

Calcul du taux d'amortissement des ondes de Alfvén par collisions ions-neutres

Loann Brahim

20 mars 2017

Coefficients d'amortissement par collisions ions-neutres

Dans ce document nous allons calculer le coefficient d'amortissement des ondes de Alfvén par collisions des ions avec les neutres dans le cadre d'un milieu faiblement ionisé. On écrit dans un premier temps la relation de dispersion des ondes de Alfvén incluant un amortissement suivant les collisions neutre-ion et la viscosité des neutres. On a (Xu 2015) :

$$\omega^3 + i(\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni})\omega^2 - (k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2 + \chi\tau_v^{-1}\nu_{ni})\omega - i(\tau_v^{-1} + \nu_{ni})k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2 = 0 \quad (1)$$

où $\chi = \rho_n/\rho_i$ et $\tau_v^{-1} = k^2\nu^n$. Dans un premier temps, on néglige la viscosité cinématique des neutres $\nu_n \approx 0$, l'équation 1 devient :

$$\omega^3 + i(1 + \chi)\nu_{ni}\omega^2 - k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2 \omega - i\nu_{ni}k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2 = 0 \quad (2)$$

Xu+2015 propose des solutions analytiques dans le cas d'un amortissement faible c'est à dire $|\Gamma_{in}| \ll |\omega_R|$.

$$\omega_R^2 = \frac{k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2 [(1 + \chi)\nu_{ni}^2 + k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2]}{(1 + \chi)^2 \nu_{ni}^2 + k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2} \quad (3)$$

$$\Gamma_{in} = -\frac{\nu_{ni}\chi k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2}{2[(1 + \chi)^2 \nu_{ni}^2 + k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2]} \quad (4)$$

Dans le cas d'un couplage faible ($\omega \ll \nu_{in}$) on a :

$$\omega_R^2 = V_A^2 k^2 \cos^2 \theta \quad (5)$$

$$\Gamma_{in} = -\frac{\xi_n V_A^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\nu_{ni}} \quad (6)$$

$\Gamma_{in} = -\frac{\xi_n V_A^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\nu_{ni}}$ Modes slab $\cos \theta = 1$	
WNM	$\Gamma_{in}^{\text{WNM}} = -\left[3.0 \times 10^5 \left(\frac{k}{10^{-9} \text{ cm}^{-1}}\right)^2 - 3.67 \times 10^6 \left(\frac{k}{10^{-9} \text{ cm}^{-1}}\right)^2\right] \text{ s}^{-1}$
CNM	$\Gamma_{in}^{\text{CNM}} = -\left[4.35 \times 10^4 \left(\frac{k}{10^{-9} \text{ cm}^{-1}}\right)^2 - 1.72 \times 10^6 \left(\frac{k}{10^{-9} \text{ cm}^{-1}}\right)^2\right] \text{ s}^{-1}$
MM	$\Gamma_{in}^{\text{MM}} \approx -4.5 \times 10^7 \left(\frac{k}{10^{-9} \text{ cm}^{-1}}\right)^2 \text{ s}^{-1}$

FIGURE 1 – Tableau récapitulant les différents taux d'amortissement des ondes de Alfvén dans le cas d'un couplage faible. Ces derniers sont paramétrisés suivant l'échelle k . Les données proviennent de Jean + 2009, sauf pour le terme $\langle \sigma v \rangle$ qui est issu de Kulsrud + 1971. Enfin, la densité volumique de neutres dans le cas des nuages moléculaires à été prise de la thèse de Koertgen.

Dans le cas d'un couplage fort ($\omega \gg \nu_{in}$) on a :

$$\omega_R^2 = V_{Ai}^2 k^2 \cos^2 \theta \quad (7)$$

$$\Gamma_{in} = -\frac{\nu_{in}}{2} \quad (8)$$

avec $\nu_{in} = \frac{m_n}{m_i + m_n} n_n \langle \sigma v \rangle$.

