Bloque 1. Geodésicas en superficies

Luis J. Alías

1. El transporte paralelo

1.1. La derivada covariante

Definición 1.1 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S. Un* **campo de vectores a lo largo de α** *es una aplicación $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $V(t) \in \mathbb{R}^3 = T_{\alpha(t)}S \oplus T_{\alpha(t)}^{\perp}S$. Se dice que V es* **diferenciable** *si lo es como aplicación de I a $\mathbb{R}^3$; y se dice que es* **tangente** *a S a lo largo de α si $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, para todo $t \in I$. La familia de los campos de vectores diferenciables y tangentes a lo largo de una curva α se representa por $\mathfrak{X}(\alpha)$.*

Ejemplo 1.2 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S. Los siguientes son algunos ejemplos de campos diferenciables a los largo de α.*

a) La **velocidad** *$\alpha'(t)$.* c) El campo normal unitario, $N(t) := N(\alpha(t))$

b) La **rotación de la velocidad**, *$J\alpha'(t) = N(\alpha(t)) \wedge \alpha'(t)$.*

c) La **aceleración** *$\alpha''(t)$.*

d) La derivada $V'(t)$ de un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Definición 1.3 *Sea $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo de vectores tangente y diferenciable a lo largo de una curva $\alpha : I \longrightarrow S$. Se define la* **derivada covariante** *(o* **derivada intrínseca***) de V como la parte tangente de V', la derivada usual de V. Es decir,*

$$\frac{DV}{dt}(t) := V'(t)^{\top} = V'(t) - V'(t)^{\perp} = V'(t) - \langle V'(t), N(t)\rangle N(t).$$

Desde luego, $\frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Además, para una curva fija α, la derivada covariante puede verse como un operador de la forma $\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$ dado por $V \rightsquigarrow \frac{DV}{dt}$, que es independiente de la orientación elegida.

Proposición 1.4 (La derivada covariante es intrínseca) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada y sea (U,X) una parametrización de S tal que $\alpha(t) \in X(U)$ para todo $t \in J \subseteq I$. Para cada $t \in J$, consideremos*

$$\tilde{\alpha}(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$$

la expresión en coordenadas de α, y $a(t)$ y $b(t)$ las coordenadas de $V(t)$ en la base de los campos coordenados de X, es decir,

$\in \mathfrak{X}(\alpha)$

$$V(t) = a(t)\frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(t)) + b(t)\frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(t)).$$

Entonces, para cada $t \in J$, la derivada covariante de V viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt}(t) &= \left(a'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(t) + (a(t)v'(t) + b(t)u'(t))\Gamma_{12}^1(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(t)\right)\frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(t)) \\ &+ \left(b'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(t) + (a(t)v'(t) + b(t)u'(t))\Gamma_{12}^2(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(t)\right)\frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(t)),\end{aligned}$$

donde, para simplificar la notación, hemos denotado $\Gamma_{ij}^k(\tilde{\alpha}(t))$ simplemente por $\Gamma_{ij}^k(t)$ para cada $1 \leq i, j, k \leq 2$.

Proposición 1.5 (Linealidad y regla de Leibniz para la derivada covariante) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S. Si $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces $V + W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $fV \in \mathfrak{X}(\alpha)$, y se tienen las siguientes propiedades:*

i) $\dfrac{D}{dt}(V+W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$,

ii) $\dfrac{D}{dt}(fV) = f'V + f\dfrac{DV}{dt}$,

iii) $\langle V, W\rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.

1.2. Campos de vectores paralelos

Definición 1.6 *Se dice que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es* **paralelo** *a lo largo de α si $\dfrac{DV}{dt} = \mathbf{0}$.*

Proposición 1.7 *Si $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ son campos paralelos a lo largo de $\alpha : I \longrightarrow S$, se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aV + bW$ es también un campo paralelo.*

ii) *El producto $\langle V, W\rangle$ es constante. En particular, la norma $\|V\|$, y el ángulo $\measuredangle(V,W)$ son constantes.*

Prop 1.4

$$V = a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$$

$a(t), b(t)$
$u(t), v(t)$

$$V' = \frac{dV}{dt} =$$

$$\underbrace{a'\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)}_{tg} + a\left[\underbrace{\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}}_{\Gamma_{11}^1\frac{\partial X}{\partial u}+\Gamma_{11}^2\frac{\partial X}{\partial v}+eN}(u,v)u' + \overbrace{\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}}^{\Gamma_{12}^1\frac{\partial X}{\partial u}+\Gamma_{12}^2\frac{\partial X}{\partial v}+fN}(u,v)v'\right] + \underbrace{b'\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)}_{tg} + b\left[\overbrace{\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}}^{}(u,v)u' + \underbrace{\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}}_{\Gamma_{22}^1\frac{\partial X}{\partial u}+\Gamma_{22}^2\frac{\partial X}{\partial v}+gN}(u,v)v'\right]$$

Así,

$$\frac{DV}{dt} = (V')^T = \left[a' + a\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1(av'+bu') + b\Gamma_{22}^1 v'\right]\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$$

$$+ \left[b' + a\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2(av'+bu') + b\Gamma_{22}^2 v'\right]\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$$

Prop 15

$$\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$\frac{D}{dt}(V+W) = ((V+W)')^T = (V'+W')^T = V'^T + W'^T = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$\frac{D}{dt}(fV) = f'V + f\frac{DV}{dt}$$

$$\frac{D}{dt}(fV) = ((fV)')^T = (f'V+fV')^T = \underbrace{(f'V)^T}_{\substack{= f'V \\ \text{porque } V\in\mathfrak{X}(\alpha)}} + (fV')^T = f'V + f(V')^T = f'V + f\frac{DV}{dt}$$

$$\langle V,W\rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$$

$$\langle V,W\rangle' = \langle V',W\rangle + \langle V,W'\rangle = \langle \frac{DV}{dt} + (V')^\perp, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} + (W')^\perp\rangle =$$

$$= \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \underbrace{\langle (V')^\perp, W\rangle}_{=0} + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle + \underbrace{\langle V, (W')^\perp\rangle}_{=0} = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle \quad //$$

Prop 1.7

(i) $V(t), W(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paralelos

$a, b \in \mathbb{R} \to Z(t) = aV(t) + bW(t)$

$$\frac{DZ}{dt}(t) = a\frac{DV}{dt}(t) + b\frac{DW}{dt}(t) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Z es paralelo

(ii) $\langle V, W\rangle(t) = \langle V(t), W(t)\rangle : I \to \mathbb{R}$

$$\xrightarrow{d/dt} \frac{d}{dt}(\langle V, W\rangle) = \langle \underbrace{\frac{DV}{dt}}_{\vec{0}}, W\rangle + \langle V, \underbrace{\frac{DW}{dt}}_{\vec{0}}\rangle = 0$$

Así, $\langle V, W\rangle(t)$ es cte.

$$\|V\| = \sqrt{\underbrace{\langle V, V\rangle}_{cte}} \Bigg\} cte$$

$$\cos(\measuredangle(V, W)(t)) = \frac{\overbrace{\langle V(t), W(t)\rangle}^{cte}}{\underbrace{\|V(t)\|}_{cte}\underbrace{\|W(t)\|}_{cte}} \Bigg\} cte$$

$V, W \neq \vec{0}$

¿Qué pasa con el producto vectorial?

$V, W : I \to \mathbb{R}^3$ (no necesariamente tangentes)

$V \wedge W(t) = V(t) \wedge W(t) \in \mathbb{R}^3$

$$(V \wedge W)' = V' \wedge W + V \wedge W' \neq \frac{DV}{dt} \wedge W + V \wedge \frac{DW}{dt}$$

depende

Proposición 1.8 (La ecuación diferencial extrínseca de los campos paralelos) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S con aplicación de Gauss N. Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y solo si satisface la siguiente ecuación diferencial (en $\mathbb{R}^3$):*

$$V'(t) + \langle V(t), N'(t) \rangle N(t) = \mathbf{0},$$

donde $N(t) = N(\alpha(t))$.

Proposición 1.9 (La ecuación diferencial intrínseca de los campos paralelos) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada y sea (U, X) una parametrización de S tal que $\alpha(t) \in X(U)$ para todo $t \in J \subseteq I$. Para cada $t \in J$, consideremos*

$$\tilde{\alpha}(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$$

la expresión en coordenadas de α. Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si su expresión en coordenadas satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1(u,v) + (av' + bu')\Gamma_{12}^1(u,v) + bv'\Gamma_{22}^1(u,v) & = & 0 \\ \\ b' + au'\Gamma_{11}^2(u,v) + (av' + bu')\Gamma_{12}^2(u,v) + bv'\Gamma_{22}^2(u,v) & = & 0 \end{cases}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son las coordenadas de $V(t)$ en la base de los campos coordenados de X, es decir,

$$V(t) = a(t)\frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(t)) + b(t)\frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(t)).$$

Teorema 1.10 (Existencia y unicidad de campos paralelos) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S, y sea $\mathbf{v} \in T_{\alpha(t_0)}S$ para un cierto $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo a lo largo de α con $V(t_0) = \mathbf{v}$.*

1.3. El transporte paralelo

Definición 1.11 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada y $a, b \in I$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Dado un vector $\mathbf{v} \in T_pS$, se define el* **transporte paralelo** *de $\mathbf{v}$ a lo largo de α en el punto q como el vector $\mathbf{w} = V(b) \in T_qS$, siendo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ el único campo paralelo con $V(a) = \mathbf{v}$.*

El transporte paralelo determina una aplicación $P_\alpha = P_a^b(\alpha) : T_pS \longrightarrow T_qS$, dada por

$$P_\alpha(\mathbf{v}) = P_a^b(\alpha)(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = V(b),$$

que se llama **aplicación transporte paralelo**.

Teorema 1.12 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada y $a, b \in I$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. El transporte paralelo $P_\alpha = P_a^b(\alpha) : T_pS \longrightarrow T_qS$ es una isometría lineal. Es decir, es una aplicación lineal y biyectiva entre los espacios vectoriales T_pS y TqS que conserva el producto escalar,*

$$\langle P_\alpha(\mathbf{v}_1), P_\alpha(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \qquad \textit{para todo par de vectores } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pS.$$

Como veremos en el ejercicio 8, el transporte paralelo a lo largo de α no depende de la parametrización de la curva.

Prop 1.8

$$V \circ X(\gamma) \text{ parallelo} \iff \frac{DV}{dt}(t) = \vec{0} \iff V'(t) - \langle V'(t), N(t)\rangle N(t) = 0$$

$$\frac{DV}{dt} = (V')^T$$

$$\langle V(t), N(t)\rangle = 0 \xrightarrow{d/dt} \langle V', N\rangle + \langle V, N'\rangle = 0$$

$$\longrightarrow \langle V', N\rangle = -\langle V, N'\rangle$$

$$V'(t) + \langle V(t), N'(t)\rangle N(t) = 0$$

∎

Prop 1.9

$$\frac{DV}{dt} = \text{chorizo}_1 \frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\gamma}) + \text{chorizo}_2 \frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\gamma}) = 0$$

$$\iff \left.\begin{array}{l} \text{chorizo}_1 = 0 \\ \text{chorizo}_2 = 0 \end{array}\right\} //$$

□

Trm 1.10

$\gamma: I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \quad N(t) = N(\gamma(t)) = (N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ conocido

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ conocidas

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

V paralelo $\longleftrightarrow \quad V'(t) + \langle V(t), N'(t) \rangle N(t) = \vec{0} \quad \circledast$

$$\left(\langle V(t), N'(t) \rangle = \sum_{j=1}^{3} V_j(t) \cdot N_j'(t) \right)$$

$$\circledast \longleftrightarrow \begin{pmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ V_3'(t) \end{pmatrix} + \left(\sum_{j=1}^{3} V_j(t) \cdot N_j'(t) \right) \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \forall i = 1,2,3 \qquad V_i'(t) + \sum_{j=1}^{3} V_j(t) \underbrace{N_j'(t) \cdot N_i(t)}_{m_{ij}(t) \in C^\infty(I, \mathbb{R})} = 0$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 N_1' & N_1 N_2' & N_1 N_3' \\ N_2 N_1' & N_2 N_2' & N_2 N_3' \\ N_3 N_1' & N_3 N_2' & N_3 N_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sea, tenemos

V paralelo $\longleftrightarrow \circledast \; \left. \begin{array}{l} V' + MV = 0 \\ m_{ij} \in C^\infty(I, \mathbb{R}) \\ V(t_0) = \vec{V}_0 \end{array} \right\}$ Trm de existencia y unicidad EDO $\rightarrow$ $\exists!$ $V(t)$ solución de $\circledast$ con $V(t_0) = \vec{V}_0$

$V: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Hemos visto que V es tangente a lo largo de γ.

Para que V sea paralelo, debe ser tangente.

¿Es tangente?

V es tangente porque $\langle V, N\rangle(t)$ es constante:

$$\frac{d}{dt}\langle V, N\rangle = \langle V', N\rangle + \langle V, N'\rangle = \langle -\langle V, N'\rangle N, N\rangle + \langle V, N'\rangle =$$

$$V' + \langle V, N'\rangle N = 0$$

$$= -\langle V, N'\rangle + \langle V, N'\rangle = 0$$

y $\langle V, N\rangle$ es cte.

Si la condición inicial es tangente, entonces

$$\langle V(t_0), N(t_0)\rangle = 0 \longrightarrow \langle V, N\rangle(t) = 0$$

y V es tangente a N

Teorema 1.12 Dem

Debe verificar:

1) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_pS$, $P(\vec{v}+\vec{w}) = P(\vec{v}) + P(\vec{w})$

2) $\forall \vec{v} \in T_pS$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda\vec{v}) = \lambda \cdot P(\vec{v})$

3) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_pS$, $\langle P(\vec{v}), P(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$

① $\vec{v} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ V(t)$ paralelo $/ V(a) = \vec{v}$

$\vec{w} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ W(t)$ " $/ W(a) = \vec{w}$

$\vec{v}+\vec{w} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ Z(t)$ " $/ Z(a) = \vec{v}+\vec{w}$

pero $V(t)+W(t)$ es paralelo y $(V+W)(a) = \vec{v}+\vec{w}$

por la unicidad, $Z(t) = V(t)+W(t)$

y es $P(\vec{v}+\vec{w}) = Z(b) = V(b)+W(b) = P(\vec{v})+P(\vec{w})$

② $\vec{v} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ V(t) / V(a) = \vec{v}$ y $P(\vec{v}) = V(b)$

$\lambda\vec{v} \in T_pS \longrightarrow \exists^\circ Z(t) = \lambda V(t) \rightarrow P(\lambda\vec{v}) = \lambda V(b) = \lambda P(\vec{v})$

③ $\vec{v} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ V(t)$ paralelo $/ V(a) = \vec{v}$, $P(\vec{v}) = V(b)$

$\vec{w} \in T_pS \rightsquigarrow \exists^\circ W(t)$ paralelo $/ W(a) = \vec{w}$, $P(\vec{w}) = W(b)$

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle V(a), W(a)\rangle \underset{\text{cte}}{=} \langle V(b), W(b)\rangle = \langle P(\vec{v}), P(\vec{w})\rangle$$

1.4. Ejercicios

1.1. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S. Demuestra que

$$\frac{D(\mathrm{J}\alpha')}{dt} = \mathrm{J}\left(\frac{D\alpha'}{dt}\right).$$

1.2. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S y sean $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ unitarios. Demuestra que si V es paralelo y $W(t)$ es ortogonal a $V(t)$ para todo $t \in I$, entonces W también es paralelo.

1.3. Sea S un plano de la forma $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$ con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si es constante.

b) Comprueba que si α es una curva parametrizada en S con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, entonces $P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$.

c) Concluye que, en un plano, el transporte paralelo no depende de la curva.

1.4. Sea $\alpha : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ el semi-meridiano que va del polo norte $p = (0,0,1)$ al polo sur $q = (0,0,-1)$ dado por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$. Demuestra que, para $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \in T_p\mathbb{S}^2$, se tiene $P_\alpha(\mathbf{v}) = (-v_1, v_2, 0)$. (Indicación: Compruébalo primero cuando $\mathbf{v} = (1,0,0)$ y cuando $\mathbf{v} = (0,1,0)$, y utiliza después la linealidad de P_α).

1.5. Para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, considera $\alpha : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ el semi-meridiano en la esfera que une el polo norte $p = (0,0,1)$ con el polo sur $(0,0,-1)$ dado por $\alpha(t) = (\cos\theta \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} t, \cos t)$. Demuestra que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo si y sólo si verifica la siguiente ecuación diferencial (en $\mathbb{R}^3$)

$$\frac{dV}{dt}(t) + \lambda\alpha(t) = 0,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es la constante dada por $\lambda = \langle V(0), \alpha'(0) \rangle$.Resuelve la ecuación diferencial con la condición inicial $V(0) = (1,0,0) \in T_p\mathbb{S}^2$ y comprueba que el transporte paralelo de $\mathbf{v} = (1,0,0)$ a lo largo de α es $P_\alpha(\mathbf{v}) = (-cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta), 0)$.

1.6. Sea $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$ una curva parametrizada, donde S_1 y S_2 son dos superficies regulares. Sea V un campo de vectores diferenciable a lo largo de α que es tangente a ambas superficies. Supongamos que S_1 y S_2 son tangentes a lo largo de α; es decir, $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para todo $t \in I$.

a) Demuestra que V es paralelo a lo largo de α en S_1 si y sólo si V es paralelo a lo largo de α en S_2.

b) Concluye que el transporte paralelo a lo largo de α es el mismo para ambas superficies.

1.1. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S. Demuestra que

$$\frac{D(\mathrm{J}\alpha')}{dt} = \mathrm{J}\left(\frac{D\alpha'}{dt}\right).$$

(Caso particular de la tarea).

