Hoja 5: Convoluciones, núcleos de Dirichlet y Féjer

1. Si $f = \chi_{[0,a]}$, calcula la convolución $(f * f)(x)$ y dibuja su gráfica.

2. (i) Sean $K, f \in L^1$. Demuestra que si K es acotada, entonces $K * f(x)$ es continua en todo x (y también acotada).

   (ii) Encuentra ejemplos de $f, g \in L^1$ tales que $f * g$ no es continua, e incluso $f * g(x_0) = \infty$ en algún punto x_0.

   Nota: En (ii) intentar con $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$, $0 < |x| \le 1/2$, para una potencia α apropiada.

3. Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$. Demuestra que $\{K_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} K(x/\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ es una aproximación de la identidad, para toda sucesión $\varepsilon_n \searrow 0$.

4. Demuestra que $\sum_{n=1}^N \cos\big((2n-1)t\big) = \sin(2Nt)/[2\sin t]$.

5. (i) Si $|x| \le \pi/2$, demuestra que

$$\int_0^x \frac{\sin(Rt)}{\sin t}\, dt \;=\; \int_0^x \frac{\sin(Rt)}{t}\, dt \;+\; E_R(x),$$

   donde $|E_R(x)| \le C/R$, para todo $|x| \le \pi/2$ y para todo $R \ge 1$.

   (ii) Utiliza (i) para probar el siguiente lema de clase: si $|x| \le 1/2$

$$\int_0^x D_N(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi x} \frac{\sin t}{t}\, dt \;+\; \mathcal{O}(1/N), \qquad \text{si} \quad N \to \infty.$$

   (iii) Demuestra que existe $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t}\, dt$, calcula su valor a partir de (ii).

   Sugerencia: En (i) utiliza que $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ es de clase C^1, e integración por partes.

6. (i) Si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$, demuestra que

$$\sigma_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \Big(1 - \frac{n}{N}\Big)\big[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)\big].$$

   (ii) Deduce de (i) y del teorema de Féjer, que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y **real**, entonces se puede aproximar uniformemente por polinomios reales.

7. Utiliza Parseval para probar

   (i) $\|D_N\|_{L^2}^2 = 2N + 1$

   (ii) $\|F_N\|_{L^2}^2 \approx N$.

8. **Núcleos de de la Vallée-Poussin.** Definimos: $V_N = 2F_{2N} - F_N$, $N = 1, 2, \ldots$

   (i) Demuestra que $V_N = [D_N + \ldots + D_{2N-1}]/N$.

   (ii) Demuestra que $\{V_N\}_{N\ge1}$ es una aproximación de la identidad.

   (iii) Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{V_N}(n)$, y esboza su gráfica.

   (iv) ¿Son los núcleos $V_N(x) \ge 0$? Esboza la gráfica para algunos valores de N.

9. Si $|f(x)| \le M$ demuestra que $|\sigma_N f(x)| \le M$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Prueba también que, para alguna constante $c > 0$, se tiene $|S_N f(x)| \le c\, M\, \ln(N+1)$. ¿Se puede quitar el $\log(N+1)$ en esta desigualdad (o reemplazarlo por otra expresión menor)?

1. Si $f = \chi_{[0,a]}$, calcula la convolución $(f * f)(x)$ y dibuja su gráfica.

$$(f*f)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) f(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) f(t)\,dt = ⊛$$

$t \in [-1/2, 1/2]$

$\boxed{a > 1/2}$

$f(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1/2]$

$f(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, 1/2]$

$f(x-t) = 1 \leftrightarrow x-t \in [0,a] \leftrightarrow t-x \in [-a, 0] \leftrightarrow t \in [-a+x, x]$

