

Transformada Wavelet

Jose Antonio Lorencio Abril

11/2021

Contents

1	Introducción	3
2	Transformada Wavelet	3
2.1	Análisis Multirresolución (MRA)	4
2.2	De un MRA a un wavelet generador	5
3	Aplicaciones	6
3.1	Música y señales de audio	6
3.2	Imagen	8

1 Introducción

Wojtaszczyk ([4]) describe un problema muy típico en ingeniería. El problema es que tenemos una función $f(t)$ definida para $t \in \mathbb{R}$, que describirá algún fenómeno que queremos entender. Nuestro objetivo es transmitir esta función mediante algún dispositivo finito, un ordenador. Concretizando, podemos pensar que f es una señal sonora que queremos transmitir por la línea telefónica. Toda f está descrita por la totalidad de sus valores en los puntos de la recta real, por lo que es un continuo de puntos, de modo que la función completa no puede ser descrita por ningún dispositivo finito, al menos de esta forma puntual.

Así, pensamos que disponemos de una base ortonormal $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para describir funciones (en $L_2(\mathbb{R})$). Esto quiere decir que podemos escribir

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n$$

donde $a_n = \langle f, f_n \rangle$ para $n \in \mathbb{N}$. Esta representación de f como una combinación lineal sobre una base de funciones es lo que se denomina **transformada**.

Entonces, si acordamos esta base de forma previa, bastaría enviar los coeficientes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para poder recuperar la función original íntegramente. Esto, no obstante, sigue sin ser finito, pero ya no es un infinito no numerable (como \mathbb{R}) sino numerable (como \mathbb{N}).

No obstante, podríamos extraer una subcolección finita $A \subset \mathbb{N}$ de tal forma que $\sum_{n \in A} a_n f_n$ se aproxima mucho a f . El problema ahora es que A debe ser siempre el mismo, y por tanto debemos confiar en que f quedará suficientemente aproximada aplicando este proceso. Pero, ¿qué significa 'suficientemente aproximada'?

En la vida real, debemos decidir basándonos en nuestra experiencia. Matemáticamente, debemos establecer alguna noción de distancia entre funciones. Esta distancia será, normalmente, una norma. Este problema se ha atacado de muchas formas, y los Wavelets son solo una herramienta más para tratar con este tipo de cosas.

2 Transformada Wavelet

Definition 1. ([1]) Un **wavelet generador** ψ es una función a partir de la cual definimos una base del espacio de funciones mediante traslación y escalamiento.

Un **wavelet** es una función de la forma

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{p}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

con $p > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

El valor más frecuentemente usado para p es 2. Es más, normalmente se consideran wavelets de la forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Example 2. Wavelet generador de Haar

$$\psi(t) = \chi_{[0,1)}(2t) - \chi_{[0,1)}(2t-1)$$

define los **Wavelets de Haar**

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

que son una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$.

2.1 Análisis Multirresolución (MRA)

Este tipo de análisis produce:

1. Una descomposición como suma directa ortogonal de $L_2(\mathbb{R})$
2. Una wavelet generador $\psi(t)$ tal que los wavelets $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ forman una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$

La base ortonormal de wavelets nos permite aproximar funciones de $L_2(\mathbb{R})$ mediante una suma finita de wavelets con precisión arbitrariamente alta.

Definition 3. Una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de $L_2(\mathbb{R})$ junto con una función $\phi \in V_0$ se denomina **Análisis Multirresolución (MRA)** si satisface las siguientes condiciones:

1. Es **creciente**

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

2. **Denso**

$$\overline{\bigcup_j V_j} = L_2(\mathbb{R})$$

3. **Separado**

$$\bigcap_j V_j = \{0\}$$

4. **Escalable**

$$f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$$

5. **Base ortonormal:** existe una **función de escala del MRA** $\phi \in V_0$ cuyas traslaciones enteras $\{\phi(t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ son una base ortonormal para V_0 .

Remark 4. La condición de escalabilidad indica que realmente solo hay un espacio, V_0 . O sea, que todos los demás son solo versiones escaladas del prototipo, diferentes 'resoluciones' de V_0 .

Remark 5. Las funciones de escala producen bases ortonormales: una base ortonormal para $V_j, j \in \mathbb{Z}$ es la dada por $\{2^{\frac{j}{2}} \cdot \phi(2^j t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Example 6. MRA de Haar

El MRA de 2 consiste en los subespacios cerrados

$$V_j = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f \text{ cte en } [2^{-j}n, 2^j(n+1)), \forall n \in \mathbb{Z}\}, j \in \mathbb{Z}$$

con la función de escala $\phi = \chi_{[0,1)}$.

Proposition 7. Un MRA produce sumas directas ortogonales. Es decir, se puede escribir

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$$

donde $W_n = V_n^\perp$ en V_{n+1} .

