# Ejercicio 3.4

Primero introducimos los datos del problema: f_i son los flujos y v_i los volúmenes

```
--> f1 : 1 . 75e14 ;
```

$$1.7510^{14}$$

```
--> v1 : 4 . 58e14 ;
```

$$4.5810^{14}$$

```
--> v2 : 1 . 64e15 ;
```

$$1.6410^{15}$$

```
--> f2 : 25 / 21 · f1 ;
```

$$2.08333333333333310^{14}$$

Ahora definimos x(t)="cantidad de contaminante en el lago Erie al momento t" e y(t)="cantidad de contaminante en el lago Ontario al momento t". De esta forma, quedan las ecuaciones:

x' = - f1/v1 * x
y' = f1/v1 * x - f2/v2 * y

Que pasamos a resolver:

```
--> eqx : ' diff ( x , t ) = − f1 / v1 · x ;
```

$$\frac{d}{dt}x = -0.3820960698689956x$$

```
--> X : ode2 ( eqx , x , t ) ;
```

$$\%\text{defaultrat: replaced } 0.3820960698689956 \text{ by } 175/458 = 0.3820960698689956$$

$$\%\text{defaultrat: replaced } 0.3820960698689956 \text{ by } 175/458 = 0.3820960698689956$$

$$\%\text{defaultrat: replaced } 0.3820960698689956 \text{ by } 175/458 = 0.3820960698689956$$

$$x = \%\text{c}\%e^{-\frac{175t}{458}}$$

Es decir, x(t)=c*e^(-175t/458). Para poder resolver la ecuación para la y, necesitamos darle un valor a la constante, así que vamos a tomar un valor inicial x(0)=e. Debemos notar que el valor inicial no influye en el momento en que se alcanza la concentración máxima en el lago Ontario (obviamente esto requiere la suposición de que el contaminante esté homogéneamente diluido), ya que lo único que influye en el tiempo transcurrido son los flujos de entrada y salida. No obstante, después obtendremos la solución para otro valor muy distinto, y podremos comprobar (empíricamente) que esto es cierto.

```
--> ic1 ( X , t = 0 , x = %e ) ;
```

$$x = \%e^{1-\frac{175t}{458}}$$

```
--> eqy : ' diff ( y , t ) = f1 / v1 · %e · %e ^ ( − 175 · t / 458 ) − f2 / v2 · y ;
```

$$\frac{d}{dt}y = 0.3820960698689956\%e^{1-\frac{175t}{458}} - 0.1270325203252033y$$

```
--> Y : ode2 ( eqy , y , t ) ;
```

