

Práctica 3: Las órbitas de Arenstorf

Jose Antonio Lorenzo Abril

1 Introducción

Proseguimos nuestro estudio de los problemas de n cuerpos con un caso particular del problema de los 3 cuerpos. El problema de los 3 cuerpos es mucho más complicado que el de 2 cuerpos, y en general no vamos a poder encontrar soluciones analíticas. Más aún, generalmente sus soluciones son caóticas, es decir, que ligeras variaciones de las condiciones iniciales representan enormes cambios en la evolución del sistema.

Sin embargo, este problema es muy interesante, ya no solo desde el punto de vista del cálculo numérico, ni de las matemáticas, sino incluso desde un punto de vista utilitarista: las telecomunicaciones actuales son posibles gracias a los satélites que tenemos orbitando la Tierra.

La mayoría de satélites que sirven para estos fines se presentan en órbitas terrestres bajas, lo que hace despreciable el efecto lunar. Pero no parece una situación descabellada que en el futuro sea útil tener satélites que realicen órbitas estables entre la Luna y la Tierra. O para usar este tipo de órbitas estables como caminos de paso. Por ejemplo, para lanzar la *voyager 1*, se la lanzó en una trayectoria cercana al Sol, de forma que la gravedad de este actuase como palanca y saliese despedida hacia el espacio profundo.

De hecho, nosotros vamos a estudiar la órbita de Arenstorf, descubierta por Richard Arenstorf y que sirvió como base para la órbita trazada por el *Apollo 11* para llegar a la Luna. Esta es una órbita de un satélite de masa despreciable entre la Tierra y la Luna. Más adelante, veremos imágenes de la órbita.

2 Descripción del trabajo realizado

He implementado una clase abstracta representativa de los métodos de resolución numérica de EDs de paso adaptativo mediante extrapolación de Richardson, que sirve de base a una clase `RK4Richardson`, que es precisamente el método RK4 con paso adaptativo mediante extrapolación de Richardson.

Por otro lado, he implementado una clase que implementa el método de Runge-Kutta-Fehlberg. La razón para no implementar una clase abstracta de la que hereden todos los métodos de paso adaptativo es que el cálculo del error se hace de formas muy diferentes, por lo que al final esa hipotética clase, realmente, no haría casi nada, pues es este cálculo del error un eje central de los métodos adaptativos, y el diseño de las clases y la implementación se complicaba bastante.

También he creado un problema de valor inicial, como venimos haciendo durante el curso, con las condiciones iniciales presentadas en la web de John D. Cook.

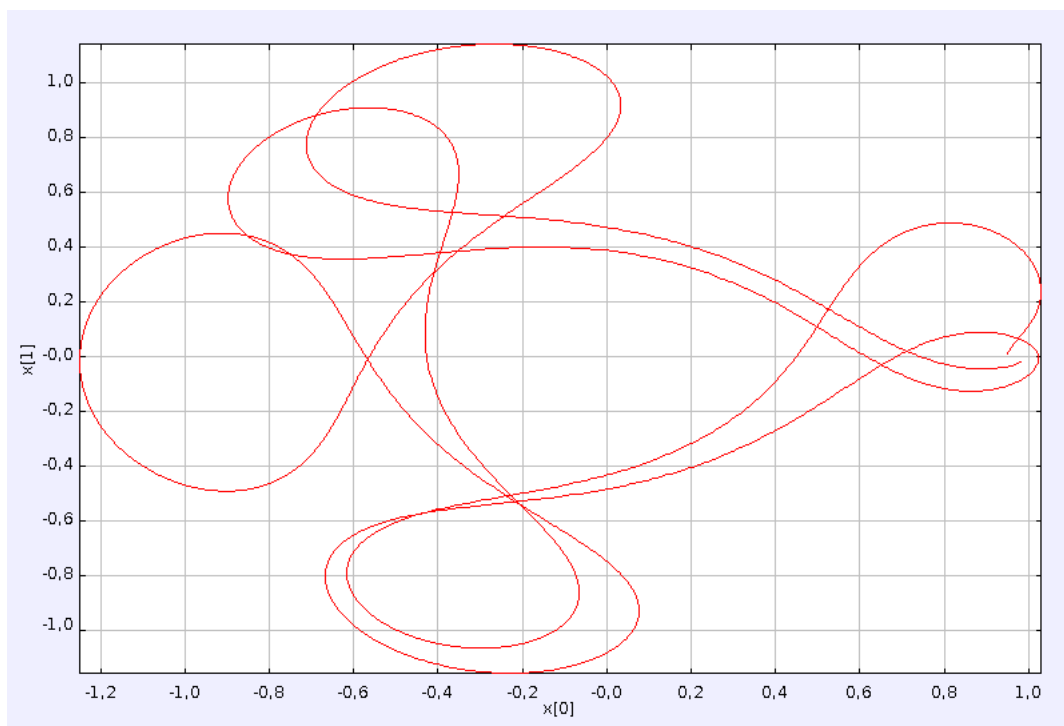
A partir de aquí, comenzamos el estudio del problema, que va a consistir en completar dos órbitas completas y comparar los resultados arrojados por los distintos métodos estudiados hasta el momento.