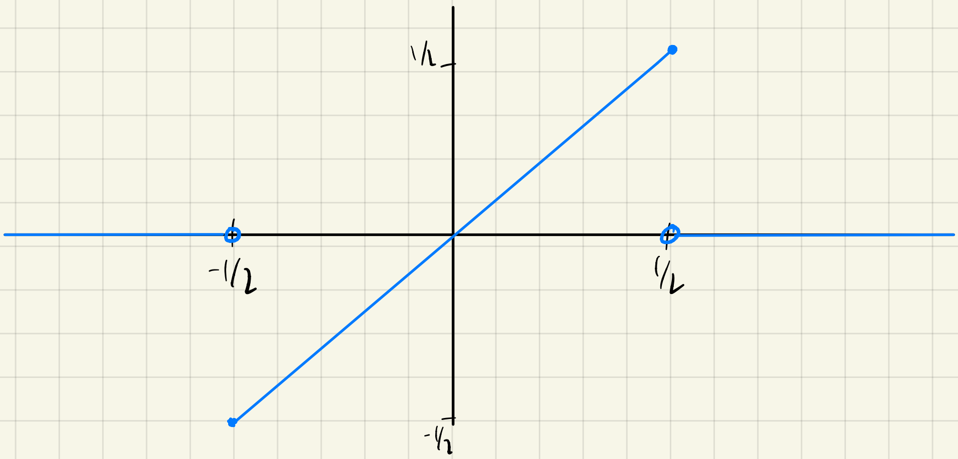
$\boxed{x < -1/2} \longrightarrow f(x-t) = 0$

$\boxed{x > 1/2} \longrightarrow f(x-t) = 0$

$\boxed{x \in [-1/2, 1/2]} \longrightarrow f(x-t) = 1 \quad$ si $\quad t \in [-1/2, x]$

$⊛ = \int_0^x dt = x \qquad$ si $\qquad x \in [-1/2, 1/2]$

$= 0 \qquad$ si $\quad x \notin [-1/2, 1/2]$



$$\boxed{a \in (0, 1/2]}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, a] \\ 0 & t \notin [0, a] \end{cases}$$

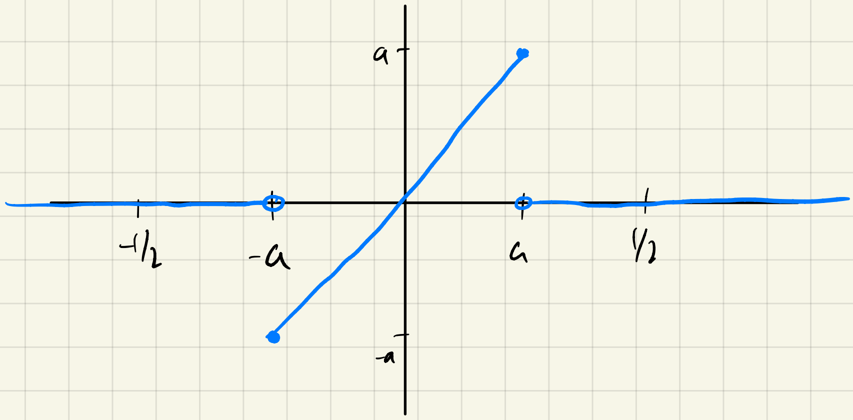
$$f(x-t) = 1 \longleftrightarrow t \in [-a+x, x]$$

$$x > a \to f(x-t) = 1 \longleftrightarrow t \in [x-a, x] \xrightarrow{t < 1/2} \left[\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}\right]$$

$$x < a \to f(x-t) = 1 \longleftrightarrow t \in [x, a+x] \xrightarrow{t > -1/2} [-1/2, a - 1/2]$$

$$x \in [-a, a] \to f(x-t) = 1 \longleftrightarrow t \in [-a+x, x]$$

$$\circledast = \int_0^x dt = x \quad \text{si} \quad x \in [-a, a]$$



① $f = \mathbb{1}_{[0,a]}$

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(t)\, dt = \int_{(0,a)} \mathbb{1}_{(0,a)}(x-t)\, dt = \left| \int_{(0,a)} \mathbb{1}_{(x-a,x)}\, dt \right| = \left| (0,a) \cap (x-a,x) \right| =$$

$0 < x-t < a \iff x-a < t < x$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in (0,a) \\ 2a-x & \text{si } x \in (a,2a) \\ 0 & x > 2a \end{cases}$$

