Hoja 6: La ecuación de ondas en 2D

1. Considera el siguiente problema de la membrana vibrante radial

$$u_{tt} = c^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = 0, \quad u_t(0,r) = g(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

a) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0(rs_n)\, \sin(c\,ts_n)$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \dots$ son las raíces positivas de J_0.

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes a_n en función de $g(r)$.

c) Si $g(r) \equiv 1$, demuestra que $a_n = 2/[cs_n^2 J_1(s_n)]$.

d) Trata de dibujar con Maxima la solución (tomando $c = 1$ y digamos 5 términos en la suma).

Sugerencia: En c) puedes usar la fórmula de Sonine que enuncié en clase

$$\int_0^1 (1-r^2)^\mu J_\nu(\lambda r) r^{\nu+1}\, dr = 2^\mu \Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(\lambda)/\lambda^{\mu+1}, \quad \forall\, \nu, \mu > -1, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

2. *Vibración al golpear un tambor:* Suponer que en el ejercicio anterior tomamos

$$g(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \quad \text{si } r \in (0,\varepsilon), \quad \text{y} \quad g(r) = 0 \quad \text{si } r \in [\varepsilon, 1).$$

a) Calcula los coeficientes a_n en este caso.

b) Demuestra que cuando $\varepsilon \to 0^+$, la solución se puede escribir como

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_n)\, \sin(c\,ts_n)}{\pi\, c\, s_n\, J_1(s_n)^2}$$

Sugerencia: En b) usa el primer término de la serie de potencias $J_n(r) = (r/2)^n/(n!) + O(r^{n+2})$, si $r \to 0^+$.

3. *Propagación del calor en el disco $\mathbb{D}$:* Si la temperatura inicial $f(r)$ sólo depende de r, y los extremos del disco están aislados, entonces $u(t,r)$ = temperatura en tiempo t a distancia r, debe cumplir la EDP

$$u_t = \kappa^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u_r|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = f(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

(i) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-t\kappa^2\beta_n^2}\, J_0(r\beta_n)$$

donde $0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$ son las raíces no-negativas de $J_0'(z) = 0$.

(ii) Demuestra que $a_n = \dfrac{2}{J_0(\beta_n)^2} \displaystyle\int_0^1 f(r) J_0(\beta_n r)\, r dr$.

(iii) Demuestra que a_0 es el promedio de f en $\mathbb{D}$.

(iv) Si $f(r) = 1 - r^2$, encuentra una expresión exacta para a_n, y esboza la gráfica de $u(t,r)$ con Maxima.

Sugerencia: Puedes usar $J_0'(z) = -J_1(z)$, así como la fórmula $\int_0^1 [J_0(\beta r)]^2 r dr = J_0(\beta)^2/2$ si $J_0'(\beta) = 0$; ver los lemas de clase.

1. Considera el siguiente problema de la membrana vibrante radial

$$u_{tt} = c^2\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = 0, \quad u_t(0,r) = g(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

a) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0(rs_n)\, \sin(cts_n)$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \dots$ son las raíces positivas de J_0.

$u(t,r,\theta) = u(t,r) = T(t)R(r)$

$T''(t)R(r) = c^2\left[T(t)\cdot R''(r) + \frac{1}{r}T(t)R'(r)\right]$

$\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)}\frac{1}{c^2} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = cte = \rho$

$\Rightarrow T''(t) = c^2\rho\, T(t)\,,\quad T(0) = 0$

$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) = \rho R(r)\,,\quad R(1) = 0\,,\quad \exists R(0^+)$

$\boxed{T''(t) = c^2\rho\, T(t)}$

$\rho > 0 \to T'' = a^2 T \to T = e^{at} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ #

$\rho = 0 \to T = at + b \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ #

$\rho = -\lambda^2 < 0 \to T'' = -c^2\lambda^2 T(t) \to T = a\cos(c\lambda t) + b\,\text{sen}(c\lambda t)$

$\to T(0) = a = 0 \to T = b\,\text{sen}(c\lambda t)$

ec. Bessel

$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0$

$$\begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = -\lambda^2 R(r), & r \in (0,1) \\ \text{(CC)} \quad R(1) = 0 \text{ y } \exists\, R(0^+) \end{cases}$$

y tenemos una ecuación de Bessel con $n=0$

$\to R(r) = A J_0(\lambda r) + B\,\cancel{Y_0(\lambda r)}$ $\overset{0}{}$ $\exists R(0^+)$

0 sea $R(r) = A \cdot J_0(\lambda r)$

y $R(1) = 0 \to A \cdot J_0(\lambda) = 0 \leftrightarrow J_0(\lambda) = 0$

$\to \lambda \in \{s_{0,1} < s_{0,2} < \dots\} = Z(J_0)$

y entonces $R_m(r) = A \cdot J_0(s_{0,m} \cdot r)$

Por tanto,

$$u(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}(s_{0,m} \cdot c \cdot t) \cdot J_0(s_{0,m} \cdot r)$$

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes a_n en función de $g(r)$.

