EDPs y series de Fourier *Curso 2019/20*

Hoja 1: La ecuación de la cuerda vibrante

1. Demuestra que la constante c^2 en la ecuación de la cuerda vibrante tiene unidades de velocidad al cuadrado.

2. Esboza la gráfica de la solución $u(t,x)$ del siguiente problema de la cuerda punteada
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$
donde $f(x) = 3x$, $0 \le x \le 1/3$, y $f(x) = \frac{3}{2}(1-x)$ si $1/3 \le x \le 1$. La solución es una función lineal a trozos, ¿sabrías decir qué pendiente tiene en cada trozo?

   Sugerencia: puedes usar *Maxima* u otro programa informático.

3. Encuentra una fórmula para la solución de
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$
en los siguientes casos: $\quad g(x) = \sin(\pi x) \quad$ y $\quad g(x) \equiv 1,\ x \in (0,1)$.

4. Sea $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ de clase $C^2[0,L]$. Denotamos por $\tilde{f}$ su extensión impar y $2L$-periódica en $\mathbb{R}$. Demuestra que
$$\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f(0^+) = f(L^-) = 0.$$
En ese caso, demuestra que además se cumple $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$, y que
$$\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f''(0^+) = f''(L^-) = 0.$$

5. Demuestra que la expresión $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ se puede escribir como

   (i) $A\cos(\omega t - \varphi)$, donde $A = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\varphi = \arctan(b/a)$

   (ii) $c_1 e^{i\omega t} + c_{-1}e^{-i\omega t}$, con c_1, c_{-1} a determinar.

6. Justifica que la posición $u(t,x)$ de una cuerda vibrante, cuando se tiene en cuenta la gravedad, viene dada por la EDP
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g. \tag{1}$$

   a) Si los extremos están fijos $u(t,0) = u(t,L) = 0$, determina la posición de equilibrio $\bar{u}(x)$ en que queda la cuerda cuando no hay movimiento.

   b) En el apartado anterior, ¿cuál es la posición más baja en que queda la cuerda? ¿Cómo varía si duplicamos la longitud? ¿Y si duplicamos la densidad o la tensión?

   c) Demuestra que toda solución de (1) puede escribirse como $u(t,x) = v(t,x) + \bar{u}(x)$, donde v es solución de $v_{tt} = c^2 v_{xx}$. Utiliza este hecho para dar una fórmula para la solución de (1) cuando $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = 0$, $x \in (0,L)$.

7. Considera la EDP $\quad \partial_t u + c\, u_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestra que $u(t,x)$ es una solución de clase $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ si y sólo si $u(t,x) = f(x-ct)$ para algún $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   b) Resuelve la EDP
$$u_t + 2u_x = x, \qquad \text{con } u(0,x) = 0.$$

   Sugerencia: en (a) utiliza el mismo razonamiento que en el lema de D'Alembert. En (b) encuentra primero una solución particular $\bar{u}(x)$ independiente de t.

1. Demuestra que la constante c^2 en la ecuación de la cuerda vibrante tiene unidades de velocidad al cuadrado.

La ecuación es

$$u_{tt}(t,x) = c^2 \cdot u_{xx}(t,x)$$

$u(t,x)$ mide la altura (por ejemplo en metros) en el instante t, en la ordenada x.

Así,
- u_t es la velocidad de desplazamiento vertical $\rightarrow m/s$
- u_{tt} la aceleración $\rightarrow m/s^2$
- u_x tiene unidades $m/m = 1 \rightarrow$ adimensional
- pero u_{xx} es $m/m^2 = 1/m$

Entonces, en términos de unidades, queda

$$\frac{m}{s^2} \sim c^2 \cdot \frac{1}{m} \rightarrow c^2 \sim \frac{m^2}{s^2}$$