Pero lo hacemos:

$$J\alpha' = N \wedge \alpha' \longrightarrow (J\alpha')' = N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha''$$

$$\frac{D(J\alpha')}{dt} = (J\alpha')' - \langle (J\alpha')', N \rangle N = N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha'' - \langle N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha'', N \rangle N$$

$$= N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha'' - \langle N' \wedge \alpha', N \rangle N - \underbrace{\langle N \wedge \alpha'', N \rangle}_{0} N =$$

$$= N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha'' - \underbrace{\langle N' \wedge \alpha', N \rangle N}_{N' \wedge \alpha'} = N \wedge \alpha''$$

$N' \wedge \alpha'$, porque $N' \perp N$, $\alpha' \perp N$, $\|N\| = 1$

$$J \frac{D\alpha'}{dt} = N \wedge (\alpha'' - \langle \alpha'', N \rangle N) = N \wedge \alpha'' - \langle \alpha'', N \rangle \underbrace{N \wedge N}_{0} = N \wedge \alpha''$$

//

1.2. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S y sean $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ unitarios. Demuestra que si V es paralelo y $W(t)$ es ortogonal a $V(t)$ para todo $t \in I$, entonces W también es paralelo.

$$V \perp W \ \forall t \iff \langle V, W \rangle = 0, \ \forall t \xrightarrow{d/dt} \langle V, W \rangle' = 0$$

O sea

$$\underbrace{\langle \underset{\vec{0}}{\frac{DV}{dt}}, W \rangle}_{0} + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle = 0 \longrightarrow \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\longrightarrow V \perp \underset{\in T_{\alpha(t)}S}{\frac{DW}{dt}} \longrightarrow \frac{DW}{dt} = \lambda(t) W$$

$$\langle W, W \rangle = 1 \longrightarrow 2 \langle \frac{DW}{dt}, W \rangle = 0$$

Así $\lambda(t) = 0, \forall t$ y es $\frac{DW}{dt} = 0 \longrightarrow W$ paralelo //

1.3. Sea S un plano de la forma $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$ con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que un campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si es constante.

b) Comprueba que si α es una curva parametrizada en S con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, entonces $P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$.

c) Concluye que, en un plano, el transporte paralelo no depende de la curva.

a)

$\boxed{\leftarrow}$ V cte $\longrightarrow$ $V' = 0 \longrightarrow \frac{DV}{dt} = 0 \longrightarrow V$ paralelo

$\boxed{\rightarrow}$ V paralelo $\longrightarrow \frac{DV}{dt} = 0$

$$V' = \frac{DV}{dt} + \langle V', N \rangle N = \frac{DV}{dt} - \langle V, N' \rangle N$$

S plano $\rightarrow$ N cte $\longrightarrow N' = 0$

Así, $V' = \frac{DV}{dt} = 0 \xrightarrow[\text{plano}]{} V \equiv \vec{k}$ cte //
concepto

b) El transporte paralelo será la solución de

$$\left.\begin{array}{l} V' + \langle V, N' \rangle N = 0 \\ V(a) = v \end{array}\right\}$$

y será el campo $V(t) = v$ $\forall t$, evaluado en b: $V(b) = v$.

y es, entonces

$$P_\alpha(v) = V(b) = v \quad , \forall v \in T_pS$$ //

(c) Dadas dos curvas en S, α y β, entonces

$$V(t) = v$$

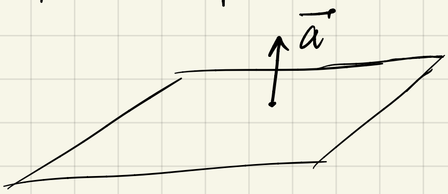
es paralelo a ambas y dadas $\alpha(a_0) = p = \beta(a_1)$
$\alpha(b_0) = q = \beta(b_1)$

el transporte paralelo es, en ambas,

$$P_\alpha(v) = v = P_\beta(v)$$

13 (por Luis)

$S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$ $\quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ unitario



$N(p) = \vec{a}, \ \forall p \in S$

$\alpha : I \to S =$ plano, $\quad \langle \alpha(t), \vec{a} \rangle = c, \ \forall t \quad N(t) = \vec{a} = cte$

$V \in \mathfrak{X}(\alpha), \quad \langle V(t), N(t) \rangle = 0, \ \forall t$

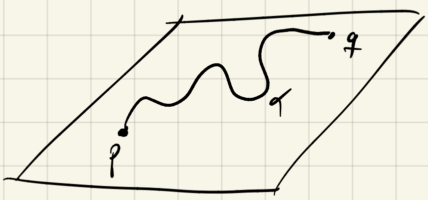
$\langle V(t), \vec{a} \rangle = 0, \ \forall t$

a)

V paralelo a lo largo de $\alpha \leftrightarrow V' + \langle V, \underbrace{N'}_{0} \rangle N = 0 \leftrightarrow V'(t) = \vec{0} \ \forall t$

$\leftrightarrow V(t) = cte = \vec{v}$

b)

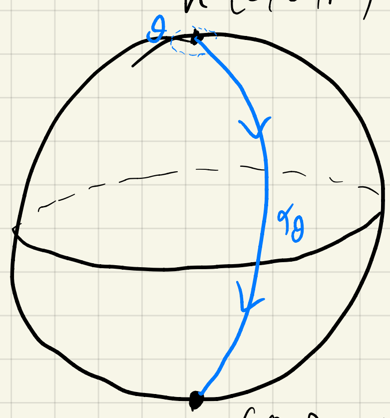


$P : T_p S \longrightarrow T_q S$

$\vec{v} \longmapsto P(\vec{v}) = V(b) = \vec{v}$

1.4 + 1.5 ampliado

$\mathbb{S}^2(r)$



$$N : \mathbb{S}^2(r) \longrightarrow \mathbb{S}^2$$
$$p \longmapsto \frac{1}{r} \cdot p \quad \begin{cases} N(n) = (0,0,1) \\ N(s) = (0,0,-1) \end{cases}$$

$$T_n \mathbb{S}^2(r) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : v_3 = 0\} = T_s \mathbb{S}^2(r)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \alpha_\theta(t) : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2(r)$$

$$\alpha_\theta(t) = (r \cos\theta \operatorname{sen} t, r \operatorname{sen}\theta \cos t, r \cos t)$$

$$\alpha_\theta(0) = (0,0,r) \qquad \alpha_\theta(\pi) = (0,0,-r)$$

$\alpha_\theta(t) = \alpha(t)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ fijo

$$N(t) = N(\alpha(t)) = \frac{1}{r}\alpha(t) = (\cos\theta \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} t, \cos t)$$

$V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, V paralelo a lo largo de $\alpha \iff V' + \langle V, N' \rangle N = \vec{0}$

$$\iff V'(t) + \langle V(t), N'(t) \rangle \frac{1}{r} \alpha(t) = \vec{0}$$

$$N'(t) = (\cos\theta \cos t, \operatorname{sen}\theta \cos t, -\operatorname{sen} t)$$

$$N''(t) = (-\cos\theta \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} t, -\cos t) = -N(t) \longrightarrow \frac{DN'}{dt} = \vec{0}$$

Así, N' es paralelo a lo largo de γ y

$$\langle V(t), N'(t)\rangle = cte = \langle V(0), N'(0)\rangle = \langle V(0), \tfrac{1}{r}\alpha'(0)\rangle$$

y es $\boxed{\frac{dV}{dt}(t) + \lambda\,\alpha(t) = \vec{0}}$ $\quad \lambda = \frac{1}{r}\langle V(0), \frac{1}{r}\alpha'(0)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle V(0), \alpha'(0)\rangle$

$$V(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

$$\frac{dV}{dt}(t) + \lambda\alpha(t) = 0$$

$$\begin{cases} v_1'(t) + \lambda r \cos\theta \sen t = 0, & v_1(0) = v_1 \\ v_2'(t) + \lambda r \sen\theta \sen t = 0, & v_2(0) = v_2 \\ v_3'(t) + \lambda r \cos t = 0, & v_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$$

$$P(\vec{v}) = (-v_1\cos(2\theta) - v_2\sen(2\theta),\ -v_1\sen(2\theta) + v_2\cos(2\theta),\ 0)$$

1.6. Sea $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$ una curva parametrizada, donde S_1 y S_2 son dos superficies regulares. Sea V un campo de vectores diferenciable a lo largo de α que es tangente a ambas superficies. Supongamos que S_1 y S_2 son tangentes a lo largo de α; es decir, $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para todo $t \in I$.

a) Demuestra que V es paralelo a lo largo de α en S_1 si y sólo si V es paralelo a lo largo de α en S_2.

b) Concluye que el transporte paralelo a lo largo de α es el mismo para ambas superficies.

a) Basta ver una implicación, pues para la otra se cambia el papel de las superficies.

Así, supongamos que V es paralelo a lo largo de α en S_1, entonces

$$\frac{D_1 V}{dt} = 0$$

O sea, la proyección de $\frac{dV}{dt}$ sobre $T_{\alpha(t)}S_1$ es 0.

Pero $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2 \quad \forall t \in I$, por lo que $\frac{D_2 V}{dt} = 0$ y

V es paralelo a lo largo de α en S_2.

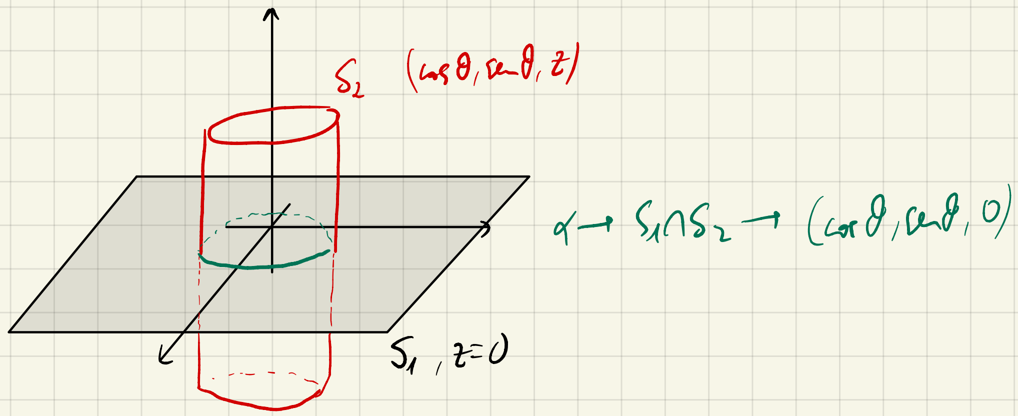
b) Dado $\vec{v} \in T_{\alpha(a)}S_1$, $P_1(\vec{v}) = V(b)$, donde V es la solución de

$$\left.\begin{aligned} V' + \langle V, N' \rangle N = 0 \\ V(a) = \vec{v} \end{aligned}\right\}$$

Por a), esta V coincide en S_1 y en S_2, por lo que

$$P_1(\vec{v}) = V(b) = P_2(\vec{v})$$

Demuestra mediante un contraejemplo que lo anterior no es cierto si S_1 y S_2 no son tangentes a lo largo de α.



$V(t) := \alpha'(t) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

$V' = \alpha''(t) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)$

$N_1 = (0,0,1) \longrightarrow \frac{D_1 V}{dt} = -V(t) \neq 0 \longrightarrow V$ no es paralelo a lo largo de α en S_1

$N_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \longrightarrow \frac{D_2 V}{dt} = 0 \longrightarrow V$ sí es paralelo a lo largo de α en S_2

Demuestra mediante un contraejemplo que lo anterior no es cierto si S_1 y S_2 no son tangentes a lo largo de α.

1.7. En la esfera $\mathbb{S}^2$, considera la curva $\alpha \wedge \beta$ dada por la yuxtaposición de las curvas $\alpha : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ y $\beta : [\pi/4, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dadas por

$$\alpha(t) = X(t, \pi/4) \quad \text{ y } \beta(t) = X(\pi/2, t),$$

donde $X(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$. Sea $\mathbf{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right) \in T_{\alpha(0)}\mathbb{S}^2$. Calcula el transporte paralelo del vector $\mathbf{v}$ a lo largo de $\alpha \wedge \beta$ en el punto $\beta(\pi/2) = (0, 1, 0)$.

1.8. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$, $\alpha(t)$, una curva parametrizada en S y sea $\beta : J \longrightarrow S$ una reparametrización de α de la forma $\beta(s) = \alpha(h(s))$ con $h : J \longrightarrow I$ un cambio de parámetro.

a) Demuestra que si $V(t)$ es un campo de vectores diferenciable tangente a S a lo largo de α entonces el campo $W(s) = V(h(s))$ es un campo de vectores diferenciable tangente a S a lo largo de β y sus derivadas covariantes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{DW}{ds}(s) = h'(s)\frac{DV}{dt}(h(s)), \quad s \in J.$$

b) Concluye que $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si el campo $W = V \circ h \in \mathfrak{X}(\beta)$ es paralelo a lo largo de β.

c) Como consecuencia, demuestra que el transporte paralelo a lo largo de una curva α es independiente de la parametrización de α. Es decir, si consideramos $a, b \in I$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, y tomamos $c, d \in J$ con $h(c) = a$ y $h(d) = b$. Entonces

$$P_a^b(\alpha) = P_c^d(\beta).$$

d) Demuestra que si $p, q \in S$ y $\alpha : [0, 1] \longrightarrow S$ es una curva parametrizada de $p = \alpha(0)$ a $q = \alpha(1)$, el transporte paralelo de q a p a lo largo de $\beta(s) = \alpha(1 - s)$ es el inverso del transporte paralelo de p a q a lo largo de α, es decir, $P_0^1(\alpha)^{-1} = P_0^1(\beta)$.

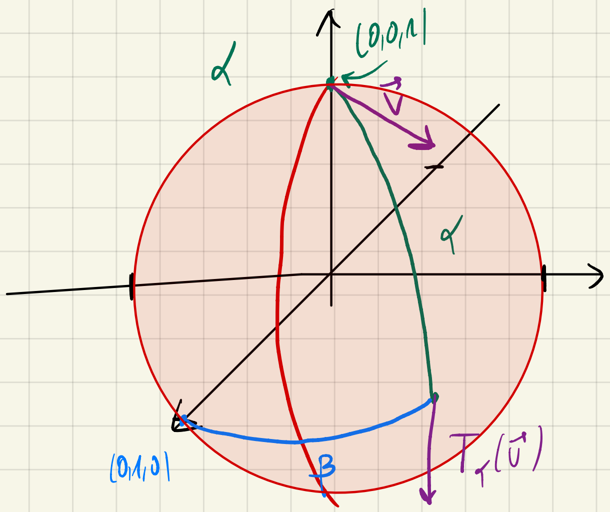
1.7. En la esfera $\mathbb{S}^2$, considera la curva $\alpha \wedge \beta$ dada por la yuxtaposición de las curvas $\alpha : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ y $\beta : [\pi/4, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dadas por

$$\alpha(t) = X(t, \pi/4) \quad \text{y } \beta(t) = X(\pi/2, t),$$

donde $X(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$. Sea $\mathbf{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right) \in T_{\alpha(0)}\mathbb{S}^2$. Calcula el transporte paralelo del vector $\mathbf{v}$ a lo largo de $\alpha \wedge \beta$ en el punto $\beta(\pi/2) = (0, 1, 0)$.

$$\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t \cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \cos t\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t, \cos t\right)$$

$$\beta(t) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos t, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} t, \cos\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, 0\right)$$



Primero calculamos $P_\alpha(\vec{v})$ y después $P_\beta(P_\alpha(\vec{v}))$.

Por el ejercicio 1.5:

$$\left.\begin{array}{l} V_\alpha' + \lambda\, \alpha(t) = 0 \\ V_\alpha(0) = \vec{v} \end{array}\right\} \qquad V_1' + \lambda \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t = 0 \to V_1' = -\lambda \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t$$

$$\to V_1 = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + C_1$$

$$V_2 = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + C_2$$

$$V_3' + \lambda \cos t = 0 \to V_3 = -\lambda \operatorname{sen} t + C_3$$

La condición inicial es

$$(v_1(0), v_2(0), v_3(0)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow v_1(0) = d\,\frac{\sqrt{2}}{2} + c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_2(0) = d\,\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_3(0) = c_3 = 0 \end{array}\right\} c_3 = 0$$

$$d = \langle \bar{v}, q'(0) \rangle = \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\rangle = $$
$$= 1$$

así $c_1 = c_2 = 0$

así $V(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, -\sin t\right)$

$$P_\alpha(\vec{v}) = V_\alpha(b) = V_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -1)$$

Y ahora $P_\beta(0,0,-1) = U(b)$ con

$$\left.\begin{array}{l} U' + \langle U, N' \rangle N = 0 \\ U(0) = (0,0,-1) \end{array}\right\}$$

$N(q) = p \rightarrow N(t) = p(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$\rightarrow N'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

Pero el campo constante $U(t) = (0,0,-1)$ funciona!

$$U' + \langle U, N' \rangle N = 0 + \langle (0,0,-1), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle N = (0+0+0)N = 0$$

Por tanto,

$$P_\beta(0,0,-1) = U(b) = (0,0,-1)$$

y la solución final es $(0,0,-1)$

1.8. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$, $\alpha(t)$, una curva parametrizada en S y sea $\beta : J \longrightarrow S$ una reparametrización de α de la forma $\beta(s) = \alpha(h(s))$ con $h : J \longrightarrow I$ un cambio de parámetro.

a) Demuestra que si $V(t)$ es un campo de vectores diferenciable tangente a S a lo largo de α entonces el campo $W(s) = V(h(s))$ es un campo de vectores diferenciable tangente a S a lo largo de β y sus derivadas covariantes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{DW}{ds}(s) = h'(s)\frac{DV}{dt}(h(s)), \quad s \in J.$$

b) Concluye que $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si el campo $W = V \circ h \in \mathfrak{X}(\beta)$ es paralelo a lo largo de β.

c) Como consecuencia, demuestra que el transporte paralelo a lo largo de una curva α es independiente de la parametrización de α. Es decir, si consideramos $a, b \in I$ con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, y tomamos $c, d \in J$ con $h(c) = a$ y $h(d) = b$. Entonces

$$P_a^b(\alpha) = P_c^d(\beta).$$

d) Demuestra que si $p, q \in S$ y $\alpha : [0,1] \longrightarrow S$ es una curva parametrizada de $p = \alpha(0)$ a $q = \alpha(1)$, el transporte paralelo de q a p a lo largo de $\beta(s) = \alpha(1-s)$ es el inverso del transporte paralelo de p a q a lo largo de α, es decir, $P_0^1(\alpha)^{-1} = P_0^1(\beta)$.

a) Si $V(t) \in \mathfrak{X}(\alpha) \Rightarrow W(s) \in \mathfrak{X}(\beta)$

$$\frac{DW}{ds}(s) = (W'(s))^T = \left(\frac{d}{ds}(V(h(s)))\right)^T = (V'(h(s)) \cdot h'(s))^T$$

y ya

$$\left(\frac{dW}{ds}(s)\right)^T = \left(h'(s)\frac{dV}{dt}(h(s))\right)^T = h'(s) \cdot \left(\frac{dV}{dt}(h(s))\right)^T$$

$$= h'(s)\frac{DV}{dt}(h(s))$$

$$\rightarrow \frac{DW}{ds}(s) = h'(s) \cdot \frac{DV}{dt}(h(s))$$

(b) $\frac{DW}{ds} = h' \frac{DV}{dt}(h(s)) = 0 \leftrightarrow \frac{DV}{dt}(h) = 0$

$\leftarrow$ ok

$\rightarrow$ ok, porque h es reparametrización

(c) $\forall \vec{v} \in T_pS$, $P^b_{a,\alpha}(\vec{v}) = V(b)$,

V el campo paralelo α / $V(a) = \vec{v}$

$P^d_{c,\beta}(\vec{v}) = W(d)$

W el campo paralelo α/ $W(c) = \vec{v}$

V paralelo $\rightarrow$ $W = V \circ h$ paralelo

Por la unicidad, el W debe ser $W(s) = V(h(s))$

y

$W(d) = V(h(d)) = V(b)$ //

(d) $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$

$P^1_0(\bar{\alpha}) : T_qS \rightarrow T_pS$

Así, $P^1_0(\bar{\alpha})(P^1_0(\alpha)(\vec{v})) = \vec{v}$ //

$P^1_{0,\alpha}(\vec{v}) = \underset{\vec{w}}{\underset{\shortparallel}{V(1)}}$, V el campo paralelo α/ $V(0) = \vec{v}$

$P^1_{0,\bar{\alpha}}(\vec{w}) = W(1)$, W el campo paralelo $\bar{\alpha}$ t.q. $W(0) = \vec{w}$

$W(1) = V(0) = \vec{v}$

$W(s) = V(1-s)$

2. Geodésicas

2.1. Geodésicas

Definición 2.1 *Sea $\gamma : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada. Se dice que γ es una* **geodésica** *de S si su campo velocidad γ' es paralelo, es decir, si $\frac{D\gamma'}{dt} = \mathbf{0}$.*

A continuación, destacamos algunas propiedades de las geodésicas:

a) Si γ es una geodésica, entonces $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

b) En particular, una geodésica $\gamma(t)$ es constante si y sólo si existe un $t_0 \in I$ tal que $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$. Toda geodésica no constante es una curva regular.

c) Las geodésicas se conservan por isometrías locales. Es un concepto intrínseco.

d) La reparametrización de una geodésica (no constante) es también una geodésica si y sólo si el cambio de parámetro es afín, $h(s) = as + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.2 (La ecuación diferencial extrínseca de las geodésicas) *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S con aplicación de Gauss N. α es una geodésica si y solo si satisface la siguiente ecuación diferencial (en $\mathbb{R}^3$):*

$$\alpha''(t) + \langle \alpha'(t), N'(t) \rangle N(t) = \mathbf{0},$$

donde $N(t) = N(\alpha(t))$.

