1. Sea P la distribución de probabilidad en $\mathbf{R}^2$ tal que $P((2,2)) = 1/2$ y el resto de la probabilidad está repartida de manera uniforme en el segmento de extremos $(0,0)$ y $(1,1)$. Indicar, en una sola frase, qué podemos decir de esta distribución de probabilidad. Calcular su función de distribución.

~~2. Se tiene en el plano una distribución uniforme en el cuadrado $I = (0,1) \times (0,1)$. Calcular las funciones de distribución y de densidad de la variable aleatoria $X(x,y) = x + y$.~~

~~3. Las variables aleatorias X e Y son independientes. La variable X tiene una distribución uniforme en $(0,1)$ y la variable Y tiene una distribución discreta con probabilidades $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2$.~~

~~Calcular la función de distribución de $Z = X + Y$.~~

4. Una urna U contiene 5 bolas que fueron extraidas aleatoriamente de otra urna que contenía 4 bolas blancas y 5 negras. Se definen dos variables aleatorias X e Y de la siguiente forma:

La variable aleatoria X toma el valor i si la urna U contiene i bolas blancas y $5 - i$ negras. La variable Y vale 0 si el número de bolas blancas de la urna U es menor que el número de bolas negras y vale 1 en caso contrario.

a) Obtener las distribuciones de X y de Y .

b) Obtener las esperanzas matemáticas de X de Y de $X + Y$ y de XY.

5. Sea (X, Y) una variable aleatoria de dimensión dos de tipo continuo con función de densidad

$$f(x,y) = kI_C(x,y)$$

siendo C el cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,2)$ y $(0,2)$.

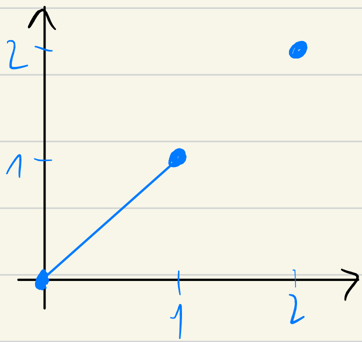
Se obtiene una nueva variable aleatoria (U, V) definida por:

$$U = \frac{3X}{1 + 2X + Y}, \quad V = \frac{3Y}{1 + 2X + Y}$$

a) Determinar el valor de k. Obtener la función de densidad de la variable aleatoria (U, V).

b) Obtener la función de densidad de U.

1. Sea P la distribución de probabilidad en $\mathbf{R}^2$ tal que $P((2,2)) = 1/2$ y el resto de la probabilidad está repartida de manera uniforme en el segmento de extremos $(0,0)$ y $(1,1)$. Indicar, en una sola frase, qué podemos decir de esta distribución de probabilidad. Calcular su función de distribución.



$$F = \frac{1}{2} F_C + \frac{1}{2} F_D$$

$$F_D = \begin{cases} 0 & x<2 \text{ ó } y<2 \\ 1 & x,y \geq 2 \end{cases}$$

$$F_C = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1,\ y > x \\ y & 0 \leq y \leq 1,\ x > y \\ 1 & 1 \leq x,y \end{cases}$$

4. Una urna U contiene 5 bolas que fueron extraidas aleatoriamente de otra urna que contenía 4 bolas blancas y 5 negras. Se definen dos variables aleatorias X e Y de la siguiente forma:

La variable aleatoria X toma el valor i si la urna U contiene i bolas blancas y $5-i$ negras. La variable Y vale 0 si el número de bolas blancas de la urna U es menor que el número de bolas negras y vale 1 en caso contrario.

a) Obtener las distribuciones de X y de Y .

b) Obtener las esperanzas matemáticas de X de Y de $X+Y$ y de XY.

a)

$$P(X=i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{5}{5-i}}{\binom{9}{5}} = \frac{\frac{4!}{i!(4-i)!}\cdot\frac{5!}{(5-i)!\,i!}}{\frac{9!}{5!\,4!}} = \frac{4!\,4!\,5!\,5!}{i!\,i!\,(4-i)!\,(5-i)!\,9!}$$

$$P(X=0) = \frac{\cancel{4!}\,4!\,5!\,\cancel{5!}}{\cancel{4!}\,\cancel{5!}\,9!} = \frac{4!\,5!}{9!} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}} = \frac{1}{9\cdot 2\cdot 7}$$

$$P(X=1) = \frac{4!\,\cancel{4!}\,5!\,5!}{3!\,\cancel{4!}\,9!} = \frac{4\cdot 5!}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}} = \frac{5\cdot 2}{9\cdot 7}$$

$$P(X=2) = \frac{4!\,4!\,5!\,5!}{2!\,2!\,2!\,3!\,9!} = \frac{4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{2^6\cdot 3^2\cdot 5}{2^5\cdot 3^3\cdot 7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}$$