2. Esboza la gráfica de la solución $u(t,x)$ del siguiente problema de la cuerda punteada

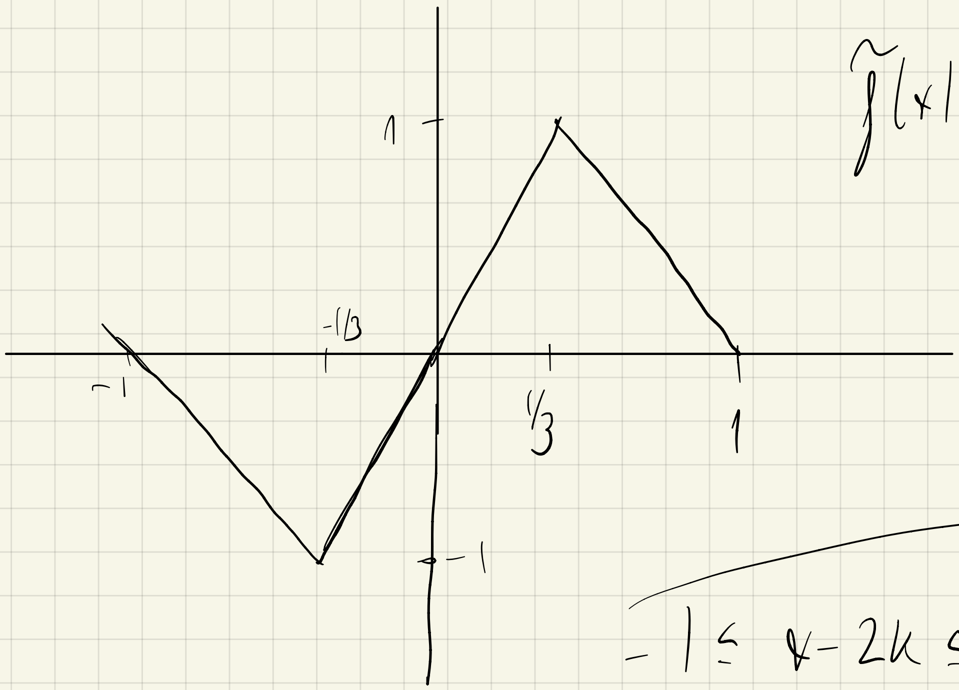
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

donde $f(x) = 3x$, $0 \le x \le 1/3$, y $f(x) = \frac{3}{2}(1-x)$ si $1/3 \le x \le 1$. La solución es una función lineal a trozos, ¿sabrías decir qué pendiente tiene en cada trozo?

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \in [0, 1/3] \\ \frac{3}{2}(1-x) & x \in [1/3, 1] \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(1+x) & x \in [-1, -1/3] \\ 3x & x \in [-1/3, 1/3] \\ \frac{3}{2}(1-x) & x \in [1/3, 1] \\ 2\ \text{L-p} & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$



$$-1 \le x - 2k \le 1 \longrightarrow k = \left[\frac{x+1}{2}\right]$$

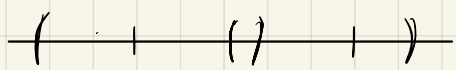
La pendiente de u puede ser $3, -3/2, 3/4$

3

$$(-1/3, 1/3) \longrightarrow \left(2n - \frac{1}{3}, 2n + \frac{1}{3}\right), \quad B(2n, 1/3)$$

$$x + t \in \left(2n - \frac{1}{3}, 2n + \frac{1}{3}\right) = B\left(2n, \frac{1}{3}\right) \longleftrightarrow x \in B\left(2n - t, \frac{1}{3}\right)$$

$$x - t \in B(2m, 1/3) \longleftrightarrow x \in B(2m + t, 1/3)$$



Debe ser

$$|2n - t - (2m + t)| < \frac{2}{3} \iff |2d - 2t| < \frac{2}{3} \iff |d - t| < \frac{1}{3}$$

$n - m = d$

$B\left(2m + d, \frac{1}{3} - |d - t|\right)$ es la intersección

3. Encuentra una fórmula para la solución de

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

en los siguientes casos: $g(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) \equiv 1,\ x \in (0,1)$.

Es la ecuación de la cuerda vibrante para $c^2=1$, $f=0$

$g(x)=\sin(\pi x)$

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin(\pi s)\,ds=\frac{1}{2\pi}\Big[-\cos(\pi s)\Big]_{x-t}^{x+t}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\cos(\pi(x-t))-\cos(\pi(x+t))\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\cancel{\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)}-\cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)-\cancel{\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)}-\cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)\Big)$$

$$=\frac{-\cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi}$$

$g(x)=1$

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}ds=\frac{1}{2}\Big[s\Big]_{x-t}^{x+t}=\frac{1}{2}\Big(x+t-x+t\Big)=t$$

4. Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ de clase $C^2[0, L]$. Denotamos por $\tilde{f}$ su extensión impar y $2L$-periódica en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f(0^+) = f(L^-) = 0.$$

En ese caso, demuestra que además se cumple $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$, y que

$$\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f''(0^+) = f''(L^-) = 0.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \underbrace{\underset{\substack{\parallel \\ f(0^+)}}{\tilde{f}(0^+)} = \tilde{f}(0) = \underset{\substack{\parallel\ \text{impar} \\ -\tilde{f}(0^+) \\ \parallel \\ -f(0^+)}}{\tilde{f}(0^-)}}_{f(0^+) = -f(0^+) \to f(0^+) = 0} \qquad \underbrace{\underset{\substack{\text{impar}\ \parallel \\ -\tilde{f}(-L^-) \\ \parallel\ 2L\text{-periódica} \\ -f(L^-)}}{\tilde{f}(L^+)} = \tilde{f}(L) = \underset{\substack{\parallel \\ f(L^-)}}{\tilde{f}(L^-)}}_{-f(L^-) = f(L^-) \to f(L^-) = 0}$$

//

$\boxed{\Leftarrow}$ $f \in C^2[0, L] \Rightarrow \tilde{f} \in C^2\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k-1)L, kL)\right)$

falta ver los extremos de los intervalos, pero, como $f(0^+) = f(L^-) = 0$ entonces

$$\tilde{f}(kL^-) = \begin{cases} \tilde{f}(0^-) \overset{\tilde{f}\ \text{impar}}{=} -\tilde{f}(0^+) = 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \tilde{f}(L^-) = 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(kL^+) = \begin{cases} \tilde{f}(0^+) = f(0^+) = 0 & k \text{ par} \\ \tilde{f}(L^+) \underset{\tilde{f}\ \text{impar}}{=} -\tilde{f}(-L^-) \underset{\tilde{f}\ 2L\text{-periódica}}{=} -\tilde{f}(L^-) = 0 & k \text{ impar} \end{cases}$$

y es $\tilde{f}(kL^-) = \tilde{f}(kL^+) = \tilde{f}(kL)$ y $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$

Para ver que $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$, basta, de nuevo, ver que

$$\tilde{f}'(kL^-) = \tilde{f}'(kL^+) = \tilde{f}'(kL) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(Notar que f 2L-periódica $\Rightarrow$ f' 2L-periódica)

$$\tilde{f}'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{f}(h)-\tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{d\to 0^+} \frac{f(d)}{d}$$

$$\parallel$$

$$\tilde{f}'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tilde{f}(h)-\tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tilde{f}(h)}{h} = \lim_{d\to 0^+} \frac{\tilde{f}(-d)}{-d} = \lim_{d\to 0^+} \frac{-\tilde{f}(d)}{-d} = \lim_{d\to 0^+} \frac{\tilde{f}(d)}{d}$$

$$\tilde{f}'(L^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{f}(L+h)-\tilde{f}(L)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{f}(L+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\tilde{f}(-L-h)}{h} = \lim_{d\to 0^-} \frac{-\tilde{f}(-L+d)}{-d} =$$

$$= \lim_{d\to 0^-} \frac{\tilde{f}(-L+d)}{d} \overset{2L\text{-per.}}{=} \lim_{d\to 0^-} \frac{\tilde{f}(L+d)}{d} = \lim_{d\to 0^-} \frac{f(L+d)}{d}$$

$$\parallel$$

$$\tilde{f}'(L^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tilde{f}(L+h)-\tilde{f}(L)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tilde{f}(L+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(L+h)}{h}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ por la periodicidad.

Por último

$\boxed{\Rightarrow}$ $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underset{\shortparallel}{\tilde{f}''(0^-)} = \tilde{f}''(0^+) = f''(0^+) \\ -\tilde{f}''(0^+) = -f''(0^+) \end{array}\right\} f''(0^+) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{y} \quad \underset{\shortparallel}{\tilde{f}''(L^-)} = \tilde{f}''(L^+) = -\tilde{f}''(-L^-) = -\tilde{f}''(L^-) = -f''(L^-) \\ \quad f''(L^-) \end{array}\right\} f''(L^-) = 0$ //

