Tarea Cap 6 - GyA

Jose Antonio Lorencio Abril

Mayo 2020

6.2.6 Sea $X = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} \subset S_3$. Demostrar que todo automorfismo de S_3 se restringe a una permutación de X. Deducir que la aplicación $i : S_3 \to Aut(S_3)$ que lleva $\sigma \in S_3$ al automorfismo interno i_σ es un isomorfismo de grupos.

$$S_3 = \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Sea f un automorfismo de S_3. Queremos ver que $f(X) = X$.

Nótese que $(1\ 2)^2 = (1\ 3)^2 = (2\ 3)^2 = 1$ y que $(1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2)$ y $(1\ 3\ 2)^2 = (1\ 2\ 3)$.

En general, $a^2 = 1 \implies f(a)^2 = 1$. Esto quiere decir que $f(X) \subset X \cup \{1\}$. Pero el 1 no es imagen de ningún elemento de X, ya que $1 = f(1)$ y esto es un automorfismo, por lo que es inyectivo y no puede haber dos elementos distintos con la misma imagen.

Veamos la segunda afirmación. $X \simeq \{a_1, a_2, a_3\}$. Sabemos, entonces, que $i_{\sigma|X}$ es una permutación de X. Eso quiere decir que es de alguna de las siguientes formas

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), 1$$

Pero, como las trasposiciones son generadores de S_3, entonces basta ver las imágenes de los elementos de X para saber la imagen de S_3. Como los elementos de X tienen orden 2, sus imágenes también, ya que $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$. Eso quiere decir que, si $a \in X \implies (i_a)^2 = 1$. Si $a \neq b \in X$, entonces $ab \in \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Tomemos $a_1,\ a_2,\ a_1a_2 = (1\ 3\ 2)$. Y entonces

$$i(a_1a_2) = i_{a_1a_2}$$

y se tiene que

$$i_{a_1a_2}(x) = (1\ 3\ 2)\, x\, (1\ 3\ 2)^{-1} = (1\ 3\ 2)\, x\, (1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)\, x\, (1\ 3)(1\ 2) = i_{a_1}(i_{a_2}(x))$$

o sea que $i(a_1a_2) = i_{a_1} \circ i_{a_2} = i_{a_1}i_{a_2}$, y es un homomorfismo, pues para las demás combinaciones de elementos de X el argumento es análogo.

Para ver la inyectividad, sea $i_a = i_b \implies i_a(i_b)^{-1} = i_a i_{b^{-1}} = 1 \implies b^{-1} = a^{-1} \implies b = a$.

Y para ver la suprayectividad, como estamos en conjuntos finitos ($|S_3| = 6,\ |Aut(S_3)| \leq |Biy(S_3)| = |S_6| = 6!$), entonces si ambos conjuntos tienen el mismo cardinal la aplicación es inyectiva sii es suprayectiva. Por tanto, solo resta ver que el cardinal de los automorfismos de S_3 es $|S_3|$. Como sabemos que X es generador de S_3, entonces hay tantos automorfismos en S_3 como los hay restringidos a X. Antes hemos visto que al restringir un automorfismo a X obtenemos una permutación en X. Como $|X| = 3$, entonces en X hay $|S_3|$ permutaciones, pero esto quiere decir que en S_3 hay $|S_3|$ automorfismos, como queríamos ver.

6.3.2 Para $n \geq 2$, demostrar que A_n es el único subgrupo de índice dos de S_n.

Sabemos, por la proposición 6.19, que A_n es un subgrupo de índice dos de S_n. Solo hay que demostrar que no hay más. Sabemos que A_n está generado por los 3-ciclos. Supongamos que existe otro subgrupo G de índice 2, por lo que es normal.

Si $n \geq 5$ y en G no hubiera ningún 3-ciclo, en particular no estarían ni $(1\ 2\ 3)$ ni $(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)^2$. Por lo que en S_n/G habría al menos un elemento de orden 3, y no tendría índice 2.

Entonces, la intersección $A_n \cap G$ es normal por ser intersección de normales. Claramente es subgrupo de A_n y, además, contiene un 3-ciclo. Esto quiere decir que, si $n \geq 5$, $A_n \cap G = A_n$, por el lema 6.23, y entonces $G = A_n$ o $G = S_n$, en cualquier caso tenemos el resultado.

Para $n = 2$ es trivial y para $n = 3$, como algún 3-ciclo debe estar en G y en S_3 solo hay dos 3-ciclos que son uno inverso del otro, entonces contiene a los dos y entonces contiene al conjunto generador de A_3, y tenemos el resultado.

Para $n = 4$, nos fijamos en el ejemplo 6.21, en el que vemos que los subgrupos que tienen 3-ciclos como elementos no son normales. Es decir, que debe ser $A_4 \cap G = A_4$, y hemos acabado.