Hoja 2: La ecuación del calor

1. En la deducción de la ecuación del calor en un sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ utilizamos varias magnitudes físicas. Sabiendo que el flujo $\vec{\mathbf{\Phi}}$ tiene unidades de watios/superficie (donde $[W] = [J/\text{seg}]$), y que las de σ (calor específico volumétrico) son $[J/(\,^\circ k\,\text{Vol})]$, encuentra las unidades de las constantes κ (conductividad térmica) y $\alpha = \kappa/\sigma$ (difusividad térmica).

2. En clase resolvimos la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

para la temperatura inicial $u(0,x) = \sin^2(\pi x)$ y $\alpha = 1$. Supón ahora que $\alpha = 0'1$. Encuentra la solución $u(t,x)$ en este caso, esboza su gráfica para varios valores de t, y determina a partir de qué valor de t se tiene $|u(t,x) - \frac{1}{2}| < 0'001$, $\forall\, x$. En general, ¿qué papel juega el coeficiente α?, ¿cómo afecta a la rapidez con que se alcanza el equilibrio térmico?

3. Resuelve la ecuación del calor en una varilla con extremos nulos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Si $\alpha = L = 1$, encuentra una fórmula explícita para $u(t,x)$ cuando $f(x) = \sin(\pi x)$, esboza su gráfica y determina cuándo es $|u(t,x)| < 0'001$.

b) Trata de encontrar una fórmula explícita cuando $f(x) = 1$, y si es posible, esboza una gráfica (aproximada) de $u(t,x)$.

Sugerencia: En b), intenta escribir $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, para ciertos coeficientes b_n que puedes determinar como en clase...

4. Ecuación del calor en una varilla con extremos no homogéneos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = \mathtt{T}_0, \quad u(t,L) = \mathtt{T}_1, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Encuentra primero una solución particular del tipo $\bar{u}(x)$.

b) Utiliza a) y la solución del ejercicio 3 para encontrar una solución en forma de serie trigonométrica. Determina una fórmula para los coeficientes si imponemos el dato inicial $u(0,x) = f(x)$.

c) Si $\alpha = L = 1$, determina la solución $u(t,x)$ cuando $\mathtt{T}_0 = 20, \mathtt{T}_1 = 0$ y $f(x) = 0$.

5. *Reacción en cadena para partículas confinadas en un dominio* Ω. En las reacciones nucleares de fisión, la densidad de neutrones $u(t,x)$, en un punto $x \in \Omega$ y en tiempo t, cumple la EDP

$$u_t = \mathtt{D}\Delta u \,+\, \alpha u, \quad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

para ciertos parámetros $\mathtt{D} > 0$ (difusión del material) y $\alpha > 0$ (tasa creación de neutrones/choque). Suponer que las particulas están confinadas en una varilla unidimensional $\Omega = (-R,R)$.

a) Utiliza separación de variables para encontrar una solución general de la EDP en este caso.

b) Demuestra que puede haber reacción en cadena (es decir, soluciones no acotadas en t) cuando R es mayor que el radio crítico $R_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathtt{D}}{\alpha}}$.

c) Encuentra una solución explícita cuando $u(0,x) = \cos(\frac{\pi x}{2R})$, y esboza aproximadamente su gráfica cuando $R > R_c$.

1. En la deducción de la ecuación del calor en un sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ utilizamos varias magnitudes físicas. Sabiendo que el flujo $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ tiene unidades de watios/superficie (donde $[W] = [J/seg]$), y que las de σ (calor específico volumétrico) son $[J/({}^\circ k\,\mathrm{Vol})]$, encuentra las unidades de las constantes κ (conductividad térmica) y $\alpha = \kappa/\sigma$ (difusividad térmica).

$$\vec{\Phi} = -K \nabla_x u \longrightarrow [\vec{\Phi}] = [K]\,[\nabla_x u] = [K] \cdot \frac{{}^\circ K}{m}$$

$$[\vec{\Phi}] = \frac{J/s}{m^2}$$

$$\rightarrow [K] = \frac{J}{{}^\circ K \cdot s \cdot m}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{K}{\sigma} \longrightarrow [\alpha] = \frac{[K]}{[\sigma]} = \frac{\cancel{J}/\cancel{{}^\circ K} \cdot s \cdot \cancel{m}}{\cancel{J}/\cancel{{}^\circ K} \cdot m^{\cancel{3}\,2}} = \frac{m^2}{s}$$

2. En clase resolvimos la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

para la temperatura inicial $u(0,x) = \sin^2(\pi x)$ y $\alpha = 1$. Supón ahora que $\alpha = 0'1$. Encuentra la solución $u(t,x)$ en este caso, esboza su gráfica para varios valores de t, y determina a partir de qué valor de t se tiene $|u(t,x) - \frac{1}{2}| < 0'001$, $\forall x$. En general, ¿qué papel juega el coeficiente α?, ¿cómo afecta a la rapidez con que se alcanza el equilibrio térmico?

$$u(t,x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 \alpha t} \cos(2\pi x)$$

$$\left| u(t,x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 \alpha t} |\cos(2\pi x)| \leq \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 \alpha t} < 0'001 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1000}{2} < e^{4\pi^2 \alpha t} \leftrightarrow \ln 500 < 4\pi^2 \alpha t \leftrightarrow t > \frac{\ln 500}{4\pi^2 \alpha}$$

A mayor α, más rápido se alcanza el equilibrio

3. Resuelve la ecuación del calor en una varilla con extremos nulos

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Si $\alpha = L = 1$, encuentra una fórmula explícita para $u(t,x)$ cuando $f(x) = \sin(\pi x)$, esboza su gráfica y determina cuándo es $|u(t,x)| < 0'001$.

b) Trata de encontrar una fórmula explícita cuando $f(x) = 1$, y si es posible, esboza una gráfica (aproximada) de $u(t,x)$.

a)

$$f(x) = \sum b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum b_n \operatorname{sen}(n\pi x) = \operatorname{sen}(\pi x) \Leftrightarrow b_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{u(t,x) = e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x)}$$

$$|u(t,x)| = |e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x)| \leq e^{-\pi^2 t} < 0'001 \Leftrightarrow 1000 < e^{\pi^2 t} \Leftrightarrow \ln 1000 < \pi^2 t$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln 1000}{\pi^2}$$

b)

$$B_n = 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = -2\,\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot \operatorname{sen}((2n-1)\pi x)$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\, e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t} \cdot \operatorname{sen}((2n-1)\pi x)}$$