$\boxed{\Leftarrow}$ Mas de lo mismo

6. Justifica que la posición $u(t,x)$ de una cuerda vibrante, cuando se tiene en cuenta la gravedad, viene dada por la EDP
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g. \tag{1}$$

a) Si los extremos están fijos $u(t,0) = u(t,L) = 0$, determina la posición de equilibrio $\bar{u}(x)$ en que queda la cuerda cuando no hay movimiento.

b) En el apartado anterior, ¿cuál es la posición más baja en que queda la cuerda? ¿Cómo varía si duplicamos la longitud? ¿Y si duplicamos la densidad o la tensión?

c) Demuestra que toda solución de (1) puede escribirse como $u(t,x) = v(t,x) + \bar{u}(x)$, donde v es solución de $v_{tt} = c^2 v_{xx}$. Utiliza este hecho para dar una fórmula para la solución de (1) cuando $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = 0$, $x \in (0,L)$.

Con $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ estamos diciendo que la aceleración en (t,x) es $c^2 u_{xx}$. Por tanto, si tomamos la gravedad en cuenta, sólo debemos añadir la aceleración que aporta la gravedad, g, con signo negativo porque "tira" hacia abajo.

ⓐ Si no hay movimiento, al fijar $x \in [0,L]$, $u(t,x)$ dep. en t.

$\rightarrow u_{tt} = 0 \rightarrow c^2 u_{xx} = g \rightarrow u_{xx} = \frac{g}{c^2} \rightarrow u_x = \frac{g}{c^2} x + K_1$

$\rightarrow u(t,x) = \frac{g}{2c^2} x^2 + K_1 \cdot x + K_2$

$u(t,0) = 0 \rightarrow K_2 = 0$

$u(t,L) = 0 \rightarrow \frac{g}{2c^2} L^2 + K_1 \cdot L = 0 \rightarrow K_1 = -\frac{gL}{2c^2}$

O sea, es

$$\boxed{\bar{u}(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - Lx)}$$

(b)

$$\bar{u}(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - Lx)$$

$$\bar{u}'(x) = \frac{g}{2c^2}(2x-L) = 0 \longleftrightarrow 2x - L = 0 \leftrightarrow \boxed{x = \frac{L}{2}}$$

$$u'' = \frac{g}{c^2} > 0 \longrightarrow \text{mínimo} \ \underline{\text{ok}}$$

Si duplicamos la longitud, se duplica este x.
La densidad y la tensión no influyen en la x donde encontramos el punto mínimo.

(c) Sea $u(t,x)$ la solución de (1), entonces definimos

$$w(t,x) = u(t,x) - \bar{u}(x)$$

Así, $w_t = u_t \longrightarrow w_{tt} = u_{tt}$

$$w_x = u_x - \bar{u}' \longrightarrow w_{xx} = u_{xx} - \bar{u}'' = u_{xx} - \frac{g}{c^2} \longrightarrow c^2 w_{xx} = c^2 u_{xx} - g \longrightarrow c^2 u_{xx} = c^2 w_{xx} + g$$

Por tanto:

$$w_{tt} = u_{tt} = c^2 u_{xx} - g = c^2 w_{xx} \cancel{+g} \cancel{-g} = c^2 w_{xx}$$

Por lo que w es el v del enunciado, y se tiene

$$u(t,x) = w(t,x) + \bar{u}(x)$$

Por último, en ese caso la solución será: ($f = f(x)$, $g \equiv 0$)

$$u(t,x) = \frac{\tilde{f}(x-ct) + \tilde{f}(x+ct)}{2} + \frac{g}{2c^2}(x^2 - Lx)$$

7. Considera la EDP $\partial_t u + c\,u_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que $u(t,x)$ es una solución de clase $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ si y sólo si $u(t,x) = f(x-ct)$ para algún $f \in C^1(\mathbb{R})$.

