Convergencia en Redes

Jose Antonio Lorencio Abril

Vamos a estudiar el concepto de **red**, que es la generalización del concepto de sucesión, como veremos. Primero, unas definiciones previas:

Definition 1. Una relación binaria $\geqq$ **dirige** un conjunto D si es no vacía y verifica:

1. **Transitividad:** si $m, n, p \in D$ tales que $m \geqq n$ y $n \geqq p$, entonces $m \geqq p$
2. **Reflexividad:** si $m \in D \implies m \geqq m$
3. si $m, n \in D$, entonces existe $p \in D$ tal que $p \geqq m$ y $p \geqq n$

Y decimos que $\boldsymbol{m}$ **sucede a** $\boldsymbol{n}$ **en el orden** $\geqq$ y que $\boldsymbol{n}$ **precede a** $\boldsymbol{m}$ si, y solo si, $m \geqq n$.
Un **conjunto dirigido** es un par $(D, \geqq)$ de tal forma que $\geqq$ dirige D.

Y ya podemos definir las redes:

Definition 2. Una **red** es un par $(S, \geqq)$ de tal forma que S es una función y $\geqq$ dirige el dominio de S.

Si S es una función cuyo dominio contiene a D y D es dirigido por $\geqq$, entonces el conjunto $\{S_n, n \in D, \geqq\}$ es la red $(S|D, \geqq)$ donde $S|D$ es S restringido a D.

Definition 3. Una red $(S|D, \geqq)$ **está en un conjunto** $\boldsymbol{A}$ si, y solo si, $S_n \in A, \forall n \in D$.
Se dice que **está finalmente en** $\boldsymbol{A}$ si, y solo si, existe un elemento m de D tal que, si $n \in D$ y $n \geqq m$, entonces $S_n \in A$.
La red **está frecuentemente en** $\boldsymbol{A}$ si, y solo si, para cada $m \in D, \exists n \in D : n \geqq m \; y \; S_n \in A$.

Si $(S|D, \geqq)$ está frecuentemente en A, entonces el conjunto E de todos los $n \in D$ tales que $S_n \in A$ tiene la siguiente propiedad: para cada $m \in D, \exists p \in E : p \geqq m$. Tales subconjuntos de D se denominan **cofinales**. Cada subconjunto cofinal E de D también es dirigido por $\geqq$ porque para elementos $m, n \in E, \exists p \in D | p \geqq m, p \geqq n$ y entonces $\exists q \in E | q \geqq p$.
Y estamos ya en condiciones de definir el concepto de convergencia para redes, de forma similar a como se define para sucesiones en espacios topológicos:

Definition 4. Una red $(S, \geqq)$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{F})$ **converge a** $\boldsymbol{s}$ **relativamente a** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ si, y solo si, está finalmente en cualquier $\mathcal{F}$-entorno de s.

El siguiente teorema es una generalización de una caracterización que ya conocemos usando sucesiones:

Theorem 5. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

1. *$s \in X$ es un punto de acumulación de un subconjunto A de X si, y solo s, hay una red en $A \setminus \{s\}$ que converge a s*

2. *$s \in X$ pertenece a la clausura de un subconjunto A de X si, y solo si, existe una red en A convergente a s*

3. *$A \subset X$ es cerrado si, y solo si, ninguna red de A converge a un punto de $X \setminus A$*

Hay espacios en los que la convergencia es única, en el sentido de que si una red converge a s y también converge a t, entonces $s = t$. Un espacio topológico es un **espacio de Hausdorff** si, y solo si, cada vez que $x \neq y$, existen entornos $U \in \varepsilon(x), V \in \varepsilon(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Theorem 6. *Un espacio topológico es de Hausdorff si, y solo si, cada red en el espacio converge, a lo sumo, a un punto.*

Proof. [$\Longrightarrow$] Si $x \neq y$, entonces $\exists U \in \varepsilon(x), V \in \varepsilon(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Como una red no puede estar finalmente en cada uno de los dos conjuntos disjuntos, entonces ninguna red en X puede converger a ambos x e y.
[$\Longleftarrow$] Supongamos que X no es de Hausdorff. Entonces $\exists x, y \in X | \forall U \in \varepsilon(x), V \in \varepsilon(y), U \cap V \neq \emptyset$. Notemos que $\varepsilon(x)$ y $\varepsilon(y)$ están dirigidos por $\subset$. Ordenamos, entonces, su producto cartesiano $\varepsilon(x) \times \varepsilon(y)$ definiendo que $(U, V) \geqq (U', V') \iff U \subset U', V \subset V'$. Entonces el producto cartesiano está dirigido por $\geqq$. Para cada (U, V) la intersección $U \cap V \neq \emptyset$, y entonces podemos tomar $S_{U,V} \in U \cap V$. Y si $(U, V) \geqq (U', V')$ entonces $S_{(U,V)} \in U \cap V \subset U' \cap V'$ y por tanto la red $\{S_{U,V}, (U, V) \in \varepsilon(x) \times \varepsilon(y), \geqq\}$ converge tanto a s como a t, y hemos probado el contrarrecíproco del resultado. $\square$

Hemos visto en esta prueba cómo la noción de ordenar el producto cartesiano puede ser útil. Este tipo de construcciones se denominan **productos dirigidos**, y pueden extenederse al producto de familias enteras de conjuntos dirigidos.
Consideremos ahora la clase de todas las funciones S tales que $S(m, n)$ está definida siempre que m pertenece a un conjunto dirigido D y n pertenece a un conjunto dirigido E_m. Queremos encontrar una red R con valores en este dominio, de forma que $S \circ R$ converja a $\lim_m \lim_n S(m, n)$ siempre que S sea una función a un espacio topológico y este límite iterado exista. Para solventar esta cuestión, tenemos el siguiente teorema:

