Tarea 6: El gradiente en superficies

Jose Antonio Lorencio Abril

a)

Como $grad\ f_p \in T_pS$, entonces

$$grad\ f_p = aX_u + bX_v$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial x}(X(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial z}(X(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) = df(X_u)$$

$$f_v = df(X_v)$$

Por tanto, se tiene

$$f_u = df_p(X_u) = \langle grad\ f_p, X_u\rangle = aE + bF$$

$$f_v = df_p(X_v) = \langle grad\ f_p, X_v\rangle = aF + bG$$

Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} aE + bF = f_u \\ aF + bG = f_v \end{cases}$$

O, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

Calculamos esta inversa:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}^t}{EG - F^2}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}}{EG - F^2}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} Gf_u - Ff_v \\ Ef_v - Ff_u \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$a = \frac{Gf_u - Ff_v}{EG - F^2},\ b = \frac{Ef_v - Ff_u}{EG - F^2}$$

Y queda el resultado buscado

$$grad\ f_p = \frac{Gf_u - Ff_v}{EG - F^2}X_u + \frac{Ef_v - Ff_u}{EG - F^2}X_v$$

Para el caso particular de $S = \mathbb{R}^2$, tomamos

$$\begin{array}{ccc} X : \mathbb{R}^2 & \to & S \\ (u,v) & \mapsto & (u,v,0) \end{array}$$

de forma que

$$dX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E = 1,\ F = 0,\ G = 1$$

por lo que, utilizando la ecuación que hemos derivado, queda

$$grad\ f_p = f_u e_1 + f_v e_2$$

b)

' $\Longrightarrow$ ' Sea $v(t)$ una curva regular que describe la circunferencia de radio 1, con centro en p contenida en T_pS. Entonces

$$df_p(v(t)) = \langle grad\ f_p, v(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}df_p(v(t)) = \left\langle grad\ f_p, v'(t)\right\rangle = |grad\ f_p|\left|v'\right| cos\alpha \overset{máximo}{=} 0$$

Por tanto, ha de ser:

- $|v'| = 0$, pero esto no puede ser, porque $v(t)$ es una curva regular
- $|cos\alpha| = 0 \implies v' \perp grad\ f_p$

Por otro lado, como $|v|^2 = 1 \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \langle v, v'\rangle = 0 \implies v \perp v'$.

Además, como $v \in T_pS \implies v(t) = v_1(t)X_u + v_2(t)X_v \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} v'(t) = v_1'(t)X_u + v_2'(t)X_v \in T_pS$.

Así, juntando estas tres últimas afirmaciones, tenemos que

$$v \in span(grad\ f_p) \overset{|v|=1}{\Longrightarrow} v = \pm\frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}$$

Pero

$$\left\langle grad\ f_p, -\frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}\right\rangle = -|grad\ f_p|$$

$$\left\langle grad\ f_p, \frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}\right\rangle = |grad\ f_p|$$

por lo que, para que sea máximo, debe ser

$$v = \frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}$$

' $\Longleftarrow$ ' Este valor nos dará un máximo si

$$\frac{d}{dt}df\left(\frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}\right) = 0\ y\ \frac{d^2}{dt^2}df\left(\frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}\right) < 0$$

Para verlo, por un lado escribimos

$$df_p(v(t)) = \langle grad\ f_p, v\rangle$$

$$\frac{d}{dt}df(v(t)) = \left\langle grad\ f_p, v'\right\rangle = |grad\ f_p|\left|v'\right| cos\alpha$$

$$\frac{d^2}{dt^2}df(v(t)) = \left\langle grad\ f_p, v''\right\rangle = |grad\ f_p|\left|v''\right| cos\beta$$

Y por otro

$$|v|^2 = 1 \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \textbf{(1)}\ \left\langle v, v'\right\rangle = 0 \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \left|v'\right|^2 + \left\langle v, v''\right\rangle = 0 \implies \textbf{(2)}\ \left\langle v, v''\right\rangle = -\left|v'\right|^2 < 0$$

