

Bloque 2. Completitud y Teorema de Hopf-Rinow

Luis J. Alías

4. Distancia intrínseca en una superficie

Definición 4.1 Sea S una superficie regular. Un segmento de curva diferenciable a trozos en S es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ para la cual existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ tal que, para cada $i = 1, \dots, k$, $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un segmento de curva diferenciable.

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es un segmento de curva diferenciable a trozos con partición asociada $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, para cada $i = 1, \dots, k - 1$ denotamos por

$$\alpha'_-(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'_i(t_i)$$

y

$$\alpha'_+(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'_{i+1}(t_i),$$

donde $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Diremos que $\alpha(t_i)$ es un vértice de la curva cuando $\alpha'_-(t_i) \neq \alpha'_+(t_i)$. Además, se define la longitud de α como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'_i(t)\| dt.$$

Sea S una superficie regular y conexa. Dados dos puntos $p, q \in S$, denotamos por $\Omega(p, q)$ al conjunto de segmentos de curvas diferenciables a trozos $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uniendo p con q , es decir, con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

Definición 4.2 La función distancia intrínseca en la superficie S es la aplicación $d : S \times S \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d(p, q) = \inf_{\alpha \in \Omega(p, q)} L(\alpha).$$

La función d está bien definida, ya que para todos $p, q \in S$ se tiene:

- 1) El conjunto $\Omega(p, q) \neq \emptyset$.

① $\Omega(p, q)$ es no vacío

Fijo $p \in S$, sea $A = \{g \in S : \exists \gamma \in \Omega(p, q) \}$

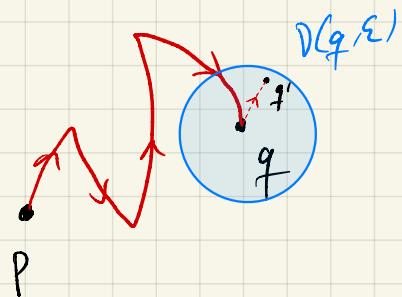
Objetivo: $A = S$

i) $A \neq \emptyset$: $p \in A$, porque $q(t) = p$ dt $\gamma \in \Omega(p, q)$

ii) A abto: sea $g \in A$. Tomo $D(g, \varepsilon)$, disco geodésico + entorno normal de g

$\rightarrow \exp_g: D(\overline{O_g}, \varepsilon) \xrightarrow{\text{liso}} D(g, \varepsilon)$
abto en S_g

Afirmamos que $g \in D(g, \varepsilon) \cap A \rightarrow A$ abto



$g \in A \rightarrow \exists \gamma: [a, b] \rightarrow S \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = p \\ \gamma(b) = g \end{array} \right.$

$\forall g' \in D(g, \varepsilon), \exists \gamma_{g'}: [0, 1] \rightarrow D(g, \varepsilon)$ geodésica radial

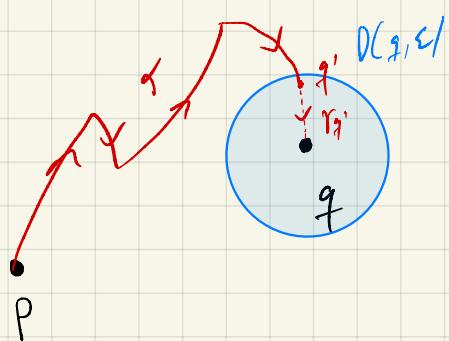
$$\gamma_{g'}(0) = g, \gamma_{g'}(1) = g'$$

Tomando $g \wedge \gamma_{g'}$, tenemos \rightarrow cuando uniendo p con $g' \rightarrow g' \in A$

iii) A cerrado: $\leftrightarrow A^c$ abierto

Sea $g \in A$ y $D(g, \varepsilon)$ disco geodésico y entorno normal

$\rightarrow D(g, \varepsilon) \cap A^c$



Si $\exists g' \in D(g, \varepsilon) \cap A^c \rightarrow \alpha \bar{r}_{g'} \in S(g, \varepsilon) \rightarrow g \in A \not\models$

$\Rightarrow D(g, \varepsilon) \cap A^c \rightarrow A^c$ abierto //

① \exists infino.

Claro, no es vacío y es acotado inferiormente por el 0.

③ d es distancia

① $d(p, q) \geq 0$ y " $=$ " si $p = q$. Si $p = q \rightarrow \exists r \in S(q, p)$ con $L(q) = 0$, $q(t) = p$ de

$\underbrace{\{L(q): \forall r \in S(p, q)\}}_{\stackrel{0}{\longrightarrow}} \Rightarrow d(p, p) = 0$

• Si $d(p, q) = 0 \rightarrow p = q?$ $0 \leq \|p - q\| \leq d(p, q) = 0$

Lema: $\|p - q\| \leq d(p, q) \quad \forall p, q \in S$ //

$$\|p - q\| = \|\vec{pq}\| = d_{\mathbb{R}^3}(p, q)$$

• Si $p = q$, $0 \leq d(p, q) //$
 • Si $p \neq q$, sea $\vec{v} = \frac{\vec{pq}}{\|\vec{pq}\|}$ $\rightarrow \langle q'(t), \vec{v} \rangle \leq |\langle q'(t), \vec{v} \rangle| \leq \|q'(t)\| \|\vec{v}\| = \|q'(t)\|$

$$\int_a^b \langle q'(t), \vec{v} \rangle dt \leq \int_a^b \|q'(t)\| dt = L(q)$$

$$L(q) \geq \int_a^b \langle q'(t), \vec{v} \rangle dt = \langle q(t), \vec{v} \rangle \Big|_a^b = \langle q, \vec{v} \rangle - \langle p, \vec{v} \rangle = \langle q-p, \vec{v} \rangle = \langle \vec{p}_g, \frac{\vec{p}_g}{\|\vec{p}_g\|} \rangle = \|q-p\|$$

Y esto es porque $\Omega_{R^3}(p, q)$
aristas unidas p con q
en R^3

□

(ii) $d(p, g) = d(p, s)?$

$$\begin{aligned} d(p, g) &= \inf_L L(q), \quad q \in \Omega(p, g) \\ d(p, s) &= \inf_L L(\beta), \quad \beta \in \Omega(s, p) \end{aligned}$$

porque basta $q \in \Omega(p, s)$, $\beta = q \in \Omega(s, p)$
y al revés.

(iii) $d(p, g) \leq d(p, o) + d(o, g)?$

$$\begin{aligned} \text{Si } q \in \Omega(p, o) \quad \left[\begin{array}{l} q \in \Omega(p, \beta) \\ \beta \in \Omega(\beta, o) \end{array} \right] \rightarrow q \wedge \beta \in \Omega(p, g) \longrightarrow d(p, g) &= \inf_L (L(q) : q \in \Omega(p, g)) \leq \\ &\leq \inf_L (L(q \wedge \beta) = L(q) + L(\beta) : \begin{array}{l} q \in \Omega(p, o) \\ \beta \in \Omega(o, g) \end{array}) \\ &= \inf_L (L(q) : q \in \Omega(p, o)) + \inf_L (L(\beta) : \beta \in \Omega(o, g)) \\ &= d(p, o) + d(o, g) // \end{aligned}$$

2) Existe el ínfimo del conjunto $\{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\}$.

Observación importante: Para todos $p, q \in S$ se tiene $\|p - q\| \leq d(p, q)$. Obsérvese aquí que la cantidad $\|p - q\|$ es precisamente la distancia extrínseca (es decir, en \mathbb{R}^3) entre p y q .

Además, la función d es una distancia en S , ya que:

- i) $d(p, q) \geq 0$ y $d(p, q) = 0$ si y solo si $p = q$;
- ii) $d(p, q) = d(q, p)$ para todos $p, q \in S$; y
- iii) $d(p, q) \leq d(p, o) + d(o, q)$ para todos $p, q, o \in S$.

Lema 4.3 Sea $p \in S$ un punto de una superficie regular S y $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(\mathbf{0}_p, r) \subset \mathcal{D}_p$.

- i) $D(p, r) \subset B_d(p, r)$.
- ii) Además, si r es suficientemente pequeño para que $D(p, r)$ sea un entorno normal de p , entonces $D(p, r) = B_d(p, r)$.

En particular, para todo $p \in S$, existe $R > 0$ tal que para todo $0 < r \leq R$ el disco geodésico $D(p, r)$ es un entorno normal de p y $D(p, r) = B_d(p, r)$.

Corolario 4.4 La topología de la superficie S coincide con la topología métrica inducida por la distancia intrínseca.

Como consecuencia de la desigualdad $\|p - q\| \leq d(p, q)$ se tiene que para todo $p \in S$ y para todo $r > 0$

$$B_d(p, r) \subset B_{\|\cdot\|}(p, r) \cap S$$

4.1. Ejercicios

- 4.1. Sea S una superficie regular con distancia intrínseca d . Demuestra que para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$ se tiene $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) \leq \|\mathbf{v}\|$. ¿Bajo qué hipótesis se puede garantizar que $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) = \|\mathbf{v}\|$?
 - 4.2. Considera la esfera de radio $\mathbb{S}^2(r)$ con distancia intrínseca d . Demuestra que para todos $p, q \in \mathbb{S}^2(r)$ se tiene
- $$d(p, q) = r \arccos \left(\frac{\langle p, q \rangle}{r^2} \right)$$
- 4.3. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ un difeomorfismo local entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva $C > 0$ tal que $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \leq C\|\mathbf{v}\|$ para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in T_p S$. Demuestra que para todos $p, q \in S$ se tiene $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq C d(p, q)$, donde d y \widehat{d} denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en S y en \widehat{S} .

Lema 4.3

① $\forall q \in D(p, r) = \exp_p(\mathcal{P}(\vec{o}_p, r))$, $\exists \vec{v}_q \in \underbrace{\mathcal{P}(\vec{o}_p, r)}_{\|\vec{v}\|_q < r} / q = \exp_p(\vec{v}_q)$

$$\|\vec{v}\|_q < r$$

Podemos considerar $r_g : [0, 1] \rightarrow D(p, r)$
 $t \mapsto \exp_p(t\vec{v}_q) \quad t \in [0, 1]$
 $(t \in (-g, 1+g))$

$$\rightarrow r_g \in \mathcal{L}(p, q) \rightarrow d(p, q) \leq L(r_g) = \int_0^1 \|r_g'(t)\| dt = \|\vec{v}_q\| < r$$

$$\rightarrow d(p, q) < r \rightarrow q \in B_d(p, r) \quad \checkmark$$

ii)

$\exists U$ estrella do respecto a $\vec{o}_p / \exp_{\vec{o}_p}|_U : U \rightarrow V$ difeo

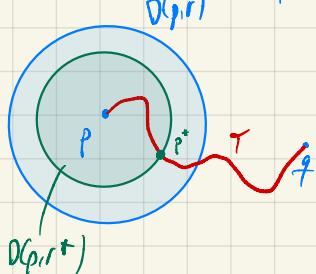
$\exists r > 0 / D(\vec{o}_p, r) \subset U \Rightarrow \exp_{\vec{o}_p}|_{D(\vec{o}_p, r)} : D(\vec{o}_p, r) \rightarrow D(p, r)$ difeo

$B_d(p, r) \subset D(p, r)$

Hipótesis que NO $\rightarrow \exists q \in B_d(p, r) / q \notin D(p, r)$
 $(d(p, q) < r) \otimes$

Sia $\alpha \in \mathcal{L}(p, q) / \alpha : [a, b] \rightarrow S \begin{cases} \alpha(a) = p \\ \alpha(b) = q \notin D(p, r) = \exp_p(D(\vec{o}_p, r)) \end{cases}$

Tomamos $r^* < r$



le tal forma se

$$S(p, r^*) = \mathcal{F}D(p, r^*) \subset D(p, r)$$

$$\exp_p(S(\bar{o}_p(r^*)))$$

Ahí, $\exists t^* = \inf \{t \in [a, b] : q(t) \in S(p, r^*)\}$

Sea $p^* = q(t^*) \in S(p, r^*) \subset D(p, r)$

$$\exp_p(S(\bar{o}_p(r^*)))$$

$\exists v^* \in S(\bar{o}_p(r^*)) / p^* = \exp_p(v^*)$, $\|v^*\| = r^* < r$

Entonces

$$L(q) = \int_a^b \|q'\| \geq \int_a^{t^*} \|q'\| = L(q|_{[a, t^*]}) \stackrel{\text{D}(q, r)}{\geq} L(\gamma_{p^*}) = \|v^*\| = r^*$$

Ahí, $\forall q \in \Sigma(p, q)$, $L(q) \geq r^* \rightarrow d(p, q) \geq r^*$, $\forall r^* < r$

$$\downarrow r^* \rightarrow r$$

$$d(p, q) \geq r \# \text{ con } \oplus$$

\exists debe ser $B_d(p, r) \subset D(p, r)$

Cordario 4.4.

$$T_S = T_d$$

$T_d \subset T_S$ Sea $A \in T_d$, $\forall p \in A, \exists \varepsilon > 0 / B_d(p, \varepsilon) \subset A$

En términos $\varepsilon \leq r_p$ (el radio del ball) tenemos $B_d(p, \varepsilon) = \underbrace{B_{\mathbb{R}^3}(p, \varepsilon)}_{\text{abre en } T_S} \subset A \rightarrow A \in T_S$

$T_S \subset T_d$ Sea $A \in T_S$, $\forall p \in A, \exists \varepsilon > 0 / B_{d_{\mathbb{R}^3}}(p, \varepsilon) \cap S \subset A$

\leftarrow porque $d_{\mathbb{R}^3}(p, z) \leq d(p, z)$

$B_d(p, \varepsilon) \cap T_d$

$\rightarrow A \in T_d$

4.1. Sea S una superficie regular con distancia intrínseca d . Demuestra que para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{D}_p$ se tiene $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) \leq \|\mathbf{v}\|$. ¿Bajo qué hipótesis se puede garantizar que $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) = \|\mathbf{v}\|$?

$$\gamma_{\vec{v}} : [0, 1] \rightarrow S$$

$$t \mapsto \exp_p(t\vec{v})$$

verifica

$$\begin{array}{l} \gamma_{\vec{v}}(0) = p \\ \gamma_{\vec{v}}(1) = q \end{array} \quad \gamma_{\vec{v}} \in \mathcal{S}(p, q)$$

$$\rightarrow d(p, q) \leq L(\gamma_{\vec{v}}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_{\vec{v}}(t)\| dt = \|\vec{v}\|$$

Si $\vec{v} \in D(0, \varepsilon)$ tal que $\exp_p|_{D(0, \varepsilon)} : D(0, \varepsilon) \rightarrow D(p, \varepsilon)$ difeo en $D(p, \varepsilon)$ entorno normal

Entonces $q = \exp_p(\vec{v}) \in D(p, \varepsilon) \Rightarrow t q \in \mathcal{S}(p, q)$, $L(q) \geq L(\gamma_q) = \|\vec{v}\|$

(Prop. mínimo
de los geodésicos)

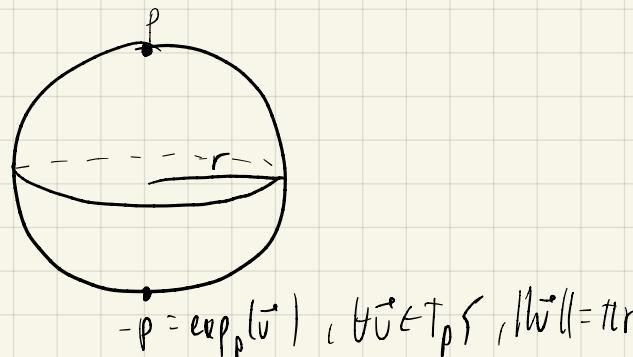
↓ hacia infinito

$$d(p, q) = \|\vec{v}\|$$

4.2. Considera la esfera de radio $\mathbb{S}^2(r)$ con distancia intrínseca d . Demuestra que para todos $p, q \in \mathbb{S}^2(r)$ se tiene

$$d(p, q) = r \arccos \left(\frac{\langle p, q \rangle}{r^2} \right)$$

$$p \in \mathbb{S}^2(r) = S \quad \exp_p : T_p S \rightarrow \mathbb{S}^2(r)$$



Sabemos que $\exp_p|_{D(\vec{o}_p, \pi r)} : D(\vec{o}_p, \pi r) \rightarrow \underline{D(p, \pi r)} = \mathbb{S}^2 \setminus \{-p\}$
ámbito normal

$\forall g \in \mathbb{S}^2(r) \setminus \{-p\}$, $d(p, g) = \|\vec{v}_g\|$, donde

$$\vec{v}_g = (\exp_p|_{D(\vec{o}_p, \pi r)})^{-1}(g)$$

$$d(p, g) = \|\vec{v}_g\| = r \arccos \left(\frac{\langle p, g \rangle}{r^2} \right) \quad \forall (p, g) \neq (p, -p)$$

ejercicio
del cap 2

$$\text{y } d(p, -p) = \pi r$$

$$\lim_{g \rightarrow -p} d(p, g) = \lim_{g \rightarrow -p} \arccos(-1) = \pi r$$

(4.3) + (4.4) By WIS

(4.3) $\phi: S \rightarrow \hat{S}$ difeo local

$$\exists C > 0 \text{ / } \|d\phi_p(\vec{v})\| \leq C \|\vec{v}\|$$



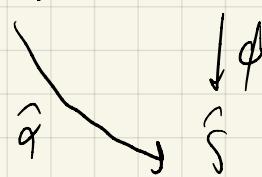
$$\forall p, q \in S, d(\phi(p), \phi(q)) \leq C d(p, q)$$

ϕ isometria local (4.4)



$$(\|d\phi_p(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|, \forall \vec{v} \in T_p S)$$

Tomemos $p, q \in S$, $\exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $g: [a, b] \rightarrow S$



$$\hat{g} = \phi \circ g \in \mathcal{L}(\phi(p), \phi(q))$$

$$\hat{g}'(t) = \frac{d}{dt}(\phi(g(t))) = d\phi_{g(t)}(g'(t))$$

$$\rightarrow \|\hat{g}'(t)\| = \|d\phi_{g(t)}(g'(t))\| \leq C \|g'(t)\|$$

$$\rightarrow \int_a^b \|\hat{g}'(t)\| dt \leq C \int_a^b \|g'(t)\| dt \xrightarrow{\text{tomando integral}} d(\phi(p), \phi(q)) \leq C d(p, q)$$



(4.4) $\phi: S \rightarrow \hat{S}$ isometria local

$$\langle d\phi_p(\vec{v}), d\phi_p(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_p S$$

$$\|d\phi_p(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \rightarrow \ker(d\phi_p) = \{0\} \quad \forall p \in S \rightarrow d\phi_p: T_p S \rightarrow T_{\phi(p)} \hat{S} \text{ isomorfismo linear}$$

$$\text{Sabemos que } d(\phi(p), \phi(q)) \leq d(p, q) \quad \forall p, q \in S$$

$\exists \phi: S \rightarrow \hat{S}$ isometria $\Rightarrow \exists \phi^{-1}: \hat{S} \rightarrow S$ isometria
bijectiva

$$d(d(p), d(q)) \leq d(p, q) \quad \forall p, q \in S$$

↓

$$d(p, q) \leq d(\psi(p), \psi(q)) \quad \forall p, q \in S$$

$$\forall p \in S, \exists p \in S / \phi(p) = p \rightarrow p = \phi^{-1}(p) = \psi(p)$$

$$\hookrightarrow \psi \text{ is isometric, since } \forall p, q \in S, d(\psi(p), \psi(q)) \leq d(p, q)$$

(4.3)

$$d(p, q) = d(\phi(p), \phi(q)) \quad \forall p, q \in S$$

$\phi: S \rightarrow \hat{S}$ isometry local

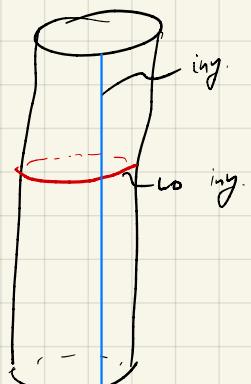
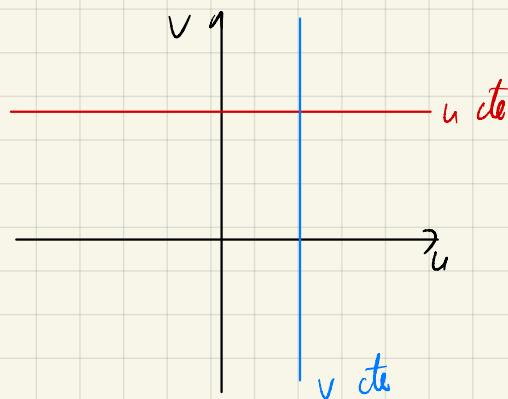
$$d(\phi(p), \phi(q)) \leq d(p, q)$$

$$S = \mathbb{R}^2$$

$$\hat{S} = \text{Cilindro circular recto} = C = \{(x, y, z) / \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow C \cong \mathbb{R}^3$$

$$\phi(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$$



$$d_{\phi(u,v)}((1,0)) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) = (-\sin(u), \cos(u), 0)$$

$$\langle d\phi(1,0), d\phi(1,0) \rangle = 1 = \langle (1,0), (1,0) \rangle$$

$$\langle d\phi(0,1), d\phi(0,1) \rangle = 1 = \langle (0,1), (0,1) \rangle$$

$$d_{\phi(u,v)}((0,1)) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = (0, 0, 1)$$

$$\text{Tomando } p = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \phi((0,0)) = (r,0,0)$$

$$q = (2\pi r, 0) \rightarrow \phi(q) = (r, 0, 0)$$

$$d(\phi(p), \phi(q)) = 0 < d_{\mathbb{R}^3}(p, q) = 2\pi r$$



4.4. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ una isometría local entre dos superficies regulares y conexas. Demuestra que para todos $p, q \in S$ se tiene $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq d(p, q)$, donde d y \widehat{d} denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en S y en \widehat{S} . Concluye que si $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ es una isometría, entonces se da la igualdad $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$ para todos $p, q \in S$. Muestra mediante un contraejemplo que esta última afirmación es falsa si ϕ se supone solo isometría local.

4.5. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva $c > 0$ tal que $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \geq c \|\mathbf{v}\|$ para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in T_p S$. Demuestra que ϕ es un difeomorfismo local en todo punto $p \in S$.

¿Se puede garantizar que, para todos $p, q \in S$, se verifica $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \geq c d(p, q)$? Aquí d y \widehat{d} denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en S y en \widehat{S} .

4.5 $\phi: S \rightarrow \tilde{S}$

$\forall p \in S, \forall \tilde{v} \in T_p S, \|d\phi_p(\tilde{v})\| \geq c \|\tilde{v}\|$

① ϕ difeo local:

If $d\phi_p(v) = \tilde{v} \rightarrow c\|v\| \leq \tilde{v} \rightarrow \tilde{v} = 0$

② $c\|d\phi\| \geq c\|v\| \rightarrow d \geq c \cdot d?$

$\forall p, q \in S, \forall g \in \Omega(p, q)$

$$\begin{array}{ccc} [q, b] & \xrightarrow{\alpha} & S \\ \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \phi \\ \tilde{q} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{S} \end{array}$$

$$\tilde{q}'(t) = d\phi_{g(t)}(q'(t))$$

$$\|\tilde{q}'(t)\| \geq c\|q'(t)\| \rightarrow L(\tilde{q}) \geq c \cdot L(q) \quad \forall g \in \Omega(p, q)$$
$$c d(p, q)$$

$\rightarrow c d(p, q) \leq L(\tilde{q}), \forall g \in \Omega(p, q) (\rightarrow \exists \tilde{\Omega}(p, q))$

↓

$$c d(p, q) \leq \inf_{g \in \Omega(p, q)} L(\tilde{q}) \neq \inf_{g \in \Omega(p, q)} L(q)$$

Counterexample

$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ to local

Ej 4

$$\exists p, q \in S \text{ s.t. } d(\phi(p), \phi(q)) < d(p, q)$$

5. El teorema de Hopf-Rinow

Hemos visto entonces cómo toda superficie regular S admite una distancia intrínseca d que nos permite verla como un espacio métrico (S, d) . En este contexto, tiene sentido plantearse la **completitud métrica** de dicho espacio métrico, en el sentido de que toda sucesión de Cauchy con respecto a la distancia d sea convergente. Por otra parte, hemos introducido también el concepto de **completitud geodésica** de una superficie en el sentido de que las geodésicas de S estén definidas para todo valor $t \in \mathbb{R}$. El teorema más importante de **superficies completas** es el llamado teorema de Hopf-Rinow, que nos garantiza que ambos conceptos de completitud son equivalentes, por lo que no hay ninguna ambigüedad cuando hablamos simplemente de la **completitud** de una superficie.

Teorema 5.1 (Teorema de Hopf-Rinow) *Sea S una superficie regular y conexa. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) *El espacio métrico (S, d) es completo.*
- ii) *La superficie S es geodésicamente completa.*
- iii) *La superficie S es geodésicamente completa en un punto p_0 .*
- iv) *Se verifica la propiedad de Heine-Borel: Un subconjunto $A \subset S$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado en la distancia d .*

Diremos entonces que una superficie regular y conexa es **completa** cuando verifique alguna de las condiciones anteriores (y por tanto, todas ellas).

Para la demostración de este resultado fundamental, necesitamos de algunos ingredientes previos. Comenzamos introduciendo el concepto de entorno convexo.

Definición 5.2 (Entorno convexo de un punto) *Un entorno W de $p_0 \in S$ es un **entorno convexo de p_0** si W es un entorno normal de cada uno de sus puntos. Es decir, si para cada punto $p \in W$ (incluido el propio p_0 , evidentemente) existe un entorno \mathcal{U}_p de 0_p en $T_p S$ estrellado respecto de 0_p tal que la restricción $\exp_p|_{\mathcal{U}_p} : \mathcal{U}_p \rightarrow W$ es un difeomorfismo.*

Lema 5.3 (Existencia de entornos convexos) *Para todo punto $p \in S$ existe un entorno convexo de p .* (Sin demostración).

Como una primera aplicación de este lema tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.4 *Sea $\gamma : [0, b) \rightarrow S$ un segmento de geodésica para el cual existe $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma : [0, b + \varepsilon) \rightarrow S$ se puede extender como geodésica con $\gamma(b) = p$.*

Antes de dar la demostración del Corolario 5.4 necesitamos demostrar la siguiente propiedad: Sea V un entorno normal de $p_0 \in S$. Para cada $p \in V$, el segmento de geodésica radial $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow V$ es el único segmento de geodésica contenido en V con $\gamma_p(0) = p_0$ y $\gamma_p(1) = p$, salvo reparametrizaciones. Es decir, si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es otro segmento de geodésica contenido en V con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$, entonces α es una reparametrización monótona de γ_p .

Propiedad

$p_0 \in S$, V entorno normal de p_0

$\exp_{p_0|U}: U \rightarrow V$ difeo, U es abierto

$\forall p \in V$, $\exists \vec{v}_p = (\exp_{p_0|U})^{-1}(p) \in U$ y $\gamma_p(t) = \exp_{p_0}(t\vec{v}_p): [0,1] \rightarrow V$

$$\gamma_p(0) = p_0$$

$$\gamma_p(1) = p$$

Supongamos que $\exists \gamma: [a,b] \rightarrow V$, geodrica, $\gamma(a) = p_0$ y $\gamma(b) = p$.

Sea $\beta(t) = \gamma((1-t)a + tb) = \gamma(a + (b-a)t): [0,1] \rightarrow V$,
 $\beta(0) = \gamma(a) = p_0$
 $\beta(1) = \gamma(b) = p$

Reparametrización dif de γ , por lo que β es geodrica.

? $\beta(t) = \gamma_p(t)$, $t \in [0,1]$? $\Leftrightarrow \gamma$ es una reparametrización unitaria de γ_p .

\uparrow
 $\beta'(0) = \gamma_p'(0)$ por la unicidad de las geodrmas en iguales posicón y velocidad iniciales.

$$\gamma_p'(0) = \vec{v}_p$$

Sea $\vec{\omega} = \beta'(0) \in T_{p_0}S \rightarrow \exists \gamma_{\vec{\omega}}: I_{\vec{\omega}} \rightarrow S$ geodrica unitaria

entonces $\underbrace{[0,1]}_{\text{dominio } \beta} \subset I_{\vec{\omega}} \Rightarrow t \in I_{\vec{\omega}} \Rightarrow t \in D_{p_0}$ y $\beta(t) = \gamma_{\vec{\omega}}(t) = \exp_{p_0}(t\vec{\omega}) \quad \forall t \in [0,1]$

$$\left. \begin{array}{l} \beta(t) = \exp_{p_0}(t\vec{\omega}) \\ \gamma_p(t) = \exp_{p_0}(t\vec{v}_p) \end{array} \right\} \Rightarrow \beta(1) = \exp_{p_0}(I_{\vec{\omega}}) \quad \gamma_p(1) = \exp_{p_0}(\vec{v}_p) \xrightarrow{\substack{\text{difeo} \\ \text{que } \vec{\omega} \in U}} \vec{\omega} = \vec{v}_p$$

Falta ver

? $\vec{\omega} \in U$?

