

1. Introducción

- Errores numéricos básicos
- Series recurrentes
- Breve resumen del estándar IEEE de punto flotante

2. Resolución numérica de problemas de valor inicial para EDO

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = f(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad \vec{y}(t) \text{ para } t \in [a, b]$$

- Siempre de orden 1, aunque aumentemos la dimensión
- Problema bien planteado

Definición El problema (PVI) se dice bien planteado si

- ① tiene solución única
 - ② $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K(\varepsilon)$ tal que si $|S_0| \leq \varepsilon$, $S(t)$ es una t^* de con $|S(t)| \leq \varepsilon$ en $[a, b]$. También existe sol. únic. $\tilde{z}(t)$
- Problema perturbado
- $\begin{cases} z'(t) = f(t, z) + g(t) \\ z(a) = y_0 + \varepsilon_0 \end{cases}$

y, además, $|z(t) - \tilde{z}(t)| \leq K(\varepsilon) \cdot \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$

- La solución analítica no siempre es posible
- Discretización del intervalo

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$



la solución numérica consiste en dar $(w_i)_{i=0}^n$
tales que

(a) \vec{w}_i approxima a $\vec{y}(t_i)$

(b) máx $\|\vec{y}(t_i) - w_i\|$ sea "aceptable"
 $0 \leq i \leq n$

(c) Se pueda obtener una aproximación en cualquier
otro punto $t \in [a, b]$ a partir de $(w_i)_{i=0}^n$
(interpolación adelante)

Problema 1. Caída libre con rozamiento

- No tiene solución analítica (que sepamos)
- Sin rozamiento sí la tiene
- Hay que calcular el impacto "exacto"

3. Métodos de paso fijo. MÉTODO DE EULER

- Métodos de paso fijo: se elige un $h > 0$,

$$t_i = a + i \cdot h$$



$$h \approx \frac{b-a}{n}$$

Método de Euler

$$\begin{cases} \vec{w}_0 = \vec{y}_0 \\ \vec{w}_{i+1} = \vec{w}_i + h \cdot f(t_i, \vec{w}_i) \quad (i: 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

Interpolación usando el propio método.

Poo

- Implementación del método de Euler (ad-hoc / Arquitectura)
- Aplicación al problema 1.

preguntas:

¿Cuál debe ser h para obtener una precisión dada?

Validación del método

¿Cuál ha de ser el método de interpolación?

Variación de la precisión con h .

• Convergencia del método de Euler (teoría)

Bajo ciertas condiciones [h d_c-Lipschitz
c constante de $|y''(t)|$]

$$\text{Máx}_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - w_i| \leq e^{(b-a) \cdot K} |y_0 - y_0| + \left[\frac{e^{(b-a) \cdot K} - 1}{K} \right] \frac{c \cdot h}{2}$$

esta era gracias a que

$$\begin{cases} y(t+h) = y(t) + h \cdot f(t, y(t)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \\ y_h(t+h) = y_h(t) + h \cdot f(t, y_h(t)) \end{cases}$$

1 paso \rightarrow el error es $\Theta(h^2)$ } error acumulado:

Se dan $\sim \frac{1}{h}$ pasos } $\left[\frac{1}{h} \right] \cdot \Theta(h^2) \approx \Theta(h)$

• Problema 2 (Práctica 1): Oscilador armónico

Preguntas abiertas:

- ¿Cómo saber el error final?
- ¿Cómo elijo h para que el error sea menor que una tolerancia dada?
- ¿Se puede utilizar la acotación del teorema, tomando h tan pequeño como sea necesario?

X Convergencia del método de Euler con error de redondeo

si el método fuera

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) + \delta_i$$

supongamos $\delta_i < \delta$ $t_i = 0, 1, \dots, n-1$

en condiciones similares a las del otro teorema, se tiene

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_n(t_i)| &\leq e^{(b-a)K} |\Sigma_0 - y_0| + \\ &+ \left[\frac{e^{(b-a)K} - 1}{K} \right] \left[\underbrace{\frac{1}{2} c \cdot h}_{\lim_{h \rightarrow 0} 0} + \underbrace{\frac{\delta}{h}}_{\lim_{h \rightarrow 0} \infty} \right] \end{aligned}$$

X Estimación del error en el método de Euler

Con un "poco más" de esfuerzo, se puede obtener (Atkinson) que, si $y(t)$ es C^3 , y $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas, entonces

$$\textcircled{X} \quad \sum_{t_i=t_0}^b y_h(t_i) - y_h(t_i) = h \cdot D(t_i) + \Theta(h^2) \quad t_i \leq b$$

donde $D(t)$ es la solución del siguiente p.v.i:

$$\begin{cases} D'(t) = g(t)/D(t) + \frac{1}{2} y''(t), & g(t) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \\ D(t_0) = 0 \end{cases}$$

Usamos \textcircled{X} con h y con $h/2$ para extraer el error:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{t_i=t_0}^b y(t_i) - y_h(t_i) = h \cdot D(t_i) + \Theta(h^2)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{t_i=t_0}^b y(t_i) - y_{h/2}(t_i) = \frac{h}{2} D(t_i) + \Theta(h^2)$$

$$2 \times \textcircled{2} - \textcircled{1}: \quad \sum_{t_i=t_0}^b y(t_i) - (2y_{h/2}(t_i) - y_h(t_i)) = \Theta(h^2)$$

Conclusiones

⑤ $y_h(t) - y_{h/2}(t) = (y_{h/2} - y_h(t)) + \Theta(h^2)$

⑥ Mejor usar como aproximación final:

$$w(t) = 2y_{h/2}(t) - y_h(t)$$

que es de orden $\Theta(h^2)$

Problema 2

- Rutina para calcular el error máximo.
- Calcular de manera iterativa:

$$\{y_h(t_i)\}_{i=1, \dots, n}$$

$$\{y_{h/2}(t_i)\}_{i=1, \dots, 2n}$$

cuando más $|y_h(t_i) - y_{h/2}(t_{2i})| < 10^{-2}$

error máximo de $y_h, y_{h/2}, 2y_{h/2} - y_h$

Métodos de Taylor de orden superior

Def Error local de truncamiento

Sea un método de diferencias dado, en forma genérica, por

$$\begin{cases} w_0 = \varphi \\ w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

El error local de truncamiento se define por

$$T_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i) - h\phi(t_i, y(t_i))}{h} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

Para el método de Euler, $\phi(t_i, w_i) = f(t_i, w_i)$

$$T_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+h}) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i)) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad i = 0, \dots, N-1$$

si $|y''(t)|$ esté acotada por C en $[a, b]$,

$$|T_{i+1}(h)| \leq C \frac{h}{2} = \theta(h)$$

Buscaremos otros métodos en los que el E.L.T. sea $O(h^p)$ con p tan grande como se pueda.

Método de Taylor de orden p

$$\begin{cases} w_0 = \varphi \\ w_{i+1} = w_i + h \cdot T^{(p)}(t_i, w_i) \quad i=0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

donde $T^{(p)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t_i, w_i)$

$f'(t_i, w_i)$ viene dado por $y'(t) = f'(t, y(t))$

⋮

$f^{(p-1)}(t_i, w_i)$ viene dado por $y^{(p)}(t) = f^{(p-1)}[t, y(t)]$

Si $y \in C^{(p+1)}[a, b]$,

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(t) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi)$$

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot f(t, y(t))$$

$$\underline{w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)}$$

Euler:

Ahora:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot y'(t) = \boxed{\rightarrow}$$

$$y^{(1)}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) \left[= f'(t_i, w_i) \right]$$

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)) \right] f(t, y(t)) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) \right] \\ &\left[\begin{array}{c} \vdots \\ f''(t_i, w_i) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Teorema

Si φ es de clase $C^{p+1}[\alpha, b]$, el E.L.T. del método de Taylor de orden p es $\theta(h^p)$

