Ejercicio 10.4

Jose Antonio Lorencio Abril

Sea A el alelo dominante y a el recesivo. El enunciado nos dice que las mujeres pueden ser AA, Aa, aa, mientras que los hombres solo pueden ser A o a, y el alelo lo consiguen de la madre. Así, tenemos que la proporción de mujeres con genotipo AA en el período $n+1$, X_{n+1} debe ser

$$u_{n+1} = x_n \cdot X_n$$

es decir, la probabilidad de que el nuevo individuo tome un alelo A de la madre y otro A del padre. De igual forma:

$$w_{n+1} = y_n \cdot Y_n$$

$$v_{n+1} = x_n \cdot Y_n + y_n \cdot X_n$$

Donde en el último caso consideramos que puede ser (Aa) o (aA).
Ahora bien, la frecuencia alélica dominante será el total de la frecuencia genotípica dominante más la frecuencia de obtención de un alelo dominante entre los híbridos:

$$x_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} v_{n+1}$$

Y para la recesiva igual

$$y_{n+1} = w_{n+1} + \frac{1}{2} v_{n+1}$$

Respecto a los hombres, tenemos en cuenta que proporcionarán el mismo alelo que sus madres, o sea:

$$X_{n+1} = x_n, \ Y_{n+1} = y_n$$

Y solo resta ver que se verifican las ecuaciones del enunciado:

$$x_{n+2} = u_{n+2} + \frac{1}{2} v_{n+2} = x_{n+1} X_{n+1} + \frac{1}{2} x_{n+1} Y_{n+1} + \frac{1}{2} y_{n+1} X_{n+1} =$$

$$= x_{n+1} x_n + \frac{1}{2} x_{n+1} y_n + \frac{1}{2} \left(1 - x_{n+1}\right) x_n =$$

$$= x_{n+1} x_n + \frac{1}{2} x_{n+1} \left(1 - x_n\right) + \frac{1}{2} x_n - \frac{1}{2} x_{n+1} x_n =$$

$$= \cancel{x_{n+1} x_n} + \frac{1}{2} x_{n+1} - \cancel{\frac{1}{2} x_{n+1} x_n} + \frac{1}{2} x_n - \cancel{\frac{1}{2} x_{n+1} x_n} =$$

$$= \frac{1}{2} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n$$

Y de igual forma para el alelo recesivo:

$$y_{n+2} = \frac{1}{2} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$

Vamos ahora a resolver las ecuaciones, que son iguales en realidad. Por lo que resolvemos $z_n = \frac{1}{2}z_{n-1} + \frac{1}{2}z_{n-2}$. El polinomio característico es

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$, y obtenemos la solución general

$$z_n = c_1 + c_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Dadas condiciones iniciales x_0, x_1, tenemos que

$$\begin{cases} c_1 + c_0 = x_0 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_0 = x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}c_0 = x_0 - x_1 \\ c_1 = x_0 + \frac{1}{3}(x_0 - x_1) = \frac{4x_0 - x_1}{3} \end{cases} \implies c_0 = \frac{2}{3}(x_0 - x_1)$$

Es decir

$$x_n = \frac{4x_0 - x_1}{3} + \frac{2(x_0 - x_1)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Por lo que es

$$\lim_n x_n = \frac{4x_0 - x_1}{3} = p$$

y de igual forma

$$\lim_n y_n = \frac{4y_0 - y_1}{3} = q$$

Con

$$p + q = \frac{4x_0 - x_1 + 4y_0 - y_1}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$$

Por último, tenemos que todo está estabilizado así que vamos a denotar las variables ya estabilizadas quitando el subíndice. Tenemos entonces que $w = \frac{1}{200}$, pero $w = yY = yy = y^2 \implies y = \frac{1}{\sqrt{200}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$. Como en el caso estabilizado es $Y = y$, entonces la solución al ejercicio es $Y = \frac{1}{10\sqrt{2}}$.