Y ahora podemos definir un wavelet generador de una forma más precisa que la anterior:

Definition 8. Dado un MRA $((V_n)_n, \phi)$, una función ψ tal que $\{\psi(t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $W_0 = V_0^\perp$ en V_1 se denomina **wavelet generador**.

Sea ahora ψ un wavelet generador para el MRA $((V_n)_n, \phi)$ y consideremos la isometría lineal $f(t) \mapsto \sqrt{2}f(2t)$ de V_0 a V_1 .

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(t - n)} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(2t) \overline{\psi(2t - n)} dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, f \in V_0$$

entonces, por la escalabilidad se tiene que $\psi(2t - n) \in V_1^\perp$ en V_2 para todo n y que $\{\sqrt{2}\psi(2t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para W_1 . Análogamente, se ve para todo $j \in \mathbb{Z}$ que

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

es una base ortonormal para W_j .

Y como (7)

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_j W_j$$

entonces se tiene que los wavelets

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

forman una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$, denominada **base ortonormal de los wavelets con wavelet generador ψ** . Como disponemos de esta base, entonces podremos escribir cualquier función como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

2.2 De un MRA a un wavelet generador

Hemos visto cómo obtener una base ortonormal de wavelets a partir de un wavelet generador, pero no sabemos aún cómo obtener un wavelet generador, o si existe siquiera.

La respuesta es que existen, y que pueden obtenerse a partir de la función de escala, mediante la fórmula

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2c_{1-k}} (-1)^k \cdot \phi(2t - k)$$

donde $c_k = \langle \phi(t), \sqrt{2}\phi(2t - k) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(2t - k)} dt, k \in \mathbb{Z}$, que no es más que los coeficientes de ϕ en V_1 con respecto a la base $\{\sqrt{2}\phi(2t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Vamos a introducir ahora la noción de filtro, que será de utilidad en el desarrollo siguiente:

Definition 9. Sea $((V_n)_n, \phi)$ un MRA. Cualquier $g \in V_1$ puede escribirse en términos de la base ortonormal $\{\sqrt{2}\phi(2t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ para V_1 como

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} b_k \phi(2t - k)$$

y como $\sum_k |b_k|^2 < \infty$ (porque la serie anterior converge), podemos formar la función 2π -periódica

$$m_g(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{b_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw} \in L_2(\mathbb{T})$$

donde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/[-\pi, \pi]$ es el toro de longitud 2π .

La función m_g se denomina **filtro asociado a g** .

El filtro m_ϕ asociado a la función de escala ϕ se llama **filtro de paso bajo asociado a ϕ** .

Example 10. Filtro de Haar

La función de escala para

$$\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1)$$

Por tanto, el filtro asociado es

$$m_\phi(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-iw}$$

El filtro m_g nos permite expresar \hat{g} en función de m_g y $\hat{\phi}$.

Con esto, podemos ya construir (con algunos resultados intermedios que omitiré, pero que pueden consultarse en [1]) un wavelet generador a partir de un MRA:

Theorem 11. Teorema del Wavelet Generador

Sea $((V_n)_n, \phi)$ un MRA, y consideremos

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_{1-k}} (-1)^k \sqrt{2} \phi(2t - k) \in V_0 \quad ((c_k) \in \ell_2(\mathbb{Z}))$$

tal que

$$\hat{\psi}(w) = e^{-i(\frac{w}{2} + \pi)} \overline{m_\phi\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad c.t.p.$$

Entonces ψ es un wavelet generador para el MRA $((V_n)_n, \phi)$.

3 Aplicaciones

3.1 Música y señales de audio

En el capítulo 10 de [2] se discuten varias aplicaciones de los wavelets, entre ellas se encuentran la música y señales de audio (10.2).

Uno de los problemas más importantes a resolver para el procesamiento de casi cualquier señal de audio es el seguimiento del tono. El tono es la frecuencia de la vibración de las cuerdas vocales, o equivalentemente la inversa del tiempo entre instantes de cierre glotal (GCI), que son los momentos en los que las cuerdas vocales se cierran durante el habla. El tono se necesita en varias aplicaciones que involucran el habla, y su detección es, en realidad, la detección de los sucesivos períodos de la señal vocal. Hay que detectar los relevantes picos sucesivos y entonces medir la distancia entre ellos, que

suele ser variable. Esto no es sencillo porque hay muchos niveles de máximos locales en la onda del habla. No obstante, los máximos relevantes se hacen prominentes cuando se comparan varios niveles de la transformada wavelet.

Un ejemplo de detector del tono propuesto por Kadambe y Boudreaux-Bartel utiliza 3 niveles de la transformada wavelet diádica con el wavelet spline cúbico. Esto quiere decir que toman 3 niveles de filtro, cada uno de ellos con la mitad de ancho de banda que el anterior, y que el Wavelet utilizado se crea utilizando splines cúbicos, o sea, aproximaciones polinómicas de orden 3.