Dem

$$T_{C+1}(h) = \frac{h^p}{(p+1)!} f^{(p)}(\xi_i, Y(\xi_i)) \quad \text{actuando en } [\alpha, b].$$

per tanto $\theta(h^p)$ \square

Ejemplo

$$y'(t) = y(t) - t^2 + 1 \quad t \in [0, 2]$$

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$y'(t) = y(t) - t^2 + 1 = f'(t, y(t))$$

$$y''(t) = y'(t) - 2t = y(t) - t^2 + 1 - 2t = f''(t, y(t))$$

$$y'''(t) = y'(t) - 2t - 2 = y(t) - t^2 - 2t - 1 = f'''(t, y(t))$$

$$y^{(4)}(t) = y'(t) - 2t - 2 = y(t) - t^2 - 2t - 1 = f^{(4)}(t, y(t))$$

Ejercicio

M. Taylor de orden 2

Implementar y comparar la precisión para $h=0.1$, de

M. Taylor de orden 4

- Ⓐ M. Euler Ⓑ M. Taylor 2 Ⓒ M. Taylor 4

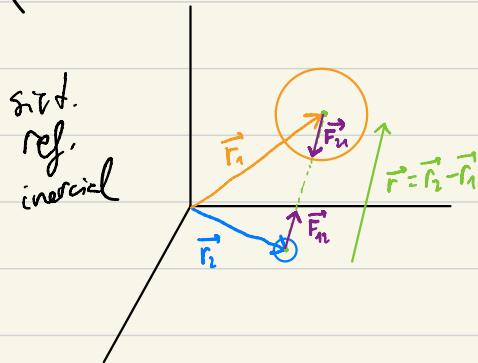
Conclusiones

- Buena precisión
- Se programa con cierto trabajo previo
- No es rentable

Objetivo: intentar "imitar" la precisión del M.Taylor con operaciones asumibles que solo requieren conocer $f(t, y)$

Problema de los cuerpos

- Movimiento de dos cuerpos atridos y sometidos a una fuerza central



$$\text{Si } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{y} \quad r = \| \vec{r} \|,$$

$$\vec{F}_{21} = f(r) \frac{\vec{r}}{\| \vec{r} \|} \quad \vec{F}_{12} = -f(r) \frac{\vec{r}}{\| \vec{r} \|}$$

En el caso gravitatorio, $f(r) = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$

La 2^a Ley de Newton nos da

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{F}_{21} = f(r) \frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)}{\| \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \|} \\ M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_{12} = -f(r) \frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)}{\| \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) \|} \end{array} \right.$$

Nos da un problema de dimensión 62

Primera simplificación: centro de masas

El centro de masas se define como:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2} \quad (2 \text{ cuerpos puntuales})$$

$$(M_1 + M_2) \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} + M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Por lo que el centro de masas se mueve con velocidad constante en nuestro sistema inercial.

Así, elegimos un segundo sistema de referencia inercial centrado en el CM.

Segunda simplificación: masa reducida

Consideremos $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} &= -\frac{1}{M_2} f(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{M_1} f(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \\ &= -\left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_1}\right) f(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\end{aligned}$$

Si definimos μ tal que $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$

(μ es la masa reducida del sistema de los cuerpos)

Se tiene el problema:

$$\mu \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -f(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

que es p.v.i. de ~~dim 6~~

Se tiene

$$\begin{aligned} -\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) &= \vec{r}(t) \\ M_1 \vec{r}_1(t) + M_2 \vec{r}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{y} \end{array} \right\}$$

luego

$$\vec{r}_1(t) = \frac{-M_2}{M_1 + M_2} \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}_2(t) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{r}(t)$$

por ser el
origen el
centro de masas

3^{er} simplificación: el movimiento de $\vec{r}(t)$ es plano

Consideremos

$$\vec{\tau}(t) = \mu \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$$

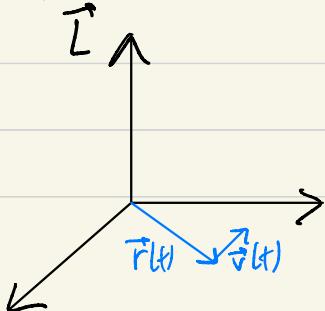
$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\tau}}{dt} &= \cancel{\mu \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)} + \mu \vec{r}(t) \times \vec{r}'''(t) = \\ &= \mu \vec{r}(t) \times \cancel{\frac{f(r)}{\| \vec{r} \|} \vec{r}(t)} = 0\end{aligned}$$

Luego $\vec{\tau} = \mu \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ es constante,
pero que

$$\begin{cases} \vec{r}(t) \perp \vec{\tau} \\ \vec{v}(t) \perp \vec{\tau} \end{cases}$$

Elegimos el S.R.I. CM, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

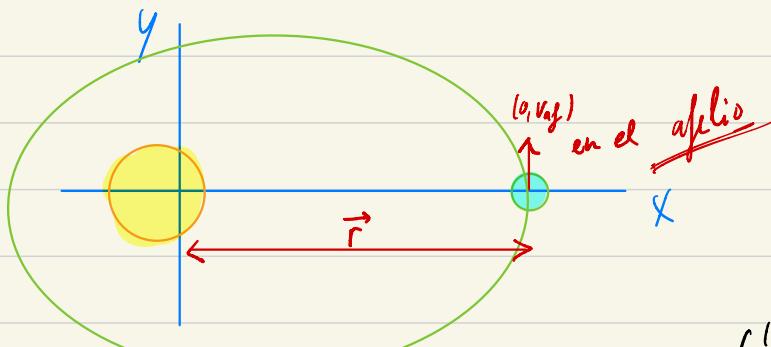
tal que $\vec{k} = \frac{\vec{\tau}}{\|\vec{\tau}\|}$



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$$

lo que reduce el problema
a una dimensión \checkmark

Gaso Sol-Tierra



$$\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \right)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\mu} f(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = -\frac{1}{\mu} G \frac{M_1 M_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= -G(M_1 + M_2) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

|-----|

$$\left\{ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -G(M_1 + M_2) \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right.$$

$$\left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -G(M_1 + M_2) \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0) \\ 0 \quad 0 \end{array} \right] \quad [G, M_1, M_2]$$

$$G = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$$

$$M_T = 5,9725 \cdot 10^{24} kg \quad M_S = 1,9885 \cdot 10^{30} kg$$

Afbelto $152,10 \cdot 10^6 km = x(t_0)$

$$v(t_0) = 29'29 \text{ km/s}$$

Cambio de unidades (para mejorar precision)

masa: $10^{27} kg = 1 um$

distancia: $10^9 m \cong 1 VA \rightarrow 1 ud$

tiempo: $1 \text{ hora} = 3600 s = 1 ut$

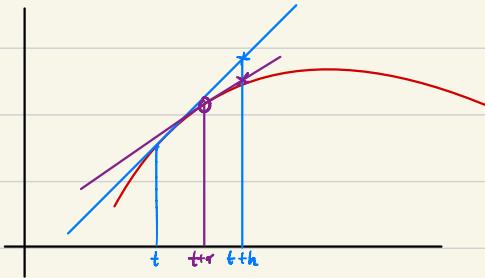
$$x(t_0) = 152'100'533 \text{ ud}$$

$$y(t_0) = 0 \text{ ud}$$

$$v_x(t_0) = 0, v_y(t_0) = 29'29 \cdot \frac{km}{s} \cdot \frac{ud}{10^9 km} \cdot \frac{3600 s}{1 h} = 0,184527 \frac{ad}{ut}$$

$$G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{60^2} \cdot 10^{27} \cdot (3600)^2 = 8'6498928 \cdot 10^{-4}$$

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA



Idea inicial: encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ tales que $\alpha_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ aproxime a $T^2(t+\gamma) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y)$, en error del orden de $\Theta(h^2)$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) &= \alpha_1 \left[f(t,y) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \beta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,y) (\alpha_1, \mu) + \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y) (\mu, \mu') + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) (\mu, \mu'') \right] \cong \\ &\cong f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) f'(t,y) \right] \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f'(t,y)$$

$$T^{(2)}(t+y)$$

$$\beta_1(t+\alpha_1, y+\beta_1) = \Theta(h^2)$$

$$\text{Es decir, } f(t+h, y + \frac{h}{2} f'(t,y)) = \overbrace{f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y) + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,y) +}^{\text{T}^{(2)}(t+y)} + \frac{h^2}{4} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y) (\mu, \mu') + \frac{h}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) (\mu, \mu'') \right)}_{\cdot f'(t,y)} f'(t,y)$$

Método del punto medio

$$\begin{cases} w_0 = y \\ w_{in} = w_i + h \cdot f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)) \end{cases}$$

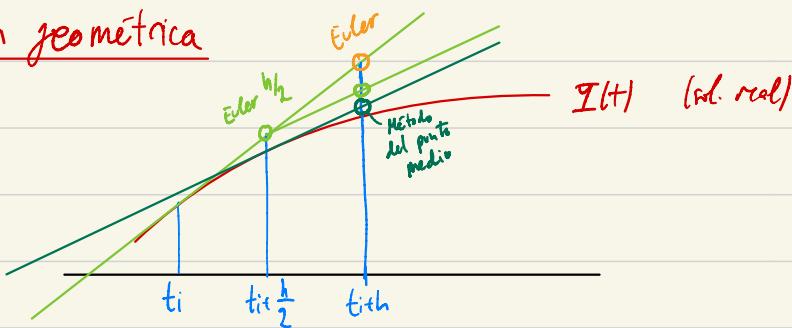
Luego error local de truncamiento es:

$$T_{int}(h) = \frac{y(t_i+h) - y(t_i)}{h} - f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)) =$$

$$= \boxed{\frac{y(t_i+h) - y(t_i)}{h}} - T^{(1)}(t_i, y(t_i)) - R(t_i, y_{\beta_1}) = \theta(h^2) + \theta(h) = \theta(h)$$

Este es nuestro primer método de Runge-Kutta, con error de truncamiento de orden $\theta(h^2)$.