4. Ecuación del calor en una varilla con extremos no homogéneos

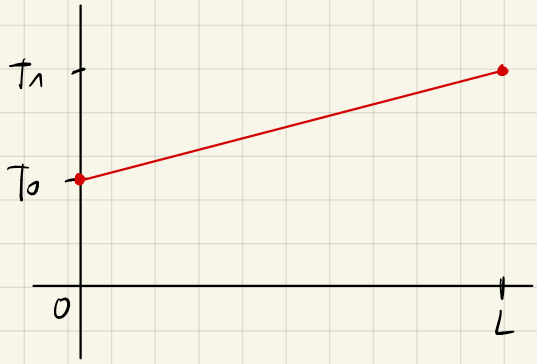
$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = \mathtt{T}_0, \quad u(t,L) = \mathtt{T}_1, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Encuentra primero una solución particular del tipo $\bar{u}(x)$.

b) Utiliza a) y la solución del ejercicio 3 para encontrar una solución en forma de serie trigonométrica. Determina una fórmula para los coeficientes si imponemos el dato inicial $u(0,x) = f(x)$.

c) Si $\alpha = L = 1$, determina la solución $u(t,x)$ cuando $\mathtt{T}_0 = 20, \mathtt{T}_1 = 0$ y $f(x) = 0$.

a)



$$\bar{u}(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L - 0}x = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L}x$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_t = 0 \\ \bar{u}_x = \dfrac{T_1 - T_0}{L} \longrightarrow \bar{u}_{xx} = 0 \end{array}\right\} \bar{u}_t = \alpha \bar{u}_{xx}$$

$$\bar{u}(0) = T_0$$

$$\bar{u}(L) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\cancel{L}}\cancel{L} = T_1$$

b)

$$u(t,x) = v(t,x) + \bar{u}(x)$$ donde v es solución del sistema con extremos homog. a temp 0.

$$\left.\begin{array}{l} u_t = v_t \\ u_{xx} = v_{xx} + \bar{u}'' = v_{xx} \end{array}\right\} u_t = v_t = \alpha v_{xx} = \alpha u_{xx}$$

$$u(t,0) = v(t,0) + \bar{u}(0) = \bar{u}(0) = T_0$$

$$u(t,L) = v(t,L) + \bar{u}(L) = \bar{u}(L) = T_1$$

$$u(t,x) = \left[T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L}x\right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(0,x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \longrightarrow \underline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} = f(x) - \frac{T_1 - T_0}{L}x - T_0 = \hat{f}(x)$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \hat{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \frac{T_1 - T_0}{L}x - T_0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \hat{f}(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \frac{T_1-T_0}{L}x - T_0\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - \frac{2(T_1-T_0)}{L^2}\int_0^L x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\underbrace{-\frac{2T_0}{L}\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{2T_0}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big]_0^L = \frac{2T_0}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{2T_0}{n\pi}}$$

$$\int_0^L x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big]_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$u = x \to du = dx$

$dv = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \to -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = v$

$$= -\frac{L}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big]_0^L = -\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \cancelto{0}{\frac{L^2}{n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi)} + 0 - \cancelto{0}{\frac{L^2}{n^2\pi^2}\text{sen}(0)}$$

$$= -\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) \qquad \cos(n\pi)\left[\frac{2}{n\pi}\right.$$

$$\to b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{2(T_1-\cancel{T_0})}{n\pi}\cos(n\pi) + \cancel{\frac{2T_0}{n\pi}\cos(n\pi)} - \frac{2T_0}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \frac{2T_1}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{2T_0}{n\pi}$$

c) $T_0 = 20,\ T_1 = 0,\ f(x) = 0,\ \alpha = L = 1$

$$\to b_n = \frac{2T_1}{n\pi}(-1)^n - \frac{2T_0}{n\pi} = \frac{-40}{n\pi}$$

$$u(t,x) = \bar{u}(x) + v(t,x) = 20 - 20x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-40}{n\pi}e^{-\pi^2 n^2 t}\,\text{sen}(n\pi x)$$

5. *Reacción en cadena para partículas confinadas en un dominio* Ω. En las reacciones nucleares de fisión, la densidad de neutrones $u(t,x)$, en un punto $x \in \Omega$ y en tiempo t, cumple la EDP

$$u_t = \mathtt{D}\Delta u + \alpha u, \quad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

para ciertos parámetros $\mathtt{D} > 0$ (difusión del material) y $\alpha > 0$ (tasa creación de neutrones/choque). Suponer que las particulas están confinadas en una varilla unidimensional $\Omega = (-R, R)$.

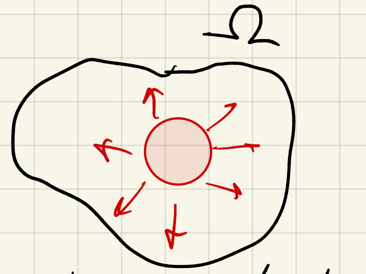
a) Utiliza separación de variables para encontrar una solución general de la EDP en este caso.

b) Demuestra que puede haber reacción en cadena (es decir, soluciones no acotadas en t) cuando R es mayor que el radio crítico $R_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathtt{D}}{\alpha}}$.

c) Encuentra una solución explícita cuando $u(0,x) = \cos(\frac{\pi x}{2R})$, y esboza aproximadamente su gráfica cuando $R > R_c$.

$u(t,x)$ = dencidad de neutrones en x tiempo t fijo

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u + \alpha u \\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



partículas confinadas en un dominio Ω

D = cte difusión

α = tasa de creación de neutrones

ⓐ

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + \alpha u & t \geq 0,\ x \in [-R,R] \\ u(t,\pm R) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

Buscamos soluciones no $\equiv 0$ de la forma $u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$

$$\rightarrow \quad T'X = D\cdot TX'' + \alpha\cdot TX \xrightarrow{\cdot \frac{1}{TX}} \frac{T'}{T} = D\frac{X''}{X} + \alpha = \text{cte} = \rho$$

$\rightarrow$ ① $T'(t) = \rho T(t)$

② $$\begin{cases} X''(x) = \underbrace{\frac{\rho-\alpha}{D}}_{=\mu} X(x) \\ X(\pm R) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso } \mu>0} \longrightarrow X(x) = A\,ch(\sqrt{\mu}\,x) + B\,sh(\sqrt{\mu}\,x)$

cond. cont. $\longrightarrow$ $\begin{cases} X(R) = A\,ch(\sqrt{\mu}R) + B\,sh(\sqrt{\mu}R) = 0 \\ X(-R) = A\,ch(\sqrt{\mu}R) - B\,sh(\sqrt{\mu}R) = 0 \end{cases}$

$2A\,sh(\sqrt{\mu}R) = 0 \longrightarrow A=0 \longrightarrow B\,sh(\sqrt{\mu}R)=0 \longrightarrow B=0$

NO

$\boxed{\mu=0}$

$X''(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} X(x) = A + Bx \\ X(\pm R) = 0 \end{cases} \longrightarrow A = B = 0$ No