Ejemplo 2.3 (Geodésicas del plano) *Sea S un plano de la forma $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$ con $\vec{a} = \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$. Dado $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$, la única geodésica del plano que sale de p con velocidad inicial $\mathbf{v}$ es la recta parametrizada por*

$$\gamma(t) = p + t\mathbf{v}.$$

Ejemplo 2.4 (Geodésicas de la esfera) *Sea $S = \mathbb{S}^2(r)$ una esfera de radio r de la forma $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, p \rangle = r^2\}$ con $r > 0$. Dado $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$, la única geodésica de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$ que sale de p con velocidad inicial $\mathbf{v}$ es la circunferencia máxima parametrizada por*

$$\gamma(t) = \cos\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r}t\right)p + \frac{r}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r}t\right)\mathbf{v}.$$

Ejemplo 2.5 (Geodésicas del cilindro) *Sea S un cilindro de la forma $S = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ con $r > 0$. Dado $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$, obsérvese que*

$$T_pS = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : p_1v_1 + p_2v_2 = 0\}.$$

(d)

$$\begin{array}{ccc} t\in I & \xrightarrow{\alpha} & S \\ h\uparrow & \nearrow & \\ s\in J & & \end{array} \qquad \beta(s)=\alpha(h(s))$$

$\beta'(s)=h'(s)\,\alpha'(h(s))$ $\qquad$ α geodésica no cte

$$\frac{D\beta'}{ds}(s)=h''(s)\underbrace{\alpha'(h(s))}_{\neq\vec{0}\ \forall s}+(h'(s))^2\cancel{\frac{D\alpha'}{dt}}^{\,0}(h(s))$$

(porque si α' se anulase en un punto, se anularía en todos, y α sería cte)

Ø Luego

$$\frac{D\beta'}{ds}(s)=h''(s)\,\alpha'(h(s))=\vec{0}\iff h''(s)=0\ \forall s\in J \iff h'(s)=a \text{ cte}$$

$\iff h(s)=as+b \quad a,b\in\mathbb{R}$

y h debe ser afín

Prop. 2.2

$V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo $\Leftrightarrow$ $V' + \langle V, N' \rangle N = \vec{0}$

$V = \alpha'$ α geodésica $\Leftrightarrow$ $\alpha'' + \langle \alpha', N' \rangle N = \vec{0}$

Ejemplos

PLANO

$S = \{ p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c \}$ $\left.\begin{array}{l} \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ unitario} \\ c \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $N(p) = \vec{a}, \ \forall p \in S$

Sea $\alpha : I \longrightarrow S$, $\langle \alpha(t), \vec{a} \rangle = c$

$N(t) = \vec{a}$

$\alpha''(t) + \langle \alpha', \cancel{N'}^{\,0} \rangle N = \vec{0} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha''(t) = \vec{0} \\ \alpha(0) = p \in S \\ \alpha'(0) = v \in T_pS \end{array}\right\}$

$\alpha''(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \\ z''(t) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) = a_1 t + b_1 \\ y(t) = a_2 t + b_2 \\ z(t) = a_3 t + b_3 \end{array}\right\}$

$\underset{(p_1, p_2, p_3)}{\alpha(0) = p} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x(0) = p_1 = b_1 \\ y(0) = p_2 = b_2 \\ z(0) = p_3 = b_3 \end{array}\right\}$ $\underset{(v_1, v_2, v_3)}{\alpha'(0) = \vec{v}} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x'(0) = v_1 = a_1 \\ y'(0) = v_2 = a_2 \\ z'(0) = v_3 = a_3 \end{array}\right\}$

$\alpha(t) = (v_1 t + p_1, v_2 t + p_2, v_3 t + p_3)$
$= p + t\vec{v}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

ESFERA

$S = \mathbb{S}^2(r) \qquad N(p) = \frac{1}{r} p$

$\gamma : I \to \mathbb{S}^2(r)$ geodesica $\longleftrightarrow \gamma'' + \langle \gamma', N' \rangle N = 0$

$$\Updownarrow$$

$N(t) = \frac{1}{r} \gamma(t)$

$\gamma'' + \frac{1}{r^2} \underbrace{\langle \gamma', \gamma' \rangle}_{\substack{cte \\ \| \\ \|\vec{v}\|^2}} \gamma = 0$

$N'(t) = \frac{1}{r} \gamma'(t)$

Así,

$$\boxed{\begin{gathered} \gamma''(t) + \frac{\|\vec{v}\|^2}{r^2} \gamma(t) = 0 \\ \gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = \vec{v} \end{gathered}}$$

$c = \frac{\|\vec{v}\|^2}{r^2}$

Si $\boxed{c = 0} \to \gamma(t) = p, \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\boxed{c > 0}$

$$\left.\begin{aligned} x''(t) + c\, x(t) &= 0 \\ y''(t) + c\, y(t) &= 0 \\ z''(t) + c\, z(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \to \lambda^2 + c = 0 \to \lambda^2 = -c \to \lambda = \pm i\sqrt{c}$$

$e^{i\sqrt{c}t} \to \cos(\sqrt{c}t), \ \operatorname{sen}(\sqrt{c}t)$

base de soluciones

$\{\cos(\sqrt{c}t), \operatorname{sen}(\sqrt{c}t)\}$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\sqrt{c}\,t) + B_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c}\,t) \\ y(t) &= A_2 \cos(\sqrt{c}\,t) + B_2 \operatorname{sen}(\sqrt{c}\,t) \\ z(t) &= A_3 \cos(\sqrt{c}\,t) + B_3 \operatorname{sen}(\sqrt{c}\,t) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A_1 = p_1 & \quad x'(0) &= \sqrt{c}\,B_1 = v_1 \\ y(0) &= A_2 = p_2 & \quad y'(0) &= \sqrt{c}\,B_2 = v_2 \\ z(0) &= A_3 = p_3 & \quad z'(0) &= \sqrt{c}\,B_3 = v_3 \end{aligned}\right\} B_i = \frac{v_i}{\sqrt{c}}$$

O sea

$$\alpha(t) = \cos(\sqrt{c}\,t)\,p + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{c}\,t)}{\sqrt{c}}\vec{v}$$

Como $c = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{r^2}$

$$\boxed{\alpha(t) = \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}t\right)p + \frac{r}{\|\vec{v}\|}\operatorname{sen}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}t\right)\vec{v}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \cos^2 r^2 + \frac{r^2}{\cancel{\|\vec{v}\|^2}}\operatorname{sen}^2 \cancel{\|\vec{v}\|^2} = r^2 \quad \underline{\text{OK}}$$

CILINDRO

$$f(x,y,z)=c$$

c valor regular de f: $\nabla f(x,y,z)\neq(0,0,0)$ $\forall(x,y,z)\in f^{-1}(c)$

$$N=\pm\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{f}=r^2$$

$$\nabla f=(2x,2y,0)$$

$$\|\nabla f\|^2=4(x^2+y^2)=4r^2>0$$

$$N(x,y,z)=\frac{1}{r}(x,y,0)$$

$\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ en S $\quad(x^2(t)+y^2(t)=r^2)$

$$N(\alpha(t))=N(t)=\frac{1}{r}(x(t),y(t),0)$$

$$(x'',y'',z'')+\frac{1}{r^2}\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)(x(t),y(t),0)=(0,0,0)$$

$\|\alpha'(t)\|^2=x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2=cte=\|\vec{v}\|^2 \qquad \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

$$\left.\begin{array}{l} x''+\frac{1}{r^2}(x'^2+y'^2)x=0 \\ y''+\frac{1}{r^2}(x'^2+y'^2)y=0 \\ z''=0 \end{array}\right\}$$

$$x''+\frac{v_1^2+v_2^2}{r^2}x=0$$

$(*)$

$$y''+\frac{v_1^2+v_2^2}{r^2}y=0$$

$$\boxed{z(t)=p_3+tv_3}\longrightarrow z'(t)=v_3$$

$(*)$ $x'^2+y'^2+z'^2=cte=\|\vec{v}\|^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$

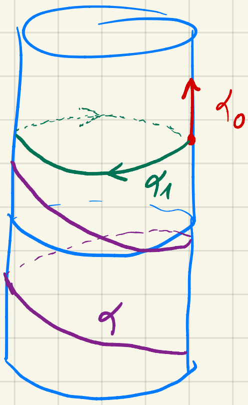
$\longrightarrow x'^2+y'^2=v_1^2+v_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} x'' + C\,x = 0 \\ y'' + C\,y = 0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{C = 0} \rightarrow$ $x(t) = p_1 + t v_1 = p_1$

$y(t) = p_2$

$\alpha_0(t) = (p_1, p_2, p_3 + t v_3) = p + t(0, 0, v_3)$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad$ "
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad p + t\vec{v}$



$\boxed{C \neq 0} \rightarrow C > 0$

$\forall$ u

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A_1 \cos(\sqrt{C}\,t) + B_1 \operatorname{sen}(\sqrt{C}\,t) \\ y(t) = A_2 \cos(\sqrt{C}\,t) + B_2 \operatorname{sen}(\sqrt{C}\,t) \\ z(t) = p_3 + t v_3 \end{array}\right\}$$

$A_1 = x(0) = p_1 \qquad A_2 = y(0) = p_2$

$x'(0) = v_1 = B_1\sqrt{C} \rightarrow B_1 = \dfrac{v_1}{\sqrt{C}}$

$y'(0) = v_2 = B_2\sqrt{C} \rightarrow B_2 = \dfrac{v_2}{\sqrt{C}}$

$\rightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ //

Si $v_3 = 0 \rightarrow \alpha_1(t) = (x(t), y(t), p_3)$

En este caso, debemos distinguir dos casos. Si $\mathbf{v} = (0,0,v_3) \in T_pS$*, entonces la única geodésica del cilindro que sale de* p *con velocidad inicial* $\mathbf{v}$ *es la recta parametrizada por*

$$\gamma(t) = p + t\mathbf{v} = (p_1, p_2, p_3 + tv_3).$$

Si $\mathbf{v} \neq (0,0,v_3)$*, entonces la única geodésica del cilindro que sale de* p *con velocidad inicial* $\mathbf{v}$ *es la hélice parametrizada por*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), p_3 + tv_3),$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= p_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}}{r} t\right) + \frac{rv_1}{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}}{r} t\right) \\ \gamma_2(t) &= p_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}}{r} t\right) + \frac{rv_2}{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - v_3^2}}{r} t\right). \end{aligned}$$

En particular, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$*, la hélice* $\gamma(t)$ *no es más que la circunferencia horizontal dada por*

$$\gamma(t) = \cos\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r} t\right)(p_1, p_2, 0) + \frac{r}{\|\mathbf{v}\|} \operatorname{sen}\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r} t\right)(v_1, v_2, 0) + (0,0,p_3).$$

2.2. Existencia y unicidad de geodésicas en una superficie

Proposición 2.6 (La ecuación diferencial intrínseca de las geodésicas) *Sea* $\alpha : I \longrightarrow S$ *una curva parametrizada y sea* (U, X) *una parametrización de* S *tal que* $\alpha(t) \in X(U)$ *para todo* $t \in J \subseteq I$*. Para cada* $t \in J$*, consideremos*

$$\tilde{\alpha}(t) = (X^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$$

la expresión en coordenadas de α*. La curva* α *es una geodésica de* S *si y sólo si su expresión en coordenadas satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^1(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^1(u,v) = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^2(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^2(u,v) = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.7 *Sea* S *una superficie regular y* $p \in S$*. Para cada vector* $\mathbf{v} \in T_pS$ *existe una única geodésica* $\gamma_{\mathbf{v}} : I_{\mathbf{v}} \to S$*, con* $I_{\mathbf{v}}$ *un intervalo abierto y verificando las siguientes condiciones:*

i) $0 \in I_{\mathbf{v}}$*,* $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p$ *y* $\gamma'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$*;*

ii) Si $\alpha : J \to S$ *es otra geodésica definida sobre un intervalo abierto* J *con* $0 \in J$*,* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \mathbf{v}$*, entonces* $J \subset I_{\mathbf{v}}$ *y* $\alpha = \gamma_{\mathbf{v}}|_J$*.*

Prop 2.6

Tenemos $\alpha(t) = X(\tilde{\alpha}(t)) = X(u(t), v(t))$

$$\to \alpha'(t) = u'(t)\,\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + v'(t)\,\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$$

Así,

α geodésica $\leftrightarrow$ $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ en $\mathbb{R}^2$ es solución de la EDO intrínseca para campos paralelos del tema anterior

$a \to u'$, $a' \to u''$

$b \to v'$, $b' \to v''$

Teorema 2.7

Dem

Dado $p \in S$, $\vec{v} \in T_pS$, denotamos

$$\mathcal{J}_{p,\vec{v}} = \{ (I, \alpha) : I \subset \mathbb{R} \text{ abto}, 0 \in I, \alpha : I \to S \text{ geodésica con } \alpha(0)=p, \alpha'(0)=\vec{v} \}$$

$\boxed{1^{\circ} \text{ paso}}$

$$\mathcal{J}_{p,\vec{v}} \neq \emptyset$$

Dados $p \in S$, $\vec{v} \in T_pS$, tomamos (X, U) carta con $p \in X(U)$.

$\rightarrow \exists u_0, v_0 \in U \,/\, X(u_0, v_0) = p \longrightarrow \{ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \}$ base de T_pS

$\rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $v = a \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)$

Planteamos el sistema de EDO intrínsecas de la geodésica, (*)

Que es un EDO en $U \subset \mathbb{R}^2$ con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, & v(0) = v_0 \\ u'(0) = a & v'(0) = b \end{cases}$$

Por teoría de EDO, $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists (u(t), v(t))$ definida en $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ solución de (*) con las condiciones iniciales requeridas.

$\rightarrow \alpha(t) = X(u(t), v(t)) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ es geodésica en S

con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \vec{v} \longrightarrow I = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow (I, \alpha) \in \mathcal{J}_{p,\vec{v}} \neq \emptyset$

OK

$\boxed{2^{\circ}\ \text{paso}}$

$\forall (I_1, \alpha_1), (I_2, \alpha_2) \in \mathcal{I}_{p,\vec{v}} \rightsquigarrow 0 \in I_1 \cap I_2$, $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$

$\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0) = \vec{v}$

y se verifica

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1(t) = \alpha_2(t) \\ \alpha_1'(t) = \alpha_2'(t) \end{array}\right., \forall t \in I_1 \cap I_2$$

Sea $A = \{t \in I_1 \cap I_2 : \alpha_1(t) = \alpha_2(t) \text{ y } \alpha_1'(t) = \alpha_2'(t)\}$

y queremos ver que $A = I_1 \cap I_2$

$$\boxed{A \neq \emptyset, \text{ cerrado y abierto} \xRightarrow[\text{conexión}]{} A = I_1 \cap I_2}$$

① $A \neq \emptyset$, porque $0 \in A$ ✓

② A cerrado

$$F : I_1 \cap I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\| + \|\alpha_1'(t) - \alpha_2'(t)\|$$

$F(t) = 0 \Longleftrightarrow t \in A \longrightarrow A = F^{-1}(0)$ preimagen de un cerrado por una aplicación continua ✓

③ A abierto $\quad \forall t_0 \in A$, $\exists \varepsilon > 0 / (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset A$

$t_0 \in A \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0) \\ \alpha_1'(t_0) = \alpha_2'(t_0) \end{array}\right] \longrightarrow$ Elijo (X, U) carta $/ \alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0) \in X(U)$

Entonces, $\exists \varepsilon_1 > 0$ t.q. $\alpha_1(t) \in X(U)$ $\forall t \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$

$\exists \varepsilon_2 > 0$ t.q. $\alpha_2(t) \in X(U)$ $\forall t \in (t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2)$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ entonces

$$\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in X(U) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

Sea $(u_1(t), v_1(t))$ la expresión en coordenadas de α_1

$(u_2(t), v_2(t))$ la de α_2

α_1 es geodésica que cumple $\alpha_1(t_0) = p_0$, $\alpha_1'(t_0) = \vec{v}_0$

y α_2 igual.

Por tanto, ambas son solución del mismo sistema de EDO con las mismas condiciones iniciales.

Entonces

$$(u_1(t), v_1(t)) = (u_2(t), v_2(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

$\longrightarrow$ $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ $\longrightarrow$ $\alpha_1'(t) = \alpha_2'(t)$

$\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

OK

$\boxed{3^{\text{o}} \text{ paso}}$

$$I_{\vec{v}} = \underbrace{\bigcup_{\forall (I,\alpha)\in \mathcal{J}_{p\vec{v}}} I}$$

unión de conexos con el punto 0 en la intersección de todos

$$\gamma_{\vec{v}} : I_{\vec{v}} \longrightarrow S$$

$$t \longmapsto \exists (I,\alpha)\in \mathcal{J}_{p\vec{v}} \,/\, t\in I,\ \gamma_{\vec{v}}(t) = \alpha(t)$$

bien definida por el paso 2

- $0 \in I_{\vec{v}}$ <u>OK</u>
- $\gamma_{\vec{v}}(0) = p = \alpha(0)$ <u>OK</u> $\quad \gamma_{\vec{v}}'(0) = \alpha'(0) = \vec{v}$ <u>OK</u>
- $\forall \alpha : J \in S : (J,\alpha)\in \mathcal{J}_{p\vec{v}} \rightarrow J \subset I_{\vec{v}}$ y $\gamma_{\vec{v}}(t)|_J = \alpha(t)$

$\blacksquare$

Definición 2.8 *En estas condiciones, la geodésica $\gamma_{\mathbf{v}}$ se denomina la* **geodésica maximal con condiciones iniciales** *p y* **v** *y el intervalo $I_{\mathbf{v}}$ es el* **intervalo maximal de existencia**.

Definición 2.9 *Se dice que una superficie regular S es* **geodésicamente completa en un punto** *$p \in S$ si para todo $\mathbf{v} \in T_pS$ se tiene que $I_{\mathbf{v}} = \mathbb{R}$. Se dice que S es* **geodésicamente completa** *si lo es en todos sus puntos.*

Por ejemplo, el plano, la esfera y el cilindro son superficies geodésicamente completas.

2.3. Curvatura geodésica y triedro de Darboux

Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular p.p.a. en una superficie regular S con triedro de Darboux $\{\alpha'(s), J\alpha'(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), N(s)\}$, donde, para simplificar la notación, hemos denotado a $N(\alpha(s))$ simplemente por $N(s)$. Se tiene entonces que

$$\alpha''(s) = \kappa_g(s) J\alpha'(s) + \kappa_n(s) N(s),$$

donde $\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \det(\alpha''(s), N(s), \alpha'(s))$ es la curvatura geodésica de α.

Proposición 2.10 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular p.p.a. en una superficie regular S. La curva α es una geodésica de S si y sólo si su curvatura geodésica es $\kappa_g \equiv 0$.*

Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular $\alpha(t)$ no necesariamente p.p.a. Se define la curvatura geodésica de α en $t \in I$ como

$$\kappa_g^{\alpha}(t) = \kappa_g^{\beta}(h^{-1}(t)),$$

donde $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow S$ es la reparametrización por el arco de α, con $h : J \longrightarrow I$ el correspondiente cambio de parámetro.

Lema 2.11 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular $\alpha(t)$ no necesariamente p.p.a. Entonces su curvatura geodésica viene dada por*

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{det(\alpha''(t), N(t), \alpha'(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Definición 2.12 *Se dice que una curva regular $\alpha : I \longrightarrow S$ es una* **pregeodésica** *de S si existe una reparametrización $\beta = \alpha \circ h$ tal que $\beta : J \longrightarrow S$ es una geodésica de S.*

Proposición 2.13 *Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular (no necesariamente p.p.a.). La curva α es una pregeodésica de S si y sólo si su curvatura geodésica es $\kappa_g \equiv 0$.*

Prop 2.10

Sea α ppa en S

α geodésica $\Leftrightarrow \frac{D\alpha'}{ds} = 0 \Leftrightarrow k_g = 0$ //

$\beta(s) = \alpha(h(s))$ reparam. ppa

$$\beta'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s))$$

$$1 = \|\beta'(s)\| = h'(s)\,\|\alpha'(h(s))\| \to h'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}$$

Lema 2.11

$J\beta'(s) = h'(s)\,J\alpha'(h(s))$ $\qquad \beta''(s) = h''(s)\,\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\,\alpha''(h(s))$

$$k_g^{\beta}(s) = \langle \beta''(s), J\beta'(s)\rangle = \langle h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)),\ h'(s)J\alpha'(h(s))\rangle$$

$$= (h'(s))^3\langle \alpha''(h(s)),\ J\alpha'(h(s))\rangle =$$

$$= \frac{\langle \alpha''(h(s)), J\alpha'(h(s))\rangle}{\|\alpha'(h(s))\|^3}$$

$s = h^{-1}(t) \to h(s) = t$

$$k_g^{\alpha}(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\langle \alpha''(t), N(t)\wedge\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det(\alpha'', N, \alpha')}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Prop. 2.13

$$\begin{tikzcd} t\in I \arrow[r, "\alpha"] & S & \alpha(t) \\ r\in J \arrow[u, "h"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$\beta(r) = \alpha(h(r))$ es geodésica

$$c = \|\beta'(r)\| = cte > 0$$

$$\beta'(r) = h'(r)\,\alpha'(h(r))$$

Definimos: $\gamma(s) = \beta\left(\frac{s}{c}\right)$ es geodésica (reparametrización afín de una geodésica)

$$\gamma'(s) = \frac{1}{c}\beta'\left(\frac{s}{c}\right) \rightarrow \|\gamma'(s)\| = \frac{1}{c}\underbrace{\left\|\beta'\left(\frac{s}{c}\right)\right\|}_{c} = 1$$

$\rightarrow \gamma(s) = \beta\left(\frac{s}{c}\right) = \alpha\left(h\left(\frac{s}{c}\right)\right) = \alpha(\tilde{h}(r))$ es reparametrización ppa de α

Así:

$$k_g^{\alpha}(t) = k_g^{\gamma}(\tilde{h}^{-1}(t)) = 0$$

$\uparrow$ γ geodésica ppa

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $K_g^\alpha \equiv 0 \to K_g^\beta \equiv 0$ siendo β su reparametrización ppa

por tanto, β ppa y $K_g^\beta \equiv 0 \to \beta$ geodésica $\to \alpha$ pregeodésica

$\square$

2.4. Ejercicios

2.1. Sea $\gamma : I \longrightarrow S$ una geodésica no constante en S. Demuestra que un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es paralelo a lo largo de γ si y sólo si tanto su módulo $\|V\|$ como el ángulo $\measuredangle(\gamma', V)$ son constantes a lo largo de γ.