Interpretación geométrica

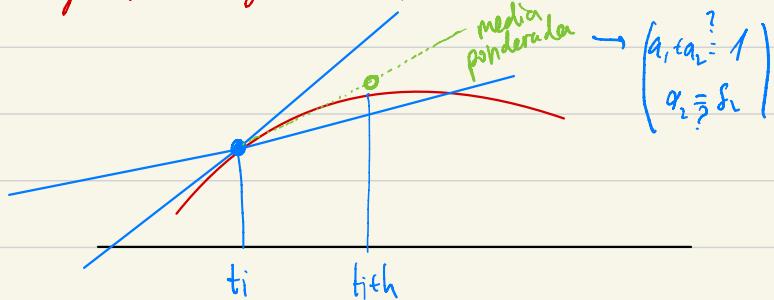


Sigamos con la interpretación geométrica.

¿Podemos aproximar $T^{(3)}(t) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y) + \frac{h^2}{6} f''(t,y)$

en orden $\Theta(h^3)$ utilizando

$$a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y)) ?$$



$$a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y)) =$$

$$= a_1 f(t,y) + a_2 \left[f(t,y) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \delta_2 f(t,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,y) \alpha_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y) \alpha_2 \delta_2 f(t,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) \delta_2^2 f(t,y) \right] +$$

$$+ \Theta(h^3)$$

¿? hay que
verlo

$$= (a_1 + a_2) f(t,y) + a_2 \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_2 \delta_2 f(t,y) \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + \frac{a_2 \alpha_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,y) +$$

$$+ a_2 \alpha_2 \delta_2 f(t,y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y) + \frac{a_2 \delta_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) + \Theta(h^3)$$

$$\begin{aligned}
 &= (a_1 + a_2) f(t_{1,y}) + a_2 \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_{1,y}) + a_2 \delta_2 f(t_{1,y}) \frac{\partial^2 f}{\partial y}(t_{1,y}) + \frac{a_2 \alpha_2^2 \delta_2^2}{2} f''(t_{1,y}) \\
 &\quad + a_2 \alpha_2 \delta_2 f(t_{1,y}) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_{1,y}) + \frac{a_2 \delta_2^2}{2} f''(t_{1,y}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_{1,y}) + O(h^3) \\
 &\simeq T^{(1)}(t) = f(t_{1,y}) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{h^2}{6} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{2\partial^2 f}{\partial t \partial y} \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 \alpha_2 = \frac{h}{2} \quad a_2 \delta_2 = \frac{h}{2}$$

$$(si \ a_2 \neq 0 \rightarrow \alpha_2 = \delta_2)$$

¿?
 1. ordenado!

$$\frac{a_2 \alpha_2^2}{2} = \frac{h^2}{6}$$

$$a_2 \alpha_2 \delta_2 = \frac{h^2}{3}$$

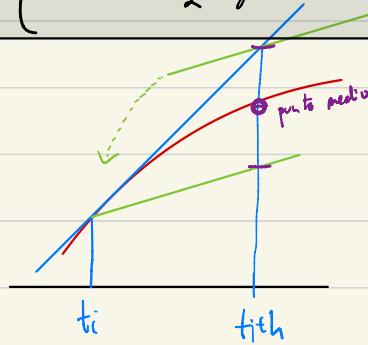
$$\frac{a_2 \delta_2^2}{2} = \frac{h^2}{6}$$

No se puede conseguirlo... pero permite encontrar otros métodos de Runge-Kutta de orden 2.

Método de Euler modificado

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \\ q_1 = q_2 = h \end{array} \right\}$$

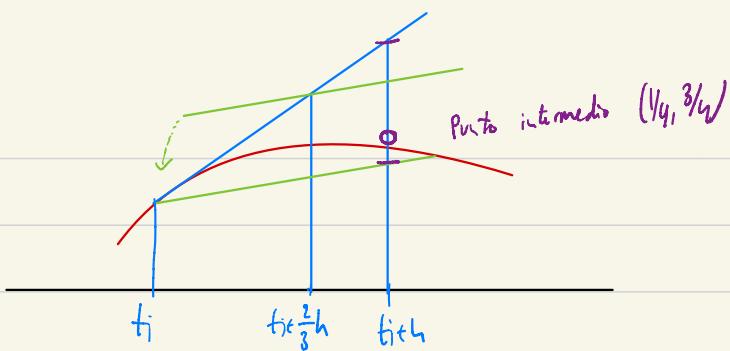
$$\left. \begin{array}{l} w_0 = q \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + h f(t_i, w_i))] \end{array} \right\}$$



Método de Heun

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{4} \quad a_2 = \frac{3}{4} \\ q_1 = q_2 = \frac{2}{3}h \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_0 = q \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} [f(t_i, w_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}h f(t_i, w_i))] \end{array} \right\}$$



Para conseguir un método de orden 3 se hace con

$$f(t+\alpha_1, y+\delta_1) f(t+\alpha_2, y+\delta_2) f(t, y)$$

una aproximación a $T^{(3)}$ con $T_i = \Theta(h^3)$.

El método más usado de Runge-Kutta es el de orden 4:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = y \\ k_1 = h \cdot f(t_i, w_i) \\ k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = h \cdot f(t_i + h, w_i + k_3) \\ w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

Int. geom.

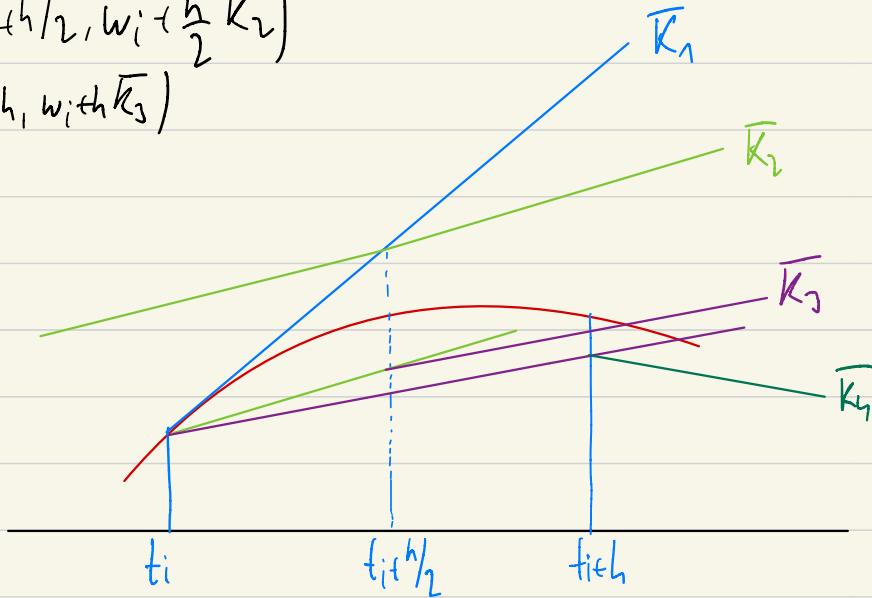
$$\bar{k}_1 = f(t_i, w_i)$$

$$\bar{k}_2 = f(t_i + h/2, w_i + \frac{h}{2} \bar{k}_1)$$

$$\bar{k}_3 = f(t_i + h/2, w_i + \frac{h}{2} \bar{k}_2)$$

$$\bar{k}_4 = f(t_i + h, w_i + \bar{k}_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} (\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + 2\bar{k}_3 + \bar{k}_4)$$



Nota: se ve de mucho a la regla de Simpson de integración numérica

Table de Butcher de evaluaciones y órdenes del e.l.t.

