Tarea 7: Orientabilidad

Jose Antonio Lorencio Abril

a) Como S_2 es orientable, existe un atlas de S_2 compatible, o sea, tal que si dos cartas se cortan, entonces el cambio de coordenadas tiene determinante de su jacobiano positivo.

Sea $\{U_p, X_p\}_{p\in S_2}$ dicho atlas. Vamos a ver que podemos tomar otro atlas de S_2 que es compatible y tal que φ es un difeomorfismo hacia el conjunto de llegada $X_p(U)$ con $U \subset U_p$ un entorno de p (al menos para los p tales que $\exists q \in S_1 | p = \varphi(q)$, los demás no tienen importancia para nuestro propósito).

Dado $q \in S_1 \implies \varphi(q) = p \in S_2$. Como φ es un difeomorfismo local, existen entornos V_q de q y $W_{\varphi(q)}$ de p tales que

$$\varphi_q : V_q \to W_{\varphi(q)}$$

es un difeomorfismo. Entonces, dado $q \in S_1$ si $\varphi(q)$ está cubierto por $\{U, X\}$, también está cubierto por $\left\{U', X_{|U'}\right\}$, donde $U' \subset U \cap X^{-1}\left(W_{\varphi(q)}\right)$. Por tanto, podemos tomar un nuevo atlas para S_2 dado por $\left\{U'_p, X'_p\right\}_{p\in S_2}$ de tal forma que si $p \notin \varphi(S_1)$ la carta que lo cubre es la del atlas inicial, y si $p \in \varphi(S_2)$, entonces tomamos la carta como acabamos de describir. Este atlas es, también, compatible en S_2, pues consiste en tomar el primero y restringir las parametrizaciones a abiertos contenidos en los iniciales.

Ahora, tomamos el atlas de S_1 dado por $\left\{U'_p, \varphi^{-1}\left(X'_p\right)\right\}_{p\in\varphi(S_1)}$, que es efectivamente un atlas porque:

- U_p es abierto, $\varphi^{-1}\left(X'_p\right)$ es diferenciable, porque X'_p lo es y φ^{-1} es un difeomorfismo en el dominio de definición (por la construcción del atlas en S_2)
- $\varphi^{-1}\left(X'_p\right)$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos en su dominio
- en U_p la diferencial $d\left(\varphi^{-1}\left(X'_p\right)\right)$ es inyectiva por ser composición de un difeomorfismo y de una aplicación con diferencial inyectiva
- Además, si $q \in S_1 \implies \varphi(q) \in S_2 \implies \left\{U'_{\varphi(q)}, X'_{\varphi(q)}\right\}$ cubre a $\varphi(q) \implies \left\{U'_{\varphi(q)}, \varphi^{-1}\left(X'_{\varphi(q)}\right)\right\}$ cubre a q.

Supongamos ahora que hay dos cartas que cubren a $q = \varphi^{-1}(p)$. O sea

$$\left\{U'_p, \varphi^{-1}\left(X'_p\right)\right\}, \left\{\overline{U'_p}, \overline{\varphi^{-1}\left(X'_p\right)}\right\}, \ p = \varphi(q)$$

Entonces, las cartas $\left\{U'_p, X'_p\right\}$ y $\left\{\overline{U'_p}, \overline{X'_p}\right\}$ cubren p, por lo que el cambio de coordenadas $h : U_p \to \overline{U_p}$ es tal que $det(Jh) > 0$, pero este cambio de coordenadas nos sirve también para las cartas iniciales en S_1.

De este modo, vemos como el atlas de S_1 descrito es compatible y, por tanto, S_1 es orientable.

b) [$\Longleftarrow$] Como φ es difeomorfismo, entonces es difeomorfismo local. Y como S_2 es orientable, por el apartado anterior, tenemos que S_1 es orientable.

[$\Longrightarrow$] Ahora, como φ es difeomorfismo, entonces φ^{-1} es difeomorfismo, y también es difeomorfismo local. De nuevo, como S_1 es orientable, usando el apartado anterior, tenemos que S_2 es orientable.

c) Sea $\{U_p, X_p\}$ un atlas compatible de S_1, que existe porque es orientable. Entonces $\{U_p, \varphi(X_p)\}$ es un atlas compatible de S_2 por ser φ un difeomorfismo (esto se hace como en a), pero más sencillo porque ahora el difeomorfismo es global y no hace falta andar tomando entornos).

Sea $\varphi(p) \in S_2$ y $N(\varphi(p))$ el valor de la orientación de S_2 en $\varphi(p)$. Llamamos ahora $M = \varphi(X_p)_u \wedge \varphi(X_p)_v$, y tenemos dos posibilidades:

- $\frac{M}{|M|} = -N(\varphi(p))$, entonces tomamos la orientación inducida $\frac{M}{|M|}$.
- $\frac{M}{|M|} = N(\varphi(p))$, en este caso tomamos el atlas de S_1 dado por $\left\{U_p, X_p'\right\}$, donde

$$X_p'(u,v) = X_p(v,u)$$

por lo que

$$\left(X_p'\right)_u = (X_p)_v, \qquad \left(X_p'\right)_v = (X_p)_u$$

y

$$\left(\varphi \circ X_p'\right)_u = d\varphi\left(X_p'\right)\left(X_p'\right)_u = d\varphi(X_p)(X_p)_v = (\varphi \circ X_p)_v$$
$$\left(\varphi \circ X_p'\right)_v = (\varphi \circ X_p)_u$$

Por tanto

$$\frac{\left(\varphi \circ X_p'\right)_u \wedge \left(\varphi \circ X_p'\right)_v}{\left|\left(\varphi \circ X_p'\right)_u \wedge \left(\varphi \circ X_p'\right)_v\right|} = \frac{(\varphi \circ X_p)_v \wedge (\varphi \circ X_p)_u}{\left|(\varphi \circ X_p)_v \wedge (\varphi \circ X_p)_u\right|} = \frac{-M}{|M|} = -N(\varphi(p))$$

De forma que la orientación inducida buscada es $\frac{-M}{|M|}$.