Tarea Opcional: Equivalencias al Axioma de Elección

Jose Antonio Lorencio Abril

09/21

En 1904, Ernst Zermelo introdujo el axioma de elección en las matemáticas, para poder formalizar su prueba del Teorema de Buena Ordenación. Intuitivamente, el axioma dice que, dada una familia de conjuntos no vacíos, es posible extraer un elemento de cada conjunto, aunque la familia sea infinita. Esta extracción se hace mediante una función de elección. Este teorema tiene importancia porque, aunque una función de elección se construye fácilmente para familias finitas, para familias infinitas no es tan sencillo y no se conoce una forma de hacerlo de manera general. Además, esta acción se selección de elementos de cada conjunto de una familia es necesaria en diversos teoremas importantes, por lo que el axioma tiene gran relevancia.
No obstante, con el tiempo se han descubierto otros axiomas y principios de forma independiente, que han resultado todos ser equivalentes al axioma de elección. Es decir, podemos elegir cualquiera de ellos como axioma, y obtendremos la misma teoría matemática.
John Kelley, en su libro General Topology, se decanta por utilizar como axioma el Principio Maximal de Hausdorff, y, a partir de este, deduce todos los demás equivalentes. Además, en el apéndice obtiene el principio maximal, a partir del axioma de elección.
Así, voy a ceñirme únicamente a demostrar esta equivalencia. Para ello, requerimos de algunas definiciones previas:

Definition 1. Un conjunto $A \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos, es un **miembro maximal de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$** si, y solo si, no hay ningún otro miembro de $\mathcal{A}$ que contenga estrictamente a A.
Análogamente, A es un **miembro minimal** si, y solo si, no contiene estrictamente ningún otro miembro de $\mathcal{A}$.

Definition 2. Una familia $\mathcal{C}$ de conjuntos es un **nido, torre** o **cadena** si, y solo si, siempre que $A, B \in \mathcal{C} \implies A \subset B \vee B \subset A$.
Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ es una cadena, entonces se dice que **$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ es una cadena en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**.

Ahora, nos preguntamos si, para cada familia $\mathcal{A}$, hay una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$ que no está estrictamente contenida en ninguna cadena en $\mathcal{A}$. Esta pregunta no puede ser respondida sin recurrir a los axiomas previamente comentados, Kelley se decanta por tomar como axioma el principio maximal de Hausdorff:

Principio Maximal de Hausdorff
Si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos y $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{A}$,entonces hay una cadena maximal $\mathcal{K}$ en $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{C}$.

Presentamos ahora todas las afirmaciones equivalentes a este principio.
Pero antes, alguna definición más:

Definition 3. Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es de **carácter finito** si, y solo si, cada subconjunto finito de un elemento de $\mathcal{A}$, es un elemento de $\mathcal{A}$, y cada conjunto A, tal que todo subconjunto finito suyo es un elemento de $\mathcal{A}$, también pertenece a $\mathcal{A}$.

Estamos en condiciones de presentar las equivalencias:

Theorem 4. *Del principio Maximal de Hausdorff se deducen las siguientes afirmaciones, y también puede deducirse que, en realidad, son todas equivalentes:*

1. **Principio Maximal:** sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Si para cada cadena en $\mathcal{A}$ hay un elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a cada elemento de la cadena, entonces hay un elemento maximal en $\mathcal{A}$

2. **Principio Minimal:** sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Si para cada cadena de $\mathcal{A}$ hay un elemento de $\mathcal{A}$ contenido en cada elemento de la cadena, entonces hay un elemento minimal en $\mathcal{A}$

3. **Lema de Tukey:** hay un elemento maximal en cada familia no vacía de carácter finito

4. **Lema de Kuratowski:** cada cadena en un conjunto (parcialmente) ordenado está contenida en una cadena maximal

5. **Lema de Zorn:** si cada cadena en un conjunto parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces hay un elemento maximal del conjunto

6. **Axioma de elección:** si X_a es un conjunto no vacío para cada $a \in A$, donde A es un conjunto de índices, entonces hay una función c en A tal que $c(a) \in X_a, \forall a \in A$

7. **Postulado de Zermelo:** si $\mathcal{A}$ es una familia disjunta de conjuntos no vacíos, entonces hay un conjunto C tal que $A \cap C$ consiste en un único punto para cada $A \in \mathcal{A}$

8. **Principio de buena ordenación:** todo conjunto puede ser bien ordenado

Proof. **[Principio Maximal de Hausdorff $\implies$ Axioma de elección]**
Empezamos viendo que Principio Maximal de Hausdorff $\implies$ Principio Maximal
Por el principio maximal de Hausdorff, podemos tomar una cadena maximal C en $\mathcal{A}$ y sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \supset \bigcup\{M : M \in C\}$. Entonces A es un elemento maximal de $\mathcal{A}$, y si $A \subsetneq B \in \mathcal{A}$, entonces $C \cup \{B\}$ es una cadena en $\mathcal{A}$ que contiene estrictamente a C, y esto es una contradicción. Por tanto, no existe tal B, y A es maximal.
Probamos ahora que el Principio Maximal $\Longrightarrow$ Lema de Tukey
Sea $\mathcal{A}$ una familia de carácter finito, y sea C una cadena en $\mathcal{A}$. Sea

