Ejercicio 2.5

Jose Antonio Lorencio Abril

En este modelo, al imponer la condición de equilibrio

$$O_n\left(p_n^*\right) = D_n\left(p_n\right)$$

obtenemos que

$$a + bp_n^* = c - dp_n \iff p_n = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}p_n^*$$

Y esta expresión podemos sustituirla para la predicción p_{n+1}^*:

$$p_{n+1}^* = (1-\beta)\,p_n^* + \beta p_n = (1-\beta)\,p_n^* + \beta\frac{c-a}{d} - \frac{b\beta}{d}p_n^* = \beta\frac{c-a}{d} + \left(1-\beta-\frac{b\beta}{d}\right)p_n^* \tag{1}$$

que es, efectivamente, una ecuación en diferencias de primer orden, como buscábamos. Aunque el modelo haya quedado expresado en términos de los precios esperados, en lugar de los reales, esto no importa, puesto que en este modelo, la estabilidad de los precios estimados implica la estabilidad de los precios reales. La razón es la igualdad $p_n = \frac{p_{n+1}^* - (1-\beta)p_n^*}{\beta}$, ya que si existe el límite de la parte derecha, también existe el de la izquierda.
Ahora, si aplicamos la recursividad de la ecuación (1), llegamos a la expresión

$$p_{n+1}^* = \left[\beta\frac{c-a}{d}\right]\left[\sum_{i=0}^{n+1}\left(1-\beta-\frac{b\beta}{d}\right)^i\right] + \left(1-\beta-\frac{b\beta}{d}\right)^{n+1}p_0$$

Esta converge si, y solo si, se da

$$\left|1-\beta-\frac{b\beta}{d}\right| < 1 \iff -1 < 1-\beta-\frac{b\beta}{d} < 1 \iff -2 < -\beta-\frac{b\beta}{d} < 0 \iff \frac{-2}{\beta} < -1-\frac{b}{d} < 0$$

$$\iff 1-\frac{2}{\beta} < -\frac{b}{d} < 1 \iff -1 < \frac{b}{d} < \frac{2}{\beta} - 1$$

Además, notamos que, para $\beta = 1$, obtenemos la condición del modelo de Ezekiel.
La última parte del ejercicio se soluciona en la siguiente tabla:

	b	d	β	$\frac{b}{d}$	¿<?	$\frac{2}{\beta}-1$	¿Estable?
Algodón	4.5	0.3	0.04	15	$<$	49	Sí
Trigo	1.2	0.1	0.4	12	$>$	4	No
Maíz	0.4	0.6	0.25	$\frac{2}{3}$	$<$	7	Sí