Nombre y DNI:

. . . .

1. a) Haz un resumen de aprox 1 folio en el que expliques los aspectos que consideras más importantes relacionados con las funciones armónicas.

   b) Si $\gamma > 0$, demuestra que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = \gamma\, u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

   tiene a lo sumo una solución $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

   Nota: 2'5 ptos

Sean u, v soluciones, entonces

lema 2

$$0 \le \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle = -\gamma \int_{\partial\Omega} |u|^2 - \gamma \int_{\partial\Omega} |v|^2 - 2\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle$$

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_{\partial\Omega} -\gamma \langle u, v\rangle - \int_\Omega \cancel{\Delta u}\, v \quad \text{Green 1}, \quad \Delta u = 0$$

$$= -\gamma \left[\int_{\partial\Omega} |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle \right] = -\gamma \int_{\partial\Omega} |u-v|^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla(u-v)|^2 = 0 \text{ en } \Omega \Rightarrow u - v = cte \text{ en } \Omega$$

$$\Rightarrow u = v + c \quad \text{y} \quad \Delta u = 0 \;\checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla u \cdot n = -\gamma u = -\gamma(v+c) \\ \quad \parallel \\ \nabla(v+c)\cdot n = \nabla v \cdot n = -\gamma v \end{array} \right] \to c = 0 \Rightarrow u = v \quad //$$

2. a) Demuestra que el sistema de funciones

$$\varphi_n(x) = \text{sen}(2\pi n x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

es ortogonal en $L^2(0, 1/2)$, y calcula las normas $\|\varphi_n\|_{L^2}$.

b) demuestra que si $f \in L^2(0, 1/2)$ cumple que $\int_0^{1/2} f(x)\,\text{sen}(2n\pi x)\,dx = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $f \equiv 0$

c) deduce justificadamente que toda $f \in L^2(0, 1/2)$ se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\text{sen}\,(2n\pi x),$$

para unos coeficientes A_n y un tipo de convergencia a determinar

d) Expresa $\int_0^{1/2} |f(x)|^2\,dx$ como una suma adecuada de los coeficientes $|A_n|^2$

e) Encuentra el coeficiente A_1 para la función $f(x) = \cos(2\pi x)$, $x \in (0, 1/2)$.

Nota: 2'5 ptos

a)

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_0^{1/2} \text{sen}(2\pi n x)\,\text{sen}(2\pi m x)\,dx$$

$\boxed{n=m}$

$$\|\varphi_n\|_{L^2} = \int_0^{1/2} \text{sen}^2(2\pi n x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-\cos(4\pi n x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x\Big]_0^{1/2} - \frac{\text{sen}(4\pi n x)}{8\pi n}\Big]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cancel{\text{sen}(2\pi n)}^{\,0}}{8\pi n} + \frac{\cancel{\text{sen}(0)}^{\,0}}{8\pi n} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{n\neq m}$

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_0^{1/2} s(2\pi n x)\,s(2\pi m x)\,dx = -\underbrace{\frac{s(2\pi n x)\,c(2\pi m x)}{2\pi m}\Big]_0^{1/2}}_{0} + \int_0^{1/2} \frac{n}{m}\,c(2\pi n x)\,c(2\pi m x)\,dx$$

$u = s(2\pi n x),\ du = 2\pi n \cdot c(2\pi n x)$

$dv = s(2\pi m x)\,dx,\ v = \frac{-c(2\pi m x)}{2\pi m}$

$$= \frac{n}{m}\int_0^{1/2} c(2\pi n x)\,c(2\pi m x)\,dx = \frac{n}{m}\left(\underbrace{\frac{s(2\pi m x)\,c(2\pi n x)}{2\pi m}\Big]_0^{1/2}}_{0} + \int_0^{1/2} \frac{n}{m}\,s(2\pi n x)\,s(2\pi m x)\,dx \right.$$

$u = c(2\pi n x),\ du = -2\pi n \cdot s(2\pi n x)$

$dv = c(2\pi m x),\ v = \frac{s(2\pi m x)}{2\pi m}$

$$= \frac{n^2}{m^2}\int_0^{1/2} s(2\pi n x)\,s(2\pi m x)\,dx \Longrightarrow \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{n^2}{m^2}\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \longleftrightarrow \frac{n^2}{m^2} = 1 \quad \text{No}$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0 \ \checkmark$$

b) demuestra que si $f \in L^2(0,1/2)$ cumple que $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\,dx = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $f \equiv 0$

Sea $\bar f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -f(-x) & x \in (-\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$ la extensión impar de f.