$\boxed{\mu = -\alpha^2 < 0}$

$\begin{cases} X'' = -\alpha^2 X \longrightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) \\ X(\pm R) = 0 \longrightarrow X(R) = A\cos(\alpha R) + B\sin(\alpha R) = 0 \end{cases}$

$X(-R) = A\cos(\alpha R) - B\sin(\alpha R) = 0$

$2A\cos(\alpha R) = 0$

o bien $\boxed{A=0} \longrightarrow B\sin(\alpha R) = 0 \xrightarrow[B\neq 0]{} \alpha R = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ OK

o bien $\boxed{A\neq 0} \longrightarrow \cos(\alpha R) = (n+\frac{1}{2})\pi,\ n\in\mathbb{Z} \longrightarrow B=0$ OK

Esto nos da dos familias de soluciones:

- $\alpha_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R} \longrightarrow X_n^{(1)}(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \quad n\in\mathbb{N}$

- $\alpha_n^{(2)} = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{R} \longrightarrow X_n^{(2)}(x) = A_n \cos\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{R}\right],\ n = 0,1,2,\dots$

Por otro lado, (1) $T' = \rho T = (q - \lambda^2 D)\cdot T \to T(t) = c\cdot e^{(q-\lambda^2 D)t}$

La solución general de la EDP quedará:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) = &\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\left(q - (n+\frac{1}{2})^2 \frac{D\pi^2}{R^2}\right)t} \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{R}\right] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{\left(q - n^2\frac{D\pi^2}{R^2}\right)t} \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \end{aligned}}$$

$$\xrightarrow{t=0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{R}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)$$

(b) ¿ $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \infty \quad \forall x \in (-R, R)$?

Basta que algún exponente $\rho = q - \lambda^2 \cdot D > 0$, o sea

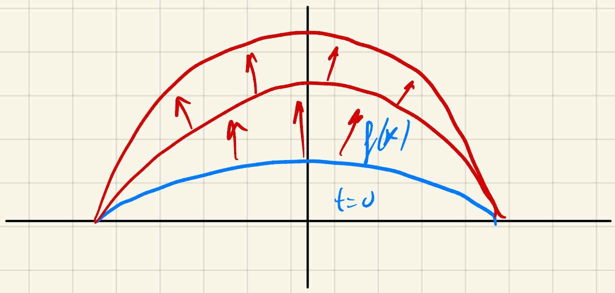
- o bien $\rho_n^{(1)} = q - \frac{n^2\pi^2}{R^2} D > 0$ para algún $n = 1, 2, \dots$
- o bien $\rho_n^{(2)} = q - (n+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{R^2} \cdot D > 0$, para algún $n = 0, 1, \dots$

El caso $n=0$ nos da el mayor ρ o sea,

$\exists n : \rho_n > 0 \leftrightarrow \rho_0^{(2)} > 0 \leftrightarrow q > (\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{R^2} D \leftrightarrow R > \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{D}{q}} = R_c$

(c) $A_0 = 1 \qquad A_n = B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\to u(t,x) = e^{\left(q - \frac{\pi^2 D}{4R^2}\right)t} \cos\left(\frac{\pi x}{2R}\right) = e^{q\left[1 - \left(\frac{R_c}{R}\right)^2\right]t} \cos\left(\frac{\pi x}{2R}\right)$$



6. Ecuación del calor en una varilla con extremos mixtos.

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(t,0) = \gamma u(t,0), \quad u_x(t,L) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Interpreta el significado físico de las condiciones de contorno. ¿Qué debería ocurrir cuando $t \to \infty$?

b) Mediante separación de variables, encuentra una solución general de la EDP en forma de serie trigonométrica.

Sugerencia: En a) recuerda que, según la ley de Fourier, $-u_x$ representa el flujo de calor.

7. Suponer dos grandes depósitos de agua salada conectados por un fino tubo de longitud L. Sea $u(t,x)$ la concentración de sal en el punto x del tubo en tiempo t, que supondremos que cumple la ley de Fick, es decir

$$u_t = D\, u_{xx},$$

para una cierta constante $D > 0$. Se pide describir con una fórmula matemática las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

a) El tubo tiene inicialmente agua pura, y las concentraciones en los depósitos se mantienen constantes q_1 y q_2.

b) Suponer que $q_2 = 0$ y que para $t \geq 0$ colocamos un filtro que no deja pasar más sal del primer depósito al tubo. Además, en el instante $t = 0$ la concentración en el tubo es una función que decrece linealmente desde q_1 hasta 0.

¿Sabrías escribir la solución general de las ecuaciones en (a) y (b)?

8. Considera la EDP

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \tag{P}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de t es $u(t,x) \leq 0'001$, $\forall\, x$?

Opcionales:

9. Sean $u^j(t,x)$, $j = 1,2$, soluciones en $C^{1,2}_{t,x}([0,T] \times [0,L])$ de $u_t = u_{xx}$ con datos

$$u^j(x,0) = f^j(x),\ x \in [0,L], \qquad \text{y} \qquad u^j(t,0) = \phi^j(t),\ \ u^j(t,L) = \psi^j(t), \quad t \in [0,T].$$

Utiliza el principio del máximo para probar la siguiente estimación de estabilidad:

$$|u^1(t,x) - u^2(t,x)| \leq \text{máx}\Big\{\|f^1 - f^2\|,\ \|\phi^1 - \phi^2\|,\ \|\psi^1 - \psi^2\|\Big\},$$

donde $\|f\| = \underset{x \in [0,L]}{\text{máx}} |f(x)|$ y $\|\phi\| = \underset{t \in [0,T]}{\text{máx}} |\phi(t)|$.

10. Considera la solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ dada por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} W(t, x-y)\, f(y)\, dy,$$

donde $W(t,x) = (4\pi t)^{-1} e^{-|x|^2/(4t)}$ es el núcleo de Gauss-Weierstrass. Demuestra que

(a) Si $f(y) = e^{iay}$ entonces $u(t,x) = e^{-at^2} e^{iax}$

(b) Si $f(y) = W(a,y)$ entonces $u(t,x) = W(a+t,x)$.

6. Ecuación del calor en una varilla con extremos mixtos.

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(t,0) = \gamma u(t,0), \quad u_x(t,L) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Interpreta el significado físico de las condiciones de contorno. ¿Qué debería ocurrir cuando $t \to \infty$?

b) Mediante separación de variables, encuentra una solución general de la EDP en forma de serie trigonométrica.

a) El extremo derecho está aislado.
El extremo izquierdo no está perfectamente aislado, y presenta un flujo de calor proporcional a la temperatura del extremo.