$\boxed{\leftarrow}$

$$u(t,x) = f(x-ct)$$

$$u_t = f'(x-ct)\cdot(-c) \qquad u_x = f'(x-ct)\cdot 1$$

Así,

$$u_t + c u_x = -c f'(x-ct) + c\cdot f'(x-ct) = 0 \quad //$$

$\boxed{\rightarrow}$

Sea $\left.\begin{array}{l} y = x-ct \\ w = x+ct \end{array}\right\}$ $\quad \left.\begin{array}{l} x = \frac{w+y}{2} \\ t = \frac{w-y}{2c} \end{array}\right\}$ $\quad v(y,w) = u(t,x) = u\left(\frac{w-y}{2c}, \frac{w+y}{2}\right)$

y $v \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

Ahora:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = v_y\cdot(-c) + v_w\cdot c$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = v_y + v_w$$

$$\rightarrow 0 = u_t + c u_x = c(v_w - \cancel{v_y}) + c(v_w + \cancel{v_y}) = 2c\cdot v_w \longrightarrow v_w = 0 \longrightarrow v(y,w) = V(y) + K$$

Llamando $f(y) = V(y) + K$, entonces queda

$$u(t,x) = v(y,w) = f(y) = f(x-ct) \quad \square$$

b) Resuelve la EDP

$$u_t + 2u_x = x, \qquad \text{con } u(0,x) = 0.$$

Suponemos $u(t,x) = U(x) \longrightarrow u_t = 0$

Entonces es

$$2u_x = x \longrightarrow u_x = \frac{x}{2} \longrightarrow u = \frac{x^2}{4} + K$$

$$u_t = x - 2u_x$$

$$u(t,x) = tx - f(t,x)$$

$$u_t + 2u_x = x \longleftarrow \cancel{x} - f_t + 2t - 2f_x = \cancel{x} \longrightarrow f_t + f_x = 2t$$

$$u(t,x) = tx - t^2$$

$$u_t + 2u_x = x - 2t + 2(t) = x$$

$u(t,x) = tx - t^2$ es solución del problema

8. Para una cuerda de violín de longitud 33 cm, masa 2 gr y cuyo armónico principal vibra a 440 Hz, determina el valor de las constantes c, τ, ρ.

   Sugerencia: recuerda que el armónico principal tiene longitud de onda $\lambda_1 = 2L$ y frecuencia $f_1 = c/\lambda_1$.

9. Encuentra una fórmula para la solución de la ecuación de la cuerda vibrante con extremos que se mueven libremente, es decir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,L),\ t \in \mathbb{R}.$$

   Ayudándote del ordenador esboza la gráfica en el caso punteado $g \equiv 0$, $f(x) = \text{mín}\{x, 1-x\}$, $0 < x < 1$ (con $c = L = 1$).

   Sugerencia: Si usas el método de D'Alembert, posiblemente necesites extensiones *pares* de f, g. Alternativamente, puedes obtener la fórmula a partir de $v(t,x) = u_x(t,x)$, que satisface una EDP con extremos fijos...

Opcionales:

10. *Ecuación del transporte* (generalización del Ejercicio 7): en un fluido que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se deposita una gota de tinta, que viaja arrastrada por la corriente del fluido; la función $u(t,x)$ que mide la densidad de tinta en el punto x tras t seg cumplirá la EDP

$$\partial_t u + \mathbf{v} \cdot \nabla_x u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

   a) Trata de justificar el modelo físico

   b) Demuestra que $u(t,x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ es solución de la EDP si y sólo si $u(t,x) = f(x - t\mathbf{v})$ donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ corresponde a la densidad inicial de tinta.

   c) Suponer que añadimos una fuente externa de tinta de modo que se cumple la *ecuación de transporte no homogenea*

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = F(t,x),$$

   donde $F(t,x)$ es continua en t y C^1 en x. Demuestra que la solución general es

$$u(t,x) = f(x - t\mathbf{v}) + \int_0^t F(s, x - (t-s)\mathbf{v})\, ds, \quad \text{para } f \in C^1(\mathbb{R}).$$

   Sugerencia: En a) puedes razonar como sigue: si $\mathbf{x}(t)$ denota la posición de una partícula fija de tinta (digamos inicialmente en $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$), entonces $u(t, \mathbf{x}(t))$ debe ser constante.

8. Para una cuerda de violín de longitud 33 cm, masa 2 gr y cuyo armónico principal vibra a 440 Hz, determina el valor de las constantes c, τ, ρ.

