 + |t_i|^2 = 1 \quad . \quad (9.10)$$

<sup>2</sup> und  $n = N/L$  sowie  $\langle v \rangle = (1/N) \int v$

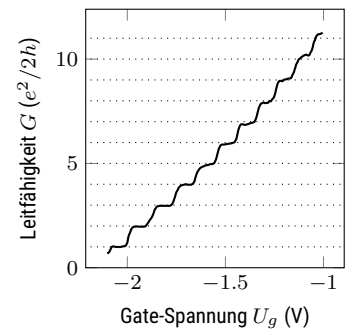


Abbildung 9.3: Quantisierung der Leitfähigkeit in einem dünnen Kanal. Daten aus Van Wees u. a., 1988

Wir setzen die Amplitude der von links einlaufenden Welle auf eins. Die direkt durch beide Barrieren transmittierte Welle hat die komplexwertige Amplitude

$$a_{\text{dir}} = t_1 t_2 e^{i\phi/2} \quad \text{mit} \quad \phi = 2kL, \quad (9.11)$$

wobei  $\phi$  die Phase aufgrund der Propagation beschreibt. Nun kann die Welle nicht nur direkt transmittiert werden, sondern zusätzlich auch noch zuerst an der zweiten und dann an der ersten Barriere reflektiert werden, was einem zusätzlichen Umlauf entspricht. Ebenso gibt es Pfade mit zwei, drei, vier etc. Umläufen. Jeder Pfad beinhaltet also  $n$  Reflexionen an jeder Barriere und eine Transmission durch jede Barriere. In Summe ist das also

$$a_{\text{ges}} = t_1 t_2 e^{i\phi/2} (1 + r_1 r_2 e^{i\phi} + (r_1 r_2 e^{i\phi})^2 + \dots) \quad (9.12)$$

$$= \frac{t_1 t_2 e^{i\phi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}}. \quad (9.13)$$

Die Transmissionswahrscheinlichkeit für Elektronen ist das Betragsquadrat von  $a_{\text{ges}}$

$$\mathcal{T} = |a_{\text{ges}}|^2 = \frac{|t_1|^2 |t_2|^2}{1 + |r_1|^2 |r_2|^2 - 2|r_1||r_2|\cos\phi^*} \quad (9.14)$$

mit  $\phi^* = \phi + \arg r_1 + \arg r_2$ . Die effektive Phase ist also die Summe aus der geometrischen Phase ( $\phi = 2kL$ ) und den aus den komplexwertigen<sup>3</sup> Reflexionskoeffizienten  $r_i$ .

<sup>3</sup>  $\arg(ae^{ib}) = b$  für reelwertige  $a, b$ .

Die Transmission kommt zu einem Maximum, wenn die effektive Phase  $\phi^*$  gerade ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Falls beide Barrieren gleich sind, also  $t_1 = t_2$ , dann ist

$$\mathcal{T}(\phi^* = 2\pi n) = \frac{|t_1|^4}{(1 - |r_1|^2)^2} = 1. \quad (9.15)$$

Obwohl die Transmission durch jede einzelne Barriere mit einer Wahrscheinlichkeit (deutlich) kleiner als Eins erfolgt, ist die Transmission durch beide Barrieren zusammen perfekt. Dies nennt man *resonantes Tunneln*.

Die Resonanzbedingung

$$\phi^* = 2\pi n = \phi + \arg r_1 + \arg r_2 = 2kL + \arg r_1 + \arg r_2 \quad (9.16)$$

ist bei gegebener Struktur eine Bedingung an den Wellenvektor  $k$ . Wenn  $k$  so ist, dass eine stehende Welle zwischen den beiden Barrieren entsteht, dann wird die Transmission maximal. Wir können die stehende Welle als Teilchen im Kasten sehen. Das bedeutet, dass es für gewisse  $k$  und damit gewissen Energien Zustände in diesem Kasten (Draht-Stück) gibt. Tunneln ist dann besonders effizient, wenn es 'innen' gerade einen Zustand passender Energie gibt.

## Resonante Tunneliodiode

Für das resonante Tunneln war es nicht notwendig, dass das Material zwischen den beiden Tunnel-Kontakten eindimensional ist. Es muss nur kurz genug sein, damit die Quantisierung von  $k$  relevante Energien liefert. Und es muss kalt und störstellenfrei sein, damit sich eine kohärente Wellenfunktion ausbildet.

Eine Möglichkeit der Realisierung sind Halbleiter-Heterostrukturen, also Halbleiter, deren Zusammensetzung und Dotierung sich in eine Raumrichtung (die Wachstumsrichtung) ändert. Resonante Tunneldioden wurden durch Esaki und Tsu realisiert (Model: Tsu und Esaki, 1973, Experiment: Chang, Esaki und Tsu, 1974). Eine stark n-dotierte Schicht GaAs bildet die beiden quasi metallischen Kontakte nach außen. Das Fermi-Niveau liegt hier nahe an der Bandkante. Den Isolator für die Tunnelkontakte bildet ein dünner (80 Å) Bereich aus AlGaAs, das eine größere Bandlücke besitzt und so für die Elektronen eine Barriere von 0.4 eV bildet. In der Mitte befindet sich wieder GaAs mit einer geringeren Dotierung. Die Breite von 50 Å ist so eingestellt, dass sich zwei Zustände  $E_1 = 78 \text{ meV}$  und  $E_2 = 285 \text{ meV}$  über der Bandkante bilden.

Nun wird außen eine Potentialdifferenz  $U$  angelegt. Das Potential fällt jeweils über die Barrieren ab, aber nicht über den mittleren Bereich, weil dort die Wellenfunktion ja kohärent sein soll. Aus Symmetriegründen ist der Kasten energetisch also genau in der Mitte zwischen den beiden Kontakten, also um  $eU/2$  gegenüber jedem verschoben. Es kommt zur Resonanz im Tunnelstrom, wenn

$$\frac{eU}{2} = E_i \quad \text{bzw.} \quad U = \frac{2E_i}{e} . \quad (9.17)$$

Abbildung 9.4 zeigt die Daten als Tunnelstrom  $I$  und Leitwert  $G \propto dI/dV$ . In diesen ersten Experimenten ist dem Effekt noch ein zusätzlicher Tunnelstrom überlagert. Das resonante Tunneln bewirkt die scharfen Minima im Leitwert  $G$ . Diese wären eigentlich bei  $U_1 = \pm 0.16 \text{ V}$  und  $U_2 = \pm 0.56 \text{ V}$  zu erwarten, hier aber zu etwas positiveren Werten verschoben.

Technologisch relevant ist der negative differentielle Widerstand. Wenn man ausgehend von der Resonanz im Tunnelstrom die angelegte Potentialdifferenz weiter erhöht, dann wird der Strom geringer. Der Widerstand als lokale Ableitung von Spannung nach Strom (daher 'differentiell') ist hier negativ. Dies kann benutzt werden, um interne Widerstände in Oszillator-Schaltkreisen zu kompensieren. Da Tunneln instantan ist, sind Tunneldioden sehr schnell. So können Hochfrequenz-Oszillatoren aufgebaut werden.

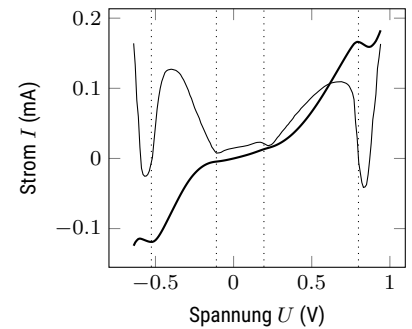


Abbildung 9.4: Resonantes Tunneln (fett) durch eine Doppel-Barriere in AlGaAs/GaAs. Der Leitwert  $G \propto dI/dV$  ist dünn gezeichnet und willkürlich skaliert. Daten aus Chang, Esaki und Tsu, 1974.