Theorem 7. ***Teorema de los límites iterados***
Sea D un conjunto dirigido, sea E_m un conjunto dirigido para cada $m \in D$, sea $F = D \times \left(\prod_{m \in D} E_m\right)$ y para cada $(m, f) \in F$ sea $R(m, f) = (m, f(m))$.
Si $S(m, n)$ es un miembro de un espacio topológico para cada $m \in D, n \in E_m$, entonces $S \circ R$ converge a $\lim_m \lim_n S(m, n)$ siempre que este límite iterado exista.

Proof. Supongamos que $\lim_m \lim_n S(m, n) = s$ y que $U \in \varepsilon(s)$. Debemos encontrar $(m, f) \in F$: $(p, g) \geqq (m, f) \implies S \circ R(p, g) \in U$.
Sea $m \in D$ tal que $\lim_n S(p, n) \in U, \forall p \geqq m$ y entonces, para cada p sea $f(p) \in E_p$ tal que $S(p, n) \in U, \forall n \geqq f(p)$.
Si $p \in D$ no sucede a m, sea $f(p)$ un elemento arbitrario de E_p. Si $(p, g) \geqq (m, f)$, entonces $p \geqq m$ y por tanto $\lim_n S(p, n) \in U$ y como $g(p) \geqq f(p)$, entonces $S \circ R(p, g) = S(p, g(p)) \in U$. $\square$

Y al igual que en el estudio de sucesiones es muy útil el concepto de subsucesión, vamos a definir el de subred:

Definition 8. Una red $\{T_m, m \in E\}$ es una **subred de una red** $\{S_n, n \in D\}$ si, solo si, existe una función $N : E \to D$ tal que

1. $T = S \circ N$ o equivalentemente, $T_i = S_{N_i}, \forall i \in E$
2. $\forall m \in D, \exists n \in E : p \geqq n \implies N_p \geqq m$

Esta segunda condición, intuitivamente, nos dice que cuando crece p, también lo hace N_p.

Es obvio que si S está finalmente en A, entonces la subred $S \circ N$ también está finalmente en A. Notemos también que cada subconjunto cofinal $E \subset D$ es dirigido por el mismo orden, y que $\{S_n, n \in E\}$ es una subred suya.
Supongamos ahora que $N : E \to D$ con E, D dirigidos, es una función isotona, es decir, que $i \geqq j \implies N_i \geqq N_j$ y tal que la imagen de N es cofinal en D. Entonces $S \circ N$ es una subred de S, para cada red S.

Lemma 9. *Sea S una red y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos tal que S está frecuentmente en cada miembro de $\mathcal{A}$, y de tal forma que $\mathcal{A}$ es cerrada para intersecciones. Entonces hay una subred de S que está finalmente en cada miembro de $\mathcal{A}$.*

Este lema lo vamos a aplicar a la convergencia en espacios topológicos. Decimos que s es un **punto de acumulación de la red S** si, y solo si, S está frecuentemente en cada entorno de s. Nótese que una red puede tener uno, muchos, o ningún punto de acumulación. Aunque si una red converge a un punto, entonces este podemos asegurar que es un punto de acumulación. No obstante, una red puede tener un punto de acumulación. pero no converger a este.

Theorem 10. *Un punto s en un espacio topológico es un punto de acumulación de una red S si, y solo si, alguna subred de S converge a s*

Proof. [$\implies$] Sea s un punto de acumulación de S y sea $\mathcal{U}$ la familia de sus entornos. Entonces $\mathcal{U}$ es cerrado para intersecciones y S está frecuentemente en cada miembro de $\mathcal{U}$ por la definición de punto de acumulación. Por tanto, podemos aplicar el lema y hay una subred de S que está finalmente en cada miembro de $\mathcal{U}$, por lo que esta subred converge a s.
[$\impliedby$] Supongamos que s no es un punto de acumulación de S, entonces hay un entorno U de s tal que S no está frecuentemente en U, y entonces S está frecuentemente en el complementario de U. Por tanto, cada subred de S está frecuentemente en el complementario de U y no puede converger a s. $\square$

Por último, establecemos una caracterización de los puntos de acumulación en términos de la clausura. Esta caracterización, de nuevo, ya la conocíamos en el contexto de las sucesiones.

Theorem 11. *Sea $\{S_n, n \in D\}$ una red en un espacio topológico y para cada $n \in D$ sea A_n el conjunto de todos los puntos S_m, para $m \geqq n$.*
Entonces s es un punto de acumulación de $\{S_n, n \in D\}$ si, y solo si, s pertenece a la clausura de $A_n, \forall n \in D$.

Proof. [$\implies$] Para cada n, A_n intersecta cada entorno de s por que S está frecuentemente en cada entorno. Por tanto, s está en la clausura de cada A_n.

[$\Longleftarrow$] Si s no es un punto de acumulación de S, entonces hay un entorno U de s tal que S no está frecuentemente en U. Por tanto, para algún $n \in D$, si $m \geqq n$, entonces $S_m \notin U$, por lo que $U \cap A_n = \emptyset$ y por tanto s no pertenece a la clausura de A_n. $\square$