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

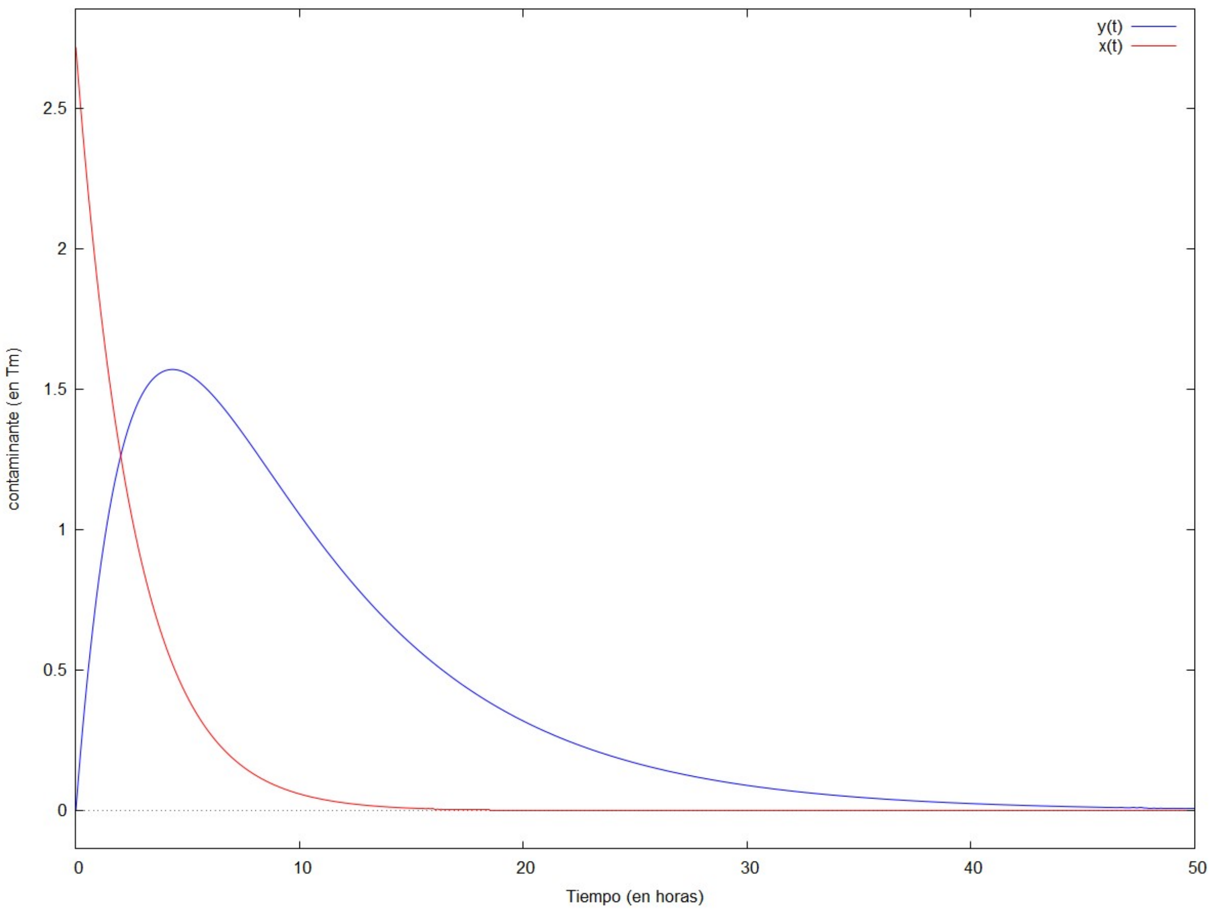
$$y = \left(\%c - \frac{3444\%e^{1-\frac{57475t}{225336}}}{2299}\right)\%e^{-\frac{125t}{984}}$$

```
--> ic1 ( Y , t = 0 , y = 0 ) ;
```

$$y = \frac{\left(3444\%e^{\frac{57475t}{225336}+1} - 3444\%e\right)\%e^{-\frac{175t}{458}}}{2299}$$

Esta es la ecuación de la cantidad de contaminante en el lago Ontario.
Pasamos ahora a dibujar las gráficas de la evolución del sistema:

```
--> wxplot2d ( [ ( ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 1 ) − 3444 · %e ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) / 458 )
    ) / 2299 , %e ^ ( 1 − ( 175 · t ) / 458 ) ] , [ t , 0 , 50 ] , [ legend , "y(t)" , "x(t)" ] ,
    [ ylabel , "contaminante (en Tm)" ] ,
    [ xlabel , "Tiempo (en horas)" ] ) ;
```




Y vemos que la concentración máxima en el lago Ontario se alcanza algo antes de que transcurran 5 horas desde el vértido. Nótese que la gráfica muestra las cantidades de vertidos, no las concentraciones, pero que los tiempos no varían porque estamos considerando los volúmenes constantes.

Para hallar el momento exacto, derivamos:

```
--> diff(((3444·%e^((57475·t)/225336+1)−3444·%e)·%e^(−(175·t)/458))/2299
    ,t);
```

$$\frac{175\%e^{1-\frac{125t}{984}}}{458}-\frac{175\left(3444\%e^{\frac{57475t}{225336}+1}-3444\%e\right)\%e^{-\frac{175t}{458}}}{1052942}$$

Y calculamos el t que anula la derivada:

```
--> solve((175·%e^(1−(125·t)/984))/458−(175·(3444·%e^((57475·t)/225336+1
    )−3444·%e)·%e^(−(175·t)/458))/1052942=0,[t]);
```

$$\left[t=\frac{225336\log\left(\frac{3444\%e}{1145}\right)-225336}{57475}\right]$$