2.1 Método de Euler

El método de Euler presenta resultados bastante pobres, reduciendo el paso hasta donde me deja Java (si lo reduzco más, se llena la memoria que utiliza Eclipse para ejecutar los programas), $h = 10^{-5}$, obtenemos que la órbita se cierra con un error relativo de 0.0467. O sea, de un 4.67%. No parece mucho, pero este poco hace que se estrellen los cohetes. Vamos a considerar que la órbita se cierra, si lo hace con un error $< 1\%$. Por tanto, esta solución del problema no entra en nuestra horquilla de aceptabilidad.

Deberíamos seguir reduciendo h , pero ya hemos necesitado ~ 3 millones de evaluaciones de la función de derivadas. Vamos a ver cómo los demás métodos proporcionan soluciones mucho mejores.

Nos da la siguiente órbita:

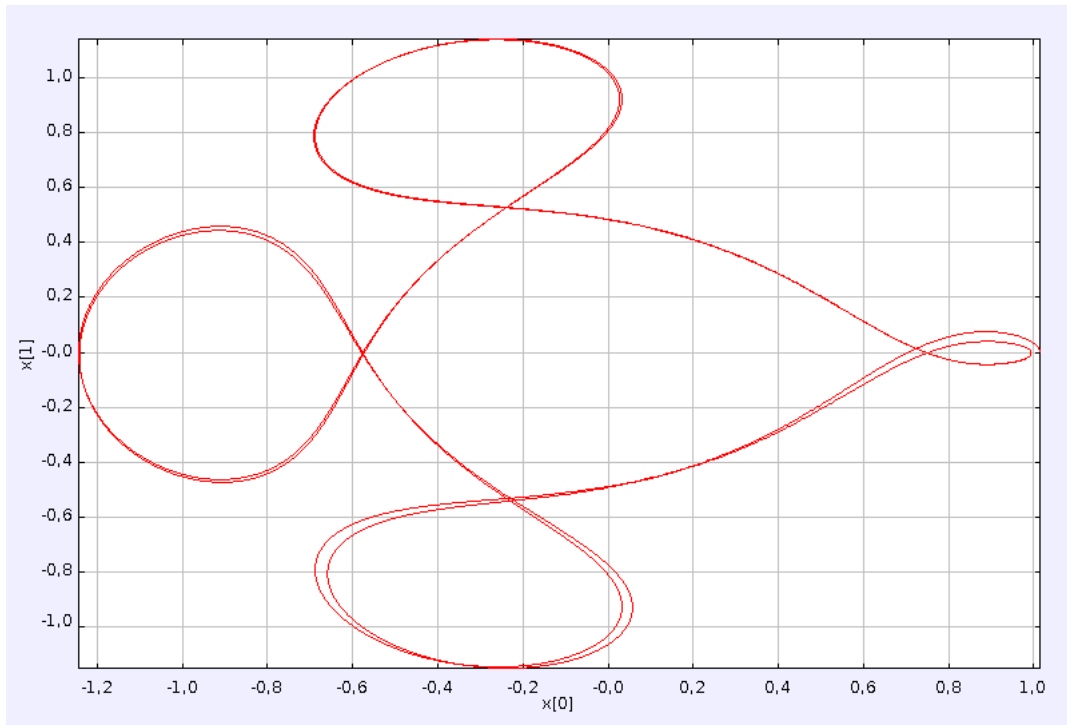


Donde vemos a simple vista como no está funcionando bien. El tiempo transcurrido para dar dos vueltas nos dice que es 29.29, que subestima bastante el real, como veremos con los métodos posteriores, más precisos.

2.2 Método de Euler Modificado

El método de Euler modificado, con ese mismo paso, $h = 10^{-5}$, nos cierra la órbita con un error de 0.019, un $\sim 2\%$, sigue sin valernos como solución y, además, necesita de casi 7 millones de evaluaciones de la función de derivadas.

El resultado es mejor, pero sigue siendo pobre. La gráfica obtenida es:



Se sigue apreciando a simple vista que no funciona, pero el resultado se ve también mejor que el anterior.