Consideremos $\tilde{\beta}(t) = (\exp_{p_0|U})^{-1}(\beta(t)) \in U$

$$\beta: [0,1] \xrightarrow{\substack{(exp_{p_0|U})^{-1} \\ \tilde{\beta}(t)}} U$$

γ es $\beta(t) = \exp_{p_0}(\tilde{\beta}(t))$

Ahora bien,

$$\tilde{\beta}(0) = \overrightarrow{0}_{p_0} = 0 \cdot \vec{\omega} \quad \textcircled{B}$$

Sea $A = \{t \in [0,1] : \tilde{\beta}(t) = t \cdot \vec{\omega}\}$

① $A \neq \emptyset$: $0 \in A$ OK \textcircled{A}

② A cerrado: $\tilde{\beta}: [0,1] \rightarrow \mathcal{U} \subset T_{p_0} S \cong \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: [0,1] &\rightarrow T_{p_0} S \\ t &\mapsto t\vec{\omega} \end{aligned}$$

$$f(t) = \|\tilde{\beta}(t) - \tilde{\gamma}(t)\| \quad \text{cta}$$

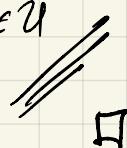
$\Rightarrow A = f^{-1}(0)$, preimagen continua de un cerrado $\cancel{\cancel{\cancel{\quad}}}$

③ A abierto: si $t_0 \in A$, $t_0\vec{\omega} = \tilde{\beta}(t_0) \in \mathcal{U}$

$\exists \varepsilon > 0 / t_0 \in \mathcal{U}, \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

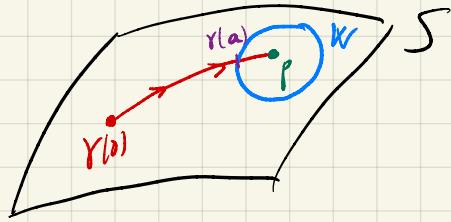
entonces $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \beta(t) = \exp_{p_0} \left(\frac{t\vec{\omega}}{\|t\vec{\omega}\|} \right) = \exp_{p_0} \left(\frac{\tilde{\beta}(t)}{\|\tilde{\beta}(t)\|} \right)$

Por tanto, $A = [0,1] \Rightarrow 1 \in A \Rightarrow \vec{\omega} = \tilde{\beta}(1) \in \mathcal{U}$



Corolario 5.4

Sabemos que $\exists \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p \in S$



Dado $p \in S$, (Lema 5.3), $\exists W$ entorno conexo de p .

Así, $\exists 0 \leq a < b / \gamma(t) \in W, \forall t \in [a, b]$

Vemos W como entorno normal de $\gamma(a)$.

Entonces,

$g = \gamma|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow W$ segmento de geodráica con $\gamma(a) = g(0)$
 $p = g(1)$

Además, tenemos que

$\exists \gamma_p : [0, 1 + \varepsilon) \rightarrow W$ geodráica radial, con $\gamma(a) = \gamma_p(0)$
 $p = \gamma_p(1)$

Entonces $\gamma(t) = \gamma|_{[a, b]}(t)$ es una reparametrización de γ_p en $[0, 1]$.

Como γ_p está definida en $[0, 1 + \varepsilon)$, podemos extender γ por γ_p a $[0, 1 + \varepsilon)$, γ_ε

Definición 5.5 Se dice que un segmento de curva diferenciable a trozos $\alpha \in \Omega(p, q)$ es **minimizante**, o que **realiza la distancia entre p y q** , si $d(p, q) = L(\alpha)$.

Obsérvese que cualquier subsegmento de un segmento de curva minimizante es también minimizante. El siguiente resultado es fundamental en todo lo que vamos a estudiar.

Lema 5.6 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva diferenciable a trozos uniendo $p = \alpha(a)$ con $q = \alpha(b)$. Si α es minimizante, entonces α es una reparametrización monótona de un segmento de geodésica de p a q . En particular, α es diferenciable en todos sus puntos (no tiene vértices).

La demostración que daremos de este resultado es diferente de la que aparece en el libro de texto y está basada en la existencia de entornos convexos. Otro resultado clave para la demostración del teorema de Hopf-Rinow es el siguiente.

Lema 5.7 Si la superficie S (conexa) es geodésicamente completa en un punto $p_0 \in S$, entonces para cualquier punto $p \in S$ existe un segmento de geodésica minimizante uniendo p_0 con p .

La demostración detallada de este resultado va a ser la Tarea 4 del curso y NO será materia de examen.

Con todos estos ingredientes, estamos ya en condiciones de demostrar el teorema de Hopf-Rinow (Teorema 5.1).

Demostración del teorema de Hopf-Rinow (Teorema 5.1):

i) \implies ii). Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que el espacio métrico (S, d) es completo, pero que S no es geodésicamente completa. Entonces, existe un punto $p_0 \in S$ y un vector $\mathbf{v} \in T_{p_0}S$, tales que la geodésica $\gamma(t) = \gamma_{\mathbf{v}}(t)$ no está definida para todo valor de $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, existe $0 < b < +\infty$ tal que $\gamma(t)$ está definida en $[0, b)$ y no se puede extender como geodésica más allá de b , $\gamma : [0, b) \rightarrow S$. Si probamos que existe $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p$ para un cierto $p \in S$, entonces el Corolario 5.4 nos garantiza que $\gamma(t)$ se puede extender como geodésica más allá de b (hasta un cierto $b + \varepsilon$), en contradicción con el hecho de que $\gamma(t)$ NO se podía extender como geodésica más allá de b . La contradicción procede de suponer que S no es geodésicamente completa y, por lo tanto, S debe ser geodésicamente completa.

Nos falta entonces probar que existe $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p$. Para ello usaremos la hipótesis de que (S, d) es completo, que todavía no la hemos utilizado. Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, b)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$. Como $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, en particular es de Cauchy. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que, para cualesquiera $n, m \geq n_0$, entonces $|t_m - t_n| < \varepsilon$. Ahora bien,

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq L_{t_n}^{t_m} (\gamma|_{[t_n, t_m]}) = \int_{t_n}^{t_m} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_n}^{t_m} \|\mathbf{v}\| dt = \|\mathbf{v}\| |t_m - t_n|$$

(suponiendo, por ejemplo, $t_n < t_m$). En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, para el $n_0 > 0$ anterior, si $n, m \geq n_0$, entonces se cumple que

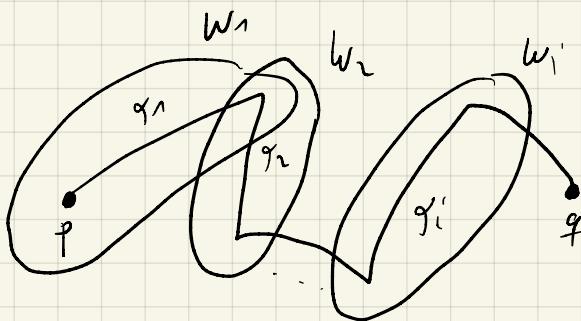
$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \|\mathbf{v}\| |t_m - t_n| \leq \|\mathbf{v}\| \varepsilon.$$

Teorema 5.1 (Teorema de Hopf-Rinow) Sea S una superficie regular y conexa. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) El espacio métrico (S, d) es completo.
- ii) La superficie S es geodésicamente completa.
- iii) La superficie S es geodésicamente completa en un punto p_0 .
- iv) Se verifica la propiedad de Heine-Borel: Un subconjunto $A \subset S$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado en la distancia d .

Lema 5.6

Sea $g: [a, b] \rightarrow S$, C^∞ a trayectoria minimizante



No queremos que: \exists partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $\exists \{W_i\}_{i=1}^n$ abiertos
de $\text{Im } g$ para en forma conexa de manera que $t_i : i = 1, \dots, n$,

$g_i = g|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un segmento de curva diferenciable
con $\text{Im } g_i \subset W_i$

Idea: $\forall t \in [a, b]$, $\exists W_t$ entorno conexo de $g(t) \Rightarrow \text{Im } g \subset \bigcup_{t \in [a, b]} W_t$

como $\text{Im } g$ es compacto, podemos tomar un subconjunto finito.

Tras esto, se puede arreglar el subconjunto para que verifique lo que queremos.

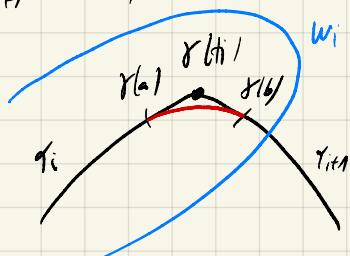
Seguimos...

$i = 1, \dots, n$ g_i es minimizante entre $g(t_{i-1})$ y $g(t_i)$, ademas $g_i(t) \subset W_i$

por lo que g_i es una parametrización de la geodráctica radial entre $g(t_{i-1}), g(t_i)$

Aquí g es un polígonal de geodrácticas radiales.

Falta ver que g no tiene pizes.



y la minimizante entre $g(a)$ y $g(b)$ debe ser geodráctica radial

□

Luego $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (S, d) . Como por hipótesis este espacio métrico es completo, $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en S , por lo que podemos asegurar que existe un punto $p \in S$ tal que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n)$.

Hay que demostrar que $p = \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$. Para ello, sea $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ otra sucesión cualquiera en el intervalo $[0, b)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$. Con un razonamiento análogo al anterior podemos deducir de nuevo que la sucesión de puntos $\{\gamma(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (S, d)$ es de Cauchy, y por tanto, convergente en S . Sea $p' = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(s_n)$. Dado que

$$0 \leq d(\gamma(s_n), \gamma(t_n)) \leq L_{s_n}^{t_n} (\gamma|_{[s_n, t_n]}) = \|\mathbf{v}\| |t_n - s_n|,$$

tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene $0 \leq d(p', p) \leq \|\mathbf{v}\| \lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - s_n| = 0$, de donde se deduce que $d(p', p) = 0$, es decir, $p' = p$. Esto prueba que efectivamente $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p$ y concluye la prueba de la implicación i) \implies ii).

ii) \implies iii). Trivial, ya que si S es geodésicamente completa, lo es en todos sus puntos.

iii) \implies iv). Como S es geodésicamente completa en p_0 , tenemos que $\exp_{p_0} : T_{p_0}S \longrightarrow S$ está globalmente definida en todo el plano tangente $T_{p_0}S$. Veamos que se da la condición de Heine-Borel: Un subconjunto $A \subset S$ es compacto \iff es cerrado y acotado en la distancia d .

La implicación \implies es cierta en cualquier espacio métrico (como deberíais recordar si tuvisteis un buen profesor de Topología de Espacios Métricos en Primero). En efecto, si $A \subset X$ es un compacto en un espacio métrico (X, d) , entonces es cerrado por que todo compacto de un espacio Hausdorff es cerrado (y todo espacio métrico es obviamente Hausdorff). Por otra parte, fijando un punto $p_0 \in X$, la colección $\{B_d(p_0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto de A (de hecho, de todo X) y, como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito de A , de modo que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B_d(p_0, n_i) = B_d(p_0, R), \quad R = \max\{n_1, \dots, n_k\}$$

lo que prueba que A es d -acotado.

Para probar la implicación \iff , consideremos A un subconjunto de S cerrado y d -acotado. Como A es d -acotado, existe $M > 0$ tal que $A \subset B_d(p_0, M)$. Además, al ser S (conexa) geodésicamente completa en p_0 , el Lema 5.7 nos asegura que, para todo $p \in A$, existe un segmento de geodésica minimizante γ uniendo $p_0 = \gamma(0)$ y $p = \gamma(a)$. Sea $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ (lo cual implica que $\gamma(t) = \gamma_{\mathbf{v}}(t) = \exp_{p_0}(t\mathbf{v})$) y $p = \gamma(a) = \exp_{p_0}(a\mathbf{v})$. Entonces

$$d(p_0, p) = L_0^a (\gamma|_{[0, a]}) = \int_0^a \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^a \|\mathbf{v}\| dt = a\|\mathbf{v}\| < M,$$

es decir, $a\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{0}, M)$. Luego

$$p = \gamma(a) = \gamma_v(a) = \exp_{p_0}(a\mathbf{v}) \in \exp_{p_0}(\mathcal{D}(\mathbf{0}, M)) \subset \exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(\mathbf{0}, M)}),$$

con $\exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(0, M)})$ compacto en S , por ser la imagen por la aplicación continua \exp_{p_0} de $\overline{\mathcal{D}(0, M)}$, compacto en $T_{p_0}S$. En definitiva, $A \subset \exp_{p_0}(\overline{\mathcal{D}(0, M)})$ es un cerrado contenido en un compacto, y por tanto A es compacto.

A es notado ↴

iv) \implies i). Esta implicación es puramente topológica, por lo que si de nuevo tuvisteis un buen profesor de Topología de Espacios Métricos en Primero, no os debería ser difícil de probar. Veamos cómo es la prueba en el contexto de los espacios métricos. Se trata de ver que todo espacio métrico (X, d) en el cual se verifique la propiedad de Heine-Borel es completo. Para ello, supongamos entonces que se da la propiedad de Heine-Borel en un (X, d) y veamos que es completo. Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X, d) , y sea $A = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los puntos de la sucesión. Por ser una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que, para cualesquiera $n, m \geq N$, entonces $d(p_n, p_m) < \varepsilon$. Fijamos un punto $p \in X$ y un número natural $n > N$. Claramente,

$$d(p, p_n) \leq d(p, p_N) + d(p_N, p_n) < d(p, p_N) + \varepsilon.$$

Como p_N es un punto fijo, existe $r_0 > 0$ tal que $r_0 > d(p, p_N) + \varepsilon$. En consecuencia, $d(p, p_n) < r_0$ para todo $n \geq N$. Obsérvese que solo queda una cantidad finita de puntos en A que no tienen por qué cumplir esta condición: p_1, \dots, p_{N-1} . Basta tomar entonces $r = \max\{r_0, d(p, p_1), \dots, d(p, p_{N-1})\}$ para poder asegurar que $d(p, p_m) < r$ para todo $p_m \in A$; es decir, A es d -acotado, ya que $A \subset B_d(p, r)$. En particular, su clausura \bar{A} es d -acotado y cerrado, lo que implica, por hipótesis (propiedad de Heine-Borel), que \bar{A} es compacto. Como $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{A}$ es una sucesión contenida en un compacto, existe una subsucesión convergente; ahora bien, dado que la sucesión original es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, podemos asegurar que la propia sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ella misma convergente, lo que demuestra que (X, d) es completo.

Fin de la demostración.

Como consecuencia del teorema de Hopf-Rinow y del Lema 5.7, se tiene lo siguiente.

Corolario 5.8 *Si una superficie regular y conexa S es completa, entonces dos puntos cualesquiera de S se pueden unir mediante un segmento de geodésica minimizante (y no necesariamente único).*

Algunas consecuencias interesantes del teorema de Hopf-Rinow son las siguientes. Aunque no lo digamos explícitamente, suponemos siempre que las superficies son conexas.

Corolario 5.9 *Toda superficie regular y compacta es completa.*

Más generalmente se tiene lo siguiente.

Corolario 5.10 *Toda superficie regular y cerrada en \mathbb{R}^3 es completa.*

Demostración del Corolario 5.9. Si S es compacta, entonces el espacio métrico (S, d) es completo porque todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración del Corolario 5.10. Si S es cerrada en \mathbb{R}^3 , entonces el espacio métrico (S, d) es completo por el siguiente razonamiento: Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (S, d) . Recordemos

que (véase el Corolario 4.4 y la desigualdad posterior) $\|p - q\| \leq d(p, q)$ para todos $p, q \in S$. Entonces se tiene $\|p_n - p_m\| \leq d(p_n, p_m)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$, lo que implica que la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$. Pero el espacio métrico $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ es completo, y entonces la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en \mathbb{R}^3 a un cierto punto $p \in \mathbb{R}^3$. Pero como S es cerrada y la sucesión está contenida en S , el límite de la sucesión $p \in S$. Por tanto la sucesión es también convergente a p en S .

5.1. Ejercicios

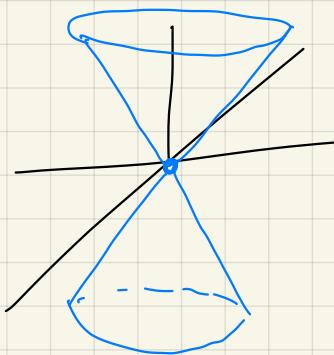
- 5.1. Estudia si el cono de dos hojas dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$ es una superficie completa.
- 5.2. Sea S una superficie regular que viene dada como una superficie de nivel $S = f^{-1}(c)$ para una función diferenciable f definida sobre \mathbb{R}^3 . Estudia si S es completa. ¿Qué ocurre si la función f es diferenciable solo sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^3$, $W \neq \mathbb{R}^3$?
- 5.3. Una **curva divergente** en una superficie S es una curva diferenciable $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$ que *se sale de los compactos*, es decir, tal que para cada conjunto compacto $A \subset S$ existe un instante $t_0 < +\infty$ de modo que $\alpha(t) \notin A$ para todo $t > t_0$. Se define entonces la **longitud** de α como

$$L(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \leq +\infty.$$

Demuestra que S es completa si y solo si toda curva divergente tiene longitud infinita. Ésta fue, de hecho, la definición original de completitud dada por H. Hopf y W. Rinow en su artículo *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. **3** (1931), 209–225.

- 5.4. Considera el toro de revolución dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, con $0 < r < R$. Estudia si la geodésica que sale del punto $p = (0, r + R, 0)$ con velocidad $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ está definida para todo valor t de \mathbb{R} .
- 5.5. Se dice que una geodésica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow S$ es un **rayo** que sale de p si γ es minimizante entre $p = \gamma(0)$ y $\gamma(t)$ para todo valor de $t \in [0, +\infty)$. Demuestra que toda superficie completa y no compacta admite rayos que salen de cualquier punto $p \in S$.
- 5.6. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ un difeomorfismo entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva $C > 0$ tal que $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \leq C \|\mathbf{v}\|$ para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in T_p S$. Demuestra que si \widehat{S} es completa, entonces S también lo es.
- 5.7. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ una isometría local entre dos superficies regulares y conexas. Supongamos que S es completa y que \widehat{S} cumple la siguiente propiedad: dos puntos cualesquiera de \widehat{S} se pueden unir mediante un único segmento de geodésica. Demuestra que ϕ es una isometría global.

5.1. Estudia si el cono de dos hojas dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$ es una superficie completa.



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in S$$

$\exists 0$ es valor regular en $S \rightarrow S$ ap regular

$$S = S_+ \cup S_- \text{ no conexa}$$

$$S_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

$$S_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z < 0\}$$

S_+ no completa

① No es geod. compl.

$$p = (0, 1, 1) \in S_+$$

$$\vec{v} = (0, 1, 1) \in T_p S_+$$

$$\gamma(t) = p + t\vec{v} = (0, 1+t, 1+t) \in S$$

$$\forall t > -1 \quad I_{\vec{v}} = (-1, +\infty)$$

② No es metr. compl

$$p_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in S_+$$

$$d(p_n, p_m) = \|p_n - p_m\|$$

Es la distancia en (S, d)

γ es convergente en \mathbb{R}^3 al $(0, 0, 0)$,
pero no en S .

- 5.2. Sea S una superficie regular que viene dada como una superficie de nivel $S = f^{-1}(c)$ para una función diferenciable f definida sobre \mathbb{R}^3 . Estudia si S es completa. ¿Qué ocurre si la función f es diferenciable solo sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^3$, $W \neq \mathbb{R}^3$?

$$c \in \mathbb{R}, \quad S = f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2) \in W : f(x_1, x_2) = c\}$$

c valor regular de $f: \nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq (0, 0, 0) \quad H(x_1, x_2) \neq 0$

luego, $T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{v}, \nabla f(p) \rangle = 0 : \nabla f(p)^\perp\}$

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

Si $W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow [f \text{ es Cp. en todo el nvl y completo}]$

porque $S = f^{-1}(\{c\}) \subseteq \mathbb{R}^3$ cerrado en $\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow S \text{ completo} \\ \mathbb{R}^3 \text{ completo} \end{array} \right.$
 cerrado por f ita, $\{c\}$ cerrado

5.3. Una **curva divergente** en una superficie S es una curva diferenciable $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$ que se **sale de los compactos**, es decir, tal que para cada conjunto compacto $A \subset S$ existe un instante $t_0 < +\infty$ de modo que $\alpha(t) \notin A$ para todo $t > t_0$. Se define entonces la **longitud** de α como

$$L(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \leq +\infty.$$

Demuestra que S es completa si y solo si toda curva divergente tiene longitud infinita. Ésta fue, de hecho, la definición original de completitud dada por H. Hopf y W. Rinow en su artículo *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.

Sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$ divergente

Llamamos $p = \gamma(0)$

$\forall n \in \mathbb{N} \mid A_n = \overline{B_d(p, n)}$ compacto $\subset S$ (Heine-Borel)

$\exists t_n > 0 / \forall t > t_n, \forall t > t_n$

$$d(p, \gamma(t_n)) \geq n, \quad \forall t > t_n$$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq d(\gamma(0), \gamma(t_n)) \leq L(\gamma|_{[0, t_n]}) = \int_0^{t_n} \|\gamma'\| \leq \int_0^{+\infty} \|\gamma'\| = L(\gamma)$

Añá, $L(\gamma) \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow L(\gamma) = +\infty$

Para reducir el aburro, supongamos que $\exists p \in S$ y $\exists \epsilon > 0$

débe ser $\sup_{t \in I_p} \bar{I}_t < \infty$
 $\inf_{t \in I_p} \bar{I}_t > -\infty$

sin perder generalidad, (podríamos cambiar \bar{v} por $-\bar{v}$) pondremos

suponer $b = \sup_{t \in I_p} \bar{I}_t < \infty$

$0 \in I_p \rightarrow [0, b]$

Sea $\gamma(t) : [0, b] \rightarrow S, \quad \gamma(t) = \gamma_{\bar{v}}(t), \quad \nexists \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$

La longitud de γ es finita:

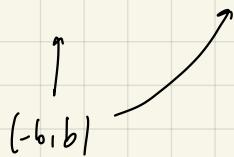
$$L(\gamma) = \int_0^b \|\gamma'\| = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_b^t \|\gamma'\| = b \cdot \|v\| < \infty$$

Reparametrizamos γ para que cumple la definición de curva divergente

$$[0, \infty) \rightarrow [0, b] \xrightarrow{\gamma} \gamma$$

$$s \rightarrow h(s) \rightarrow \gamma(h(s))$$

$$\text{tg } \kappa: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, +\infty)$$



$$\text{Sala } h(s) = \frac{2b}{\pi} \arctan(s)$$

$$\gamma \quad \gamma(s) = \gamma(h(s)) \quad \{ \quad L(g) = L(\gamma) < \infty$$

γ es divergente (de acuerdo, tenemos contradicción $\cancel{\cancel{\parallel}}$)

γ se sale de los compactos $\Rightarrow \gamma$ se sale de los compactos

Hipótesis: γ no se sale de los compactos:

$\exists A \subset S$ compacto tal que $\forall t > 0, \exists t^+ > t / \gamma(t^+) \notin A$

$$\exists t_n \underset{n \in \mathbb{N}}{\nearrow} b / \gamma(t_n) \notin A, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $t_n, \exists t_m > t_n / \gamma(t_m) \in A$

\Rightarrow formamos ahora $\{\gamma(t_n)\}_{n=1}^\infty \subset A$ compacto, es de Cauchy:

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq L(\gamma)_{[t_n, t_m]} = \int_{t_n}^{t_m} \|\gamma'\| = \|v\| |t_n - t_m| < \epsilon \|v\|$$

esta es la
que es de Cauchy,
por ser convergente en \mathbb{R}

Entonces $\gamma(t_n)$ es Cauchy en un compacto, por lo que es convergente a $p \in A$

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = p = \gamma(b)$$

y γ se extiende por continuidad para $t=b$

Falta ver que el límite es independiente de la sucesión.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, b)$ / $a_n \rightarrow b$

¿ $\{\gamma(a_n)\} \rightarrow b$?

$$d(p, \gamma(a_n)) \leq d(p, \gamma(t_n)) + \underbrace{d(\gamma(t_n), \gamma(a_n))}_{n \rightarrow \infty}$$

$$\leq L(\gamma|_{[t_n, a_n]}) = \|v\| |t_n - a_n|$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

Ahora: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p, \gamma(a_n)) = 0$

y, efectivamente γ se extiende por continuidad a $\gamma(b)$

Ahí γ es lineal ~~y continua~~, por lo tanto cumplida la hipótesis

- 5.4.** Considera el toro de revolución dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, con $0 < r < R$. Estudia si la geodésica que sale del punto $p = (0, r+R, 0)$ con velocidad $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ está definida para todo valor t de \mathbb{R} .

Si, porque el toro es compacto, entonces es completa.

- 5.5.** Se dice que una geodésica $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow S$ es un **rayo** que sale de p si γ es minimizante entre $p = \gamma(0)$ y $\gamma(t)$ para todo valor de $t \in [0, +\infty)$. Demuestra que toda superficie completa y no compacta admite rayos que salen de cualquier punto $p \in S$.

Fijo $p_0 \in S$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_d(p_0, n)$, $S \not\subset B_d(p_0, n)$ (Si no, sería compacta, pero es cerrada por ser el toro, sería acotada, y keine-farel funciónes para ser completa)

$\exists p_n \in S \setminus B_d(p_0, n)$, $d(p_0, p_n) \geq n$

Y tenemos $\{p_n\}_{n=1}^\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma_n: [0, b_n] \rightarrow S$ segmento de geodésica $\xrightarrow{\text{Ap}} \min\text{imizante}$,
 $\gamma_n(0) = p_0$, $\gamma_n(b_n) = p_n$

$$d(\gamma_n(0), \gamma_n(b_n)) = L(\gamma_n) = \int_0^{b_n} 1 = b_n$$

Aquí $b_n = d(\gamma_n(0), \gamma_n(b_n)) = d(p_0, p_n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_n := \gamma'_n(0) \in \mathcal{S}(p_0, 1) = \{\vec{v} \in T_{p_0} S : \|\vec{v}\| = 1\} \subset T_{p_0} S$

$\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(p_0, 1)$ compacte $\Rightarrow \exists \{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \xrightarrow{\text{ss}} \vec{v} \in \mathcal{S}(p_0, 1)$

Tomo $\gamma_{\vec{v}}(t): \mathbb{R} \rightarrow S$, $\gamma_{\vec{v}}(t) = \vec{v}|_{[0, \infty)}$ rayo en S

Vamos que es un rango:

$\forall t > 0$, $\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t)$ porque $t \in [0, b_{n_k}]$ a partir de un cierto $n_0 \leq n_k$

$$n_k \leq d(p_0, p_{n_k}) = b_{n_k}, \quad \text{entonces } \forall t > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / t < b_{n_1}, b_{n_1} > n_k$$

$$\gamma_{n_k}(t) = \gamma_{\vec{v}_{n_k}}(t) = \exp_{p_0}(t \vec{v}_{n_k}) \quad \text{si } t \in [0, b_{n_k}]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp_{p_0}(t \vec{v}_{n_k}) = \exp_{p_0}(\lim_{k \rightarrow \infty} t \vec{v}_{n_k}) = \exp_{p_0}(t \vec{v})$$

Así, $\forall t > 0$,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{d(\gamma(0), \gamma_{n_k}(t))}_{= t} = t$$

$$d(p_0, \gamma_{n_k}(t)) = L(\gamma_{[0,t]}) = t$$

- 5.6. Sea $\phi : S \rightarrow \hat{S}$ un difeomorfismo entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva $C > 0$ tal que $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \leq C \|\mathbf{v}\|$ para todo $p \in S$ y para todo $\mathbf{v} \in T_p S$. Demuestra que si \hat{S} es completa, entonces S también lo es.

