Wiener et al. a calculé un taux de croissance des ondes de Alfvén pour une fonction de distribution quasi-isotrope en angle d'attaque (formule (23)) donnée par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_g(k) &= -\frac{8\pi^2 m\Omega_0 V_A}{k(\delta B)_k^2}\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}p v(p)\frac{\partial f(p)}{\partial z}(p^2-p_k^2) && (1)\\
&= -\frac{1}{W_{B_0}}\frac{\pi m\Omega_0 V_A c}{kb_k^2}\frac{A(k)}{4\pi}\frac{\partial n_{CR}}{\partial z} && (2)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
W_{B_0} &= \frac{B_0^2}{8\pi} && (3)\\
A(k) &= \frac{4\pi}{n_{CR}}\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}p\beta(p)f(p)(p^2-p_k^2) && (4)
\end{aligned}$$

W_{B_0} correspond à la densité d'énergie magnétique. $\beta(p)$ est une fonction que nous allons déterminer. On a :

$$\beta(p) = \frac{v(p)}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma(p)}}^{\,2} \quad (5)$$

et

$$\gamma(p) = \left(1-\left(\frac{v(p)}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

On a $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2-1$ et $p = \gamma\beta mc = \sqrt{\gamma^2-1}mc$ soit $p/mc = \sqrt{\gamma^2-1}$. On normalise l'impulsion par une valeur $p_0 = mc$ telle que :

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0} = \sqrt{\gamma^2-1} \quad (7)$$

c'est à dire : $\gamma^2 = \bar{p}^2+1$ et comme on a $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}$ on en déduit :

$$\beta(p) = \frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{p}^2+1}} \quad (8)$$

On cherche à exprimer le gradient de pression $\frac{\partial P_{CR}}{\partial z}$ au lieu de celui en densité $\frac{\partial n_{CR}}{\partial z}$. Pour cela on exprime n_{CR}.

$$\begin{aligned}
n_{CR} &= 4\pi\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}pp^2 f(p) && (9)\\
&= 4\pi f_0\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}pp^2 k(p) && (10)\\
&= 4\pi f_0 p_0^3\int_{p_k/p_0}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\ \bar{p}^2 k(\bar{p}) && (11)\\
&= 4\pi f_0 p_0^3 H && (12)
\end{aligned}$$

où

$$H = \int_{p_k/p_0}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\ \bar{p}^2 k(\bar{p}) \quad (13)$$

On exprime également P_{CR}.

$$\begin{aligned}
P_{CR} &= \frac{4\pi c}{3}\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}p\ p^3 f(p)\beta p && (14)\\
&= \frac{4\pi c}{3}f_0 p_0^4\int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\ \bar{p}^3 k(\bar{p})\beta(\bar{p}) && (15)\\
&= \frac{4\pi c}{3}f_0 p_0^4 G && (16)
\end{aligned}$$

où

$$G = \int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\; \bar{p}^3 k(\bar{p})\beta(\bar{p}) \tag{17}$$

$$\beta(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{p}^2+1}} \tag{18}$$

On a alors la relation :

$$n_{CR} = \frac{3P_{CR}}{c}\frac{H}{G}\frac{1}{p_0} \tag{19}$$

qui, en injectant dans la définition du taux de croissance nous donne l'expression suivante (ici $k^{-1} = r_g$) :

$$\Gamma_g(r_g) = \frac{3}{4}\Omega_0\left(V_A\frac{mc}{p_0c}\right)\frac{A(k)}{b_k^2}\frac{H}{G}\left[\frac{r_g}{W_{B_0}}\left(-\frac{\partial P_{CR}}{\partial z}\right)\right] \tag{20}$$

avec les différentes relations :

$$A(k) = \frac{4\pi}{n_{CR}} f_0 p_0^3 \int_{p_k/p_0}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\beta(\bar{p})k(\bar{p})(\bar{p}^2-\bar{p}_k^2) \tag{21}$$

$$H = \int_{p_k/p_0}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\; \bar{p}^2 k(\bar{p}) \tag{22}$$

$$G = \int_{p_k}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{p}\; \bar{p}^3 k(\bar{p})\beta(\bar{p}) \tag{23}$$

$$\beta(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{p}^2+1}} \tag{24}$$

En utilisant la condition $\Gamma_g + \Gamma_{in} = 0$ on peut contraindre le niveau de turbulence en fonction du gradient de pression de rayons cosmiques.

$$b_k = \sqrt{\frac{1}{-\Gamma_{in}}\frac{3}{4}\Omega_0\left(V_A\frac{mc}{p_0c}\right)A(r_g)\left(\frac{r_g}{W_{B_0}}\frac{H}{G}\left[-\frac{\partial P_{CR}}{\partial z}\right]\right)} \tag{25}$$

Il s'agit maintenant de choisir la forme de la fonction de distribution des rayons cosmiques adaptée au problème. Drury et Strong 2016 ont choisi une fonction de la forme :

$$J(T) = 0.27(\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{st}^{-1}\ \mathrm{GeV}^{-1})\frac{T^{1.12}}{\beta^2}\left(\frac{T+0.67}{1.67}\right)^{-3.93} \tag{26}$$

où $T = E_{kin}/1$ GeV soit $T = \frac{mc^2}{1\ \mathrm{GeV}}(\sqrt{1+(p/p_0)^2}-1)$ et $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \frac{mc^2}{p_0}\frac{p/p_0}{\sqrt{1+(p/p_0)^2}}$. On rappelle que l'on a défini $p_0c = mc^2$. On peut alors réécrire la fonction $f(p)$ comme :

$$f(\bar{p}) = f_0 k(\bar{p}) \quad f_0 = \frac{0.27}{p_0^3} \tag{27}$$

$$k(p) = \frac{1}{\bar{p}^2}\frac{(mc^2{}_{1\ \mathrm{GeV}}[\sqrt{1+\bar{p}^2}-1])^{1.12}}{\beta^2(\bar{p})}\left(\frac{mc^2{}_{1\ \mathrm{GeV}}[\sqrt{1+\bar{p}^2}-1]+0.67}{1.67}\right)^{-3.93}\frac{0.938\bar{p}}{\sqrt{1+\bar{p}^2}} \tag{28}$$

où $mc^2{}_{1\ \mathrm{GeV}}$ correspond à l'énergie de masse des CRs normalisée par 1 GeV.