## Coulomb-Blockade

Wir betrachten noch eine weitere Variation des Themas 'kleiner Leiter mit Kontakten'. Bislang hatten wir gefordert, dass im Leiter eine kohärente Wellenfunktion der Elektronen vorliegen soll, er also klein und störstellenfrei sein muss. Diese Anforderung an die Kohärenz lassen wir nun fallen. Wir betrachten eine kleine metallische Insel, die über zwei Tunnelkontakte mit makroskopischen Leitern verbunden ist. Das ist wie bei dem Experiment von Esaki und Tsu, nur dass hier die Kleinheit wichtig, die Kohärenz aber nicht notwendig ist.

In diesem Fall können wir die kleine metallische Insel als Kondensator-Kugel auffassen, auf die wir Ladung bringen können. Die elektrostatische Energie der Insel ist

$$E = \frac{Q^2}{2C} - QU_G \quad (9.18)$$

mit der Ladung  $Q$ , der Kapazität  $C$  und dem Potential am Boden des Topfes  $U_G$  (wie Gate-Spannung). Wir zählen die Elektronen ( $Q = Ne$ ) und ignorieren alle Terme, die von  $N$  unabhängig sind. Damit erhalten wir

$$E(N) = E_c \left( N - \frac{CU_G}{e} \right)^2 \quad \text{mit} \quad E_c = \frac{e^2}{2C} \quad . \quad (9.19)$$

Wir finden also wieder eine Sequenz von diskreten Zuständen auf der Insel. Damit deren energetische Abstand relevant wird, muss die Kapazität  $C$  klein genug ( $\approx 1$  fF) und die Temperatur niedrig genug ( $\approx 1$  K) sein. Das erreicht man mit metallischen Inseln von etwa 100 nm Größe. Die charakteristische Energie  $E_c$  liegt dann bei etwa 100  $\mu$ eV.

Der Effekt ist rein klassisch. Wenn bereits eine passende Anzahl Elektronen auf der Insel sind, dann liegt der nächste Zustand höher als die Fermi-Energie der Zuleitungen und kann nicht erreicht werden. Die Elektronen blockierten sich gegenseitig durch Coulomb-Abstoßung. Auf diese Weise kann man beispielsweise Elektronen zählen, in dem man schrittweise die Gate-Spannung  $U_g$  und damit die zugänglichen Zustände auf der Insel verändert.

## Optische Eigenschaften von Quantenpunkten

Als zweite Kategorie von Experimenten sollen hier die optischen Eigenschaften von Quantenpunkten besprochen werden. Quantenpunkte sind quasi nulldimensionale Einschlüsse eines Halbleiters mit einer kleinen Bandlücke in einer umgebenden Matrix, die aus einem Halbleiter mit größeren Bandlücke gebildet wird. Dadurch erhält man ein 'Teilchen im Kasten' für elektronische Zustände. Die Herstellung erfolgt durch Epitaxie, also der Abscheidung eines kristallinen Films auf einem kristallinen Substrat. Dazu wird ein Substrat, typischerweise der 'äußere' Halbleiter, in einem sehr guten Vakuum (UHV,  $10^{-9}$  Pa) mit dem anderen Halbleiter bedampft. Es bildet sich ein wenige Atomlagen dicker Film, der auf verschiedene Weisen die Oberfläche benetzt. Je nach Oberflächen- und Grenzflächenspannung unterscheidet man drei Fälle:

**Frank-van der Merwe Wachstum** Das aufgebrachte Material benutzt das Substrat vollständig und es bildet sich ein glatter Film.

**Volmer-Weber Wachstum** Das aufgebrachte Material bildet Tröpfchen auf der Oberfläche, um so den Kontakt mit dem Substrat zu reduzieren.

**Stranki-Krastanow Wachstum** Zunächst bildet sich ein wenige Monolagen dicker Film. Weil aber die Gitterkonstante der Materialien verschieden ist, ist es bald energetisch günstiger, Tröpfchen zu bilden.

In sehr vielen Fällen wird Stranki-Krastanow Wachstum verwendet. Man kann aber auch erst eine Art Opfer-Tröpfchen wachsen, dann die Zwischenräume füllen, die Opfer-Tröpfchen durch Ätzen wieder entfernen und in die sich so ergebenden Vertiefungen die eigentlichen Quantenpunkte wachsen lassen.

Sowohl die Bandlücke als auch die Gitterkonstante von Halbleitern unterscheiden sich. Wir betrachten hier Systeme aus AlAs und GaAs. Beide haben eine ähnliche Gitterkonstante aber eine andere Bandlücke: 1.42 eV (GaAs) bzw. 2.16 eV (AlAs). Durch die Zusammensetzung  $x$  in  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  lassen sich Zwischenwerte in der Bandlücke einstellen. So entsteht also ein 'Teilchen im Kasten'.

Wie beim Atom nennt man die Zustände energetisch aufsteigend s, p, d, etc. Der s-Zustand kann zwei Elektronen unterschiedlichen Spins aufnehmen. Man unterscheidet daher zwei Exzitonen  $|01\rangle$  und  $|10\rangle$ . Den durch zwei Elektronen besetzten Zustand nennt man Biexziton<sup>4</sup>  $|11\rangle$ . Dies ist gebundener Zustand aus zwei Exzitonen und liegt um die Bindungsenergie  $\Delta E_{XX}$  unter der Summe der beiden Exziton-Anregungsenergien. Die beiden Exziton-Übergänge unterscheiden sich in ihrer Polarisationsrichtung und leicht in der Anregungsenergie aufgrund der Feinstruktur-Aufspaltung.

### Zur Selbstkontrolle

1. Suchen Sie im Internet oder Lehrbüchern nach grafischen Darstellungen der drei Wachstumsarten.

## Einzelphotonenquelle

Obwohl wir bereits vier<sup>5</sup> Zustände eingeführt haben und es noch viele weitere gibt, kann man durch passende Wahl der Anregungs-Wellenlänge und -Leistung und ggf. einem spektralen Filter in der Detektion den Quantenpunkt als *Zwei-Niveau-System* betrachten. Dies gilt ebenso für Atome und Farbstoff-Moleküle. Eine wichtige Eigenschaft von optischen Zwei-Niveau-Systemen ist, dass sie Einzelphotonenquellen sind. Ein solches System kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt nur ein einziges Photon emittieren. Direkt nach der Emission ist das System bestimmt im Grundzustand, weil es ja keine weiteren Zustände gibt. Aus dem Grundzustand heraus kann aber nicht emittiert werden, weil dies der energetisch niedrigste Zustand ist. Also vergeht bis zur nächsten Emission mindestens der Zeitraum, der zur erneuten Anregung notwendig ist.

Ein Laser hingegen ist keine Einzelphotonenquelle. Die Wahrscheinlichkeit,  $n$  Photonen in einem Zeitintervall  $T$  zu detektieren, ist bei kohärentem Licht Poisson-verteilt, also

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (9.20)$$

wobei  $\lambda$  hier nicht die Wellenlänge, sondern die mittlere Photonenzahl im Intervall  $T$  bezeichnet. Unabhängig von  $\lambda$  ist  $P(n > 1)$  nie Null. Egal wie sehr man einen Laser abschwächt, egal wie kurz man  $T$  wählt, es gibt immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit, zwei oder mehr Photonen zu detektieren. Genau das ist bei einer Einzelphotonenquelle nicht der Fall.