2.2. Sea $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$ una curva parametrizada, donde S_1 y S_2 son dos superficies regulares que son tangentes a lo largo de α; es decir, $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para todo $t \in I$. Demuestra que α es geodésica de S_1 si y sólo si α es geodésica de S_2.

2.3. Considera la superficie de revolución S generada al girar la curva parametrizada regular $(f(t), 0, g(t))$ alrededor del eje OZ, dada por la parametrización

$$X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, g(t)), \quad \text{con } t \in I \subset \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

con

$$f(t) > 0 \quad \text{y} \quad (f'(t))^2 + (g'(t))^2 > 0.$$

a) Fijado $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, demuestra que el meridiano $\alpha_{\theta_0}(t) = X(t, \theta_0)$ es siempre una pregeodésica de S.

b) Fijado $t_0 \in I$, demuestra que el paralelo $\beta_{t_0}(\theta) = X(t_0, \theta)$ es una geodésica de S si y solo si t_0 es un punto crítico de f.

c) Demuestra que los meridianos y los paralelos se cortan siempren ortogonamente, es decir, $\langle \alpha'_\theta(t), \beta'_t(\theta) \rangle = 0$ para todo $t \in I$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.4. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ una geodésica de S con $\gamma(0) = \gamma(t_0)$ y $\gamma'(0) = \gamma'(t_0)$ para algún $t_0 > 0$. Demuestra que γ es periódica.

2.5. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada regular en S. Demuestra que α es una pregeodésica de S si y sólo si existe una función $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para todo $t \in I$.

2.6. Sea S una superficie regular y orientada con aplicación de Gauss N, y sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva en S parametrizada por la longitud de arco s. En cada punto $\alpha(s)$ consideremos el triedro de **Darboux**, formado por los tres vectores unitarios

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \mathrm{J}\mathbf{t}(s) = \mathrm{J}_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), \quad N(s) = N(\alpha(s)).$$

2.1. Sea $\gamma : I \longrightarrow S$ una geodésica no constante en S. Demuestra que un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es paralelo a lo largo de γ si y sólo si tanto su módulo $\|V\|$ como el ángulo $\measuredangle(\gamma', V)$ son constantes a lo largo de γ.

ϑ

$\boxed{\leftarrow}$

$$\langle V, \gamma' \rangle = \underbrace{\|V\|}_{cte} \underbrace{\|\gamma'\|}_{cte} \underbrace{\cos\theta}_{cte} \longrightarrow \langle V, \gamma' \rangle' = 0$$

$$\| \quad \frac{DV}{dt}\gamma' + V \cancel{\frac{D\gamma'}{dt}}^{\,0}$$

γ geodésica

$$\longrightarrow \frac{DV}{dt}\gamma' = 0 \xrightarrow{\gamma' \neq 0} \frac{DV}{dt} = 0 \longrightarrow V \text{ paralelo a lo largo de } \gamma.$$

$\boxed{\rightarrow}$ V paralelo along $\gamma \Rightarrow \|V\|$ cte $\underline{\text{ok}}$

$$\langle V, \gamma' \rangle = \underbrace{\|V\|}_{cte} \underbrace{\|\gamma'\|}_{cte} \cos(\theta(t)) = C \cdot \cos(\theta(t))$$

$$\langle V, \gamma' \rangle' = \underbrace{\frac{DV}{dt}}_{0}\gamma' + V \underbrace{\frac{D\gamma'}{dt}}_{0} = 0 \longrightarrow \langle V, \gamma' \rangle \text{ es cte}$$

$$\longrightarrow \cos(\theta(t)) = cte \longrightarrow \theta(t) = \theta \text{ cte} \quad //$$

2.2. Sea $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$ una curva parametrizada, donde S_1 y S_2 son dos superficies regulares que son tangentes a lo largo de α; es decir, $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para todo $t \in I$. Demuestra que α es geodésica de S_1 si y sólo si α es geodésica de S_2.

$V = \alpha'$ en el ejercicio 1.6. //

2.3. Considera la superficie de revolución S generada al girar la curva parametrizada regular $(f(t), 0, g(t))$ alrededor del eje OZ, dada por la parametrización

$$X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\operatorname{sen}\theta, g(t)), \quad \text{con } t \in I \subset \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

con

$$f(t) > 0 \quad \text{y} \quad (f'(t))^2 + (g'(t))^2 > 0.$$

a) Fijado $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, demuestra que el meridiano $\alpha_{\theta_0}(t) = X(t, \theta_0)$ es siempre una pre-geodésica de S.

b) Fijado $t_0 \in I$, demuestra que el paralelo $\beta_{t_0}(\theta) = X(t_0, \theta)$ es una geodésica de S si y solo si t_0 es un punto crítico de f.

c) Demuestra que los meridianos y los paralelos se cortan siempren ortogonamente, es decir, $\langle \alpha'_\theta(t), \beta'_t(\theta) \rangle = 0$ para todo $t \in I$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) $\alpha_\beta(t) = X(t,\beta) = (f(t)\cos\beta, f(t)\operatorname{sen}\beta, g(t))$

$\alpha_\beta'(t) = (f'(t)\cos\beta, f'(t)\operatorname{sen}\beta, g'(t))$

$\alpha_\beta''(t) = (f''(t)\cos\beta, f''(t)\operatorname{sen}\beta, g''(t))$

$X_t = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\operatorname{sen}\theta, g'(t))$

$X_\theta = (-f(t)\operatorname{sen}\theta, f(t)\cos\theta, 0)$

$$X_t \wedge X_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f'\cos & f'\operatorname{sen} & g' \\ -f\operatorname{sen} & f\cos & 0 \end{vmatrix} = (-f(t)g'(t)\cos\theta, -f(t)g'(t)\operatorname{sen}\theta, f(t)f'(t))$$

$$|X_t \wedge X_\theta|^2 = f^2 g'^2 + f^2 f'^2 = f^2(g'^2 + f'^2) > 0$$

$$N = \frac{(-g'(t)\cos\theta, -g'(t)\operatorname{sen}\theta, f'(t))}{\sqrt{g'^2 + f'^2}}$$

$$\alpha_\beta'(t) = (f'(t)\cos\beta,\ f'(t)\operatorname{sen}\beta,\ g'(t))$$

$$\alpha_\beta''(t) = (f''(t)\cos\beta,\ f''(t)\operatorname{sen}\beta,\ g''(t))$$

$$N = \frac{(-g'(t)\cos\theta,\ -g'(t)\operatorname{sen}\theta,\ f'(t))}{\sqrt{g'^2+f'^2}}$$

$$N(t) = \frac{(-g'(t)\cos\beta,\ -g'(t)\operatorname{sen}\beta,\ f'(t))}{\sqrt{g'^2+f'^2}}$$

$$k_g(\beta) = \frac{\det(\alpha''(t), N(t), \alpha'(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = 0\,??$$

$$\det(\alpha''(t), N(t), \alpha'(t)) = \begin{vmatrix} f''(t)\cos\beta & f''(t)\operatorname{sen}\beta & g''(t) \\ -g'(t)\cos\beta & -g'(t)\operatorname{sen}\beta & f'(t) \\ f'(t)\cos\beta & f'(t)\operatorname{sen}\beta & g'(t) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{g'^2+f'^2}} =$$

$$= \cancel{-g'^2 f''}\cos\beta\operatorname{sen}\beta + \cancel{f'' f'^2}\cos\beta\operatorname{sen}\beta - \cancel{g''g'f'\cos\beta\operatorname{sen}\beta} + \cancel{g'g''f'\cos\beta\operatorname{sen}\beta}$$

$$+ \cancel{f'' g'^2}\cos\beta\operatorname{sen}\beta - \cancel{f'^2 f''}\cos\beta\operatorname{sen}\beta = 0$$

y α_β es pregeodésica

(b) $\beta_T(\theta) = X(T,\theta) = (f(T)\cos\theta, f(T)\sin\theta, g(T))$

$$\beta'_T(\theta) = (-f(T)\sin\theta, f(T)\cos\theta, 0)$$

$$\beta''_T(\theta) = (-f(T)\cos\theta, -f(T)\sin\theta, 0)$$

$$N(\theta) = \frac{(-g'(T)\cos\theta, -g'(T)\sin\theta, f'(T))}{\sqrt{g'(T)^2 + f'(T)^2}}$$

$$\langle \beta''_T(\theta), N(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{g'^2+f'^2}}\left[fg'(T)\cos^2\theta + fg'(T)\sin^2\theta\right] = \frac{f(T)g'(T)}{\sqrt{g'(T)^2+f'(T)^2}}$$

$$\langle \beta''_T(\theta), N(\theta)\rangle N(\theta) = \frac{(-fg'^2\cos\theta, -fg'^2\sin\theta, ff'g')}{g'(T)^2 + f'(T)^2}$$

$$\frac{D\beta'_T}{D\theta} = \beta''_T(\theta) - \langle \beta''_T(\theta), N(\theta)\rangle N(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(T)\cancel{\cos\theta} = \dfrac{fg'^2\cancel{\cos\theta}}{g'^2+f'^2} \\ f(T)\cancel{\sin\theta} = \dfrac{fg'^2\cancel{\sin\theta}}{g'^2+f'^2} \\ f'(T) = \dfrac{ff'g'}{g'^2+f'^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g'^2+f'^2 = g'^2 \Leftrightarrow f'^2 = 0 \Leftrightarrow f'(T) = 0 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

$\square$

(c) $$\langle \alpha'_\theta(t), \beta'_T(\theta)\rangle = \langle (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t)), (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0)\rangle$$

$$= -ff'\sin\theta\cos\theta + ff'\sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

2.4. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S$ una geodésica de S con $\gamma(0) = \gamma(t_0)$ y $\gamma'(0) = \gamma'(t_0)$ para algún $t_0 > 0$. Demuestra que γ es periódica.

Queremos ver que existe T tal que $\gamma(x+T) = \gamma(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Parece razonable pensar que debe ser $T = t_0$.

$\gamma(0) = p = \gamma(t_0)$

$\gamma'(0) = \vec{v} = \gamma'(t_0)$

geodésica, por ser, realmente, una reparam. afín de γ

$$F(t) = \|\gamma'(t) - \gamma'(t+t_0)\| = \langle \gamma'(t) - \gamma'(t+t_0), \gamma'(t) - \gamma'(t+t_0) \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}_{\text{cte}} - 2\langle \gamma'(t), \gamma'(t+t_0) \rangle + \underbrace{\langle \gamma'(t+t_0), \gamma'(t+t_0) \rangle}_{\text{cte}}$$

$$F'(t) = -2\left[\underbrace{\langle \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\frac{D\gamma}{dt}}, \gamma'(t+t_0) \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \gamma'(t), \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\frac{D\gamma}{dt}} \rangle}_{0} \right] = 0$$

$\rightarrow F(t) \equiv c$ cte y $F(0) = 0 \Rightarrow F(t) \equiv 0$ //

Así, $\gamma'(t)$ es t_0-periódica.

$\rightarrow x'(t), y'(t), z'(t)$ t_0 periódicas

$x'(t)$ t_0-periódica $\Rightarrow f(t) = x(t+t_0) - x(t) \rightarrow f'(t) = \underbrace{x'(t+t_0) - x'(t)}_{x' \ t_0\text{-periódica}} = 0$

$\rightarrow f(t)$ cte, Pero $f(0) = 0$ $\Big\}$ $f(t) = 0 \rightarrow x(t) = x(t+t_0)$ $\forall t$

Igual para y, z.

Así $\gamma(t) = \gamma(t+t_0)$ $\forall t$ y es t_0-periódica //

2.5. Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada regular en S. Demuestra que α es una pregeodésica de S si y sólo si existe una función $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para todo $t \in I$.

$$k_g^{\alpha} = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{\|\alpha'\|}$$

α pregeodésica $\Leftrightarrow$ $k_g^{\alpha} \equiv 0 \Leftrightarrow \langle \alpha'', J\alpha' \rangle \equiv 0$

$$\langle \alpha'', J\alpha' \rangle = \left\langle \frac{D\alpha'}{dt} + \alpha''^{\perp}, J\alpha' \right\rangle = \left\langle \frac{D\alpha'}{dt}, J\alpha' \right\rangle$$

$\forall t \in I,\quad T_{\alpha(t)}S = \mathrm{span}\{\alpha'(t), J\alpha'(t)\} \longrightarrow \dfrac{D\alpha'}{dt} = \lambda(t)\alpha' + \mu(t) J\alpha'$

Así,

$\left\langle \dfrac{D\alpha'}{dt}, J\alpha' \right\rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \mu(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dfrac{D\alpha'}{dt} = \lambda(t)\alpha'(t)$

Ejercicio: hacerlo con la definición de pregeodésica.

a) Demuestra que

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{Jt}(s) + \kappa_n(s)N(s), \\
(\mathbf{Jt})'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)N(s), \\
N'(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) - \tau_g(s)\mathbf{Jt}(s),
\end{aligned}$$

donde $\tau_g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función diferenciable dada por $\tau_g(s) = \langle A_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s), \mathbf{Jt}(s)\rangle$. La función τ_g se llama la **torsión geodésica** de α.

b) Concluye que $\tau_g \equiv 0$ si y sólo si α es una línea de curvatura de S.

c) Demuestra que si α es una geodésica con curvatura normal $\kappa_n(s) \neq 0$, $s \in I$, entonces $\tau_g(s) = -\tau(s)$ para todo $s \in I$, donde τ denota la torsión de α vista como curva en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué se puede decir en tal caso de la curvatura normal de α?

d) Considera $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)\}$ una base ortonormal de direcciones principales en $T_{\alpha(s)}S$, $s \in I$. Demuestra que la torsión geodésica viene dada por

$$\tau_g(s) = \cos\varphi(s)\,\mathrm{sen}\,\varphi(s)\Big(\kappa_2\big(\alpha(s)\big) - \kappa_1\big(\alpha(s)\big)\Big),$$

donde $\varphi(s) = \measuredangle\big(\mathbf{e}_1(s), \mathbf{t}(s)\big)$ y κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales de S.

2.7. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo de la esfera.

2.8. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo del toro de revolución $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 = r^2$. ¿Cuándo es geodésica?

2.6. Sea S una superficie regular y orientada con aplicación de Gauss N, y sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva en S parametrizada por la longitud de arco s. En cada punto $\alpha(s)$ consideremos el triedro de **Darboux**, formado por los tres vectores unitarios

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{Jt}(s) = \mathbf{J}_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), \quad N(s) = N(\alpha(s)).$$

a) Demuestra que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{Jt}(s) + \kappa_n(s)N(s), \\ (\mathbf{Jt})'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) - \tau_g(s)\mathbf{Jt}(s), \end{aligned}$$

donde $\tau_g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función diferenciable dada por $\tau_g(s) = \langle A_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s), \mathbf{Jt}(s)\rangle$. La función τ_g se llama la **torsión geodésica** de α.

$$T' = \alpha'' = \underbrace{\frac{D\alpha'}{ds}}_{} + \langle \alpha'', N\rangle N = k_g J\alpha' + k_n N = k_g \cdot JT + k_n \cdot N$$

α ppa $\to \|\alpha'\| = 1 \to \frac{D\alpha'}{ds} = \lambda J\alpha'$ ← k_g

$$(JT)' = \lambda_1(t)\, T + \mu_1(t) N \longrightarrow \lambda_1(t) = \langle (JT)', T\rangle = -\langle JT, T'\rangle = -\langle T', JT\rangle = -k_g$$

$$\langle JT, JT\rangle = 1 \xrightarrow[d/ds]{} 2\langle JT', JT\rangle = 0$$

$$N' = \lambda_2(t) T + \mu_2(t) JT \longrightarrow \lambda_2(t) = \langle N', T\rangle = -\langle N, T'\rangle = -k_n$$

$$\mu_1(s) = \langle (JT)', N\rangle = -\langle JT, N'\rangle = \tau_g(s)$$

$A = -N'$

$$\mu_2(s) = \langle N, (JT)'\rangle = -\tau_g(s)$$

y así

$$T' = k_g JT + k_n N$$

$$(JT)' = -k_g T + \tau_g N$$

$$N' = -k_n T - \tau_g JT$$

b) Concluye que $\tau_g \equiv 0$ si y sólo si α es una línea de curvatura de S.

α línea de curvatura $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$, $\alpha'(s)$ es dir principal

$$\Updownarrow$$

$$A_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = \lambda(s)\,\alpha'(s)$$

$$\Updownarrow$$

$$-N'(s) = \lambda\,\alpha'$$

$$\Updownarrow$$

$$N'(s) = -\lambda\,\alpha' \Leftrightarrow \tau_g \equiv 0$$

c) Demuestra que si α es una geodésica con curvatura normal $\kappa_n(s) \neq 0$, $s \in I$, entonces $\tau_g(s) = -\tau(s)$ para todo $s \in I$, donde τ denota la torsión de α vista como curva en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué se puede decir en tal caso de la curvatura normal de α?

$k_g = 0 \rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha'' = k_n \cdot N \neq 0 \\ (J\alpha')' = \tau_g N \\ N' = -k_n\alpha' - \tau_g J\alpha' \end{array}\right\} \rightarrow \|\alpha''\| = |k_n| = \kappa > 0$$ curvatura de α como curva en $\mathbb{R}^3$

$$\downarrow$$

$\exists \{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ triedro de Frenet

$$\vec{n} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \underbrace{\frac{k_n}{|k_n|}}_{\pm 1} \cdot N = \begin{cases} N & \text{si } k_n > 0 \\ -N & \text{si } k_n < 0 \end{cases}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{t} \wedge \pm N = \pm\,\alpha' \wedge N = \mp\, N \wedge \alpha' = \mp J\alpha'$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t} = \alpha' = \alpha' \\ \vec{n} = \pm N \\ \vec{b} = \mp J\alpha' \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{b}' = \tau \cdot \vec{n} = \pm \tau N \\ \quad \shortparallel \\ \mp (J\alpha')' = \mp \tau_g N \end{array}\right\} \tau_g = -\tau$$

d) Considera $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)\}$ una base ortonormal de direcciones principales en $T_{\alpha(s)}S$, $s \in I$. Demuestra que la torsión geodésica viene dada por

$$\tau_g(s) = \cos\varphi(s)\,\mathrm{sen}\,\varphi(s)\Big(\kappa_2\big(\alpha(s)\big) - \kappa_1\big(\alpha(s)\big)\Big),$$

donde $\varphi(s) = \measuredangle\big(\mathbf{e}_1(s), \mathbf{t}(s)\big)$ y κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales de S.

