Tarea 6

Jose Antonio Lorencio Abril

a) Calculemos la base del tangente:

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}(\theta,t)=(-\cosh t\sin\theta,\cosh t\cos\theta,0)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\theta,t)=(\sinh t\cos\theta,\sinh t\sin\theta,1)$$

por lo que obtenemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E=\cosh^2 t,\ F=0,\ G=\cosh^2 t$$

De modo que X es una parametrización isoterma de S, y se verifica

$$S\ minimal \iff \frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=0 \iff (-\cosh t\cos\theta,-\cosh t\sin\theta,0)+(\cosh t\cos\theta,\cosh t\sin\theta,0)=0\checkmark$$

Y vemos que S es minimal.
Ahora, como S es minimal, entonces $H\equiv 0$, y las curvaturas principales son $\lambda_1=-\lambda_2$. De esta forma, un punto será umbilical si, y solo si, $\lambda_1=\lambda_2=0$, si, y solo si, $K\equiv 0$.
Calculemos, entonces K (como la parametrización es isoterma, en particular es ortogonal):

$$K=\frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_t}{\sqrt{EG}}\right)_t+\left(\frac{G_\theta}{\sqrt{EG}}\right)_\theta\right]=-\frac{1}{2\cdot\cosh^2 t}\left[\left(\frac{2\cosh t\sinh t}{\cosh^2 t}\right)_t+\left(\frac{0}{\cosh^2 t}\right)_\theta\right]=-\frac{1}{2\cosh^2 t}\cdot\left(\frac{2\sinh t}{\cosh t}\right)$$

$$=-\frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\cosh^2 t-\sinh^2 t}{\cosh^2 t}=-\frac{1}{\cosh^4 t}\neq 0$$

Y no hay puntos umbilicales.
b)

$$A(S_a)=\int\int_{X^{-1}(S_a)}\sqrt{EG-F^2}d\theta dt=\int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\sqrt{\cosh^4 t}d\theta dt=2\pi\int_{-a}^{a}\cosh^2 tdt=4\pi\int_0^a\cosh^2 tdt$$

$$\int_0^a\cosh^2 tdt=\cosh t\sinh t]_0^a-\int_0^a\sinh^2 tdt=\cosh(a)\sinh(a)-\int_0^a\left(\cosh^2 t-1\right)dt=$$

$$=\cosh(a)\sinh(a)+a-\int_0^a\cosh^2 tdt$$

Por tanto

$$2\int_0^a\cosh^2 tdt=\cosh(a)\sinh(a)+a\implies\int_0^a\cosh^2 tdt=\frac{\cosh(a)\sinh(a)+a}{2}$$

O sea

$$A(S_a)=2\pi(\cosh(a)\sinh(a)+a)$$

c) Para hallar el área de las circunferencias, observamos que, tomando z con $|z| = a$, obtenemos un triángulo rectángulo de altura a, hipotenusa $\|X(\theta_z, t_z)\|$ y el cateto que falta tiene longitud el radio buscado. Podemos tomar, por ejemplo, $z = a$, de modo que es $t = a$, y el punto es

$$X(\theta, a) = (\cosh(a)\cos\theta, \cosh(a)\sin\theta, a) \implies \|X(\theta, a)\| = \sqrt{\cosh^2 a + a^2}$$

Así, por el teorema de pitágoras y llamando r al radio, es

$$r^2 + a^2 = \cosh^2 a + a^2 \implies r^2 = \cosh^2 a \overset{r>0}{\implies} r = \cosh a$$

Por tanto

$$A\left(\overline{S}_a\right) = 2A\left(\mathbb{D}_{\cosh(a)}\right) = 2\pi\cosh^2 a$$

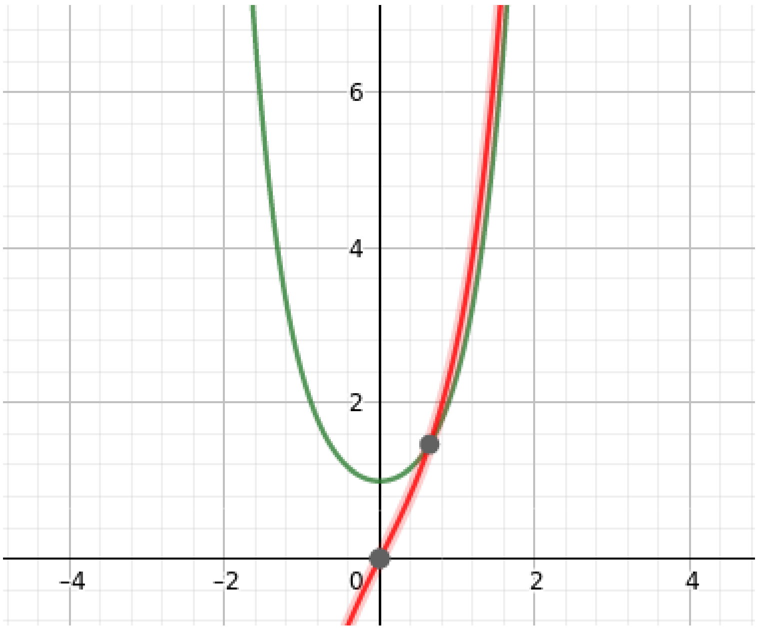
Y, entonces,

$$A\left(\overline{S}_a\right) < A(S_a) \iff 2\pi\cosh^2 a < 2\pi(\cosh a \sinh a + a) \iff \cosh^2 a < \cosh a \sinh a + a$$

$$\iff \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^2 < \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^a - e^{-a}}{2} + a \iff \frac{e^{2a} + 2 + e^{-2a}}{4} < \frac{e^{2a} - 1 + 1 - e^{-2a}}{4} + a$$

$$\iff \frac{2 + e^{-2a}}{4} < \frac{-e^{-2a}}{4} + a \iff 1 + e^{-2a} < 2a$$

Y, cuando $a \to \infty$, el primer miembro de la desigualdad tiende a 1, mientras que el segundo tiende a ∞, por lo que $\exists a_0 | \forall a > a_0 \to A\left(\overline{S}_a\right) < A(S_a)$.
Analicemos ahora qué ocurre para valores pequeños de a. Tomando $a = 0$, vemos como $A\left(\overline{S}_a\right) = 2\pi > 0 = A(S_a)$, por lo que el a_0 mencionado antes, será $a_0 > 0$. Las gráficas en función de a (obviando el factor 2π) son así:



Y vemos como nuestras conjeturas eran correctas.
Podemos, entonces, intentar determinar, aproximadamente este a, lo que equivale a encontrar un 0 de $g(a) = 1 + e^{-2a} - 2a$, que Wolfram Alpha aproxima por

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(W_n\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right) \approx 0.639232$$