Encontramos ahora un resultado más amigable:

```
--> (225336·log((3444·%e)/1145)−225336)/57475,numer;
```

$$4.317468926975036$$

Y la cantidad de contaminante en ese instante es la siguiente:

--> ev ( ( ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 1 ) − 3444 · %e ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) / 458 ) ) / 2299 , t = ( 225336 · log ( ( 3444 · %e ) / 1145 ) − 225336 ) / 57475 ) ;

$$\frac{\%e^{-\frac{7\left(225336\log\left(\frac{3444\%e}{1145}\right)-225336\right)}{1052942}}\left(3444\%e^{\frac{225336\log\left(\frac{3444\%e}{1145}\right)-225336}{225336}+1}-3444\%e\right)}{2299}$$

--> ev ( ( ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 1 ) − 3444 · %e ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) / 458 ) ) / 2299 , t = ( 225336 · log ( ( 3444 · %e ) / 1145 ) − 225336 ) / 57475 ) , numer ;

$$1.570730881700824$$

-->

$$\left[\%e^{\frac{t}{458}}=\frac{3444^{\frac{1}{175}}\%e^{\frac{5t}{6888}}\left(\%e^{\frac{57475t}{225336}}-1\right)^{\frac{1}{175}}}{2299^{\frac{1}{175}}}\right]$$

Vamos a probar con otro valor inicial, mucho mayor que el primero, para comprobar que el tiempo transcurrido no varía.

--> ic1 ( X , t = 0 , x = %e ^ 5 ) ;

$$x=\%e^{5-\frac{175t}{458}}$$

--> eqy : ' diff ( y , t ) = f1 / v1 · %e ^ ( 5 − ( 175 · t ) / 458 ) − f2 / v2 · y ;

$$\frac{d}{dt}y=0.3820960698689956\%e^{5-\frac{175t}{458}}-0.1270325203252033y$$

--> Y : ode2 ( eqy , y , t ) ;