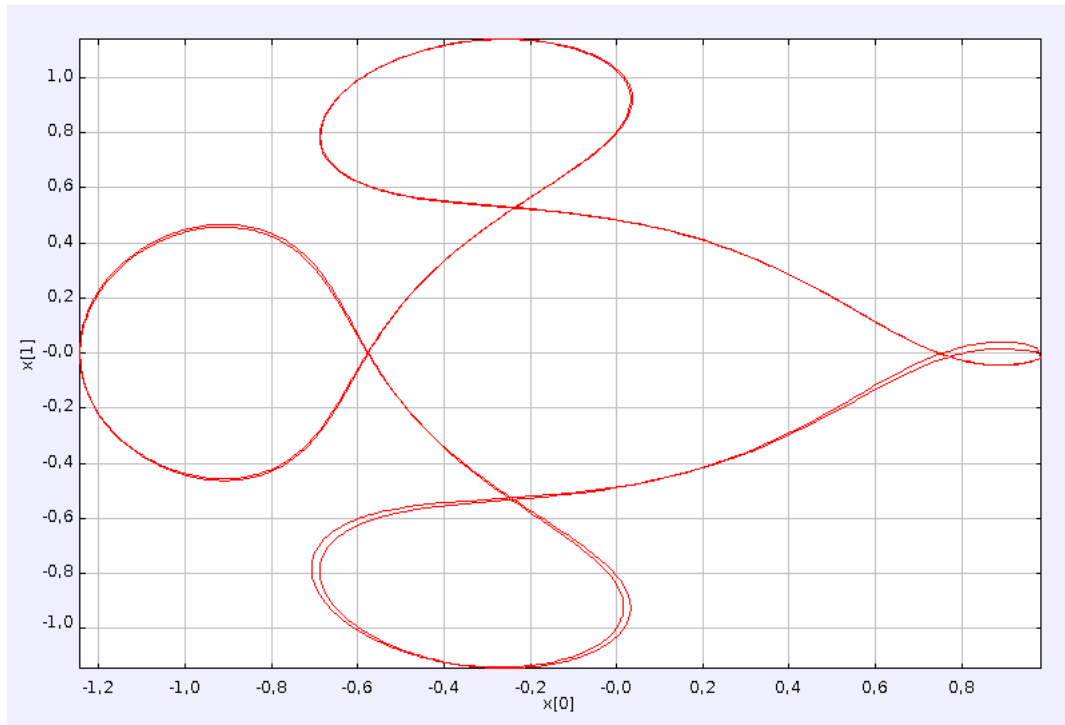
Nos arroja un tiempo de 34.17 para realizar las dos vueltas. Bastante más cercado al que obtendremos más tarde que el devuelto por el método de Euler, pero, como he dicho, esta solución no nos complace.

2.3 Método RK4 de paso fijo

Para acabar con los métodos de paso fijo, vamos a usar RK4.

Nos arroja un tiempo en órbita de 34.1285 con un error relativo respecto a la posición inicial de 0.0061 y un paso de $h = 4 \cdot 10^{-4}$. He elegido este paso porque ha sido el mayor paso con el que he encontrado la precisión buscada.

Para dar este resultado, necesita realizar unas 340000 evaluaciones, una cantidad considerablemente menor que en los métodos anteriores. Y la gráfica:



Donde se siguen notando los errores a simple vista, pero vemos también como el punto inicial y final son muy cercanos.