Por el ej 4.3, $\forall p, g \in S$, $\hat{d}(\phi(p), \phi(g)) \leq C d(p, g)$

Solución 1: (\hat{S}, \hat{d}) completo $\rightarrow (S, d)$ completo

$\exists \phi : S \rightarrow \hat{S}$ homeomorfismo

$\forall g, \forall p \in S$,

$$\hat{d}(\phi(p), \phi(g)) \leq C d(p, g)$$

Sea $\{\phi(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy en $(S, d) \rightarrow \{\phi(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en (\hat{S}, \hat{d})

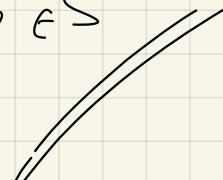
ide Cauchy?

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 / d(p_n, p_m) < \frac{\epsilon}{C}, \forall n, m \geq n_0$

$$\hat{d}(\phi(p_n), \phi(p_m)) \leq C \cdot d(p_n, p_m) < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

$\{\phi(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (\hat{S}, \hat{d}) , \hat{S} es completo.

Por tanto, $\exists \hat{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(p_n) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(p_n) = \phi(\hat{p}) \\ \phi(\hat{p}) = \phi(f) \end{array} \right.$

$$\xrightarrow{\phi' \text{ cont}} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-1}(\phi(p_n)) = \phi^{-1}(\phi(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f \in S$$


$\Rightarrow \{p_n\}$ converge a f

Solución 2

Utilizando el criterio de completitud de S.3

S completa $\Leftrightarrow L(g) = g_0$, $\forall g: [0, \infty) \rightarrow S$ diverge \Leftrightarrow

Sea $g: [0, g_0] \rightarrow S$ divergente

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \text{top: } & g \xrightarrow{\quad} & \phi(g) \\ \text{right: } & \downarrow & \downarrow \phi \\ \text{bottom-left: } & \beta = f \circ g \xrightarrow{\quad} & f(g) \\ \text{bottom-right: } & & f(g) \end{array}$$

① β es divergente:

$\forall B \subset S$ compacto, $B = \phi(A)$ con A compacto en S .

Dado A compacto de $S \rightarrow \exists t_A > 0 / \forall t > t_A, \forall t \geq t_A$

↓ entorno

$$\beta(t) = \phi(g(t)) \notin \phi(A) = B, \quad \forall t \geq t_A$$

↓ β es divergente //

② $L(\beta)$:

$$\beta(t) = \phi(g(t)) \Rightarrow \beta'(t) = \frac{d}{dt}(\phi(g(t))) = d\phi_{g(t)}(g'(t))$$

$$\|\beta'(t)\| = \|d\phi_{g(t)}(g'(t))\| \leq C \|g'(t)\|$$

$$\Rightarrow L(\beta) \leq C \cdot L(g) \Rightarrow L(g) = \infty$$

$\|\beta'\|$ divergente en un
compacto

Así, S es completa //

5.7. Sea $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$ una isometría local entre dos superficies regulares y conexas. Supongamos que S es completa y que \widehat{S} cumple la siguiente propiedad: dos puntos cualesquiera de \widehat{S} se pueden unir mediante un único segmento de geodésica. Demuestra que ϕ es una isometría global.

ϕ local: $T_p S, d\phi_p : T_p S \rightarrow T_{\phi(p)} \widehat{S}$ localmente lineal

ϕ global: inyectiva e sobre.

① INV.

Supongamos que no, entonces $\exists p, q \in S / \phi(p) = \phi(q)$

$\ell = d(p, q) > 0$ y $\exists \gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ geodésica para minimizar
 $\gamma(0) = p, \gamma(\ell) = q$

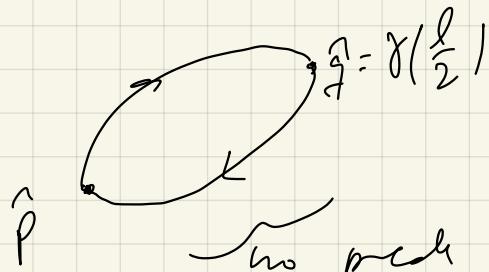
$\beta(t) = \phi(\gamma(t)) : [0, \ell] \rightarrow \widehat{S}$ geodésica cerrada en \widehat{S}

local:

$$\widehat{\Gamma}_{ij}^k = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k$$

y $\widehat{\Gamma}_{ij}^k = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ se verifica

$$\beta(0) = \phi(p) = \phi(q) = \beta(\ell) = \widehat{p}$$



Un punto \widehat{p} , por el cual se encuentran dos geodésicas uniendo \widehat{p} y \widehat{S}

② SOBRE

2a) $\phi(S)$ abierta en \hat{S} : ϕ local $\rightarrow \phi$ difeo local $\rightarrow \phi$ homeo local $\rightarrow \phi$ abierta

2b) $\phi(S)$ cerrado en \hat{S} :

sea $\{\phi(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión convergente a $\hat{p} \in \hat{S}$ en $\phi(S)$ i? $\hat{p} \in \phi(S)$

? $\exists p \in S / \hat{p} = \phi(p)$?

$\{\phi(p_n)\}$ de Cauchy en \hat{S} (por ser convergente). $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,
tal que $d(\phi(p_n), \phi(p_m)) < \epsilon, \forall n, m \geq N$.

y $\phi: S \rightarrow \phi(S)$ es biyectiva $\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ es global (de } S \text{ a } \phi(S) \\ \text{no local} \end{array} \right.$

$\forall n, m \geq N, d(p_n, p_m) = d(\phi(p_n), \phi(p_m)) < \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S \text{ de Cauchy} \end{array} \right.$

Aer, $\exists p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \in S$ (por ser S completo).

$$\phi(p) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(p_n) = \hat{p}$$

$$\exists p \in S / \phi(p) = \hat{p} \in \phi(S)$$

y $\phi(S)$ es cerrado

Por tanto $\phi(S) = \hat{S} \rightarrow \phi$ es el global

Bloque 3. Cálculo variacional en superficies

Luis J. Alías

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Los contenidos del Bloque 3 se corresponden con los siguientes contenidos del libro de texto "Un curso de Geometría Diferencial", de M.A. Hernández Cifre y J.A. Pastor González, en su **primera edición**, es decir, la de 2010.

1. Introducción del Tema 6 = Introducción de la Sección 7.1 del libro de texto.
2. Sección 6.1 del Tema 6 = Subsección 7.1.1 de la Sección 7.1 del libro de texto.
3. Sección 6.2 del Tema 6 = Subsección 7.1.2 de la Sección 7.1 del libro de texto.
4. Sección 6.3 del Tema 6 = Subsección 7.2.3 de la Sección 7.2 del libro de texto.
5. Tema 7 = Última parte de la Subsección 2.5.1 de la Sección 2.5 (*Midiendo áreas*), y Secciones 4.1 y 4.2 del libro de texto.
6. Tema 8 = Secciones 4.3, 4.4 y 4.5 del libro de texto.

Así mismo, se corresponden con los siguientes contenidos del libro de texto "Un curso de Geometría Diferencial", de M.A. Hernández Cifre y J.A. Pastor González, en su **segunda edición revisada y aumentada**, es decir, la de 2019.

1. Introducción del Tema 6 = Introducción de la Sección 5.1 del libro de texto.
2. Sección 6.1 del Tema 6 = Subsección 5.1.1 de la Sección 5.1 del libro de texto.
3. Sección 6.2 del Tema 6 = Subsección 5.1.2 de la Sección 5.1 del libro de texto.
4. Sección 6.3 del Tema 6 = Subsección 6.1.3 de la Sección 6.1 del libro de texto.
5. Tema 7 = Última parte de la Subsección 2.5.1 de la Sección 2.5 (*Midiendo áreas*), y Secciones 5.2 y 5.3 del libro de texto.
6. Tema 8 = Sección 5.3 del libro de texto.

Para facilitar el estudio, en cada una de las definiciones y resultados (lemas, proposiciones, teoremas y coloraciones), se indica la definición o el resultado del libro con el que se corresponde y el número de página del libro en que aparece, haciendo referencia exclusivamente a la **primera edición** del libro. En los casos en que la correspondencia no es al 100 %, se indica como "Adaptado" o "Extraído", según sea el caso.

6. Variaciones de la longitud. Fórmulas de variación

Definición 6.1 (Adaptada de la Definición 7.1.1, p. 248) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva parametrizada (no necesariamente regular), con parámetro $u \in [a, b]$. Una **variación** de α es una aplicación diferenciable $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\phi(u, 0) = \phi_0(u) = \alpha(u)$ para todo $u \in [a, b]$.

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva de parámetro u dada por $\alpha_t = \phi(\cdot, t) : [a, b] \rightarrow S$ es un segmento de curva parametrizada en S , y la familia de curvas $\{\alpha_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ se llaman las **curvas de la variación**. Se dice que la variación es **propia** (o que tiene **extremos fijos**) si $\alpha_t(a) = \alpha(a)$ y $\alpha_t(b) = \alpha(b)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Por otra parte, para cada $u \in [a, b]$, la curva de parámetro t dada por $\beta_u = \phi(u, \cdot) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ también es una curva parametrizada en S . La familia de curvas $\{\beta_u\}_{u \in [a, b]}$ son las **curvas transversales de la variación**. Por ejemplo, si ϕ es una variación propia de α se tiene

$$\beta_a(t) = \phi(a, t) = \alpha_t(a) = \alpha(a) = \text{constante para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

y

$$\beta_b(t) = \phi(b, t) = \alpha_t(b) = \alpha(b) = \text{constante para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Obsérvese que para cada $u \in [a, b]$, $\beta_u(0) = \alpha(u) = \alpha_0(u)$. En particular, la velocidad $\beta'_u(0) \in T_{\alpha(u)}S$. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 6.2 (Definición 7.1.2, p. 249) Sea ϕ una variación de un segmento de curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow S$. Se define el **campo variacional** de ϕ como el campo

$$Z(u) = \beta'_u(0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(u, 0) \in T_{\alpha(u)}S.$$

Evidentemente, $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es diferenciable en $[a, b]$. Además, si la variación es propia se tiene $Z(a) = \mathbf{0}_{\alpha(a)}$ y $Z(b) = \mathbf{0}_{\alpha(b)}$.

Definición 6.3 (Adaptada de la Definición 7.1.6, p. 253) Se dice que una variación ϕ de un segmento de curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es una **variación normal** si su campo variacional es perpendicular a α en todo punto, es decir, $\langle Z(u), \alpha'(u) \rangle = 0$ para todo $u \in [a, b]$.

6.1. La primera fórmula de variación para la longitud de arco

Dada ϕ una variación de α , podemos considerar la función $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada t la longitud del segmento de curva α_t , es decir,

$$L(t) = L(\alpha_t) = \int_a^b \|\alpha'_t(u)\| du.$$

$$g_t(u) = \phi(u, t) = \beta_u(t), \quad t \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\text{If } g'_t(u) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \quad \boxed{t=0} \rightarrow g'_0(u) = \phi'(u) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, 0) \quad \text{then}$$

$$T_{g_t(u)} S = T_{\phi(u,t)} S$$

$$\text{then, } \beta_u'(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(u, t) \in T_{\beta_u(t)} S = T_{\phi(u,t)} S$$

$$\boxed{t=0} \rightarrow \beta_u'(0) \in T_{\phi(u,0)} S = T_{g(u)} S$$

La función $L(t)$ se llama el **funcional longitud de arco**.

Bajo condiciones relativamente débiles (por ejemplo, si α es regular), la función $L(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y su derivada en dicho entorno se puede calcular derivando bajo el signo integral.

Lema 6.4 (Extraído de la demostración del Teorema 7.1.3, p. 250) *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular y sea $\phi(u, t)$ una variación de α . La función $L(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene*

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_a^b \frac{1}{\|\alpha'_t(u)\|} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u, t) du \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|\alpha'_t(u)\|} \left(\frac{d}{du} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle \right) (u, t) du. \end{aligned}$$

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.5 (Primera fórmula de variación del arco. Adaptado del Teorema 7.1.3, p. 250) *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular parametrizado por el arco. Dada $\phi(s, t)$ una variación de α con campo variacional Z , se tiene*

$$L'(0) = \langle Z(b), \alpha'(b) \rangle - \langle Z(a), \alpha'(a) \rangle - \int_a^b \left\langle Z, \frac{D\alpha'}{ds} \right\rangle (s) ds.$$

En particular, si la variación es propia (o si la variación es normal)

$$L'(0) = - \int_a^b \left\langle Z, \frac{D\alpha'}{ds} \right\rangle (s) ds.$$

Obsérvese que el valor de $L'(0)$ solo depende del campo variacional de ϕ y no de la variación; dos variaciones de α con el mismo campo variacional dan el mismo valor de $L'(0)$.

Teorema 6.6 (Caracterización variacional de las geodésicas. Teorema 7.1.5 y Corolario 7.1.7, p. 252-253) *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular parametrizado por el arco. Las tres siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) α es un segmento de geodésica.
- ii) $L'(0) = 0$ para toda variación propia de α .
- iii) $L'(0) = 0$ para toda variación normal de α .

En otras palabras, este resultado caracteriza las geodésicas como los puntos críticos del funcional longitud de arco.

Para la demostración de este teorema necesitamos el siguiente resultado técnico.

Lema 6.4.

$$L(t) = \int_a^b f(u, t) du \quad \|f(u, t)\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)(u, t)}$$

$$f: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Si $f(u, t)$ es C^∞ , entonces

$$L'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(u, t) du = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(u, t) du$$

Idea

¿ $f(u, t) \in C^\infty$?

f es una raíz, se considera diferenciable donde el número de la raíz sea ≥ 0 .

Si g regular $\Rightarrow \exists 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon / f(u, t) > 0, \forall (u, t) \in [a, b] \times (-\varepsilon', \varepsilon')$

$$\Rightarrow L(t) \in C^\infty \text{ en } (-\varepsilon', \varepsilon') \quad y \quad L'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(u, t) du$$

$$f(u, t) = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\| = \|g'_t(u)\| \geq 0$$

$$f(u, 0) = \|g'(u)\| \geq 0 \quad \text{y} \quad g \text{ regular}$$

$$g \text{ regular} \Rightarrow f(u, 0) > 0, \forall u \in [a, b]$$

$$[a, b] \text{ compacto} \Rightarrow \exists c > 0 / \underset{\substack{\vee \\ c/2}}{f(u, 0)} \geq c = m_{\min} \|g'(u)\| > 0$$

$$\text{Por continuidad, } \forall u \in [a, b], \exists \delta_u > 0 / f(u, t) > \frac{c}{2}, \forall t \in (-\delta_u, \delta_u)$$

Existence $\exists \varepsilon' = \min \delta(u) > 0 / f(u, t) > 0, \forall u \in [a, b], t \in (-\varepsilon', \varepsilon')$

$$L'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\| du = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\| \right) du$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\| = \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle(u, t) \right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\rangle \right\| = \frac{1}{2} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\|} \cdot \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle(u, t)} =$$

$$= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\|} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle(u, t) \stackrel{\text{trocando } u \text{ para } u+1}{=} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle$$

$$L'(t) = \int_a^b \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\|} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle(u, t) \right) - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle(u, t) \right) du$$

Trm d.s

Seguimos de lo demo anterior.

Hipótesis sobre γ ppa \Rightarrow la curva $t=0, u=s$.

$$L'(0) = \int_a^b \frac{1}{\|\gamma'(s)\|} \left[\frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) \right) - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, 0) \right\rangle \right] ds =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) \right) ds - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, 0) \right\rangle ds =$$

$$= \left. \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) \right|_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, 0) \right\rangle ds =$$

$$\phi(s, 0) = g_0(s) = g(s)$$

$$\phi(s, t) = \beta_s(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, 0) = g'(s)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = \beta'_s(t)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, 0) = g''(s)$$

$$\beta'_s(0) = Z(s)$$

$$= \left. \langle Z(s), g'(s) \rangle(s, 0) \right|_a^b - \int_a^b \underbrace{\langle Z(s), g''(s) \rangle}_{T_p S} ds =$$

$\frac{Dg'}{ds} + (g''(s))^\perp$

$$= \langle Z(b), g'(b) \rangle - \langle Z(a), g'(a) \rangle - \int_a^b \langle Z(s), \frac{Dg'}{ds}(s) \rangle ds$$

① ϕ var. propia

$$\beta_b(t) = g(b) \text{ de } \rightarrow Z(b) = \beta'_b(t) = 0$$

$$Z(b) = Z(a) = 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

② ϕ var. normal

$$Z \perp g', \forall s \rightarrow \langle Z(s), g'(s) \rangle = 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

Trm 6.6

(i) \rightarrow (ii)
 (i) \rightarrow (iii) OK: γ seg de geodésica $\rightarrow \frac{D\gamma'}{ds} = 0$, $\forall s \in [a, b]$
 $L'(\alpha) = - \int_a^b \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D\gamma'}{ds} \right\rangle ds = 0$

(ii) \rightarrow (i)

(iii) \rightarrow (i)

Por reducción al absurdo, supongamos que γ no es geodésica $\Rightarrow \exists$ variancia normal \mathbf{z} propia de γ d.g. $L'(\alpha) < 0$

γ no geodésica $\Rightarrow \exists s_0 \in (a, b) / \frac{D\gamma'}{ds}(s_0) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \left\| \frac{D\gamma'}{ds}(s_0) \right\| > 0, \forall s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$

Busco $\mathbf{z}(s) = f(s) \frac{D\gamma'}{ds}(s)$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(ppa) $\|\gamma'\|^2 = ds = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{D\gamma'}{ds}, \gamma' \right\rangle = 0 \quad \forall s \\ \left\langle \gamma', \gamma' \right\rangle = 1 \end{array} \right.$

$L'(\alpha) = - \int_a^b f(s) \left\| \frac{D\gamma'}{ds}(s) \right\|^2 ds \leq - \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} f(s) \left\| \frac{D\gamma'}{ds}(s) \right\|^2 ds < 0$
 $\Rightarrow 0$ en $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$

$f > 0$
 en $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$

O ser, heredaremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\textcircled{i} f(a) = f(b) = 0$$

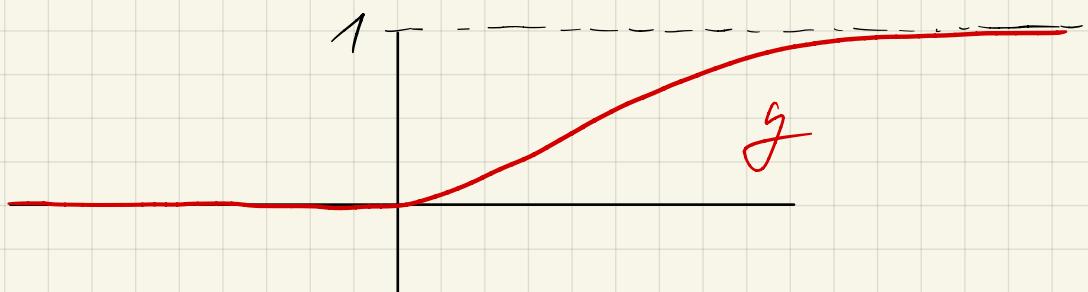
$$\textcircled{ii} f \geq 0 \text{ en } [a, b]$$

$$\textcircled{iii} f > 0 \text{ en } (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \subset [a, b]$$

por $\tilde{g}: f=1$ función media

Consideramos

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-1/t} & t > 0 \end{cases} \quad g \in C^\infty(\mathbb{R})$$



y suponemos $t \varepsilon > 0$,

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{g(\varepsilon^2 - t^2)}{g(\varepsilon^2 - t^2) + g(t^2 - \frac{\varepsilon^2}{4})}$$

(en \mathbb{R}^n se cambia)
 $t^2 \sim \|x\|^2$

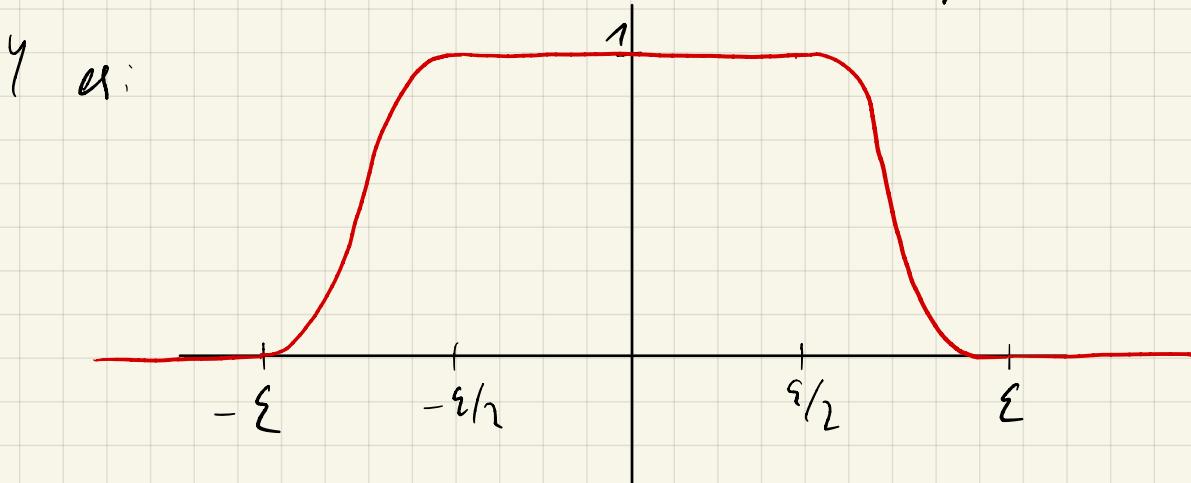
Se verifica que

$$g(\varepsilon^2 - t^2) = 0 \iff \varepsilon^2 - t^2 \leq 0 \iff |t| \geq \varepsilon$$

$$g(t^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}) = 0 \iff t^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \leq 0 \iff |t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y el denominador
es siempre positivo

Es C^∞ par la comparsión de funciones C^∞ .



y hace tovar h desplazada y expandida en (a, b)

O sea, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a)=0, f(b)=0$

$$\boxed{\varepsilon=1} \quad h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

\uparrow $\nearrow f$

$$[a, b]$$

$$\begin{aligned} a &\mapsto -1 \\ b &\mapsto 1 \\ s_0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Lema 6.7 (Adaptado de la Proposición 7.1.4, p. 251) *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular parametrizado por el arco, y sea $Z(s)$ un campo de vectores diferenciable tangente a S a lo largo de α . Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ dada por*

$$\phi(s, t) = \exp_{\alpha(s)}(tZ(s)) = \gamma_{Z(s)}(t) \quad (1)$$

está bien definida y determina una variación de α cuyo campo variacional es Z .

En particular, si Z es perpendicular a α para todo $s \in [a, b]$, la variación ϕ dada por el Lema 6.7 es normal. Por otra parte, si $Z(a) = \mathbf{0}$ y $Z(b) = \mathbf{0}$, la variación ϕ es propia. Finalmente, si Z es perpendicular a α para todo $s \in [a, b]$, y $Z(a) = \mathbf{0}$ y $Z(b) = \mathbf{0}$, la variación ϕ es normal y propia.

6.2. La segunda fórmula de variación para la longitud de arco

Una vez que sabemos que las geodésicas son los puntos críticos del funcional longitud de arco, resulta natural preguntarse cómo es el comportamiento de dichos puntos críticos a través del estudio de la segunda derivada de la función $L(t)$ para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo. Para ello, necesitamos calcular el valor de la segunda derivada, y es suficiente restringirse al caso de variaciones normales y propias.

Teorema 6.8 (Segunda fórmula de variación del arco. Teorema 7.1.8, p. 253) *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de geodésica parametrizado por el arco. Dada $\phi(s, t)$ una variación normal y propia de γ con campo variacional Z , se tiene*

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \frac{DZ}{ds}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \|Z(s)\|^2 \right) ds, \quad (2)$$

donde K denota la curvatura de Gauss de S .

TEOREMA 6.8, SIN DEMOSTRACIÓN. En el AV pondré un fichero con la demostración, para los alumnos interesados, pero no será materia de examen.

Alternativamente, la fórmula (2) se puede reescribir de la siguiente forma,

$$L''(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s))Z(s), Z(s) \right\rangle ds,$$

donde, como es natural,

$$\frac{D^2Z}{ds^2} = \frac{D}{ds} \left(\frac{DZ}{ds} \right).$$

Corolario 6.9 (Observación 7.1, p. 256) *Sea S una superficie regular llana ($K \equiv 0$). Para toda variación normal y propia (con campo variacional no paralelo) de un segmento de geodésica de S se tiene $L''(0) > 0$. En consecuencia, todo segmento de geodésica de S es un mínimo del funcional longitud de arco.*

Lema 6.7

Facil: S completa

$$I_{\mathcal{Z}(s)} = \mathbb{R}, \forall s$$

$$\phi: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow S, \quad \phi(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(t \dot{\gamma}(s)) = \gamma_{\gamma(s)}(t)$$

$$\phi(s, 0) = \exp_{\gamma(s)}(0) = \gamma(s) \rightarrow \phi \text{ varia em } \mathbb{R} \text{ de } \gamma$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi(s, t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{\gamma(s)}(t)) = \gamma'_{\gamma(s)}(0) = \dot{\gamma}(s)$$

General

$$\forall s \in [a, b], \exists \varepsilon(s) / (-\varepsilon(s), \varepsilon(s)) \subset I_{\mathcal{Z}(s)}$$

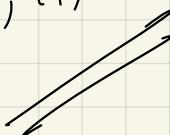
$$\varepsilon = \inf_s \varepsilon(s)$$

$$\underbrace{[a, b]}_{\text{compacto}}$$

compacto

$$\phi: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \quad \text{bem definido, } \forall (s, t) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\phi(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(t \dot{\gamma}(s)) = \gamma_{\gamma(s)}(t)$$



Teorema 6.8

Partimos de:

$$L'|t| = \int_a^b \frac{1}{\left\| \frac{\partial t}{\partial s}(s, t) \right\|} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle (s, t) ds$$

↑

Lema 6.4.