$\Gamma_{in} = -\frac{\nu_{in}}{2}$	
WNM	$\Gamma_{in}^{\text{WNM}} \sim - (10^{-9} - 3.5 \times 10^{-9}) \text{ s}^{-1}$
CNM	$\Gamma_{in}^{\text{CNM}} \sim - (1.5 \times 10^{-8} - 4.0 \times 10^{-8}) \text{ s}^{-1}$
MM	$\Gamma_{in}^{\text{MM}} \sim - (0.5 \times 10^{-7} - 0.5 \times 10^{-3}) \text{ s}^{-1}$

FIGURE 2 – Taux d’amortissement des ondes de Alfvén dans les phases WNM, CNM, MM de l’ISM. Les données utilisées pour effectuer le calcul des taux sont issues de Jean et al. (2009) table 1. et paragraphe 2.1. Ce taux est obtenu dans le cas d’un couplage ions-neutre fort ($\omega \gg \nu_{in}$).

Détermination du taux de turbulence

On peut également, en suivant la méthode utilisée par Wiener + 2013, déterminer le taux de turbulence $b_k = \delta B/B_0$ à partir de la condition d’équilibre des ondes de Alfvén entre taux de croissance et taux d’amortissement par collision ions-neutres. Les formules (26) et (25) de Wiener + 2013 donnent :

$$\Gamma_{\text{growth}}(k) = -\frac{2\pi m\Omega_0 V_{AC}}{kB_0^2} \left(\frac{B_0}{\delta B}\right)^2 \frac{\partial n_{CR}}{\partial z} A(k) \quad (9)$$

où $\delta B/B_0 = b_k$ est le niveau de turbulence et d’après (24) de Wiener + 2013

$$A(k) = \frac{1}{n_{CR}} \int_{p_k}^{\infty} dp \beta d(p) 4\pi(p^2 - p_k^2) \quad (10)$$

En posant $\Gamma_{\text{growth}} + \Gamma_{in} = 0$, il est possible de contraindre ce taux suivant le milieu considéré. En utilisant les valeurs du champ magnétique et de la vitesse de Alfvén, génériques, de Jean + 2009, et ce pour des particules de charge $|q| = e$ on trouve :

$$b_{k,i} = C_i \sqrt{\frac{A(k)}{k} \frac{\partial n_{CR}}{\partial z}} \quad (11)$$

où i référence le milieu considéré. Les constantes $C_i = \sqrt{(2\pi q V_A)/(\Gamma_{in} B_0)}$ sont données pour chaque milieu faiblement ionisé en unités CGS. On a dans le cas d’un couplage fort ($\omega \gg \nu_{ni}$) :

$$C_{\text{WNM}} = 9.97 \times 10^5 - 1.98 \times 10^6 \quad (12)$$

$$C_{\text{CNM}} = 1.49 \times 10^5 - 3.83 \times 10^5 \quad (13)$$

$$C_{\text{MM}} = 3.61 \times 10^2 - 3.61 \times 10^5 \quad (14)$$

et dans le cas d’un couplage faible ($\omega \ll \nu_{ni}$) :

$$C_{\text{WNM}} = (3.36 \times 10^{-11} - 2.41 \times 10^{-10}) \frac{1}{k} = C'_{\text{WNM}}/k \quad (15)$$

$$C_{\text{CNM}} = (6.85 \times 10^{-12} - 2.21 \times 10^{-11}) \frac{1}{k} = C'_{\text{CNM}}/k \quad (16)$$

$$C_{\text{MM}} = (5.20 \times 10^{-13} - 5.20 \times 10^{-12}) \frac{1}{k} = C'_{\text{MM}}/k \quad (17)$$

Les constantes C_i sont en cm tandis que les constantes C'_i sont sans dimension.

Applications à différentes fonctions de distribution

Loi de puissance $f(\mathbf{x}, p, t) = C(\mathbf{x}t)p^{-\alpha}$

En suivant les calculs de Wiener + 2013 on a dans la limite relativiste ($\beta \approx 1$) (formule (28)) :

$$A(k) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha-1} \left(\frac{k}{k_c}\right)^{\alpha-3} & k < k_c \\ \left[1 - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \left(\frac{k_c}{k}\right)^2\right] & k > k_c \end{cases} \quad (18)$$

où $k_c = m\Omega_0/p_c$ est lié au moment p_c de coupure du spectre de puissance par la pulsation cyclotron Ω_0 . On peut étudier le comportement du pré-facteur $C_i \sqrt{A(k)}/k$ pour différents milieux et différents indices spectraux α .