Debería ocurrir

$$\lim_{t\to\infty} u_x(t,0) = 0 \quad \text{siempre que} \quad \gamma \leq 0$$

$$\lim_{t\to\infty} u_x(t,0) = \infty \quad \text{si} \quad \gamma > 0$$

pero esto no tiene mucho sentido

b) $u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$

$$T'(t)\, X(x) = T(t)\cdot X''(x) \longrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \rho$$

$$\longrightarrow \begin{cases} T' = \rho T \\ X'' = \rho X \end{cases}$$

$\boxed{\rho = \lambda^2 > 0}$

$\longrightarrow T(t) = e^{\rho t}$

$\longrightarrow X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} = \tilde{A}\, ch(\lambda x) + \tilde{B}\, sh(\lambda x)$

$u(t,x) = e^{\lambda t}\left(\tilde{A}\, ch(\lambda x) + \tilde{B}\, sh(\lambda x)\right)$

$$T(t) = ce^{\rho t} = ce^{\lambda^2 t}$$

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x) = ce^{\lambda^2 t}\left(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\right)$$

$$u_x(t,x) = ce^{\lambda^2 t}\left(A\lambda e^{\lambda x} - B\lambda e^{-\lambda x}\right)$$

$$u_x(t,0) = ce^{\lambda^2 t}(A\lambda - B\lambda) = \gamma u(t,0) = \gamma ce^{\lambda^2 t}(A+B)$$

$$\rightarrow \quad \lambda(A-B) = \gamma(A+B) \rightarrow A(\lambda-\gamma) = B(\gamma+\lambda) \rightarrow A = B\frac{(\gamma+\lambda)}{\lambda-\gamma}$$

$$u_x(t,L) = e^{\lambda^2 t}\left(B\lambda\frac{\gamma+\lambda}{\lambda-\gamma}e^{\lambda L} - B\lambda e^{-\lambda L}\right) = 0$$

$$\rightarrow B\lambda\frac{\gamma+\lambda}{\lambda-\gamma}e^{\lambda L} - B\lambda e^{-\lambda L} = 0 \rightarrow B\lambda\left(\frac{\gamma+\lambda}{\lambda-\gamma}e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}\right) = 0$$

$$\rightarrow B = 0 \rightarrow A = 0 \quad \not{A}$$

$\boxed{\rho = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} T = K_t \\ X = K_1 x + K_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u(t,x) = K_t K_1 x + K_t K_2 \\ u_x(t,x) = K_t K_1 \end{array}$$

$$u_x(t,L) = 0 \rightarrow K_t = 0 \rightarrow u \equiv 0 \quad \not{A}$$

$$K_1 = 0 \rightarrow u \equiv K_t K_2 \quad \text{ok}$$

$$u_x(t,0) = 0 = \gamma u(t,0) \leftrightarrow \gamma = 0 \leftarrow \text{no necessariamente}$$

ó

$$u(t,0) \equiv 0 \quad \not{A}$$

$\boxed{\rho<0}$ $\quad \rho=-\lambda^2<0$

$$T(t)=ce^{-\lambda^2 t}$$

$$X(x)=A\cos(\lambda x)+B\,\mathrm{sen}(\lambda x)$$

$$u(t,x)=ce^{-\lambda^2 t}\left(A\cos(\lambda x)+B\,\mathrm{sen}(\lambda x)\right)$$

$$u_x=ce^{-\lambda^2 t}\left(-A\lambda\,\mathrm{sen}(\lambda x)+B\lambda\cos(\lambda x)\right)$$

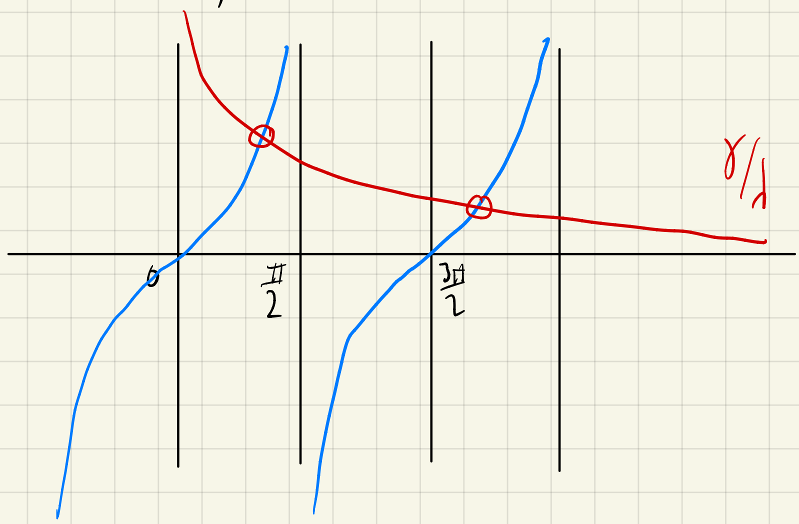
$$u_x(t,0)=\cancel{ce^{-\lambda^2 t}}\cdot B\lambda=\gamma\, u(t,0)=\cancel{ce^{-\lambda^2 t}}A\gamma \to \gamma A=B\lambda$$

$$u_x(t,L)=ce^{-\lambda^2 t}\left(-B\frac{\lambda^2}{\gamma}\mathrm{sen}(\lambda L)+B\lambda\cos(\lambda L)\right)=0$$

$$\leftrightarrow -B\frac{\lambda^2}{\gamma}\mathrm{sen}(\lambda L)+B\lambda\cos(\lambda L)=0 \xleftrightarrow{B\lambda\neq 0} -\frac{\lambda}{\gamma}\mathrm{sen}(\lambda L)+\cos(\lambda L)=0$$

$$\leftrightarrow \cos(\lambda L)=\frac{\lambda}{\gamma}\mathrm{sen}(\lambda L) \leftrightarrow \frac{\mathrm{sen}(\lambda L)}{\cos(\lambda L)}=\frac{\gamma}{\lambda} \leftrightarrow \tan(\lambda L)=\frac{\gamma}{\lambda}$$

$$\forall n,\ \exists \lambda_n\in\left(\frac{n\pi}{L},\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right)$$



De hecho, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n\pi}{L}$

7. Suponer dos grandes depósitos de agua salada conectados por un fino tubo de longitud L. Sea $u(t,x)$ la concentración de sal en el punto x del tubo en tiempo t, que supondremos que cumple la ley de Fick, es decir