Entonces

$$\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} \bar f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\,dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{0} -f(-x)\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\,dx + \cancelto{0}{\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\,dx} \underset{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} \int_{1/2}^{0} f(y)\,\mathrm{sen}(-2\pi n y)\,dy =$$

$$= \int_0^{1/2} f(y)\,\mathrm{sen}(2\pi n y)\,dy = 0$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\underbrace{\bar f(x)}_{\text{impar}}\,\underbrace{\cos(2\pi n x)}_{\text{par}}}_{\text{impar}}\,dx = 0 \qquad n \geq 0$$

Así, $\hat{\bar f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \bar f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ //

c) deduce justificadamente que toda $f \in L^2(0,1/2)$ se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\,(2n\pi x),$$

para unos coeficientes A_n y un tipo de convergencia a determinar

Por (a), $\{2\varphi_n\}$ es BON y por (b), dado $f \in L^2(0,1/2) \to \left[\langle f, 2\varphi_n\rangle = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \forall n\right]$

y el teorema de caracterización de BON nos da el resultado //

$B_n = \langle f, 2\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\rangle = 2\langle f, \mathrm{sen}(2\pi n x)\rangle = 2\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi n x)\,dx$ //

$\to A_n = 2B_n$ //

d) Expresa $\int_0^{1/2} |f(x)|^2\, dx$ como una suma adecuada de los coeficientes $|A_n|^2$

$$\int_0^{1/2} |f(x)|^2\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} |B_n|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{A_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} |A_n|^2$$

gract. BON

e) Encuentra el coeficiente A_1 para la función $f(x) = \cos(2\pi x)$, $x \in (0, 1/2)$.

$$A_1 = 4\int_0^{1/2} \cos(2\pi x)\,\text{sen}(2\pi x)\, dx = 4\int_0^{1/2} \frac{(e^{i2\pi x} + e^{-i2\pi x})(e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x})}{4i}\, dx$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{1/2} e^{i4\pi x} \cancel{-1+1} - e^{-i4\pi x}\, dx = \frac{1}{i}\int_0^{1/2} 2i\,\text{sen}(4\pi x)\, dx =$$

$$= 2\int_0^{1/2} \text{sen}(4\pi x)\, dx = 2\cdot \left.\frac{-\cos(4\pi x)}{4\pi}\right]_0^{1/2} = 2\cdot \frac{-\cos(2\pi) + \cos(0)}{4\pi} = 0$$

3. Considera la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2}, & t>0,\ r\in(0,1),\ \theta\in(0,2\pi) \\ u_r(t,1,\theta)=0, & t>0,\ \theta\in(0,2\pi) \\ u(0,r,\theta)=f(r,\theta), & r\in(0,1),\ \theta\in(0,2\pi), \end{cases}$$

a) Describe brevemente a qué problema físico corresponde

b) Si imponemos $u(t,r,\theta)=U(t,r)\operatorname{sen}(2\theta)$, determina la solución general en este caso

c) Encuentra la solución explícita cuando $f(r,\theta)=5\,r^2\operatorname{sen}(2\theta)$

Nota: 2'5 ptos

a) Es un problema de la ecuación del calor en el disco unidad, con distribución inicial f y frontera aislada.

b) $U_t \operatorname{sen}(2\theta) = U_{rr}\operatorname{sen}(2\theta) + \dfrac{U_r}{r}\operatorname{sen}(2\theta) - 4U\dfrac{\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}$

$U_t = U_{rr} + \dfrac{U_r}{r} - \dfrac{4}{r^2}$

$U(t,r) = T(t)R(r) \longrightarrow T'R = R''T + \dfrac{R'T}{r} - \dfrac{4RT}{r^2}$

$\longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{R''}{R} + \dfrac{R'}{rR} - \dfrac{4}{r^2} = cte = \rho$