2. (i) Sean $K, f \in L^1$. Demuestra que si K es acotada, entonces $K * f(x)$ es continua en todo x (y también acotada).

$$K*f(x) = \int_{\mathbb{T}} K(x-t) f(t)\, dt$$

$$|K*f(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}} K(x-t) f(t)\, dt \right| \le \int_{\mathbb{T}} |K(x-t)|\, |f(t)|\, dt \le \int_{\mathbb{T}} M \cdot |f(t)|\, dt =$$

$$= M \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt < \infty$$

y es <u>acotada</u>.

$$|K*f(x+h) - K*f(x)| = |f*K(x+h) - f*K(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(x+h-t) K(t)\, dt - \int_{\mathbb{T}} f(x-t) K(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{T}} K(t) \left[f(x+h-t) - f(x-t) \right] dt \right| \le \int_{\mathbb{T}} |K(t)|\, |f(x+h-t) - f(x-t)|\, dt \le$$

$$\le K \int_{\mathbb{T}} | f(x+h-t) - f(x-t) |\, dt = K \cdot \| f(x+h) - f(x) \|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Lema antes del tma 1.3 del cap 5.

(ii) Encuentra ejemplos de $f, g \in L^1$ tales que $f * g$ no es continua, e incluso $f * g(x_0) = \infty$ en algún punto x_0.

Nota: En (ii) intentar con $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$, $0 < |x| \leq 1/2$, para una potencia α apropiada.

$$f*g(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|x-t|^\alpha}\cdot\frac{1}{|t|^\alpha}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{1}{(x-t)t}\right|^\alpha dt = \circledast$$

$$\boxed{\frac{1}{x}\left|\frac{1}{x-t}+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{x}\left|\frac{t+x-t}{(x-t)t}\right| = \frac{1}{(x-t)t}}$$

$$\circledast = \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{1}{x}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-t}+\frac{1}{t}}_{\geq 1/t}\Big)\right|^\alpha dt \geq \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{1}{x}\right|^\alpha\left|\frac{1}{t}\right|^\alpha dt = \frac{1}{|x|^\alpha}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{|t|^\alpha}\,dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{|x|^\alpha}\int_0^{1/2}\frac{1}{t^\alpha}\,dt \geq \frac{1}{|x|^\alpha}\int_0^{|x|}\frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{|x|^\alpha}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^{|x|} =$$

$$= \frac{1}{|x|^\alpha}\cdot\frac{|x|^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)} = \frac{|x|^{-2\alpha+1}}{(-\alpha+1)} \xrightarrow[x\to 0]{\circledast} \infty$$

$\circledast$ Para esto, queremos que $-2\alpha+1<0 \Leftrightarrow -2\alpha<-1 \Leftrightarrow 2\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{2}$

Podemos tener $\boxed{\frac{1}{2}<\alpha<1}$

lo visto — para que sea $L^1(\mathbb{T})$

3. Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$. Demuestra que $\{K_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}K(x/\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una aproximación de la identidad, para toda sucesión $\varepsilon_n \searrow 0$.

1

$\frac{x}{\varepsilon_n} = y$

$\frac{dx}{\varepsilon_n} = dy$

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon_n} K\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_n}}\int_{\mathbb{R}} K(y)\cdot \cancel{\varepsilon_n}\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} K(y)\,dy = 1 \quad //$$

2

$$\int_{\mathbb{R}} |K_n(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon_n}\left|K\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\right| dx = \int_{\mathbb{R}} |K(y)|\,dy < \infty \quad \forall n \quad //$$

3 Sea $\delta > 0$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_n(x)|\,dx = \int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon_n}} |K(y)|\,dy \xrightarrow[\varepsilon_n \to 0]{T.C.D} 0$$

$\frac{x}{\varepsilon_n} = y$

$|x| > \delta \to y > \frac{\delta}{\varepsilon_n}$

$$\left.\begin{array}{l} \{f_n\} \longrightarrow f \\ \text{integrables} \qquad \text{medible} \\ \forall n,\ |f_n| \le g \ \text{medible} \end{array}\right] \longrightarrow \int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu$$