Ahora $\phi(s, t)$ es variación normal y propia de $\gamma: [a, b] \rightarrow S$
geod. p.p.a.

$$t=0 \rightarrow \phi(s, 0) = \gamma(s) = g_s(s)$$

$$t \neq 0 \rightarrow \phi(s, t) = g_t(s)$$

$$L''|t| = \frac{d}{dt} L'|t| = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\dots \right) ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-3/2} \cdot 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^2 +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle^{-1/2} \cdot \left[\left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^2 \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} \right\rangle \right]$$

$$L''|0| = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \dots \right) ds$$

$t=0$

Arcula:

$$L''[0] = - \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial s} \right\rangle (s, 0) ds \quad \text{A} \oplus 0$$

$$+ \int_a^b \left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle (s, 0) ds \quad \text{A}$$

$$+ \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} \right\rangle (s, 0) ds \quad \text{B}$$

$$\text{A} \oplus \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle (s, 0) = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle (s, 0) =$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle (s, 0) \right) - \underbrace{\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right\rangle (s, 0)}_0 = 0$$

$$\langle z(s), \gamma'(s) \rangle$$

11 \leftarrow Variacion
0 normal

$$\langle z(s), \gamma''(s) \rangle$$

$$\langle z(s), \frac{D\gamma'(s)}{ds} \rangle$$

11 0, γ geod.
0

$$0 \text{ sea, } L''(0) = A + B \quad \phi(s, t) = q_t(s) = \beta_s(t)$$

$$\textcircled{B} \quad \forall(s, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}(s, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = \beta'_s(t) \in T_{\beta_s(t)} S = T_{q_t(s)} S$$

$$\boxed{t \text{ fijo}} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \in \mathcal{X}(q_t)$$

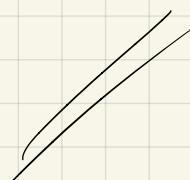
$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t + \langle A_{q_t(s)}(q_t'(s)), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \rangle N(q_t(s))$$

$$\text{En } \boxed{t=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) \right)_t + \langle A_{q(s)}(\gamma'(s)), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) \rangle N(\gamma(s))$$

$$0 \text{ sea:}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}(s, 0) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s) + \langle A_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), z(s) \rangle N(\gamma(s))$$



$$\textcircled{A} \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial s \partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial s \partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right), \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle = \\ & = \frac{\partial}{\partial s} \left(\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right\rangle \end{aligned}$$

$\phi(s, t) = \beta_s(t)$	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta_s'(t) + \mathcal{E}(\beta_s)$
$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(s, t) = \beta_s''(t) = \frac{d}{dt} (\beta_s'(t)) + 2A_{\beta_s(t)}(\beta_s'(t))$	$\beta_s'(t) \sim N(\beta_s(t))$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}(s, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \left\langle A_{\gamma(s)}(z(s)), z'(s) \right\rangle \sim N(\gamma(s))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, 0) = \gamma'(s)$$

γ'

$$\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \gamma'(s) \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, 0) = \gamma''(s) = 0 + \left\langle A(\gamma'), \gamma' \right\rangle N(\gamma)$$

r geodetica

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^3 \phi}{\partial s \partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) = \frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) \right) \\ & - \left\langle A(\gamma'), \gamma' \right\rangle \left\langle A(\gamma), \gamma \right\rangle(s) \end{aligned}$$

A+B

$$A+B = \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\gamma) \right\|^2 + \langle A(\gamma'(s)), \gamma' \rangle^2 = -(\langle A\gamma', \gamma' \rangle - \lambda A\langle \gamma', \gamma' \rangle)$$

$$= -\langle A\gamma', \gamma' \rangle - \lambda \langle \gamma', \gamma' \rangle$$

$$= -\langle A\gamma', \gamma' \rangle$$

$$+ \frac{d}{ds} \left(\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle(s, 0) \right)$$

$\{\gamma', J\gamma'\}$ base orthonormal $T_{\gamma(s)}$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \gamma'(s) \\ \vec{e}_2 &= J\gamma'(s) \end{aligned} \quad \vec{e} = \lambda \vec{e}_2$$

$$A\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$$

$$A\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

$$k(\gamma(s)) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$a_{11} = \langle A\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle A\gamma', \gamma' \rangle$$

$$a_{12} = \langle A\vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = a_{21} = \langle A\vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle = \langle A\gamma', J\gamma' \rangle$$

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|^2 - k(\gamma(s)) \cdot \| \gamma'(s) \|^2 \right) ds$$

$$+ \int_a^b \frac{d}{ds} \left(\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \rangle(s, 0) \right) ds =$$

$$\textcircled{*} \quad \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle(s, 0) \Big|_a^b = 0$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda^2 \det(A\gamma'(s)) = \\ &= -\| \gamma'(s) \|^2 \cdot k(\gamma(s)) \\ &= -\lambda^2 \langle A\gamma', \gamma' \rangle \cdot \langle A\gamma', \gamma' \rangle \\ &= -\lambda^2 \langle A\gamma', \gamma' \rangle^2 \\ &= -\lambda^2 [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] = -\lambda^2 \det(A) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(a, 0) = \vec{0} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\beta_a'(t)) = \vec{0}$$

$\beta_a(t) = \text{cte}$ } $\beta_a'(t) = 0$
 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(b, 0) = \vec{0} \text{ par le même raisonnement}$$

✓ ④ 18 0 //

Corolario 6.9

$S, K \geq 0$ (llena)

$\gamma: [a, b] \rightarrow S$ geo pfa

$\phi(s, t)$ variación normal y propia

$L(t) = \log(\gamma_t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

$L(0) = \log(\gamma)$

$L'(0) = 0$

$L''(0) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\|^2 ds \geq 0$ y " $= 0$ " \nrightarrow $\frac{dt}{ds}|_{s=0} \neq 0$ $\xrightarrow{\text{parallel}} \gamma$ dif de γ

$\rightarrow L''(0) > 0 \rightarrow t=0$ mínimo estricto de $L(t) \rightarrow L(0) = L(\gamma) < L(\gamma_t)$

Es más barata con que $K \leq 0$ en S .

Es más barata con que $K(\gamma) \leq 0$, todo a lo largo de γ .

6.3. El Teorema de Bonnet

Como una interesante aplicación de la segunda fórmula de variación del arco, se tiene el siguiente resultado clásico de Bonnet (1855).

Teorema 6.10 (Teorema de Bonnet, Teorema 7.2.13, p. 271) *Sea S una superficie regular y completa cuya curvatura de Gauss satisface la condición*

$$K(p) \geq \delta > 0$$

para todo punto $p \in S$ y para cierto $\delta > 0$. Entonces S es compacta y su diámetro (intrínseco) verifica la desigualdad

$$\text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}. \quad (3)$$

Aquí, el diámetro de S se define, con respecto a la distancia intrínseca d , como

$$\text{diam}(S) = \sup_{\forall p, q \in S} d(p, q).$$

La hipótesis $K(p) \geq \delta > 0$ en el Teorema de Bonnet no puede debilitarse a $K(p) > 0$, como pone de manifiesto el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$, superficie completa y no compacta con $K > 0$ en todo punto. Por otra parte, la estimación dada en (3) es óptima, ya que la esfera de radio r verifica la igualdad con $\delta = 1/r^2$.

6.4. Ejercicios

- 6.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de geodésica parametrizado por el arco y sea $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una variación de γ tal que las curvas de la variación $\gamma_t(s) = \phi(s, t)$ son segmentos de geodésica de S parametrizados por el arco para todo valor de t . Demuestra que si las curvas de la variación $\{\gamma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ son ortogonales a la curva transversal $\beta_0(t) = \phi(0, t)$, entonces son ortogonales a todas las curvas transversales de la variación $\beta_s(t) = \phi(s, t)$ para todo valor de s .
- 6.2. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de geodésica parametrizado por el arco. Dada $\phi(s, t)$ una variación normal y propia de γ con campo variacional Z , demuestra que

$$L''(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2 Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s))Z(s), Z(s) \right\rangle ds.$$

- 6.3. Considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide dado por la ecuación $z = x^2 + y^2$. Demuestra que S es una superficie completa y no compacta con $K > 0$ en todo punto. Este ejemplo pone de manifiesto que la hipótesis $K(p) \geq \delta > 0$ para todo $p \in S$ en el Teorema de Bonnet no puede debilitarse a $K(p) > 0$ para todo $p \in S$.

5

Grafo entero: $S \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $u \in C^\infty(\Omega)$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\sum(u) = \{(u(y), z) \in \mathbb{R}^3 : z = u(y)\} = f^{-1}(0)$, $\hookrightarrow f(u(y), z) = u(y) - z$

$\Omega = \mathbb{R}^2$, \sum es un grafo entero $\rightarrow S$ cerrada $\rightarrow S$ completa

Teorema de Bonnet

Supongamos que $\text{diam}(S) > \frac{\pi}{\sqrt{8}} \Rightarrow \exists p, q \in S, d(p, q) = l > \frac{\pi}{\sqrt{8}}$

Como S es completa, dada $p, q \in S$, $\exists \gamma: [0, l] \rightarrow S$ ^{ppa} segmento de geodésicas minimizante con $\gamma(0) = p, \gamma(l) = q$

$\Rightarrow L(\gamma)$ variación normal γ propia de S , debe ser necesariamente $L''(0) > 0$.

En efecto, si $\phi(s)$ variación, $L(t) = \text{Long}(\gamma_t)$ $\begin{cases} L(0) = L(\gamma) = l \\ L'(0) = 0 \\ L(\gamma_t) = L(t) \geq L(\gamma) = L(0) \end{cases}$

y entonces $L''(0) > 0$.

??

$$Z(s) = f(s) \cdot J\gamma'(s) \quad f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(0) = 0, f(l) = 0$$

①

Elijo $f(s) = \sin\left(\frac{\pi}{l}s\right) \rightarrow L''(0) < 0 \neq$

② Alternativamente, $L''(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D^2\gamma}{ds^2} + k(\gamma) Z(s), Z(s) \right\rangle ds$

$$Z = f(s) \cdot J\gamma'(s)$$

$$\frac{DZ}{ds}(s) = f'(s) J\gamma'(s) + f(s) \underbrace{\frac{D}{ds}(J\gamma')}$$

$$J \frac{D}{ds}\gamma' = 0$$

γ red.

$$\frac{D^2\gamma}{ds^2} = f''(s) J\gamma'(s)$$

γ is

$$L''(0) = - \int_0^l \langle f''(s) \cdot J\gamma'(s) + K(\gamma(s)) f(s) \cdot J\gamma'(s), f(s) \cdot J\gamma'(s) \rangle ds$$

$$= - \int_0^l f(s) \cdot (f''(s) + K(\gamma(s)) f(s)) ds$$

$$\left. \begin{array}{l} k(\gamma(s)) \geq \delta \\ f > 0 \end{array} \right\} f(s) K(\gamma(s)) \geq f(s) \cdot \delta \rightarrow f'' + fK(r) \geq f'' + f\delta$$

$$\rightarrow f(f'' + fK) \geq f(f'' + f\delta)$$

$$L''(0) \leq - \int_0^l f(s) (f''(s) + \delta f(s)) ds \leq - \int_0^l f(s) (f''(s) + \frac{\pi^2}{l^2} f(s)) ds \stackrel{\Sigma^0}{=} 0$$

$$l \geq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \frac{\pi}{l} < \sqrt{\delta} \rightarrow \delta > \frac{\pi^2}{l^2} \rightarrow \delta \gg \frac{\pi^2}{l^2} \rightarrow f(f'' + \delta f) \geq f(f'' + \frac{\pi^2}{l^2} f)$$

Loco $f \neq 0$, because $f''(s) + \frac{\pi^2}{l^2} f(s) = 0$

$$f(0) = 0 = f(l)$$

try solution as $f(s) = \sin\left(\frac{\pi}{l}s\right) \rightarrow 0 \leq L''(0) < 0 \neq$

- 6.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de geodésica parametrizado por el arco y sea $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una variación de γ tal que las curvas de la variación $\gamma_t(s) = \phi(s, t)$ son segmentos de geodésica de S parametrizados por el arco para todo valor de t . Demuestra que si las curvas de la variación $\{\gamma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ son ortogonales a la curva transversal $\beta_a(t) = \phi(a, t)$, entonces son ortogonales a todas las curvas transversales de la variación $\beta_s(t) = \phi(s, t)$ para todo valor de s .

$$\gamma'_t(a) \perp \beta'_a(t) \iff \frac{\partial \phi}{\partial s}(a, t) \perp \frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$\Downarrow \text{?}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) \perp \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \quad \forall s \in [a, b], \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Definimos

$$h(s, t) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right\rangle, \quad h : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(a, t) = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

J buscamos ver que $h \equiv 0$.

$$\text{Si } \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = 0 \Rightarrow h(s, t) = h(a, t) = 0, \quad \forall t, \forall s$$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle$$

Al fijar t , tenemos

$$\phi(s, t) = \gamma_t(s)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \gamma_t'(s)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, t) = \gamma_t''(s) \in (T_{\phi(s, t)} S)^\perp$$

γ_t geodéctica

Al fijar s , tenemos

$$\phi(s, t) = \beta_s(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = \beta_s'(t) \in T_{\phi(s, t)} S$$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \left\langle \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, t)}, \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle$$

$\gamma_t''(s) \perp \beta_s'(t)$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\|\gamma_t'(s)\|^2}_{\text{geod ppa}} \right) = 0$$

$\gamma' \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = 0 \quad \forall (s, t)$

- 6.2. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de geodésica parametrizado por el arco. Dada $\phi(s, t)$ una variación normal y propia de γ con campo variacional Z , demuestra que

$$L''(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2 Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s))Z(s), Z(s) \right\rangle ds.$$

$$\frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}, Z \right\rangle \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right), Z \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}, \frac{\partial Z}{\partial s} \right\rangle :$$

✓

$$\mathcal{H}(t) := \left\langle \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}, t \right\rangle + \left\| \frac{\partial Z}{\partial s} \right\|^2$$

$$\int_a^b \frac{d}{ds} \left(\left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}, Z \right\rangle \right) ds = \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}, Z \right\rangle ds + \int_a^b \left\| \frac{\partial Z}{\partial s} \right\|^2 ds$$

$$\left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}, Z \right\rangle \Big|_a^b = \left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}(b), t(b) \right\rangle - \underbrace{\left\langle \frac{\partial Z}{\partial s}(a), t(a) \right\rangle}_{=0}$$

propia

A continuación

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_a^b \left(\left\| \frac{\partial Z}{\partial s}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \left\| t(s) \right\|^2 \right) ds - \underbrace{\int_a^b \left\| \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}(s) \right\|^2 ds}_{=0} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}(s), t(s) \right\rangle ds \\ &= - \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} + K(\gamma(s))t, Z \right\rangle ds \end{aligned}$$

- 6.4.** Considera $\mathbb{S}^2(r) \subset R^3$ la esfera de radio $r > 0$. Demuestra que para todo punto $p \in \mathbb{S}^2(r)$ se cumple $K(p) = \delta$ con $\delta = 1/r^2 > 0$ y que el diámetro (intrínseco) de $\mathbb{S}^2(r)$ viene dado por $\text{diam}(\mathbb{S}^2(r)) = \pi r = \pi/\sqrt{\delta}$. Este ejemplo pone de manifiesto que la estimación para el diámetro de S dada en el Teorema de Bonnet es óptima, ya que en la esfera de radio r se verifica la igualdad.

- 6.5.** Sea S una superficie regular. Se define el diámetro extrínseco de S como

$$\text{diam}_{\text{ext}}(S) = \sup_{\forall p,q \in S} \|p - q\|.$$

Demuestra que $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \text{diam}(S)$. Concluye que si S es completa con curvatura de Gauss $K \geq \delta > 0$, entonces S es compacta y su diámetro extrínseco verifica $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$.

- 6.6. El funcional energía.** Sea $\alpha : [a,b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) en una superficie S , con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Se define la *energía* de α como

$$E(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|^2 du.$$

- i) Demuestra que $L(\alpha)^2 \leq (b-a)E(\alpha)$, dándose la igualdad si y solo si α está parametrizada proporcional al arco.
- ii) Demuestra que si $\gamma : [a,b] \rightarrow S$ es un segmento de geodésica minimizante (p.p.a.) con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, entonces para cualquier α uniendo p con q se tiene $E(\gamma) \leq E(\alpha)$, con igualdad si y sólo si α es a su vez un segmento de geodésica minimizante.
- iii) Sea $\alpha : [a,b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) y sea $\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una variación de $\alpha = \alpha(u)$ con campo variacional $Z(u)$. Considera la función

$$E(t) = E(\alpha_t) = \int_a^b \|\alpha'_t(u)\|^2 du$$

dada por la energía de las curvas de la variación $\alpha_t(u) = \phi(u, t)$. Demuestra que $E(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene

$$\frac{1}{2}E'(0) = \langle Z(u), \alpha'(u) \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle Z(u), \alpha''(u) \rangle du.$$

Concluye que si α es un segmento de geodésica, $E'(0) = 0$ para toda variación propia de α .

- 6.7.** Considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro circular recto de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, orientado por la aplicación de Gauss $N(x,y,z) = (x,y,0)$. Considera la curva $\alpha : [0,\pi] \rightarrow S$ dada por $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

6.5. Sea S una superficie regular. Se define el diámetro extrínseco de S como

$$\text{diam}_{\text{ext}}(S) = \sup_{\forall p, q \in S} \|p - q\|.$$

Demuestra que $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \text{diam}(S)$. Concluye que si S es completa con curvatura de Gauss $K \geq \delta > 0$, entonces S es compacta y su diámetro extrínseco verifica $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$.

Bonnet : $K \geq \delta > 0 \Rightarrow \text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$

Sabemos que

$$\|p - q\| \leq d(p, q) \quad \forall p, q$$



$$\text{diam}_{\text{ext}}(S) = \sup_{p, q \in S} \|p - q\| \leq \sup_{p, q \in S} d(p, q) = \text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

Bonnet

6.6. El funcional energía. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) en una superficie S , con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Se define la *energía* de α como

$$E(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|^2 du.$$

- i) Demuestra que $L(\alpha)^2 \leq (b-a)E(\alpha)$, dándose la igualdad si y solo si α está parametrizada proporcional al arco.
- ii) Demuestra que si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es un segmento de geodésica minimizante (p.p.a.) con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, entonces para cualquier α uniendo p con q se tiene $E(\gamma) \leq E(\alpha)$, con igualdad si y sólo si α es a su vez un segmento de geodésica minimizante.
- iii) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) y sea $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una variación de $\alpha = \alpha(u)$ con campo variacional $Z(u)$. Considera la función

$$E(t) = E(\alpha_t) = \int_a^b \|\alpha'_t(u)\|^2 du$$

dada por la energía de las curvas de la variación $\alpha_t(u) = \phi(u, t)$. Demuestra que $E(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene

$$\frac{1}{2}E'(0) = \left\langle Z(u), \alpha'(u) \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle Z(u), \alpha''(u) \rangle du.$$

Concluye que si α es un segmento de geodésica, $E'(0) = 0$ para toda variación propia de α .

(L) $\|\vec{f}, \vec{g}\| \leq \|\vec{f}\| \|\vec{g}\|$ con $\vec{f}, \vec{g} \in L^2$.

*desigualdad
de Cauchy-Schwarz*

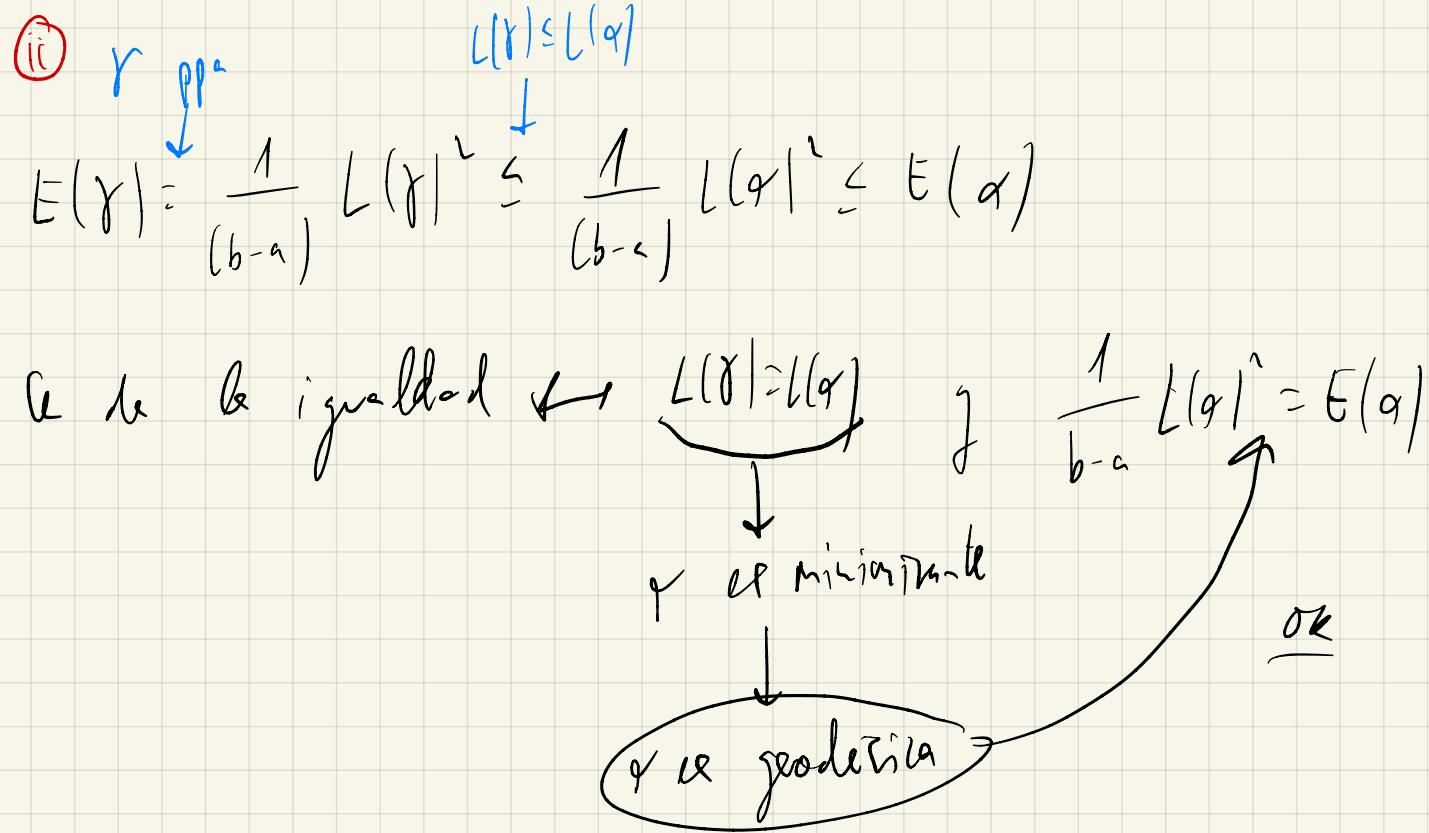
Espacio = $C([a, b])$ en L^2 .

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(u) g(u) du$$

$f, g \in C([a, b])$, $\left(\int_a^b |f(u)g(u)| du \right)^2 \leq \int_a^b |f(u)|^2 du \int_a^b |g(u)|^2 du$

$$L(\varphi)^2 = \left(\int_a^b \|\varphi'(u)\| du \right)^2 = \left(C \|\varphi'\|_{L^2} \right)^2 \leq C \|\varphi'\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} = C \|\varphi'\|_{L^2}^2 =$$

$$= E(\varphi) \cdot (b-a)$$



③ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $E(t) = E(\gamma_t) = \int_a^b \|\gamma'_t(u)\|^2 du = \int_a^b \left\| \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t)}_{f(u, t)} \right\|^2 du$

$f(u, t) : [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$

$E(t)$ es measurable en $t=0$.

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_a^b \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\|^2 du \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, t) \right\|^2 \right) du =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle \right) = 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle = 2 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right]$$

$$\frac{1}{2} E'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle \right) (u, t) du - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle (u, t) du$$

$$\frac{1}{2} E'(0) = \int_a^b \frac{d}{du} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u, 0) \right) du - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle (u, 0) du =$$

$$\beta_u'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial t} (u, 0) = z(u) \quad \left. \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u, 0) \right|_a^b$$

$$q_t'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial u} (u, 0) = q'(u)$$

$$= \left. \left\langle z(u), q'(u) \right\rangle \right|_a^b - \int_a^b \left\langle z(u), q''(u) \right\rangle du$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} E'(0) = \left\langle z(b), q'(b) \right\rangle - \left\langle z(a), q'(a) \right\rangle - \int_a^b \left\langle z(u), q''(u) \right\rangle du$$

Lema Convergencia: $q: [a, b] \rightarrow S$ c.p. c.v. peram.

q prodtice $\leftarrow E'(0) = 0$, tqd variaçao propria de g

$\boxed{\Rightarrow}$ ok

$\boxed{\Leftarrow}$ Red absurd: $\exists u_0 \in (a, b) / \frac{Dg'}{du}(u_0) \neq 0$, $\left\| \frac{Dg'}{du}(u_0) \right\| > 0$, $Z = \int \frac{Dg'}{du} du$

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ f(b) &= 0 \end{aligned}$$

- i) Demuestra que la aplicación $\phi : [0, \pi] \times (-1, 1) \rightarrow S$ dada por $\phi(s, t) = (\cos s, \operatorname{sen} s, t \operatorname{sen} s)$ define una variación normal y propia de α .
- ii) Para cada $t \in (-1, 1)$, se considera la función $L(t) = \text{longitud de la curva } \alpha_t$, donde, como es habitual, $\{\alpha_t\}_{t \in (-1, 1)}$ denota la familia de las curvas de la variación. Calcula $L'(0)$ y $L''(0)$.

6.8. Considera $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. contenida en el plano $z = 0$ de la forma $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$ y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro recto construido sobre la curva α , con su parametrización natural $X : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$

$$X(s, v) = \alpha(s) + (0, 0, v) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), v).$$

Dado $[a, b] \subset I$, considera el segmento de curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$, visto como curva en S .

- i) Demuestra que la aplicación $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ dada por

$$\phi(s, t) = \alpha(s) + (0, 0, f(s, t)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), f(s, t))$$

define una variación normal y propia de α , donde $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que cumple las siguientes propiedades: $f(s, 0) = f(a, t) = f(b, t) = 0$ para todo $s \in [a, b]$ y para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

- ii) Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se considera la función $L(t) = \text{longitud de la curva } \alpha_t$, donde, como es habitual, $\{\alpha_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ denota la familia de las curvas de la variación. Calcula $L'(0)$ y $L''(0)$.

- 6.7. Considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro circular recto de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, orientado por la aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Considera la curva $\alpha : [0, \pi] \rightarrow S$ dada por $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

- Demuestra que la aplicación $\phi : [0, \pi] \times (-1, 1) \rightarrow S$ dada por $\phi(s, t) = (\cos s, \sin s, f(t) \sin s)$ define una variación normal y propia de α .
- Para cada $t \in (-1, 1)$, se considera la función $L(t) =$ longitud de la curva α_t , donde, como es habitual, $\{\alpha_t\}_{t \in (-1, 1)}$ denota la familia de las curvas de la variación. Calcula $L'(0)$ y $L''(0)$.

① $\phi(s, t) = (\cos s, \sin s, f(t) \sin s) \quad f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, C^0$

ϕ variación normal y propia de $\alpha \leftarrow f \dots ??$

② $\phi(s, 0) = (\cos s, \sin s, f(0) \sin s) = \alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$
 \uparrow variación
 \uparrow propia

$\rightarrow f(0) = 0$

$q_f(0) = (1, 0, 0)$

③ $\alpha_t(s) = \phi(s, t) \quad \uparrow$
 $q_t(\pi) = (-1, 0, 0)$
 \uparrow propia

$q_t(0) = \phi(0, t) = (1, 0, 0) \quad \text{OK}$

$q_t(\pi) = \phi(\pi, t) = (-1, 0, 0) \quad \underline{\text{OK}}$

④ $\begin{aligned} t(s) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) = (0, 0, f'(0) \sin s) \\ q'(s) &= (-\sin s, \cos s, 0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} t(r) \perp \alpha'(r) \\ \text{Basta } f'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \underline{\text{OK}}$

$$\textcircled{ii} \quad \alpha_t(s) = \phi(s, t)$$

$$\alpha_t'(s) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = (-\cos s, \cos s, f(t) \cos s)$$

$$L: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|L'| = \int_a^b \|\alpha_t'(s)\| ds = \int_a^b \sqrt{1 + f(t)^2 \cos^2 s} ds$$

que es geodésica del cilindro

$$\rightarrow L'(0) > 0$$

//

γ es ppa:

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left\| \frac{Dz}{ds} \right\|^2 - \underbrace{k(\alpha(s))}_{0} \|z'\|^2 \right) ds = \int_a^b \left\| \frac{Dz}{ds} \right\|^2 ds$$

$$\begin{aligned} z'(s) &= (0, 0, f'(0) \cos s) \\ \perp \\ N(\alpha(s)) &= (\cos s, \sin s, 0) \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow \tau' = \frac{Dz}{ds} \right.$$

$$L''(0) = \int_0^\pi f'(0)^2 \cos^2 s ds = f'(0)^2 \int_0^\pi \cos^2 s ds$$

7. Integración en superficies

Definición 7.1 (Definición 2.5.3, p. 91, simplificada) Una **región de una superficie regular S** es un **subconjunto $R \subset S$ abierto, conexo y relativamente compacto** ~~su clausura es compacta~~

Si R es una región de S para la cual existe una parametrización (U, X) de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$, se define el **área de R** con respecto a la parametrización (U, X) como

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| (u, v) dudv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} (u, v) dudv.$$

Lema 7.2 (Lema 2.5.4, p. 91) Si R es una región de S para la cual existe una parametrización (U, X) de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$, el número $A(R)$ no depende de la parametrización elegida.

Corolario 7.3 (Corolario 2.5.5, p. 92) El área de una región $R \subset S$ viene dada por

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} (u, v) dudv,$$

donde (U, X) es cualquier parametrización de S para la cual $\bar{R} \subset X(U)$.