$\boxed{\rho>0}$ $T' = \rho T \longrightarrow T = Ae^{\rho t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ $\not\exists$

$\boxed{\rho=-\lambda^2\leq 0}$ $R'' + \dfrac{1}{r}R' - \dfrac{2^2}{r^2}R = -\lambda^2 R$ Bessel $\xrightarrow[n=2]{}$ $R(r) = A\,J_2(\lambda r) + \cancel{B\,Y_2(\lambda r)}$ 0 $\exists R(0^+)$

$\exists R(0^+)$, $R'(1)=0$

$R'(r) = A\lambda J_2'(\lambda r) \longrightarrow R'(1) = A\lambda(J_2'(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda=0$ (caso bajando cte) ó $\lambda\in Z_+(J_2')$

$T' = -\lambda^2 T \longrightarrow T = a\cdot e^{-\lambda^2 t}$

$\longrightarrow U(t,r) = A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_2(\lambda_n r)\cdot e^{-\lambda_n^2 t}$

c) Encuentra la solución explícita cuando $f(r,\theta) = 5\,r^2\,\mathrm{sen}(2\theta)$

Es $u(t,r) = 5r^2 = A_0 + \sum A_n e^{-\alpha_n^2 t} J_2(\alpha_n r)$

$$A_0 = \int_0^1 5r^2\,dr = \frac{5}{3} r^3 \Big]_0^1 = \frac{5}{3}$$

$$A_n = \frac{\int_0^1 f(r)\, J_2(\alpha_n r)\, r\, dr}{\|J_2(\alpha_n r)\|_r^2}$$

$$\|J_2(\alpha_n r)\|_r^2 = \int_0^1 J_2(\alpha_n r)^2\, r\, dr = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{\alpha_n^2}\right) J_2(\alpha_n)^2 + \cancel{J_2'(\alpha_n)^2}$$

$$5\int_0^1 J_2(\alpha_n r)\, r^3\, dr = 5 \cdot \frac{1 \cdot \Gamma(1)}{\alpha_n} J_3(\alpha_n) = \frac{5 J_3(\alpha_n)}{\alpha_n}$$

Sonine $\mu = 0, \nu = 2$

$$A_n = \frac{5 \cdot J_3(\alpha_n) / \cancel{\alpha_n}}{\frac{\alpha_n^2 - 4}{2\alpha_n^{\cancel{2}}}} = \frac{10 \cdot \alpha_n \cdot J_3(\alpha_n)}{\alpha_n^2 - 4} \qquad n \geq 1$$

4. Se define la siguiente colección de núcleos

$$J_N(x) \;=\; a_N\,\big(N\,F_N(x)\big)^2, \quad N \geq 1,$$

donde la constante de normalización a_N es tal que $\int_{\mathbb{T}} J_N(x)\,dx \;=\; 1$. Trata de responder a 5 de los siguientes apartados[1]:

a) Demuestra que $J_N(x)$ es un polinomio trigonométrico, y determina su grado. Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{J_N}(0)$ y $\widehat{J_N}(2N)$.

b) Demuestra que $a_N \sim 1/N^3$, si $N \to \infty$, y determina si es posible su valor exacto.

c) Demuestra que $\int_{\mathbb{T}} |x\,J_N(x)|\,dx \leq c/N$.

d) Para $f \in C(\mathbb{T})$, denotamos $\omega(\delta, f) := \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x\in\mathbb{T}}} |f(x+h) - f(x)|$. Demuestra por inducción que

$$\omega(N\delta, f) \;\leq\; N\omega(\delta, f), \quad N = 1, 2, \ldots$$

y que si $R > 0$ es un número real se tiene $\omega(R\delta, f) \;\leq\; (R+1)\,\omega(\delta, f)$.

e) Demuestra que

$$\big|f * J_N(x) - f(x)\big| \;\leq\; \big(1 + \big\|NyJ_N(y)\big\|_{L^1}\big)\,\omega(1/N, f),$$

f) Deduce de lo anterior que si $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$ entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \big|f(x) - f * J_N(x)\big| \;\leq\; \frac{C_f}{N}.$$

Nota: 2'5 ptos

[1] Nota: cada apartado vale 0'5 ptos; aunque no sepas resolver un apartado, puedes usarlo para responder apartados posteriores.