En este caso: $f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le \frac{\delta}{\varepsilon_n} \\ K(x) & |x| > \frac{\delta}{\varepsilon_n} \end{cases}$,

$f \equiv 0 \qquad \{f_n\} \to f$

$|f_n| \le |K|$ ← medible por estar en L^1

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n\,dx = \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_n\,dx \quad //$$

4. Demuestra que $\sum_{n=1}^{N} \cos((2n-1)t) = \sin(2Nt)/[2\sin t]$.

$$\cos[(2n-1)t] = \frac{e^{i(2n-1)t} + e^{-i(2n-1)t}}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \cos((2n-1)t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{i(2n-1)t} + e^{-i(2n-1)t}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} e^{i(2n-1)t}}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} e^{-i(2n-1)t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{it} - e^{it}\cdot e^{i\cdot 2Nt}}{1-e^{i2t}} +$$

$$S_N = \frac{a_0 - a_0\cdot r^N}{1-r}$$

$a_0 = e^{-it}$

$\text{ratio} = e^{-i2t}$

$$\underbrace{e^{it}}_{a_0} + e^{i\cdot 3t} + e^{i\cdot 5t} + \ldots$$

$\text{ratio} \quad e^{i\cdot 2t}$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{e^{-it} - e^{-it}\cdot e^{-i2Nt}}{1-e^{-i2t}} = \frac{1}{2}\left[\frac{(e^{it}-e^{it(2N+1)})(1-e^{-i2t}) + (e^{-it}-e^{-it(2N+1)})(1-e^{i2t})}{(1-e^{i2t})(1-e^{-i2t})}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{e^{it}} - \cancel{e^{-it}} - e^{it(2N+1)} + e^{it(2N-1)} + \cancel{e^{-it}} - \cancel{e^{it}} - e^{-it(2N+1)} + e^{-it(2N-1)}}{1 - e^{-i2t} - e^{i2t} + 1} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos(t(2N-1)) - \cancel{2}\cos(t(2N+1))}{\cancel{2}\,(2-2\cos(2t))} = \frac{\cos(2Nt-t) - \cos(2Nt+t)}{2-2\cos(2t)} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos(2Nt)\cos(t)} + \sin(2Nt)\sin(t) - \cancel{\cos(2Nt)\cos(t)} + \sin(2Nt)\sin(t)}{2-2\cdot(\cos^2(t)-\sin^2(t))} =$$

$$\frac{\cancel{\cos(2Nt)\cos(t)} + \operatorname{sen}(2Nt)\operatorname{sen}(t) - \cancel{\cos(2Nt)\cos(t)} + \operatorname{sen}(2Nt)\operatorname{sen}(t)}{2-2\cdot(\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t))} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(2Nt)\operatorname{sen}(t)}{2-2(1-2\operatorname{sen}^2(t))} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(2Nt)\cancel{\operatorname{sen} t}}{\cancel{2-2}+\underset{2}{\cancel{4}}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}(t)} = \frac{\operatorname{sen}(2Nt)}{2\operatorname{sen}(t)}$$

6. (i) Si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$, demuestra que

$$\sigma_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)\right].$$

(ii) Deduce de (i) y del teorema de Féjer, que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y **real**, entonces se puede aproximar uniformemente por polinomios reales.

(i) Tenemos $S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [\underbrace{a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x}_{t_n(x)}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} t_n(x)$

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{N-1}}{N} = \frac{N\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(N-n)t_n(x)}{N} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) t_n(x) \quad //$$

(ii) Consideramos $[a,b] = [0, 1/2]$ y $\tilde{f} : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ ext. par

$$\sigma_N \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \tilde{a}_n \cos 2\pi n x + \tilde{b}_n \sin 2\pi n x$$

$$\tilde{a}_n = \left(1 - \frac{n}{N}\right) a_n$$

Por el tm. Féjer, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 / \forall N > N_0, \ |\tilde{f}(x) - \sigma_N \tilde{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\cos(x) = P_{c,L}(x) + R_{c,L}(x)$ $\qquad |R_{c,L}(x)|, |R_{s,L}(x)| \longrightarrow 0 \ \forall x \in K$ unif

