

Ejercicio 1.1

Comenzamos introduciendo los datos del problema:

```
(%i3) Ano : [
1817 , 1818 , 1819 , 1820 , 1821 , 1822 , 1823 , 1824 , 1825 , 1826 , 1827 , 1828 , 1829 , 1830 , 1831
];
```

[1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831]

```
(%i4) Pobl : [
29981336 , 30177238 , 30339186 , 30539049 , 30727276 , 30939420 , 31138054 , 31359340 , 31579886 , 31755860 , 31913393
, 32102464 , 32241866 , 32402940 , 32560934
];
```

```
(%i5) AnoPob : transpose ( matrix ( Ano , Pobl ) );
```

1817	29981336
1818	30177238
1819	30339186
1820	30539049
1821	30727276
1822	30939420
1823	31138054
1824	31359340
1825	31579886
1826	31755860
1827	31913393
1828	32102464
1829	32241866
1830	32402940
1831	32560934

Ahora tomamos un modelo logístico general, cuyos coeficientes estimaremos a partir de los datos del problema:

```
(%i6) V ( t , r , K , P0 ) := - ( %e ^ ( r * ( t - 1817 ) ) * K * P0 ) / ( ( 1 - %e ^ ( r * ( t - 1817 ) ) ) * P0 - K ) ;
```

$$V(t, r, K, P0) := \frac{-e^{r(t-1817)} K P0}{(1 - e^{r(t-1817)}) P0 - K}$$

El procedimiento que vamos a seguir, tal y como indica el enunciado del problema, es el de estimar los tres coeficientes del modelo a partir de 3 puntos de los datos.

Para t=1817, queda V = K*P0/K = P0, y esto no aporta nada, la población inicial debe ser 29981336. De todas formas, lo vemos:

```
(%i7) solve ( [ V ( 1817 , r , K , 29981336 ) = 29981336 ] , [ r , K ] ) ;
```

all

Ahora usamos los otros dos puntos, correspondientes a 1824 y 1831: (1824, 31359340) y (1831, 32560934), para estimar r y K.

Este paso lo he dividido en dos, en lugar de resolver un sistema de dos ecuaciones, porque de esta última forma Maxima no encontraba solución.

```
(%i8) solve ( [ V ( 1824 , r , K , 29981336 ) = 31359340 ] , [ r , K ] ) ;
```

$$\left[\left[r = r_1, K = \frac{235048727319560 e^{7r_1} - 235048727319560}{7495334 e^{7r_1} - 7839835} \right] \right]$$

```
(%i9) solve ( [ V ( 1831 , r , ( 235048727319560 * %e ^ ( 7 * r ) - 235048727319560 ) / ( 7495334 * %e ^ ( 7 * r ) - 7839835 ) ,
29981336 ) = 32560934 ] , [ r ] ) ;
```

Ahora ya tenemos los coeficientes del modelo, que podemos tratar de expresar de forma algo más sencilla:

```
(%i10) R : log ( 13580235259 ^ ( 1 / 7 ) / 10903569446 ^ ( 1 / 7 ) ) ;
```

$$\log \left(\frac{13580235259^{\frac{1}{7}}}{10903569446^{\frac{1}{7}}} \right)$$

```
(%i11) K : ( 235048727319560 · %e ^ ( 7 · R ) - 235048727319560 ) / ( 7495334 · %e ^ ( 7 · R ) - 7839835 ) ;
```

$$\frac{146892328268425985}{3807151752}$$

Como comenté antes, el sistema no daba ninguna solución, como puede verse en la siguiente línea:

```
(%i13) solve ( [ V ( 1824 , n , m , 29981336 ) = 31359340 , V ( 1831 , n , m , 29981336 ) = 32560934 ] , [ n , m ] ) ;
```