4. Se define la siguiente colección de núcleos

$$J_N(x) = a_N \left(N\, F_N(x)\right)^2, \quad N \geq 1,$$

donde la constante de normalización a_N es tal que $\int_{\mathbb{T}} J_N(x)\, dx = 1$. Trata de responder a 5 de los siguientes apartados[1]:

a) Demuestra que $J_N(x)$ es un polinomio trigonométrico, y determina su grado. Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{J_N}(0)$ y $\widehat{J_N}(2N)$.

D_N es pol. trig. de grado N.

$\rightarrow F_N$ es pol. trig. de grado $N-1$

$\rightarrow J_N$ es pol trig de grado $2N-2$

y $\hat{F}_N(n) = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \rightarrow \hat{F}_N(0) = 1$, $\hat{F}_N(2N) = -1$

$\hat{J}_N(0) = \int_{\mathbb{T}} J_N(x)\, dx = 1$

$\hat{J}_N(2N) = 0 \qquad 2N > 2N-2$

b) Demuestra que $a_N \sim 1/N^3$, si $N \to \infty$, y determina si es posible su valor exacto.

$$1 = \int_{\mathbb{T}} J_N(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} a_N \left(N F_N(x)\right)^2 = a_N N^2 \int_{\mathbb{T}} F_N^2(x)\,dx \underset{\text{HSE7}}{\approx} a_N N^2 N = a_N N^3$$

$$\to a_N \sim \frac{1}{N^3}$$

Más precisión:

$$\int_{\mathbb{T}} F_N^2(x)\,dx \underset{\text{parseval}}{=} \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 = \sum_{|n|\le N} 1 + \frac{n^2}{N^2} - 2\frac{|n|}{N}$$

$$= 2N+1 + \frac{1}{N^2}\sum_{|n|\le N} n^2 - \frac{2}{N}\sum_{|n|\le N} |n|$$

$$= 2N+1 + \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N} n^2 - \frac{4}{N}\sum_{n=1}^{N} n = 2N+1 + \frac{2}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{4}{N}\frac{N(N+1)}{2}$$

$$= 2N+1 + \frac{(N+1)(2N+1)}{3N} - 2(N+1) = \frac{(N+1)(2N+1)}{3N} - 1$$

$$= \frac{2N^2 + N + 2N + 1 - 3N}{3N} = \frac{2N^2+1}{3N}$$

Así, $1 = a_N \cdot N^{\cancel{2}} \cdot \frac{2N^2+1}{3\cancel{N}} = a_N \frac{2N^3+N}{3} \to a_N = \frac{3}{2N^3+N}$

c) Demuestra que $\int_{\mathbb{T}} |x\, J_N(x)|\, dx \leq c/N$.

$$N \cdot F_N(x) \lesssim \min \left\{ N^2, \frac{1}{|x|^2} \right\}$$

$$J_N(x) = a_N \cdot (N \cdot F_N(x))^2 \lesssim \frac{1}{N^3} \cdot \min \left\{ N^4, \frac{1}{|x|^4} \right\} \lesssim$$

Así,

$$\int_{\mathbb{T}} |x J_N(x)|\, dx = 2 \int_0^{1/2} x J_N(x) \lesssim \int_{|x| \leq \frac{1}{N}} x \frac{N^4}{N^3} + \int_{\frac{1}{N} \leq |x| \leq \frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{N^3} \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$= \frac{N^4}{N^3} \frac{x^2}{2} \Big]_0^{1/N} + \frac{1}{N^3} \frac{x^{-2}}{-2} \Big]_{1/N}^{1/2} = \frac{1}{2N} - \frac{2}{N^3} \left[2^2 - N^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2N} + \frac{2}{N} - \frac{8}{N^3} \leq \frac{5}{2N} \quad //$$

d) Para $f \in C(\mathbb{T})$, denotamos $\omega(\delta, f) := \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x\in\mathbb{T}}} |f(x+h) - f(x)|$. Demuestra por inducción que

$$\omega(N\delta, f) \leq N\omega(\delta, f), \quad N = 1, 2, \ldots$$

y que si $R > 0$ es un número real se tiene $\omega(R\delta, f) \leq (R+1)\,\omega(\delta, f)$.