   Sugerencia: recuerda que el armónico principal tiene longitud de onda $\lambda_1 = 2L$ y frecuencia $f_1 = c/\lambda_1$.

$$M = \rho \cdot L \rightarrow 2gr = \rho \cdot 33cm \rightarrow \boxed{\rho = \frac{2}{0{,}33}\ \frac{gr}{m} = 6{,}\overline{06}\ g/m}$$

$$440\ Hz = \frac{c\ m/s}{2 \cdot 0{,}33\ m} \rightarrow \boxed{c = 290{,}4\ m/s}$$

$$c = \frac{\tau}{\rho} \rightarrow \boxed{\tau = c\ \frac{m}{s} \cdot \rho\ g/m = 880 \cdot \cancel{0{,}33} \cdot \frac{2}{\cancel{0{,}33}} = 1760\ g/s}$$

9. Encuentra una fórmula para la solución de la ecuación de la cuerda vibrante con extremos que se mueven libremente, es decir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,L),\ t \in \mathbb{R}.$$

Ayudándote del ordenador esboza la gráfica en el caso punteado $g \equiv 0$, $f(x) = \min\{x, 1-x\}$, $0 < x < 1$ (con $c = L = 1$).

La solución general de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ es

$$u(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

con $F, G \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Imponemos las condiciones iniciales

$$u(0,x) = f(x) \longleftrightarrow F(x) + G(x) = \hat{f}(x)$$

$$u_t(0,x) = g(x) \longleftrightarrow \left[F'(x-ct)\cdot(-c) + G'(x+ct)\cdot c \right]\Big|_{t=0} = g(x) \longleftrightarrow -cF'(x) + cG'(x) = \hat{g}(x)$$

donde $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ y $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R})$.

Con

$$u(t,x) = \frac{\hat{f}(x-ct) + \hat{f}(x+ct)}{2} + \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(s)\,ds$$

$\rightarrow$ Extender f y g a $\hat{f}$ y $\hat{g}$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,1) \\ f(-x) & x \in (-1,0) \\ \text{extensión par } 2L\text{-periódica} \end{cases} \qquad \hat{g} \ \text{ similar}$$

Entonces:

$$u_x(t,x) = \frac{\hat{f}'(x-ct) + \hat{f}'(x+ct)}{2} + \hat{g}(x+ct) - \hat{g}(x-ct)$$

$$u_x(t,0) = \frac{\hat{f}'(-ct) + \hat{f}'(ct)}{2} + \hat{g}(ct) - \hat{g}(-ct) \underset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{-\hat{f}'(ct) + \hat{f}'(ct)}^{\,0}}{2} + \cancel{\hat{g}(ct) - \hat{g}(ct)}^{\,0} = 0 \checkmark$$

$\hat{f}$ par $\underset{C^2}{\to}$ $\hat{f}'$ impar

$\hat{g}$ par

$$u_x(t,L) = \frac{\hat{f}'(L-ct) + \hat{f}'(L+ct)}{2} + \hat{g}(L+ct) - \hat{g}(L-ct) \underset{\uparrow}{=} \frac{\hat{f}'(-L-ct) + \hat{f}'(L+ct)}{2} + \hat{g}(L+ct) - \hat{g}(-L-ct)$$

$\hat{f}', \hat{g}$ 2L-per.

$$\underset{\substack{\hat{f}' \text{ impar} \\ \hat{g} \text{ par}}}{=} \frac{\cancel{-\hat{f}'(L+ct) + \hat{f}'(L+ct)}^{\,0}}{2} + \cancel{\hat{g}(L+ct) - \hat{g}(L+ct)}^{\,0} = 0$$

//

De la otra forma

$v = u_x(t,x)$

Entonces

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \longrightarrow u_{ttx} = c^2 u_{xxx} \longrightarrow v_{tt} = c^2 v_{xx}$$

$$v(t,0) = v(t,L) = 0$$

$$v(0,x) = u_x(0,x) = f'(x)$$

$$v_t(0,x) = u_{tx}(0,x) = g'(x)$$

EDP con extensión impar

$$\longrightarrow v(t,x) = \frac{\bar{f}'(x-ct) + \bar{f}'(x+ct)}{2} + \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}'(s)\,ds = \frac{\bar{f}'(x-ct) + \bar{f}'(x+ct)}{2} + \hat{g}(x+ct) - \hat{g}(x-ct)$$

$\bar{f}'$, $\bar{g}'$ extensiones impares 2L-periódicas de f' y g'