WNM

On s'occupe dans un premier temps de la situation d'un couplage fort $\omega \gg \nu_{ni}$. On exprime la fonction $F(k) = C_{\text{WNM}} \sqrt{A(k)/k}$ dans le cas $k/k_c < 1$ et $k/k_c > 1$. On a :

$$F(k) = \begin{cases} C_{\text{WNM}} \left[\frac{2E_c}{eB_0(\alpha-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{\frac{\alpha-4}{2}} & k < k_c \\ C_{\text{WNM}} \left(\frac{E_c}{eB_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} & k > k_c \end{cases} \quad (19)$$

où l'on a défini que $k_c = m\Omega_0/p_c$ et $E_c = \gamma_c mc^2 = p_c \beta_c c \approx p_c c$ dans la limite $\beta \approx 1$ soit finalement : $k_c \approx eB_0/E_c$. Dans le cas d'un couplage faible $\omega \ll \nu_{ni}$, $F(k)$ est donnée par $F(k) = C_{\text{WNM}} \sqrt{A(k)/k^{3/2}}$ et s'exprime suivant l'échelle considéré :

$$F(k) = \begin{cases} C'_{\text{WNM}} \left(\frac{E_c}{eB_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{\frac{\alpha-6}{2}} & k < k_c \\ C'_{\text{WNM}} \left(\frac{E_c}{eB_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{-\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} & k > k_c \end{cases} \quad (20)$$

En raison de l'approximation de faible amortissement qui n'est valable que dans l'intervalle (Xu + 2015) $[2k_{\text{dec,ni,slab}}/\xi_n, k_{\text{dec,in,slab}}/2]$, les fonctions $F(k)$ ne sont significatives qu'à l'extérieur de cet intervalle.

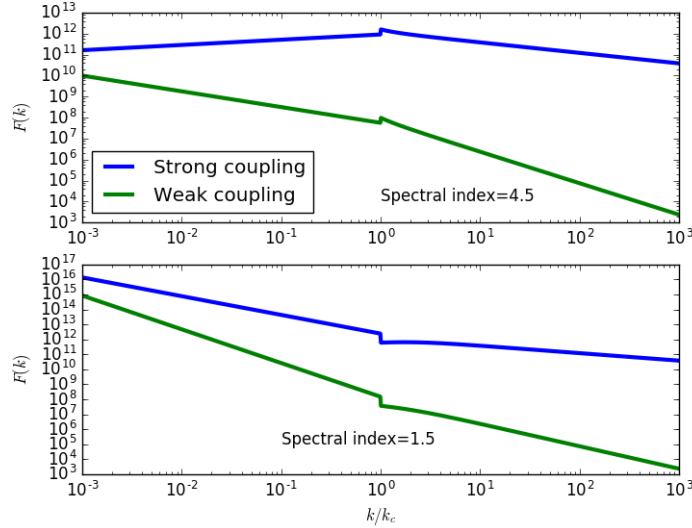


FIGURE 3 – Exemple de détermination numérique des fonction $F(k)$ dans un WNM. Les fonctions sont tracées suivant le paramètre k/k_c où k_c est relié à E_c l'énergie de coupure de la distribution de l'espèce considérée de rayons cosmiques. Ici on a choisi $E_c = 1$ GeV. Deux régimes différents sont représentés : l'un dont le spectre de puissance est doux, l'autre avec un spectre dur. Comme $p \propto 1/k$, on remarque que la partie de gauche de chaque graphe possède un intérêt moindre à mesure que le rapport k/k_c diminue et ceci dépendant de la brutalité de la coupure en $p_c \propto 1/k_c$. De manière générale, on remarque que les fonctions $F(k)$ ont une amplitude très élevée et ceci implique (sauf erreur) un gradient de densité de rayons cosmique extrêmement faible. Les constantes choisies sont moyennées.