$\boxed{N=1}$ $\omega(\delta, f) \leq \omega(\delta, f)$ ✓

Supongámoslo cierto para $N-1$

$\boxed{N}$

$$\omega(N\delta, f) = \sup_{\substack{|h|\leq N\delta \\ x\in\mathbb{T}}} |f(x+h) - f(x)| \leq \sup_{\substack{|h|\leq N\delta \\ x\in\mathbb{T}}} \underbrace{|f(x+h) - f(\underbrace{x+\tfrac{h}{N}}_{y})|}_{\substack{|f(y+\frac{N-1}{N}h) - f(y)| \\ \wedge \\ \omega((N-1)\delta, f)}} + \underbrace{|f(x+\tfrac{h}{N}) - f(x)|}_{\substack{\wedge \\ \omega(\delta, f)}}$$

$$\leq (N-1)\,\omega(\delta, f) + \omega(\delta, f) = N\omega(\delta, f)$$

$$\omega(R\delta, f) \leq \omega(\lfloor R\rfloor\delta, f) \leq \lfloor R\rfloor\,\omega(\delta, f) \leq (\lfloor R\rfloor + 1)\,\omega(\delta, f) \leq (R+1)\,\omega(\delta, f)$$

e) Demuestra que

$$\left|f * J_N(x) - f(x)\right| \le \left(1 + \|N y J_N(y)\|_{L^1}\right)\omega(1/N, f),$$

$$|f * J_N(x) - f(x)| = \left| \int f(x-y) J_N(y)\,dy - f(x) \cdot \underbrace{\int J_N(y)\,dy}_{1} \right| =$$

$$= \left| \int J_N(y) \left[f(x-y) - f(x) \right] dy \right| \le$$

$$\le \int_{|y| \le \frac{1}{N}} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\le\, \omega(\frac{1}{N}, f)} J_N(y)\,dy + \int_{\frac{1}{N} \le |y| \le \frac{1}{2}} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\le\, \omega(|y|, f)} J_N(y)\,dy$$

$$\omega(|y|, f) = \omega\left(N \frac{|y|}{N}, f\right) \le (N|y| + 1)\,\omega\left(\tfrac{1}{N}, f\right)$$

$$\le \omega\left(\tfrac{1}{N}, f\right) \left[\int_{|y| \le \frac{1}{N}} J_N(y)\,dy + \int_{\dots} N|y| J_N(y) + \int_{\dots} J_N(y)\,dy \right]$$

$$= \omega\left(\tfrac{1}{N}, f\right) \left[\underbrace{\int_{\mathbb{T}} J_N(y)\,dy}_{1} + \underbrace{\int_{\dots} N|y| J_N(y)}_{\le\, \|N|y| J_N(y)\|_{L^1}} \right]$$

f) Deduce de lo anterior que si $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$ entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \left| f(x) - f * J_N(x) \right| \leq \frac{C_f}{N}.$$

$f \in Lip_1(\mathbb{T}) \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$

Así,

$$\omega\left(\tfrac{1}{N}, f\right) \leq \frac{M}{N}$$

$$|f(x) - f * J_N(x)| \leq \left(1 + \| N y J_N(y) \|_{L^1}\right) \frac{M}{N}$$

$$\leq \left(1 + N \| y J_N(y) \|_{L^1}\right) \frac{M}{N}$$

$$\leq \left(1 + \cancel{N} \frac{c}{\cancel{N}}\right) \frac{M}{N} = \frac{M(1+c)}{N}$$

EDPs y Series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES **Examen junio 2018**

Nombre y DNI:

....

1. Escoge dos de las siguientes propiedades, y describe brevemente su significado, dando ejemplos de EDPs que las cumplan y aspectos que consideres destacados

   (a) Principio del máximo

   (b) Propiedad del valor medio

   (c) Conservación de la energía

   Demuestra con detalle al menos una de las propiedades escogidas.

