Tarea Opcional: La integral abstracta

Jose Antonio Lorencio Abril

09/21

Para demostrar dos teoremas muy importantes de la teoría de integración de Lebesgue, necesitamos algunas definiciones previas.

Definition 1. Dado un espacio medible (Ω, Σ) (Ω es un conjunto y Σ una sigma álgebra de Ω), una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **medible** si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in \Omega : f(x) \geq a\} \in \Sigma$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in \Omega : f(x) < a\} \in \Sigma$
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in \Omega : f(x) \leq a\} \in \Sigma$
4. Para todo conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ se verifica $f^{-1}(G) \in \Sigma$

Definition 2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (un espacio de medida con una medida μ asociada).

1. Si $s = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i}$ es una función simple con $A_i \in \Sigma$ se llama **integral de s respecto a la medida μ a**
$$\int_\Omega s d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$
y este valor es independiente de la descomposición de s.
2. Si f es una función medible no negativa, se define la **integral de f respecto a la medida μ** por la fórmula
$$\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega s d\mu : 0 \leq s \leq f, \ s \ simple \right\}$$
3. Si $A \in \Sigma$ se define
$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f \mathcal{X}_A d\mu$$

Definition 3. Dado (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice **integrable respecto de μ** si es medible y $\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$.
El **conjunto de todas las funciones integrales** se denota con $\boldsymbol{\mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)}$. Para cada $f = f^+ - f^-$ se define la **integral de f** mediante la fórmula
$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

El siguiente teorema nos permite intercambiar límites e integrales cuando la sucesión es no decreciente, no negativa. Es importante porque, como vemos en las definiciones, somos capaces de definir la integral de una función medible como el supremo de las integrales de una familia de funciones que aproximan f por debajo, y esto puede expresarse en términos de sucesiones como las del teorema. Para la parte negativa usamos la definición de integral que divide el cálculo entre la parte positiva y la negativa, y las conclusiones son similares.

Theorem 4. ***Teorema de Lebesgue de la convergencia monótona***
Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles tales que

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$$

para todo $x \in \Omega$.
Entonces, la función $f(x) = \lim_n f_n(x)$ es medible y

$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Proof. Primero veamos que el límite puntual de funciones medibles, es medible:
Dado $a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{x \in \Omega : f_n(x) \geq a\} \in \Sigma$. Ahora bien

$$\{x \in \Omega : f(x) \geq a\} = \left\{x \in \Omega : \lim_n f_n(x) \geq a\right\} = \{x \in \Omega : \exists n_0 | n > n_0 \to f_n(x) \geq a\} = \cup_{n_0} \cap_{n > n_0} \{x \in \Omega : f_n(x) \geq$$

por lo que f es medible.
Veamos ahora la última igualdad:
[$\leq$] Como la sucesión es creciente, entonces

$$f_n \leq f \implies \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu \implies \lim_n \int_\Omega f_n d\mu \leq \lim_n \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

[$\geq$] Primero, veremos que, para toda función simple, s, con $0 \leq s \leq f$ en Ω, se tiene $\int_\Omega s d\mu \leq \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$, tras esto, la definición de integral nos hace tomar supremos, y obtenemos el resultado.
Así, sea s una función simple, tal que $0 \leq s(x) \leq f(x), \forall x \in \Omega$, y sea $\alpha \in (0, 1)$. Definimos, para cada n, el conjunto $A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$.
Estos conjuntos son medibles y se tiene

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq \int_{A_n} \alpha s d\mu = \alpha \int_{A_n} s d\mu$$

Como s es simple, es de la forma $s = \sum_{j=1}^k b_j \mathcal{X}_{B_j}$, entonces

$$\int_{A_n} s d\mu = \sum_{j=1}^k b_j \mu(B_j \cap A_n)$$

luego

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \alpha \sum_{j=1}^k b_j \mu(B_j \cap A_n)$$

lo que ocurre para cualquier n.
Veamos qué sucede en el límite. Como la sucesión (f_n) es no decreciente, entonces

$$x \in A_n \implies f_n(x) \geq \alpha s(x) \implies f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq \alpha s(x) \implies x \in A_{n+1}$$

y (A_n) es una sucesión creciente de conjuntos medibles.
Además
$$\Omega = \bigcup_n A_n$$
Así, dado $1 \leq j \leq k$, la sucesión $\{B_j \cap A_n\}_n$ es creciente y
$$\bigcup_n (B_j \cap A_n) = B_j \cap \left(\bigcup_n A_n \right) = B_j \cap \Omega = B_j$$
por tanto
$$\lim_n \mu (B_j \cap A_n) = \mu (B_j)$$
Entonces
$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu \geq \alpha \lim_n \left(\sum_{j=1}^k b_j \mu (B_j \cap A_n) \right) = \alpha \sum_{j=1}^k b_j \lim_n \mu (B_j \cap A_n) = \alpha \sum_{j=1}^k b_j \mu (B_j) = \alpha \int_\Omega s d\mu$$
Tomando supremos en α, obtenemos
$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega s d\mu$$
y, como adelantamos, tomando supremos en las funciones simples $0 \leq s \leq f$, obtenemos el resultado
$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega f d\mu$$
□