$$u_t = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot s_{0,m} \cdot c \cdot \cos(s_{0,m} \cdot c \cdot t) J_0(s_{0,m} \cdot r)$$

$$u_t(0,r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m s_m c \, J_0(s_m r) = g(r)$$

$$\to b_m s_m c = \langle g(r), J_0(s_m r) \rangle = \frac{\int_0^1 g(r) J_0(s_m r) r \, dr}{J_1^2(s_m)/2}$$

$$\to b_m = \frac{\int_0^1 g(r) J_0(s_m r) r \, dr}{s_m \cdot c \cdot J_1^2(s_m)/2}$$

$m = 1, 2, \dots$

c) Si $g(r) \equiv 1$, demuestra que $a_n = 2/[cs_n^2 J_1(s_n)]$.

$$b_m = \frac{\int_0^1 g(r)\, J_0(s_m r)\, r\, dr}{s_m \cdot c \cdot J_1^2(s_m)/2} = \frac{2}{c \cdot s_m \cdot J_1^2(s_m)} \cdot \int_0^1 J_0(s_m r)\, r\, dr$$

$$= \frac{2}{c \cdot s_m \cdot J_1^{\cancel{2}}(s_m)} \cdot \frac{\Gamma(1)}{s_m} \cdot \cancel{J_1(s_m)} = \frac{2}{c \cdot s_m^2 \cdot J_1(s_m)}$$

sobre

$\mu = 0,\ \nu = 0$

2. *Vibración al golpear un tambor:* Suponer que en el ejercicio anterior tomamos

$$g(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \quad \text{si } r \in (0, \varepsilon), \quad \text{y} \quad g(r) = 0 \quad \text{si } r \in [\varepsilon, 1).$$

a) Calcula los coeficientes a_n en este caso.

$$b_m = \frac{\int_0^1 g(r)\, J_0(s_m r)\, r\, dr}{s_m \cdot c \cdot J_1^2(s_m)/2} = \frac{\frac{2}{\pi\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon J_0(s_m r)\, r\, dr}{s_m \cdot c \cdot J_1^2(s_m)}$$

Bowman, $\mu = 0$, $\nu = 0$

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon J_0(s_m r)\, r\, dr = \frac{1}{\pi}\int_0^1 J_0(s_m \varepsilon s)\, s\, ds =$$

$r = \varepsilon s$

$dr = \varepsilon ds$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1)}{s_m \varepsilon} \cdot J_1(s_m \cdot \varepsilon)$$

$$b_m = \frac{2 \cdot J_1(s_m \cdot \varepsilon)}{c\pi\, s_m^2 \cdot \varepsilon \cdot J_1^2(s_m)}$$

b) Demuestra que cuando $\varepsilon \to 0^+$, la solución se puede escribir como

$$u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r s_n)\, \sin(c\, t s_n)}{\pi\, c\, s_n\, J_1(s_n)^2}$$

$$J_1(z) = \frac{z}{2} + O(z^3) \Rightarrow \frac{J_1(\varepsilon \cdot s_m)}{\varepsilon \cdot s_m} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon^3)$$

$$b_m = \frac{1}{c\pi s_m \cdot J_1^2(s_m)}$$

$$\Rightarrow u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(c t s_m) \cdot J_0(r s_m)}{\pi \cdot c \cdot s_m \cdot J_1(s_m)^2}$$

3. *Propagación del calor en el disco $\mathbb{D}$:* Si la temperatura inicial $f(r)$ sólo depende de r, y los extremos del disco están aislados, entonces $u(t,r)$ = temperatura en tiempo t a distancia r, debe cumplir la EDP

$$u_t = \kappa^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u_r|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = f(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

(i) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-t\kappa^2\beta_n^2}\, J_0(r\beta_n)$$

donde $0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots$ son las raíces no-negativas de $J_0'(z) = 0$.

$u(t,r) = T(t)R(r) \to T'(t)R(r) = \kappa^2\left[T(t)R''(r) + \frac{1}{r}T(t)R'(r)\right]$

$\to \dfrac{T'(t)}{\kappa^2 T(t)} = \dfrac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = cte = \rho$

$T'(t) = \kappa^2\rho T(t)$ $\quad\quad R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \rho R(r) = 0, \quad R'(1) = 0$

$\boxed{\rho = \lambda^2 > 0} \to T' = \kappa^2\lambda^2 T(t) \to T(t) = e^{\kappa^2\lambda^2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ #

$\boxed{\rho = 0}$ $T'(t) = 0 \to T(t) = a_0$

$\boxed{\rho = -\lambda^2 < 0} \to T' = -\kappa^2\lambda^2 T(t) \to T(t) = a\cdot e^{-\kappa^2\lambda^2 t}$

$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \to$ Bessel, $n=0$,

$R(r) = A J_0(\lambda r)$

$R'(r) = A\cdot\lambda\cdot J_0'(\lambda r)$, $R'(1) = A\lambda J_0'(\lambda) = 0 \to J_0'(\lambda) = 0$

$\to \lambda \in \{0 = \beta_0 < \beta_1 < \ldots\} = Z(J_0') \to R_n = A_n J_0(\beta_n r)$

y entonces

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\kappa^2\beta_n^2 t} J_0(\beta_n r)$$

(ii) Demuestra que $a_n = \dfrac{2}{J_0(\beta_n)^2}\displaystyle\int_0^1 f(r) J_0(\beta_n r)\, r dr$.