Einzelphotonenquelle zeigen also keine Poisson-Verteilung in der Photonenzahlstatistik, sondern *antibunching*. Kurze Zeitabstände kommen seltener vor, als nach der Poisson-Verteilung erwartet. Glühlampen-Licht zeigt das Gegenteil: *bunching*. Hier kommen kurze Abstände häufiger vor als in Laser-Licht gleicher Intensität.

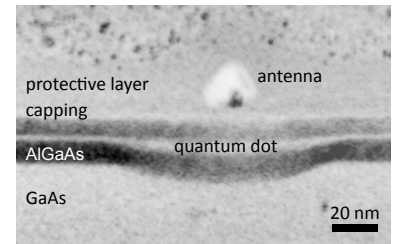


Abbildung 9.5: TEM-Querschnitt durch einen Quantenpunkte (hier mit plasmonischer Antenne). Daten aus Pfeiffer u. a., 2014.

<sup>4</sup> Man kürzt auch ab: Exziton (X) und Biexziton (XX).

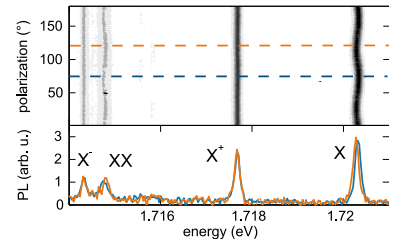


Abbildung 9.6: Emissionsspektren eines GaAs Quantenpunkts als Funktion der Polarisationsrichtung in der Detektion. Daten aus Wolpert u. a., 2012.

<sup>5</sup> mit dem Grundzustand  $|00\rangle$



Die Methode der Wahl zur Beschreibung dieses Phänomens ist die Intensitäts-Autokorrelation. Man vergleicht die Intensität  $I(t) \propto |E(t)|^2$  eines Lichtstrahls zu Zeitpunkt  $t$  dem der um die Zeit  $\tau$  verschoben:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{G(\tau)}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (9.21)$$

wobei wir angenommen haben, dass  $\langle I(t) \rangle$  konstant ist, die Intensität sich also auf langsamen Zeitskalen nicht ändert. Der Index (2) verweist auf das Quadrat des elektrischen Feldes.  $G(\tau)$  ist nicht-normierte Korrelationsfunktion, also die Häufigkeit, mit der zwei Photonen im Abstand  $\tau$  zu finden sind. Für kohärentes Licht ist

$$g_{\text{kohärent}}^{(2)}(\tau) = 1 \quad (9.22)$$

Man kann  $I(t)$  für Licht bestimmen, in dem man Photonen innerhalb eines kurzen Intervalls  $T$  zählt und dann  $g^{(2)}(\tau)$  mit der Zählrate  $n(t)$  schreibt. Um antibunching zu detektieren, muss  $T$  dann aber sehr klein sein (ca. 100 ps). Gleichzeitig erfordert die Mittelung eine lange Gesamtzeit, also sehr viele Daten. Das ist in aktuellen Experimenten möglich. Datensparsamer und daher früher verwendet ist die Näherung, nicht beliebige Paare von Photonen in  $G(\tau)$  zu betrachten, sondern nur Paare von zeitlich aufeinander folgenden Photonen, die mit der Häufigkeit  $C(\tau)$  auftreten. Diese Größen sind miteinander verknüpft:

$$G(\tau) = C(\tau) + \int_0^\tau C(\tau')C(\tau - \tau')d\tau' + \dots \quad (9.23)$$

Das Integral behandelt dabei alle Fälle, bei denen genau ein Photon zum Zeitpunkt  $\tau'$  zwischen den Photonen-Paar in  $G(\tau)$  ist. Weitere Doppel-, Dreifach- etc. Integrale würden dann zwei, drei etc. Photonen dazwischen beschreiben. Falls die Photonen-Rate klein genug bzw. die interessierende Zeit  $\tau$  kurz genug ist, können wir  $G(\tau) \approx C(\tau)$  annehmen.

Diese Abstände zwischen zeitlich benachbarten Photonen-Paaren bestimmt man durch ein Experiment, das nach Robert Hanbury Brown und Richard Q. Twiss HBT-Experiment genannt wird. Abbildung 9.7 zeigt eine Skizze. Aufgrund der Totzeit nach der Detektion eines Photons in einem Detektor kann man kleine Abstände nicht mit einem einzigen Detektor messen. Man teilt den Photonenstrom auf zwei Detektoren auf und bestimmt die Verteilung der zeitlichen Abstände von Detektionsereignissen.

Für ein Zwei-Niveau-System lässt sich  $C(\tau)$  leicht bestimmen. Direkt nach dem ersten Photon ist man mit absoluter Sicherheit im Grundzustand. In den angeregten Zustand kommt man mit der Anregungsrate  $W_P$ , von dort wieder zurück in den Grundzustand mit der Rate  $\Gamma$  der spontanen Emission. Die charakteristische Zeit  $t_d$  ist das Reziproke der Gesamt-Rate für einen Zyklus

$$t_d = \frac{1}{W_P + \Gamma} \quad \text{und so} \quad g_{\text{TLS}}^{(2)}(\tau) \approx 1 - ae^{-\tau/t_d} \quad (9.24)$$

Die Amplitude  $a$  ist im idealen Fall  $a = 1$ . In Wirklichkeit bewirken Dunkelrauschen und Hintergrund-Photonen  $a < 1$ . Der Fall  $a > 0.5$  kann aber nur durch eine Einzelphotonenquelle bzw. einen einzelnen Zwei-Niveau-System erzeugt werden kann.

Ein solches Experiment ist in Abb. 9.1 am Anfang des Kapitels für einen GaAs Quantenpunkt gezeigt. Die optische Anregung erfolgte hier über den

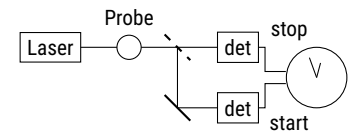


Abbildung 9.7: Hanbury Brown-Twiss Experiment. Man bestimmt den zeitlichen Abstand  $\tau$  zwischen zwei Photonen.

umgebenden Halbleiter, nicht direkt über das Exziton. Dies führt zu den 'Überschwingern' mit  $g > 1$ , die im Modell berücksichtigt sind.

## Quantum Key Distribution

Eine zunehmend auch technologisch wichtige Anwendung von Einzelphotonenquellen ist die quantenmechanisch sichere Übermittlung eines Chiffrierschlüssels. Es existieren verschiedene Arten zur Verschlüsselung von Nachrichten. Man kann beispielsweise ausnutzen, dass eine große Zahl nur aufwändig in ihre Primfaktoren zerlegt werden kann, der umgekehrte Weg aber einfach ist. Wie kompliziert das Brechen der Verschlüsselung aber ist hängt von den zu Verfügung stehenden Technologien ab und ist für die Zukunft evtl. schwer vorherzusagen. Eine niemals zu brechende Verschlüsselung ist die exklusiv-oder-Verknüpfung (XOR) des Ausgangstextes mit einem Schlüssel, der genauso lang ist wie die Nachricht und niemals wieder verwendet wird. Diesen Schlüssel nennt man 'One-Time-Pad'. Der Empfänger braucht denselben Schlüssel, führt wieder eine XOR-Operation mit der chiffrierten Nachricht durch, und erhält den Klartext. Damit hat man das Problem der Verschlüsselung aber nur verwandelt in das Problem der Übertragung des Schlüssels. Man könnte beispielsweise Datenträger mit dem (sehr langen) Schlüssel vorab mit einem vertrauenswürdigen Boten verteilen.