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

%defaultrat: replaced -0.3820960698689956 by -175/458 = -0.3820960698689956

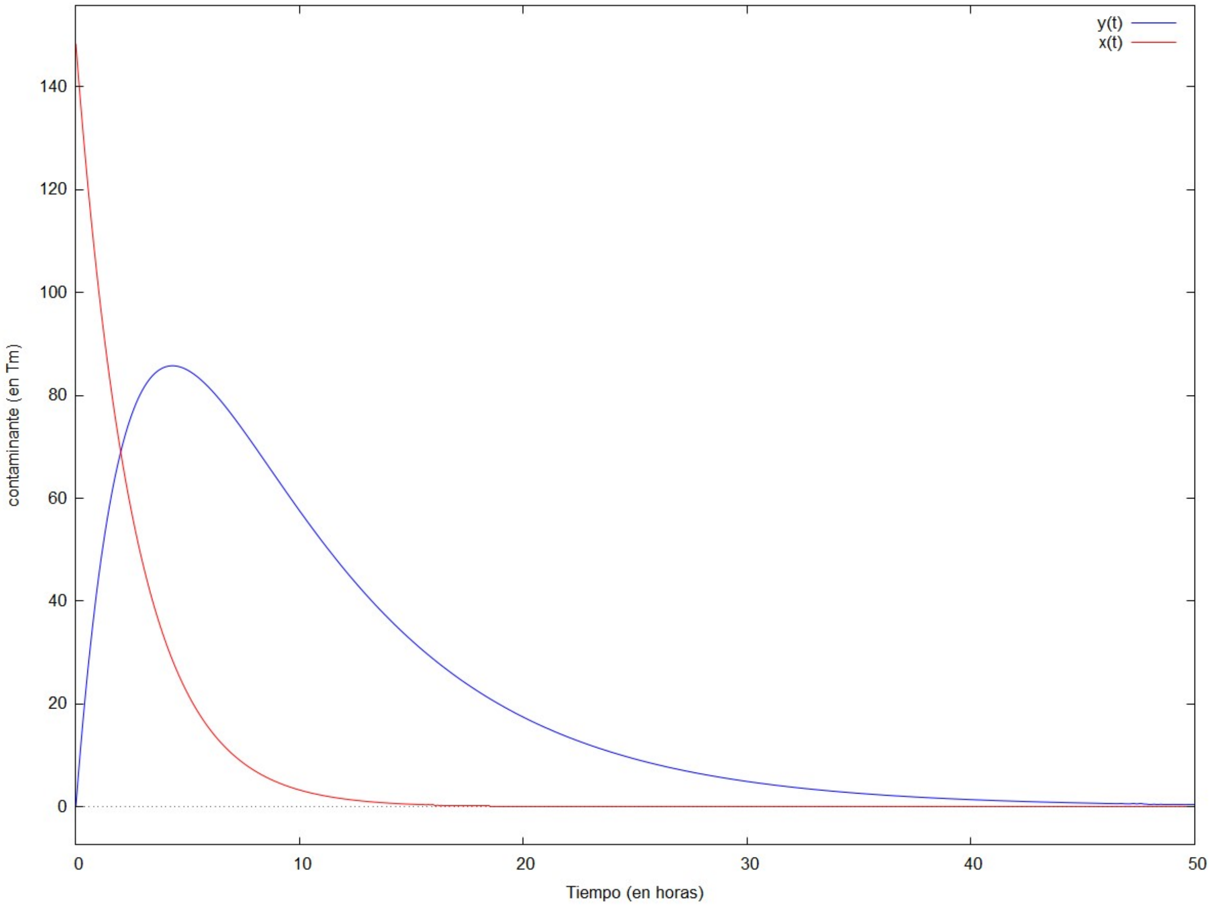
%defaultrat: replaced 0.1270325203252033 by 125/984 = 0.1270325203252033

$$y=\left(\%c-\frac{3444\%e^{5-\frac{57475t}{225336}}}{2299}\right)\%e^{-\frac{125t}{984}}$$

--> ic1 ( Y , t = 0 , y = 0 ) ;

$$y=\frac{\left(3444\%e^{\frac{57475t}{225336}+5}-3444\%e^{5}\right)\%e^{-\frac{175t}{458}}}{2299}$$

```
--> wxplot2d ( [ ( ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 5 ) − 3444 · %e ^ 5 ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) /
    458 ) ) / 2299 , %e ^ ( 5 − ( 175 · t ) / 458 ) ] , [ t , 0 , 50 ] , [ legend , "y(t)" , "x(t)" ] ,
    [ ylabel , "contaminante (en Tm)" ] ,
    [ xlabel , "Tiempo (en horas)" ] ) ;
```




```
--> diff ( ( ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 5 ) − 3444 · %e ^ 5 ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) / 458 ) ) /
    2299 , t ) ;
```

$$\frac{175\%e^{5-\frac{125t}{984}}}{458}-\frac{175\left(3444\%e^{\frac{57475t}{225336}+5}-3444\%e^{5}\right)\%e^{-\frac{175t}{458}}}{1052942}$$

```
--> solve ( ( 175 · %e ^ ( 5 − ( 125 · t ) / 984 ) ) / 458 − ( 175 · ( 3444 · %e ^ ( ( 57475 · t ) / 225336 + 5
    ) − 3444 · %e ^ 5 ) · %e ^ ( − ( 175 · t ) / 458 ) ) / 1052942 = 0 , [ t ] ) ;
```

$$\left[t=\frac{225336\log\left(\frac{3444\%e^{5}}{1145}\right)-1126680}{57475}\right]$$

```
--> ( 225336 · log ( ( 3444 · %e ^ 5 ) / 1145 ) − 1126680 ) / 57475 , numer ;
```

$$4.31746892697504$$

Que es prácticamente el mismo resultado (el anterior recordemos que era 4.317468926975036).
Por tanto, se tarda unas 4 horas y 19 minutos en alcanzar la máxima concentración en el lago Ontario, independientemente de la cantidad vertida.

---