A continuación vamos a definir la integral de una función sobre una región de una superficie regular S . Sea $R \subset S$ una región de S y $f : R \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre R . Supongamos que existe una parametrización (U, X) de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$. Se define la **integral de f sobre R** con respecto a la parametrización (U, X) como

$$\int_R f dS = \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X)(u, v) \sqrt{EG - F^2} (u, v) dudv.$$

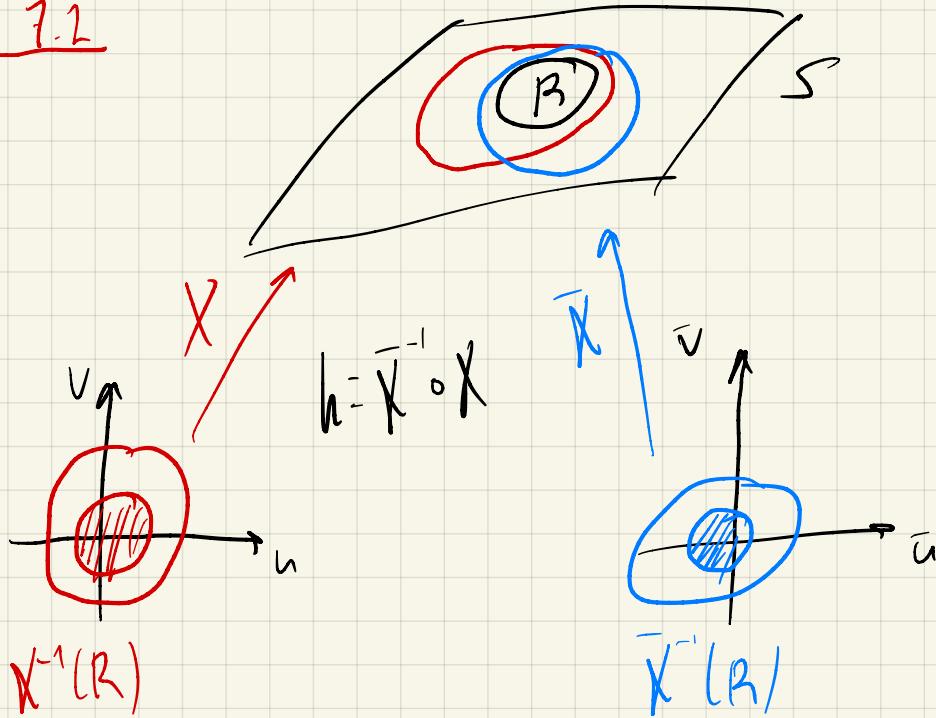
Lema 7.4 (Definición 4.2.1, p. 158) Si R es una región de S para la cual existe una parametrización (U, X) de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$, el número $\int_R f dS$ no depende de la parametrización elegida.

Corolario 7.5 (Definición 4.2.1, p. 158) La integral de una función continua sobre una región $R \subset S$ viene dada por

$$\int_R f dS = \iint_{X^{-1}(R)} (f \circ X)(u, v) \sqrt{EG - F^2} (u, v) dudv.$$

donde (U, X) es cualquier parametrización de S para la cual $\bar{R} \subset X(U)$.

Lema 7.1



here are difeomorphisms, $h = \bar{X}^{-1} \circ X$

$$h(u, v) = \bar{X}^{-1}(X(u, v)) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$$

$$X(u, v) = \bar{X}(h(u, v)) = \bar{X}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$$

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}}(h(u, v)) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}}(h(u, v)) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}}(h(u, v)) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}(u, v)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right)(u, v) = \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right)}_{\det(Jh)} \left[\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}}(h(u, v)) \right]$$

$$\rightarrow \sqrt{EG - F^2}(u, v) = \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|(u, v) = |\det(Jh)|(u, v) \cdot \left\| \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}}(h(u, v)) \right\| =$$

$$= |\det(Jh)|(u, v) \cdot \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}(h(u, v))$$

$$\iint_{V(R)} \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv = \iint_{X^{-1}(R)} |\det(Jh)(u,v)| \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} (h(u,v)) \, du \, dv =$$

$$d\bar{u} d\bar{v} = |\det(Jh)| \, du \, dv$$

$$= \iint_{h(X^{-1}(R))} \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} (\bar{u}, \bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v} = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} (\bar{u}, \bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v}$$

//

Lema 7.4

$$\iint_{\bar{\chi}^{-1}(R)} (f \circ \chi)(u, v) \sqrt{EG - F^2} (u, v) du dv =$$

$$f \circ \chi = f \circ \bar{\chi} \circ \bar{\chi}^{-1} \circ \chi = (f \circ \bar{\chi})(h)$$

$$(f \circ \chi)(u, v) = (f \circ \bar{\chi})(h(u, v))$$

$$= \iint_{\bar{\chi}^{-1}(R)} (f \circ \bar{\chi})(h(u, v)) \cdot |\det(Jh)(u, v)| \cdot \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} (h(u, v)) du dv$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = h(u, v)$$

$$= \iint_{\bar{\chi}^{-1}(R)} (f \circ \bar{\chi})(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} (\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v}$$

Evidentemente, con esta notación se tiene

$$A(R) = \int_R dS.$$

Cuando la región R no está contenida en la imagen de ninguna parametrización de S , todavía es posible extender las definiciones de área y de integral de una función (con soporte compacto) sobre R con la ayuda de particiones diferenciables de la unidad, pero no vamos a entrar en los detalles. Quien tenga interés en saber cómo se hace, puede consultarla en el libro de texto (Sección 4.2, pp. 157-162).

Terminamos este tema introduciendo un teorema de cambio de variable para integración sobre superficies. Obsérvese que, dada una aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies, se puede definir la aplicación $\det(d\phi) : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\det(d\phi)(p) = \det(d\phi_p)$ para cada $p \in S_1$. En estos términos, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.6 (Teorema 4.2.5 (del cambio de variable), p. 161) *Sea $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo entre superficies regulares, conexas y orientadas, con elementos de área dS_1 y dS_2 respectivamente. Para toda función continua (con soporte compacto) $f : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene*

$$\int_{S_2} f dS_2 = \int_{S_1} (f \circ \phi) |\det(d\phi)| dS_1 = \pm \int_{S_1} (f \circ \phi) \det(d\phi) dS_1,$$

donde el signo \pm depende de si ϕ conserva o invierte la orientación.

Como una interesante aplicación de esto, tenemos la siguiente interpretación del área esférica y de la curvatura de Gauss de una superficie. Antes de enunciarlo, observemos que para todo $p \in S$ con $K(p) \neq 0$, la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local en p , por lo que existe un entorno V de p en donde la restricción de N es un difeomorfismo entre V y su imagen $N(V)$, subconjunto abierto de \mathbb{S}^2 . En particular, existen regiones $R \subset S$ con $p \in R$ tales que $N|_R : R \rightarrow N(R)$ es un difeomorfismo entre superficies abiertas, con $N(R) \subset \mathbb{S}^2$ una región en la esfera \mathbb{S}^2 .

Teorema 7.7 (Teorema 4.2.5, p. 162) *Sea S una superficie regular y orientada con aplicación de Gauss N y sea $p \in S$ un punto con $K(p) \neq 0$. Consideremos $R \subset S$ una región de S con $p \in R$ tal que $N|_R : R \rightarrow N(R)$ es un difeomorfismo. El área esférica de $N(R) \subset \mathbb{S}^2$ viene dada por*

$$A(N(R)) = \int_{N(R)} d\mathbb{S}^2 = \int_R |K| dS.$$

Como consecuencia de esta fórmula se concluye que

$$|K(p)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(N(B_\epsilon))}{A(B_\epsilon)}.$$

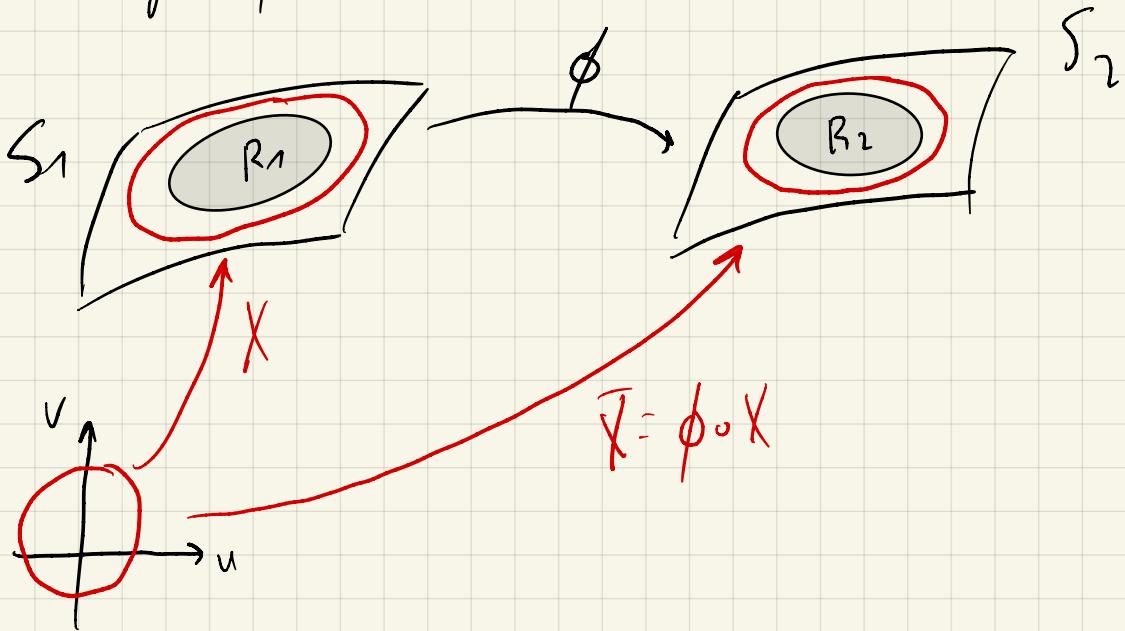
N difeo local en $p \mapsto dN_p = A_p : T_p S \rightarrow T_{Np} \mathbb{S}^2$ difeo local $\Leftrightarrow \det(dN_p) \neq 0$
 \downarrow
 $K(p) \neq 0$

Trm 7.6

$\phi: S_1 \rightarrow S_2$ difeomor�ano

$R_1 \subset S_1$ region / $\bar{R}_1 \subset X(u)$, $\phi(R_1) = R_2 \subset S_2$ ($\bar{R}_2 \subset \bar{X}(u)$, $\bar{X} = \phi \circ X$)

peran
 $\hookrightarrow S_2$



$$\int_{R_2} f dS_2 = \iint (f \circ \bar{X}) |(h_{uv})| \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} (u_{uv}) du dv$$

$$\bar{X}^{-1}(R_2)$$

$$\bar{X}(u_{uv}) = \phi \circ X(u_{uv})$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(u_{uv}) = d\phi_{X(u_{uv})} \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u_{uv}) \right)$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(u_{uv}) = d\phi_{X(u_{uv})} \left(\frac{\partial X}{\partial v}(u_{uv}) \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} \right\| = \left\| d\phi_{X(u_{uv})} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \wedge d\phi_{X(u_{uv})} \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) \right\|$$

$$d\phi_p: T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$$

$$\vec{v}, \vec{w} \in T_p S_1, \quad \|d\phi_p(\vec{v}) \wedge d\phi_p(\vec{w})\| = |\det(d\phi_p)| \| \vec{v} \wedge \vec{w} \| \quad (1)$$

Sei (1) ein vertikaler Satz

$$\begin{aligned} \int_{R_2} f dS_2 &= \iint_{X^{-1}(R_2)} (f \circ \bar{\chi})(u, v) \underbrace{\sqrt{\bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2}}_{\text{det}(d\phi_{X(u,v)})} |u, v| du dv = \\ &= \iint_{X^{-1}(R_2)} (f \circ \bar{\chi})(u, v) |\det(d\phi_{X(u,v)})| \sqrt{\bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2} du dv = \\ &\quad \text{oder } \text{es } \sqrt{\bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2} \end{aligned}$$

$$= \int_{R_1} (f \circ \phi) |\det(d\phi)| dS_1$$

$$\bar{E} = \langle \bar{\chi}_u, \bar{\chi}_v \rangle = \langle d\phi K_u, d\phi K_v \rangle = |\det(d\phi)| \langle K_u, K_v \rangle = |\det(d\phi)| E$$

$$\textcircled{B} \quad \|d\phi(v) \wedge d\phi(w)\| = |\det(d\phi)| \|v \wedge w\|$$

$$d\phi(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [a_{11}u_1 + a_{12}u_2]e_1 + [a_{21}u_1 + a_{22}u_2]e_2$$

$$\| df(v) \cap df(w) \| = \| \left([a_{11}v_1 + a_{12}v_2]e_1 + [a_{21}v_1 + a_{22}v_2]e_2 \right) \wedge \dots \wedge \left([a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2]e_1 + [a_{n2}v_1 + a_{nn}v_2]e_n \right) \wedge \dots \wedge \left([a_{1n}v_1 + a_{nn}v_2]e_1 + [a_{2n}v_1 + a_{nn}v_2]e_n \right) \wedge \dots \wedge \left([a_{(n-1)n}v_1 + a_{nn}v_2]e_1 + [a_{nn}v_1 + a_{nn}v_2]e_n \right) \wedge \dots \wedge \left([a_{nn}v_1 + a_{nn}v_2]e_1 + [a_{nn}v_1 + a_{nn}v_2]e_n \right) \|$$

$$\vdash \left| \left[a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \right] e_1 \wedge \left[a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \right] e_1 \right. \\ \left. + \left[a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \right] e_1 \wedge \left[a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \right] e_2 \right|$$

$$= \left\| (a_{11}v_1 + a_{12}v_2) \left(a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \right) e_2 \right\| e_1 \\ + \left\| (a_{11}v_1 + a_{12}v_2) \left(a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \right) e_1 \right\| e_2$$

$$= \left| \left[(a_{11}v_1 + a_{12}v_2)(a_{21}w_1 + a_{22}w_2) - (a_{21}v_1 + a_{22}v_2)(a_{11}w_1 + a_{12}w_2) \right] e_1 \wedge e_2 \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} a_{11}v_1(a_{21}w_1 + a_{22}w_2) + a_{12}v_2(a_{21}w_1 + a_{22}w_2) & -a_{21}v_1(a_{11}w_1 + a_{12}w_2) - a_{22}v_2(a_{11}w_1 + a_{12}w_2) \\ \end{bmatrix} \right| l_1 l_2$$

$$= \left| \begin{array}{c} \left[a_{11}(a_{21}w_1 + a_{22}w_2) - a_{21}(a_{11}w_1 + a_{12}w_2) \right] v_1 e_1 e_2 + \left[a_{12}a_{21}w_1 + a_{12}a_{22}w_2 - a_{22}a_{11}w_1 - a_{22}a_{12}w_2 \right] \\ \quad - \det(d\phi) w_1 \quad v_1 v_2 e_2 \\ \hline \underbrace{a_{11}a_{21}w_1 + a_{11}a_{22}w_2 - a_{21}a_{11}w_1 - a_{21}a_{12}w_2}_{\det(d\phi) \cdot w_2} \end{array} \right|$$

$$= \| \det(\mathbf{d}\mathbf{d}) \| \left\| \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_2 \right\| = \| \det(\mathbf{d}\mathbf{d}) \| \cdot \left(\left\| (\mathbf{v}_1 \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \right\| \right.$$

$\left. \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_1 \rangle \right)$

$$= \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_1, \langle \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{e}_2, \langle \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_1 \rangle \rangle$$

$$= \langle v, e_1 \langle w, e_2 \rangle - \langle v, e_2 \langle w, e_1 \rangle \rangle = \langle v, e_1 \langle w, e_2 \rangle - e_2 \langle w, e_1 \rangle \rangle$$

Trm 7.7

7.1. Ejercicios

7.1. Calcula el área de la esfera de radio r mediante la parametrización

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

7.2. Calcula el área del toro de revolución mediante la parametrización

$$X(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u), \quad r < a.$$

7.3. Calcula el área de la pseudoesfera, esto es, la superficie de revolución generada por la curva tractriz $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t + \log \operatorname{tg}(t/2))$, y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (\sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta, \cos t + \log \operatorname{tg}(t/2)), \quad (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi/2).$$

7.4. Sea $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, con $U = (0, 1) \times (0, 2\pi)$, una parametrización de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$ (un abierto del paraboloide de revolución). Calcula la integral sobre S de la función $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$.

7.5. Calcula la integral sobre la esfera de la función $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2$.

7.6. Sea $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja y sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones reales dadas por

$$f(u, v) = \operatorname{Re}(\phi(u + iv)) \quad \text{y} \quad g(u, v) = \operatorname{Im}(\phi(u + iv)),$$

siendo $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + iv \in \Omega\}$, de manera que $\phi(z) = f(z) + ig(z)$ para todo $z = u + iv \in \Omega$. Supongamos que las funciones f y g son diferenciables. Se dice que la función ϕ verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann si se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Demuestra que si $\phi(z)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $\operatorname{Área}(S_1) = \operatorname{Área}(S_2)$ siendo $S_1 = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$ y $S_2 = \{(u, v, g(u, v)) : (u, v) \in U\}$.

7.1. Calcula el área de la esfera de radio r mediante la parametrización

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

$$X: \underbrace{(0, \pi) \times (0, 2\pi)}_{U} \longrightarrow S^2(r)$$

$$X(U) = S^2(r) \setminus \{\text{semicírculo cerrado}\}$$

$$A(S^2(r)) = A(X(U)) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} (\theta, \varphi) d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r^2 \sin^2 \theta - 0^2} d\varphi d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi r^2$$

7.2. Calcula el área del toro de revolución mediante la parametrización

$$X(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u), \quad r < a.$$

$$X: \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]}_U \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall u_i \in \mathbb{T}$$
$$(q, 2\pi - \varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$$

1^a solución

$$A(\mathbb{T}^2) = A(X(U))$$

2^a solución

$$A(\mathbb{T}^2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} A(X(U_\xi))$$



$$E = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = (a + r \cos u)^2$$

$$A(\mathbb{T}^2) = \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} r(a + r \cos u)^2 du dv = 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r \cos u)^2 du$$

$$= 4\pi^2 ar$$

7.3. Calcula el área de la pseudoesfera, esto es, la superficie de revolución generada por la curva tractriz $\alpha(t) = (\text{sen } t, 0, \cos t + \log \operatorname{tg}(t/2))$, y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (\text{sen } t \cos \theta, \text{sen } t \operatorname{sen} \theta, \cos t + \log \operatorname{tg}(t/2)), \quad (\theta, t) \in \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi/2)}_{U}$$

R: $X(U)$ no es relativamente compacto:

$$\forall \varepsilon > 0, R_\varepsilon := X(U_\varepsilon), \quad U_\varepsilon = (0, 2\pi) \times \left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon)$$

sab

$$2\pi(1 - \cos \varepsilon) / \varepsilon = 2\pi$$

terminar

- 7.4. Sea $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, con $U = (0, 1) \times (0, 2\pi)$, una parametrización de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$ (un abierto del paraboloide de revolución). Calcula la integral sobre S de la función $f(x, y, z) = \sqrt{1+4z}$.

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(X)(u, v) \sqrt{EG - F^2} (u, v) dv du$$

$$f(X)(u, v) = \sqrt{1+4u^2}$$

$$E = 1+4u^2 \quad F=0 \quad G=u^2$$

7.6. Sea $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja y sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones reales dadas por

$$f(u, v) = \operatorname{Re}(\phi(u + iv)) \quad \text{y} \quad g(u, v) = \operatorname{Im}(\phi(u + iv)),$$

siendo $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + iv \in \Omega\}$, de manera que $\phi(z) = f(z) + ig(z)$ para todo $z = u + iv \in \Omega$. Supongamos que las funciones f y g son diferenciables. Se dice que la función ϕ verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann si se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Demuestra que si $\phi(z)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $\operatorname{Área}(S_1) = \operatorname{Área}(S_2)$ siendo $S_1 = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$ y $S_2 = \{(u, v, g(u, v)) : (u, v) \in U\}$.

$$K_1 : U \rightarrow S_1$$

$$K_1(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$K_2 : U \rightarrow S_2$$

$$K_2(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

$$A(S_1) = \iint_U \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, (u, v) \, du dv$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$$

$$E_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + 1$$

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$G_1 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2$$

$$A(S_2) = \iint_U \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, (u, v) \, du dv$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial u})$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial g}{\partial v})$$

$$E_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + 1 = \left(-\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1 = \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1 = G_1$$

$$F_2 = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} = -F_1$$

$$G_2 = 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 = E_1$$

$$\Rightarrow E_2 G_2 - F_2^2 = G_1 E_1 - (-F_1)^2 = E_1 G_1 - F_1^2$$

Bloque 3. Cálculo variacional en superficies

Geometría Global de Superficies
Grado en Matemáticas
Curso 2018-2019

Profesor Dr. Luis J. Alías
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Miércoles, 3 de abril de 2019

8. Variaciones del área. Superficies minimales

Definición (Definición (III), p. 164)

Una **superficie minimal** es una superficie regular S cuya curvatura media se anula en todo punto, es decir, $H(p) = 0$ para todo punto $p \in S$. En otras palabras, $H \equiv 0$.

Proposición (Ejercicio 4.6, p. 174)

Sea S una superficie minimal. La curvatura de Gauss de S verifica $K(p) \leq 0$ para todo punto $p \in S$, y se da la igualdad $K(p) = 0$ en un punto si y solo si p es totalmente geodésico, es decir, $A_p = 0$.

$$A_p(p) = d_A(p) = 0$$

Corolario (Ejercicio 4.5, p. 174)

No existen superficies minimales compactas.

La razón de la terminología **minimal** se debe a que las superficies con $H \equiv 0$ se pueden caracterizar como los puntos críticos del funcional área. Para ello necesitamos algunos preliminares.

Variaciones de una superficie

Definición (Adaptada de la Definición 4.4.1, p. 166)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y (U, X) una parametrización de S . Una **variación** de X es una aplicación diferenciable

$$\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

- i) $\Phi(u, v, 0) = \Phi_0(u, v) = X(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$;
- ii) Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, el conjunto $S_t = \Phi_t(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y la aplicación $\Phi_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi_t(u, v) = \Phi(u, v, t)$ es una parametrización de S_t .

Por lo tanto, la colección $\{S_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ es una familia de superficies regulares con $S_0 = X(U)$ y (U, Φ_t) es una parametrización de S_t . En particular, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la aplicación $(d\Phi_t)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $(u, v) \in U$, equivalentemente,

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0}$$

para todo $(u, v) \in U$ y para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definición

Sea Φ una variación de X . Se define el **campo variacional** de X como el campo

$$\xi(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Definición (Adaptada de la Definición 4.4.1, p. 166)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y (U, X) una parametrización de S .

Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre U , se define la **variación normal** de X determinada por φ como la variación

$\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u, v, t) = X(u, v) + t\varphi(u, v)N(X(u, v)),$$

donde

$$N(X(u, v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) (u, v)$$

es el vector normal unitario determinado por (U, X) y $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño para que la aplicación $\Phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sea una parametrización de $S_t = \Phi_t(U)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

En particular, si el soporte de φ es compacto, no es difícil demostrar que siempre existe tal $\varepsilon > 0$. Evidentemente, el campo variacional de la variación normal de X determinada por φ es normal a la superficie $S_0 = X(U)$ y viene dado por

$$\xi(u, v) = \varphi(u, v)N(X(u, v)).$$

Variaciones del área

Sea $R \subset S$ una región de S y sea (U, X) una parametrización de S tal que $\overline{R} \subset X(U)$. Dada Φ una variación de X , podemos considerar la función $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada t el área de la región $R_t = \Phi_t(X^{-1}(R)) \subset S_t$, es decir,

$$A(t) = A(R_t) = \iint_{\Phi_t^{-1}(R_t)} \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\| (u, v) dudv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} (u, v) dudv$$

donde $\Phi_t^{-1}(R_t) = X^{-1}(R) \subset U$ y

$$E_t(u, v) = \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}(u, v) \right\|^2$$

$$F_t(u, v) = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\rangle (u, v)$$

$$G_t(u, v) = \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}(u, v) \right\|^2.$$

Del mismo modo que vimos para el funcional longitud de arco, no es difícil demostrar que la función $A(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y su derivada en dicho entorno se puede calcular derivando bajo el signo integral, es decir,

$$A'(t) = \iint_{X^{-1}(R)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{E_t G_t - F_t^2}(u, v) dudv.$$

Para el caso particular de variaciones normales de X determinadas por una función φ , podemos establecer la siguiente fórmula de variación del área.

Primera fórmula de variación del área

Teorema (Primera fórmula de variación del área. Extraído del Teorema 4.4.3, p. 167)

Sea $R \subset S$ una región de una superficie regular S y sea (U, X) una parametrización de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$. Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre U , se considera Φ la variación normal de X determinada por φ . La función $A(t)$ dada por

$$A(t) = A(R_t) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} (u, v) dudv$$

es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene

$$A'(0) = -2 \iint_{X^{-1}(R)} \varphi(u, v) H(X(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv = -2 \int_R \hat{\varphi} H dS.$$

donde $\hat{\varphi} = \varphi \circ X^{-1} : X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}$.

Estamos ya en condiciones de establecer el siguiente resultado, en el que se caracterizan las superficies minimales como los puntos críticos del funcional área.

Teorema (Teorema 4.4.3, p. 167)

Un superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es minimal si y sólo si $A'(0) = 0$ para toda región $R \subset S$ y para toda variación normal de X con $\bar{R} \subset X(U)$.

8. Variaciones del área. Superficies minimales

Definición 8.1 (Definición (III), p. 164) Una superficie minimal es una superficie regular S cuya curvatura media se anula en todo punto, es decir, $H(p) = 0$ para todo punto $p \in S$. En otras palabras, $H \equiv 0$.

Proposición 8.2 (Ejercicio 4.6, p. 174) Sea S una superficie minimal. La curvatura de Gauss de S verifica $K(p) \leq 0$ para todo punto $p \in S$, y se da la igualdad $K(p) = 0$ en un punto si y solo si p es totalmente geodésico, es decir, $A_p = 0$.

Corolario 8.3 (Ejercicio 4.5, p. 174) No existen superficies minimales compactas.

La razón de la terminología **minimal** se debe a que las superficies con $H \equiv 0$ se pueden caracterizar como los puntos críticos del funcional área. Para ello necesitamos algunos preliminares.

Definición 8.4 (Adaptada de la Definición 4.4.1, p. 166) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y (U, X) una parametrización de S . Una variación de X es una aplicación diferenciable

$$\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

- i) $\Phi(u, v, 0) = \Phi_0(u, v) = X(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$;
- ii) Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, el conjunto $S_t = \Phi_t(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y la aplicación $\Phi_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi_t(u, v) = \Phi(u, v, t)$ es una parametrización de S_t .

Por lo tanto, la colección $\{S_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ es una familia de superficies regulares con $S_0 = X(U)$ y (U, Φ_t) es una parametrización de S_t . En particular, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la aplicación

$$(d\Phi_t)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es inyectiva para todo $(u, v) \in U$, equivalentemente,

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0}$$

para todo $(u, v) \in U$ y para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definición 8.5 Sea Φ una variación de X . Se define el **campo variacional de X** como el campo

$$\xi(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, v, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

A lo largo de este tema vamos a trabajar fundamentalmente con un tipo particular de variaciones, que vienen determinadas por una función sobre U . Son las llamadas **variaciones normales** de X .

Prop 8.2

$\forall p \in S, A_p : T_p S \rightarrow T_p S$

$$A_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v})$$

A_p diagonalizável em sua B.O.N. de $T_p S$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ B.O.N. de $T_p S$

$$A_p(\vec{e}_1) = \lambda_1(p) \vec{e}_1$$

$$\lambda_1(p), \lambda_2(p) \in \mathbb{R}$$

$$A_p(\vec{e}_2) = \lambda_2(p) \vec{e}_2$$

$$K(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A_p) = \frac{1}{2} (\lambda_1(p) + \lambda_2(p))$$

$$K(p) = \det(A_p) = \lambda_1(p) \lambda_2(p)$$

Propriedade geral

$\forall p \in S, K^2(p) - K(p) \geq 0$, " \Rightarrow " \Leftrightarrow p é um ponto ^{crítico} _{unstable} ($d_1 = d_2$)

Se $K=0 \rightarrow -K(p) \geq 0 \rightarrow K(p) \leq 0$ //

" \Leftarrow " \Leftrightarrow p é um ponto com $d_1 = d_2 = 0$ //
(totalmente indefinido)

Corolario 8.3

S compacta $\subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists p \in S, k(p) > 0 \xrightarrow{\text{prop}} S$ no
puede ser
minimal

Definición 8.6 (Adaptada de la Definición 4.4.1, p. 166) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y (U, X) una parametrización de S . Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre U , se define la **variación normal de X determinada por φ** como la variación $\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u, v, t) = X(u, v) + t\varphi(u, v)N(X(u, v)),$$

donde

$$N(X(u, v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right)(u, v)$$

es el vector normal unitario determinado por (U, X) y $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño para que la aplicación $\Phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sea una parametrización de $S_t = \Phi_t(U)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

En particular, si el soporte de φ es compacto, no es difícil demostrar que siempre existe tal $\varepsilon > 0$. Evidentemente, el campo variacional de la variación normal de X determinada por φ es normal a la superficie $S_0 = X(U)$ y viene dado por

$$\xi(u, v) = \varphi(u, v)N(X(u, v)).$$

Sea $R \subset S$ una región de S y sea (U, X) una parametrización de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$. Dada Φ una variación de X , podemos considerar la función $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada t el área de la región $R_t = \Phi_t(X^{-1}(R)) \subset S_t$, es decir,

$$A(t) = A(R_t) = \iint_{\Phi_t^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\| (u, v) dudv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} (u, v) dudv,$$

donde $\Phi_t^{-1}(R_t) = X^{-1}(R) \subset U$ y

$$\begin{aligned} E_t(u, v) &= \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \\ F_t(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\rangle(u, v) \\ G_t(u, v) &= \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}(u, v) \right\|^2. \end{aligned}$$

Del mismo modo que vimos para el funcional longitud de arco, no es difícil demostrar que la función $A(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y su derivada en dicho entorno se puede calcular derivando bajo el signo integral, es decir,

$$A'(t) = \iint_{X^{-1}(R)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} (u, v) dudv.$$

Para el caso particular de variaciones normales de X determinadas por una función φ , podemos establecer la siguiente fórmula de variación del área.

