Filtros

Jose Antonio Lorencio Abril

Los filtros, como las redes, son un concepto usado para describir la convergencia en un espacio topológico. La idea es que los entornos de un punto pueden pensarse como convergentes a este. Empezamos con unas definiciones básicas y algunas propiedades obvias:

Definition 1. Un **filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto S** es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de S, con las siguientes propiedades:

1. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
2. $F \in \mathcal{F}, F \subset F' \implies F' \in \mathcal{F}$

Una subfamilia $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es una **base para el filtro $\mathcal{F}$** si, y solo si, cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene algún elemento de $\mathcal{F}_0$, o sea, si, y solo si,

$$\mathcal{F} = \{F \subset S | \exists F_0 \in \mathcal{F}_0 : F_0 \subset F\}$$

Además, una colección no vacía $\mathcal{C}$ de subconjuntos no vacíos de S es una base para algún filtro en S si, y solo si, $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subset C_1 \cap C_2$, y en este caso denominamos **filtro generado por $\mathcal{C}$** a la familia formada por todos los subconjuntos de S que contienen algún elemento de $\mathcal{C}$.

Definition 2. Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son filtros en X, decimos que **$\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$** (o que $\mathcal{F}_2$ es más grueso que $\mathcal{F}_1$) si, y solo si, $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$.
Un filtro $\mathcal{F}$ en X es **fijo** si, y solo si, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ y es **libre** si, y solo si, $\cap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.

Como ejemplo evidente de filtro podemos tomar la familia $\varepsilon(x)$ de todos los entornos de $x \in X$. Por las propiedades de la topología, esto es un filtro, y cualquier base de entornos de x es también una base para el filtro $\varepsilon(x)$.
Pasamos ahora a definir la convergencia en un espacio topológico en términos de filtros:

Definition 3. Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico X se dice que **converge a x** ($\mathcal{F} \to x$) si, y solo si, $\varepsilon(x) \subset \mathcal{F}$, i.e., si, y solo si, $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de x.
Se dice que **$\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación** si, solo si, todo $F \in \mathcal{F}$ se interseca con cada $U \in \varepsilon(x)$. Equivalentemente, podemos decir que $\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación si, y solo si, $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.
Además, es obvio que si $\mathcal{F} \to x$, entonces x es un punto de acumulación de x.
Una **base $\mathcal{C}$ converge a x** si, y solo si, $\forall U \in \varepsilon(x), \exists C \in \mathcal{C} : C \subset U$. Y que **$x$ es un punto de acumulación del filtro base $\mathcal{C}$** si, y solo si, cada $U \in \varepsilon(x)$ interseca a todo $C \in \mathcal{C}$.

Theorem 4. *$\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación si, y sol si, hay un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x*

Proof. [$\Longrightarrow$] Si x es punto de acumulación de $\mathcal{F}$, entonces la colección $\mathcal{C} = \{U \cap F | U \in \varepsilon(x), F \in \mathcal{F}\}$ es una base para un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$ y que converge a x.
[$\Longleftarrow$] Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \to x$, entonces cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $U \in \varepsilon(x)$ verifican que $F \in \mathcal{G}$ y $U \in \mathcal{G}$ y entonces $F \cap U \in \mathcal{G} \implies F \cap U \neq \emptyset$ □

Theorem 5. *Si $E \subset X$, entonces $x \in \overline{E}$ si, y solo si, existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $E \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.*

Proof. [$\Longrightarrow$] Si $x \in \overline{E}$, entonces $\mathcal{C} = \{U \cap E | U \in \varepsilon(x)\}$ es una base para un filtro que contiene a E porque $U \cap E \subset E$ y converge a x.
[$\Longleftarrow$] Si $E \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$, entonces x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ y entonces $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{E}$. □

Definition 6. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $f : X \to Y$, entonces $f(\mathcal{F})$ es el **filtro en Y que tiene como base los conjuntos $f(F) : F \in \mathcal{F}$**

Theorem 7. *Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua en $x \in X$ si, y solo si, $[\mathcal{F} \to x \implies f(\mathcal{F}) \to f(x)]$ en Y*

Proof. [$\Longrightarrow$] Supongamos que f es continua en x y que $\mathcal{F} \to x$. Sea $V \in \varepsilon(f(x)) \overset{f \text{ cta en } x}{\Longrightarrow} f^{-1}(V) \in \varepsilon(x) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{F} \implies V \in f(\mathcal{F})$, y esto se verifica para cualquier entorno de $f(x)$, luego $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
[$\Longleftarrow$] Sea el filtro $\mathcal{F} = \varepsilon(x)$. Entonces cada entorno $V \in \varepsilon(f(x))$ está en $f(\mathcal{F})$, porque $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Así, $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ y f es continua en x. □

El siguiente es un resultado en el espacio producto, que es muy sencillo con razonamientos similares a los que hemos usado hasta ahora, y que concuerda con nuestros conocimientos sobre convergencia en términos de sucesiones.

Theorem 8. *Un filtro $\mathcal{F}$ converge a x_0 en $\prod X_i$ si, y solo si, $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x_0)$ en X_i, para cada i.*

Pasamos ahora a una definición que facilita la aplicación de la convergencia en términos de filtros:

Definition 9. Un filtro $\mathcal{F}$ es un **ultrafiltro** si, y solo si, no hay ningún filtro más fino que $\mathcal{F}$. Por tanto, los ultrafiltros son filtros maximales.