Evaluaciones	2	3	4	$5 \leq p \leq 7$	$8 \leq p \leq 9$	$10 \leq p$
Mejor e.l.t.	$\Theta(h^2)$	$\Theta(h^3)$	$\Theta(h^4)$	$\Theta(h^{p-1})$	$\Theta(h^{p-2})$	$\Theta(h^{p-3})$

Comparación de evaluaciones frente a precisión.
 ¿Es mejor/peor/igual subir p o bajar h?

Para resolver un p.v.i. en $[a, b]$ con $b-a=1$.

- RK₄ con $h=0,1$: 40 evals prec $\approx 10^{-4}$
- RK₂ con $h=0,05$: 40 evals prec $\approx 2,5 \cdot 10^{-3}$
- Euler con $h=0,025$: 40 evals prec $\approx 2,5 \cdot 10^{-2}$

Suele ser mejor aumentar la p, al menos para $p \leq 4$.

PRACTICA 2

Datos del problema de 2 cuerpos Sol-Terra,
resolver con:

- Euler
- Euler modificado ← implementar
- RK4 ← implementar

$$h=1 \text{ hora}$$

Calcular la duración del año terrestre y el perihelio

ADJUSTE DEL P.R.O (Método de pesos variables)

Buscamos un peso que:

- Mantenga una precisión deseada
- ajuste económicamente
- economice cálculos

Control del error global a través del criterio de error local

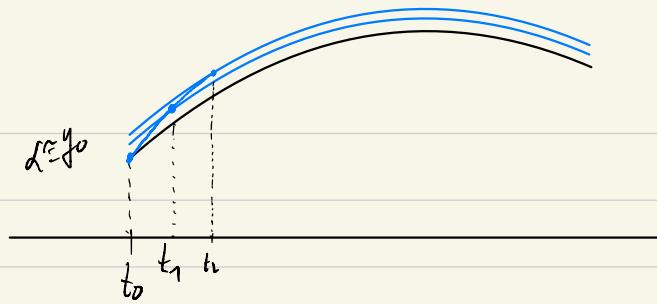
Será un p.v.i. (1) $\begin{cases} \bar{z}(0) = z_0 \\ \bar{z}'(t) = f(t, \bar{z}(t)) \end{cases}$

y un método numérico en diferencias

$$(2) \begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h \cdot \phi(t_i, w_i, h) \end{cases}$$

Denominaremos la solución local $z_h(t)$ a la solución del p.v.i.:

$$(3) \begin{cases} z_h'(t) = f(t, z_h(t)) \\ z_h(t_h) = w_h \end{cases}$$



La solución basal es, por tanto, la solución del problema que resolvemos en cada paso.

Teorema

Supongamos que el método numérico de integración (2) verifica en cada paso

$$\|z_{n+1}(t_n+h) - w_{n+1}\| \leq \varepsilon \cdot h_n \quad (\text{criterio de error local})$$

para una tolerancia ε dada.

Entonces, si f es Lipschitziana de cte L , se tiene

$$\|y(t_n) - w_n\| \leq e^{k(t_n-a)} \|y(t_0) - w_0\| + \frac{e^{k(t_n-a)} - 1}{k} \cdot \varepsilon$$

- Recuerda a la cte que obtuvimos para el M. de Euler.
(si L no es muy grande, per $b-a=1$ es admisible)
- Independiente del método

- Oberrode que, si querimos que $\|z_n(t_n) - \tilde{z}(t_n)\| \leq \omega_n$
 el criterio consiste en mantener

$$\|\tilde{z}_{i+1}(h_i)\| = \frac{\|\tilde{z}(t_{i+1}) - \tilde{z}(t_i) - h_i \phi(t_i, \tilde{z}(t_i), h_i)\|}{h_i} \leq$$

$$\leq \frac{\|\tilde{z}_i(t_{i+1}) - w_{i+1}\|}{h} \leq \varepsilon$$

1 paso $h \sim \varepsilon \cdot h$
 en $[b-a]$ se han $\frac{b-a}{h}$ pasos

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{error} \sim \frac{b-a}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon(b-a)$$

Control del error por extrapolación de Richardson

Teorema

Supongamos que el método es diferencial

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot \phi(t_i, w_i, h)$$

verifica en cada paso (usando la notación $w_{i+1} = y_h(t_i + h)$)

$$(3) z_i(t_i + h) = y_h(t_i + h) + C \cdot z_i^{(k+1)}(t_i) h^{k+1} + \Theta(h^{k+2})$$

Entonces, se tiene

$$(4) z_i(t_i + h) = y_{h/2}(t_i + h) + 2 \cdot C \cdot z_i^{(k+1)}(t_i) \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} + \Theta(h^{k+2})$$

El error local de truncamiento (ELT) es de orden k , Euler $k=1$

$k=4$ $k=4$

Haciendo $(4) \cdot 2^k - (3)$ tenemos

$$(5) z_i(t_i + h) = \frac{2^k y_{h/2}(t_i + h) - y_h(t_i + h)}{2^{k-1}} + \Theta(h^{k+2})$$

y haciendo

(6)

$$z_h(t+h) - z_h(t+h) = \frac{2^k}{2^k - 1} (z_{h/2}(t+h) - z_h(t+h)) + O(h^{k+2})$$

Euler: $k=1$ $\frac{2(z_{h/2} - z_h)}{h}$

RK4: $k=4$ $\frac{16}{15}(\dots)$

- Usar (6) para estimar el error del método.
- Usar (5) para mejorar la aproximación del p.v.i.

Estimación local del paso (ext Richardson)

Como queremos mantener, para una tolerancia $\varepsilon > 0$

$$\|z_h(t_n+h) - w_{n+1}\| \leq \varepsilon \cdot h^n$$

Queremos ver como elegir h que cumple esto.

(Usaremos también que $\|z_h(t_n+h) - w_{n+1}\| \approx C_0 \cdot h^{k+1}$)

- Damos un paso con h y $2 \log h/2$.
- Estimamos el error $e_n(h) = \|z_h(t_n+h) - w_{n+1}\| \approx (6)$
- ¿Es $e_n(h) < \varepsilon \cdot h$?
 - si, h es adecuado, calcularmos w_{n+1} (5)
 - No

Elas tendrás que haber sido $h^* = g \cdot h$ para que el error sea menor a $\varepsilon \cdot h^*$?

$$\text{¿} \|z_n(t_n + gh) - y_{gh}(t_n + gh)\| \leq \varepsilon \cdot g \cdot h?$$

$$\|z_n(t_n + gh) - y_n(t_n + gh)\| \cong G(gh)^{k+1} = \underbrace{C \cdot g^{k+1} \cdot h^{k+1}}_{} =$$

$$= g^{k+1} \|z_n(t_n + h) - y_n(t_n + h)\| \cong g^{k+1} \frac{2^k}{2^{k-1}} \|y_{h/2}(t_n + h) - y_h(t_n + h)\| \leq \varepsilon \cdot g \cdot h$$

$\tilde{\varepsilon}(h)$

$$g \leq \left(\frac{\varepsilon \cdot h}{\tilde{\varepsilon}(h)} \right)^{1/k}$$

Método Práctico

(Método adaptativo)

- ① A partir de un h dado, se calculan $y_h(t+h)$ e $y_{2h}(t+2h)$ y se estima el error mediante (6) $\tilde{E}(h)$.
- ②
 - a] Si $\tilde{E}(h)/\varepsilon \cdot h$ se acepta el paso y se toma $h_{new} = (5)$ y $t \rightarrow t+h$
 - b] Si $\tilde{E}(h) > \varepsilon \cdot h$, no se acepta el paso.
- ③ Se calcula $g = \left(\frac{\varepsilon \cdot h}{2\tilde{E}(h)}\right)^{1/k}$ y se hace $h=g \cdot h$.
↑ para ser conservadores
- ④ **3.-bis** Antes de hacer $h=g \cdot h$, haceremos $g = \min(4, \max(g, 0.1))$
- ⑤ Si $h < h_{min} \rightarrow$ error !!
 $h > h_{max} \rightarrow h = h_{max}$

Método de Runge-Kutta - Fehlberg

Los métodos de RK de órdenes p y p+1

Supongamos que tenemos

$$(1) \begin{cases} w_0 = \gamma \\ w_{i+1} = w_i + h \cdot \phi(t_i, w_i, h) \end{cases}$$

con $T_{i+1}(h) = \mathcal{O}(h^p)$

y un segundo método

$$(2) \begin{cases} \tilde{w}_0 = \gamma \\ \tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h \cdot \tilde{\phi}(t_i, \tilde{w}_i, h) \end{cases}$$

con $\tilde{T}_{i+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$

Si suponemos de nuevo que

$$y(t_n) \approx \tilde{y}(t_n) \approx w_n$$

$$\tilde{y}(t_n) \approx y(t_n) \approx \tilde{w}_n$$

$$y(t_{i+1}) - w_{i+1} \approx C_1 h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1} \approx C_2 h^{p+2} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$y(t_{i+1}) - w_{i+1} \approx \tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1} + \tilde{w}_{i+1} - w_{i+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$\text{a decir: } \tilde{\epsilon}(h) = \tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}$$

esta aproxiación del error se puede utilizar como
antes para ajustar el paso

$$q \leq \left(\frac{\epsilon \cdot h}{\bar{e}_h(h)} \right)^{1/p}$$

Método R-K-Fehlberg

$$\begin{aligned} \text{RK4} &\rightarrow 4 \text{ ws.} \\ \text{RKS} &\rightarrow 8 \text{ ws.} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} 5 \text{ (la primera es} \\ \text{la misma)} \end{array} \right\} 10 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

Erwin Fehlberg encontró 2 métodos de RK avaliados
de orden 4 y 5 que se calculan con las mitades 6 K_i.