   Nota: 2 ptos

2. a) Demuestra que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, con convergencia en la norma de $L^2(0,1)$, entonces

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \quad \text{si } n \geq 1, \quad \text{y} \quad a_0 = ??$$

   b) Expresa $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx$ como una suma adecuada de los coeficientes $|a_n|^2$

   c) Si $f(x) = \sin(\pi x)$ demuestra que $a_n = 0$ para n impar, $a_n = \frac{-4/\pi}{(n+1)(n-1)}$ para n par no nulo, y determina el valor de a_0.

   d) Utiliza los apartados anteriores para probar que

$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

   Sugerencia: en (c) puede ser útil la fórmula $2\,\mathrm{sen}\,A\cos B = \mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B)$.

   Nota: 3 ptos

3. Considera la ecuación ordinaria $U''(x) = \rho\, U(x)$, $x \in [0,1]$, con condiciones de contorno periódicas, es decir $U(0) = U(1)$ y $U'(0) = U'(1)$. Demuestra que:

   a) si $\rho > 0$, entonces sólo hay soluciones nulas

   b) si $\rho = -\lambda^2 \leq 0$, entonces hay soluciones no nulas si y sólo si $\lambda = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Nota: 2 ptos

4. Resuelve mediante separación de variables la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u, & t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ u(0,x) = 0, & x \in (0,\pi) \\ u_t(0,x) = 1 + \cos^3 x, & x \in (0,\pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

   Sugerencia: Puedes usar $\cos^3 x = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$.

   Nota: 2 ptos

5. **V ó F** (justifica tu respuesta)

   a) Si s_n converge a s en el sentido de Cesàro, entonces existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

   b) La familia de núcleos $K_N = (D_N + F_N)/2$ es una aproximación de la identidad regular.

   c) La serie de Fourier de la función $f(x) = 1/\log(1/|x|)$, $|x| \leq 1/2$, diverge en $x = 0$.

   d) Existen dominios Ω en $\mathbb{R}^2$ donde el problema de Dirichlet no tiene solución.

   Nota: 1 pto

2. a) Demuestra que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, con convergencia en la norma de $L^2(0,1)$, entonces

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \quad \text{si } n \geq 1, \quad \text{y} \quad a_0 = ??$$

Si vemos que $\{1, \sqrt{2}\cos(n\pi x)\}_{n\geq 1}$ es SON, ya está.

- $\int_0^1 dx = 1$, $\quad \int_0^1 1\cdot 2\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2\,\mathrm{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 = 0 \quad \forall n \geq 1$

- $\int_0^1 \cos^2(n\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{1+\cos(2\pi n x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\mathrm{sen}(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
  $n \geq 1$

- $\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{i\pi n x} + e^{-i\pi n x}}{2}\cdot\frac{e^{i\pi m x} + e^{-i\pi m x}}{2}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{e^{i\pi(n+m)x} + e^{i\pi(n-m)x} + e^{i\pi(m-n)x} + e^{-i\pi(n+m)x}}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{i\pi(n+m)x}}{i\pi(n+m)} + \frac{e^{i\pi(n-m)x}}{i\pi(n-m)} + \frac{e^{i\pi(m-n)x}}{i\pi(m-n)} - \frac{e^{-i\pi(n+m)x}}{i\pi(n+m)}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cancel{\frac{(-1)^{n+m}}{i\pi(n+m)}} + \cancel{\frac{(-1)^{n-m}}{i\pi(n-m)}} \underset{-}{+} \cancel{\frac{(-1)^{m-n}}{i\pi\underset{(n-m)}{\cancel{(m-n)}}}} - \cancel{\frac{(-1)^{n+m}}{i\pi(n+m)}} - \left(\cancel{\frac{1}{i\pi(n+m)}} + \cancel{\frac{1}{i\pi(n-m)}} \underset{-}{+} \cancel{\frac{1}{i\pi\underset{n-m}{\cancel{(m-n)}}}} - \cancel{\frac{1}{i\pi(n+m)}}\right)\right] = 0 \quad n \neq m$$

Así, $\{1, \sqrt{2}\cos(n\pi x)\}_{n\geq 1}$ es SON y $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$.

lema orto 2 $\longrightarrow$ $a_n = \langle f, e_n\rangle = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \quad n \geq 1$

$a_0 = \langle f, 1\rangle = \int_0^1 f(x)\,dx$