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-k^2\beta_n^2 t} J_0(\beta_n r)$$

$$f(r) = u(0,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0(\beta_n r)$$

Por ser las $J_0(\beta_n r)$ autofunciones, son BOG resp $L_r^2(0,1)$

$$\int_0^1 J_0(\beta_n r) J_0(\beta_m r)\, r\, dr = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \int_0^1 J_0(\beta_n r)^2\, r\, dr & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^1 J_0(\beta_n r)^2 r\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lema 2}}}{=} \frac{1}{2} J_0(\beta_n)^2 + \frac{1}{2} \underbrace{J_0'(\beta_n)^2}_{0}$$

Así, $\left\{ \dfrac{2 J_0(\beta_n r)}{J_0(\beta_n)^2} \right\}_{n=0}^{\infty}$ es BON y es

ϕ_n''

$$a_n = \langle f, \phi_n \rangle_r = \frac{2}{J_0(\beta_n)^2} \int_0^1 f(r) J_0(\beta_n r) r dr$$

(iii) Demuestra que a_0 es el promedio de f en $\mathbb{D}$.

$$J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen} t} e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_0 = \frac{2}{J_0(\beta_0)^2} \int_0^1 f(r) J_0(\beta_0 r) r\, dr$$

Promedio de f en $\mathbb{D}$:

$$⨍_{\mathbb{D}} f(r)\, d\theta\, dr = \frac{1}{\pi \underset{\substack{\shortparallel \\ 1^2}}{R^2}} \int_{\mathbb{D}} f(r)\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 f(r)\, dr = 2 \int_0^1 f(r)\, dr$$

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(r)\, r\, dr$$

$(\beta_0 = 0)$

(iv) Si $f(r) = 1 - r^2$, encuentra una expresión exacta para a_n, y esboza la gráfica de $u(t,r)$ con Maxima.

$$a_n = \frac{2}{J_0(\beta_n)^2} \int_0^1 f(r)\, J_0(\beta_n r)\, r\, dr = \frac{2}{J_0(\beta_n)^2} \int_0^1 (1-r^2)\, J_0(\beta_n r)\, r\, dr$$

$$\overset{4}{=} \frac{2}{J_0(\beta_n)^2} \cdot \frac{2 \cdot \Gamma(2)}{\beta_n^2} \cdot J_2(\beta_n) = \frac{4\, J_2(\beta_n)}{\beta_n^2\, J_0(\beta_n)^2}$$

combine

$\mu = 1,\ \nu = 0,\ \lambda = \beta_n$

4. *Laplaciano en un cilindro de* $\mathbb{R}^3$. Considera un cilindro vertical de radio 1 y altura L

$$C = \{r \in (0,1),\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in (0, L)\}.$$

a) Utilizando separación de variables, encuentra la solución radial general $u(r, z)$ de la ecuación

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \qquad \text{en } C,$$

suponiendo que u se anula en la tapa inferior y en la cara lateral, y que viene dada por una función radial fija $f(r)$ en la tapa superior.

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes en términos de f

c) Si $f(r) = J_0(s_3 r)$, donde $s_3 = 8'653...$ es el tercer cero positivo de J_0, esboza $f(r)$ y encuentra una fórmula explícita para $u(r, z)$

d) Encuentra la solución general $u(r, \theta, z)$ de $\Delta u = 0$ en C cuando el dato en la tapa superior es una función $f(r, \theta)$, no necesariamente radial.

Opcionales

5. *Ampliación del Ejercicio 4.* Encuentra la solución general $u(r, \theta, z)$ de $\Delta u = 0$ en C cuando $u = 0$ en las tapas superior e inferior, y en la cara lateral se tiene la condición de contorno $u(1, \theta, z) = h(\theta, z)$.

Sugerencia: Al utilizar separación de variables, tendrás que resolver la EDO

$$r^2 u''(r) + r u'(r) - (r^2 + n^2) u(r) = 0,$$

cuya solución general es $u(r) = A\, I_n(r) + B\, K_n(r)$, donde I_n y K_n se denominan *funciones de Bessel modificadas*. Sólo necesitarás usar que la función $I_n(r) := J_n(ir)/i^n > 0$ para todo $r > 0$, y que $K_n(0^+) = \infty$.

6. *Ampliación del Ejercicio 3.* Resuelve el ejercicio 3 sobre propagación radial del calor en $\mathbb{D}$, cuando la frontera del disco no está completamente aislada, pero se cumple

$$\partial_r u \,+\, \gamma\, u \,=\, 0, \quad \text{en } \partial\mathbb{D}.$$

Sugerencia: puedes utilizar la fórmula $2\int_0^1 J_n(\lambda r)^2\, r\, dr = (1 - (n/\lambda)^2) J_n(\lambda)^2 + [J_n'(\lambda)]^2$ para normalizar la base de autofunciones correspondiente.