Theorem 10. *Un filtro $\mathcal{F}$ en X es un ultrafiltro si, y solo si, para cada $E \subset X$, o bien $E \in \mathcal{F}$, o bien $X \setminus E \in \mathcal{F}$*

Proof. [$\Longrightarrow$] Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y que $E \subset X$. Cada elemento F de $\mathcal{F}$ se interseca bien con E o bien con $X \setminus E$. Si $\emptyset \neq F \cap E \in \mathcal{F} \overset{F \cap E \subseteq E}{\Longrightarrow} E \in \mathcal{F}$, e igual sucede con $X \setminus E$. Pero ambos no pueden estar en $\mathcal{F}$, pues en tal caso $\emptyset = E \cap (X \setminus E) \in \mathcal{F}$, pero esto no puede suceder, por definición de filtro. Entonces, todos los elementos de $\mathcal{F}$ intersecan bien a E, bien a $X \setminus E$. Podemos

suponer que $F \cap E \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F}$. Entonces $\{F \cap E | F \in \mathcal{F}\}$ es una base para un filtro $\mathcal{G}$ que es más fino que $\mathcal{F}$ que contiene a E. Pero como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, entonces $\mathcal{G}$ no puede ser más fino que $\mathcal{F}$, y entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, por lo que $E \in \mathcal{F}$.
[$\Longleftarrow$] Supongamos que $\mathcal{F}$ contiene a E o a $X \setminus E$ para cada $E \subset X$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro estrictamente más fino que $\mathcal{F}$, entonces para algún $A \in \mathcal{G}, A \notin \mathcal{F} \implies X \setminus A \in \mathcal{F} \implies X \setminus A \in \mathcal{G} \implies \emptyset \in \mathcal{G}\#$ Por tanto, $\mathcal{F}$ tiene que ser maximal. $\square$

Theorem 11. *Todo filtro $\mathcal{F}$ está contenido en algún ultrafiltro.*

La similitud entre redes y filtros es evidente. Cada uno de estos conceptos describe la topología en un espacio topológico con igual facilidad, y los 'filtros más finos' son una analogía conceptual a las 'subredes'. Así, es esperable que podamos establecer entre estos conceptos una relación formal:

Definition 12. Si (S_n) es una red en X, el filtro generado por la base $\mathcal{C}$ consistente en los conjuntos $B_{n_0} = \{S_n | n \geq n_0\}, n_0 \in D$, se denomina **filtro generado por (S_n)**
Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, sea $D_{\mathcal{F}} = \{(x, F) | x \in F \in \mathcal{F}\}$. Entonces $D_{\mathcal{F}}$ está dirigido por la relación $(x_1, F_1) \leqq (x_2, F_2) \iff F_2 \subset F_1$, así que la aplicación $P : D_{\mathcal{F}} \to X$ definida por $P(x, F) = x$ es una red en X. Esta red se denomina **red basada en $\mathcal{F}$**

Y el siguiente teorema parece un resultado natural:

Theorem 13. *Se verifica:*

1. *Un filtro $\mathcal{F}$ converge a x en X si, y solo si, la red basada en $\mathcal{F}$ converge a x*
2. *Una red (S_n) converge a x en X si, y solo si, el filtro generado por (S_n) converge a x*

Proof. Veamos cada una de las equivalencias:

1. [$\Longrightarrow$] Supongamos que $\mathcal{F} \to x$. Si $U \in \varepsilon(x)$, entonces $U \in \mathcal{F}$, por la convergencia. Sea $p \in U$, entonces $(p, U) \in D_{\mathcal{F}}$ y si $(q, F) \geqq (p, U) \implies q \in F \subset U$, por lo que para cualquier entorno U de x, la red basada en $\mathcal{F}$ está finalmente en U, y eso quiere decir que esta red converge a x.

   [$\Longleftarrow$] Supongamos que la red basada en $\mathcal{F}$ converge a x. Sea $U \in \varepsilon(x)$. Entonces para algún $(p_0, F_0) \in D_{\mathcal{F}}$, se tiene $(p, F) \geqq (p_0, F_0) \implies p \in U \overset{*}{\implies} F_0 \subset U$. La implicación $*$ se debe a que si existiese $q \in F_0 \setminus U$, entonces $(q, F_0) \geqq (p_0, F_0)$, pero $q \notin U\#$. Por tanto, $U \in \mathcal{F}$ y esto para cualquier entorno de x, por lo que $\mathcal{F} \to x$.

2. La red (S_n) converge a x si, y solo si, (S_n) está finalmente en $U, \forall U \in \varepsilon(x)$. Visto de otra forma, si, y solo si, cualquier entorno de x contiene una cola de (S_n). Como las colas de (S_n) son la base para el filtro generado por (S_n), tenemos el resultado.

$\square$

Como nota final, notamos que los filtros son preferidos a las redes para tratar cuestiones de convergencia en espacios topológicos. La razón es que las redes son, y deberían permanecer así, formuladas en base a la teoría de conjuntos por naturaleza, y por tanto pasivas. Pero los filtros, al añadir las restricciones topológicas a sus conjuntos, pueden quedar íntimamente unidaas a la estructura misma del espacio sobre el que se trabaja.