Para garantir que $S_t = \Phi_t(U)$ es sup. regular
podemos ver que $\left\{ \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\}$ L.I. $V(u, v) \in U$

$$\hookrightarrow \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|^2(u, v) > 0 \quad V(u, v) \in U$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial \psi}{\partial u} (N(X)) - t \psi A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial \psi}{\partial v} (N(X)) - t \psi A \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

$$\text{Sup } (\psi) = \overline{\{(u, v) \in U : \psi(u, v) \neq 0\}} \Rightarrow \psi = 0 \text{ en } U \setminus \text{Sup } (\psi) \text{ abs}$$

$$t(u, v) \notin \text{Sup } (\psi) \rightarrow \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

$$S_t = S_0 \text{ en } U \setminus \text{Sup } (\psi)$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} = \frac{\partial K}{\partial u} \wedge \frac{\partial K}{\partial v} + t \cdot \underbrace{V(u, v, t)}_{\mathbb{R}^3}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial K}{\partial u} \wedge \frac{\partial K}{\partial v} \right\|^2 + t \underbrace{\Psi(u, v, t)}_{\mathbb{R}}$$

$\boxed{t > 0} \rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial K}{\partial u} \wedge \frac{\partial K}{\partial v} \right\|^2 > 0 \quad \forall (u, v) \in \text{Supp}(P)$

$\forall (u, v) \in \text{Supp}(P), \exists \varepsilon_{(u, v)} > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|^2 (u, v) > 0 \quad \forall |t| < \varepsilon_{(u, v)}$$

Si $\text{Supp}(P)$ es compacto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ que cumple $\forall (u, v) \in \text{Supp}(P)$

Teorema 8.7 (Primera fórmula de variación del área. Extraído del Teorema 4.4.3, p. 167) Sea $R \subset S$ una región de una superficie regular S y sea (U, X) una parametrización de S tal que $\bar{R} \subset X(U)$. Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre U , se considera Φ la variación normal de X determinada por φ . La función $A(t)$ dada por

$$A(t) = A(R_t) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} (u, v) dudv$$

es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene

$$A'(0) = -2 \iint_{X^{-1}(R)} \varphi(u, v) H(X(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv = -2 \int_R \hat{\varphi} H dS.$$

donde $\hat{\varphi} = \varphi \circ X^{-1} : X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}$.

Estamos ya en condiciones de establecer el siguiente resultado, en el que se caracterizan las superficies minimales como los puntos críticos del funcional área.

Teorema 8.8 (Teorema 4.4.3, p. 167) Un superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es minimal si y sólo si $A'(0) = 0$ para toda región $R \subset S$ y para toda variación normal de X con $\bar{R} \subset X(U)$.

8.1. Ejercicios

8.1. Sea S una superficie regular y A_p su operador forma. Se define la *tercera forma fundamental* de S en p como $\text{III}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$.

- i) Demuestra que $\text{III}_p = 2H(p)\text{II}_p - K(p)\text{I}_p$, donde $\text{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y $\text{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
 - ii) Concluye que una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si existe $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y no nula tal que $\text{III}_p = \lambda(p)\text{I}_p$ para todo $p \in S$.
 - iii) En otras palabras, una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación conforme.
- 8.2.** Sea S una superficie regular que, localmente, puede expresarse como el grafo de una función diferenciable $u = u(x, y)$ definida sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Demuestra que S es minimal si y solo si la función $u(x, y)$ verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* de las superficies minimales. Las soluciones triviales de esta ecuación son las funciones lineales, de la forma $u(x, y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, cuyos grafos se corresponden con los planos, vistos como superficies minimales. Cualquier otra solución de esta ecuación da lugar a una superficie minimal no trivial (véase el ejercicio 8.7).

Thm 8.7

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial Y}{\partial u} - t^2 A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial Y}{\partial v} - t^2 A \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

$$E_t(u,v) = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle}_{-2t^2 \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\rangle} + \underbrace{t^2 \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + t^2 \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\rangle \right]}_{R_1(u,v)}$$

$$E_t(u,v) = E(u,v) - 2t^2 \cdot e(u,v) + t^2 \cdot R_1(u,v)$$

$$F_t(u,v) = F(u,v) - t^2 \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) \right\rangle + t^2 \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} - t^2 \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) \right\rangle + t^2 \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\rangle$$

$$= F(u,v) - 2t^2 f(u,v) + t^2 R_2(u,v)$$

$$G_t(u,v) = G(u,v) - 2t^2 g(u,v) + t^2 R_3(u,v)$$

$$E_t G_t = E G - 2t^4(E_j - eG) + t^2(E R_3 - 2t^4 e R_3)$$

Tfm 8.8

→ $H=0 \Rightarrow A'(0)=0$ la variazion normal determinada por ℓ

→ Red. abs: supponiamo S no minimal $\Rightarrow \exists p \in S, H(p) \neq 0$ en particular, en periodo de generalidad, podemos pensar que $H(p) > 0$.

Entonces $\exists V \in \mathcal{E}(p) / H(p) > 0 \wedge p \in V$.

$\rightarrow \exists R \subset X(u|CV)$ regn, s. $H(p) > 0 \wedge p \in \bar{R}$.

[considerando $\varphi = H_0 X$, s. $\varphi = H$, llegamos a la contradiccion]

$$A'(0) = -2 \int_R K^2 dS < 0$$

pero suponiamos que $A'(0) = 0$

8.1. Sea S una superficie regular y A_p su operador forma. Se define la *tercera forma fundamental* de S en p como $\text{III}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$.

- i) Demuestra que $\text{III}_p = 2H(p)\text{II}_p - K(p)\text{I}_p$, donde $\text{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y $\text{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- ii) Concluye que una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si existe $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y no nula tal que $\text{III}_p = \lambda(p)\text{I}_p$ para todo $p \in S$.
- iii) En otras palabras, una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación conforme.

(i) A endomorfismo: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\boxed{n=2} \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$$

Gyly-Hamilton: $P_A(\lambda) = 0$

$$A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0$$

$$P_{A_p}(\lambda) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p)$$

$$A_p^2 = 2H(p)A_p - K(p)I_2$$

$$\begin{aligned} \text{III}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \langle A_p^2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle 2H(p)A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle K(p)I_2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \\ &= 2H(p) \cancel{\langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} - K(p) \cancel{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} \end{aligned}$$

(ii)

→

$$\mathbb{H}_p = -\frac{K(p)}{\lambda(p)} T_p$$

Since $\lambda(p) \neq 0$ on $\partial\mu^n \setminus p$

$$\left. \begin{array}{l} -K(p) = 0 \\ K(p) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_1(p) = \lambda_2(p) = 0 \rightarrow \text{p umbilical}$$

~~✓~~

$$\rightarrow \lambda(p) \neq 0 \quad \forall p \in S$$

←

$$H_p \in S, \quad 2K(p) \mathbb{H}_p - K(p) T_p = \lambda(p) T_p$$

$$\rightarrow 2K(p) \mathbb{H}_p = (\lambda(p) + K(p)) T_p$$

$$\rightarrow \text{for } v, w \in T_p S, \quad 2K(p) \langle A_p v, w \rangle = (\lambda(p) + K(p)) \langle v, w \rangle$$

Since $K(p) \neq 0 \rightarrow \langle A_p v, w \rangle = \frac{\lambda(p) + K(p)}{2K(p)} \langle v, w \rangle = \langle \frac{\lambda(p) + K(p)}{2K(p)} v, w \rangle$

Rijemos $v \in T_p S, y \in T_p S$

$$\langle x, y \rangle = \langle a, y \rangle \Rightarrow x = a$$

$$A_p v = \frac{\lambda(p) + K(p)}{2K(p)} v$$

$$\forall v \in T_p S$$

(iii)

S minimal $\Leftrightarrow \mathbb{M}_p = d(p)T_p$ $d(p) \neq 0 \Leftrightarrow \langle A_p v, A_p w \rangle = d(p)\langle v, w \rangle$
 $d(p) = -K(p) > 0$ $\forall v, w \in T_p S$

$\Leftrightarrow \langle dN_p(v), dN_p(w) \rangle = d(p)\langle v, w \rangle, d(p) > 0$

$\hookrightarrow N: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ $\&$ aplicación conforme

$\phi: S_1 \rightarrow S_2$ es conforme si $\exists \lambda > 0$, $\lambda \in C^\infty(S_1)$

d.g.

$\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle = d(p)\langle v, w \rangle$ $\forall v, w$

- 8.2. Sea S una superficie regular que, localmente, puede expresarse como el grafo de una función diferenciable $u = u(x, y)$ definida sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Demuestra que S es minimal si y solo si la función $u(x, y)$ verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* de las superficies minimales. Las soluciones triviales de esta ecuación son las funciones lineales, de la forma $u(x, y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, cuyos grafos se corresponden con los planos, vistos como superficies minimales. Cualquier otra solución de esta ecuación da lugar a una superficie minimal no trivial (véase el ejercicio 8.7).

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, u(x, y))$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = (1, 0, u_x)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = (0, 1, u_y)$$

$$\left. \begin{array}{l} E = 1 + u_x^2 \\ F = u_x u_y \\ G = 1 + u_y^2 \end{array} \right\} \begin{aligned} EG - F^2 &= 1 + u_x^2 + u_y^2 \\ &= 1 + |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$N(\mathbf{x}(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} (-u_x, -u_y, 1) = (N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{S}^2$$

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} > 0$$

$$H = \frac{e^{b+jE} - 2F}{2(EG - F^2)}$$

$$e = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, N \right\rangle = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

$$f = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, N \right\rangle = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

$$g = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, N \right\rangle = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

$$H=0 \rightarrow eG+gE - 2fF=0$$

↑
↓

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_xu_y u_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 0$$

8.3. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular dada por $\alpha(t) = (f(t), 0, t)$, con $f(t) > 0$. Demuestra que la superficie de revolución generada por α al girar alrededor del eje OZ y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t)$$

es minimal si y solo si la función $f(t)$ verifica la ecuación diferencial

$$f(t)f''(t) - f'(t)^2 = 1 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{2f'(t)f''(t)}{1 + f'(t)^2} = \frac{2f'(t)}{f(t)}.$$

Concluye que S debe ser un trozo abierto de catenoide, es decir, de la superficie de revolución generada por la curva catenaria, la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = \left(a \cosh \left(\frac{t}{a} + b \right), 0, t \right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

8.4. Demuestra que el helicoide, parametrizado por la aplicación $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

es una superficie minimal.

8.5. Demuestra que la superficie de Enneper, parametrizada por

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

es una superficie minimal.

8.6. Demuestra que la primera superficie de Scherk, dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^z \cos x - \cos y = 0\},$$

es una superficie minimal. Indicación: observa que S puede expresarse como el grafo $z = u(x, y)$ de la función

$$u(x, y) = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$$

definida sobre el abierto (no conexo) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos x \cos y > 0\}$.

A modo de curiosidad, se puede ver que

$$\Omega = \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}, m+n \text{ es par}} \Omega_{m, n},$$

donde $\Omega_{m, n}$ es el cuadrado abierto $(m\pi - \pi/2, m\pi + \pi/2) \times (n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)$. Por lo tanto, Ω se puede ver como el conjunto de los cuadrados negros de un tablero de ajedrez infinito con vértices los puntos de \mathbb{R}^2 de la forma $(m\pi + \pi/2, n\pi + \pi/2)$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, en el cual se han coloreado de negro los cuadrados $\Omega_{m, n}$ cuando $m + n$ es par y de blanco cuando $m + n$ es impar.

8.3. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular dada por $\alpha(t) = (f(t), 0, t)$, con $f(t) > 0$. Demuestra que la superficie de revolución generada por α al girar alrededor del eje OZ y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t)$$

es minimal si y solo si la función $f(t)$ verifica la ecuación diferencial

$$f(t)f''(t) - f'(t)^2 = 1 \quad \text{o, equivalentemente, } \frac{2f'(t)f''(t)}{1+f'(t)^2} = \frac{2f'(t)}{f(t)}.$$

Concluye que S debe ser un trozo abierto de catenoide, es decir, de la superficie de revolución generada por la curva catenaria, la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = \left(a \cosh\left(\frac{t}{a} + b\right), 0, t \right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha'(t) = (f'(|t|), 0, 1) \quad \| \alpha'(t) \|^2 = 1 + f'(|t|)^2 \geq 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = (-f(|t|) \sin \theta, f(|t|) \cos \theta, 0) \quad E = f'(|t|)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (f'(|t|) \cos \theta, f'(|t|) \sin \theta, 1) \quad F = 0$$

$$G = 1 + f'(|t|)^2$$

$$H = 0 \rightarrow eG + fF = 0$$

$$\dots \text{ vale } f'(|t|) f''(|t|) - f'(|t|)^2 = 1$$

Otra forma

$$N(\alpha(g, t))$$

$$A_X \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial (N \circ \alpha)}{\partial \theta} = - \frac{1}{f(|t|) \sqrt{1+f'(|t|)^2}} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$A_X \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) = - \frac{\partial (N \circ \alpha)}{\partial t} = - \frac{f''(|t|)}{(1+f'(|t|)^2)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$H = 0 \rightarrow d_1 = -d_2$$

d2

$$n=0 \rightarrow f'' = 1 + f'^2 \rightarrow \frac{ff''}{1+f'^2} = 1 \rightarrow \frac{ff''}{1+f'^2} = \frac{f'}{f}$$

$$\leftarrow \frac{1}{2} \int \frac{2ff''}{1+f'^2} = \int \frac{f'}{f} = \log(f(t)) + C = \log(cf(t))$$

$$\frac{1}{2} \log(1+f'(t)^2)$$

$$\leftarrow \log(1+f'(t)^2) = \log(c^2 f(t)^2)$$

$$\leftarrow 1-f'(t)^2 = (cf(t))^2$$

$$\leftarrow \int \frac{f'(t)}{\sqrt{c^2 f(t)^2 - 1}} = \int_{\pm 1}^t \xrightarrow{cf(t)=\cosh(x)} \frac{1}{c} \int \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh(x)}} dx = \pm t + C$$

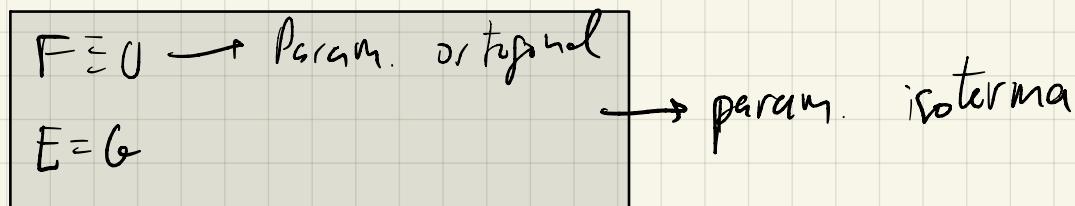
$\frac{f'(t)}{c} dt = \sinh(x) dx$

$$\leftarrow x = \pm t + C \rightarrow f(t) = \frac{1}{c} \sinh(\pm t + C) = \frac{1}{c} \cosh(at+b)$$

Parametrización isotérmica

$(X(U))$ param. de S

E, F, G conforme 1-FF



Si $(X(U))$ isotérmica, es minimal \Leftrightarrow $(H = 0)$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial V^2} = 0$$

8.8 a)

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

$$E = \cosh^2(t)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = (-\cosh t \sin \theta, \cosh t \cos \theta, 0)$$

$$F = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (\sinh t \cos \theta, \sinh t \sin \theta, 1)$$

$$G = \sinh^2(t) + 1 = \cosh^2(t)$$

$\rightarrow X$ es Rotación

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow S \text{ minimal}$$

Den der \oplus

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} = \underbrace{\Gamma_{11}^1 \frac{\partial K}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial K}{\partial v}}_{\text{tangente}} + eN$$

+

$$\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = \underbrace{\Gamma_{22}^1 \frac{\partial K}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial K}{\partial v}}_{\text{tangente}} + gN$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = (e+g)N = 2HEN$$

↓

$$K_{uu} + K_{vv} = 2HEN$$

↳

$$K=0 \iff K_{uu} + K_{vv} = 0$$

Isotoma: $F=0$

$E=0$

↓

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2$$

$$H: \frac{eG + gE - 2fF}{2(tG - F)} = \frac{eG + gE}{2EG} =$$

$$: \frac{E(e+g)}{2E^2} = \frac{e+g}{2E} \rightarrow e+g = 2HEN$$

8.7. La primera superficie de Scherk se puede caracterizar como la única superficie minimal no trivial que viene dada como grafo de una función de la forma $u(x,y) = f(x) + g(y)$. Este resultado fue obtenido en 1835 por Scherk, quien demostró que una función de la forma $u(x,y) = f(x) + g(y)$ es una solución no trivial de la ecuación de Euler-Lagrange si y solo si viene dada por

$$u(x,y) = -\frac{1}{a} \log(\cos(ax)) + \frac{1}{a} \log(\cos(ay)) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos(ay)}{\cos(ax)} \right), a \neq 0.$$

8.8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el catenoide obtenido como superficie de revolución alrededor del eje OZ de la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (\cosh t, 0, t)$, parametrizado por la aplicación

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

convenientemente restringida a abiertos $U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, en los que $X(\theta, t)$ sea inyectiva.

- i) Demuestra que S es una superficie minimal. ¿Tiene algún punto umbílico?
- ii) Para cada $a > 0$, calcula el área del trozo de catenoide $S_a = \{(x,y,z) \in S : |z| < a\}$.
- iii) Observa que S_a es el trozo abierto de catenoide cuya frontera está formada por dos circunferencias, que son precisamente las circunferencias obtenidas al cortar el catenoide S con los planos $z = a$ y $z = -a$. Existe otra superficie minimal (no conexa) con la misma frontera que S_a , que es justamente la formada por la unión disjunta de los dos discos planos determinados por las dos circunferencias $z = a$ y $z = -a$. Denotando por \hat{S}_a a esta otra superficie minimal, se tiene que $\hat{S}_a = D_+(a) \cup D_-(a)$, siendo $D_+(a)$ y $D_-(a)$ los dos discos planos determinados por las dos circunferencias $z = a$ y $z = -a$, respectivamente. Calcula el área de \hat{S}_a y demuestra que para valores de a suficientemente grandes se tiene que $\text{área}(\hat{S}_a) < \text{área}(S_a)$.

8.8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el catenoide obtenido como superficie de revolución alrededor del eje OZ de la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (\cosh t, 0, t)$, parametrizado por la aplicación

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

convenientemente restringida a abiertos $U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, en los que $X(\theta, t)$ sea inyectiva.

- (Tarea 6)
- i) Demuestra que S es una superficie minimal. ¿Tiene algún punto umbílico?
 - ii) Para cada $a > 0$, calcula el área del trozo de catenoide $S_a = \{(x, y, z) \in S : |z| < a\}$.
 - iii) Observa que S_a es el trozo abierto de catenoide cuya frontera está formada por dos circunferencias, que son precisamente las circunferencias obtenidas al cortar el catenoide S con los planos $z = a$ y $z = -a$. Existe otra superficie minimal (no conexa) con la misma frontera que S_a , que es justamente la formada por la unión disjunta de los dos discos planos determinados por las dos circunferencias $z = a$ y $z = -a$. Denotando por \hat{S}_a a esta otra superficie minimal, se tiene que $\hat{S}_a = D_+(a) \cup D_-(a)$, siendo $D_+(a)$ y $D_-(a)$ los dos discos planos determinados por las dos circunferencias $z = a$ y $z = -a$, respectivamente. Calcula el área de \hat{S}_a y demuestra que para valores de a suficientemente grandes se tiene que $\text{área}(\hat{S}_a) < \text{área}(S_a)$.

i)

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

$$E = \cosh^2(t)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = (-\cosh t \sin \theta, \cosh t \cos \theta, 0)$$

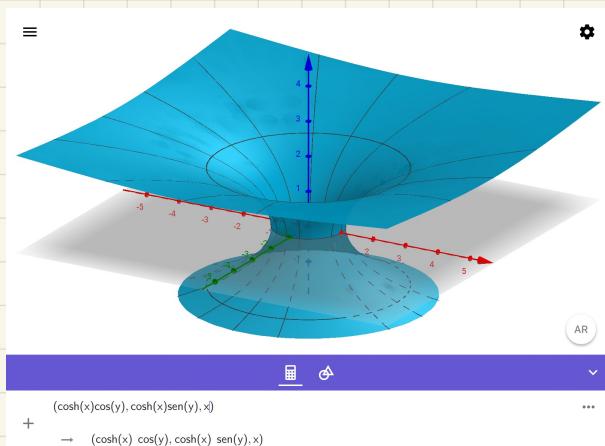
$$F = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (\sinh t \cos \theta, \sinh t \sin \theta, 1)$$

$$G = \sinh^2(t) + 1 = \cosh^2(t)$$

$\rightarrow X$ es Rotinaria

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow S \text{ minimal}$$



6

$$A(S_a) = \iint_{X^{-1}(S_a)} \sqrt{EG - D^2} \, d\theta dt = \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \sqrt{ch^4(t)} \, d\theta dt =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^a ch^2(t) \, dt = 4\pi \int_0^a ch^2(t) \, dt$$

$$\int_0^a ch^2(t) \, dt = [ch(t)ch(t)]_0^a - \int_0^a sh^2(t) \, dt = ch(a)sh(a) - \int_0^a sh^2(t) \, dt$$

$$u = ch(t), du = sh(t)dt$$

$$dv = ch(t)dt, v = sh(t)$$

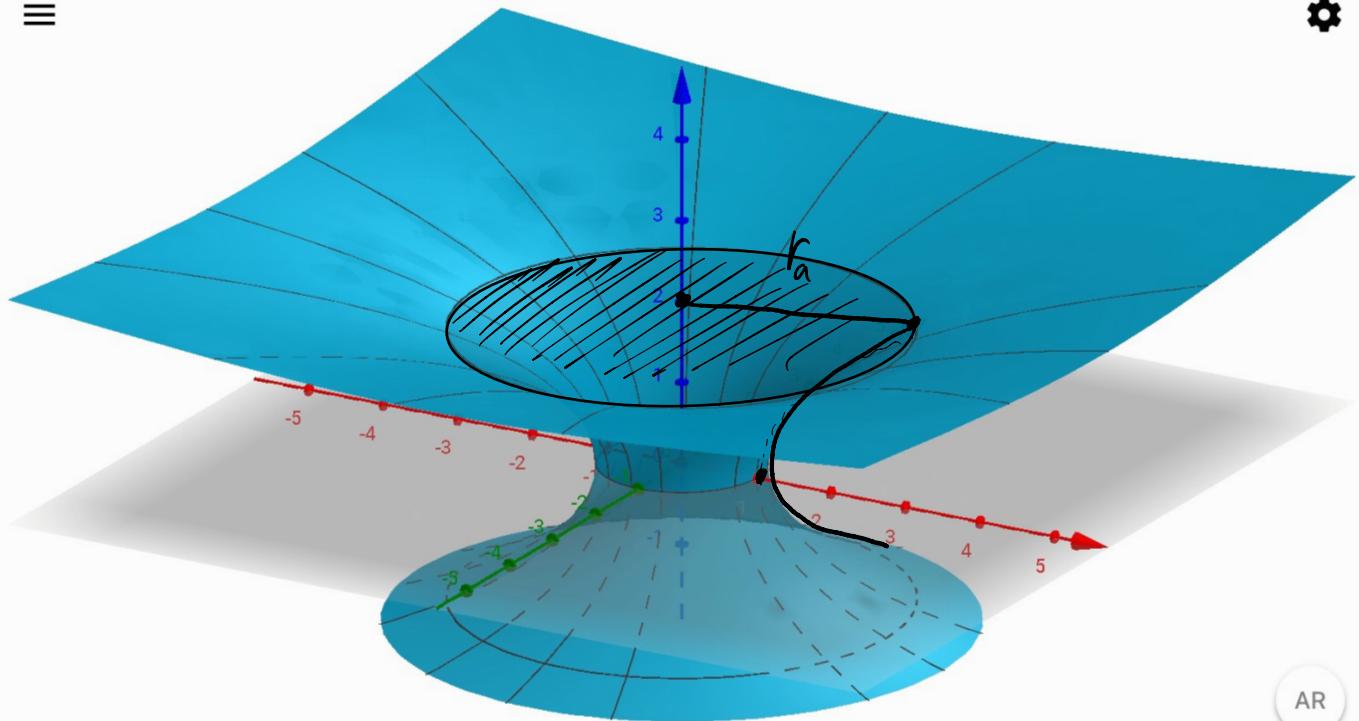
$$= ch(a)sh(a) - \int_0^a ch^2(t) \cdot 1 \, dt = ch(a)sh(a) + a - \int_0^a ch^2(t) \, dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^a ch^2(t) \, dt = ch(a)sh(a) + a \rightarrow \int_0^a ch^2(t) \, dt = \frac{ch(a)sh(a) + a}{2}$$

7 es

$$A(S_a) = 2\pi(ch(a)sh(a) + a)$$

④



AR



$$(\cosh(x)\cos(y), \cosh(x)\sin(y), x)$$

+

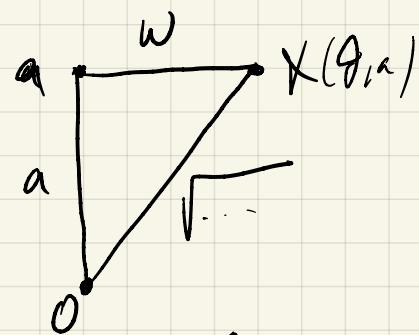
$$\rightarrow (\cosh(x) \cos(y), \cosh(x) \sin(y), x)$$

$|t|=a$, pr. ejemplu $t=a$:

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

$$\rightarrow X(\theta, a) = (\cosh a \cos \theta, \cosh a \sin \theta, a)$$

$$\|X(\theta, a)\| = \sqrt{\cosh^2 a + a^2}$$



$$\cosh^2 a + a^2 = w^2 \rightarrow w^2 = \cosh^2 a + a^2 \xrightarrow{w \geq 0} w = \sqrt{\cosh^2 a + a^2}$$

$$\text{Ari}, \quad A(S_a) = 2 \cdot A(D_{\cosh(a)}) = 2 \cdot \pi \cdot \cosh^2(a)$$

$$A(\widehat{S_a}) < A(S_a) \Leftrightarrow 2\pi ch^2(a) < 2\pi (cha sha + a)$$

$$\Leftrightarrow ch^2(a) < cha sha + a$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right)^2 < \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{2} + a$$

$$\cancel{\frac{e^{2a} + 1 + e^{-2a}}{4}} < \cancel{\frac{e^{2a} - 1 + 1 - e^{-2a}}{4}} + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + e^{-2a}}{4} < \frac{4a - e^{-2a}}{4} \Leftrightarrow 1 + e^{-2a} < 4a - e^{-2a}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot e^{-2a} < 4a$$

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow 0 & \downarrow & \\ 1 & & \\ & & \downarrow a \rightarrow \infty \\ & & \infty \end{array}$$

Bloque 4

Geometría Global de Superficies
Grado en Matemáticas
Curso 2019-2020

Profesor Dr. Luis J. Alías
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Viernes, 8 de mayo de 2020

Curvatura geodésica y Teorema de Liouville

Lema

Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $f^2 + g^2 = 1$. Dado $t_0 \in I$, sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_0) = \cos \theta_0$ y $g(t_0) = \sin \theta_0$. Entonces existe una única función continua $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\theta(t_0) = \theta_0$ y tal que

$$f(t) = \cos \theta(t) \quad \text{y} \quad g(t) = \sin \theta(t)$$

para todo $t \in I$.

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular, no necesariamente parametrizada por el arco, y sean $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$ dos campos de vectores diferenciables a lo largo de α que forman una base ortonormal y positivamente orientada de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in [0, \ell]$, de modo que $J\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t)$ para todo t . Sea $V(t)$ un campo de vectores diferenciable y unitario, tangente a S a lo largo de α . Por el lema anterior, existe una función $\theta(t)$ diferenciable tal que

$$V(t) = \cos \theta(t) \mathbf{e}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{e}_2(t)$$

para todo t . En esa situación, decimos que la función θ es el **ángulo de rotación** del campo de vectores V con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1 .



