Tarea 1

Jose Antonio Lorencio Abril

Demostrar la unicidad de la descomposición obtenida en el Teorema 2 del apartado VII 9 del texto.

Demostrada la existencia de la descomposición, dada por

$$P_c(B) = \beta P_S(B) + (1-\beta) P_{ac}(B)$$

donde P_S es singular ($\exists C \in \mathcal{B}_k / \lambda_k(C) = 0,\ P_S(C) = 1$) y P_{ac} absolutamente continua, veamos que esta es única.

Supongamos que tuviéramos otra descomposición

$$P_c(B) = \beta' Q_S(B) + \left(1-\beta'\right) Q_{ac}(B)$$

con un $C' \in \mathcal{B}_k$ tal que $Q_S(C') = 1,\ \lambda_k(C') = 0$ (Q_S singular) y Q_{ac} absolutamente continua.

Anteriormente, en la demostración, se ve que

$$P_c(C) = \beta$$

y, tenemos que

$$P_c\left(C'\right) = \beta P_S\left(C'\right) + (1-\beta) P_{ac}\left(C'\right) \overset{*}{=} \beta P_S\left(C'\right) \overset{**}{\leq} \beta$$

Donde $*$ se debe a que C' es de medida lebesgue 0, por lo que la probabilidad en una distribución absolutamente continua como lo es P_{ac} es 0.

$**$ es obvio, pues $P_S(C') \leq 1$.

Por otro lado, tenemos que

$$P_c\left(C'\right) = \beta', \qquad P_c(C) = \beta' Q_S(C) \leq \beta'$$

usando los mismos argumentos, pero sobre la segunda descomposición.

Por lo tanto, tenemos que

$$\beta' = P_c\left(C'\right) \leq \beta$$
$$\beta = P_c(C) \leq \beta'$$

O sea, que

$$\beta = \beta' \ y \ P_c\left(C'\right) = P_c(C) = \beta$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{cases} P_c(C') = \beta P_S(C') = \beta \\ P_c(C) = \beta Q_S(C) = \beta \end{cases} \implies P_S\left(C'\right) = Q_S(C) = 1$$

Además,
$$Q_S\left(C^c\right)=1-Q_S\left(C\right)=1-1=0$$

Ahora bien, tenemos que

$$P_c\left(B\cap C\right)\overset{***}{=}\beta Q_S\left(B\cap C\right)+\beta Q_S\left(B\cap C^c\right)=\beta Q_S\left(B\right)$$

donde $***$ es una forma inteligente de escribir esta probabilidad. Usamos que $Q_S\left(B\cap C^c\right)\leq Q_S\left(C^c\right)=0$, para escribir esa probabilidad como la suma de las probabilidades del suceso intersecado con dos sucesos complementarios.

Por lo tanto, se tiene que
$$Q_S\left(B\right)=\frac{1}{\beta}P_c\left(B\cap C\right)\overset{*4}{=}P_S\left(B\right)$$

$*4$ se obtiene anteriormente, en la demostración de la existencia. En la ecuación (6).

Recapitulando todo lo anterior, tenemos que

$$\beta P_S\left(B\right)+\left(1-\beta\right)P_{ac}\left(B\right)=P_c\left(B\right)=\beta' Q_S\left(B\right)+\left(1-\beta'\right)Q_{ac}\left(B\right)=\beta P_S\left(B\right)+\left(1-\beta\right)Q_{ac}\left(B\right)$$

De donde se deduce que
$$Q_{ac}\left(B\right)=P_{ac}\left(B\right)$$

y tenemos que la descomposición debe ser la misma que teníamos desde un primer momento.