Implementar RKF

Métodos Multipaso (y estabilidad)

Un método a m pasos se escribe como:

$$w_{i+1} = a_0 \cdot w_{i-m+1} + a_1 \cdot w_{i-m+2} + \dots + a_{m-1} \cdot w_i + h \cdot F(t_i, w_{i-m+1}, \dots, w_i, w_{i+1}, h)$$

Nota 1

Si $m=1$ tengo un método a 1 paso como los de antes

Nota 2

Si F depende de w_{i+1} el método se dice IMPLÍCITO

si no depende, se dice EXPLÍCITO

En un método implícito necesitaremos algún algoritmo para "despejar" w_{i+1} .

Ejemplos

Método explícito de Adams-Basforth de 4 pasos

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

$w_0 = q_1, w_1 = q_2, w_2 = q_3, w_3 = q_4$ se calculan con otro método

Se tiene el E.L.T.:

$$T_{i+1}(h) = \frac{281}{720} h^{5/3} (G/h)^4$$

Método implícito de Adams - Moulton de 3 pasos

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} \left[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right]$$

$$w_0 = q_0, \quad w_1 = q_1, \quad w_2 = q_2$$

No es una igualdad, es una ecuación que se debe resolver.

Se tiene

$$T_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} \gamma^{(5)}(q) h^4$$

la forma de obtenerlos es:

$$y(t) = \int f(t, y(t)) \rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

y approximamos $f(t, y(t))$ mediante un polinomio interpolador $P(t)$,
de forma que

$$Y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt$$

Métodos multiplicados en general

$$w_{i+1} = a_0 w_{m+1} + \dots + a_{m-2} w_{i-1} + a_{m-1} w_i + \\ + h [b_0 f(t_{i+1}, w_{i+1}) + \dots + b_{m-1} f(t_i, w_i) + b_m f(t_{i+1}, w_i)]$$

con un "arranque"

$$w_0 = a_0, w_1 = a_1, \dots, w_{m-1} = a_{m-1}$$

que se calculan con un método a un paso (RK).

Si $b_m > 0 \rightarrow$ explícito

$b_m = 0 \rightarrow$ implícito

(En general, para un método implícito, no se puede despejar de manera analítica).

Teoría general de convergencia

Definición Error local de truncamiento

$$T_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \dots - a_0y(t_{i-m+1})}{h} -$$

$$- [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \dots + b_0 f(t_{i-m+1}, y(t_{i-m+1}))]$$

$\frac{1}{h}$ aplicación del método a la solución $y(t)$

$$y(t_{i+1}) = \sum_{j=1}^m a_{j-1} T(t_{i-m+j}) + h F(t_{i-m+1}, \dots, t_i, y(t_i), y(t_{i+m})) + h T_{i+1}(h)$$

Definición Consistencia y orden

Un método se dice consistente con la EDO que approxima si,

llamando $T(h) = \max_{n-1 \leq i \leq N} \|T_{i+1}(h)\|$, se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = 0$$

se dice de orden p , $p > 1$, si p es el mayor entero

tal que

$$T(h) = \Theta(h^p)$$

Definición Convergencia

Un método es diferencial

$$(*) \quad w_{i+1} = \sum_{j=1}^n a_{j-1} w_{i-m+j} + h F(t_i, w_{i-m}, \dots, w_i, w_{i+1}, h)$$

se dice convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} \|y(t_i) - w_i\| = 0$$

Definición Estabilidad

El método (*) se dice estable si, al generar una segunda solución aproximada de la forma:

$$\tilde{w}_{i+1} = \sum_{j=1}^m a_{j-1} \tilde{w}_{i-m+j} + h F(t_i, \tilde{w}_{i-m}, \dots, \tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1}, h) + \tilde{\epsilon}_i$$

existe una constante M , independiente de h , tal que

$$\max_{1 \leq i \leq N} \|\tilde{w}_i - w_i\| \leq M \left[\max_{0 \leq i \leq m-1} \|\tilde{w}_i - w_i\| + \sum_{m < i \leq N} \|\tilde{\epsilon}_i\| \right]$$

Nota: esto no contradice el resultado que obtuvimos para Euler:

$$\max_{0 \leq h \leq b} |y(bh) - y_n(bh)| \leq e^{(b-t_0)k} |y_0 - y_0| + \left[\frac{e^{(b-t_0)k} - 1}{k} \right] \left[\frac{ch^2}{2} + \frac{\delta}{h} \right]$$

así que

$$\sum \| \epsilon_i \| \approx n \cdot \text{Eps} \approx \frac{b-a}{n} \text{Eps}$$

Teorema

Si un método es diferencial de la forma

$$w_{i+1} = \sum_{j=1}^m a_{j-1} w_{i-m+j} + h f(t_i, w_{i-m}, \dots, w_i, w_{i+m})$$

es estable y consistente \Rightarrow es convergente.

Si, además, es de orden $p \geq 1$, se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - w_n\| \leq M \left[\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - w_n\| + kh^p \right]$$

para constantes adecuadas M y k .

Dem

Tomemos $\tilde{e}_i = h T_i(h)$ y utilicemos la estabilidad

para $\tilde{w}_n = y(t_n)$

$$T_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-1} y(t_{i-m+j})}{h} = F(\dots)$$

$$y(t_{i+1}) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-1} y(t_{i-m+j}) + h F(\dots) + h T_{i+1}(h)$$

Entonces, por la estabilidad

$$\max_{0 \leq h \leq N} \|y(t_h) - w_h\| \leq M \left[\max_{0 \leq i \leq m-1} \|y(t_i) - w_i\| + \sum_{m-i \leq h \leq N} \|E_h\| \right]$$

y

$$\sum_{m-i \leq h \leq N} \|E_h\| = \sum_{m-i \leq h \leq N} h \|T_m(h)\| \leq \left(\sum_{m-i \leq h \leq N} h \right) \cdot T(h) \leq (b-a) T(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0}$$

por la consistencia

Aquí, si $\max_{0 \leq i \leq m-1} \|y(t_i) - w_i\| \rightarrow 0$, el método es convergente //

Si $T(s) = g(h)$ $\rightarrow T(r) \leq \frac{k \cdot h^p}{b-a}$

y de aquí, el resultado \square

Convergencia y estabilidad de los métodos

a un punto

Teorema

Sea $w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$ un método a un punto, tal que $\phi(t_i, w_i, h)$ es continua y Lipschitziana en $w_i, \forall h < h_0$.