Los máximos se detectan estableciendo un umbral: los picos caerán por encima del umbral en los niveles sucesivos.

En la siguiente figura, Bultheel toma una pequeña pieza (512 muestras) del dataset Caruso del paquete WaveLab. Usó un Coiflet-5 y plotearon la señal vocal, sí como el MRA. Es una señal muy ruidosa, pero aún así el tono se reconoce claramente.

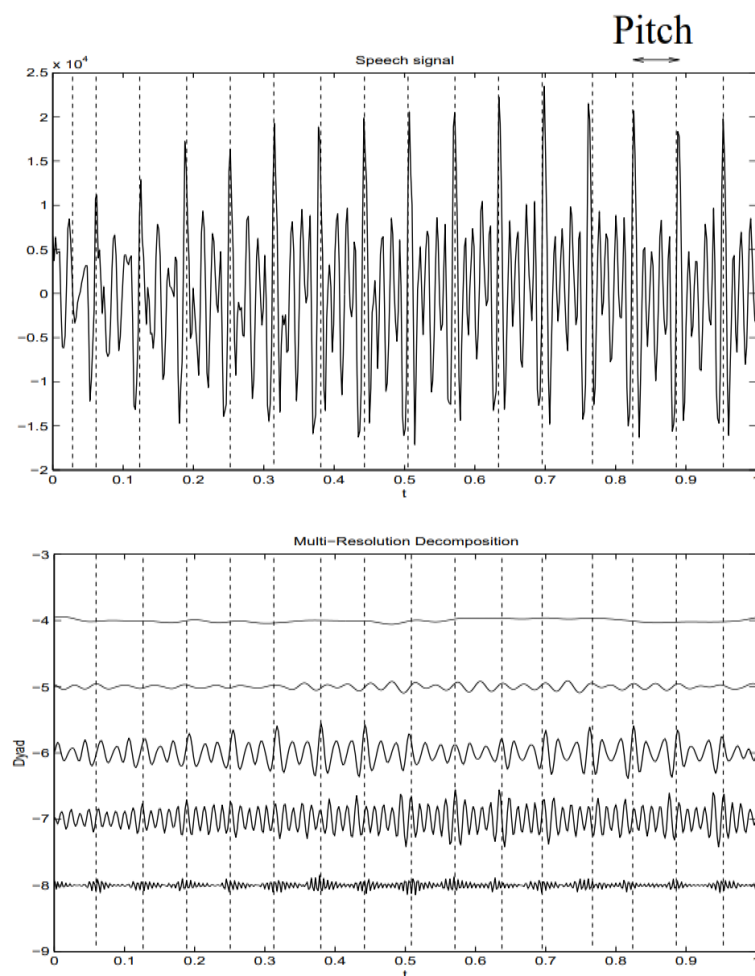


Figure 1: Tono en una señal vocal

Como puede verse en la figura, los tonos reconstruidos (espacio entre líneas punteadas de abajo), son casi idénticas a las originales (las de arriba), salvo el primero, que quizás no se detecte por tener unos picos considerablemente menores que los demás.

3.2 Imagen

En podemos ver una comparativa de distintas formas de codificación de imagen, y podemos ver tanto una comparativa visual en la figura 2, como una tabla comparativa de los resultados en la tabla 1.



Figure 2: Compresión de una imagen de 512x512 a 0.25 bits por píxel. (Arriba Izq) Imagen Original. (Arriba Dcha) JPEG básica. (Abajo Izq) Codificador wavelet básica. (Abajo Dcha) Codificador Zerotree

	Ratio de ruido (en dB)
JPEG	25.2
Zerotree	27.8
Wavelet	26.6

Table 1: Tabla comparativa del ruido introducido por los diferentes codificadores

Esta imagen es bastante compleja de codificar, y el autor lo hizo a una baja tasa de compresión, para enfatizar errores del codificador. Los bloques usados por la transformada discreta del coseno son bastante visibles en la figura de arriba a la derecha. La diferencia entre las otras dos imágenes codificadas con wavelet (un codificador Zerotree está basado en wavelets, ver [3]) es más sutil, pero visible desde cerca. Debido a la codificación más eficiente de los coeficientes, la imagen codificada mediante Zerotree tiene los border más marcados y preserva mejor la textura a rayas que la transformada wavelet básica.

References

- [1] George Bachmann, Edward Beckenstein, and Lawrence Narici. *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer New York, April 2002.
- [2] Adhemar Bultheel and Daan Huybrechs. *Wavelets with applications in signal and image processing*. 01 2015.
- [3] J.M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. 41(12):3445–3462, 1993.
- [4] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, March 2003.