Hier kommt Quantum Key Distribution ins Spiel. Man verteilt den Schlüssel in Form einzelner Photonen, so dass Sender (Alice) und Empfänger (Bob) später beide denselben Schlüssel verwenden können. Die chiffrierte Nachricht kann dann über einen normalen Kanal übermittelt werden.

Ich beschreibe hier das BB84-Protokoll<sup>6</sup> von Charles Bennett und Gilles Brassard. Wir benutzen vier lineare Polarisationszustände von Licht: horizontal ( $|h\rangle$ ) und vertikal ( $|v\rangle$ ), diagonal ( $|+\rangle$ ) und anti-diagonal ( $|-\rangle$ ). Die sind nicht unabhängig voneinander, aber  $|h\rangle$  und  $|v\rangle$  sowie  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  bilden eine Basis. Alice sendet jetzt Photonen an Bob und wählt für jedes Photon zufällig einen der vier Zustände. Bob weiß davon nichts, entscheidet sich zufällig für eine der beiden Basen, und misst in dieser Basis den Polarisationszustand des ankommenden Photons, beispielsweise mit einem Polarisations-Strahlteiler und zwei Photodetektor. Die Wahl der Basen könnte über eine passend gedrehte Wellenplatte erfolgen. Wenn Alice und Bob mit Senden und Messen fertig sind, dann übermittelt Alice über einen offenen Kanal die von ihr gewählte Basis, nicht den Polarisationszustand. Bob vergleicht dies mit seiner Liste und teilt Alice ebenfalls per offenen Kanal mit, wann sie übereinstimmend gewählt haben. Beide streichen die anderen Photonen. Nun haben beide aber eine Liste von Polarisationszuständen, die Bob in der gleichen Basis gemessen hat, in der Alice gesendet hat. Der Zustand ist jetzt ein Bit des Schlüssels.

Hierzu sind unabdingbar einzelne Photonen erforderlich. Andernfalls könnte die lauschende Eve einen Teil des Strahls abfangen und selbst messen, womöglich gar in beiden Basen gleichzeitig. Nur wenn es ein einziges Photon ist, dann ist sicher, dass die Messung den Zustand zerstört und dieser nicht ein zweites Mal gemessen werden kann.

<sup>6</sup> siehe auch Kap. 11.8.2 in Gerry und Knight, 2005, Original in Bennett und Brassard, 2014.

## Zusammenfassung

Schreiben Sie hier ihre persönliche Zusammenfassung des Kapitels auf. Konzentrieren Sie sich auf die wichtigsten Aspekte und die am Anfang genannten Ziele des Kapitels.

## Literatur

- Bennett, Charles H. und Gilles Brassard (2014). "Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing [reprint]". In: *Theoretical Computer Science* 560, S. 7–11. [↗](#).
- Chang, L. L., L. Esaki und R. Tsu (1974). "Resonant tunneling in semiconductor double barriers". In: *Appl. Phys. Lett.* 24.12, S. 593–595. [↗](#).
- Gerry, Christopher C. und Peter L. Knight (2005). *Introductory quantum optics*. 1. publ. Cambridge Univ. Press. [↗](#).
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#).
- Kittel, Charles (2006). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Siegfried Hunklinger. 14. Oldenbourg.
- Pfeiffer, Markus u. a. (2014). "Eleven Nanometer Alignment Precision of a Plasmonic Nanoantenna with a Self-Assembled GaAs Quantum Dot". In: *Nano Letters* 14.1, S. 197–201. [↗](#).
- Tsu, R. und L. Esaki (1973). "Tunneling in a finite superlattice". In: *Appl. Phys. Lett.* 22.11, S. 562–564. [↗](#).
- Van Wees, BJ u. a. (1988). "Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas". In: *Phys. Rev. Lett.* 60.9, S. 848. [↗](#).
- Wolpert, Christian u. a. (2012). "Ultrafast coherent spectroscopy of a single self-assembled quantum dot". In: *physica status solidi (b)* 249.4, S. 721–730. [↗](#).
- Wu, Xiaofei u. a. (2017). "On-Chip Single-Plasmon Nanocircuit Driven by a Self-Assembled Quantum Dot". In: *Nano Letters* 17.7, S. 4291–4296. [↗](#).



# Anhang



# Anhang A

## Fourier-Transformation

Markus Lippitz  
17. Februar 2022

### Überblick

Der reziproke Raum in der Festkörperphysik ist die Fourier-Transformierte des Realraums. Es ist daher sinnvoll und hilfreich, einen intuitiven Zugang zur Fourier-Transformation zu haben. Im Endeffekt muss man in der Experimentalphysik nur selten eine Fourier-Transformation wirklich ausrechnen. Sehr oft reicht es, ein paar oft vorkommende Fourier-Paare zu kennen und diese mit einfachen Regeln zu kombinieren. Dies möchte ich hier kurz vorstellen. Eine sehr schöne und viel detailliertere Darstellung findet sich in Butz, 2011. Ich folge hier seiner Notation.

Bevor wir zu den Fourier-Paaren kommen, müssen allerdings doch erst ein paar Grundlagen gelegt werden.

### Fourier-Reihen: eine periodische Funktion und deren Fourier-Koeffizienten

Wir betrachten hier alles erst einmal eindimensional im Zeit- bzw. Frequenzraum mit den Variablen  $t$  und  $\omega = 2\pi\nu$ . Die Funktion  $f(t)$  sei periodisch in der Zeit mit der Periodendauer  $T$ , also

$$f(t) = f(t + T) \quad (\text{A.1})$$

Dann kann man diese als Fourier-Reihe schreiben

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t} \quad \text{mit} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (\text{A.2})$$

und den Fourier-Koeffizienten

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (\text{A.3})$$

Man beachte das negative Vorzeichen in der Exponentialfunktion im Gegensatz zur Gleichung davor. Für reellwertige Funktionen  $f(t)$  sind 'gegenüberliegende'  $C_k$  konjugiert-komplex, also  $C_k = C_{-k}^*$ . Für  $k < 0$  sind die Frequenzen  $\omega_k$  negativ, was aber kein Problem darstellt.<sup>1</sup> Der nullte Koeffizient  $C_0$  ist also gerade der zeitliche Mittelwert der Funktion  $f(t)$ .

<sup>1</sup> Man könnte alternativ  $k \geq 0$  verlangen und eine sin und cos Reihe ansetzen.



## Eine beliebige Funktion und deren Fourier-Transformierte

Nun heben wir die Einschränkung auf periodische Funktionen  $f(t)$  auf, indem wir die Periodendauer  $T$  gegen unendlich gehen lassen. Dadurch wird aus der Summe ein Integral und die diskreten  $\omega_k$  werden kontinuierlich. Damit wird

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.4})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad (\text{A.5})$$

Die erste Gleichung ist dabei die Hintransformation (minus-Zeichen im Exponenten), die zweite die Rücktransformation (plus-Zeichen im Exponenten). Die Symmetrie wird durch das  $2\pi$  gebrochen. Dies ist aber notwendig, wenn man weiterhin  $F(\omega = 0)$  als Mittelwert<sup>2</sup> behalten will. Alternativ könnte man das alles mit  $\nu$  statt  $\omega$  formulieren, hätte dann aber an viel mehr Stellen ein  $2\pi$ , wenn auch nicht vor dem Integral.

Mit dieser Form werden wir gleich weiterarbeiten.