Obsérvese que

$$\frac{D\mathbf{e}_1}{dt}(t) = \omega(t)\mathbf{e}_2(t) \quad \text{y} \quad \frac{D\mathbf{e}_2}{dt}(t) = -\omega(t)\mathbf{e}_1(t)$$

para una cierta función diferenciable ω dada por

$$\omega(t) = \langle \mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}_2(t) \rangle = -\langle \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}'_2(t) \rangle.$$

Se tiene entonces la siguiente fórmula:

$$\frac{DV}{dt}(t) = (\theta'(t) + \omega(t))JV(t).$$

En particular, consideremos el caso en que $\alpha : I \longrightarrow S$ es una curva regular ppa y existe (U, X) una parametrización orthogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. En este caso, podemos tomar

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s))$$

y

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(u(s), v(s))$$

donde, como siempre, $\tilde{\alpha}(s) = (X^{-1} \circ \alpha)(s) = (u(s), v(s))$ es la expresión en coordenadas de α . Consideremos como campo unitario V la propia velocidad de α , $V(s) = \alpha'(s)$, de modo que se tiene

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s) \mathbf{e}_1(s) + \sin \theta(s) \mathbf{e}_2(s),$$

donde θ es el ángulo de rotación de la velocidad de α con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1 .

Se tiene entonces que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = (\theta'(s) + \omega(s))J\alpha'(s).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s)J\alpha'(s),$$

donde κ_g denota la curvatura geodésica de α , se llega a que

$$\kappa_g(s) = \theta'(s) + \omega(s).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\omega(s) = \langle \mathbf{e}'_1(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle$ y después de una serie de cálculos usando que

$$\mathbf{e}'_1(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \right) \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) + \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

se llega a que

$$\omega(s) = \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

donde $E(s) = E(u(s), v(s))$ y $G(s) = G(u(s), v(s))$.

Por otra parte, para cada v fijo podemos considerar la curva de parámetro u dada por

$$\alpha_v(u) = X(u, v)$$

definida para todo u tal que $(u, v) \in U$. Análogamente, para cada u fijo podemos considerar la curva de parámetro v dada por

$$\beta_u(v) = X(u, v)$$

definida para todo v tal que $(u, v) \in U$. Son las llamadas curvas coordenadas de la parametrización, que cumplen

$$\alpha'_v(u) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad \alpha''_v(u) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u, v),$$

y

$$\beta'_u(v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \quad \text{y} \quad \beta''_u(v) = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u, v).$$

Teniendo en cuenta que la parametrización es ortogonal y está positivamente orientada, se tiene

$$J\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \quad \text{y} \quad J\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right) = -\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Entonces, si denotamos por $(\kappa_g)_1(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\alpha_v(u)$ y por $(\kappa_g)_2(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\beta_u(v)$, a partir de estas expresiones se llega a que

$$(\kappa_g)_1(u, v) = \kappa_g^{\alpha_v}(u) = -\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

y

$$(\kappa_g)_2(u, v) = \kappa_g^{\beta_u}(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u}(u, v).$$

A partir de aquí llegamos al siguiente resultado.

Teorema (Teorema de Liouville)

Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva regular ppa tal que existe (U, X) una parametrización ortogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. Entonces, con la notación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\kappa_g(s) &= \theta'(s) + \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right. \\ &= \theta'(s) + \cos \theta(s)(\kappa_g)_1(u(s), v(s)) + \sin \theta(s)(\kappa_g)_2(u(s), v(s)).\end{aligned}$$

Teorema de rotación de las tangentes

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ un segmento de curva regular a trozos, ppa, y sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Supongamos además que la curva α es cerrada (es decir, con $\alpha(0) = \alpha(\ell)$) y simple (es decir, con $\alpha(s) \neq \alpha(s')$ para todos $s, s' \in (0, \ell)$ distintos, y que α encierra una región simplemente conexa $R \subset S$). En tal caso, diremos que la imagen Γ de α es un **polígono curvado** en S . Diremos entonces que la parametrización de α está positivamente orientada si $J\alpha'(s)$ apunta al interior de R para todo $s \in [0, \ell]$ que no sea un vértice.

En cada vértice $\alpha(s_i)$ podemos definir el **ángulo exterior** de la siguiente manera. Recuérdese que en cada vértice $\alpha(s_i)$, con $i = 1, 2, \dots, k - 1$, tenemos 2 vectores velocidad, la velocidad *que llega* a $\alpha(s_i)$

$$\alpha'_-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \alpha'(s) = \alpha'_i(s_i)$$

y la velocidad *que sale* de $\alpha(s_i)$

$$\alpha'_+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \alpha'(s) = \alpha'_{i+1}(s_i),$$

donde $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$.

En el caso especial del vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$, la velocidad que llega es

$$\alpha'_-(\ell) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \alpha'(s) = \alpha'_k(\ell)$$

y la velocidad *que sale* es

$$\alpha'_+(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \alpha'_1(0).$$

Se considera entonces para cada vértice $\alpha(s_i)$ con $i = 1, 2, \dots, k - 1$ la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(s_i), J\alpha'_-(s_i)\}$ y se define el ángulo exterior en $\alpha(s_i)$ como el único ángulo $\varepsilon_i \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$\alpha'_+(s_i) = \cos \varepsilon_i \alpha'_-(s_i) + \sin \varepsilon_i J\alpha'_-(s_i).$$

En el vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ se define del mismo modo pero considerando la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(\ell), J\alpha'_-(\ell)\}$, de modo que

$$\alpha'_+(0) = \cos \varepsilon_k \alpha'_-(\ell) + \sin \varepsilon_k J\alpha'_-(\ell).$$

El siguiente resultado es un resultado topológico que *nos tenemos que creer*.

Teorema (Teorema de rotación de las tangentes)

Sea $\alpha : [0, \ell] \longrightarrow S$ una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ tal que $\Gamma = \alpha([0, \ell]) \subset X(U)$ para una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de la superficie. Sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Se cumple la siguiente fórmula

$$\sum_{i=1}^k (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los correspondientes ángulos exteriores y donde θ_i es el ángulo de rotación de la velocidad de la curva regular α_i con respecto al campo de vectores $\mathbf{e}_1 = X_u(\tilde{\alpha}(s))/\sqrt{E(s)}$.

El Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)

Para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, en su versión local, necesitamos además del material que ya hemos introducido el clásico teorema de Green en \mathbb{R}^2 , enunciado de la siguiente manera.

Teorema (Teorema de Green)

Sea $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\alpha}(s) = (u(s), v(s))$, una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ en \mathbb{R}^2 , y sea Ω el dominio encerrado por $\Gamma = \partial\Omega$. Sean $P, Q : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, $P = P(u, v)$ y $Q = Q(u, v)$. Se tiene la siguiente igualdad:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right) dudv = \int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s))ds,$$

donde, para simplificar la notación, estamos poniendo

$$P(s) = P(u(s), v(s)) \quad y \quad Q(s) = Q(u(s), v(s)),$$

Evidentemente, en la expresión anterior se entiende que

$$\int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s))ds = \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s))ds,$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ es una partición de $[0, \ell]$ tal que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α y cada $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$ es diferenciable.

Podemos ya enunciar el teorema de Gauss-Bonnet (versión local) como sigue.

Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet (versión local))

Sea Γ un polígono curvado en una superficie regular S que está contenido en la imagen de una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de S y que encierra una región simplemente conexa R , con $\Gamma = \partial R$. Entonces

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los ángulos exteriores en los vértices de ∂R .

Bloque 4. El Teorema de Gauss-Bonnet

Luis J. Alías

13 de mayo de 2021

9. El Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)

9.1. Curvatura geodésica y Teorema de Liouville

Lema 9.1 Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $f^2 + g^2 = 1$. Dado $t_0 \in I$, sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_0) = \cos \theta_0$ y $g(t_0) = \sin \theta_0$. Entonces existe una única función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\theta(t_0) = \theta_0$ y tal que

$$f(t) = \cos \theta(t) \quad y \quad g(t) = \sin \theta(t)$$

para todo $t \in I$.

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular, no necesariamente parametrizada por el arco, y sean $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$ dos campos de vectores diferenciables a lo largo de α que forman una base ortonormal y positivamente orientada de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in [0, \ell]$, de modo que $J\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t)$ para todo t . Sea $V(t)$ un campo de vectores diferenciable y unitario, tangente a S a lo largo de α . Por el lema anterior, existe una función $\theta(t)$ diferenciable tal que

$$V(t) = \cos \theta(t) \mathbf{e}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{e}_2(t)$$

para todo t . En esa situación, decimos que la función θ es el **ángulo de rotación** del campo de vectores V con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1 .

Obsérvese que

$$\frac{D\mathbf{e}_1}{dt}(t) = \omega(t) \mathbf{e}_2(t) \quad y \quad \frac{D\mathbf{e}_2}{dt}(t) = -\omega(t) \mathbf{e}_1(t)$$

para una cierta función diferenciable ω dada por

$$\omega(t) = \langle \mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}_2(t) \rangle = -\langle \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}'_2(t) \rangle.$$

Se tiene entonces la siguiente fórmula:

$$\frac{DV}{dt}(t) = (\theta'(t) + \omega(t)) JV(t).$$

lema 9.1

Definimos

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t (f(u)g'(u) - f'(u)g(u)) du$$

Consideramos

$$h(t) = (f(t) - \cos \theta(t))^2 + (g(t) - \sin \theta(t))^2$$

$$h: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{h} = ?$$

$$h(t_0) = 0 \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{1}{2} h'(t) = (f(t) - \cos \theta(t))(f'(t) + \theta'(t) \sin \theta(t))$$

$$+ (g(t) - \sin \theta(t))(g'(t) - \theta'(t) \cos \theta(t))$$

$$= (f - \cos \theta)(f' + (fg' - f'g) \sin \theta)$$

$$+ (g - \sin \theta)(g' - (fg' - f'g) \cos \theta) =$$

$\theta' = fg' - f'g$

$$\boxed{f^2 + g^2 = 1 \rightarrow ff' + gg' = 0}$$

$$= ff' + fg' \sin \theta - fg' g \cos \theta - f' \cos \theta - fg' \cos \theta \sin \theta + f'g \cos \theta \sin \theta$$

$$+ gg' - gg' \cos \theta + fg^2 \cos \theta - g' \sin \theta + fg' \sin \theta - fg' \cos \theta \sin \theta$$

0

$$= \sin \theta (fg' - ff'g - g') + \cos \theta (fg^2 - fg' - f')$$

$$= \sin \theta ((1-g^2)g' - ff'g - g') + \cos \theta (f'/(1-f^2) - fg' - f')$$

$$= \sin \theta (-g(g' + ff')) + \cos \theta (-f(fg' + gg')) = 0 \quad \rightarrow \quad h = 0$$

□

En particular, consideremos el caso en que $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva regular ppa y existe (U, X) una parametrización ortogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. En este caso, podemos tomar

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s))$$

y

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(u(s), v(s))$$

donde, como siempre, $\tilde{\alpha}(s) = (X^{-1} \circ \alpha)(s) = (u(s), v(s))$ es la expresión en coordenadas de α . Consideremos como campo unitario V la propia velocidad de α , $V(s) = \alpha'(s)$, de modo que se tiene

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s) \mathbf{e}_1(s) + \sin \theta(s) \mathbf{e}_2(s),$$

donde θ es el ángulo de rotación de la velocidad de α con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1 .

Se tiene entonces que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = (\theta'(s) + \omega(s)) \mathbf{J}\alpha'(s).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s) \mathbf{J}\alpha'(s),$$

donde κ_g denota la curvatura geodésica de α , se llega a que

$$\kappa_g(s) = \theta'(s) + \omega(s).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\omega(s) = \langle \mathbf{e}'_1(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle$$

y después de una serie de cálculos usando que

$$\mathbf{e}'_1(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \right) \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) + \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

se llega a que

$$\omega(s) = \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

donde, para simplificar, estamos denotando

$$E(s) = E(\tilde{\alpha}(s)) = E(u(s), v(s))$$

y

$$G(s) = G(\tilde{\alpha}(s)) = G(u(s), v(s)).$$

Por otra parte, para cada v fijo podemos considerar la curva de parámetro u dada por

$$\alpha_v(u) = X(u, v)$$

definida para todo u tal que $(u, v) \in U$. Análogamente, para cada u fijo podemos considerar la curva de parámetro v dada por

$$\beta_u(v) = X(u, v)$$

definida para todo v tal que $(u, v) \in U$. Son las llamadas curvas coordenadas de la parametrización, que cumplen

$$\alpha'_v(u) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad \alpha''_v(u) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u, v),$$

y

$$\beta'_u(v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \quad \text{y} \quad \beta''_u(v) = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u, v).$$

Teniendo en cuenta que la parametrización es ortogonal y está positivamente orientada, se tiene

$$J\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \quad \text{y} \quad J\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right) = -\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Entonces, si denotamos por $(\kappa_g)_1(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\alpha_v(u)$ y por $(\kappa_g)_2(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\beta_u(v)$, a partir de estas expresiones se llega a que

$$(\kappa_g)_1(u, v) = \kappa_g^{\alpha_v}(u) = -\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

y

$$(\kappa_g)_2(u, v) = \kappa_g^{\beta_u}(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u}(u, v).$$

A partir de aquí llegamos al siguiente resultado.

Teorema 9.2 (Teorema de Liouville) *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular ppa tal que existe (U, X) una parametrización ortogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. Entonces, con la notación anterior, se tiene:*

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= \theta'(s) + \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right) \\ &= \theta'(s) + \cos \theta(s) (\kappa_g)_1(u(s), v(s)) + \sin \theta(s) (\kappa_g)_2(u(s), v(s)). \end{aligned}$$

Teorema 9.2

$$J\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right) = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial K}{\partial V}$$

$$J\left(\frac{\partial K}{\partial V}\right) = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial K}{\partial V}$$

9.2. Teorema de rotación de las tangentes

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ un segmento de curva regular a trozos, ppa, y sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Supongamos además que la curva α es cerrada (es decir, con $\alpha(0) = \alpha(\ell)$) y simple (es decir, con $\alpha(s) \neq \alpha(s')$ para todos $s, s' \in (0, \ell)$ distintos, y que α encierra una región simplemente conexa $R \subset S$). En tal caso, diremos que la imagen Γ de α es un **polígono curvado** en S . Diremos entonces que la parametrización de α está positivamente orientada si $J\alpha'(s)$ apunta al interior de R para todo $s \in [0, \ell]$ que no sea un vértice.

En cada vértice $\alpha(s_i)$ podemos definir el **ángulo exterior** de la siguiente manera. Recuérdese que en cada vértice $\alpha(s_i)$, con $i = 1, 2, \dots, k-1$, tenemos 2 vectores velocidad, la velocidad *que llega a $\alpha(s_i)$*

$$\alpha'_-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \alpha'(s) = \alpha'_i(s_i)$$

y la velocidad *que sale de $\alpha(s_i)$*

$$\alpha'_+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \alpha'(s) = \alpha'_{i+1}(s_i),$$

donde $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$. En el caso especial del vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$, la velocidad que llega es

$$\alpha'_-(\ell) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \alpha'(s) = \alpha'_k(\ell)$$

y la velocidad *que sale* es

$$\alpha'_+(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \alpha'_1(0).$$

Se considera entonces para cada vértice $\alpha(s_i)$ con $i = 1, 2, \dots, k-1$ la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(s_i), J\alpha'_-(s_i)\}$ y se define el ángulo exterior en $\alpha(s_i)$ como el único ángulo $\varepsilon_i \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$\alpha'_+(s_i) = \cos \varepsilon_i \alpha'_-(s_i) + \sin \varepsilon_i J\alpha'_-(s_i).$$

En el vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ se define del mismo modo pero considerando la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(\ell), J\alpha'_-(\ell)\}$, de modo que

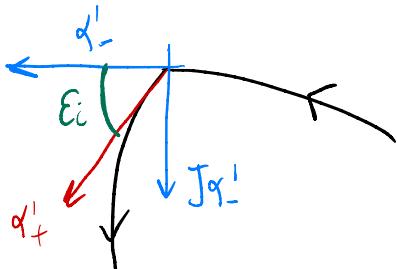
$$\alpha'_+(0) = \cos \varepsilon_k \alpha'_-(\ell) + \sin \varepsilon_k J\alpha'_-(\ell).$$

El siguiente resultado es un resultado topológico que *nos tenemos que creer*.

Teorema 9.3 (Teorema de rotación de las tangentes) *Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ tal que $\Gamma = \alpha([0, \ell]) \subset X(U)$ para una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de la superficie. Sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Se cumple la siguiente fórmula*

$$\sum_{i=1}^k (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los correspondientes ángulos exteriores y donde θ_i es el ángulo de rotación de la velocidad de la curva regular α_i con respecto al campo de vectores $\mathbf{e}_1 = X_u(\tilde{\alpha}(s)) / \sqrt{E(s)}$.



9.3. El Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)

Para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, en su versión local, necesitamos además del material que ya hemos introducido el clásico teorema de Green en \mathbb{R}^2 , enunciado de la siguiente manera.

Teorema 9.4 (Teorema de Green) *Sea $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\alpha}(s) = (u(s), v(s))$, una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ en \mathbb{R}^2 , y sea Ω el dominio encerrado por $\Gamma = \partial\Omega$. Sean $P, Q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, $P = P(u, v)$ y $Q = Q(u, v)$. Se tiene la siguiente igualdad:*

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right) dudv = \int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds,$$

donde, para simplificar la notación, estamos poniendo

$$P(s) = P(u(s), v(s)) \quad y \quad Q(s) = Q(u(s), v(s)),$$

Evidentemente, en la expresión anterior se entiende que

$$\int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds = \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds,$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ es una partición de $[0, \ell]$ tal que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α y cada $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$ es diferenciable.

Podemos ya enunciar el teorema de Gauss-Bonnet (versión local) como sigue.

Teorema 9.5 (Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)) *Sea Γ un polígono curvado en una superficie regular S que está contenido en la imagen de una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de S y que encierra una región simplemente conexa R , con $\Gamma = \partial R$. Entonces*

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los ángulos exteriores en los vértices de ∂R .

9.4. Ejercicios

- 9.1. Considera la parametrización de la esfera $X(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$. Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R limitada por los meridianos de longitudes $v = 0$ y $v = \pi/4$, y el paralelo de colatitud $u = \pi/3$.
- 9.2. Para la parametrización $X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan(u/2))$ de la pseudoesfera, comprueba el teorema de Gauss-Bonnet en la región limitada por los paralelos $u = \pi/3$ y $u = \pi/4$.

Gauss-Bonnet local

$$\forall l = 1, \dots, K \quad g_i: [s_{i-1}, s_i] \rightarrow S$$

$$g_i: [s_{i-1}, s_i] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall s \in [s_{i-1}, s_i], \quad k_g(s) = g_i'(s) + \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(-u' \frac{\partial E}{\partial v}(\tilde{q}) + v' \frac{\partial G}{\partial u}(\tilde{q}) \right)$$

$$\oint_{\partial R} k_g(s) ds = \sum_{i=1}^K \int_{s_{i-1}}^{s_i} k_g(s) ds =$$

$$= \sum_{i=1}^K \int_{s_{i-1}}^{s_i} g_i'(s) ds + \sum_{i=1}^K \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (\dots) =$$

$$= \sum_{i=1}^K \left(g_i(s_i) - g_i(s_{i-1}) \right) + \dots$$

[]

$$2\pi - \sum_{i=1}^K \epsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^K \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \dots = \int_{\partial R} \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right) ds$$

$$\int_{\partial R} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds$$

$$P(u, v) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

$$Q(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$$

$$\oint_{\partial R} k_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \int_{\partial R} (\Pi(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds =$$

$$= 2\pi - \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \iint_{\mathcal{X}(R)} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv =$$

bergen

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v$$

$$= 2\pi - \sum_{i=1}^k \epsilon_i + \iint_{\mathcal{X}'(R)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right] du dv =$$

$$- k(\chi(u, v)) \sqrt{EG(u, v)}$$

$$= 2\pi - \sum_{i=1}^k \epsilon_i - \iint_{\mathcal{X}'(R)} k(\chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$\int k ds$$

- 9.2. Para la parametrización $X(u, v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u + \log(\operatorname{tg}(u/2)))$ de la pseudoesfera, comprueba el teorema de Gauss-Bonnet en la región limitada por los paralelos $u = \pi/3$ y $u = \pi/4$.

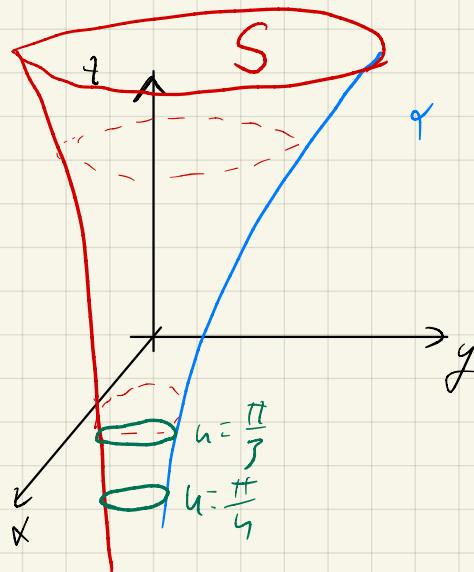
$$q(u) = (\operatorname{sen} u, \cos u + \log |\operatorname{tg}(\frac{u}{2})|) \quad u \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} q(u) = (0, -\infty)$$

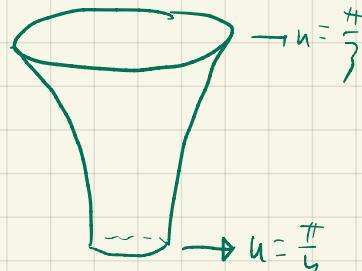
$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} q(u) = (1, +\infty)$$

$$u = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = -0.1742\dots$$

$$u = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = 0.049$$



la region es



Gauss-Bonnet Global

$$\int_R K dS + \oint_{\partial R} k_g dS = 2\pi \chi(R)$$

función característica de Euler $\chi = 1 - \text{nº agujeros} = 1 - 2 = 0$

$$\oint_{\partial R} k_g dS = \int_{P_1}^{P_1} k_g^{P_1} dS + \int_{P_2}^{P_2} k_g^{P_2} dS$$

en este caso

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \frac{\cos^2 u}{\sin u})$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (-\sin u \cos v, \sin u \sin v, 0)$$

$$E = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2 u$$

$$N(\mathbf{X}(u,v)) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u)$$

$u = \text{cte}$ $\beta_u(v) = \mathbf{X}(u,v), \quad \beta_u'(v) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (-\sin u \cos v, \sin u \sin v, 0)$

$$N(\beta_u(v)) = N(\mathbf{X}(u,v))$$

$$J_{\beta_u}(v) = N(\beta_u(v)) \wedge \beta_u'(v) = (*, **, -\sin u \cos u)$$

$$\text{Let } u = \frac{\pi}{3}, \text{ or}$$

$$u = \frac{\pi}{3}, \text{ No, because } -\beta_u(v)$$

$$kg_{\beta_u}(v) = \frac{1}{2GE} \quad \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \frac{2 \cancel{\cos u} \cos u}{2 \cancel{\cos u} \frac{\cos u}{\sin u}} = 1$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} kg \, ds &= \int_0^{2\pi} 1 \|\beta'_{\frac{\pi}{3}}(v)\| dv + \int_0^{\pi} (-1) \|\beta'_{\frac{\pi}{3}}(v)\| dv = \int_0^{2\pi} \sin \frac{\pi}{3} dv - \int_0^{\pi} \sin \frac{\pi}{3} dv = \\ &= 2\pi \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\int_R k dS = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} k(\chi(u,v)) \sqrt{EG} \quad (u,v) du dv$$

$$k(\chi(u,v)) = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{Eu}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{Gu}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] = -1$$

\circ ($E = h(u)$)

$$\int_R k dS = \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} -\cos u \quad du dv = -\sin u \Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot 2\pi = -2\pi \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{9} \right)$$

$$2\pi \cdot \chi(R) = \int_R k dS + \int_{\partial R} k_g ds = -2\pi \left(\cancel{\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{9}} \right) + 2\pi \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{9} \right)$$

$= 0$
~~OK~~

- 9.3.** Considera la parametrización $X(u, v) = (u \cos v, u \sen v, u^2)$, $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ del paraboloide de revolución. Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R determinada por la curva coordenada $u = 1/2$.
- 9.4.** Considera la parametrización $X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sen v, r \sen u)$ del toro. Comprueba el teorema de Gauss-Bonnet para la región limitada por los paralelos superior e inferior.
- 9.5.** Sea $P \subset \mathbb{S}^2$ un polígono geodésico (esto es, las curvas que lo forman son trozos de geodésica) en la esfera con n lados. Si ϕ_i son sus ángulos interiores, demuestra que $A(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n - 2)\pi$.
- 9.6.** Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. no plana. Para cada $s \in I$ considera la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección su vector binormal, $\mathbf{b}(s)$. Representamos por S el subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenido como la unión de todas estas rectas, y suponemos α tal que S es una superficie regular reglada, al menos para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Una parametrización natural para dicha superficie viene dada por

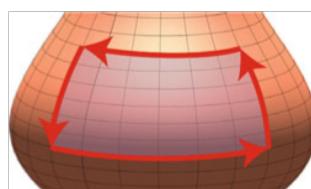
$$X(t, s) = \alpha(s) + t \mathbf{b}(s), \quad (t, s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I.$$

- i) Calcula las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas.
 - ii) Supóngase que α tiene torsión constante, y considérese la región simple R determinada por las curvas coordenadas correspondientes a los valores $t = t_0, t = t_1, s = s_0$ y $s = s_1$, para $t_0 < t_1$ y $s_0 < s_1$, con $t_0, t_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $s_0, s_1 \in I$. Calcula $\int_R K dS$.
 - iii) Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R .
- 9.7.** Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. contenida en el plano xz de la forma $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ con $x(s) > 0$ para todo $s \in I$, y sea S la superficie de revolución generada al girar la curva α alrededor del eje z . Una parametrización natural de S es $X : I \times (0, 2\pi) \rightarrow S$ dada por

$$X(\theta, s) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sen \theta, z(s)),$$

la cual cubre toda la superficie S excepto la curva generatriz α .

Dados $s_1, s_2 \in I$ con $s_1 < s_2$ y $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ con $\theta_1 < \theta_2$, considera la región *rectangular* R limitada por los paralelos $s = s_1$ y $s = s_2$, y por los meridianos $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, tal y como se observa en la figura adjunta.



- 9.5. Sea $P \subset \mathbb{S}^2$ un polígono geodésico (esto es, las curvas que lo forman son trozos de geodésica) en la esfera con n lados. Si ϕ_i son sus ángulos interiores, demuestra que $A(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n-2)\pi$.

$$\epsilon_i + \phi_i = \pi \rightarrow \epsilon_i = \pi - \phi_i$$

por Gauß-Bonnet

$$\int_P k dS + \oint_{\partial P} k g S + \sum_{i=1}^n (\pi - \phi_i) = 2\pi$$

$$\int_P dS \quad \text{per le segmenti} \quad n\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i \\ A(P) \quad \text{de geodésica}$$

$$\rightarrow A(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n-2)\pi$$

9.6. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. no plana. Para cada $s \in I$ considera la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección su vector binormal, $\mathbf{b}(s)$. Representamos por S el subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenido como la unión de todas estas rectas, y suponemos α tal que S es una superficie regular reglada, al menos para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Una parametrización natural para dicha superficie viene dada por

$$X(t, s) = \alpha(s) + t \mathbf{b}(s), \quad (t, s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I.$$

- i) Calcula las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas.
- ii) Supóngase que α tiene torsión constante, y considérese la región simple R determinada por las curvas coordenadas correspondientes a los valores $t = t_0, t = t_1, s = s_0$ y $s = s_1$, para $t_0 < t_1$ y $s_0 < s_1$, con $t_0, t_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $s_0, s_1 \in I$. Calcula $\int_R K dS$.
- iii) Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R .

①

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{b}(s)$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \vec{t}(s) + f \tau(s) \vec{n}(s)$$

$$F = 0$$

Calcula $\int_{\partial R} \kappa_g ds$ y $\int_R K dS$ en términos de las coordenadas $x(s)$ y $z(s)$ de la curva generatriz y verifica explícitamente el teorema de Gauss-Bonnet para este ejemplo.