$$A = \bigcup\{N : N \in C\}$$

Cada subconjunto finito F de A es necesariamente un subconjunto de algún miembro de C, para el que podemos tomar una subfamilia finita de C, conteniendo a F. Esta subfamilia finita contiene un elemento más grande que contiene a F. Como $\mathcal{A}$ es de carácter finito, entonces $A \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ verifica la hipótesis de (1) y, por tanto, hay un elemento maximal en $\mathcal{A}$, como queríamos ver.
Ahora vemos que Lema de Tukey $\implies$ Axioma de Elección
Recordemos que una función es un conjunto de pares ordenados, tal que no hay dos elementos con la misma primera coordenada.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones f tales que $dom\,(f) \subset A$ y $f\,(a) \in X_a, \forall a \in dom\,(f)$ (los elementos de $\mathcal{F}$ podemos entenderlos como fragmentos de la función que buscamos).
Vamos a ver que $\mathcal{F}$ esuna familia de carácter finito.

- Si $f \in \mathcal{F}$, entonces todo subconjunto g de f, y en particular todo subconjunto finito de f también está en $\mathcal{F}$, puesto que $dom\,(g) \subset dom\,(f) \subset A$ y $g\,(a) = f\,(a) \in X_a, \forall a \in dom\,(g)$.

- Por otro lado, si f es un conjunto, tal que cada subconjunto finito suyo está en $\mathcal{F}$, entonces todos los elementos de f son pares ordenados (basta tomar todos los subconjuntos unipuntuales y tenemos este resultado), no hay dos pares diferentes con la misma coordenada (basta tomar todos los subconjuntos formados por dos elementos), y por tanto f es una función. Además, si $a \in dom\,(f)$, entonces $\{(a, f\,(a))\} \in \mathcal{F} \implies f\,(a) \in X_a, \forall a \in dom\,(f)$, y tenemos que $f \in \mathcal{F}$.

Y $\mathcal{F}$ es de caracter finito, por lo que hay un miembro maximal $F \in \mathcal{F}$ (por el Lema de Tukey). Solo falta ver que $dom\,(h) = A$.
Si $a \in A \backslash dom\,(h)$, entonces, como X_a es no vacío, hay un $y \in X_a$ y $h \cup \{(a, y)\}$ es una función y está en $\mathcal{F}$, como contiene a h, encontramos una contradiccón, porque h es maximal. Por tanto, $dom\,(h) = A$ y tenemos el resultado.
[Axioma de elección $\implies$ Principio Maximal de Hausdorff]
Sea $\mathcal{A}$ un conjunto.
Sea g la función tal que $g\,(h) = c\,(\{m : m \text{ es una cadena}, m \subset \mathcal{A} \text{ y para cada } p \in rango\,(h)\,, p \subset m \text{ y } p \neq m\})$ para cada conjunto h, y c es una función de elección que satisface el axioma de elección. Intuitivamente, estamos tomando $g\,(h)$ para que sea una cadena en $\mathcal{A}$ conteniendo estrictamente cada cadena previamente seleccionada.
Necesitamos ahora un resultado auxiliar:

Definition 5. $E = \{(x, y) : x \in y\}$

Definition 6. x está completo si, y colo si, cada elemento de x es un subconjunto de x

Definition 7. x es un ordinal si, y solo si, E conecta x y x está completo. Es decir, dados dos elementos de x, uno es elemento del otro, y cada elemento de un elemento de x es un subconjunto de x

Definition 8. $R = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$

Definition 9. $f|x = f \cap (x \times \mathcal{U})$, donde $\mathcal{U} = \{x : x = x\}$, el universo

Theorem 10. *Para cada g hay una única función f tal que $dom\,(f)$ es un ordinal y $f\,(x) = g\,(f|x)$ para cada número ordinal x.*

Por el teorema 9, hay una función f tal que $dom\,(f)$ es un ordinal y $f\,(h) = g\,(f|h)$ para cada número ordinal u.
Por la definición de g, se tiene que, si $u \in dom\,(f)$, entonces $f\,(h) \subset \mathcal{A}$ y $f\,(h)$ es una cadena. Además, si $h, j \in dom\,(f)$ y $h < j$ $(h \in j)$, entonces $f\,(h) \subset f\,(j)$ y $f\,(h) \neq f\,(j)$, y f es inyectiva, f^{-1} es una función y $dom\,(f) \in R$.
Como $f\,(dom\,(f)) = \mathcal{U}$, entonces $g\,(f) = \mathcal{U}$, por lo que no hay ninguna cadena m contenida en $\mathcal{A}$ y contenga estrictamente cada miembro de $rango\,(f)$.
$\bigcup (rango\,(f))$ es una cadena que contiene todo elemento de f, y entonces no hay ninuna cadena m que esté contenida en $\mathcal{A}$ y contenga estrictamente a $\bigcup (range\,(f))$.
Por lo tanto $\bigcup (range\,(f))$ es maximal en $\mathcal{A}$. $\square$