$\operatorname{sen}(x) = P_{s,L}(x) + R_{s,L}(x)$ $\qquad K = [-2\pi N_0, 2\pi N_0]$

9. Si $|f(x)| \leq M$ demuestra que $|\sigma_N f(x)| \leq M$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Prueba también que, para alguna constante $c > 0$, se tiene $|S_N f(x)| \leq c\,M\,\ln(N+1)$. ¿Se puede quitar el $\log(N+1)$ en esta desigualdad (o reemplazarlo por otra expresión menor)?

$$|\sigma_N f(x)| = |F_N * f(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}} F_N(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{T}} F_N(x-y) |f(y)|\, dy \leq$$

$$\leq M \int_{\mathbb{T}} F_N(x-y)\, dy = M$$

$$|S_N f(x)| = |D_N * f(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} |D_N(x-y)||f(y)|\, dy \leq M \int_{\mathbb{T}} |D_N|\, dz \leq M \cdot \frac{4}{\pi^2} \log(N+1)$$

Buscamos g_N t.q. $|g_N(x)| \leq 1$

y

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |S_N(g_N)(x)| \geq c \cdot \log(N+1)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |S_N(g_N)(x)| \geq |S_N(g_N)(0)| = \left| \int_{\mathbb{T}} D_N(y) \cdot g_N(y)\, dy \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} |D_N(y)|\, dy \right| =$$

Tomo $g_N(y) = \dfrac{|D_N(y)|}{D_N(y)} = \operatorname{sign}(D_N(y))$

$$= \|D_N\|_{L^1} \geq C \cdot \log(N+1)$$

Opcionales:

10. Demuestra que $\quad L_N := \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|\,dx \;=\; \frac{4}{\pi^2}\,\ln(N+1) + O(1).$

    Sugerencia: la cota inferior la vimos en clase; la cota superior sigue de las mismas ideas, usando además la estimación $\displaystyle\int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} |D_N(x)|\,dx = \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} \frac{|\operatorname{sen}(2N+1)\pi x|}{\pi x}\,dx + O(1/N)$, que se prueba como en el Ejerc 5.i.

11. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $f \in Lip_\alpha(x_0)$, es decir $|f(x_0+h) - f(x_0)| \le c\,|h|^\alpha$, si $|h| \le \delta$, para algunas constantes $c, \delta > 0$ y para algún $\alpha \in (0,1)$. Demuestra que

$$\Big|\sigma_N f(x_0) - f(x_0)\Big| \;\le\; \frac{C}{N^\alpha}, \quad \text{si } N \gg 1.$$

    ¿Qué se puede probar si $\alpha = 1$?

    Sugerencia: Acota la expresión anterior por $\int_{\mathbb{T}} |f(x_0+h) - f(x_0)|\,F_N(h)\,dh = \int_{|h|\le\frac{1}{N}} + \int_{\frac{1}{N}<|h|\le\delta} + \int_{\delta<|h|\le 1/2}$, y usa el decaimiento del núcleo de Féjer $|F_N(x)| \lesssim \text{mín}\{N, 1/(N|x|^2)\}$.

12. (i) Demuestra que los coeficientes de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ se pueden escribir como

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \big[f(u) - f(u + \tfrac{1}{2k})\big]\, e^{-2\pi i k u}\,du, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

    (ii) Deduce que si $f \in Lip_\alpha(\mathbb{T})$, entonces

$$\hat{f}(k) = O(1/|k|^\alpha), \quad \text{para } |k| \to \infty.$$

    (iii) Utiliza la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{2\pi i 2^k x}$, $\alpha \in (0,1)$, para probar que el decaimiento de (ii) no se puede mejorar a $o(1/|k|^\alpha)$.

    Nota: En (iii) hay que justificar que $f \in C^\alpha$; para ello escribe $f(x+h) - f(x) = \sum_{2^k \le 1/|h|} + \sum_{2^k > 1/|h|}$, y utiliza la propiedad $|e^{i\theta} - 1| \le \text{mín}\{|\theta|, 2\}$.