- 9.8.** Sea S una superficie regular cuya curvatura de Gauss verifica $K(p) \leq -1$ para todo $p \in S$ y sea $\Gamma \subset S$ un polígono geodésico de n -lados. Es decir $\Gamma \subset S$ es un polígono curvado formado por n segmentos de geodésicas que encierra una región simplemente conexa $R \subset S$.
- Demuestra que $n \geq 3$ (es decir, no puede ser $n = 2$). Indicación: Échale un ojo a la demostración de la Consecuencia 3, p. 238, del libro de texto.
 - Demuestra que si $n = 3$, entonces el área de R es menor o igual que π .
 - ¿Qué puedes decir en general del área de R si $n > 3$?
- 9.9.** Sea S una superficie regular tal que para todo punto $p \in S$ existe una parametrización ortogonal (U, X) con $p \in V = X(U)$ y cuyas curvas coordenadas son geodésicas de S . Demuestra que la superficie es llana, es decir, $K \equiv 0$. Indicación: Aplica el teorema de Gauss-Bonnet local a las pequeñas regiones rectangulares limitadas por las curvas coordenadas de X .

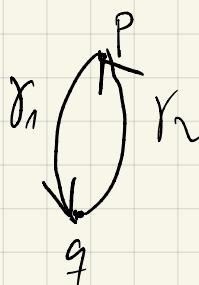
9.8. Sea S una superficie regular cuya curvatura de Gauss verifica $K(p) \leq -1$ para todo $p \in S$ y sea $\Gamma \subset S$ un polígono geodésico de n -lados. Es decir $\Gamma \subset S$ es un polígono curvado formado por n segmentos de geodésicas que encierra una región simplemente conexa $R \subset S$.

- Demuestra que $n \geq 3$ (es decir, no puede ser $n = 2$). Indicación: Échale un ojo a la demostración de la Consecuencia 3, p. 238, del libro de texto.
- Demuestra que si $n = 3$, entonces el área de R es menor o igual que π .
- ¿Qué puedes decir en general del área de R si $n > 3$?

(i) Por Gauß-Bonnet

$$\int_R K dS + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi \quad \varepsilon_i \in [-\pi, \pi]$$

Supongamos $n=2$



$$\int_R K dS + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\pi \rightarrow 2\pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \int_R K dS \leq \int_R -dS = -A(R) \leq 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 2\pi \quad \# \text{ pero } \varepsilon_i \leq \pi \rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 2\pi$$

(ii)

$$\int_R K dS + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2\pi \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - A(R) \\ \downarrow \\ A(R) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\pi \leq 3\pi - 2\pi \\ = \pi \end{array} \right.$$

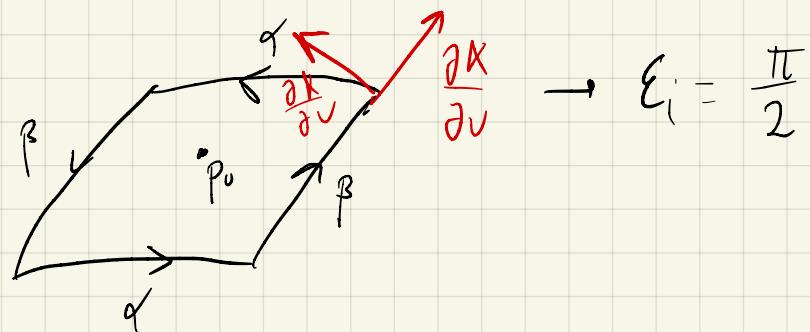
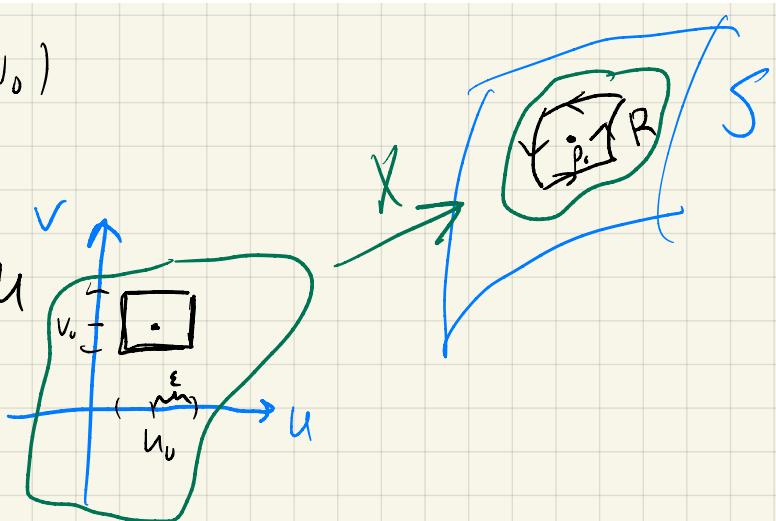
$$(iii) 2\pi \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - A(R) \rightarrow A(R) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - 2\pi \leq n\pi - 2\pi = (n-2)\pi$$

- 9.9. Sea S una superficie regular tal que para todo punto $p \in S$ existe una parametrización ortogonal (U, X) con $p \in V = X(U)$ y cuyas curvas coordenadas son geodésicas de S . Demuestra que la superficie es llana, es decir, $K \equiv 0$. Indicación: Aplica el teorema de Gauss-Bonnet local a las pequeñas regiones rectangulares limitadas por las curvas coordenadas de X .

Fijo $p_0 \in S$, $f_0 = X(u_0, v_0)$

como $(u_0, v_0) \in U$

$$\exists \varepsilon > 0 / (u_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \subset U$$



Por $\oint \beta$:

$$\int_R k dS + \oint_{\partial R} k_g ds + \sum_{i=1}^4 \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \int_R k dS = 0$$

Y esto es verdadero de este tipo, por lo que

$$k(p_0) = 0$$

Bloque 4. El Teorema de Gauss-Bonnet

Luis J. Alías

13 de mayo de 2021

9. El Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)

9.1. Curvatura geodésica y Teorema de Liouville

Lema 9.1 Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $f^2 + g^2 = 1$. Dado $t_0 \in I$, sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_0) = \cos \theta_0$ y $g(t_0) = \sin \theta_0$. Entonces existe una única función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\theta(t_0) = \theta_0$ y tal que

$$f(t) = \cos \theta(t) \quad \text{y} \quad g(t) = \sin \theta(t)$$

para todo $t \in I$.

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular, no necesariamente parametrizada por el arco, y sean $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$ dos campos de vectores diferenciables a lo largo de α que forman una base ortonormal y positivamente orientada de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in [0, \ell]$, de modo que $J\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_2(t)$ para todo t . Sea $V(t)$ un campo de vectores diferenciable y unitario, tangente a S a lo largo de α . Por el lema anterior, existe una función $\theta(t)$ diferenciable tal que

$$V(t) = \cos \theta(t) \mathbf{e}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{e}_2(t)$$

para todo t . En esa situación, decimos que la función θ es el **ángulo de rotación** del campo de vectores V con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1

Obsérvese que

$$\frac{D\mathbf{e}_1}{dt}(t) = \omega(t) \mathbf{e}_2(t) \quad \text{y} \quad \frac{D\mathbf{e}_2}{dt}(t) = -\omega(t) \mathbf{e}_1(t)$$

para una cierta función diferenciable ω dada por

$$\omega(t) = \langle \mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}_2(t) \rangle = -\langle \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}'_2(t) \rangle.$$

Se tiene entonces la siguiente fórmula:

$$\frac{DV}{dt}(t) = (\theta'(t) + \omega(t)) JV(t).$$

En particular, consideremos el caso en que $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva regular ppa y existe (U, X) una parametrización ortogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. En este caso, podemos tomar

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s))$$

y

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(\tilde{\alpha}(s)) = \frac{1}{\sqrt{G(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{\partial X}{\partial v}(u(s), v(s))$$

donde, como siempre, $\tilde{\alpha}(s) = (X^{-1} \circ \alpha)(s) = (u(s), v(s))$ es la expresión en coordenadas de α . Consideremos como campo unitario V la propia velocidad de α , $V(s) = \alpha'(s)$, de modo que se tiene

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s) \mathbf{e}_1(s) + \sin \theta(s) \mathbf{e}_2(s),$$

donde θ es el ángulo de rotación de la velocidad de α con respecto al campo de vectores \mathbf{e}_1 .

Se tiene entonces que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = (\theta'(s) + \omega(s)) \mathbf{J}\alpha'(s).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s) \mathbf{J}\alpha'(s),$$

donde κ_g denota la curvatura geodésica de α , se llega a que

$$\kappa_g(s) = \theta'(s) + \omega(s).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\omega(s) = \langle \mathbf{e}'_1(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle$$

y después de una serie de cálculos usando que

$$\mathbf{e}'_1(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \right) \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) + \frac{1}{\sqrt{E(\tilde{\alpha}(s))}} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

se llega a que

$$\omega(s) = \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right),$$

donde, para simplificar, estamos denotando

$$E(s) = E(\tilde{\alpha}(s)) = E(u(s), v(s))$$

y

$$G(s) = G(\tilde{\alpha}(s)) = G(u(s), v(s)).$$

Por otra parte, para cada v fijo podemos considerar la curva de parámetro u dada por

$$\alpha_v(u) = X(u, v)$$

definida para todo u tal que $(u, v) \in U$. Análogamente, para cada u fijo podemos considerar la curva de parámetro v dada por

$$\beta_u(v) = X(u, v)$$

definida para todo v tal que $(u, v) \in U$. Son las llamadas curvas coordenadas de la parametrización, que cumplen

$$\alpha'_v(u) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad \alpha''_v(u) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u, v),$$

y

$$\beta'_u(v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \quad \text{y} \quad \beta''_u(v) = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u, v).$$

Teniendo en cuenta que la parametrización es ortogonal y está positivamente orientada, se tiene

$$J\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \quad \text{y} \quad J\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right) = -\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Entonces, si denotamos por $(\kappa_g)_1(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\alpha_v(u)$ y por $(\kappa_g)_2(u, v)$ la curvatura geodésica de la curva coordenada $\beta_u(v)$, a partir de estas expresiones se llega a que

$$(\kappa_g)_1(u, v) = \kappa_g^{\alpha_v}(u) = -\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

y

$$(\kappa_g)_2(u, v) = \kappa_g^{\beta_u}(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u}(u, v).$$

A partir de aquí llegamos al siguiente resultado.

Teorema 9.2 (Teorema de Liouville) *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular ppa tal que existe (U, X) una parametrización ortogonal ($F \equiv 0$) y positivamente orientada tal que $\alpha(I) \subset U$. Entonces, con la notación anterior, se tiene:*

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= \theta'(s) + \frac{1}{2\sqrt{E(s)G(s)}} \left(-u'(s) \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s)) + v'(s) \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)) \right) \\ &= \theta'(s) + \cos \theta(s)(\kappa_g)_1(u(s), v(s)) + \sin \theta(s)(\kappa_g)_2(u(s), v(s)). \end{aligned}$$

9.2. Teorema de rotación de las tangentes

Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ un segmento de curva regular a trozos, ppa, y sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Supongamos además que la curva α es cerrada (es decir, con $\alpha(0) = \alpha(\ell)$) y simple (es decir, con $\alpha(s) \neq \alpha(s')$ para todos $s, s' \in (0, \ell)$ distintos, y que α encierra una región simplemente conexa $R \subset S$. En tal caso, diremos que la imagen Γ de α es un **polígono curvado** en S . Diremos entonces que la parametrización de α está positivamente orientada si $J\alpha'(s)$ apunta al interior de R para todo $s \in [0, \ell]$ que no sea un vértice.

En cada vértice $\alpha(s_i)$ podemos definir el **ángulo exterior** de la siguiente manera. Recuérdese que en cada vértice $\alpha(s_i)$, con $i = 1, 2, \dots, k - 1$, tenemos 2 vectores velocidad, la velocidad *que llega a* $\alpha(s_i)$

$$\alpha'_-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \alpha'(s) = \alpha'_i(s_i)$$

y la velocidad *que sale* de $\alpha(s_i)$

$$\alpha'_+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \alpha'(s) = \alpha'_{i+1}(s_i),$$

donde $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$. En el caso especial del vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$, la velocidad que llega es

$$\alpha'_-(\ell) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \alpha'(s) = \alpha'_k(\ell)$$

y la velocidad *que sale* es

$$\alpha'_+(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \alpha'_1(0).$$

Se considera entonces para cada vértice $\alpha(s_i)$ con $i = 1, 2, \dots, k - 1$ la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(s_i), J\alpha'_-(s_i)\}$ y se define el ángulo exterior en $\alpha(s_i)$ como el único ángulo $\varepsilon_i \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$\alpha'_+(s_i) = \cos \varepsilon_i \alpha'_-(s_i) + \sin \varepsilon_i J\alpha'_-(s_i).$$

En el vértice $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ se define del mismo modo pero considerando la base ortonormal y positiva formada por $\{\alpha'_-(\ell), J\alpha'_-(\ell)\}$, de modo que

$$\alpha'_+(0) = \cos \varepsilon_k \alpha'_-(\ell) + \sin \varepsilon_k J\alpha'_-(\ell).$$

El siguiente resultado es un resultado topológico que *nos tenemos que creer*.

Teorema 9.3 (Teorema de rotación de las tangentes) *Sea $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ tal que $\Gamma = \alpha([0, \ell]) \subset X(U)$ para una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de la superficie. Sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una partición de $[0, \ell]$ de modo que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α . Se cumple la siguiente fórmula*

$$\sum_{i=1}^k (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los correspondientes ángulos exteriores y donde θ_i es el ángulo de rotación de la velocidad de la curva regular α_i con respecto al campo de vectores $\mathbf{e}_1 = X_u(\tilde{\alpha}(s)) / \sqrt{E(s)}$.

9.3. El Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)

Para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, en su versión local, necesitamos además del material que ya hemos introducido el clásico teorema de Green en \mathbb{R}^2 , enunciado de la siguiente manera.

Teorema 9.4 (Teorema de Green) *Sea $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\alpha}(s) = (u(s), v(s))$, una parametrización positivamente orientada de un polígono curvado Γ en \mathbb{R}^2 , y sea Ω el dominio encerrado por $\Gamma = \partial\Omega$. Sean $P, Q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, $P = P(u, v)$ y $Q = Q(u, v)$. Se tiene la siguiente igualdad:*

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right) dudv = \int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds,$$

donde, para simplificar la notación, estamos poniendo

$$P(s) = P(u(s), v(s)) \quad y \quad Q(s) = Q(u(s), v(s)),$$

Evidentemente, en la expresión anterior se entiende que

$$\int_{\partial\Omega} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds = \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} (P(s)u'(s) + Q(s)v'(s)) ds,$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ es una partición de $[0, \ell]$ tal que $\alpha(s_i)$ son los vértices de α y cada $\alpha_i = \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$ es diferenciable.

Podemos ya enunciar el teorema de Gauss-Bonnet (versión local) como sigue.

Teorema 9.5 (Teorema de Gauss-Bonnet (versión local)) *Sea Γ un polígono curvado en una superficie regular S que está contenido en la imagen de una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de S y que encierra una región simplemente conexa R , con $\Gamma = \partial R$. Entonces*

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi,$$

donde ε_i son los ángulos exteriores en los vértices de ∂R .

9.4. Ejercicios

- 9.1. Considera la parametrización de la esfera $X(u, v) = (r \operatorname{sen} u \cos v, r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u)$. Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R limitada por los meridianos de longitudes $v = 0$ y $v = \pi/4$, y el paralelo de colatitud $u = \pi/3$.
- 9.2. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.3) Considera la parametrización $X(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$, $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ del paraboloide de revolución. Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R determinada por la curva coordenada $u = 1/2$.

9.3. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.5) Sea $P \subset \mathbb{S}^2$ un polígono geodésico (esto es, las curvas que lo forman son trozos de geodésica) en la esfera con n lados. Si ϕ_i son sus ángulos interiores, demuestra que $A(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n-2)\pi$.

9.4. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.6) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. no plana. Para cada $s \in I$ considera la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección su vector binormal, $\mathbf{b}(s)$. Representamos por S el subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenido como la unión de todas estas rectas, y suponemos α tal que S es una superficie regular reglada, al menos para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Una parametrización natural para dicha superficie viene dada por

$$X(t, s) = \alpha(s) + t \mathbf{b}(s), \quad (t, s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I.$$

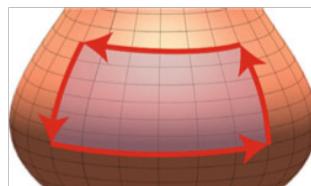
- i) Calcula las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas.
- ii) Supóngase que α tiene torsión constante, y considérese la región simple R determinada por las curvas coordenadas correspondientes a los valores $t = t_0$, $t = t_1$, $s = s_0$ y $s = s_1$, para $t_0 < t_1$ y $s_0 < s_1$, con $t_0, t_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $s_0, s_1 \in I$. Calcula $\int_R K dS$.
- iii) Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región R .

9.5. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.7) Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. contenida en el plano xz de la forma $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ con $x(s) > 0$ para todo $s \in I$, y sea S la superficie de revolución generada al girar la curva α alrededor del eje z . Una parametrización natural de S es $X : I \times (0, 2\pi) \rightarrow S$ dada por

$$X(\theta, s) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)),$$

la cual cubre toda la superficie S excepto la curva generatriz α .

Dados $s_1, s_2 \in I$ con $s_1 < s_2$ y $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ con $\theta_1 < \theta_2$, considera la región *rectangular* R limitada por los paralelos $s = s_1$ y $s = s_2$, y por los meridianos $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, tal y como se observa en la figura adjunta.



Calcula $\int_{\partial R} \kappa_g ds$ y $\int_R K dS$ en términos de las coordenadas $x(s)$ y $z(s)$ de la curva generatriz y verifica explícitamente el teorema de Gauss-Bonnet para este ejemplo.

9.6. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.8) Sea S una superficie regular cuya curvatura de Gauss verifica $K(p) \leq -1$ para todo $p \in S$ y sea $\Gamma \subset S$ un polígono geodésico de n -lados. Es decir $\Gamma \subset S$ es un polígono curvado formado por n segmentos de geodésicas que encierra una región simplemente conexa $R \subset S$.

- i) Demuestra que $n \geq 3$ (es decir, no puede ser $n = 2$). Indicación: Échale un ojo a la demostración de la Consecuencia 3, p. 238, del libro de texto.
- ii) Demuestra que si $n = 3$, entonces el área de R es menor o igual que π .
- iii) ¿Qué puedes decir en general del área de R si $n > 3$?

9.7. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.9) Sea S una superficie regular tal que para todo punto $p \in S$ existe una parametrización ortogonal (U, X) con $p \in V = X(U)$ y cuyas curvas coordenadas son geodésicas de S . Demuestra que la superficie es llana, es decir, $K \equiv 0$. Indicación: Aplica el teorema de Gauss-Bonnet local a las pequeñas regiones rectangulares limitadas por las curvas coordenadas de X .

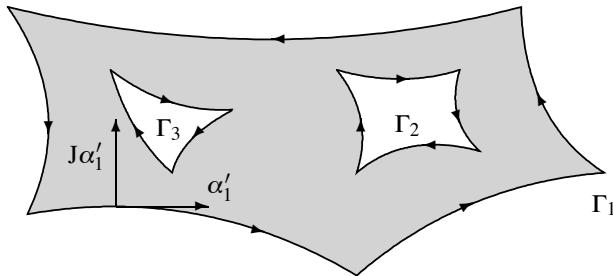
10. El Teorema de Gauss-Bonnet (versión global)

Teorema 10.1 (Teorema de Gauss-Bonnet (versión global)) *Sea $R \subset S$ una región de una superficie regular y orientada S que está contenida en la imagen de una parametrización ortogonal y positiva (U, X) de S y cuya frontera $\partial R = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$ es la unión disjunta de n polígonos curvados (véase la figura adjunta). Entonces*

$$\int_R K dS + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi \chi(R),$$

donde ε_i son los ángulos exteriores en los vértices de ∂R y $\chi(R)$ es la característica de Euler-Poincaré de R .

En particular, si R es una región simplemente conexa con $\partial R = \Gamma$, entonces $n = 1$, $\chi(R) = 1$ y recuperamos la versión local del Teorema de Gauss-Bonnet.



10.1. Ejercicios

10.1. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.2) Para la parametrización $X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan(u/2))$ de la pseudoesfera, comprueba el teorema de Gauss-Bonnet en la región limitada por los paralelos $u = \pi/3$ y $u = \pi/4$ (en este caso $\chi(R) = 0$).

10.2. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.4) Considera la parametrización $X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$ del toro. Comprueba el teorema de Gauss-Bonnet para la región limitada por los paralelos superior e inferior (en este caso $\chi(R) = 0$).

Hoff-Piron

S regular y conexa. Son equivalentes:

- ① (S, d) es completo
- ② S es geodésicamente completa
- ③ S es geodésicamente completa en \mathbb{R}^n
- ④ Se verifica la propiedad de Heine-Borel

① \Rightarrow ②

Supongamos que S no es geodésicamente completo.
 Entonces, $\exists p \in S$ y $\exists \gamma$ una geodética con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v \in T_p S$
 no define t_{fin} . O sea, $\exists 0 < b < \infty$ tal que γ está
 definida en $[0, b)$ pero no se puede extender más allá
 de b .

$$\gamma: [0, b) \rightarrow S$$

Si probamos que $\exists \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) \in S$, entonces se podrá extender
 y tendremos una contradicción.

Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, b)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$.

Por ser convergente en \mathbb{R} , es de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} /$
 $\forall n, m > N \quad |t_n - t_m| < \varepsilon$

Y la $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es CS, entonces

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq L(\gamma|_{[t_n, t_m]}) = \int_{t_n}^{t_m} \|\gamma'(t)\| dt = (t_m - t_n) \|v\| < \varepsilon \|v\|$$

sup {fueron}

Y entendes $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un Cauchy en $S(d)$, pero es completo por lo que la sucesión converge a

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) \in S$$

Ahora bien, si $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión con $t_n \rightarrow b$, entonces esto es también un Cauchy, como anterior, tendremos $g' = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) \in S$

Y tenemos

$$0 \leq d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \int_{t_n}^{t_m} \|v\| dt = \|v\| |t_m - t_n|$$

$$\rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \|v\| |b - b| = 0$$

$d(g, g')$

$$\rightarrow g = g'$$

$$\text{y entonces } g = \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$$

① \Rightarrow ② Obvio

③ \Rightarrow ④

Completo \Rightarrow cerrado y acotado

(S, d) métrico \Rightarrow (S, d) Hausdorff \Rightarrow los compactos son cerrados

Y dato $p \in A$, entonces $\{B_d(p, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cobertura
por abiertos de A .

Losa es compacto, existe un acoplamiento punto

$$\{B_d(p_0, n_k)\}_{k=1}^m \rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^m B_d(p_0, n_k) = B_d(p_0, m)$$

∴ A es acotado

Cerrado y acotado \Rightarrow compacto

Losa se geodésicamente completa en p_0 , entonces $\forall p \in A$,
existe un segmento geodésico minimizante γ , $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(a) = p$, $\gamma'(0) = v$

Añ; $\gamma(a) = V_a(a) = \exp_{p_0}(av)$ } cf

$$d(p_0, p) = \int_0^a \|V_t\| dt = \int_0^a \|v\| dt = a\|v\|$$

Losa A es acotado, $d(p_0, p) < M$ y entonces $a\|v\| < M$

En breve decir que

$$\text{avg } D(\vec{o}_{p_0}, M) \subset \overline{D(\vec{o}_{p_0}, M)}$$

$$\Rightarrow \exp_{p_0}(av) \in \exp_{p_0}(\overline{D(\vec{o}_{p_0}, M)})$$

" " " " " "

Però $\overline{D(\vec{O}_{p_0}, \mu)}$ è compatto in $T_{p_0} S$ per il cerchio 2
a centro in \mathbb{R}^2 .

Allora $\exp_{p_0}(\overline{D(\vec{O}_{p_0}, \mu)})$ è compatto per la immagine
continua di un compatto.

Si presta su $p \in A \Rightarrow p \in \exp_{p_0}(\overline{D(\vec{O}_{p_0}, \mu)})$, entro cui
A è un cerchio contenuto in un compatto,
e dunque è compatto.

Q \Rightarrow ①

Se $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una sequenza Cauchy: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 |$
 $\forall n, m \geq N_0 \Rightarrow d(p_n, p_m) < \varepsilon$. $A = \bigcup_n \{p_n\}$

Allora, fissato $p \in A$,

$$d(p, p_n) \leq d(p, p_{N_0}) + d(p_{N_0}, p_n) < d(p, p_{N_0}) + \varepsilon$$

Così p_{N_0} è ε -punto, intorno a $\exists r_0 | d(p, p_{N_0}) + \varepsilon < r_0$

Si prende also lo p_1, \dots, p_{N_0-1} come altri punti.

$r_i = d(p, p_i) | i=1, \dots, N_0-1$ entro cui si ricava

se $r < \varepsilon$ $d(p, p_n) < r$ $\forall n \in \mathbb{N}$

entra nel A è δ -aperto, $A \subset B_d(p, r)$

) Entonces $\bar{A} \subset \overline{\text{Bd}(p, r)}$

por lo que \bar{A} es cerrado y acotado.

Aquí, \bar{A} es compacto y entonces todo mesh
admitirá una subdivisión convergente.

Por lo tanto $\{t_n\}$ es la secuencia, entonces las sucesiones
de convergentes.

Por tanto $t_n p = q \in \bar{A} \cap S$

Bonnet

S regular e completa, con $K \geq \delta > 0$ tipo S, $\delta > 0$.

Entonces S es compacta y de dimensión

intrínseca menor que $\text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$

Supongamos que no, o sea, que $\exists p, q \in S$ con

$$d(p, q) > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Como S es completo, $\exists \gamma$ segmento de geodésica minimizante pp entre p y q, $\gamma(0)=p, \gamma(l)=q, d(p, q)=l(\gamma)=l$.

Sea, además, $\phi(s, t)$ una varicela normal a γ propia.

Entonces $L(t) = L(\gamma_t) = \begin{cases} L(0) = l(\gamma) = l \\ L'(0) = 0 \text{ para } \gamma \text{ geodésica} \\ L(\gamma_t) \in \Omega(p, q) \rightarrow L(t) \geq l(0) \end{cases}$

per tanto, $L(0)$ es un mínimo y debe ser $L'(0) \geq 0$.

Más bien, $Z(s) = \phi_t(s, 0)$ debe ser $Z'(s) = f(s) \cdot \gamma'$

pero $Z(1) \perp \gamma'(0)$ ts, y con $f(0) = f(l) = 0$ para ser la varicela

También $f(s) = \sin\left(\frac{\pi}{l}s\right)$

$$y \text{ as } z(s) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)y'$$

$$f'(r) = \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell} r\right) J_0' + \sin\left(\frac{\pi}{\ell} r\right) \underline{(J_0')'}$$

$$(N\lambda Y')' = N'\lambda \delta' + \frac{N\lambda Y''}{\sigma} \text{ per } \delta''/N$$

Adhesive

$$\|\beta\|_1 = 1 \rightarrow \beta' \perp (\beta')' \rightarrow N'\beta' \perp \beta'$$

$$\|N\|=1 \rightarrow N \perp N^{\dagger}$$

g per def. $N^{\lambda} \gamma^{\lambda}$

2) $N^{1/2}$ per $\pm \frac{1}{2}$ $N^{1/2} \parallel N$

$$f'(s) = \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) J_1 + \lambda \sin\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) N$$

$$L''(0) = \int_0^\ell \left(\left\| \frac{dZ}{ds}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \|Z(s)\|^2 \right) ds = - \int_0^\ell \left\langle \frac{D^2 Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s))Z(s), Z(s) \right\rangle ds,$$

$$\rightarrow \left| \frac{dt}{ds}(s) \right| = \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \lvert f' \rvert \rightarrow \left\| \frac{dz}{ds} \right\|^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right)$$

$$\|z\|^2 = \omega^2 \left(\frac{\pi}{l} s \right)$$

$$L^u(0) = \int_0^l \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - k(\gamma(s)) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) ds \leq \int_0^l \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - \delta \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) ds$$

$$\leq \int_0^l \left(\frac{\pi}{\sqrt{s}} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{l} s \right) - \delta \cos^2 \left(\frac{\pi}{l} s \right) ds = \delta \int_0^l (\cos^2 s - \cos^2 \left(\frac{\pi}{l} s \right)) ds = \delta \int_0^l \cos \left(2 \frac{\pi}{l} s \right) ds$$

$$= f \frac{e}{2\pi} \left[\alpha_5 \left(2 \frac{\pi}{L} r \right) \right]_0^L = 0$$

~~✓~~