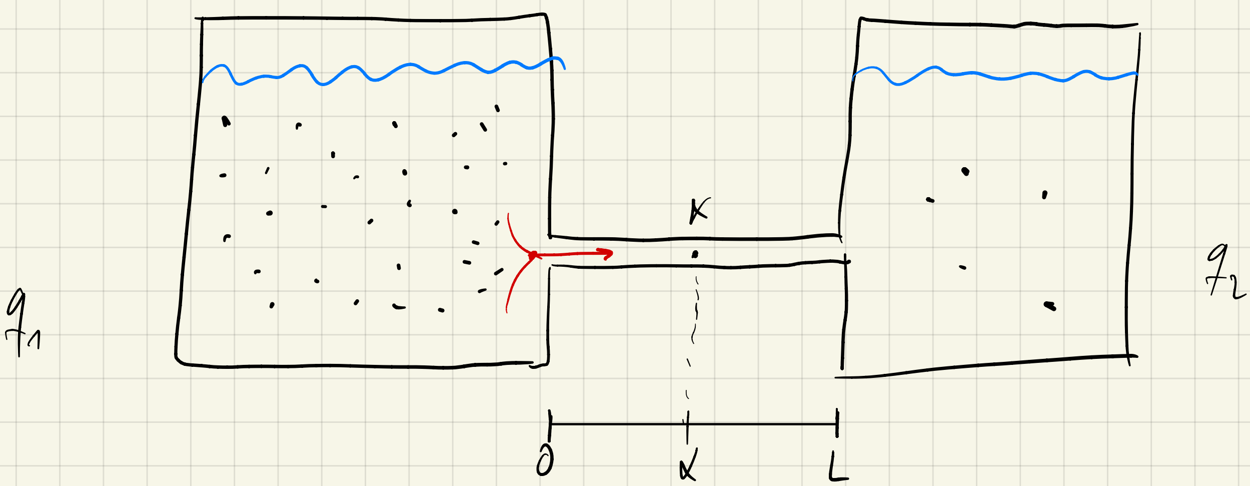
$$u_t = D\,u_{xx},$$

para una cierta constante $D > 0$. Se pide describir con una fórmula matemática las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

a) El tubo tiene inicialmente agua pura, y las concentraciones en los depósitos se mantienen constantes q_1 y q_2.

b) Suponer que $q_2 = 0$ y que para $t \geq 0$ colocamos un filtro que no deja pasar más sal del primer depósito al tubo. Además, en el instante $t = 0$ la concentración en el tubo es una función que decrece linealmente desde q_1 hasta 0.

¿Sabrías escribir la solución general de las ecuaciones en (a) y (b)?



a)
$$\begin{cases} u_t = D\cdot u_{xx} & t>0,\ x\in(0,L) \\ u(0,x)=0 & x\in(0,L) \\ u(t,0)=q_1 \\ u(t,L)=q_2 \end{cases}$$

8. Considera la EDP

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \qquad \text{(P)}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

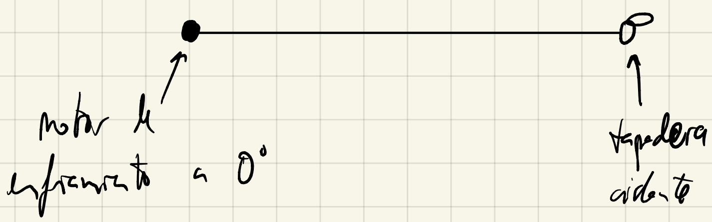
b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de t es $u(t,x) \leq 0'001$, $\forall\, x$?

(a) El extremo L está aislado.

El extremo 0 tiene una temperatura constante $\equiv 0$.

Es como un refrigerador:



(b) $T' = \rho T$

$X'' = \frac{\rho}{\alpha} X$

$\boxed{\rho>0} \to T \to \infty \to$ No

$\boxed{\rho=0}$ $\left.\begin{array}{l} T = T_0 \\ X = X_0 x + X_1 \end{array}\right\}$ $u(t,x) = T_0X_0x + T_0X_1$ $\qquad u(t,0) = 0 = T_0X_1$

$u_x = T_0X_0$ $\qquad \to u \equiv 0$ //

$u_x(t,L) = T_0X_0 = 0$

$\boxed{\rho<0}$ $\rho = -\lambda^2 < 0$

$T' = -\lambda^2 T \to T = ce^{-\lambda^2 t}$

$X'' = \frac{-\lambda^2}{\alpha} X \to X = A\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right)$

$X(0) = A = 0 \to \boxed{A=0}$

$X_x = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} B\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) \xrightarrow{x=L} \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} B\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}L\right) = 0 \xrightarrow{B\neq0} \lambda_n = \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}}{L}$

$$T = c e^{-\lambda^2 t}$$

$$X = A\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}}{L} = \frac{(2n-1)\pi\sqrt{\alpha}}{2L}$$

$$\rightarrow X_n = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} x\right)$$

$$\rightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha}{4L^2} t} \cdot B_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} x\right)$$

$$u(0,x) = f(x) \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} x\right) = f(x)$$

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2m-1)}{2L} x\right) dx = \int_0^L \sum_n B_n \, s\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} x\right) s\left(\frac{\pi(2m-1)}{2L} x\right) dx =$$

$$= \sum_n B_n \int_0^L s\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} x\right) s\left(\frac{\pi(2m-1)}{2L} x\right) dx = B_m \frac{L}{2}$$

$$\bar{m} = \frac{2m-1}{2} \qquad \bar{n} = \frac{2n-1}{2}$$

Lema Si $m, n = 1, 2, 3, \dots$ entonces

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \frac{L}{2}, & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\rightarrow B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2m-1)}{2L} x\right) dx$$

c)

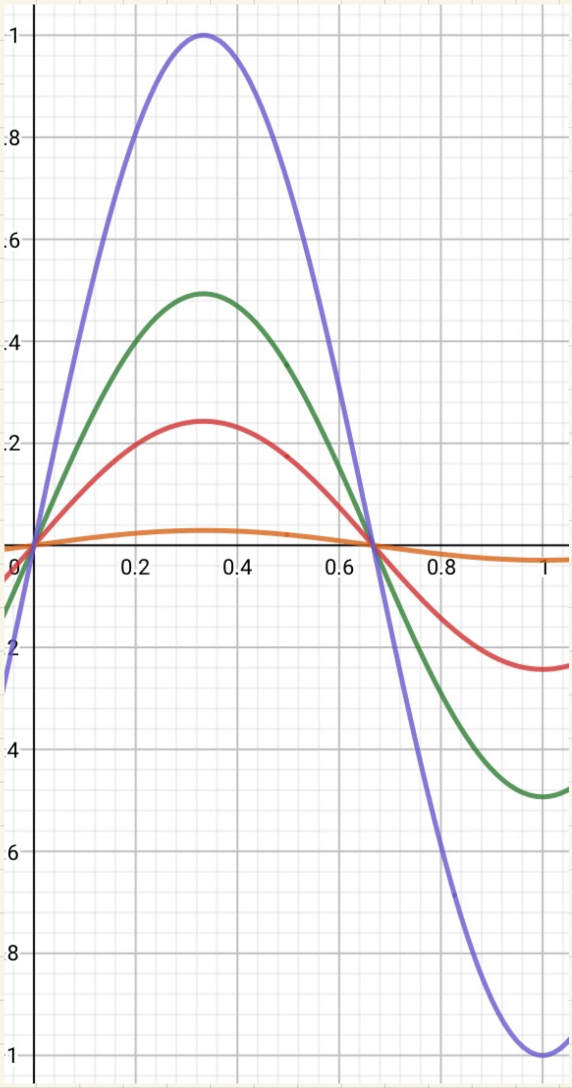
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\alpha}{4L^2}t} B_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right)$$

