Teorema de Tychonoff

Jose Antonio Lorencio Abril

Vamos a tratar uno de los teoremas más importantes de topología general, sobre el que descansan las pruebas de una gran cantidad de teoremas tanto en el campo de la topología, como en la aplicación de esta a otros campos. Un ejemplo notable puedes ser el Teorema de Ascoli sobre la convergencia en espacios de funciones, que a su vez puede ser utilizado para probar teoremas de existencia de varias ecuaciones diferenciales.
Vamos a desarrollar una serie de resultados previos, que hacen que la prueba del teorema sea muy sencilla. Tychonoff, en su momento, no disponía de muchas de las herramientas de las que vamos a utilizar nosotros, por lo que la prueba original del teorema fue distinta.

Definition 1. La **Topología Producto** (topología de Tychonoff) en $\prod X_\alpha$ se obtiene tomando como una base de abiertos, los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde

1. U_α es abierto en $X_\alpha, \forall \alpha \in A$
2. Para todas las coordenadas excepto una cantidad finita $U_\alpha = X_\alpha$

Lemma 2. *En un espacio producto no vacío, las aplicaciones proyecciones son continuas y sobreyectivas.*

Proof. Sea el espacio $X = \prod X_\alpha$. La aplicación proyección P_j es obviamente sobreyectiva, pues dado $x^j \in X_j$, entonces $x = \left(x^1, ..., x^j, ...\right) \in X$ y $P_j\left(x\right) = x^j$.
Para ver que es continua, sea V un abierto de X_j. Entonces $P_j^{-1}\left(V\right) = \prod_{\alpha<j} X_\alpha \times V \times \prod_{\alpha>j} X_\alpha$. Pero esto es un elemento de la base de abiertos de la topología producto, luego es abierto. Enyonces P_j es continua. □

Remark 3. Es evidente que la aplicación P_j^{-1} también es continua. Basta verlo para la base de abiertos, y entonces tomamos un abierto de la base: $\prod U_\alpha$, así $P_j\left(\prod U_\alpha\right) = U_j = \begin{cases} X_j \\ \text{ó} \\ U_j \text{ (abierto en en } X_j) \end{cases}$, en cualquier caso es abierto y P_j^{-1} es continua.

Lemma 4. *La imagen continua de un espacio compacto es compacta.*

Proof. Supongamos que X es compacto y que $f : X \to f\left(X\right)$ es continua. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de Y, entonces $\left\{f^{-1}\left(U\right) | U \in \mathcal{U}\right\}$ es un cubrimiento abierto de X, por ser f continua. Por la compacidad de X, podemos extraer un subcubrimiento finito $\left\{f^{-1}\left(U_1\right), ..., f^{-1}\left(U_n\right)\right\}$, entonces $X \subset \bigcup_1^n f^{-1}\left(U_i\right) \implies f\left(X\right) \subset \bigcup_1^n U_i$ y entonces $\{U_1, ..., U_n\}$ es un cubrimiento finito de $f\left(X\right)$. Por tanto, $f\left(X\right)$ es compacto. □

Lemma 5. *Un espacio topológico X es compacto si, y solo si, todo ultrafiltro en X converge.*

Proof. Solo necesitamos la implicación hacia la izquierda, por lo que esta es la que probaré.
$[\Longleftarrow]$ Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de X sin subrecubrimientos finitos. Entonces $X \setminus (U_1 \cup ... \cup U_n) = \emptyset$ para toda colección finita $(U_i)_1^n$ de $\mathcal{U}$. Los conjuntos de la forma anterior forman entonces una base para un filtro $\mathcal{F}$, ya que la intersección de dos conjuntos de este tipo sigue siendo uno de estos conjuntos. $\mathcal{F}$ está contenido en algún superfiltro $\mathcal{F}^*$, que converge, por hipótesis, digamos a x. Entonces $\exists U \in \mathcal{U}, x \in U$ y como $U \in \varepsilon(x) \implies U \in \mathcal{F}^*$. Pero, por cómo hemos construido el filtro, es $X \setminus U \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$. Pero en un filtro no pueden estar U y $X \setminus U$, por lo que obtenemos una contradicción $\#$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ debe tener un subrecubrimiento finito, y X es compacto □

Theorem 6. ***Teorema de Tychonoff***
Un producto no vacío de espacios es compacto si, y solo si, cada espacio componente es compacto.

Proof. $[\Longrightarrow]$ Si el espacio producto es no vacío, por el Lemma 2, las aplicaciones proyección son sobreyectivas y continuas, y por el Lemma 4 tenemos el resultado pues $X = \prod X_\alpha$ es compacto y P_j es continua. Luego $P_j(X) = X_j$ es compacto, para todo j.
$[\Longleftarrow]$ Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en $\prod X_\alpha$. Entonces, para cada α, $\{P_\alpha(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es un ultrafiltro en X_α, y como X_α es compacto, entonces converge. Por ser P_α^{-1} continua (Remark 3) y un resultado sobre filtros que asegura que f continua $\iff [\mathcal{F} \to x \implies f(\mathcal{F}) \to f(x)]$, entonces $\mathcal{G} = P_\alpha^{-1}(\{P_\alpha(F) : F \in \mathcal{F}\})$ converge. Este filtro podríamos pensar que podría ser más fino que $\mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, pero no puede ser pues este es un ultrafiltro. Por tanto $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ y como $\mathcal{G}$ converge, entonces también converge $\mathcal{F}$. Así, todo ultrafiltro en $\prod X_\alpha$ converge, y por el Lemma 5, $\prod X_\alpha$ es compacto. □