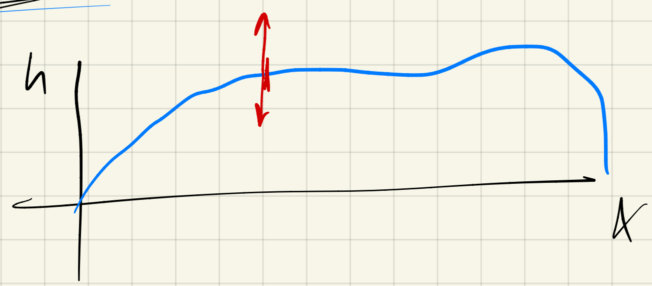
$$\longrightarrow u(t,x) = \int v\,dx = \frac{\hat{f}(x-ct) + \hat{f}(x+ct)}{2} + G(x+ct) - G(x-ct) + C$$

G primitiva de $\hat{g}$

$$= \frac{\hat{f}(x-ct) + \hat{f}(x+ct)}{2} + \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(s)\,ds + C$$

6

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g$$



1 $u(t,0) = u(t,L) = 0$

$$\bar u(t,x) \equiv c \to \bar u_t = 0 \to \bar u_{tt} = 0$$

$$\| $$

$$c^2 \bar u_{xx} - g$$

$$\Big\} \quad c^2 \bar u_{xx} = g$$

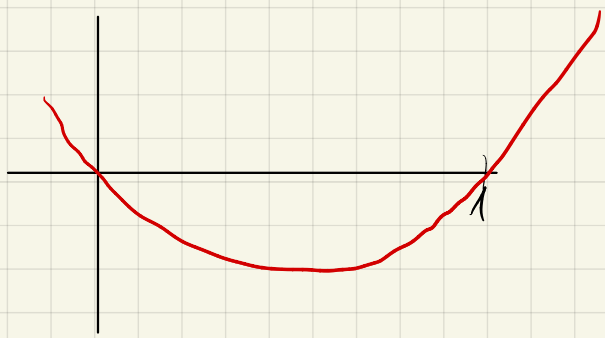
$$\to \bar u_{xx} = \frac{g}{c^2} \to \bar u_x = \frac{g}{c^2}x + K_1 \to$$

$$\bar u(x) = \bar u(t,x) = \frac{g}{c^2 2}x^2 + K_1 x + K_2$$

$$\bar u(0) = 0 \to K_2 = 0$$

$$\bar u(L) = \frac{g}{2c^2}L^2 + K_1 L = 0 \to K_1 = \frac{1}{\cancel{L}}\,\frac{-gL^{\cancel{2}}}{2c^2} = -\frac{gL}{2c^2}$$

$$\bar u(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - Lx)$$



(7)

$$\bar{u}(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)$$

$$\bar{u}'(x) = \frac{g}{2c^2}(2x - l) = 0 \longrightarrow 2x = l \rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$\bar{u}(x) = \frac{g}{2c^2}\Big(\underbrace{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}}_{-\frac{l^2}{4}}\Big) = -\frac{g\,l^2}{8c^2}$$ $(2l)^2 \rightarrow \cdot 4$

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \longrightarrow \cdot 2$$

③ $u(t,x) = \underbrace{v(t,x)} + \bar{u}(x)$

Definir $w(t,x) := u(t,x) - \bar{u}(x)$

Así:

$$w_x = u_x - \bar{u}'$$

$$w_{xx} = u_{xx} - \bar{u}'' = u_{xx} - \frac{g}{c^2} \longrightarrow \underbrace{c^2 w_{xx} = c^2 u_{xx} - g}_{c^2 u_{xx} = c^2 w_{xx} + g}$$

$$w_t = u_t - \cancel{\bar{u}_t}^{\,0}$$

$$w_{tt} = u_{tt} = c^2 u_{xx} - g = c^2 w_{xx} \cancel{+g} \cancel{-g} = c^2 w_{xx}$$

$$w(t,x) = \frac{\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s)\,ds$$

$$w(0,x) = u(0,x) - \bar{u}(x) = f(x) - \bar{u}(x)$$

$$w_t(0,x) = u_t(0,x) \cancel{-\bar{u}}^{\,0} = g(x) = 0$$

$$w(t,x) = \frac{\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)}{2} - \frac{\bar{u}(x-ct) + \bar{u}(x+ct)}{2}$$

$u(t,x) =$ " " $+ \bar{u}(x)$