$$P(X=3) = \frac{4!\,4!\,5!\,5!}{3!\,3!\,2!\,9!} = \frac{4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{2^6\cdot 5\cdot \cancel{3}}{9\cdot 2^4\cdot 7\cdot \cancel{3}} = \frac{4\cdot 5}{9\cdot 7}$$

$$P(X=4) = \frac{\cancel{4!}\,4!\,5!\,5!}{\cancel{4!}\,4!\,9!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}} = \frac{5}{9\cdot 7\cdot 2}$$

$$P(X=5) = 0$$

$$\frac{1}{9\cdot 2\cdot 7} + \frac{5\cdot 2}{9\cdot 7} + \frac{3\cdot 2\cdot 5}{9\cdot 7} + \frac{4\cdot 5}{9\cdot 7} + \frac{5}{9\cdot 2\cdot 7} = \frac{1+5\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+8\cdot 5+5}{9\cdot 2\cdot 7} =$$

$$= \frac{1+20+60+40+5}{126} = 1 \quad \text{OK}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{126} & 0 \le x < 1 \\ \frac{21}{126} & 1 \le x < 2 \\ \frac{81}{126} & 2 \le x < 3 \\ \frac{121}{126} & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$P(Y=0) = P(X \le 2) = \frac{81}{126} = \frac{9^2}{2 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{9}{14}$$

$$P(Y=0) = P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = \frac{45}{126}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{81}{126} & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

5. Sea (X, Y) una variable aleatoria de dimensión dos de tipo continuo con función de densidad

$$f(x, y) = kI_C(x, y)$$

siendo C el cuadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,2)$ y $(0,2)$.

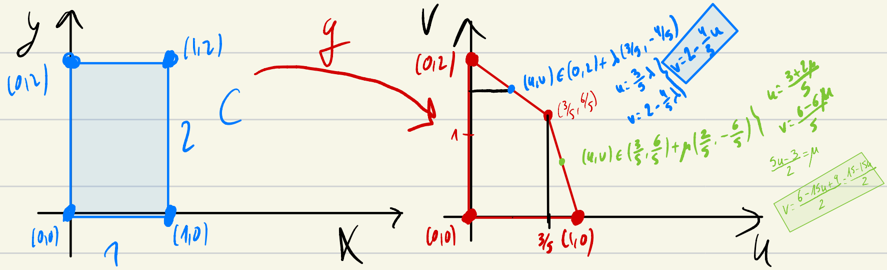
Se obtiene una nueva variable aleatoria (U, V) definida por:

$$U = \frac{3X}{1 + 2X + Y}, \quad V = \frac{3Y}{1 + 2X + Y}$$

a) Determinar el valor de k. Obtener la función de densidad de la variable aleatoria (U, V).

b) Obtener la función de densidad de U.

a)



$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \, dx\, dy = 1$$

$$\longleftrightarrow \int_C k \, dx\, dy = 1 \longleftrightarrow k\, A(C) = 1 \longleftrightarrow$$

$$k \cdot 2 = 1 \longleftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{3x}{1+2x+y} \\ \\ v = \dfrac{3y}{1+2x+y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3x = u(1+2x+y) \longrightarrow x(3-2u) = u(1+y) \longrightarrow x = \dfrac{u(1+y)}{3-2u} \\ \\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{x}{y} \Big| \; y = \dfrac{vx}{u} \end{array}$$

$$x = \frac{u(1+y)}{3-2u} = \frac{u\left(1+\frac{vx}{u}\right)}{3-2u} = \frac{\cancel{u}\left(\frac{u+vx}{\cancel{u}}\right)}{3-2u} = \frac{u+vx}{3-2u}$$

$$x\left(1-\frac{v}{3-2u}\right) = \frac{u}{3-2u}$$

$$x\,\frac{3-2u-v}{\cancel{3-2u}} = \frac{u}{\cancel{3-2u}} \longrightarrow \boxed{x = \frac{u}{3-2u-v}}$$

$$\boxed{y = \frac{vx}{u} = \frac{v}{\cancel{u}} \cdot \frac{\cancel{u}}{3-2u-v} = \frac{v}{3-2u-v}}$$

$$h(u,v) = \left(\frac{u}{3-2u-v}\,,\ \frac{v}{3-2u-v}\right)$$

$$|Jh| = \left|\begin{pmatrix} \frac{3-\cancel{2u}-v+\cancel{2u}}{(3-2u-v)^2} & \frac{u}{(3-2u-v)^2} \\ \frac{2v}{(3-2u-v)^2} & \frac{3-2u\cancel{-v+v}}{(3-2u-v)^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{(3-v)(3-2u)-2uv}{(3-2u-v)^4} =$$

$$= \frac{9-6u-3v+\cancel{2uv}-\cancel{2uv}}{(3-2u-v)^4} = \frac{3(3-2u-v)}{(3-2u-v)^4} = \frac{3}{(3-2u-v)^3}$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h(u,v)) \cdot |Jh| = \frac{k \cdot 3}{(3-2u-v)^3} = \frac{3}{2(3-2u-v)^3}$$