α ppa

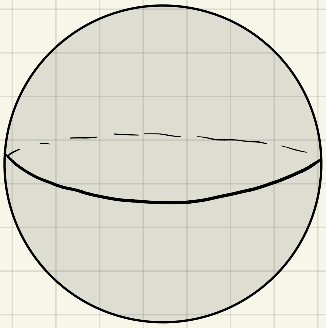
$\alpha'(s) = \cos\varphi(s)\,\vec{e}_1(s) + \mathrm{sen}\,\varphi(s)\,\vec{e}_2(s)$ $\qquad \varphi = \langle \alpha', e_1 \rangle$

$A(\alpha') = \cos\varphi\, k_1 e_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\, k_2 e_2$

$J\alpha' = -\mathrm{sen}\,\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$

$\tau_g = \langle J\alpha', A(\alpha')\rangle = -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\, k_1 + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\, k_2 = \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi(k_2 - k_1)$ //

2.7. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo de la esfera.



$$X(\theta, \varphi) = (r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)$$

$$\alpha(t) = (t, \varphi) = (r\cos t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)$$

$$\alpha'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ 0)$$

$$\alpha''(t) = (-r\cos t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ -r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ 0)$$

$$N = \frac{1}{r}p = (\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \cos\varphi)$$

$$\|\alpha'(t)\| = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$k_g(\alpha) = \frac{\det(\alpha'', N, \alpha')}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} -r\cdot ct\cdot s\varphi & -r\,st\cdot s\varphi & 0 \\ ct\cdot s\varphi & st\cdot s\varphi & c\varphi \\ -r\cdot st\cdot s\varphi & r\cdot ct\cdot s\varphi & 0 \end{vmatrix}}{r^3\,\mathrm{sen}^3\varphi} = \frac{r^2\cdot s^2t\cdot s^2\varphi\, c\varphi + r^2\cdot c^2t\cdot s^2\varphi\cdot c\varphi}{r^3\,\mathrm{sen}^3\varphi} =$$

$$= \frac{r^2\cdot s^2\varphi\cdot c\varphi}{r^3\cdot s^3\varphi} = \frac{\cos\varphi}{r\cdot\mathrm{sen}\,\varphi}$$

2.8. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo del toro de revolución $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=r^2$. ¿Cuándo es geodésica?

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}-a=r\cos\varphi\\ z=r\,\mathrm{sen}\,\varphi\end{array}\right\}\quad x^2+y^2=(r\cos\varphi+a)^2$$

$$x=(r\cos\varphi+a)\cos\theta$$
$$y=(r\cos\varphi+a)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Paralelo $\rightarrow$ fijamos φ

$$\alpha(t)=((r\cos\varphi+a)\cos t,\ (r\cos\varphi+a)\,\mathrm{sen}\,t,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$\alpha'(t)=(-(r\cos\varphi+a)\,\mathrm{sen}\,t,\ (r\cos\varphi+a)\cos t,\ 0),\quad |\alpha'(t)|=r\cos\varphi+a$$

$$\alpha''(t)=(-(r\cos\varphi+a)\cos t,\ -(r\cos\varphi+a)\,\mathrm{sen}\,t,\ 0)$$

$$X_\theta=(-(r\cos\varphi+a)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ (r\cos\varphi+a)\cos\theta,\ 0)$$

$$X_\varphi=(-r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\varphi)$$

$$X_\theta\wedge X_\varphi=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -(r\cdot c\varphi+a)s\theta & (r\cdot c\varphi+a)c\theta & 0\\ -r\cdot c\theta\cdot s\varphi & -r\cdot s\theta\cdot s\varphi & r\cdot c\varphi\end{vmatrix}=\left(r\cdot c\varphi(r\cdot c\varphi+a)c\theta,\ r\cdot c\varphi(r\cdot c\varphi+a)s\theta,\ r\cdot s^2\theta\cdot s\varphi(r\cdot c\varphi+a)+r\cdot c^2\theta\cdot s\varphi(r\cdot c\varphi+a)\right)$$
$$=(r\cdot c\varphi\cdot c\theta(r\cdot c\varphi+a),\ r\cdot c\varphi\cdot s\theta(r\cdot c\varphi+a),\ r\cdot s\varphi(r\cdot c\varphi+a))$$

$$|X_\theta\wedge X_\varphi|^2=r^2c^2\varphi\,c^2\theta(r\cdot c\varphi+a)^2+r^2\cdot c^2\varphi\cdot s^2\theta(r\cdot c\varphi+a)^2+r^2\cdot s^2\varphi(r\cdot c\varphi+a)^2$$
$$=r^2\cdot c^2\varphi(r\cdot c\varphi+a)^2+r^2\cdot s^2\varphi(r\cdot c\varphi+a)^2=r^2(r\cdot c\varphi+a)^2$$

$$N=(\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ \cos\varphi\cdot\mathrm{sen}\,\theta,\ \mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$k_g(\alpha)=\frac{\det(\alpha'',N,\alpha')}{|\alpha'|^3}=\frac{\begin{vmatrix}-(r\cdot c\varphi+a)ct & -(r\cdot c\varphi+a)st & 0\\ c\varphi\cdot ct & c\varphi\cdot st & s\varphi\\ -(r\cdot c\varphi+a)st & (r\cdot c\varphi+a)ct & 0\end{vmatrix}}{(r\cos\varphi+a)^3}=\frac{\cancel{(r\cdot c\varphi+a)^2}\cdot s^2t\cdot s\varphi+\cancel{(r\cdot c\varphi+a)^2}\cdot c^2t\cdot s\varphi}{(r\cos\varphi+a)^{\cancel{3}}}=$$

$$=\boxed{\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{r\cdot\cos\varphi+a}}$$ y será geodésica cuando $\mathrm{sen}\,\varphi=0$ o sea, $\varphi=0$ ó $\varphi=\pi$

3. La aplicación exponencial y el lema de Gauss

3.1. La aplicación exponencial

Definición 3.1 (La aplicación exponencial en un punto) *Dado un punto p de una superficie regular S, se define la* **aplicación exponencial** *en p como la aplicación $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_pS \longrightarrow S$ dada por*

$$\exp_p(\mathbf{v}) = \gamma_{\mathbf{v}}(1),$$

donde representamos por $\mathcal{D}_p$ el conjunto $\mathcal{D}_p = \{\mathbf{v} \in T_pS : 1 \in I_{\mathbf{v}}\}$.

Obsérvese que, en particular, $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_p$ siempre y que $\exp_p(\mathbf{0}) = p$ para todo $p \in S$. Por otra parte, si S es geodésicamente completa en p, entonces $1 \in I_{\mathbf{v}}$ para cualquier $\mathbf{v} \in T_p$ y por tanto se tiene $\mathcal{D}_p = T_pS$.

Lema 3.2 (Lema de homogeneidad de las geodésicas) *Sea S un superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$. Consideremos $\gamma_{\mathbf{v}} : I_{\mathbf{v}} \longrightarrow S$ la geodésica maximal con condiciones iniciales $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p$ y $\gamma_{\mathbf{v}}'(0) = \mathbf{v}$, y sea $\lambda \neq 0$ un número real distinto de cero. Si $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_{\mathbf{v}}$, entonces $(-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/\lambda|) \subset I_{\lambda\mathbf{v}}$ y se tiene*

$$\gamma_{\lambda\mathbf{v}}(t) = \gamma_{\mathbf{v}}(\lambda t) \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon/|\lambda|, \varepsilon/\lambda|),$$

donde, como es habitual, $\gamma_{\lambda\mathbf{v}} : I_{\lambda\mathbf{v}} \longrightarrow S$ es la geodésica maximal con condiciones iniciales $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}(0) = p$ y $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}'(0) = \lambda\mathbf{v}$. En otras palabras,

$$I_{\lambda\mathbf{v}} = \frac{1}{\lambda} I_{\mathbf{v}}.$$

Teorema 3.3 (Propiedades de la aplicación exponencial) *Sea S una superficie regular y $p \in S$. Se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Para cualesquiera $\mathbf{v} \in T_pS$ y $t \in I_v$, $t\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$ y $\exp_p(t\mathbf{v}) = \gamma_v(t)$. En particular,*

  i.a) *$\mathcal{D}_p$ es estrellado respecto a $\mathbf{0}$.*

  i.b) *Para todo $\mathbf{v} \in T_pS$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$; es decir, todas las direcciones están en $\mathcal{D}_p$, para el módulo adecuado.*

ii) *$\mathcal{D}_p \subset T_pS$ es un abierto, y $\exp_p : \mathcal{D}_p \longrightarrow S$ es una aplicación diferenciable.*

iii) *La aplicación $\exp_p$ es un difeomorfismo local en $\mathbf{0}$, es decir, existe un entorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_p$ de $\mathbf{0}$ en T_pS tal que $\exp_p(\mathcal{U}) = V$ es un entorno de p es S para el cual la restricción $\exp_p|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.*

Ejemplo 3.4 (La aplicación exponencial en la esfera) *Para todo punto $p \in \mathbb{S}^2(r)$ se tiene que $\mathcal{D}_p = T_p\mathbb{S}^2(r)$ y la aplicación $\exp_p : T_p\mathbb{S}^2(r) \longrightarrow \mathbb{S}^2(r)$ viene dada por*

$$\exp_p(\mathbf{v}) = \gamma_{\mathbf{v}}(1) = \cos\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r}\right) p + \frac{r}{\|\mathbf{v}\|} \operatorname{sen}\left(\frac{\|\mathbf{v}\|}{r}\right) \mathbf{v}.$$

Lema

$\vec{v} \in T_pS$, $\gamma_{\vec{v}} : I_{\vec{v}} \subseteq \mathbb{R} \to S$

$\alpha(t) = \gamma_{\vec{v}}(\lambda t)$, I_α = dominio de α

$t \in I_\alpha \longleftrightarrow \lambda t \in I_{\vec{v}} \longleftrightarrow t \in \frac{1}{\lambda} I_{\vec{v}}$

$\downarrow$

$\exists s \in I_{\vec{v}},\ \lambda t = s \to t = \frac{1}{\lambda} s$

$\to I_\alpha = \frac{1}{\lambda} I_{\vec{v}}$

y α es geodésica por ser una reparametrización afín de una geodésica y tiene condiciones iniciales $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \lambda \vec{v}$

Así, $I_\alpha = \frac{1}{\lambda} I_{\vec{v}} \subset I_{\lambda\vec{v}}$ y $\gamma_{\lambda\vec{v}}(t) = \alpha(t) = \gamma_{\vec{v}}(\lambda t)$, $\forall t \in I_\alpha = \frac{1}{\lambda} I_{\vec{v}}$

Llamo $\left.\begin{array}{l} \vec{w} = \lambda\vec{v} \\ \mu = \frac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{por lo ya demostrado}]{} \frac{1}{\mu} I_{\vec{w}} \subseteq I_{\mu\vec{w}} \longrightarrow \lambda I_{\lambda\vec{v}} \subseteq I_{\vec{v}} \longrightarrow I_{\lambda\vec{v}} \subseteq \frac{1}{\lambda} I_{\vec{v}}$

y tenemos las dos inclusiones //

Teorema

(i) $\forall \vec{v} \in T_pS$ y $\forall t \in I_{\vec{v}}$ se tiene $\underbrace{t\vec{v} \in D_p}_{¿1 \in I_{t\vec{v}}?}$ y $\exp_p(t\vec{v}) = \gamma_{\vec{v}}(t)$

$$I_{t\vec{v}} = \frac{1}{t} I_{\vec{v}}$$

$$1 = \frac{1}{t} \cdot \underset{\substack{\cap \\ I_{\vec{v}}}}{t} \in \frac{1}{t} \cdot I_{\vec{v}}$$

Por tanto $t\vec{v} \in D_p$ $\forall t \in I_{\vec{v}}$

y $\exp_p(t\vec{v}) = \gamma_{t\vec{v}}(1) \underset{\substack{\text{lema homogeneidad} \\ \lambda = t}}{=} \gamma_{\vec{v}}(t)$

(ia) $D_p \subset T_pS$ estrellado respecto $\vec{0}_p$ o sea que $\forall \vec{v} \in D_p$, $[0,\vec{v}] = \{t\vec{v} : 0 \leq t \leq 1\} \subset D_p$

$\vec{v} \in D_p \longmapsto 1 \in I_{\vec{v}} \to [0,1] \subset I_{\vec{v}} \to \forall t \in [0,1] \subset I_{\vec{v}}$, $t\vec{v} \in D_p$

(ib) $\forall \vec{v} \in T_pS$, $\exists \varepsilon > 0 / (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_{\vec{v}} \to \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t\vec{v} \in D_p$

y $\forall |\lambda| < \varepsilon$, $\lambda\vec{v} \in D_p$

(ii) $D_p \subset T_pS$ abierto y $\exp_p : D_p \to S$ diferenciable

Nos lo creemos.

Tiene que ver con las propiedades de las soluciones de una EDO que depende de un parámetro.

(iii)

$F: S_1 \to S_2$

F difeo local en $p \iff dF_p : T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ isomorf. lineal

$\exp_p : D_p \subset T_pS \to S$

$\forall \vec{v} \in D_p, \quad T_{\vec{v}} D_p = T_{\vec{v}}(T_pS) = T_pS$

y $\forall \vec{w} \in T_pS = T_{\vec{v}}(T_pS), \quad \exists \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$, $\alpha(0) = \vec{v}$, $\alpha'(0) = \vec{w}$ $\longrightarrow \alpha(t) = \vec{v} + t\vec{w}$

podemos tomar

$d(\exp_p)_{\vec{0}} : T_{\vec{0}}(T_pS) = T_pS \to T_{\exp_p(\vec{0})}S = T_pS$

$\forall \vec{w} \in T_pS$

$$d(\exp_p)_{\vec{0}}(\vec{w}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(\alpha(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \underbrace{(\exp_p(t\vec{w}))}_{\gamma_{\vec{w}}(t)} = \gamma_{\vec{w}}'(0) = \vec{w}$$

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D_p$, $\alpha(0) = \vec{0}$, $\alpha'(0) = \vec{w}$ $\longrightarrow \alpha(t) = t\vec{w} \in D_p$, $|t| < \varepsilon$

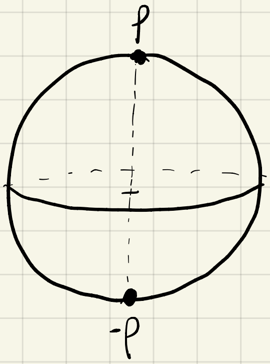
$\longrightarrow d(\exp_p)_{\vec{0}} = Id_{T_pS}$

OK

$\square$

Ejemplo Esfera $S=\mathbb{S}^2(r)$

$\forall p\in S$ Fijo

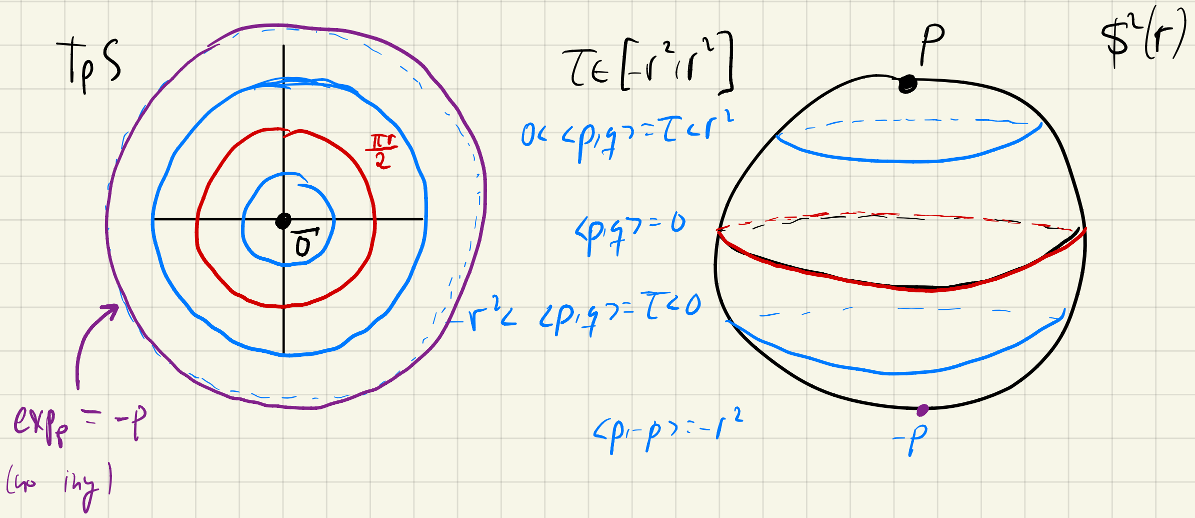


$$\mathcal{D}_p = T_pS = p^{\perp} = \{\vec{v}\in\mathbb{R}^3 : \langle p,\vec{v}\rangle = 0\}$$

$$\exp_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{S}^2(r)$$
$$\vec{v} \longmapsto \gamma_{\vec{v}}(1)$$

$$\gamma_{\vec{v}}(t) = \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}t\right)p + \frac{r}{\|\vec{v}\|}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}t\right)\vec{v}$$

$$\rightarrow \gamma_{\vec{v}}(1) = \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)p + \frac{r}{\|\vec{v}\|}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)\vec{v} = q$$



$$\langle p, \exp_p(\vec{v})\rangle = r^2\cos\left(\frac{\|v\|}{r}\right) = \text{cte} \quad \text{si } \|v\| \text{ cte}$$

Llamamos $\mathbb{S}(\vec{0}_p, \rho) = \{\vec{v} \in T_pS : \|v\| = \rho\}$

$$\mathbb{D}(\vec{0}_p, \rho) = \{\vec{v} \in T_pS : \|v\| < \rho\}$$

$$\exp_p(\mathbb{S}(\vec{0}_p, \pi r)) = \{-p\}$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{D}(\vec{0}, \pi r) = \{\vec{v} \in T_pS : \|\vec{v}\| < \pi r\}$$

$$\exp_p(\mathcal{U}) = \mathbb{S}^2(r) \setminus \{-p\} = V$$

Afirmamos:

$$\exp_p|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V \quad \text{difeo}$$

$$\exp_p(\vec{v}) = \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)p + \frac{r}{\|\vec{v}\|}\operatorname{sen}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)\vec{v}$$

Dado $q \in V$, ¿$\exists \vec{v} \in \mathbb{D}(\vec{0}, \pi r)$ t.q. $\exp_p(\vec{v}) = q$?

$$\cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)p + \frac{r}{\|\vec{v}\|}\operatorname{sen}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)\vec{v} = q$$

Si $\boxed{q = p} \longrightarrow \vec{v} = 0$

Si $\boxed{q \neq p} \longrightarrow \langle p, q\rangle = \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right)r^2 + 0 \longrightarrow \cos\left(\frac{\|\vec{v}\|}{r}\right) = \underbrace{\frac{1}{r^2}\langle p, q\rangle}_{(-1,1)}$

$$\longrightarrow \frac{\|\vec{v}\|}{r} = \arccos\left(\frac{\langle p, q\rangle}{r^2}\right) \in (0, \pi)$$

$$\longrightarrow \|\vec{v}\| = r \cdot \arccos\left(\frac{\langle p, q\rangle}{r^2}\right) \in (0, \pi r)$$

Y ahora podemos despejar $\vec{v}$:

$$\frac{r}{\|v\|}\sin\left(\frac{\|v\|}{r}\right)\vec{v} = q - \frac{\langle p,q\rangle}{r^2}p$$

$$\longrightarrow \vec{v} = \underbrace{\frac{\|v\|}{r}}_{\arccos\left(\frac{\langle p,q\rangle}{r^2}\right)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sin\left(\frac{\|v\|}{r}\right)}_{\sqrt{1-\cos^2\cdots}}}\left(q - \frac{\langle p,q\rangle}{r^2}p\right)$$

$$\sqrt{1-\cos^2\cdots} = \sqrt{1-\frac{\langle p,q\rangle^2}{r^4}}$$

En particular,

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^2(r) : \|\mathbf{v}\| < \pi r\}$$

es el mayor entorno de $\mathbf{0}$ *donde la restricción de* $\exp_p$ *es un difeomorfismo, y*

$$\exp_p(\mathcal{U}) = \mathbb{S}^2(r) \setminus \{-p\}.$$

Definición 3.5 (Entorno normal de un punto) *Un entorno V de $p_0 \in S$ es un* **entorno normal** *de p_0 si V es la imagen, por la aplicación exponencial, de un entorno $\mathcal{U}$ de $\mathbf{0} \in T_{p_0}S$ verificando*

i) $\mathcal{U}$ es estrellado respecto a $\mathbf{0}$ y

ii) $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Supongamos que V es un entorno normal de $p_0 \in S$ con $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ un difeomorfismo. Para cada $p \in V$, existe un único vector $\mathbf{v}_p \in \mathcal{U}$ tal que $\exp_{p_0}(\mathbf{v}_p) = p$. En ese caso, $t\mathbf{v}_p \in \mathcal{U}$ para todo $t \in [0,1]$ y el segmento de geodésica dado por $\gamma_p(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v}_p) = \gamma_{\mathbf{v}_p}(t)$ cumple las siguientes propiedades:

i) $\gamma_p(t) \in V$ para todo $t \in [0,1]$,

ii) $\gamma_p(0) = p_0$ y $\gamma_p(1) = p$.