<sup>2</sup>  $F(0) = \int f(t) dt$  ohne  $1/T$  davor ist hier von Butz als Mittelwert gemeint!

## Diskrete FT: eine periodische Zahlenfolge und deren Fourier-Transformierte Zahlenfolge

Zunächst noch eine Nebenbemerkung zur diskreten Fourier-Transformation. Insbesondere wenn man mit einem Computer Messwerte erfasst und auswertet, dann kennt man die gemessene Funktion  $f(t)$  weder auf einer kontinuierlichen Achse  $t$ , sondern nur zu diskreten Zeiten  $t_k = k \Delta t$ , noch kennt man die Funktion von  $t = -\infty$  bis  $t = +\infty$ . Als Ausgangspunkt hat man also nur eine Zahlenfolge  $f_k$  endlicher Länge.

Weil wir die Zahlenfolge außerhalb des gemessenen Intervalls nicht kennen machen wir die Annahme, dass sie periodisch ist. Bei  $N$  gemessenen Werte ist die Periodendauer also  $T = N \Delta t$ . Der Einfachheit halber definieren wir auch  $f_k = f_{k+N}$  und somit  $f_{-k} = f_{N-k}$  mit  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Damit wird die Fourier-Transformation

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-k j 2\pi i / N} \quad (\text{A.6})$$

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{+k j 2\pi i / N} \quad (\text{A.7})$$

Die Definition ist wieder so, dass  $F_0$  dem Mittelwert entspricht. Wegen  $f_{-k} = f_{N-k}$  liegen die positiven Frequenzen mit steigender Frequenz in der ersten Hälfte von  $F_j$ . Danach kommen die negativen Frequenzen, beginnend bei der 'negativsten' Frequenz steigend mit zur letzten Frequenz vor der Frequenz Null. Die maximal darstellbare Frequenz ist also die Nyquist-(Kreis-)Frequenz

$$\Omega_{\text{Nyquist}} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (\text{A.8})$$



## Nebenbemerkung: Delta-Funktion

Die Delta-Funktion kann geschrieben werden als

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x) \quad \text{mit} \quad f_a(x) = \begin{cases} a & \text{falls } |x| < \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

oder als

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ixy} dy \quad (\text{A.10})$$

Eine wichtige Eigenschaft ist, dass die delta-Funktion einen Wert selektiert, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{A.11})$$

## Wichtige Fourier-Paare

Es ist sehr oft ausreichend, die folgenden Paare von Funktionen und deren Fourier-Transformierten zu kennen. Ich schreibe sie hier, Butz folgend, als Paare in  $t$  und  $\omega$  (nicht  $\nu = \omega/(2\pi)$ ). Genauso hätte man auch Paare in  $x$  und  $k$  schreiben können. Wichtig ist dabei die Frage, ob ein  $2\pi$  in der Exponentialfunktion der ebenen Welle auftaucht oder nicht. Also

$$e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad e^{ikx}, \quad \text{aber} \quad e^{i2\pi\nu t} \quad (\text{A.12})$$

Weiterhin folge ich hier der oben gemachten Konvention zu asymmetrischen Verteilung der  $2\pi$  zwischen Hin- und Rück-Transformation. Wenn man die anders verteilt, dann ändern sich natürlich auch die Vorfaktoren. Eine gute Übersicht über noch viel mehr Fourier-Paare in diversen ' $2\pi$ '-Konventionen findet sich in der englischen Wikipedia unter 'Fourier transform'. In deren Nomenklatur ist die hier benutzte Konvention von Butz 'non-unitary, angular frequency'.

Konstante und Delta-Funktion Aus  $f(t) = a$  wird  $F(\omega) = a 2\pi \delta(\omega)$  und aus  $f(t) = a \delta(t)$  wird  $F(\omega) = a$ . Das ist wieder das asymmetrische  $2\pi$ .

Rechteck und sinc Aus der Rechteckfunktion der Breite  $b$  wird ein sinc, der sinus cardinalis. Also aus

$$f(t) = \text{rect}_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

wird <sup>3</sup>

$$F(\omega) = b \frac{\sin \omega b/2}{\omega b/2} = b \text{sinc}(\omega b/2) \quad (\text{A.14})$$

<sup>3</sup> Manchmal wird  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$  definiert, insbesondere wenn  $\nu$  und nicht  $\omega$  als konjugierte Variable benutzt wird.

Gauss Die Gauss-Funktion bleibt unter Fourier-Transformation erhalten. Ihre Breite geht in den reziproken Wert über. Also aus einer Gauss-Funktion der Fläche Eins

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{A.15})$$

wird

$$F(\omega) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2} \quad (\text{A.16})$$

(beidseitiger) Exponentialzerfall und Lorentz-Kurve Aus einer sowohl zu positiven als auch zu negativen Zeiten exponentiell abfallenden Kurve

$$f(t) = e^{-|t|/\tau} \quad (\text{A.17})$$

wird die Lorentz-Kurve

$$F(\omega) = \frac{2\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (\text{A.18})$$

Einseitiger Exponentialzerfall Als Nebenbemerkung hier der einseitige Exponentialzerfall, also

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Der wird zu

$$F(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega} \quad (\text{A.20})$$

ist also komplexwertig. Sein Betrags-Quadrat ist wieder eine Lorentz-Funktion

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \quad (\text{A.21})$$

und die Phase ist  $\phi = -\omega/\lambda$ .

Eindimensionales Punktgitter Eine äquidistante Kette von Punkten bzw. Delta-Funktionen geht bei Fourier-Transformation wieder in eine solche über. Die Abstände nehmen dabei den reziproken Wert an. Also aus

$$f(t) = \sum_n \delta(t - \Delta t n) \quad (\text{A.22})$$

wird

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_n \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \quad (\text{A.23})$$

Dreidimensionale kubische Gitter Ein dreidimensionales primitives kubisches Gitter der Kantenlänge  $a$  geht über in primitiv-kubisches Gitter der Kantenlänge  $2\pi/a$ . Ein kubisch-flächenzentriertes Gitter mit der Gitterkonstante  $a$  der konventionellen Einheitszelle geht über in ein kubisch-raumzentriertes Gitter mit der Gitterkonstanten  $4\pi/a$  und umgekehrt.

## Sätze und Eigenschaften der Fourier-Transformation

Neben den Fourier-Paaren braucht man noch ein paar Eigenschaften der Fourier-Transformation. Im Folgende seien  $f(t)$  und  $F(\omega)$  Fourier-konjugierte und ebenso  $g$  und  $G$ .