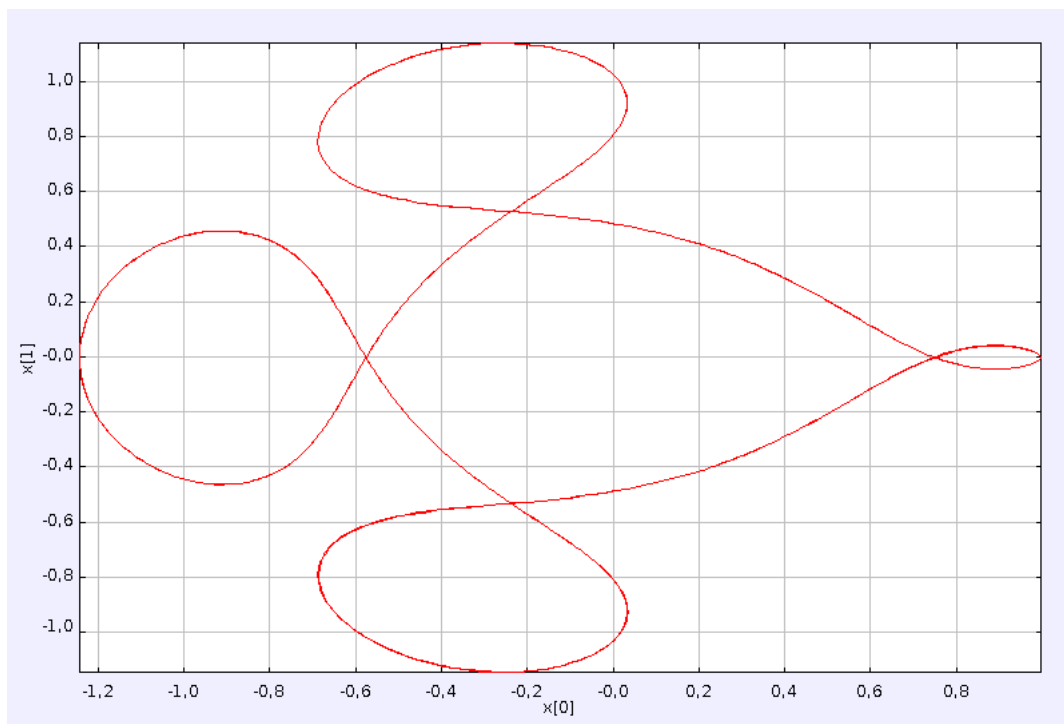
Este es, por tanto, de los métodos de paso fijo utilizados, el único que proporciona una solución aceptable. Además, podría incluso ser asumible una mayor reducción del paso para mejorar la precisión.

No obstante, vamos a ver como los métodos de paso adaptativo son mejores tanto en precisión como en eficiencia.

2.4 Método RK4 adaptativo con extrapolación de Richardson

Este método nos dice que el satélite completará dos vueltas en 34.1321 y proporciona un error en el cierre de 0.0011, el mejor hasta ahora, ciertamente. Pero lo sorprendente es que consigue este resultado con 17000 evaluaciones de la función de derivadas. Esto supone una tremenda reducción de costes respecto a los métodos anteriores, acompañada de una mejora de resultados. Para obtener este resultado hemos usado una tolerancia de error local de truncamiento de 10^{-6} .

En la gráfica obtenida apenas podemos detectar desviaciones en la órbita a simple vista, y queda bastante bonita:



Esta solución, por tanto, la aceptamos, y la preferimos con rotundidad frente a las anteriores.

2.5 Método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg

Por último, vamos a ver el método de paso adaptativo de RKF. Con la misma tolerancia, 10^{-6} , que RK4 adaptativo, nos da una solución en la horquilla buscada, con un error de 0.0056 y un tiempo de 34.1266. Vemos como el error crece ligeramente, pero sigue siendo aceptable. Esto es comprensible, ya que ambos métodos tienen el mismo orden de convergencia, pero RKF realiza 7000 evaluaciones de la función de derivadas.

Este resultado es, ciertamente, increíble. Vemos que los métodos de paso adaptativo son rotundamente más precisos y económicos que los de paso fijo.

Esta solución, por tanto, también es aceptable y la preferimos a cualquiera de las de paso fijo. La gráfica no la muestro pues es prácticamente igual que la obtenida con RK4 adaptativo.

Sin embargo, la preferencia entre cuál de los dos métodos de paso variable elegir es más compleja. Realmente, se diferencian en 10000 evaluaciones y una diferencia de 0.004 en el error. No es mucho.

Pero podemos variar la tolerancia en RKF para tratar de obtener un error similar al de RK4, y comparar las evaluaciones que se realizan en ese caso.

Introduciendo una tolerancia de 10^{-7} , el error relativo obtenido es de $5.4 \cdot 10^{-4}$, aproximadamente la mitad que el que obtuvimos con RK4. Y esto lo consigue con tan solo 9000 evaluaciones de la función. Por tanto, vamos a preferir RKF, aunque no es descartable que en otros problemas distintos ocurra al revés.