Entonces:

① El método es estable

② El método es convergente si (y solo si) es consistente lo que ocurre si (según lo que)

$$\phi(t_i, y) = f(t_i, y), \forall t$$

③ Si $|T_{i+1}| \leq C(h)$ $\forall h < h_0$, entonces

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{C(h)}{L} e^{h(t_i - t_0)}$$

(L cte de Lipschitz de ϕ)

Lo de este color es cierto, pero no lo demostramos

Dem

$$\textcircled{1} \quad \text{Seam} \quad w_{i+1} = w_i + h \phi(t_i, w_i, h)$$

$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h \phi(t_i, \tilde{w}_i, h) + \varepsilon_i$$

$$\|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}\| \leq (1+hL) \|w_i - w_{i+1}\| + \|\varepsilon_i\| \leq (1+hL) \left[(1+hL) \|w_{i-1} - w_{i+1}\| + \|\varepsilon_{i-1}\| \right] + \|\varepsilon_i\| \leq \dots$$

$$\dots \leq (1+hL)^{i+1} \|\tilde{w}_0 - w_0\| + \left[\|\varepsilon_i\| + (1+hL) \|\varepsilon_{i-1}\| + \dots + (1+hL)^k \|\varepsilon_0\| \right]$$

$$1 < 1+hL < (1+hL)^2 < \dots < (1+kL)^{i+1} \quad M = (1+hL)^{i+1}$$

$$\leq (1+hL)^{i+1} \left[\|\tilde{w}_0 - w_0\| + \sum_{j=0}^i \|\varepsilon_j\| \right]$$

\textcircled{2} Como α es estable, si α converge será convergente, por el teorema anterior

$$Z_{i+1}(h) = \frac{Y(t_{i+1}) - Y(t_i)}{h} - \phi(t_i, Y(t_i), h) = Y(\xi_i) - \phi(t_i, Y(t_i), h) =$$

con $t_i < \xi_i < t_{i+1}$, por el T.V.M.

Q

$$= f(\xi_i, Y(\xi_i)) - \phi(t_i, Y(t_i), h) =$$

$$= \underbrace{f(\xi_i, Y(\xi_i)) - \phi(\xi_i, Y(\xi_i), 0)}_{\text{''porque } \exists \phi(t_i, 0) = f(t_i), \forall t_i \text{ (hipótesis)}} + \phi(\xi_i, Y(\xi_i), 0) - \phi(t_i, Y(t_i), h)$$

Por la continuidad uniforme de la función

$[a, b] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(t, h) \longrightarrow \phi(t, Y(t), h)$$

entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t_i - t_1| < \delta, |h_i - h_1| < \delta$

$$\Rightarrow \|\phi(t_i, Y(t_1), h_1) - \phi(t_1, Y(t_1), h_1)\| < \varepsilon$$

en particular, si $|h| < \delta \xrightarrow{\oplus} |g_i - t_1| < |h| < \delta$

$$\Rightarrow \|\phi(g_i, Y(g_i), 0) - \phi(t_i, Y(t_1), h_1)\| < \varepsilon$$

□

Convergencia de los métodos multiplicles en general

Sea el método a M pasos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i+1} = a_0 w_{i-m+1} + a_1 w_{i-m+2} + \dots + a_{m-1} w_i + F(t_i, h, w_{i-m+1}, \dots, w_i, w_m) \\ w_0 = q_0, w_1 = q_1, \dots, w_{m-1} = q_{m-1} \end{array} \right.$$

Aplíquemelo a la ecuación de prueba

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = 0 \\ y(t_0) = q \end{array} \right.$$

$$\text{Con } F(\dots) = \sum_{j=1}^m b_j f(t_j, w_{i-m+j}) = 0$$

Notar que:

$$w_{i+1} = a_0 w_{i-m+1} + \dots + a_{m-1} w_i$$

$$\text{Entonces } w_i = \lambda^i$$

$$\lambda^m = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{m-1} \lambda^{m-1}$$

Si todas las raíces de este polinomio característico fueran reales y distintas, la solución general de w_i sería

$$w_n = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j^n$$

$$Y(t) = q \quad \forall t$$

$w_n = q$, θ_n debe ser solución

es decir,

$q = a_0 q + \dots + a_{m-1} q \leftrightarrow \lambda = 1$ es una de las
raíces del pol. característico

Añádese

$$w_n = q + \sum_{j=2}^n c_j \theta_j^n$$

Pueden aparecer errores ϵ que no perturban la solución.

Definición Condición de raíz

El método cumple la condición de raíz si $| \lambda_j | \leq 1$. $\forall j$
donde λ_j son las raíces del polinomio característico

$$\lambda^m = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{m-1} \lambda^{m-1}$$

Si las raíces con $| \lambda_j | = 1$ son simples

Este condición hace que, aunque se produzca ruido en g_i ,
la θ_j^n sea de vez al infinito.

Teorema

Un método multistep es estable si, y solo si, cumple la condición de ranz.

Si el método es consistente entonces es estable si, y solo si, es convergente.

Método a 1 paso

$$w_{i+1} = w_i + \cancel{\phi(t_i, w_i, h)}$$

\downarrow
 $\lambda = 1$

Métodos de Adams

$$w_{i+1} = w_i + F(t_i, h, w_{i-m}, \dots, w_i, w_{i+1})$$

$$w_0 = q_0, \dots, w_{m-1} = q_{m-1}$$

$$\lambda^m = \lambda^{m-1} \rightarrow \lambda^{m-1}(b-1) = 0 \quad \begin{cases} b=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Implementación de métodos multiplicos. Predictor - Corrector

M. Adams-Basford de 4 pasos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})] \\ w_0 = q_0, w_1 = q_1, w_2 = q_2, w_3 = q_3 \end{array} \right.$$

$$T_{i+1}(h) = \frac{281}{720} \gamma^5(3) h^4$$

M. Adams-Moulton de 3 pasos

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})] \\ w_0 = q_0, w_1 = q_1, w_2 = q_2, w_3 = q_3 \end{array} \right.$$

$$T_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} \gamma^5(\mu) h^4$$

Adams-Moulton debe resolver una ecuación implícita. Se
 a la que se estima w_{i+1} con Adams-Basford y meterla
 a A-B para aproximarlo mejor.

Revisa variable para este predictor-corrector

$$\textcircled{1} \quad w_{i+1}^{(6)} = w_i + \frac{h}{24} [SSf(t_i, w_i) + \dots]$$

$$\textcircled{2} \quad w_{i+1}^{(11)} = w_i + \frac{h}{24} [qf(t_{i+1}, w_{i+1}^{(6)}) + \dots]$$

De la definición de e.c.t.

$$\textcircled{3} \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24} [SSf(t_i, y(t_i)) + \dots] + \frac{201}{2720} y^{(11)}(\xi) h^5$$

$$\textcircled{4} \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24} [qf(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \dots] - \frac{19}{2720} y^{(11)}(\mu) h^5$$

Suponiendo $w_j \approx y(t_j)$, comparando las ecuaciones $\textcircled{3}$ y $\textcircled{4}$

$$(1) \quad y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(6)} \approx \frac{201}{2720} y^{(11)}(\xi) h^5$$

$$(2) \quad y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(11)} \approx -\frac{19}{2720} y^{(11)}(\mu) h^5$$

y suponiendo $y^{(11)}(\xi) \approx y^{(11)}(\mu)$

$$(1) - (2) \rightarrow w_{i+1}^{(11)} - w_{i+1}^{(6)} \approx \frac{h^5}{2720} [201y^{(11)}(\xi) + 19y^{(11)}(\mu)] \approx \frac{270}{2720} y^{(11)}(\mu) h^5 = \\ = \frac{3}{8} y^{(11)}(\mu) h^5$$

$$\rightarrow y^{(11)}(\mu) \approx \frac{8}{3h^5} (w_{i+1}^{(11)} - w_{i+1}^{(6)})$$

y sustituyendo en (2):

$$y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(11)} \approx -\frac{19}{2720} \cdot \frac{8}{3} \cdot (w_{i+1}^{(11)} - w_{i+1}^{(6)})$$

Por lo que

$$e_T(h) = \frac{19}{2720} \|w_{i+1}^{(11)} - w_{i+1}^{(6)}\|$$

es una aproximación del error del método Pred-Cor de orden 4

Spiral gira en los vértices variables:

$$g = \left(\frac{\text{TOL} \cdot h}{\epsilon_r(h)} \right)^{1/4} \approx 2^{1/8} \left(\frac{\text{TOL} \cdot h}{\|w_{i+1}^{(1)} - w_i^{(0)}\|} \right)^{1/4}$$

① Salvedad $\rightarrow 1'5$

② Salvedad: se ignora el cambio de polo si:

$$\frac{\text{TOL} \cdot h}{10} < \epsilon_r(h) < \text{TOL} \cdot h$$

PRACTICA

- Implementar Predictor-Corrector con paso fijo
- Roberto para los problemas Tierra-Lluna y orbita de Marte.
- Integrar para d. poca variable

Otra práctica

P.V.T. $\begin{cases} y'(t) = 5e^{st} (y(t)-t)^2 + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ en $[0, t_{\max}]$
 $[0, 1] \quad [0, 8]$

Solución: $y(t) = t - e^{-st}$

Rodar con RK4 $h=0.2$ $\cancel{\text{/}}$

Problemas rígidos

Error local de truncamiento se comportaba como

$$C \cdot y^{(p)}(\xi) h^p$$

- si la derivada permanece acotada \rightarrow general

$$y^{(p)}(\xi) \approx y^{(p)}(\mu)$$

• si la derivada (p) crece moderadamente, pero la función también, crece el error absoluto, pero el relativo "no mucho".