Linearität Die Fourier-Transformation ist linear

$$a f(t) + b g(t) \leftrightarrow a F(\omega) + b G(\omega) \quad (\text{A.24})$$

Verschiebung Eine Verschiebung in der Zeit bedeutet eine Modulation in der Frequenz und andersherum

$$f(t - a) \leftrightarrow F(\omega) e^{-i\omega a} \quad (\text{A.25})$$

$$f(t) e^{-i\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega + \omega_0) \quad (\text{A.26})$$

Skalierung

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\text{A.27})$$

Faltung und Multiplikation Die Faltung geht in ein Produkt über, und andersherum.

$$f(t) \otimes g(t) = \int f(\zeta)g(t - \zeta)d\zeta \leftrightarrow F(\omega)G(\omega) \quad (\text{A.28})$$

und

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega) \quad (\text{A.29})$$

Parsevals Theorem Die Gesamt-Leistung ist im Zeit- wie im Frequenzraum die gleiche

$$\int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |F(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A.30})$$

Zeitliche Ableitungen

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega F(\omega) \quad (\text{A.31})$$

## Beispiel: Beugung am Doppelspalt

Als Beispiel betrachten wir die Fourier-Transformierte eines Doppelspalts, die gerade sein Beugungsbild beschreibt. Die Spalten haben eine Breite  $b$  und einem Mitten-Abstand  $d$ . Damit wird der Spalt beschrieben durch eine Faltung der Rechteck-Funktion mit zwei Delta-Funktionen im Abstand  $d$

$$f(x) = \text{rect}_b(x) \otimes (\delta(x - d/2) + \delta(x + d/2)) \quad (\text{A.32})$$

Die Fourier-Transformierte der Rechteck-Funktion ist der sinc, die der delta-Funktionen eine Konstante. Die Verschiebung im Ort bewirkt allerdings eine Modulation im  $k$ -Raum. Aus der Summe der beiden Delta-Funktionen wird also

$$\mathcal{FT}\{\delta(x - d/2) + \delta(x + d/2)\} = e^{-ikd/2} + e^{+ikd/2} = 2 \cos(kd/2) \quad (\text{A.33})$$

Die Faltung mit der Rechteck-Funktion geht über in eine Multiplikation mit dem sinc. Zusammen erhalten wir somit

$$\mathcal{FT}\{f(x)\} = b \frac{\sin(kb/2)}{kb/2} 2 \cos(kd/2) = \frac{4}{k} \sin(kb/2) \cos(kd/2) \quad (\text{A.34})$$

Die Intensität in Richtung  $k$  ist dann das Betragsquadrat davon.

## Zweidimensionale Fourier-Transformation

Wir können die Definition der Fourier-Transformation auf zwei und mehr Dimensionen erweitern. Die konjugierten Variablen sind  $(x, y)$  und  $(k_x, k_y)$ , anstelle von  $t$  und  $\omega$ . Der Wellenvektor  $k_i = 2\pi/\lambda_i$  enthält den Faktor von  $2\pi$  wie in der Kreisfrequenz  $\omega$ . Wir definieren

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{A.35})$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{+i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (\text{A.36})$$

Wenn wir die Funktion  $f(x, y)$  in ein Produkt von eindimensionalen Funktionen zerlegen können, dann ist die Fourier-Transformation einfach das Produkt der einzelnen Fourier-Transformationen

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \quad \leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) = G(k_x) \cdot H(k_y) \quad . \quad (\text{A.37})$$

Ein Rechteck der Größe  $a \times b$  wird in ein Produkt von Sinc-Funktionen umgewandelt

$$(x, y) = \text{rect}_a(x) \cdot \text{rect}_b(y) \quad (\text{A.38})$$

$$\leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) = ab \operatorname{sinc}(k_x a/2) \operatorname{sinc}(k_y b/2) \quad . \quad (\text{A.39})$$

Ein Spezialfall davon ist die rotationssymmetrische zweidimensionale Gaußsche Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad \leftrightarrow \quad F(k_x, k_y) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k_x^2+k_y^2)} \quad . \quad (\text{A.40})$$

Eine wichtige Funktion kann nicht in ein Produkt eindimensionaler Funktionen zerlegt werden: eine Scheibe mit dem Radius  $a$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

wird transformiert in

$$F(k_x, k_y) = a \frac{J_1(\pi a \rho)}{\rho} \quad \text{with} \quad \rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (\text{A.42})$$

und der (zylindrischen) Besselfunktion erster Art  $J_1(x)$

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\tau - x \sin \tau) d\tau \quad , \quad (\text{A.43})$$

die das zylindrische Analogon einer Sinc-Funktion ist.

## Literatur

Butz, Tilman (2011). *Fouriertransformation für Fußgänger*. Springer. [↗](#).

# Anhang B

## Zustandsdichte

Markus Lippitz  
6. Mai 2025

### Zustandsdichte für Phononen im reziproken Raum $D(k) dk$

Zunächst betrachten wir nicht die eigentlich benötigte Zustandsdichte im Frequenzraum  $D(\omega)d\omega$ , sondern die im reziproken Raum  $D(k)dk$ . Die Argumentation und die Rechenschritte sind dabei dieselben, die auch bei der Herleitung der optischen Modendichte bei der Schwarzkörperstrahlung verwendet wurde<sup>1</sup>.

Wir betrachten eine lineare Kette von Atomen mit periodischen Randbedingungen, also eine ringförmige Kette mit der Auslenkung  $u_0 = u_N$  bei  $N$  Atomen in der Kette. Die Auslenkung der Masse am Index  $s$  ist mit dem Ansatz der ebenen Welle

$$u_s = u e^{-i\omega t} e^{i s k a} \quad (\text{B.1})$$

mit der Länge  $k$  des Wellenvektors im reziproken Raum und der Länge  $a$  des Gittervektors im Realraum. Die Randbedingung  $u_0 = u_N$  erfordert dann

$$N k a = 2\pi n, \quad (\text{B.2})$$

wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist. Die Gesamtlänge der Kette ist  $L = Na$ . Damit kann  $k$  nur diskrete Werte annehmen, die den Abstand  $\Delta k$  haben

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (\text{B.3})$$

Die Dichte  $D(k) dk$  der möglichen Werte von  $k$  auf der  $k$ -Achse ist ein Wert pro  $\Delta k$ , also

$$D(k) dk = \frac{L}{2\pi} dk. \quad (\text{B.4})$$

Die Zustandsdichte ist im  $k$ -Raum also konstant. Analog kann man im Zwei- oder Dreidimensionalen verfahren, also bei Quadraten oder Kuben der Kantenlänge  $L$ . Die Zustandsdichte ist

$$D(k) = \frac{N_{\text{PEZ}}}{V_{\text{BZ}}} = \frac{V_{\text{Kristall}}}{(2\pi)^d} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \quad (\text{B.5})$$

mit der Dimensionalität  $d$  und der Anzahl der primitiven Einheitszellen  $N_{\text{PEZ}}$ . Das ist wie oben die Zustandsdichte für eine Art der Bewegung (transversal

<sup>1</sup> z.B. Vorlesung EPB2 Atome, Kerne, Teilchen



oder longitudinal, akustisch oder optisch). Bei  $p$  Atomen je Einheitszelle gibt es  $3p$  Äste in der Dispersionsrelation und die Gesamt-Zustandsdichte im Dreidimensional ist entsprechend größer:

$$D^{3D,ges}(k) = 3p \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3. \quad (\text{B.6})$$

Was ist hier passiert? Die physikalisch sinnvollen Werte von  $k$  waren schon nach oben beschränkt, weil es nicht hilft, wenn die Welle schneller oszilliert als der Abstand der Atome ist. Bei einem Ring von Atomen ist nun aber auch nicht jede Wellenlänge wählbar, da nur stehende Wellen auf dem Ring möglich sind.<sup>2</sup> Mögliche Werte der Wellenlänge haben die Form  $\lambda_0/n$ , und damit mögliche Werte des Wellenvektors  $n/\lambda_0$ . Dadurch wird die  $k$ -Achse diskret. Dies spielt aber nur bei der Zustandsdichte eine Rolle, da die Punkte so dicht liegen, dass dies höchstens bei sehr kleinen Kristallen auflösbar ist.

Aus dem Blickwinkel der Normalmoden findet sich das gleiche Ergebnis. Bei  $p$  Atomen je primitiver Einheitszelle und  $N_{PEZ}$  primitiven Einheitszellen im Kristall erwarten wir  $3p N_{PEZ}$  Normalmoden. In der Dispersionsrelation der Phononen gibt es dann  $3p$  Äste und  $N_{PEZ}$  diskrete Werte auf der  $k$ -Achse, also ebenso viele Zustände für Phononen wie Normalmoden.

