Tarea 2

Jose Antonio Lorencio Abril

[$\Longrightarrow$]

$$F\left(x_1,...,x_m\right)\overset{*}{=}P\left(X_1\leq x_1,...,X_m\leq x_m\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{m}X_i\leq x_i\right)\overset{**}{=}\prod_{i=1}^{m}P\left(X_i\leq x_i\right)=F\left(x_1\right)\cdot...\cdot F\left(X_m\right)$$

donde $*$ es la definición de función de distribución y $**$ se debe a que los sucesos $\{X_i\leq x_i\}_{i=1,...,m}$ son independientes porque las variables aleatorias X_i, $i=1,...,m$ son independientes por hipótesis.

[$\Longleftarrow$] Ahora tenemos que

$$F\left(x_1,...,x_m\right)=F\left(x_1\right)\cdot...\cdot F\left(x_m\right),\ \forall\left(x_1,...,x_m\right)\in\mathbb{R}^m$$

esto, por la definición de función de distribución, quiere decir que

$$P\left(X_1\leq x_1,...,X_m\leq x_m\right)=P\left(X_1\leq x_1\right)\cdot...\cdot P\left(X_m\leq x_m\right)$$

Ahora, sea $I=\{i_1,...,i_k\}\subset\{1,...,m\}$ y $J=\{1,...,m\}\setminus I=\{j_1,...,j_l\}$. Entonces, haciendo tender $x_j\to\infty$, $\forall j\in J$, se tiene que

$$P\left(\bigcap_{i\in I}X_i\leq x_i\right)=F\left(x_{i_1},...,x_{i_k}\right)=\lim_{x_j\to\infty,\ j\in J}F\left(x_1,...,x_m\right)=$$

$$\lim_{x_j\to\infty,\ j\in J}F\left(x_1\right)\cdot...\cdot F\left(x_m\right)=\prod_{i\in I}F\left(x_i\right)\prod_{j\in J}\lim_{x_j\to\infty}F\left(x_j\right)\overset{***}{=}\prod_{i\in I}F\left(x_i\right)=\prod_{i\in I}P\left(X_i\leq x_i\right)$$

donde $***$ se debe a que $F\left(\infty\right)=1$. Por tanto, para cualquier subfamilia de $\{X_r\leq x_r\}_{r=1,...,m}$ se tiene que la probabilidad de su intersección es el producto de las probabilidades individuales, luego $\{X_r\leq x_r\}_{r=1,...,m}$ son independientes, y esto sucede para todo $\left(x_1,...,x_m\right)\in\mathbb{R}^m$, por lo que las variables aleatorias son independientes.