(b)

$$f_U(u) = \int_0^{2-\frac{4}{3}u} \frac{3}{2(3-2u-v)^3}\,dv = \frac{3}{4(v+2u-3)^2}\Bigg]_0^{2-\frac{4}{3}u} = \frac{3}{4\left(2-\frac{4}{3}u+2u-3\right)^2} - \frac{3}{4(2u-3)^2} =$$

$$= \frac{3}{4\left(\frac{2}{3}u-1\right)^2} - \frac{3}{4(2u-3)^2} \qquad u \in [0, 3/5)$$

$$f_U(u) = \int_0^{\frac{15-15u}{2}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = \frac{3}{4(v+2u-3)^2}\Bigg]_0^{\frac{15-15u}{2}} = \frac{3}{4\left(\frac{15}{2}-\frac{15u}{2}+2u-3\right)^2} - \frac{3}{4(2u-3)} =$$

$$= \frac{3}{4\left(\frac{9}{2}-\frac{11u}{2}\right)^2} - \frac{3}{4(2u-3)} \qquad u \in [3/5, 1]$$

(c)

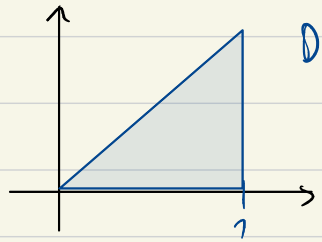
$$f_{V|U}(v|u) = \frac{f_{(U,V)}(u,v)}{f(u)} \ \ldots$$

$$f_{V|U}\left(v|U=\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2(3-1-v)^3}}{\frac{3}{4\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} - \frac{3}{4(1-3)^2}} = \frac{\frac{3}{2(3-1-v)^3}}{\frac{3}{4\cdot\frac{4}{9}} - \frac{3}{16}} = \frac{\frac{3}{2(3-1-v)^3}}{\frac{27-3}{16}} = \frac{16\cdot\cancel{3}}{\cancel{24}\,2(3-1-v)^3}$$

$$= \frac{1}{(3-1-v)^3}$$

c) Calcular la función de densidad de V condicionada por $U = u$, en particular la función de densidad de V condicionada por $U = 1/2$.

(X,Y) distr. unif. en $D=\{(x,y): x<1,\ 0<y<x\}$



ⓐ $¿f(x,y)? = k$

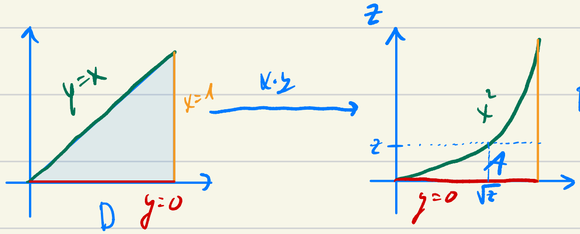
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 1$$

$$\iint_D k\,dxdy = k\,A(D) = k\cdot\frac{1}{2} = 1 \rightarrow \boxed{k=2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y)\notin D \\ 2 & (x,y)\in D \end{cases}$$

ⓓ $f_Z(z)$ $\quad Z = XY$

$$F_Z(z) = P(Z\leq z) = P(X\cdot Y\leq z)$$



$D_z = \{(x,y): x<1,\ 0<y<x^2\}$

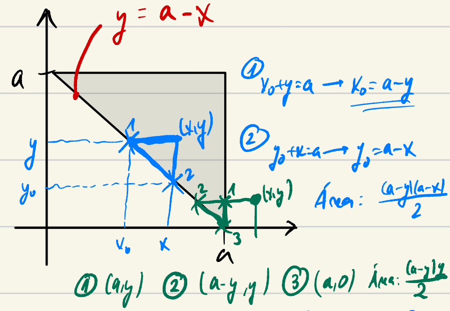
$$P(X\cdot Y<z) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(D_z)} = 3\left[\int_0^{\sqrt{z}} x^2\,dx + (1-z)\cdot\sqrt{z}\right] =$$

$$\text{Área}(D_z) = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{z^3}}{3} + \sqrt{z} - \sqrt{z^3}\right) = 3\sqrt{z} - 2\sqrt{z^3}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < a,\ y < a,\ x+y > a\}$$

$a > 0$



ⓐ

$$\int_C k\,dx\,dy = 1 \iff k\,A(C) = 1 \iff k = \frac{1}{A(C)} = \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2}{a^2}$$

ⓑ

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \text{ ó } y \le 0 \text{ ó } x+y < a \\ \dfrac{(a-y)(a-x)}{2} & (x,y) \in C \\ \dfrac{(a-y)y}{2} & x \ge a,\ y < a \\ \dfrac{(a-x)x}{2} & y \ge a,\ x < a \\ 1 & x, y \ge a \end{cases}$$