### Zustandsdichte im Frequenz-Raum $D(\omega) d\omega$

Eine Zustandsdichte ist die Anzahl von Zuständen in einem festen Intervall, bisher einem festen Intervall auf der  $k$ -Achse, jetzt auf der  $\omega$ -Achse. Da der Zusammenhang zwischen Wellenvektor und Frequenz kein konstanter Faktor ist, ist dies nicht völlig trivial. Die Wahl des Intervalls ist typischerweise in der Variablen der Zustandsdichte kodiert, also  $D(x)$  meint eigentlich  $D(x) dx$ . Es ist trotzdem sinnvoll, das  $dx$  möglichst oft explizit mitzuschreiben.

Im Eindimensionalen können wir einfach mit  $d\omega$  erweitern

$$D(k) dk = \frac{L}{2\pi} \frac{dk}{d\omega} d\omega = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{v_g} d\omega = D(\omega) d\omega \quad (\text{B.7})$$

mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g = d\omega/dk$ .

Im Zwei- oder Dreidimensionalen gehen wir einen anderen Weg. Wir nutzen aus, dass im reziproken Raum die Zustände äquidistant sind, die Zustandsdichte also konstant ist. Alle Zustände bei gegebenem, festem  $\omega$  bilden die Fläche<sup>3</sup>  $S(\omega)$ . Die Zustände bei  $\omega + \Delta\omega$  bilden eine weitere Fläche. Wir zählen somit die Zustände im Intervall  $\Delta\omega$ , indem wir das Volumen zwischen den beiden Flächen bestimmen und mit der Zustandsdichte im  $k$ -Raum multiplizieren

$$D(\omega)\Delta\omega = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} D(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{k}(\omega)}^{\mathbf{k}(\omega+\Delta\omega)} D(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^d \int_{\mathbf{k}(\omega)}^{\mathbf{k}(\omega+\Delta\omega)} d\mathbf{k}. \quad (\text{B.8})$$

Das Volumenelement  $d\mathbf{k}$  teilen wir auf in einen Teil entlang der Fläche konstanter Frequenz  $S(\omega)$  und einem Teil senkrecht dazu:  $d\mathbf{k} = dk_{\perp} dS_{\omega}$ . Weil sich  $\omega$  in Richtung  $dS_{\omega}$  nicht ändert, kann man dann die Gruppengeschwindigkeit schreiben als

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right| = |\text{grad}_{\mathbf{k}} \omega| = |\nabla_{\mathbf{k}} \omega| = \sqrt{\left| \frac{d\omega}{dS_{\omega}} \right|^2 + \left( \frac{d\omega}{dk_{\perp}} \right)^2} = \left| \frac{d\omega}{dk_{\perp}} \right| \quad (\text{B.9})$$

<sup>2</sup> Analog stehende Wellen auf einer endlichen Kette mit freien / festen Randbedingungen

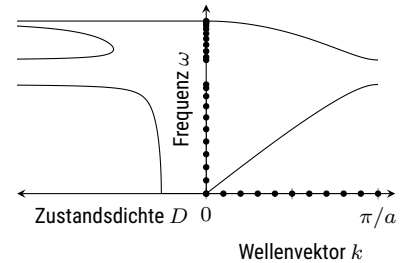


Abbildung B.1: Lineare zweiatomige Kette: Zustandsdichte (links) und Dispersionsrelation (rechts). Zustände (Kreise) sind äquidistant auf der  $k$ -Achse, aber nicht mehr auf der  $\omega$ -Achse. Die Zustandsdichte divergiert an den Van-Hove-Singularitäten, wenn die Gruppengeschwindigkeit Null wird.

<sup>3</sup> in 3D, sonst Kurve in 2D

und so

$$d\mathbf{k} = dk_{\perp} dS_{\omega} = dS_{\omega} \frac{d\omega}{|v_g|} . \quad (\text{B.10})$$

Damit erhalten wir

$$D(\omega)d\omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d d\omega \int_{\omega=\text{const.}} \frac{1}{|v_g|} dS_{\omega} . \quad (\text{B.11})$$

Wir müssen also nur noch ein Oberflächenintegral über eine Fläche konstanter Frequenz  $\omega$  ausführen und dabei den Kehrwert der Gruppengeschwindigkeit integrieren. Einfach wird dies im isotropen Fall, wenn die Frequenz  $\omega$  der Phononen nur vom Betrag des Wellenvektors  $k$  abhängt und nicht von seiner Richtung. Damit sind die Flächen konstanter Frequenz Kugeln mit dem Radius  $k$ . Die Gruppengeschwindigkeit ist dann natürlich auch konstant über die Kugeloberfläche. Wir erhalten dann

$$D(\omega)d\omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{4\pi k^2}{|v_g|} d\omega , \quad (\text{B.12})$$

wobei  $k$  hier als  $k(\omega)$  zu verstehen ist.<sup>4</sup>

Sowohl im eindimensionalen als auch im dreidimensionalen Fall geht die Gruppengeschwindigkeit als Kehrwert ein. In der zweiatomigen Kette beispielsweise geht diese asymptotisch gegen Null in der Nähe der Bandlücke, wodurch der Integrand in Gl. B.11 divergiert. Diese Punkte nennt man *Van-Hove-Singularitäten*. Im Eindimensionalen divergiert hier die Zustandsdichte. In zwei und drei Dimensionen finden sich davon noch endlich hohe Spitzen.

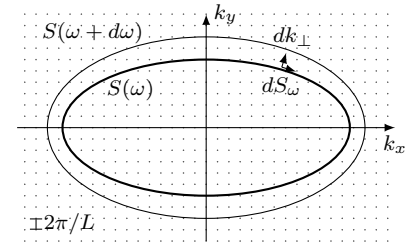


Abbildung B.2: Skizze zur Bestimmung der Zustandsdichte im Frequenzraum.

<sup>4</sup> Das ist immer noch die Zustandsdichte pro Ast in der Dispersionsrelation. Bei  $p$  Atomen pro Einheitszelle kommt in Dreidimensionalen also noch der Faktor  $3p$  hinzu, um die Gesamt-Zustandsdichte zu erhalten.