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

$$\alpha = L = 1 \rightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t} \cdot B_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{2}\pi x\right)$$

$$B_2 = 1 \qquad B_n = 0 \quad \forall n \neq 2$$

$$\rightarrow u(t,x) = e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$



$$u(t,x) \leq 0{,}001$$

$$\leftrightarrow e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \leq 0{,}001$$

$$e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t} \leq 0{,}001 \leftrightarrow 1000 \leq e^{\frac{9}{4}\pi^2 t}$$

$$\leftrightarrow \ln 1000 \leq \frac{9}{4}\pi^2 t \leftrightarrow t \geq \frac{4}{9\pi^2} \ln 1000$$

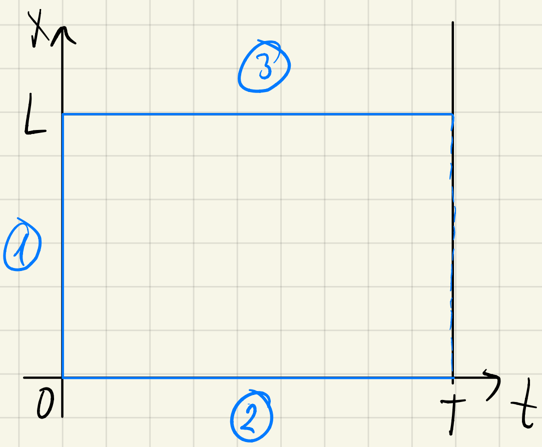
9. Sean $u^j(t,x)$, $j=1,2$, soluciones en $C^{1,2}_{t,x}([0,T]\times[0,L])$ de $u_t = u_{xx}$ con datos

$$u^j(x,0)=f^j(x),\ x\in[0,L], \qquad \text{y} \qquad u^j(t,0)=\phi^j(t),\ \ u^j(t,L)=\psi^j(t), \quad t\in[0,T].$$

Utiliza el principio del máximo para probar la siguiente estimación de estabilidad:

$$|u^1(t,x)-u^2(t,x)| \le \text{máx}\left\{\|f^1-f^2\|,\ \|\phi^1-\phi^2\|,\ \|\psi^1-\psi^2\|\right\},$$

donde $\|f\| = \underset{x\in[0,L]}{\text{máx}} |f(x)|$ y $\|\phi\| = \underset{t\in[0,T]}{\text{máx}} |\phi(t)|$.



$u(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$

$u_t = u_{xx}$

$$\left.\begin{array}{l} ① \ t=0 \to u(0,x) = f^1(x) - f^2(x) \\ ② \ x=0 \to u(t,0) = \phi^1(t) - \phi^2(t) \\ ③ \ x=L \to u(t,L) = \psi^1(t) - \psi^2(t) \end{array}\right\}$$

$$\min\{f^1-f^2, \dots\} \le u(t,x) \le \max\{f^1-f^2, \dots\}$$

$$\to |u(t,x)| \le \max\{|\max\{\dots\}|, |\min\{\dots\}|\} \le \max\{|f^1-f^2|, |\phi^1-\phi^2|, |\psi^1-\psi^2|\}$$

11. La *ecuación de los medios porosos* es una versión no-lineal de la ecuación del calor:

$$u_t = \Delta_x(u^a), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

donde $a > 1$ es una constante fija. En este ejercicio encontramos soluciones explícitas por el método de las autosemejanzas (ver Evans, 4.2.2), cuando $d = 1$. Es decir, buscamos $u(t,x) \geq 0$ tal que

$$u_t \;=\; \big(u^a\big)_{xx} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = 1,\ \forall\, t > 0. \tag{*}$$

(a) Demuestra que $v(t,x) = \gamma u(\lambda t, \mu x)$ cumple $(*)$ sii

$$\gamma = \mu \quad \text{y} \quad \lambda = \gamma^{a-1}\mu^2 = \mu^{a+1}.$$

(b) Sea $b = 1/(a+1)$. Encuentra una solución de $(*)$ de la forma

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{t^b}\,\phi\Big(\frac{x}{t^b}\Big),$$

para una función $\phi(r) \geq 0$ adecuada (digamos con $\phi(0) = 1$). Para ello

- demuestra que ϕ debe cumplir la EDO

$$\big(\phi^a\big)''(r) \;=\; -b\,\big(\phi(r) + r\phi'(r)\big) \;=\; -b\,\big(r\phi\big)'$$

- resolviendo la EDO anterior, deduce que

$$\phi(r) = \big(1 - (r/\gamma)^2\big)_+^{\frac{1}{a-1}}$$

  para una constante $\gamma = \gamma(a) > 0$ a determinar.

(c) Demuestra que la solución obtenida en (b) cumple

$$\text{Sop } u(t,\cdot) = \big[-\gamma t^{\frac{1}{a+1}}, \gamma t^{\frac{1}{a+1}}\big],$$

y por tanto que $u(t,x)$ tiene velocidad de propagación finita.

Nombre: SOLUCIONES

9'8

1. Considera la EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & t>0,\ 0<x<\pi \\ u(0,x) = f(x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases} \quad \text{(P)}$$

a) Explica brevemente una interpretación física de (P).

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Escribe el valor de los coeficientes de la solución general como una integral que involucre a $f(x)$.

d) Resuelve explícitamente el caso $f(x) = 80\,\text{sen}^3 x$, y esboza la gráfica de la solución.