"se controla"

"permanece estable"

• si la derivada crece, pero la función no,
el error "dominante" lo controla

Las derivaciones diferenciales a las que les padece estos se denominan derivaciones rígidas

$$y(t) = t - e^{-st} \quad \text{se acerca a } z(t) = t$$

$$y^{(p)}(t) = (-s)^p e^{-st} \quad \text{crece}$$

Dominio de estabilidad lineal de un método

El ejemplo más "limpio" de un problema rígido puede ser el de una función de la forma

$$e^{\lambda t} \quad \lambda < 0 \text{ grande}$$

porque

$$\left[e^{\lambda t} \rightarrow 0 \text{ rápidamente}, \quad y^{(p)}(t) = \lambda^p e^{\lambda t} \right]$$

Vamos a estudiar el comportamiento de los métodos ante el problema de pruebas

$$\oplus \quad \begin{cases} y'(t) = dy(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \quad t < 0$$

Método de Euler

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) \rightarrow w_{i+1} = w_i + h \lambda w_i = (1+h\lambda)w_i \\ w_0 = \alpha \end{cases}$$

$$w_n = (1+h\lambda)^n \alpha$$

$$y(t_n) = e^{at_n} = e^{nh\lambda} \underset{n \rightarrow \infty}{\xrightarrow{\text{L'H}} 0} 0 \quad t_n = n \cdot h$$

para que converja, tenemos, al menos, tener que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \rightarrow 0$

para ello se precisa que $|1+h\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < h\lambda < 1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial h} \neq 0, h \neq 0$$

$$-1 < h\lambda \rightarrow -2 < h\lambda \Leftrightarrow h|\lambda| < 2 \Rightarrow \boxed{h < \frac{2}{|\lambda|}}$$

Igualmente, si hay un error en redondo en las cond. iniq

$$w_0 = q + \varepsilon$$

$$\varepsilon_n = (1+h_2)^n \varepsilon$$

lo que obliga de nuevo a que $h < \frac{L}{|h_2|}$

Otros métodos a un paso

Existe, de manera similar, un polinomio $Q(\delta)$ tal que el método sobre el problema de prueba \oplus da

$$w_{i+1} = Q(h_2) \cdot w_i$$

de modo que para que el problema converge a la solución exacta debe cumplirse que $|Q(h_2)| < 1$

Para el método de Taylor de orden p, se tiene

$$Q(\delta) = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \dots + \frac{\delta^p}{p!}$$

Métodos multipaso

De forma general se escriben como:

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + \dots + a_0 w_{i-m+1} + h [b_{m-1} f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-2} f(t_i, w_i) + \dots + b_0 f(t_{i-m+1}, w_{i-m+1})]$$

a_{i+1} a_i b_{i-m+1}

$$\rightarrow (1 - h b_m) w_{i+1} = (a_{m-1} + h b_{m-1}) w_i - \dots - (a_0 + h b_0) w_{i-m+1} = 0$$

Sucesión recurrente de polinomio característico

$$Q(z, h) = (1 - h b_m) z^m - (a_{m-1} + h b_{m-1}) z^{m-1} - \dots - (a_0 + h b_0)$$

Por ejemplo, si las raíces de $Q(z, h)$ fueran reales y diferentes, β_1, \dots, β_m las soluciones serían de la forma

$$w_n = \sum_{k=1}^m c_k \beta_k^n \quad c_k \text{ dependen de } w_0, w_1, \dots, w_{m-1}$$

para que así se aproxime a e^{zt} ($t > 0$) debe cumplirse que todas las raíces verifiquen $|\beta_k| < 1$.

Región de estabilidad lineal absoluta. A-estabilidad

En problemas concretos, las raíces de $Q(\lambda)$ pueden ser complejas y/o no simples.
También se aplica esto a λ .

Definición

La región de estabilidad absoluta R de un método a un paso se define como

$$R = \{ h \in \mathbb{C} \mid |Q(h)| < 1 \}$$

un método multipaso se define como

$$R = \{ h \in \mathbb{C} \mid |\rho_h| < 1, \text{ para } \forall z \in Q(\bar{z}, h) \}$$

Como conclusión:

- h debe estar dentro de la región R
- Peligro para métodos adaptativos, que pueden aumentar h por criterio de convergencia y "salirse" de R
- Para problemas rígidos, es conveniente usar un método con R tan grande como sea posible

Definición

Un método es dire A-estable si R contiene todo el semiplano complejo itengendo

Teorema (Iserles p.60)

Ningún método explícito de Runge predice un A-estable

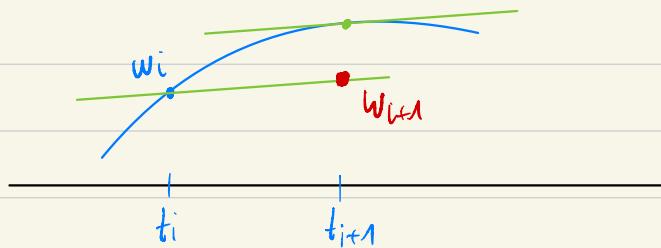
Teorema (Iserles p.67)

El mayor orden de un método multiplicado A-estable es 2

Vamos a dar otra oportunidad a los métodos implícitos.

Caso 1 Método de Euler implícito (Backwards Euler)

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_{i+1}, w_{i+1})$$



Estudio general de convergencia

- El método es estable porque cumple la condición de const.: $\lambda = 1$
- El método es consistente:

$$\mathcal{E}_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i)) =$$

$$= y'(t_i) + \frac{h}{2} y''(\xi) - y'(t_i) = \frac{h}{2} y''(\xi)$$

Si $\|y''\|$ está acotada en $[a, b] \rightarrow \max_i \|T_{i+1}(h)\| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$

- Por tanto, es convergente (Teorema general)

Región de estabilidad absoluta, R

$$w_{i+1} = \underbrace{a_0}_{1} w_i + h \left[\underbrace{b_1}_{1} f(t_{i+1}, w_{i+1}) + \underbrace{b_0}_{0} f(t_i, w_i) \right], \quad m=1$$

$$Q(z, h\lambda) = (1 - \lambda)z - 1$$

tiene una raíz real

$$\beta = \frac{1}{1 - h\lambda}$$

si $\operatorname{Re}(h\lambda) \leq 0$,

$$(h\lambda = a + bi)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{1-a-bi} \rightarrow |\beta| = \sqrt{\frac{1}{(1-a)^2+b^2}} \leq 1$$

→ es A-estable

Implementación de Euler implícito

Tenemos que resolver $w_{i+1} = w_i + h f(t_{i+1}, w_{i+1})$

Si escribimos $F(w) = w - w_i - h f(t_{i+1}, w)$

se trata de encontrar $w : F(w) = 0$

por el método de Newton:

$$w_{i+1}^{(0)} = w_i$$

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_{i+1}^{(k)} - \frac{F(w_{i+1}^{(k)})}{F'(w_{i+1}^{(k)})} = w_{i+1}^{(k)} - \frac{w_{i+1}^{(k)} - w_i - h \cdot f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)})}{1 - h \cdot f_y(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)})}$$

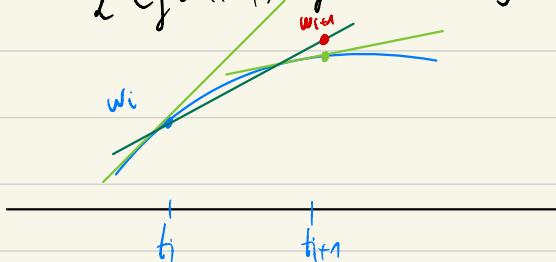
Se itera este algoritmo hasta que $\|w_{i+1}^{(k+1)} - w_i^{(k)}\| < \text{TOL}$

se devuelve error si no ocurre en un máximo de iteraciones

para el método de la secante: $w_i, w_{i+1}^{(0)}$ con un método explícito

Caso 2 Método del trapezio (implícito)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$



Estudio general de convergencia

- estable porque $\lambda=1$ es la unica raiz
- es consistente:

$$\begin{aligned} & \underline{y(t+h) - y(t)} - \frac{h}{2} [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))] = \\ & = \underline{hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi)} - \underline{\frac{h}{2} [y'(t) + y'(t+h) + hy''(t+h) + \frac{h^2}{2} y'''(u)]} = \\ & = h^3 \left[\frac{y'''(\xi)}{6} - \frac{y'''(u)}{6} \right] \end{aligned}$$

Si $\|y'''\|$ acotada en $[a, b]$, tenemos

$$\|T_{i+1}(h)\| \leq ch^3 \rightarrow \max_i \|T_{i+1}(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

por lo que es consistente y de orden 2

• Por tanto, es convergente.