$\gamma_p : [0,1] \longrightarrow V$ se llama el **segmento de geodésica radial** que une p_0 con p (y, en general, no está p.p.a.). Se dice entonces que V es **estrellado respecto a** p_0.

3.2. El lema de Gauss

Lema 3.6 (El lemma de Gauss) *Sea S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Sea además $\mathbf{w} \in T_pS$.*

i) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son colineales, entonces $\|d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$.

ii) Si $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$, $d(\exp_p)_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ son ortogonales.

Definición 3.7 (Disco y circunferencia geodésica. Radio geodésico) *Sea S una superficie regular y $p \in S$. Para cada $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(\mathbf{0},r) = \{\mathbf{v} \in T_pS : \|\mathbf{v}\| < r\} \subset \mathcal{D}_p$, se denomina* **disco geodésico** *de centro p y radio r al conjunto*

$$D(p,r) := \exp_p(\mathcal{D}(\mathbf{0},r)) = \exp_p\Big(\{\mathbf{v} \in T_pS : \|\mathbf{v}\| < r\}\Big).$$

Si $r > 0$ es tal que $\mathcal{S}(\mathbf{0},r) = \big\{\mathbf{v} \in T_pS : \|\mathbf{v}\| = r\big\} \subset \mathcal{D}_p$, se define la **circunferencia geodésica** *de centro p y radio r como el conjunto*

$$S(p,r) := \exp_p(\mathcal{S}(\mathbf{0},r)) = \exp_p\Big(\{\mathbf{v} \in T_pS : \|\mathbf{v}\| = r\}\Big).$$

Finalmente, se denomina **radio geodésico** *que sale de p a la imagen por la aplicación exponencial $\exp_p$ de una semirrecta en T_pS que parte de $\mathbf{0}$.*

¿ $\partial D(p,r) = \exp_p(\partial \mathcal{D}(\vec{0},r))$? Verdad si

$r>0$ / $\exp_p|_{\mathcal{D}(\vec{0},r)} : \mathcal{D}(\vec{0},r) \longrightarrow D(p,r)$ es difeo //

Lema de Gauss: Más general

$p \in S$, $\vec{v} \in D_p$, $d(\exp_p)_{\vec{v}} : T_{\vec{v}}(T_pS) = T_pS \longrightarrow T_{\exp_p(\vec{v})}S$

Si $\vec{v} = 0 \Rightarrow d(\exp_p)_{\vec{0}} = id_{T_pS}$

Si $\vec{v} \neq 0$, $\forall \vec{w} \in T_pS$

$$\langle d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}), d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Dem

caso fácil: $\vec{w}$ y $\vec{v}$ colineales $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{w} = \lambda \vec{v}$

$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(\alpha(t))$, $\left.\begin{array}{l} \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D_p \\ \alpha(0) = \vec{v} \\ \alpha'(0) = \vec{w} \end{array}\right] \longrightarrow$ tomamos $\alpha(t) = \vec{v} + t\vec{w}$

$$\exp_p(\alpha(t)) = \exp_p(\vec{v} + t\vec{w}) = \exp_p(\vec{v} + t\lambda\vec{v}) = \exp_p((1 + \lambda t)\vec{v}) =$$

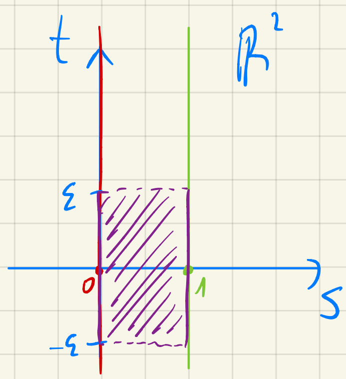
$$= \gamma_{\vec{v}}(1 + \lambda t)$$

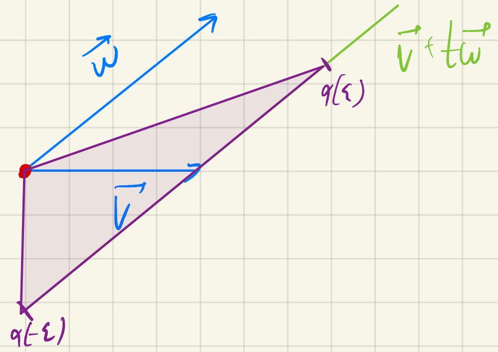
$$\frac{d}{dt}\left(\exp_p(\alpha(t))\right) = \gamma_{\vec{v}}'(1 + \lambda t) \cdot \lambda$$

$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) = \lambda \gamma_{\vec{v}}'(1) \longrightarrow \| d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) \| = |\lambda| \underbrace{\|\gamma_{\vec{v}}'(1)\|}_{\|\vec{v}\|} = \|\lambda \vec{v}\| = \|\vec{w}\|$

Caso general: $\vec{v}, \vec{w}$ L.I.

$\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow T_pS$, $\phi(s,t) = s(\vec{v} + t\vec{w}) = s\vec{q}(t)$





$\exists\, \varepsilon > 0,\ \vec{q}(t) \in D_p$, $\forall |t| < \varepsilon$

$\exists\, \varepsilon' > 0 \,/\, \phi(s,t) \in D_p$, $\forall (s,t) \in (-\varepsilon', 1+\varepsilon') \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \phi(s,t) = s\vec{q}(t) = s(\vec{v} + t\vec{w}) \in D_p$ $\quad \forall (s,t) \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

Definimos $\quad \varphi(s,t) = \exp_p(\phi(s,t))$

$\varphi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$
diferenciable

$\boxed{t = cte}$

$\varphi(s,t) = \exp_p(s\vec{q}(t)) = \gamma_{q(t)}(s) \longrightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \gamma'_{q(t)}(s)$

$$\frac{d}{ds}\left(\exp_p(s\vec{q}(t))\right) = d(\exp_p)_{s\vec{q}(t)}(\vec{q}(t))$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,0) = d(\exp_p)_{s\vec{v}}(\vec{v}) = \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0) = \vec{v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0) = d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}) \end{cases}$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \right\|^2 = \|\gamma'_{\vec{q}(t)}(s)\|^2 = \|\gamma'_{\vec{q}(t)}(0)\|^2 = \|\vec{q}(t)\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2t\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + t^2\|\vec{w}\|^2$$

$$\boxed{s = cte}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underset{\underset{p = cte}{\shortparallel}}{\varphi(0,t)}\Big) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(1,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\exp_p\left(\vec{v} + t\vec{w}\right)\right) = d(\exp_p)_{\vec{v}+t\vec{w}}(\vec{w})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(1,0) = d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w})$$

Definimos

$$f(s) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0) \right\rangle$$

$$f : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(0) = \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$$

$$f(1) = \langle d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}), d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) \rangle \overset{¿?}{=} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$f'(s) = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s,0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0) \right\rangle}_{1} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0) \right\rangle}_{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \gamma'_{\alpha(t)}(s) \longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s,t) = \gamma''_{\alpha(t)}(s) \longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''_{\vec{v}}(s) \in (T_{\gamma_{\vec{v}}(s)} S)^{\perp}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi(s,t)) = \beta_s'(0) \in T_{\gamma_{\vec{v}}(s)} S$$

$$\varphi(s,t) = \exp_p(s\,\alpha(t)) = \beta_s(t)$$

$$\beta_s : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$$

$$\beta_s(0) = \exp_p(s\vec{v}) = \gamma_{\vec{v}}(s)$$

$\ominus$ sea $\longrightarrow$ 1 $= 0$ //

Para ②

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(s,0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(s,0) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle (s,t)$$

$$= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\|^2 (s,t) = \|\vec{v}\|^2 + 2t \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + t^2 \|\vec{w}\|^2$$

Y queda

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(s) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{array}\right] \to f(s) = s \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \to f(1) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}), d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) \rangle$$

//

Teorema 3.8 (Propiedad minimizante de las geodésicas) *Sea S una superficie regular y sea V un entorno normal centrado en un punto $p_0 \in S$. Para cada $p \in V$, el segmento de geodésica radial $\gamma_p : [0,1] \longrightarrow V$ que une $p_0 = \gamma_p(0)$ con $p = \gamma_p(1)$ es la* **única curva contenida en V de menor longitud** *uniendo p_0 y p. Es decir, si $\alpha : [a,b] \longrightarrow V$ es otra curva* **contenida en** *V con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$, entonces*

$$L(\gamma_p) \leq L(\alpha),$$

y se da la igualdad si, y sólo si, α es una reparametrización monótona de γ_p.

Además, si $r > 0$ es tal que $D(p_0, r) \subset V$, entonces para todo $p \in D(p_0, r)$ se tiene que

$$L(\gamma_p) \leq L(\alpha)$$

para toda curva parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ **contenida en** *S con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$.*

3.3. Coordenadas normales

Sea V un entorno normal de $p_0 \in S$ con $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ un difeomorfismo. Consideremos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_{p_0}S$ y sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{p_0}S$ el difeomorfismo dado por

$$\phi(u,v) = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2.$$

Evidentemente, $\phi(0,0) = \mathbf{0}$ y $U = \phi^{-1}(\mathcal{U})$ es un entorno de $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$. En este situación, la parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S$, dada por

$$X(u,v) = \exp_{p_0}(\phi(u,v)) = \exp_{p_0}(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2)$$

se llama **sistema de coordenadas normales en p_0**. Se tienen las siguientes propiedades:

i) $X(0,0) = \exp_{p_0}(\mathbf{0}) = p_0$.

ii) Las derivadas parciales de la parametrización en ciertos puntos concretos son:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,0) = \frac{d}{du}(X(u,0)) = \frac{d}{du}(\exp_{p_0}(u\mathbf{e}_1)) = \frac{d}{du}(\gamma_{\mathbf{e}_1}(u)) = \gamma'_{\mathbf{e}_1}(u).$$

Análogamente,

$$\frac{\partial X}{\partial v}(0,v) = \gamma'_{\mathbf{e}_2}(v).$$

iii) En particular, $\frac{\partial X}{\partial u}(0,0) = \mathbf{e}_1$ y $\frac{\partial X}{\partial v}(0,0) = \mathbf{e}_2$.

iv) Respecto a los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E(u,0) = \langle \tfrac{\partial X}{\partial u}, \tfrac{\partial X}{\partial u} \rangle(u,0) = \langle \gamma'_{\mathbf{e}_1}(u), \gamma'_{\mathbf{e}_1}(u) \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1,$$

$$F(0,0) = \langle \tfrac{\partial X}{\partial u}, \tfrac{\partial X}{\partial v} \rangle(0,0) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0,$$

$$G(0,v) = \langle \tfrac{\partial X}{\partial v}, \tfrac{\partial X}{\partial v} \rangle(0,v) = \langle \gamma'_{\mathbf{e}_2}(v), \gamma'_{\mathbf{e}_2}(v) \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1.$$

Obsérvese que sólo en el punto $(0,0)$ podemos dar el valor preciso de los tres coeficientes simultáneamente, a saber, $E(0,0) = 1$, $F(0,0) = 0$ y $G(0,0) = 1$.

(ej 5.26)

Teorema 3.8

$$L(\gamma_p)=\int_0^1\|\gamma_p'(t)\|\,dt=\int_0^1\|\gamma_p'(0)\|\,dt=\int_0^1\|\vec{v}_p\|\,dt=\|\vec{v}_p\|$$

$\boxed{p=p_0}$ $\longrightarrow$ $\|\vec{v}_p\|=\|\vec{0}\|=0\leq L(\alpha)\quad\forall\alpha$

y $L(\alpha)=0 \leftrightarrow \int_a^b\|\alpha'(t)\|\,dt=0 \leftrightarrow \alpha(t)=cte=p_0$ //

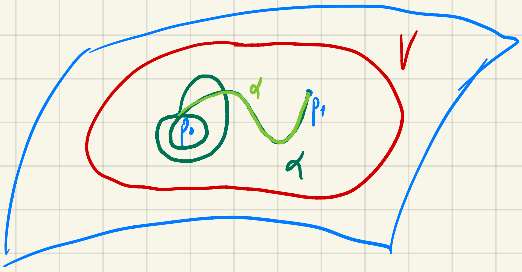
$\boxed{p\neq p_0}$ $\alpha:[a,b]\longrightarrow V$ $\begin{cases}\alpha(a)=p_0\\ \alpha(b)=p\end{cases}$

y $\exists t_0 \mid \alpha(t_0)=p_0$ y $\alpha(t)\neq p_0,\ \forall t>t_0$

(si no, $\exists\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n\to b$, $\alpha(t_n)=p_0,\ \forall n \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha(t_n)=p_0$
$\alpha(b)=p_1$ $\not\parallel$ #)

Ahora:

$$L(\alpha)=\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,dt\geq\int_{t_0}^b\|\alpha'(t)\|\,dt$$



y trabajamos con

$$\begin{tikzcd} \alpha|_{[t_0,b]}:[t_0,b] \arrow[r] & V \\ {[0,1]} \arrow[u] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

y vemos como podemos suponer que $\alpha:[0,1]\longrightarrow \underset{\parallel}{V}^{\exp_{p_0}(\mathcal{U})}$ $\begin{cases}\alpha(0)=p_0\\ \alpha(1)=p\\ \alpha(t)\neq p_0\quad\forall t>0\end{cases}$

Definimos $\tilde{\alpha}(t)=(\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}})^{-1}(\alpha(t)) \longrightarrow \begin{cases}\tilde{\alpha}(0)=\vec{0}\\ \tilde{\alpha}(1)=\vec{v}_p\\ \tilde{\alpha}(t)\neq\vec{0},\ \forall t>0\end{cases}$

Definimos

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \|\tilde{\alpha}(t)\| > 0, & \text{si } t>0 \end{cases}$$

$$V(t) = \frac{\tilde{\alpha}(t)}{\|\tilde{\alpha}(t)\|} = \frac{\tilde{\alpha}(t)}{r(t)} \quad t>0$$

$\rightarrow \alpha(t) = \exp_{p_0}(r(t)\cdot V(t))$, $\forall t>0$, $\tilde{\alpha}(t) = r(t)V(t)$

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(\exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t))) = d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{\alpha}'(t)) \underset{t>0}{=} d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(r'(t)V(t) + r(t)\cdot V'(t))$$

$$= r'(t)\cdot d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V(t)) + r(t)\, d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V'(t))$$

$\rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = r'(t)^2 \|\underbrace{d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}}(\underbrace{V(t)})\|^2 +$ colineales (Lema Gauss) $\|V(t)\|^2 = 1 \xrightarrow{d/dt} \langle V(t), V'(t)\rangle = 0$

$$2r(t)r'(t)\underbrace{\langle d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V(t)), d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V'(t))\rangle}_{\text{ortogonales}} + \underset{\text{Gauss}}{0}$$

$$r(t)^2 \underbrace{\|d(\exp_{p_0})_{r(t)V(t)}(V'(t))\|^2}_{\geq 0}$$

$$= r'(t)^2 + r(t)^2 \|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(V'(t))\|^2$$

$\rightarrow \|\alpha'(t)\| \geq \sqrt{r'(t)^2} = |r'(t)| \geq r'(t)$, $t>0$

y $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \|\alpha'(t)\|dt \geq \int_\varepsilon^1 r'(t)dt = r(1) - r(\varepsilon) = \|v_p\| - r(\varepsilon) = L(\gamma_p) - r(\varepsilon)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt \geq L(\gamma_p)$$

y tenemos el resultado: $L_a^b(\alpha) \geq L_{t_0}^1(\alpha) \overset{\text{abuso de notación}}{=} \int_{t_0}^1 \|\alpha'(t)\|dt \geq L(\gamma_p)$ //

reparam.

Ahora, si $L(\alpha) = L(\gamma)$, entonces todas las desigualdades de la demostración son igualdades.

Necesitamos, entonces que:

$$L_a^b(\alpha) = L_{t_0}^b(\alpha) \longrightarrow \alpha : [a,b] \to V, \begin{cases} \alpha(a) = p_0 \\ \alpha(b) = p_1 \\ \alpha(t) \neq p_0, \forall t > a \end{cases}$$

$$\int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt = L(\gamma_p) \longrightarrow \alpha : [0,1] \to V, \begin{cases} \alpha(0) = p_0 \\ \alpha(1) = p_1 \\ \alpha(t) \neq p_0, \forall t > 0 \end{cases}$$

y $$\|\alpha'(t)\|^2 = r'(t)^2 + \underbrace{r(t)^2 \|d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(v'(t))\|^2}_{0}$$

$$\to d(\exp_{p_0})_{\tilde{\alpha}(t)}(v'(t)) = \vec{0}, \forall t > 0 \xrightarrow[\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to V \text{ es } \underline{\underline{\text{difeo}}}]{\alpha(t) \in \mathcal{U}} v'(t) = \vec{0}, \forall t > 0$$

Así, $v(t) = cte = v(1) = \dfrac{\vec{v}_p}{\|\vec{v}_p\|}$

$$\alpha(t) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\vec{v}_p}{\|\vec{v}_p\|}\right) = \gamma_{\vec{v}_p}\left(\frac{r(t)}{\|\vec{v}_p\|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{\|\vec{v}_p\|}\right)$$

y α es una reparametrización monótona de γ_p. //

Segunda parte

$\exp_{p_0}: \mathcal{U} \to V$ difeo, $r>0 \,/\, D(p_0,r) = \exp_{p_0}(\mathcal{D}(\vec{0},r)) \subset V$

$$\exp_{p_0}\big|_{\mathcal{D}(\vec{0},r)} : \underset{\mathcal{U}}{\mathcal{D}(\vec{0},r)} \longrightarrow \underset{V}{D(p_0,r)}$$

Sea $p \in D(p_0,r)$, $p \neq p_0$ $\quad \exists\, \vec{v}_p = (\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}})^{-1}(p) \in \mathcal{D}(\vec{0},r)$, $\|\vec{v}_p\| < r$

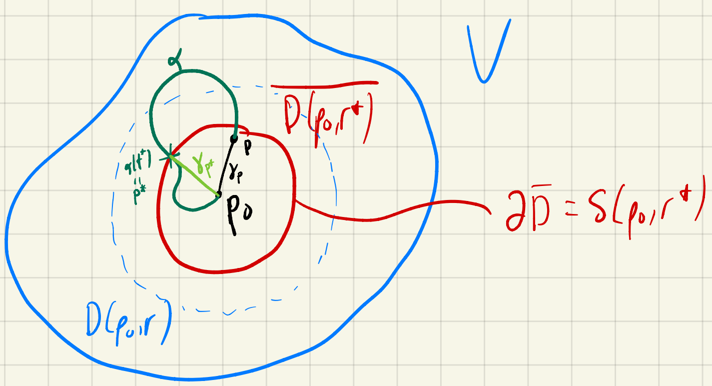
$$\gamma_p : [0,1] \longrightarrow D(p_0,r) \subset S, \quad L(\gamma_p) = \|\vec{v}\|_p < r$$

Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow S \,/\, \alpha(a) = p_0, \ \alpha(b) = p$.

- Si $\operatorname{Im}\alpha := \alpha([a,b]) \subset V \to L(\alpha) \geq L(\gamma_p)$ //

- Si no, $\operatorname{Im}\alpha \not\subset V$.

Tomo $r^* \,/\, \|\vec{v}_p\| < r^* < r$, $\quad \overline{D(p_0,r^*)} \subset D(p_0,r) \subset V$



$p = \exp_{p_0}(\vec{v}_p)$

Consideramos $\quad t^* = \inf\{t \in [a,b] : \alpha(t) \in S(p_0,r^*)\}$

y $\quad p^* = \alpha(t^*) \in S(p_0,r^*)$, por lo que $\quad p^* = \exp_{p_0}(v^*)$, $\|v^*\| = r^*$

Entonces

$$L(\gamma_p) = \|\vec{v}_p\| < r^* = \|v^*\| = L(\gamma_{p^*}) \underset{\operatorname{Im}(\alpha|_{[a,t^*]}) \subset V}{\leq} L(\alpha|_{[a,t^*]}) \leq L(\alpha)$$

$\square$

3.4. Coordenadas geodésicas polares. El teorema de Minding

Sea V un entorno normal de $p_0 \in S$ con $\exp_{p_0}|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ un difeomorfismo. Consideremos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_{p_0}S$ y sea ahora $\phi : (0,+\infty) \times (0,2\pi) \longrightarrow T_{p_0}S \setminus \ell$ el difeomorfismo dado por

$$\phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2,$$

donde ℓ es la semirrecta cerrada dada por $\ell = \{\lambda \mathbf{e}_1 : \lambda \geq 0\}$.