Y ahora pasamos a un teorema más general, que nos permite asegurar la integrabilidad de una función medible expresa como límite de funciones medibles, siempre que seamos capaces de acotar las funciones de la sucesión por una función integrable.
Antes necesitamos un resultado auxiliar:

Lemma 5. ***Lema de Fatou***
Si f_n son funciones medibles no negativas, entonces
$$\int_\Omega \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n d\mu$$

Theorem 6. ***Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada***
Sea (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y sea* $(f_n)_n$ *una sucesión de funciones medibles sobre* Ω *tales que existe*

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega$$

Si existe una función $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, se cumple*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \textit{p.c.t. } x \in \Omega$$

entonces $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *y*

$$\lim_n \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0$$

En particular

$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Proof. Primero, lo demostramos **suponiendo que g acota las funciones de la sucesión en todo Ω, en lugar de p.c.t.**
Observamos que f es medible, por ser límite puntual de funciones medibles (como vimos en el teorema anterior).
Ahora, cada f_n es integrable, pues $|f_n| \leq g \implies \int_\Omega |f_n| \, d\mu \leq \int_\Omega g d\mu < \infty$.
Y f es integrable, pues $|f| = \lim_n |f_n| \leq g \implies \int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega g d\mu < \infty$
Por tanto, queda probar la igualdad integral.
Como $g \geq |f_n|$, se tiene que $-g \leq f_n \leq g \implies 0 \leq f_n + g \leq 2g$ y consideramos la sucesión de funciones no negativas $(f_n + g)$.
Entonces

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega (f\text{‘} + g) \, d\mu = \int_\Omega \lim_n (f_n + g) \, d\mu = \int_\Omega \liminf_n (f_n + g) \, d\mu \overset{Fatou}{\leq} \liminf_n \int_\Omega (f_n + g) \, d\mu = \liminf_n$$

Y tenemos

$$\int_\Omega f d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n d\mu \leq \lim_n \int_\Omega f d\mu$$

Consideremos, ahora, la sucesión $(-f_n)$, que son medibles y verifican $|-f_n| \leq g$ en Ω, y $\lim_n (-f_n(x)) = -f(x), x \in \Omega$. Así, estamos en las mismas condiciones que antes, y obtenemos

$$\int_\Omega (-f) \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega (-f_n) \, d\mu = -\limsup_n \int_\Omega f d\mu \implies \limsup_n \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega f d\mu$$

Por lo tanto

$$\limsup_n \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n d\mu \leq \limsup_n \int_\Omega f_n d\mu$$

por lo que las desigualdades son igualdades, y, en consecuencia, ha de ser

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$$

Y es

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$$

y entonces, podemos aplicar lo visto a la sucesión $|f_n - f|$, de forma que

$$\lim_n \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = \int_\Omega \lim_n |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Para el **caso general**, para cada n, existe $Z_n \subset \Omega$ con $\mu(Z_n) = 0$ y $|f_n| \leq g$ en $\Omega \setminus Z_n$. Definimos

$$Z = \bigcup_n Z_n \implies \mu(Z) \leq \sum \mu(Z_n) = 0$$

y, en parcticular, es medible. Además, si $x \in \Omega \setminus Z$ entonces $|f_n| \leq g, \forall n$.
Consideremos las funciones $h = f\mathcal{X}_{E\setminus Z}$ y $h_n = f_n\mathcal{X}_{E\setminus Z}$. Tenemos

$$|h_n(x)| = \begin{cases} |f_n(x)| & x \in E \setminus Z \\ 0 & x \in Z \end{cases} \leq g(x)$$

$$h_n(x) \xrightarrow{n} h(x), \forall x \in \Omega$$

y h_n son integrables, pues coinciden con f_n salvo en un conjunto de medida 0, se tiene $\int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega f_n d\mu$.
Estamos, entonces, en el caso anterior, y se tiene que h es integrable y su integral coincide con la de f pues son iguales salvo en un conjunto de medida nula, además

$$\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = \lim_n \int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega h d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

□