# Literatur

- Ashcroft, Neil W. und N. David Mermin (2013). *Festkörperphysik*. München: Oldenbourg.
- Bennett, Charles H. und Gilles Brassard (2014). "Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing [reprint]". In: *Theoretical Computer Science* 560, S. 7–11. [↗](#)
- Blundell, Stephen (2006). *Magnetism in condensed matter*. Oxford Univ. Press.
- Butz, Tilman (2011). *Fouriertransformation für Fußgänger*. Springer. [↗](#)
- Chang, L. L., L. Esaki und R. Tsu (1974). "Resonant tunneling in semiconductor double barriers". In: *Appl. Phys. Lett.* 24.12, S. 593–595. [↗](#)
- Choy, T.-S. u. a. (2000). "A database of fermi surface in virtual reality modeling language (vrml)". In: *Bulletin of The American Physical Society* 45.1, S. L36–42. [↗](#)
- Conwell, Esther M (1952). "Properties of silicon and germanium". In: *Proceedings of the IRE* 40.11, S. 1327–1337. [↗](#)
- Czycholl, Gerd (2016). *Theoretische Festkörperphysik, Band 1*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- (2017). *Theoretische Festkörperphysik, Band 2*. 4. Aufl. Springer. [↗](#)
- Doll, Robert und M Näbauer (1961). "Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring". In: *Phys. Rev. Lett.* 7.2, S. 51. [↗](#)
- Dresselhaus, G, AF Kip und C Kittel (1955). "Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals". In: *Physical Review* 98.2, S. 368. [↗](#)
- Fließbach, Thorsten (2018). *Statistische Physik*. Springer. [↗](#)
- Gerry, Christopher C. und Peter L. Knight (2005). *Introductory quantum optics*. 1. publ. Cambridge Univ. Press. [↗](#)
- Giaever, Ivar (1960). "Energy gap in superconductors measured by electron tunneling". In: *Phys. Rev. Lett.* 5.4, S. 147. [↗](#)
- Glassbrenner, C Jo und Glen A Slack (1964). "Thermal conductivity of silicon and germanium from 3 K to the melting point". In: *Physical review* 134.4A, A1058. [↗](#)
- Gross, Rudolf und Achim Marx (2023). *Festkörperphysik*. 4. De Gruyter. [↗](#)
- Henry, Warren E (1952). "Spin paramagnetism of  $\text{Cr}^{+++}$ ,  $\text{Fe}^{+++}$ , and  $\text{Gd}^{+++}$  at liquid helium temperatures and in strong magnetic fields". In: *Physical Review* 88.3, S. 559. [↗](#)
- Hunklinger, Siegfried (2014). *Festkörperphysik*. 4. aktualisierte Auflage. München: De Gruyter. [↗](#)



- Hust, Jerome G und Alan B Lankford (1984). "Thermal conductivity of aluminum, copper, iron, and tungsten for temperatures from 1 K to the melting point". In: *NBSIR 84-3007*. [↗](#)
- Jackson, Howard E, Charles T Walker und Thomas F McNelly (1970). "Second sound in NaF". In: *Phys. Rev. Lett.* 25.1, S. 26.
- Jaklevic, RC u. a. (1965). "Macroscopic quantum interference in superconductors". In: *Physical Review* 140.5A, A1628. [↗](#)
- Johnson, Earnest J. (1967). "Absorption near the Fundamental Edge". In: Hrsg. von R.K. Willardson und Albert C. Beer. Bd. 3. Semiconductors and Semimetals. Elsevier, S. 153–258. [↗](#)
- Kamerling Onnes, Heike (1911). "Further experiments with Liquid Helium – VI. On the Sudden Change in the Rate at which the Resistance of Mercury Disappears." In: *Leiden Communications* 124c, S. 267–271.
- Kittel, Charles (2006). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Siegfried Hunklinger. 14. Oldenbourg.
- Klitzing, K, G Dorda und M Pepper (1980). "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance". In: *Phys. Rev. Lett.* 45.6, S. 494–497. [↗](#)
- Klitzing, Klaus v. (1984). "The quantized hall effect". In: *Physica B+C* 126.1, S. 242–249. [↗](#)
- Kojima, Seiji u. a. (2003). "Far-infrared phonon-polariton dispersion probed by terahertz time-domain spectroscopy". In: *Physical Review B* 67.3. [↗](#)
- Kopitzki, Konrad (2017). *Einführung in die Festkörperphysik*. Hrsg. von Peter Herzog. 7. Springer. [↗](#)
- Langenberg, DN, DJ Scalapino und BN Taylor (1966). "Josephson-type superconducting tunnel junctions as generators of microwave and submillimeter wave radiation". In: *Proceedings of the IEEE* 54.4, S. 560–575. [↗](#)
- Lippitz, Markus (2022). *Lecture notes 'Molekülphysik und Festkörperphysik I'*. Version v22.2. CC-BY-SA 4.0. [↗](#)
- London, Fritz und Heinz London (1935). "The electromagnetic equations of the supraconductor". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 149.866, S. 71–88. [↗](#)
- Macfarlane, GG und V Roberts (1955). "Infrared absorption of silicon near the lattice edge". In: *Physical Review* 98.6, S. 1865. [↗](#)
- Maier, Stefan A. (2007). *Plasmonics*. New York, NY: Springer. [↗](#)
- Meissner, Walther und Robert Ochsenfeld (1933). "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit". In: *Naturwissenschaften* 21.44, S. 787–788. [↗](#)
- Pfeiffer, Markus u. a. (2014). "Eleven Nanometer Alignment Precision of a Plasmonic Nanoantenna with a Self-Assembled GaAs Quantum Dot". In: *Nano Letters* 14.1, S. 197–201. [↗](#)
- Phillips, Norman E (1959). "Heat capacity of aluminum between 0.1 K and 4.0 K". In: *Physical Review* 114.3, S. 676. [↗](#)
- Polakovic, Tomas (2022). *Computational Physics for the Masses. Part 3: Solid Stuff*. CC-BY-NC 4.0. [↗](#)
- Powell, CJ und JB Swan (1959). "Origin of the characteristic electron energy losses in aluminum". In: *Physical Review* 115.4, S. 869. [↗](#)
- Rayne, JA (1956). "The Heat Capacity of Copper Below 4.2 °K". In: *Aust. J. Phys.* 9.2, S. 189–197. [↗](#)

- Rollins Jr, Fred R, Lyle H Taylor und Paul H Todd Jr (1964). "Ultrasonic study of three-phonon interactions. II. Experimental results". In: *Physical Review* 136.3A, A597. [↗](#).
- Segall, Benjamin (1961). "Energy bands of aluminum". In: *Physical Review* 124.6, S. 1797.
- Shull, C Gi, WA Strauser und EO Wollan (1951). "Neutron diffraction by paramagnetic and antiferromagnetic substances". In: *Physical Review* 83.2, S. 333. [↗](#).
- Simon, Steven H. (2013). *The Oxford solid state basics*. Oxford Univ. Press. [↗](#).
- Singleton, John (2001). *Band Theory and Electronic Properties of Solids*. Oxford Univ. Press.
- Spitzer, WG und HY Fan (1957). "Determination of optical constants and carrier effective mass of semiconductors". In: *Physical Review* 106.5, S. 882. [↗](#).
- Sturge, M.D. (1962). "Optical absorption of gallium arsenide between 0.6 and 2.75 eV". In: *Physical Review* 127.3, S. 768. [↗](#).
- Sullivan, Paul F. und G. Seidel (1968). "Steady-State, ac-Temperature Calorimetry". In: *Phys. Rev.* 173 (3), S. 679–685. [↗](#).
- Tsu, R. und L. Esaki (1973). "Tunneling in a finite superlattice". In: *Appl. Phys. Lett.* 22.11, S. 562–564. [↗](#).
- Van Delft, Dirk (2008). "Little cup of helium, big science". In: *Physics Today* 61.3, S. 36–42. [↗](#).
- Van Delft, Dirk und Peter Kes (2010). "The discovery of superconductivity". In: *Physics today* 63.9, S. 38–43. [↗](#).
- Van Wees, BJ u. a. (1988). "Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas". In: *Phys. Rev. Lett.* 60.9, S. 848. [↗](#).
- Wolpert, Christian u. a. (2012). "Ultrafast coherent spectroscopy of a single self-assembled quantum dot". In: *physica status solidi (b)* 249.4, S. 721–730. [↗](#).
- Wu, Xiaofei u. a. (2017). "On-Chip Single-Plasmon Nanocircuit Driven by a Self-Assembled Quantum Dot". In: *Nano Letters* 17.7, S. 4291–4296. [↗](#).
- Yu, Peter Y. und Manuel Cardona (2010). *Fundamentals of semiconductors*. Springer. [↗](#).