Tarea Análisis Numérico Matricial (Última parte)

Jose Antonio Lorencio Abril

Mayo 2020

1 Problema 1

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3.142 \\ 1.001 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3.142 \\ 0 & -0.002 & -1.001 & 1 & -3.145 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3.142 \\ 0 & 1 & 500.5 & -500 & 1573 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -1000 & 1000 & -3143 \\ 0 & 1 & 500.5 & 500 & 1573 \end{array}\right)$$

es decir, $x_1 = \begin{pmatrix} -3143 \\ 1573 \end{pmatrix}$.

Si lo calculamos como $A^{-1}b$, sale

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ 500.5 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.142 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3142 \\ 1573 \end{pmatrix}$$

un poco distintos.

El residual queda

$$r_1 = \begin{pmatrix} 3.142 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3143 \\ 1573 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.142 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -0.143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.142 \\ 0.143 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 3.142 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.001 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3142 \\ 1573 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.142 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0.858 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.858 \\ -0.858 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos el error en la solución como la solución de

$$A \cdot \Delta x = r$$

o sea

$$\Delta x_1 = A^{-1} r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 142.6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta x_2 = A^{-1} r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -858.4 \end{pmatrix}$$

ambos arrojan resultados reguleros.

(b)

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1.001 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.001 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.002 & 4.002 \\ 3.002 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^tA - xI\right| = \begin{vmatrix} 2.002 - x & 4.002 \\ 4.002 & 8 - x \end{vmatrix} = (2.002 - x)(8 - x) - 12.01 = x^2 - 10.00x - 4e^{-6}$$

Sus valores propios son

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -4e^{-7} \end{cases}$$

Y entonces

$$cond_2(A) \approx \sqrt{\frac{10}{4e^{-7}}} = 5000$$

por lo que la matriz está bastante mal condicionada. Además, este valor del número de condición se acerca bastante al real, que, según Octave, ronda el 5001.

2 Problema 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Queremos ponerla como

$$A = LDL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ 0 & & & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$

Queda, entonces, que

$$4 = d_1 l_{11}^2$$

de donde podemos hacer $l_{11} = 1,\ d_1 = 4$.

$$1 = d_1 l_{11} l_{21} = 4 l_{21} \implies l_{21} = \frac{1}{4}$$

y de igual forma, $l_{31} = l_{41} = \frac{1}{4}$.

Seguimos con

$$3 = d_1 l_{21}^2 + d_2 l_{22}^2 = \frac{4}{16} + d_2 l_{22}^2 \implies \frac{11}{4} = d_2 l_{22}^2$$

y podemos hacer $d_2 = \frac{11}{4},\ l_{22} = 1$. Ahora es

$$-1 = d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{22} l_{32} = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} l_{32} \implies l_{32} = \frac{-5}{11}$$

$$0 = d_1 l_{21} l_{41} + d_2 l_{22} l_{42} = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} l_{42} \implies l_{42} = \frac{-1}{11}$$

Continuamos con

$$2 = d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 l_{33}^2 = \frac{1}{4} + \frac{25}{44} + d_3 l_{33}^2 \implies \frac{13}{11} = d_3 l_{33}^2$$

Y hago $d_3 = \frac{13}{11},\ l_{33} = 1$.

$$0 = d_1 l_{31} l_{41} + d_2 l_{32} l_{42} + d_3 l_{33} l_{43} = \frac{1}{4} + \frac{5}{44} + \frac{13}{11} l_{43} \implies l_{43} = \frac{-4}{13}$$

Y, por último,

$$2 = d_1 l_{41}^2 + d_2 l_{42}^2 + d_3 l_{43}^2 + d_4 l_{44}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{44} + \frac{16}{143} + d_4 l_{44}^2 \implies d_4 l_{44}^2 = \frac{21}{13}$$

y podemos hacer $d_4 = \frac{21}{13},\ l_{44} = 1$. Y queda

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{11} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{11} & \frac{-4}{13} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & & & 0 \\ & \frac{11}{4} & & \\ & & \frac{13}{11} & \\ 0 & & & \frac{21}{13} \end{pmatrix}$$

es la factorización buscada. Vemos que es definida positiva, pues es simétrica y todos sus valores propios son positivos.

3 Problema 3

Tenemos F definida en un convexo de $\mathbb{R}^d$ diferenciable de clase C^1 con un punto fijo en $\overline{x}$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{d} \left| \frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} \right|^2 < 1$$

y queremos ver que $\overline{x}$ es un atractor.

Para ello, vamos a intentar estimar $|dF(\overline{x})|$.

Se tiene que

$$dF(\overline{x})(a_1, ..., a_d) = \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_1(\overline{x})}{\partial x_j} a_j, ..., \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_d(\overline{x})}{\partial x_j} a_j \right)$$

De donde

$$\|dF(\overline{x})(a_1, ..., a_d)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} a_j \right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} a_j \right)^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} a_j \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \left[\left(\frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} \right)^2 a_j^2 \right]} \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} \right)^2} \|(a_1, ..., a_n)\|_2$$

O sea, que

$$\|dF(\overline{x})(a_1, ..., a_d)\|_2 \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial F_i(\overline{x})}{\partial x_j} \right)^2} < 1$$

pues $a < 1 \implies \sqrt{a} < 1$.

Entonces, por la proposición 5.1.3, tenemos el resultado.

4 Problema 4

La fórmula de Shermann Morrison nos dice que

$$\left(A+xy^t\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+y^tA^{-1}x}A^{-1}xy^tA^{-1}$$

si $y^tA^{-1}x\neq -1$.

Para verificar la fórmula, multiplicamos ambas matrices y comprobamos que obtenemos la identidad.

$$\left(A+xy^t\right)\left(A^{-1}-\frac{1}{1+y^tA^{-1}x}A^{-1}xy^tA^{-1}\right)=AA^{-1}-\frac{1}{1+y^tA^{-1}x}AA^{-1}xy^tA^{-1}+$$

$$+xy^tA^{-1}-\frac{1}{1+y^tA^{-1}x}xy^tA^{-1}xy^tA^{-1}=I-\frac{xy^tA^{-1}+xy^tA^{-1}xy^tA^{-1}}{1+y^tA^{-1}x}+xy^tA^{-1}=$$

$$=I-\frac{x\left(y^tA^{-1}+y^tA^{-1}xy^tA^{-1}\right)}{1+y^tA^{-1}x}+xy^tA^{-1}=I-\frac{x\left(1+y^tA^{-1}x\right)y^tA^{-1}}{1+y^tA^{-1}x}+xy^tA^{-1}=$$

$$=I-xy^tA^{-1}+xy^tA^{-1}=I\checkmark$$

Y por el otro lado

$$\left(A^{-1}-\frac{1}{1+y^tA^{-1}x}A^{-1}xy^tA^{-1}\right)\left(A+xy^t\right)=A^{-1}A+A^{-1}xy^t-\frac{A^{-1}xy^tA^{-1}A+A^{-1}xy^tA^{-1}xy^t}{1+y^tA^{-1}x}=$$

$$=I+A^{-1}xy^t-\frac{A^{-1}x\left(y^t+y^tA^{-1}xy^t\right)}{1+y^tA^{-1}x}=I+A^{-1}xy^t-\frac{A^{-1}x\left(1+y^tA^{-1}x\right)y^t}{1+y^tA^{-1}x}=I+A^{-1}xy^t-A^{-1}xy^t=I\checkmark$$

y queda probado que la fórmula funciona en las condiciones del enunciado.