Sugerencia: En (d) puedes usar $4\,\text{sen}^3 x = 3\,\text{sen}\, x - \text{sen}(3x)$.

b) Hay que encontrar soluciones de la forma $u(t,x) = T(t)\cdot U(x)$. Derivando y sustituyendo:

$$T'(t)\,U(x) = T(t)\,U''(x) - T(t)\,U(x) \implies \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} - 1 \equiv \text{cte} = p$$

Por un lado, $T'(t) = p\cdot T(t) \implies T(t) = c\cdot e^{pt}$

Por otro lado, $\frac{U''(x)}{U(x)} - 1 = p \implies U''(x) = (p+1)\,U(x) = \lambda\, U(x)$, donde $\lambda := p+1$. Distinguimos varios casos:

- Caso $\lambda = -\mu^2 < 0$:

Tenemos que $U''(x) = -\mu^2 U(x) \implies$ La solución de la ecuación tiene la forma $U(x) = A\cdot\cos(\mu x) + B\cdot\text{sen}(\mu x)$. Aplicamos las condiciones iniciales: ✓

$$\begin{cases} U(0) = 0 = A + 0 \implies A = 0 \\ U(\pi) = 0 = 0 + B\cdot\text{sen}(\mu\pi) \end{cases}$$

Como queremos encontrar soluciones no nulas, supongamos que $B \neq 0 \implies \text{sen}(\mu\pi) = 0 \implies \mu\pi = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z} \implies \mu = n$, con $n = 0,1,2\ldots$

✓

Siendo $\mu_n = n$, para $n = 0,1,2\ldots \implies U_n(x) = B_n\cdot\text{sen}(\mu_n x)$. Con lo cual, las soluciones no nulas encontradas en este caso son: $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n^2+1)t}\cdot b_n\cdot\text{sen}(nx)}$, siendo $0<x<\pi$ y $t>0$.

n=0 no aporta

Sabiendo que $\lambda = p+1 \iff -\mu^2 = p+1 \iff p = -(\mu^2+1)$, despejando.

- Caso $\lambda = 0$:

Tenemos que $U''(x) = 0 \implies U'(x) = a \implies U(x) = ax+b$. Aplicando las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} U(0) = 0 = b \implies b = 0 \\ U(\pi) = 0 = a\pi \implies a = 0 \end{array}\right\} \implies \text{Las soluciones encontradas son nulas.}$$

✓

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,x) = f(x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

(b) $u(t,x) = T(t) \cdot X(x) \longrightarrow u_t = T'(t) \cdot X(x)$

$u_{xx} = T(t) \cdot X''(x)$

$\longrightarrow T'(t) \cdot X(x) = T(t)\left[X''(x) - X(x)\right]$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{T'}{T}}_{t} = \underbrace{\frac{X''}{X} - 1}_{x} = cte = \rho$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} T' = \rho T \longrightarrow T(t) = c \cdot e^{\rho t} \\ X'' = (\rho + 1) X \end{cases}$$

$\boxed{\rho + 1 = \lambda^2 > 0}$ $X = A\,ch(\lambda x) + B\,sh(\lambda x)$

$u(t,0) = 0 \longleftrightarrow X(0) = 0 \longleftrightarrow A = 0$

$X(\pi) = B\,sh(\lambda\pi) \Longrightarrow B = 0$ $\nexists$

$\boxed{\rho + 1 = 0}$ $X = Ax + B$

$X(0) = 0 \longleftrightarrow B = 0$

$X(\pi) = 0 \longleftrightarrow A = 0$ $\nexists$

$\boxed{\rho + 1 = -\lambda^2 < 0}$ $X(x) = A\cos(\lambda x) + B\,sen(\lambda x)$

$\rho = -\lambda^2 - 1$

$X(0) = A = 0$

$X(\pi) = B\,sen(\lambda\pi) = 0 \xrightarrow[B \neq 0]{} sen(\lambda\pi) = 0 \longrightarrow \lambda_n = n \qquad n \geq 0$

$$\longrightarrow u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n^2+1)t} B_n \cdot sen(n x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2+1)t} B_n\,sen(nx)$$

(c) $u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx) = f(x)$

$m \geq 1$

$$\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty B_n \operatorname{sen}(nx)\, \operatorname{sen}(mx)\,dx = \sum_{n=1}^\infty B_n \int_0^\pi \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq m \\ B_m\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(mx)\,dx = B_m \int_0^\pi \frac{1-\cos(2mx)}{2}\,dx = B_m\left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2mx)}{4m}\right]_0^\pi = B_m\cdot\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1-2\operatorname{sen}^2(\alpha) \to \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$= \cos^2 - (1-\cos^2) = -1+2\cos^2\alpha \to \cos^2 = \frac{\cos(2\alpha)-1}{2}$$

$$\to \boxed{B_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx}$$

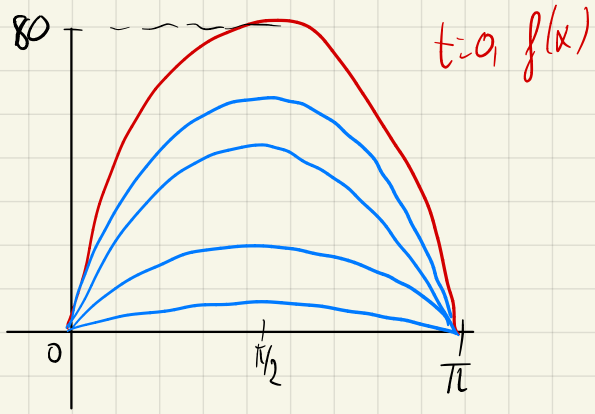
(d) d) Resuelve explícitamente el caso $f(x) = 80\operatorname{sen}^3 x$, y esboza la gráfica de la solución.

Sugerencia: En (d) puedes usar $4\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)$.

$$80\operatorname{sen}^3 x = 20(4\operatorname{sen}^3 x) = 20(3\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}(3x)) = 60\operatorname{sen}x - 20\operatorname{sen}(3x)$$

$B_1 = 60 \quad B_3 = -20 \quad B_n = 0 \quad \forall n\neq 1,3$

$$\to u(t,x) = e^{-2t}\,60\cdot\operatorname{sen}(x) - e^{-10t}\cdot 20\cdot\operatorname{sen}(3x)$$



$$X'' = \lambda^2 X \longrightarrow X(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} = \bar{A}\, ch(\lambda x) + \bar{B}\, sh(\lambda x)$$

$\bar{A} = f(A)$

$\bar{B} = g(B)$

• Caso $\lambda > 0$:

La solución de la ecuación tendrá la forma $u(x) = A\cdot\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}x)$. Aplicamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0 \\ u(\pi) = 0 = A\cdot\cosh(\sqrt{\lambda}\pi) + B\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 + B\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Las soluciones encontradas en este caso también son nulas.

SOLUCIONES

c) Deducimos que $\alpha = 1$ y que $L = \pi$. Entonces:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\cdot\mathrm{sen}(nx)\,dx, \quad \text{donde } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot\mathrm{sen}(nx), \text{ siendo } 0 < x < \pi.$$

d) Sabemos, por el enunciado, que $4\,\mathrm{sen}^3 x = 3\cdot\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}(3x)$.

Con lo cual, $f(x) = 80\,\mathrm{sen}^3 x = 60\,\mathrm{sen}\,x - 20\,\mathrm{sen}(3x)$.