Obsérvese que $\mathcal{U} \setminus \ell \subset T_{p_0}S \setminus \ell$ es un abierto en el plano tangente $T_{p_0}S$ con $V_0 = \exp_{p_0}(\mathcal{U} \setminus \ell)$ abierto en S. Así mismo, $U_0 = \phi^{-1}(\mathcal{U} \setminus \ell)$ es un abierto de $(0,+\infty) \times (0,2\pi)$ y la parametrización $X : U_0 \subset (0,+\infty) \times (0,2\pi) \longrightarrow V_0 \subset S$, dada por

$$X(r,\theta) = \exp_{p_0}(\phi(r,\theta)) = \exp_{p_0}(r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\,\mathbf{e}_2)$$

se llama **sistema de coordenadas geodésicas polares centradas en** p_0. **OJO:** $\mathbf{p_0 \notin V_0}$, si bien se tiene

$$\lim_{r \longrightarrow 0} X(r,\theta) = p_0.$$

Teorema 3.9 *Sea $X(r,\theta)$ el sistema de coordenadas geodésicas polares centradas en p_0. Entonces se verifica que*

$$E(r,\theta) = 1, \quad F(r,\theta) = 0, \quad G(r,\theta) > 0,$$

y además

$$\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = 0 \quad y \quad \lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G})(r,\theta) = 1.$$

La curvatura de Gauss en coordenadas geodésicas polares satisface

$$\sqrt{G(r,\theta)}\,K(X(r,\theta)) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\sqrt{G(r,\theta)}\right) = 0.$$

En particular, si K es constante se tiene:

i) Si $K = 0$, entonces $G(r,\theta) = r^2$.

ii) Si $K > 0$, entonces $G(r,\theta) = \dfrac{1}{K}\mathrm{sen}^2(\sqrt{K}r)$.

iii) Si $K < 0$, entonces $G(r,\theta) = \dfrac{-1}{K}\mathrm{senh}^2(\sqrt{-K}r)$.

Teorema 3.10 (Teorema de Minding) *Sean S y $\widehat{S}$ dos superficies regulares con igual curvatura de Gauss constante. Entonces, S y $\widehat{S}$ son localmente isométricas.*

Trm 3.9

$$X(r,\theta) = \exp_{p_0}\left(r\cdot\cos\theta\cdot\vec{e_1} + r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{e_2}\right) = \exp_{p_0}(r\vec{v}_\theta) \qquad \vec{v}_\theta = \cos\theta\,\vec{e_1} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e_2}$$

$\boxed{\theta \text{ cte}}$ $\quad X(r,\theta) = \gamma_{\vec{v}_\theta}(r)$

$$\frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta) = \gamma'_{\vec{v}_\theta}(r) \longrightarrow E(r,\theta) = \|\gamma'_{\vec{v}_\theta}(r)\| = \|\vec{v}_\theta\|^2 = 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\exp_{p_0}(r\vec{v}_\theta)\right) = d(\exp_{p_0})_{r\cdot\vec{v}_\theta}(r\vec{v}_\theta')$$

y

$$\frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta) = \frac{d}{dr}\left(\exp_{p_0}(r\vec{v}_\theta)\right) = d(\exp_{p_0})_{r\cdot\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta)$$

$$F(r,\theta) = \langle d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(r\cdot\vec{v}_\theta'),\, d(\exp_{p_0})_{r\cdot\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta)\rangle = \frac{1}{r}\langle d(\exp_{p_0})_{\underbrace{r\cdot\vec{v}_\theta}_{\vec{v}}}(\overbrace{r\vec{v}_\theta'}^{\vec{w}}),\, d(\exp_{p_0})_{\underbrace{r\cdot\vec{v}_\theta}_{\vec{v}}}(r\vec{v}_\theta)\rangle$$

$$= \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$$

$$\|\vec{v}_\theta\| = 1 \longrightarrow \langle \vec{v}_\theta, \vec{v}_\theta'\rangle = 0$$

$$G(r,\theta) = r^2\langle d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta'),\, d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta')\rangle > 0, \qquad r > 0$$

$d(\exp_{p_0})_{\vec{w}}$ isomorfismo $\forall \vec{w} \in U$, $\|\vec{v}_\theta'\|^2 = 1 \longrightarrow d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta') \neq \vec{0}$

$$\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = \underbrace{\lim_{r\to 0} r^2}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{r\to 0} \|d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta')\|^2}_{\|\vec{v}_\theta'\|^2 = 1} = 0$$

$$G(r,\theta) = r^2 \cdot \| d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta\,')\|^2$$

$$\sqrt{G(r,\theta)} = r \cdot \| d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta\,')\|$$

$$X(r,\theta) = \exp_{p_0}(r\cdot\vec{v}_\theta) = \exp_{p_0}(r\cdot\cos\theta\,\vec{e}_1 + r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\vec{e}_2), \quad E=1,\ F=0,\ G$$

$$\bar{X}(u,v) = \exp_{p_0}(u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2) \longrightarrow \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$$

$$X(r,\theta) = \bar{X}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(r\cdot\cos\theta, r\cdot\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\cos\theta$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \left\|\frac{\partial X}{\partial r}\wedge\frac{\partial X}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{G(r,\theta)}$$

$$\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} = \left\|\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\right\|$$

$$\frac{\partial X}{\partial r}\wedge\frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cdot\cos^2\theta\,\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

$$-r\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

$$\left(-\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}\right)$$

$$= (r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta)\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}$$

$$= r\,\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}$$

Entonces $\sqrt{G}(r,\theta) = r\cdot\left\|\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right\| = r\cdot\sqrt{(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}) = \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) + r\frac{\partial}{\partial r}\left[(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)^{1/2}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\right]$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}) = \underbrace{\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}(0,0)}_{1} + \underbrace{\left(\lim_{r\to 0} r\right)}_{0}\left(\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(\dots)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2\right)^{1/2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2\right)^{-1/2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{E}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\cdot \bar{G}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right.$$

$$\left. + \bar{E}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{G}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) - 2\bar{F}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[\bar{F}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{E}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) = \bar{E}_u(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \bar{E}_v(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{E}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) = \frac{\partial\bar{E}}{\partial u}(0,0)\cos\theta + \frac{\partial\bar{E}}{\partial v}(0,0)\sin\theta = 0$$

tarea, $E_u(0,0) = E_v(0,0) = \dots = G_v(0,0) = 0$

y queda

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(\dots) = \frac{1}{2}\cdot 1\,(0\cdot 1 + 1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0) = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}) = 1$$

y tenemos

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G(r,\theta) > 0,\quad \lim_{r\to 0}\sqrt{G}(r,\theta) = 0,\quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}) = 1$$

$F=0 \to$ coord ortogonales, y u bee

$$K(X(r,\theta))=\frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}}\right)_\theta+\left(\frac{G_r}{\sqrt{EG}}\right)_r\right]$$

Como $E=1$, queda

$$K(X(r,\theta))=\frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\underbrace{\frac{\frac{\partial G}{\partial r}}{\sqrt{G}}}_{\cancel{2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G})}\right)=\frac{-1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})$$

Y entonces

$$\sqrt{G}(r,\theta)\cdot K(X(r,\theta))+\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})(r,\theta)=0$$

//

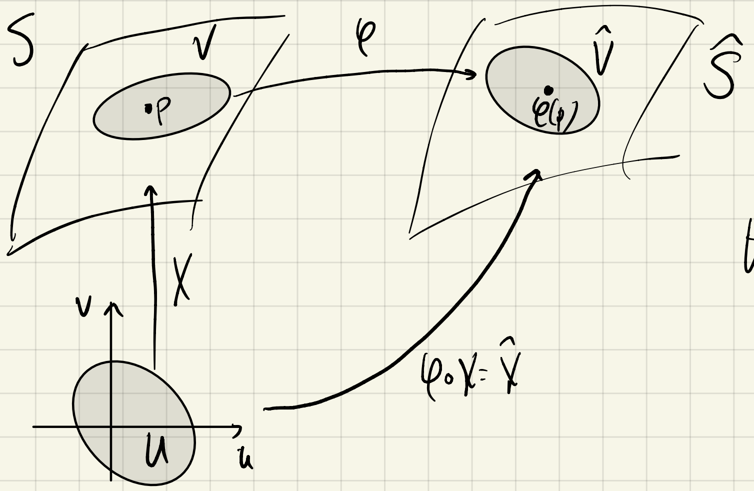
$u(r,\theta)=\sqrt{G}(r,\theta)$ $\quad$ $K(r,\theta)=K(X(r,\theta))$ <u>Llamando</u>

$$\begin{cases} u(r,\theta)K(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta)=0 \\ \lim_{r\to 0} u(r,\theta)=0 \\ \lim_{r\to 0}\dfrac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)=1 \end{cases}$$

Trm Egregium de Gauss (Repaso)

S y $\hat{S}$ isométricas $\Leftrightarrow \exists \varphi: S \to \hat{S}$ isometría

$\forall p \in S,\ d\varphi_p: T_pS \to T_{\varphi(p)}\hat{S}$ isometría lineal



$\Downarrow$

φ difeo local:

$\forall p \in S, \exists V \in \mathcal{E}(p) \subset S / \varphi(V) = \hat{V} \in \mathcal{E}(\varphi(p)) \subset \hat{S}$

y $\varphi_{|V}: V \to \hat{V}$ difeo

Entonces $\hat{X}(u,v) = \varphi(X(u,v))$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{X}}{\partial u} = d\varphi_{X(u,v)}\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}(u,v)\right) \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{X}}{\partial v} = d\varphi_{X(u,v)}\left(\dfrac{\partial X}{\partial v}(u,v)\right) \end{array}\right] \to \left\{ \begin{array}{l} \hat{E}(u,v) \left\langle \dfrac{\partial \hat{X}}{\partial u}, \dfrac{\partial \hat{X}}{\partial v} \right\rangle = \left\langle d\varphi_X\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\right), d\varphi_X\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\right)\right\rangle = \\[2ex] \qquad \underset{\varphi \text{ isometría}}{=} \left\langle \dfrac{\partial X}{\partial u}, \dfrac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = E(u,v) \\[2ex] \hat{F} = F \\ \hat{G} = G \end{array}\right.$$

Y así $\exists\ (X,U)$ de S $\quad$: $\quad E(u,v) = \hat{E}(u,v)$

$\qquad (\hat{X},U)$ de $\hat{S}$ $\qquad\quad F = \hat{F}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad G = \hat{G}$

(por lo que también coinciden las parciales de E,F,G con las de $\hat{E},\hat{F},\hat{G}$)

O sea, $\forall (u,v) \in U$, $K_S(X(u,v)) = K_{\hat{S}}(\hat{X}(u,v))$

Tma Minding

$K = \hat{K} = cte = c$

$\forall p \in S$, $\forall \hat{p} \in \hat{S}$, $\exists V(p) \subset S$, $\hat{V}(\hat{p}) \subset \hat{S}$ y $\varphi: V \to \hat{V}$ isom local

Dado $p \in S$, $\exists \mathcal{U}(\vec{0}_p) \subset T_pS$ y $\exists V(p) \subset S$ / $exp_p: \mathcal{U} \to V$ difeo

Dado $\hat{p} \in \hat{S}$, $\exists \hat{\mathcal{U}}(\vec{0}_{\hat{p}}) \subset T_{\hat{p}}\hat{S}$ y $\exists \hat{V}(\hat{p}) \subset \hat{S}$ / $exp_{\hat{p}}: \hat{\mathcal{U}} \to \hat{V}$ difeo

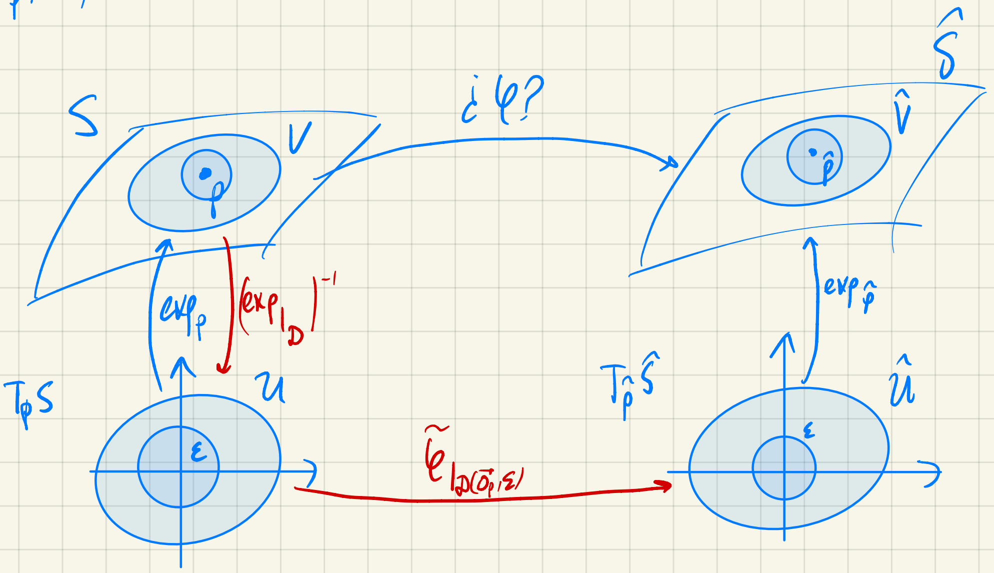
$\exists \varepsilon > 0$ / $D(\vec{0}_p, \varepsilon) \subset \mathcal{U}(\vec{0}_p) \to exp_p(D(\vec{0}_p, \varepsilon)) = D(p, \varepsilon) \subset V(p)$

y $D(\vec{0}_{\hat{p}}, \varepsilon) \subset \hat{\mathcal{U}}(\vec{0}_{\hat{p}})$ y $exp_p|_{D(\vec{0}_p,\varepsilon)}: D(\vec{0}_p, \varepsilon) \subset T_pS \to D(p,\varepsilon) \subset V(p)$ difeo

$\downarrow$

$exp_{\hat{p}}(D(\vec{0}_{\hat{p}}, \varepsilon)) = D(\hat{p}, \varepsilon) \subset \hat{V}$

y $exp_{\hat{p}}|_{D(\vec{0}_{\hat{p}},\varepsilon)}: D(\vec{0}_{\hat{p}}, \varepsilon) \subset T_{\hat{p}}\hat{S} \longrightarrow D(\hat{p}, \varepsilon) \subset \hat{V}$ difeo



$\{e_1, e_2\}$ base T_pS

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ base $T_{\hat{p}}\hat{S}$

$\tilde{\varphi}: T_pS \longrightarrow T_{\hat{p}}\hat{S}$ isom lineal

$e_1 \longrightarrow \hat{e}_1$

$e_2 \longrightarrow \hat{e}_2$

$\tilde{\varphi}(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda\hat{e}_1 + \mu\hat{e}_2$

$\tilde{\varphi}(D(\vec{0}_p, \varepsilon)) = D(\vec{0}_{\hat{p}}, \varepsilon)$

Y tomamos $\boxed{\varphi = exp_{\hat{p}} \circ \tilde{\varphi} \circ exp_p^{-1}}$

Es difeomorfismo local por ser composición de difeomorfismos en los abiertos en los que lo hemos definido.

Falta ver que es una isometría.

Se verifica:

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{\hat{p}} \circ \tilde{\varphi}$$

Tomamos

$X(r,\theta)$ coord geod. en $D(p,\varepsilon)$

$\hat{X}(r,\theta)$ coord geod. en $D(\hat{p},\varepsilon)$

$\longrightarrow X(r,\theta) = \exp_p(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)$

$\hat{X}(r,\theta) = \exp_{\hat{p}}(r\cos\theta \hat{e}_1 + r\sin\theta \hat{e}_2)$

y en estas cartas sabemos que $\underbrace{E=\hat{E},\ F=\hat{F}}_{\text{siempre}}$ y $\underbrace{G=\hat{G}}_{\text{porque } K=\hat{K}=\text{cte}}$

Vamos a ver la diferencial de φ:

$$d\varphi_{X(r,\theta)} : T_{X(r,\theta)}S \longrightarrow T_{\varphi(X(r,\theta))}\hat{S}$$

$$\varphi(X(r,\theta)) = \varphi(\exp_p(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)) = \exp_{\hat{p}}(\tilde{\varphi}(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)) =$$

$$= \exp_{\hat{p}}(r\cos\theta \hat{e}_1 + r\sin\theta \hat{e}_2) = \hat{X}(r,\theta)$$

Por tanto

$d\varphi_{X(r,\theta)}\left(\frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta)\right) = \frac{d}{dr}(\varphi(X(r,\theta))) = \frac{\partial \hat{X}}{\partial r}(r,\theta)$

$d\varphi_{X(r,\theta)}\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta)\right) = \frac{d}{d\theta}(\varphi(X(r,\theta))) = \frac{\partial \hat{X}}{\partial \theta}(r,\theta)$

$\langle d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial r}), d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial r})\rangle = \langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial r}, \frac{\partial \hat{X}}{\partial r}\rangle = \overbrace{\hat{E} = E}^{\text{siempre}} = \langle \frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial X}{\partial r}\rangle$

$\langle d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial r}), d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial \theta})\rangle = \langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial r}, \frac{\partial \hat{X}}{\partial \theta}\rangle = \underbrace{\hat{F} = F}_{} = \langle \frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial X}{\partial \theta}\rangle$

$\langle d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial \theta}), d\varphi_X(\frac{\partial X}{\partial \theta})\rangle = \langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{X}}{\partial \theta}\rangle = \underbrace{\hat{G} = G}_{\text{no necesariamente}} = \langle \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \theta}\rangle$

y φ es una isometría local.

3.5. Ejercicios

3.1. Considera la catenaria $y = \cosh x$ contenida en el plano $z = 0$ y parametrizada por la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (t, \cosh t, 0)$, y sea S el cilindro recto construido sobre dicha curva. Da una parametrización de esta superficie y determina su aplicación exponencial.

3.2. Sea $X(r,\theta)$ un sistema de coordenadas polares geodésicas centrado en un punto $p_0 \in S$.

a) Fijado $r > 0$ considera la circunferencia geodésica de centro p_0 y radio r, parametrizada por $\alpha_r(\theta) = X(r,\theta)$ y demuestra que su curvatura geodésica viene dada por

$$\kappa_g^r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{G(r,\theta)}} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{G_r(r,\theta)}{2G(r,\theta)}.$$

b) Concluye que en una superficie con curvatura de Gauss constante, las circunferencias geodésicas tienen curvatura geodésica constante.

3.3. Dada S una superficie regular y un punto $p_0 \in S$, considera $\alpha : [0,2\pi] \longrightarrow T_{p_0}S$ una parametrización por el arco de la circunferencia unitaria $\mathcal{S}(\mathbf{0},1) = \{\mathbf{v} \in T_{p_0}S : \|\mathbf{v}\| = 1\}$.

a) Demuestra que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la aplicación $X : (0,\varepsilon) \times (0,2\pi) \longrightarrow S$ dada por $X(t,s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$ está bien definida y es una parametrización de S.

b) Calcula los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización $X(t,s)$ y demuestra que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K(X(t,s)) = -\frac{1}{\|X_s(t,s)\|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\|X_s(t,s)\|\right).$$

3.4. Dada S una superficie regular y un punto $p_0 \in S$, considera $V : \mathbb{R} \longrightarrow T_{p_0}S$ una aplicación diferenciable con $\|V(t)\| = 1$ para todo t, y $X(u,t) = \exp_{p_0}\big(uV(t)\big)$ definida en un abierto adecuado $U \subset \mathbb{R}^2$ para que X sea un homeomorfismo.

a) Prueba que X es una parametrización de S si, y sólo si, $V'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t.

b) En tal caso, calcula los coeficientes de la primera forma fundamental de X.

c) Dado $\varepsilon > 0$, considera $\alpha : [a,b] \longrightarrow D(p_0,\varepsilon) \subset S$ la curva

$$\alpha(t) = X\big(u(t),t\big) = \exp_{p_0}\big(u(t)V(t)\big),$$

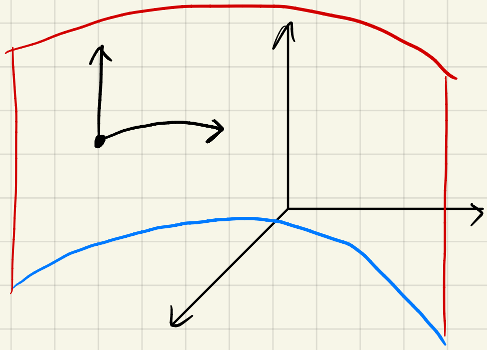
para una cierta función $u(t)$, $0 < u(t) < \varepsilon$. Demuestra que

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \geq \big|u(b) - u(a)\big|,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $u(t)$ es monótona y $V(t)$ es constante.

