Tarea 2: La Cicloide

Jose Antonio Lorencio Abril

Considere una circunferencia de radio 1 en el plano xy que rueda sin deslizamiento a lo largo del eje x. La figura descrita por un punto de la circunferencia se llama cicloide, y es una de las curvas clásicas más importantes.

1. **Obtenga una parametrización $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de la cicloide, y determine sus puntos singulares.**

   Podemos descomponer el movimiento en dos partes: el giro de la circunferencia, y su desplazamiento.

   El giro se produce en sentido horario por lo que será:

   $$\alpha_1 (t) = (-sent, 1 - cost)$$

   es decir, la circunferencia centrada en $(0, 1)$, recorrida en sentido horario comenzando en el $(0, 0)$.

   Y, ahora, le debemos añadir el desplazamiento horizontal. Este desplazamiento, para que no haya deslizamiento, debe ser tal que la longitud recorrida por la circunferencia sea igual que la longitud del intervalo. Como la circunferencia es de radio 1, se obtiene:

   $$\alpha_2 (t) = (t, 0)$$

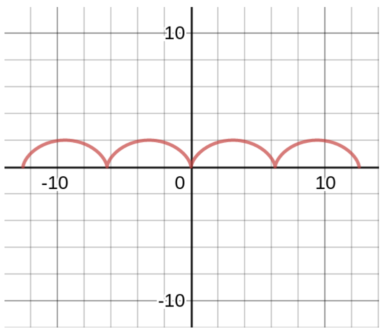
   En efecto:

   $$L_0^t (\alpha_1) = \int_0^t \left|\alpha_1' (u)\right| du = \int_0^t |(-cosu, senu)| \, du = \int_0^t 1du = t = L_0^t (\alpha_2)$$

   Por tanto, la cicloide será la curva generada por la suma de estos dos movimientos:

   $$\alpha (t) = (t - sent, 1 - cost)$$

   Aquí podemos ver la cicloide para $t \in [-4\pi, 4\pi]$:



   Para calcular los puntos singulares, debemos hallar $t : \alpha' (t) = 0$. Tenemos, pues

   $$(1 - cost, sent) = (0, 0) \iff \begin{cases} cost = 1 \\ sent = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. **Calcule la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa de la circunferencia.**

   Para calcular la **longitud**, primero obtenemos la derivada:

$$\alpha'(t) = (1 - cost, sent) \implies \left|\alpha'(t)\right| = \sqrt{(1-cost)^2 + sen^2 t} = \sqrt{2 - 2cost} = \sqrt{2}\sqrt{1 - cost}$$

   Y pasamos ahora al cálculo de la longitud:

$$L_{t_0}^{t}(\alpha) = \int_{t_0}^{t} \left|\alpha'(s)\right| ds = \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - cos(s)}ds = (*)$$

   Aquí utilizamos la igualdad:

$$sen\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - cosa}{2}} \implies \sqrt{1 - cosa} = \sqrt{2}sen\frac{a}{2}$$

   Luego

$$(*) = 2\int_{t_0}^{t} sen\frac{s}{2}ds = -4cos\frac{s}{2}]_{t_0}^{t} = -4\left(cos\frac{t}{2} - cos\frac{t_0}{2}\right)$$

   Ahora podemos calcular la longitud entre 0 y 2π :

$$L_0^{2\pi}(\alpha) = -4\left(cos\pi - cos0\right) = 8$$