Para que $f(x)$ sea así, es necesario que $b_1 = 60$, $b_3 = -20$ y el resto de b_n sean nulos. Por lo tanto,

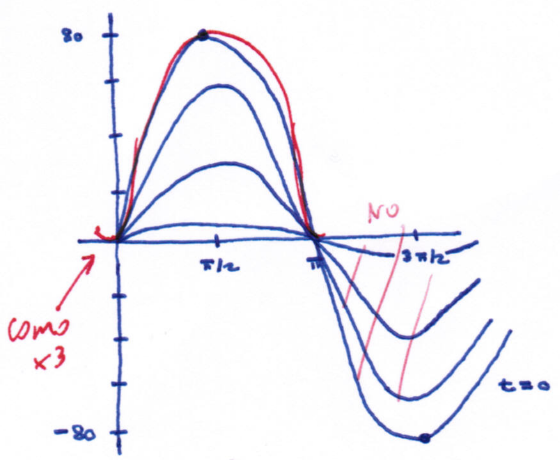
$u(t,x) = 60\cdot e^{-2t}\cdot\mathrm{sen}(x) - 20\cdot e^{-10t}\cdot\mathrm{sen}(3x)$ es la solución de la EDP.

a) Se trata de un problema físico en una varilla de longitud π, que aplica la ecuación del calor. Además, dicha varilla posee extremos nulos. La difusividad térmica en (P) es $\alpha = 1$. ¿$-u$?

↑

este término es un enfriamiento exponencial de la barra.

Representación gráfica pedida en d):



EDPs y series de Fourier, 3° Matemáticas/4° PES **Test 1, 16/2/2017**

Nombre:

. . . .

1. Considera la EDP

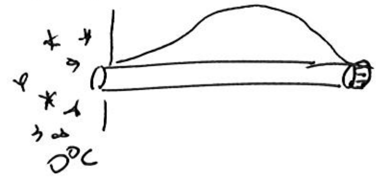
$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \qquad \text{(P)}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \text{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de t es $u(t,x) \leq 0'001$, $\forall x$?

a) Ec. calor en varilla de longitud L, con un extremo aislado $(x = L)$, y el otro $(x=0)$ a temperatura de $u \equiv 0$



Con estas condiciones es de esperar que

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0, \quad \forall x \in (0,L).$$

b) $u(t,x) = U(t)V(x) \to \dfrac{U'(t)}{U(t)} = \alpha \dfrac{V''(x)}{V(x)} = \rho = \text{cte}$

como espero soluciones acotadas, puedo suponer $\rho = -\lambda^2$

- $U'(t) = -\lambda^2 U(t) \longrightarrow U(t) = U(0)\, e^{-\lambda^2 t}$
- $V''(x) = -\dfrac{\lambda^2}{\alpha} V(x) \to V(x) = A\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B\,\text{sen}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right)$

Busco sol. con $V(0) = V'(L) = 0 \Rightarrow 0 = V(0) = A$

$\Rightarrow V'(x) = B\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) \Rightarrow V'(L) = \dfrac{B\lambda}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}L\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}L = (n+\tfrac{1}{2})\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow u(t,x) = B \cdot e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\alpha t}{L^2}} \cdot \text{sen}\left(\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = -1, -2, \ldots$ dan las mismas soluciones

$\Rightarrow$ La solución general es

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{\alpha\pi^2(n+\frac{1}{2})^2 t}{L^2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)}$$

(b) $T'X = \alpha T X'' \longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \alpha \dfrac{X''}{X} = cte = \rho$

$$\begin{cases} T' = \rho T \longrightarrow \boxed{T(t) = e^{\rho t}} \\ X'' = \dfrac{\rho}{\alpha} X \end{cases}$$

$\boxed{\rho = \lambda^2 > 0}$ $\quad X'' = \dfrac{\lambda^2}{\alpha} X \longrightarrow X(x) = A\, ch\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B\, sh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

$X(0) = A = 0 \longrightarrow X(x) = B\, sh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

$X'(x) = B\, ch\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

$X'(L) = B\, ch\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \longrightarrow B = 0 \quad \nexists$ No

$\boxed{\rho = 0}$ $\quad X(x) = Ax + B$

$X(0) = 0 \longrightarrow B = 0$

$X'(L) = 0 \longrightarrow A = 0 \quad \nexists$ No

$\boxed{\rho = -\lambda^2 < 0}$ $\quad X(x) = A \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B\, \mathrm{sen}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

$X(0) = A = 0 \longrightarrow X(x) = B\, \mathrm{sen}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

$X'(x) = B \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$

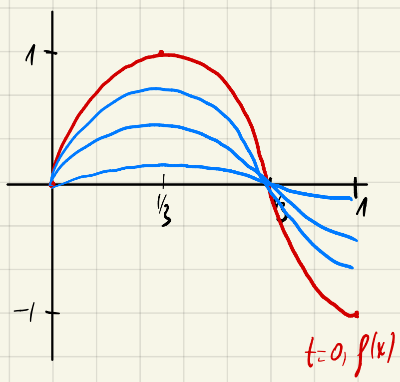
$X'(L) = B \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \xrightarrow{B \neq 0} \lambda_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{L} \cdot (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2} \qquad n \geq 1$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha (2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} t} \cdot B_n \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right)$$

(c) $f(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \qquad B_2 = 1; \quad B_n = 0 \quad \forall n \neq 2$

$\alpha = L = 1$

$$u(t,x) = e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t}\, \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$



los coeficientes b_n, en su caso, se determinan

con

$$t=0 \longrightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L}}$$

Usando la relación de ortogonalidad

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L} \operatorname{sen}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L}\, dx \underset{\frac{x}{L}=y}{=} L\int_0^{1} \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi y \operatorname{sen}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi y\, dy$$

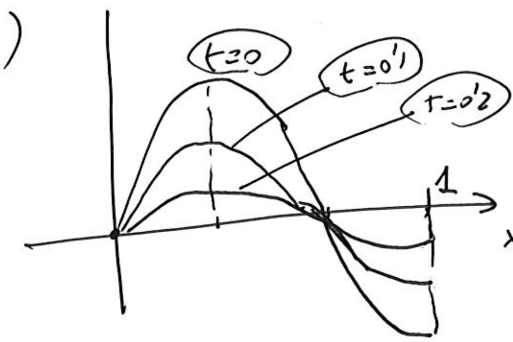
$$= \begin{cases} 2L & \text{si } n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{2L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L}\, dx}$$

c) $\boxed{\alpha = L = 1}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

En este caso es claro que $b_1 = 1$, $b_n \equiv 0, n \neq 1$.

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{-\frac{9\pi^2}{4}t} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$



Se observa que $u(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$|u(t,x)| \leq e^{-\frac{9\pi^2 t}{4}} \leq 0'001$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{9\pi^2 t}{4}} \geq 10^3 \Leftrightarrow \frac{9\pi^2 t}{4} \geq 3 \ln 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{4}{3\pi^2} \ln 10 = 0'31 \text{ seg}$$