□

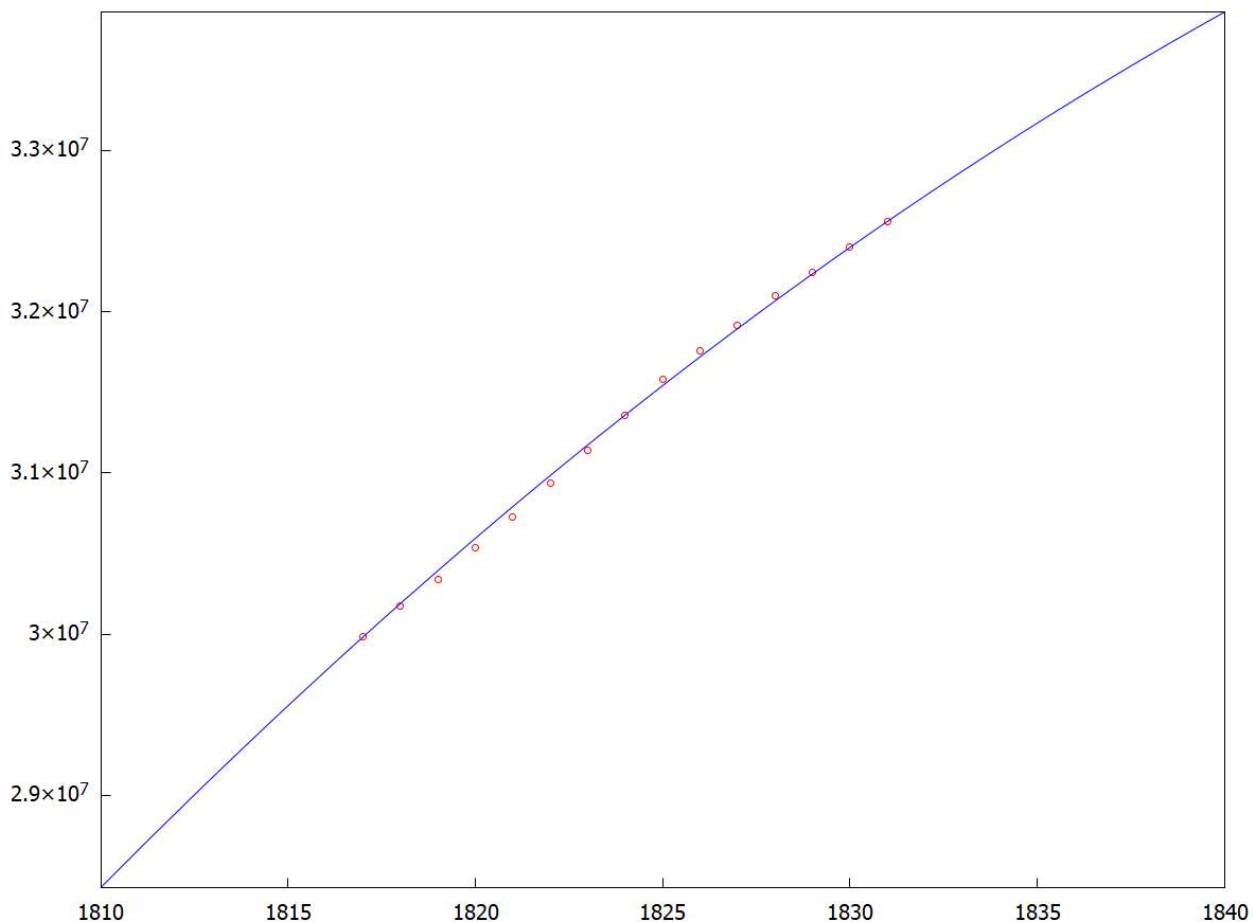
Por tanto, el modelo que tenemos es:

```
(%i15) V ( t , R , K , 29981336 ) ;
```

$$-\frac{550503531204747205926995\%e^{\log\left(\frac{13580235259^{\frac{1}{7}}}{10903569446^{\frac{1}{7}}}\right)(t-1817)}}{475893969\left(29981336\left(1-\%e^{\log\left(\frac{13580235259^{\frac{1}{7}}}{10903569446^{\frac{1}{7}}}\right)(t-1817)}\right)-\frac{146892328268425985}{3807151752}\right)}$$

Ahora dibujamos la gráfica de este modelo sobre los puntos de datos para observar el ajuste:

```
(%i16) wxdraw2d ( color = red , point_type = circle , points ( AnoPob ) , color = blue , explicit ( V ( t , R , K , 29981336 ) , t , 1810 , 1840 ) ) ;
```



Y vemos como funciona considerablemente bien, para estos datos.

Pasamos ahora a ver qué sucede a largo plazo, con los siguientes datos obtenidos de Wikipedia, como sugiere el enunciado:

(%i17) **T** : [1821 , 1831 , 1841 , 1851 , 1872 , 1881 , 1891 , 1901 , 1911 , 1921 , 1931 , 1946 , 1950 , 1960 , 1970 , 1980 , 1990 , 2000 , 2010 , 2020 , 2021] ;

[1821 , 1831 , 1841 , 1851 , 1872 , 1881 , 1891 , 1901 , 1911 , 1921 , 1931 , 1946 , 1950 , 1960 , 1970 , 1980 , 1990 , 2000 , 2010 , 2020 , 2021]