Dado que $grad\ f_p \in span(v)$ y **(1)**, tenemos que $cos\alpha = 0 \implies \frac{d}{dt}df\left(\frac{grad\ f_p}{|grad\ f_p|}\right) = 0$ ✓

Y, por **(2)** tenemos que $|v|\,|v''|\,cos\beta' = -\left|v'\right|^2 < 0 \implies cos\beta' = 0$, pero, dado que $grad\ f_p \in span(v)$, entonces $\beta = \beta' \implies cos\beta = cos\beta'$, y por lo tanto $\frac{d^2}{dt^2}df(v(t)) < 0$ ✓

c)

Primero, como $grad\ f_p \neq 0,\ \forall p \in C \implies df_p\,(v) = \langle grad\ f_p, v\rangle \neq 0$, tomando v que no sea ortogonal a $grad\ f_p$.

Esto implica que

$$df_p \neq 0,\ \forall p \in C$$

Dado $p_0 \in C$, hay un entorno V de p_0 que podemos describir mediante una carta (U, X), y defino $\overline{f} = f \circ X$, de forma que si

$$p_0 = X\,(u_0, v_0) \implies f\,(p_0) = f \circ X\,(u_0, v_0) = \overline{f}\,(u_0, v_0)$$

Ahora, por ser X una parametrización y $df\,(p_0) \neq 0$, entonces

$$d\left(\overline{f}\right)(u_0, v_0) \neq 0$$

por lo que $\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}\,(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial \overline{f}}{\partial v}\,(u_0, v_0)$ no se anulan simultáneamente.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\frac{\partial \overline{f}}{\partial v}\,(u_0, v_0) \neq 0$ y, por el teorema de la función implícita, existe $I \subset \mathbb{R},\ V\,(v_0) \subset \mathbb{R}$ y $g : I \to V\,(v_0)$ tales que

i) $g\,(u_0) = v_0$

ii) $\forall u \in I,\ \overline{f}\,(u, g\,(u)) - c = 0$

iii) $\left(I \times V\,(v_0) \cap \overline{f}^{-1}\,(c)\right) = \{(u, g\,(u)) : u \in I\}$

Definimos, entonces, la curva

$$\alpha\,(t) = (t, g\,(t))\,,\ t \in I$$

De esta forma, tenemos que $\alpha\,(I) = (I \times V\,(v_0)) \cap U = U$ abierto.

Además, α es una curva regular, pues es obviamente diferenciable (g es diferenciable) y

$$\alpha'\,(t) = \left(1, g'\,(t)\right) \neq 0$$

Para ver que la curva del enunciado es regular, la definimos como $\beta\,(t) = X \circ \alpha\,(t)$, y tenemos que

$$\beta'\,(t) = dX\,(\alpha\,(t))\,\alpha'\,(t) \neq 0$$

porque X es una parametrización regular y α ya hemos visto que es una curva regular. Por tanto, β es una curva diferenciable en $X\,(U)$. Además, $f\,(\beta\,(t)) = f\,(X \circ \alpha\,(t)) = f \circ X\,(\alpha\,(t)) = \overline{f}\,(\alpha\,(t)) = c$. Así que, efectivamente, β es la curva del enunciado en un entorno de p y es regular en S. Como esto lo hacemos para p arbitrario, entonces C es una curva diferenciable en S.

Para la última afirmación, tenemos que, dado $p \in C$, $p = \beta\,(t_0)$ y el vector tangente es $\beta'\,(t_0)$. Entonces

$$0 \overset{f\circ\alpha\ cte}{=} \frac{d}{dt}\,(f \circ \beta)\,(t_0) = df\,(\beta\,(t_0))\,\beta'\,(t_0) = df\,(p)\,\beta'\,(t_0) = \left\langle grad\ f_p, \beta'\,(t)\right\rangle$$

y queda demostrado que $grad\ f_p \perp \beta'\,(t)$, como queríamos ver.