Regla de estabilidad absoluta

$$w_{i+1} = a_0 w_i + h \left[\frac{1}{2} f(t_{i+1}, w_{i+1}) + \frac{1}{2} f(t_i, w_i) \right]$$

↓ ↓ ↓
 i b_i 2_i

$$\Omega(h\lambda) = \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)$$

para el caso real de $\beta_n = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}$

Al menos, si $\frac{h\lambda}{2} = a + bi$, así θ , entonces

$$\beta_n = \frac{1 + a + bi}{1 - a - bi} \rightarrow |\beta_n| = \frac{|1 + a + bi|}{|1 - a - bi|} = \sqrt{\frac{(1+a)^2 + b^2}{(1-a)^2 + b^2}} < 1$$

↓
 así 0

$$\begin{aligned} \Omega(1+a)^2 &= 1+a+2a < \\ &\leq 1+a+2a = (1-a)^2 \end{aligned}$$

por lo que el método es A-estable.

Implementación

Práctica 5

Implementar el m. del stepen per a p.v.i. junt amb el qe ce conoce $f_y(t,y)$

• Aplicar lo a $\begin{cases} y'(t) = 5e^{st}(y-t)^2 + 1 & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

de solucion $y(t) = t - e^{-st}$, con $s = 0.025$

• Comparar con RK4

• Quer tal a pert RKF \rightarrow RK4 adapt. pera tol: $10^{-2}, 10^{-4}$

$$y'(t) = 1 + 5e^{-st} \rightarrow y'(0) = 6$$

$$f(t, y) = 5e^{st}(y-t)^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 10e^{st}(y-t)$$

Para problemas rígidos estudiamos la región de estabilidad absoluta.

- Implícito → Euler hacia atrás

Trapezio

Métodos BDF (Backwards Differentiation Formulae)

Dado un método multipaso genérico:

$$w_{i+1} = a_0 w_{i-m+1} + a_1 w_{i-m+2} + \dots + a_{m-2} w_{i-1} + a_{m-1} w_i + \\ + h \cdot [b_0 f(t_{i-m}, w_{i-m}) + \dots + b_{m-1} f(t_i, w_i) + b_m f(t_{i+1}, w_{i+1})]$$

definimos los polinomios

$$\rho(t) = t^m - a_{m-1} t^{m-1} - \dots - a_1 t - a_0$$

$$\sigma(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

Definición: BDF

El método a m pasos se dice que es una **BDF** si

a) $\sigma(\beta) = \beta^m$, $\beta \neq 0$

b) el método es consistente y de orden m

(Isaacles)

Lema (Isaac p. 27)

Si el método es BDF entonces debe ser

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad P(z) = \beta \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} z^{m-j} (z-1)^j$$

BDF de orden 2

$$m=2 \rightarrow \beta = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{3} \quad //$$

$$P(z) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} z^{2-1} (z-1)^0 + \frac{1}{2} z^0 (z-1)^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \left(z^2 - z + \frac{1}{2} (z^2 - 2z + 1) \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} z^2 - 2z + \frac{1}{2} \right)$$

$$= z^2 - \frac{4}{3} z + \frac{1}{3} \quad //$$

Añ:

$$w_{i+1} - \frac{4}{3} w_i + \frac{1}{3} w_{i-1} = \frac{2}{3} h \cdot f(t_{i+1}, w_{i+1})$$

BDF de orden 3

$$n=3 \rightarrow \beta = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{6}{11} //$$

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{6}{11} \left[z^2(z-1) + \frac{1}{2}z(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 \right] = \\ &= \frac{6}{11} \left[\underbrace{z^3 - z^2}_{\frac{1}{2}z^2 - 2z} + \frac{1}{2} \underbrace{(z^2 - 2z + 1)}_{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} + \frac{1}{3} \underbrace{(z^3 - 3z^2 + 3z - 1)}_{z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}} \right] = \\ &= \frac{6}{11} \left[\frac{11}{6}z^2 - 3z^2 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

O sea:

$$w_{i+1} - \frac{18}{11}w_i + \frac{9}{11}w_{i-1} - \frac{2}{11}w_{i-2} = \frac{6}{11} h \cdot f(t_i, w_i)$$

Ejercicio: BDF superiores (4 ó 5)

BDF de orden 4

$$n=4 \rightarrow \beta = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{12+6+4+3}{12}\right)^{-1} = \left(\frac{27}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{27} //$$

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{12}{27} \left[z^3(z-1) + \frac{1}{2}z^2(z-1)^2 + \frac{1}{3}z(z-1)^3 + \frac{1}{4}(z-1)^4 \right] = \\ &= \frac{12}{27} \left[z^4 - z^3 + \frac{1}{2}z^2(z^2 - 2z + 1) + \frac{1}{3}z(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{12}{27} \left[\underbrace{z^4 - z^3}_{\frac{12}{2}z^3 - z^4} + \frac{7}{2}z^3 - z^3 + \frac{7}{2}z^2 + \frac{7}{3}z^4 - z^3 + z^2 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4} \left(\underbrace{z^4 - 4z^3}_{4z^3 - z^4} + \underbrace{6z^2}_{2z^2 - 6z^3} - \underbrace{4z + 1}_{4z^3 - 4z + 1} \right) \right] = \\ &= \frac{12}{27} \left[\frac{27}{12}z^4 - 4z^3 + 3z^2 - z - \frac{1}{12} \right] = z^4 - \frac{16}{9}z^3 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{4}{9}z - \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$$w_{i+1} - \frac{6}{9} w_i + \frac{4}{3} w_{i-1} - \frac{4}{9} w_{i-2} - \frac{1}{27} w_{i-3} = \frac{4}{9} h f(t_{i+1}, w_{i+1})$$

BDF 4. Ordnung

$$\beta = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{137}{60}\right)^{-1} = \frac{60}{137}$$

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{60}{137} \left(z^4(z-1) + \frac{1}{2} z^3(z-1)^2 + \frac{1}{3} z^2(z-1)^3 + \frac{1}{4} z(z-1)^4 + \frac{1}{5}(z-1)^5 \right) = \\ &= \frac{10}{137} \left[z^5 - z^4 + \frac{1}{2} z^3(z^2 - 2z + 1) + \frac{1}{3} z^2(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + \frac{1}{4} z(z^4 + 4z^3 + 1 - 4z^3 + 2z^2 - 4z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5}(z-1)(z^4 + 4z^3 + 1 - 4z^3 + 2z^2 - 4z) \right] = \\ &= \frac{60}{137} \left[\underbrace{z^5 - z^4}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{z^5}{2} - z^4}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{z^5}{3} - z^4}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{z^5}{4} - z^4}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{z^5}{5} + z^3}_{\frac{1}{5}} + \underbrace{z^4 - z^3}_{\frac{1}{2}} - z^3 + \frac{z^2}{2} - z^2 + \frac{z^2}{3} - z^2 + \frac{z^2}{4} - z^2 + \frac{z^2}{5} - z^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(z^5 + 4z^3 + z - 4z^4 + 2z^3 - 4z^2 - z^4 - 4z^2 - 1 + 4z^3 - 2z^2 + 4z \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} (z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{60}{137} \left[z^5 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - 5z^4 + 5z^3 - \frac{10}{3}z^2 + 2z - \frac{1}{5} \right] \\ &= z^5 - \frac{300}{137} z^4 + \frac{300}{137} z^3 - \frac{200}{137} z^2 + \frac{120}{137} z - \frac{12}{137} \end{aligned}$$

$$w_{i+1} - \frac{300}{137} w_i + \frac{300}{137} w_{i-1} - \frac{200}{137} w_{i-2} + \frac{120}{137} w_{i-3} - \frac{12}{137} w_{i-4} = \frac{60}{137} h f(t_{i+1}, w_{i+1})$$

Teorema (Iserles)

Un método BDF cumple la condición de穩定 (stability) si y
sólo si converge si, y solo si, $1 \leq m \leq 6$

Las regiones de estabilidad de los métodos BDF son
bastante grandes.

Más allá de la asignatura

Métodos de Runge-Kutta implícitos