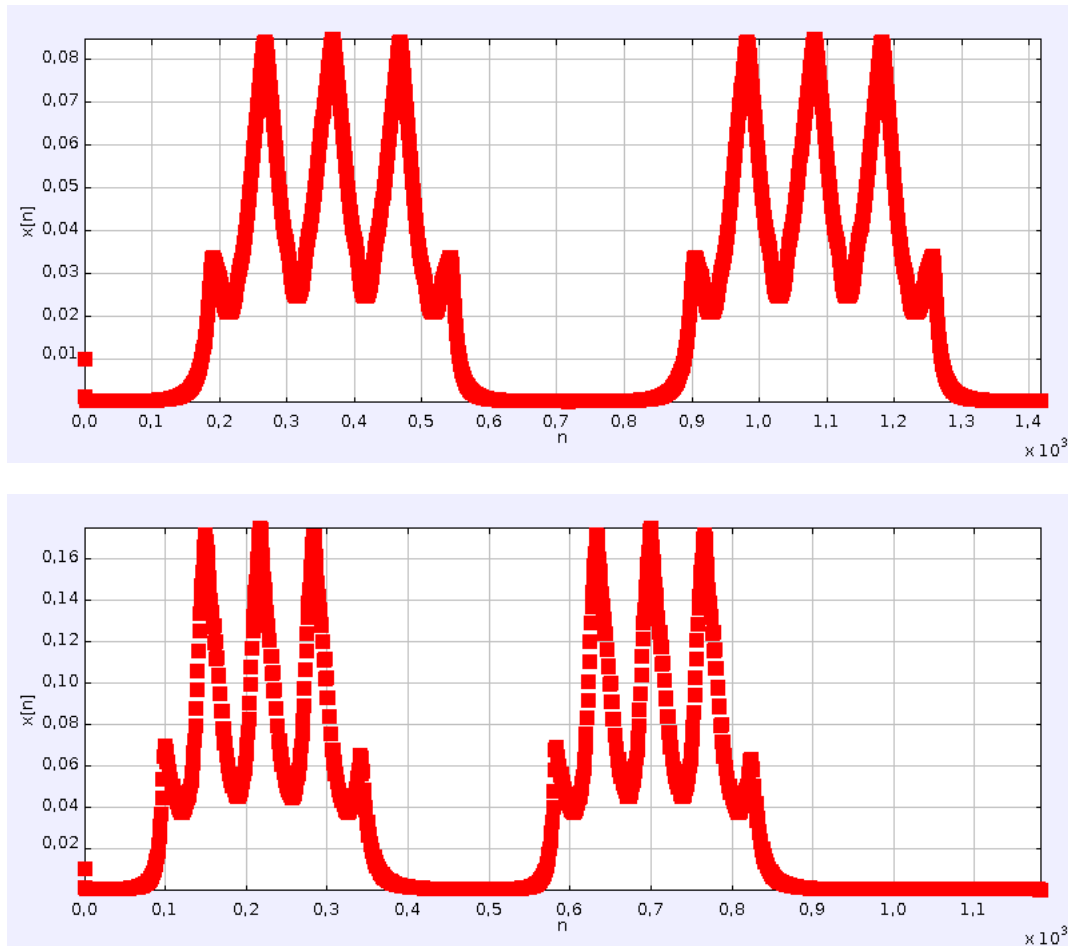
2.6 Tabla resumen de los resultados

	Tiempo	Error	Nº evaluaciones
Newton	29.29437	0.0467	2929438
Newton modificado	34.17449	0.01928	6834898
RK4 fijo	34.1285	0.00608	341288
RK4 adaptativo	34.13209	0.001062	17004
RKF	34.12965	$5.412 \cdot 10^{-4}$	9168

En esta tabla podemos comparar rápidamente los resultados obtenidos, y observamos como, aparentemente, el mejor método a usar para este problema será el método de Runge-Kutta-Fehlberg.

2.7 Comparación de la evolución del tamaño del paso en los métodos adaptativos

En las clases de los métodos adaptativos he añadido una lista en la que vamos guardando la evolución del paso con el tiempo. Para poder comparar bien, voy a devolver la tolerancia de RKF a 10^{-6} , para comparar la evolución del paso ante la misma tolerancia del error de truncamiento local. Las gráficas obtenidas son:



La primera imagen es la evolución del paso con RK4, y la segunda con RKF.

Vemos como la forma de la gráfica es la misma, el tamaño del paso debe ser muy pequeño cerca del inicio y final de la órbita, y puede crecer en los pasos intermedios, disminuyendo, aunque en menor medida, cuando el satélite orbita alrededor de la luna.

Ahora bien, si nos fijamos en las magnitudes, vemos que RKF da unos pasos considerablemente mayores que RK4. Es precisamente a esto a lo que se debe la menor cantidad de evaluaciones que realiza este método, a pesar de que en cada paso, necesita hacer más evaluaciones (6 VS 4). Al dar pasos más grandes, avanza 'más rápido' y necesita, en conjunto, utilizar menos la función de evaluación.

3 Conclusión

Este trabajo nos hace ver que, tristemente, los métodos de paso fijo terminarán siendo un recuerdo de nuestros inicios en el cálculo numérico, y que, alegremente, los métodos de paso adaptativo los sustituyeron, con mejores resultados y menores costes.