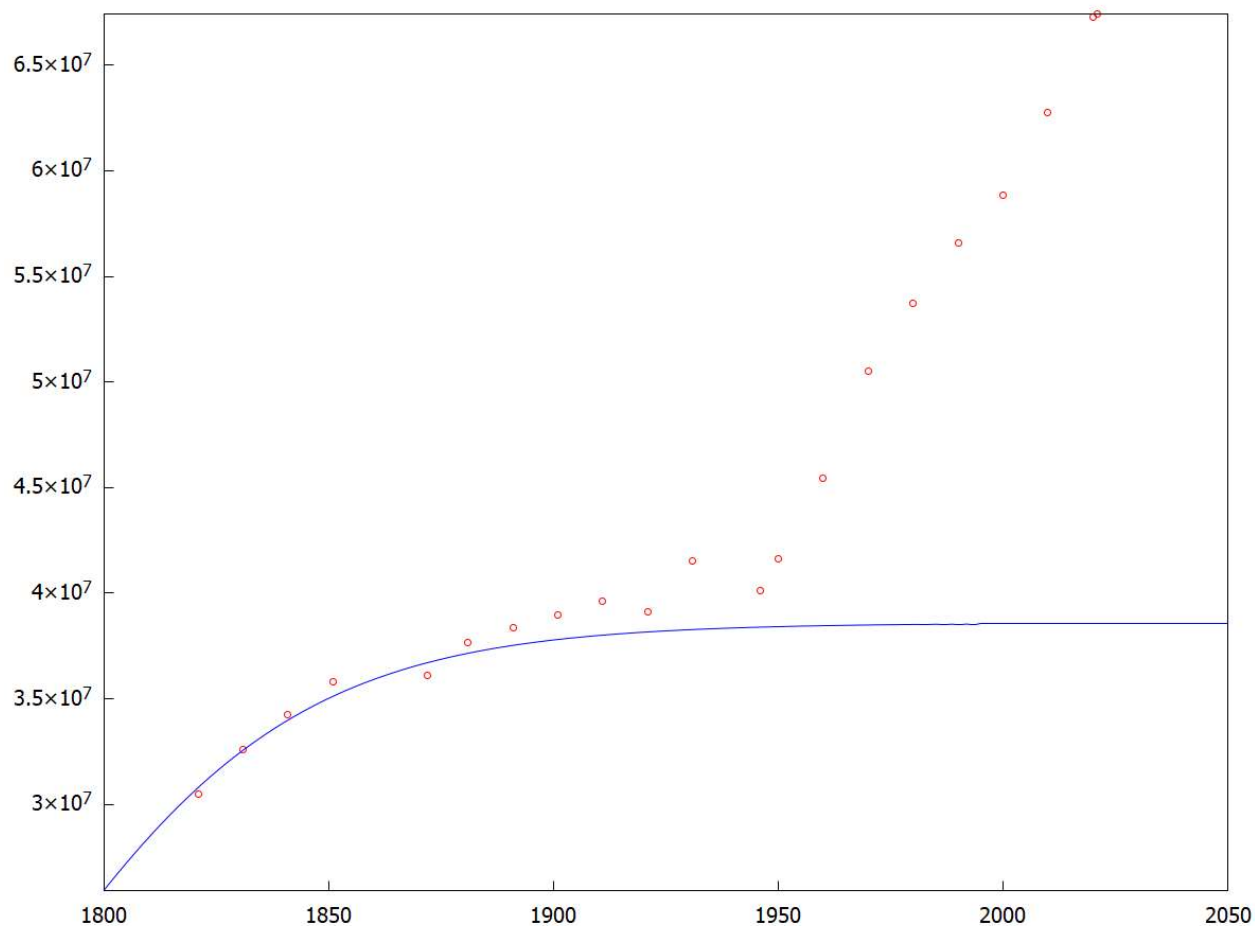
(%i18) **P** : [30462000 , 32569000 , 34230000 , 35783000 , 36103000 , 37672000 , 38343000 , 38962000 , 39605000 , 39108000 , 41524000 , 40125230 , 41647258 , 45464797 , 50528219 , 53731387 , 56577000 , 58858198 , 62765235 , 67287241 , 67422241] ;

(%i19) **TP** : transpose (matrix (**T** , **P**)) ;

1821	30462000
1831	32569000
1841	34230000
1851	35783000
1872	36103000
1881	37672000
1891	38343000
1901	38962000
1911	39605000
1921	39108000
1931	41524000
1946	40125230
1950	41647258
1960	45464797
1970	50528219
1980	53731387
1990	56577000
2000	58858198
2010	62765235
2020	67287241
2021	67422241

Por último, dibujamos la gráfica comparativa del modelo y los datos a largo plazo:

(%i20) **wxdraw2d** (color = red , point_type = circle , points (**TP**) , color = blue , explicit (**V** (**t** , **R** , **K** , 29981336) , **t** , 1800 , 2050)) ;



Observamos como en la primera mitad del siglo XX la población francesa entró en una nueva etapa de crecimiento exponencial, pero el modelo logístico ya estaba estabilizado, por lo que dejó de ser adecuado.

La nueva etapa de crecimiento exponencial se puede explicar por la industrialización y los grandes cambios tecnológicos que se experimentaron a finales del siglo XIX y principios del XX. De alguna forma, podemos entender que el efecto de estos hechos puede equipararse a que aumentan los recursos disponibles del medio, de forma que K aumenta, y puede que r también lo haga.

Created with [wxMaxima](#).

The source of this Maxima session can be downloaded [here](#).