3.1. Considera la catenaria $y = \cosh x$ contenida en el plano $z = 0$ y parametrizada por la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (t, \cosh t, 0)$, y sea S el cilindro recto construido sobre dicha curva. Da una parametrización de esta superficie y determina su aplicación exponencial.

$X(t,r) = \alpha(t) + (0,0,r) = (t, \cosh t, r)$



$X_t = (1, \operatorname{senh} t, 0)$ $\qquad E = 1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$

$X_r = (0,0,1)$ $\qquad F = 0$

$G = 1$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t \cdot \operatorname{senh} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{\cosh^2 t} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_{11}^1 = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, los demás 0.

$$u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 = 0$$
$$v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 = 0$$

$t'' + t'^2 \cdot \frac{\operatorname{senh}(t(\tau))}{\cosh(t(\tau))} = 0 \rightarrow t'' + t'^2 \cdot \operatorname{th}(t) = 0$

$r'' = 0 \rightarrow \boxed{r(\tau) = a\tau + b}$

$t(\tau) = \cosh(\tau)$

$\rightarrow t'(\tau) = \operatorname{senh}(\tau)$

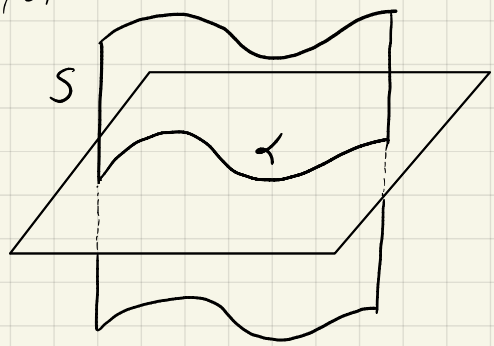
$\rightarrow t''(\tau) = \cosh(\tau)$

$\cosh(\tau) + \operatorname{senh}^2(\tau)$

3.2 Más general

Cilindro recto sobre una curva plana en $z=0$.

$$\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$$



$$X: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$X(u,v) = (x(u), y(u), v) = \alpha(u) + v(0,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= (x'(u), y'(u), 0) = \alpha'(u) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= (0,0,1) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} E &= \|\alpha'(u)\|^2 \\ F &= 0 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ geodésica del cilindro $\leftrightarrow$ $\left.\begin{aligned} u'' + \dots &= 0 \\ v'' + \dots &= 0 \end{aligned}\right\}$

$$\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E}, \quad \Gamma_{ij}^{k} = 0 \;\; (i,j,k) \neq (1,1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} & u''(t) + u'(t)^2\,\Gamma_{11}^{1}(u(t), v(t)) = 0 \\ & v''(t) = 0 \\ & u(0) = u_0,\; v(0) = v_0 \\ & u'(0) = a,\; v'(0) = b \end{aligned}\right\} \to \boxed{v(t) = bt + v_0}$$

$$p = X(u_0, v_0)$$

$$\vec{v} \in T_pS, \quad \vec{v} = a\frac{\partial X}{\partial u}(u_0,v_0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u_0,v_0)$$

Como γ es regular, podemos reparametrizar por el arco.
Tomamos γ p.p.a. $\to E=1$

y queda $\quad u''(t)=0 \to \boxed{u(t)=at+u_0}$

Catenaria

Tenemos $\left.\begin{array}{l} u(t)=at+u_0 \\ v(t)=bt+v_0 \end{array}\right\}$

$$\gamma(u)=(\operatorname{argsh}(u), \sqrt{1+u^2}, 0) \qquad u\in\mathbb{R}$$

$$\gamma(t)=X(u(t),v(t))=(x(u_0+at), y(u_0+at), v_0+bt)$$

$$=(\operatorname{arg sh}(u_0+at), \sqrt{1+(u_0+at)^2}, v_0+bt)$$

Para obtener $\exp_p \to t=1$

3.2. Sea $X(r,\theta)$ un sistema de coordenadas polares geodésicas centrado en un punto $p_0 \in S$.

a) Fijado $r>0$ considera la circunferencia geodésica de centro p_0 y radio r, parametrizada por $\alpha_r(\theta) = X(r,\theta)$ y demuestra que su curvatura geodésica viene dada por

$$\kappa_g^r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{G(r,\theta)}}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G(r,\theta)} = \frac{G_r(r,\theta)}{2G(r,\theta)}.$$

b) Concluye que en una superficie con curvatura de Gauss constante, las circunferencias geodésicas tienen curvatura geodésica constante.

a)

$$\alpha_r'(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$X(r,\theta) = \exp_{p_0}(\phi(r,\theta)) = \exp_{p_0}(r\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\,\mathbf{e}_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\exp_{p_0}(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)\right] = d(\exp_{p_0})_{(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)}(-r\sin\theta e_1 + r\cos\theta e_2)$$

$$K^2 = k_g^2 + k_n^2 \rightarrow k_g = \sqrt{K^2 - k_n^2}$$

$$\sqrt{G(r,\theta)}\,K(X(r,\theta)) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G(r,\theta)}) = 0.$$

$$K = \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})}{\sqrt{G}} \rightarrow K^2 = \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})\right)^2}{G}$$

$$k_g^r(\theta) = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})\right)^2}{G} - k_n^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})\right)^2 - Gk_n^2}{G}} = \frac{\sqrt{\cdots}}{\sqrt{G}}$$

$$¿\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G})\right)^2 - Gk_n^2 = \frac{1}{2}G_r\,?$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G_r}{2\sqrt{G}}\right)\right)^2 = \left(\frac{G_{rr}\cdot 2\sqrt{G} - G_r\cdot \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{G}}}{4G}\right)^2 = \left(\frac{2G_{rr} - G_r}{4G\sqrt{G}}\right)^2$$

k_n sería la curvatura de la geodésica γ con $\gamma(0) = \alpha_r(\theta)$, $\gamma'(0) = \alpha_r'(\theta)$ $\rightarrow k_g = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{|\alpha_r' \cdots N|}{|\alpha_r'(\theta)|^3}$

$\boxed{F=0}$

$\longrightarrow \quad e_1 = \dfrac{X_r}{\sqrt{E}} \qquad e_2 = \dfrac{X_\theta}{\sqrt{G}} \longrightarrow \quad \begin{matrix} X_r = \sqrt{E}\, e_1 \\ X_\theta = \sqrt{G}\, e_2 \end{matrix}$

$$\alpha_r'(\theta) = X_\theta = \sqrt{G}\, e_2$$

$$J\alpha_r'(\theta) = JX_\theta = J(\sqrt{G}\, e_2) = \sqrt{G}\, Je_2 = \sqrt{G}\,(-e_1) = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} X_r$$

$$\alpha_r''(\theta) = X_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{G})e_2$$

$$k_g = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\langle X_{\theta\theta}, -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} X_r \rangle}{\|\sqrt{G}\, e_2\|^3} = \frac{-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}}{\sqrt{G}^3} \langle X_{\theta\theta}, X_r \rangle = \frac{1}{\sqrt{E}\cdot G} \langle X_{r\theta}, X_\theta \rangle$$

$$F = \langle X_r, X_\theta \rangle = 0$$
$$\downarrow$$
$$\langle X_{r\theta}, X_\theta \rangle + \langle X_r, X_{\theta\theta} \rangle = 0$$

Como $E=1$, entonces

$$k_g = \frac{1}{G} \langle X_{r\theta}, X_\theta \rangle = \frac{1}{G} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G})\, e_2, \sqrt{G}\, e_2 \right\rangle \underset{\|e_2\|=1}{=} \frac{\sqrt{G}}{G} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}) = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G})}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{G}} \cdot G_r = \frac{G_r}{2G}$$

b) Si K es cte, entonces se tiene

i) Si $K = 0$, entonces $G(r, \theta) = r^2$.

ii) Si $K > 0$, entonces $G(r, \theta) = \dfrac{1}{K}\mathrm{sen}^2(\sqrt{K} r)$.

iii) Si $K < 0$, entonces $G(r, \theta) = \dfrac{-1}{K}\mathrm{senh}^2(\sqrt{-K} r)$.

y G no depende de $\theta \longrightarrow k_g'(\theta) = 0 \longrightarrow k_g(\theta) \equiv$ cte

3.3. Dada S una superficie regular y un punto $p_0 \in S$, considera $\alpha : [0,2\pi] \longrightarrow T_{p_0}S$ una parametrización por el arco de la circunferencia unitaria $\mathcal{S}(\mathbf{0},1) = \{\mathbf{v} \in T_{p_0}S : \|\mathbf{v}\| = 1\}$.

a) Demuestra que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la aplicación $X : (0,\varepsilon) \times (0,2\pi) \longrightarrow S$ dada por $X(t,s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$ está bien definida y es una parametrización de S.

b) Calcula los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización $X(t,s)$ y demuestra que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K(X(t,s)) = -\frac{1}{\|X_s(t,s)\|}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\|X_s(t,s)\|)\,.$$

a) $S(0,1) = \{v \in T_{p_0}S : \|v\| = 1\} = \{ae_1 + be_2 : a^2+b^2 = 1\} = \alpha([0,2\pi])$

$\alpha(s) = \cos(s)e_1 + \operatorname{sen}(s)e_2$

Sabemos que, $\forall v \in T_pS$, $\exists \lambda$ de forma que $\lambda v \in D_{p_0}$

Por tanto, dado $v \in S(0,1)$, $\exists \lambda_v$ con $\lambda_v \in D_{p_0}$

Y podemos tomar $\lambda = \inf\{\lambda_v\}$ y a tiene que $S(0,\lambda) \subset D_{p_0}$

$$\begin{gathered} S(0,\lambda) \\ \| \\ \{v \in T_{p_0}S : \|v\| = \lambda\} \\ \| \\ \{\lambda\alpha(s) : s \in [0,2\pi]\} \end{gathered}$$

Por lo que $\lambda\alpha(s) \in D_{p_0} \longrightarrow \exp_{p_0}(\lambda\alpha(s))$ existe y está bien definido

más aún, lo está $\forall\, 0 < t \leq \lambda$

Tomando $\varepsilon = \lambda$ y teniendo en cuenta que para ser una parametrización debe estar definida en un abierto, tenemos

$X(t,s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$ $\quad (t,s) \in (0,\varepsilon) \times (0,2\pi)$

bien def. y es parametrización //

(b) $X(t,s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$

$$X_t = d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s))$$

$$X_s = d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))$$

$$E = \langle X_t, X_t\rangle = \langle \underbrace{d\exp_{p_0(t\alpha(s))}}_{\text{colineales}}(\alpha(s)), d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s))\rangle = \|\alpha(s)\| = 1$$

$$F = \langle X_t, X_s\rangle = \langle d\exp_{p_0(t\alpha(s))}\underbrace{(\alpha(s)), d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))}_{\text{ortogonales}}\rangle = 0$$

$$G = \langle X_s, X_s\rangle = \langle d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s)), d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))\rangle = t^2 \|d\exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))\|$$

$$K(X(r,\theta)) = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}}\right)_\theta + \left(\frac{G_r}{\sqrt{EG}}\right)_r\right]$$

$$K(X(t,s)) = \frac{-1}{2\sqrt{G}}\left[\frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\sqrt{G}}\right]_t = \frac{-1}{2\|X_s\|}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\|X_s\|}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\|X_s\|^2)\right)$$

$$= \frac{-1}{\cancel{2}\|X_s\|}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\cancel{\|X_s\|}}\cdot\cancel{2\|X_s\|}\frac{\partial}{\partial t}(\|X_s\|)\right) = -\frac{1}{\|X_s\|}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\|X_s\|)$$

3.4. Dada S una superficie regular y un punto $p_0 \in S$, considera $V : \mathbb{R} \longrightarrow T_{p_0}S$ una aplicación diferenciable con $\|V(t)\| = 1$ para todo t, y $X(u,t) = \exp_{p_0}(uV(t))$ definida en un abierto adecuado $U \subset \mathbb{R}^2$ para que X sea un homeomorfismo.

a) Prueba que X es una parametrización de S si, y sólo si, $V'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\quad \dfrac{\partial X}{\partial t} = d\exp_{p_0(uV(t))}(uV'(t)) \neq 0 \longrightarrow V'(t) \neq 0 \quad \forall t$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad \|V(t)\| = 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists v \in T_pS : \|v\| = 1,\ v = V(t)$ y como en el ejercicio anterior, vemos que $\exists \lambda > 0$ t.q. $\lambda V(t) \subset \mathcal{D}_{p_0}\ \forall t \in \mathbb{R}$ //

Por tanto, $\mathcal{U} = (0,\lambda) \times \mathbb{R}$ es abierto y:

- X es diferenciable en $\mathcal{U}$
- X es un homeomorfismo (de hecho, difeo), tomando λ suf. pequeño.
- $\dfrac{\partial X}{\partial u} = d\exp_{p_0(uV(t))}(V(t)) \neq 0$ porque es isomorf. lineal en $\mathcal{U}$ y $\|V(t)\| = 1 \rightarrow V(t) \neq 0$.

  $\dfrac{\partial X}{\partial t} = d\exp_{p_0(uV(t))}(uV'(t)) \neq 0$ porque $V'(t) \neq 0$ //

b) En tal caso, calcula los coeficientes de la primera forma fundamental de X.

$E = \|V(t)\| = 1$

$F = \langle d\exp_{p_0(uV(t))}\underbrace{(V(t))}, d\exp_{p_0(uV(t))}\underbrace{(uV'(t))} \rangle = 0$

ortogonales

$\|V\| = 1 \rightarrow 2\langle V, V' \rangle = 0$

$G = \|X_s\|$

c) Dado $\varepsilon > 0$, considera $\alpha : [a,b] \longrightarrow D(p_0,\varepsilon) \subset S$ la curva

$$\alpha(t) = X\big(u(t),t\big) = \exp_{p_0}\big(u(t)V(t)\big),$$

para una cierta función $u(t)$, $0 < u(t) < \varepsilon$. Demuestra que

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \geq \big|u(b) - u(a)\big|,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $u(t)$ es monótona y $V(t)$ es constante.

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\big(X(u(t),t)\big) = \frac{\partial}{\partial u}X(u(t),t)\,u'(t) + \frac{\partial}{\partial t}X(u(t),t)$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \|u' \cdot X_u + X_t\|^2 = |u'|^2\|\underset{\substack{\shortparallel \\ E=1}}{X_u}\|^2 + \|X_t\|^2 = |u'|^2 + \|X_t\|^2$$

$F=0$

X_u, X_t orto

$$\|\alpha'\| = \sqrt{|u'|^2 + \|X_t\|} \geq \sqrt{|u'|^2} = |u'|$$

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \geq \int_a^b |u'(t)|\, dt \geq \left|\int_a^b u'(t)\, dt\right| = |u(b) - u(a)|$$

$= \leftrightarrow$ $u'(t) > 0$ $\forall t$ ó $u'(t) < 0$ $\forall t$ $\leftrightarrow$ u monótona

$= \Updownarrow$

$\|X_t\| = 0$

$\Updownarrow$

$d\exp_{p_0}\big|_{(u(t)V(t))}\big(u(t)V'(t)\big) = 0 \leftrightarrow V'(t) = 0 \leftrightarrow V(t)$ cte

//

3.5. Sea $X(r,\theta)$ un sistema de coordenadas geodésicas polares centrado en un punto $p_0 \in S$.

a) Deduce que
$$K(p_0) = -\lim_{r\longrightarrow 0} \frac{\partial^3}{\partial r^3}\sqrt{G(r,\theta)}.$$

b) Demuestra que
$$\sqrt{G(r,\theta)} = r - \frac{K(p_0)}{6}r^3 + R(r,\theta),$$
con $\lim_{r\longrightarrow 0} R(r,\theta)/r^3 = 0$.

c) Concluye que
$$K(p_0) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{3}{\pi}\frac{(2\pi r - L(r))}{r^3},$$
donde $L(r)$ denota la longitud de la circunferencia geodésica de centro p_0 de radio $r > 0$.

d) Justifica por qué, si p_0 es un punto elíptico, las circunferencias geodésicas de centro p_0 y radio $r > 0$ tienen longitud menor que la longitud de la circunferencia euclídea del mismo radio para r suficientemente pequeño. ¿Qué se puede decir al respecto en un punto hiperbólico? ¿Y en un punto llano?

5

$$K(p_0) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{(2\pi r - L(r))}{r^3} \qquad L(r) = L(\gamma_r)$$

$2\pi r = \mathcal{L}(r) =$ long. circ. geodésica en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\mathcal{L}(r) - L(r)}{r^3} \longrightarrow \frac{\pi}{3} K(p_0)$$

$L(r) < \mathcal{L}(r)$ si $r < \varepsilon$ en un mundo esférico $(K > 0)$

$L(r) > \mathcal{L}(r)$ si $r < \varepsilon$ en un mundo hiperbólico $(K < 0)$

a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G(r,\theta)}) + K(X(r,\theta))\sqrt{G(r,\theta)} = 0 \xrightarrow{r\to 0} \lim_{r\to 0} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G}) + \cancel{K(p_0)\cdot 0} = 0$$

$\frac{d}{dr}$

$$\longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sqrt{G(r,\theta)}) = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}(\sqrt{G}(r,\theta)) + \frac{\partial}{\partial r}(K(X(r,\theta))\sqrt{G(r,\theta)} + K(X(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G(r,\theta)}) = 0$$

$$\downarrow r\to 0^+$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial^3}{\partial r^3}(\sqrt{G}(r,\theta)) + \frac{\partial}{\partial r}K(X(r,\theta))\cdot 0 + K(p_0)\cdot 1 = 0$$

$$\longrightarrow K(p_0) = -\lim_{r\to 0} \frac{\partial^3}{\partial r^3}(\sqrt{G}(r,\theta))$$

b) Llamamos $u(r,\theta) = \sqrt{G}(r,\theta)$, $r>0$

$$u(r,\theta) = \underbrace{u(0,\theta)}_{0} + \underbrace{u_r(0,\theta)}_{1}\cdot r + \frac{1}{2}\underbrace{u_{rr}(0,\theta)}_{0} r^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{u_{rrr}(0,\theta)}_{-K(p_0)} r^3 + R(r,\theta)$$

Taylor

con $\lim_{r\to 0} \frac{R(r,\theta)}{r^3} = 0$

O sea

$$\longrightarrow \sqrt{G(r,\theta)} = r - \frac{r^3}{6}K(p_0) + R(r,\theta)$$

c) $r = cte$, $\alpha_r(\theta) : [0,2\pi] \longrightarrow S$ circunf geodésica

$$\alpha_r(\theta) = X(r,\theta) \longrightarrow \alpha_r'(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$L(r) = L(\alpha_r) = \int_0^{2\pi} \|\alpha_r'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r,\theta)}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} r - \frac{K(p_0)}{6} r^3 + R(r,\theta)\, d\theta = 2\pi r - \cancel{2}\pi \frac{K(p_0)}{\cancel{6}\,3} r^3 + \int_0^{2\pi} R(r,\theta)\, d\theta$$

$$\longrightarrow \pi \frac{K(p_0)}{3} r^3 = 2\pi r - L(r) + \int_0^{2\pi} R(r,\theta)\, d\theta$$

$$\longrightarrow K(p_0) = \frac{3}{\pi}\frac{(2\pi r - L(r))}{r^3} + \frac{3}{\pi}\frac{1}{r^3}\int_0^{2\pi} R(r,\theta)\, d\theta = \frac{3}{\pi}\frac{(2\pi r - L(r))}{r^3} + \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R(r,\theta)}{r^3}\, d\theta$$

$$\xrightarrow{r\to 0} K(p_0) = \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r - L(r)}{r^3}\right) + \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R(r,\theta)}{r^3}\, d\theta \longrightarrow \boxed{K(p_0) = \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{\overset{\ell(r)}{2\pi r} - L(r)}{r^3}\right)}$$

integrando en un compacto

0

d) Si $K(p_0) > 0 \longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \, / \, \mathcal{L}(r) - L(r) > 0 \quad \forall r < \varepsilon$

Si $K(p_0) < 0 \longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \, / \, \mathcal{L}(r) - L(r) < 0 \quad \forall r < \varepsilon$