1. Dada la variable aleatoria bidimensional de tipo continuo con función de densidad

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\ \text{ si } (x,y)\in A,\ f(x,y)=0 \text{ en caso contrario},$$

donde $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : xy>0\}$. Calcular las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Nota. Contraejemplo que muestra que del hecho de que las distribuciones marginales de una variable aleatoria sean normales, no se deduce que la variable inicial sea normal.

2. La variable aleatoria (X,Y) tiene una distribución de tipo continuo, uniforme en el conjunto

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0<x<y, y<1+\frac{x}{2}\right\}.$$

Se pide

a) obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y y la función de densidad de X condicionada por $Y=y$,

b) calcular la recta de regresión de Y sobre X,

c) calcular la curva de regresión de X respecto de Y,

d) los momentos ordinarios de X,

e) la función generatriz de momentos de X.

3. Se tienen 3 urnas con las siguientes composiciones:

U_1 continene 1 bola blanca y 1 bola negra, U_2 que continene 1 bola blanca y 2 bolas negras, U_3 que continene 1 bola blanca y 3 bolas negras. Se saca al azar una bola de cada urna que se introduce en otra urna vacía U_4. Para cada $i=1,2,3$, se define la variable aleatoria X_i que vale 1 si la bola extraida de la urna U_i es blanca y 0 en caso contrario y sea X la variable aleatoria que representa el número de bolas blancas que quedan finalmente en la urna U_4.

a) Obtener la función generatriz de probabilidad de X a partir de las funciones generatrices de probabilidad de las X_i. Determinar la distribución de X a partir de su función generatriz de probabilidad.

b) Determinar a partir de la función generatriz de probabilidad de X la esperanza matemática del número de bolas blancas que hay en la urna U_4 y la varianza del número de bolas blancas que hay en la urna U_4. Calcular la probabilidad de que si se sacan dos bolas de la urna U_4 estas resulten blancas.

4. a) Sea $k>0$ y n entero positivo. Determinar la función puntual de probabilidad de la variable aleatoria X cuya función característica es

$$\varphi(t)=\frac{1}{n}e^{(n-1)kit/2}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{nkt}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{kt}{2}}.$$

b) Sea X variable aleatoria con función generatriz de probabilidad

$$f_X(t)=e^{2(t-1)}.$$

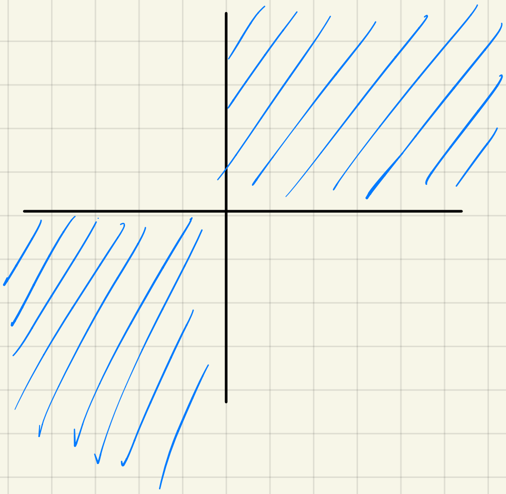
Determinar la función puntual de probabilidad de la variable aleatoria X.

1. Dada la variable aleatoria bidimensional de tipo continuo con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \text{ si } (x,y) \in A, \;\; f(x,y) = 0 \text{ en caso contrario,}$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy > 0\}$. Calcular las funciones de densidad marginales de X y de Y.

Nota. Contraejemplo que muestra que del hecho de que las distribuciones marginales de una variable aleatoria sean normales, no se deduce que la variable inicial sea normal.



A

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow X \sim N(0,1)$$

Para Y es claramente simétrico.

2. La variable aleatoria (X, Y) tiene una distribución de tipo continuo, uniforme en el conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y, y < 1 + \frac{x}{2}\right\}.$$

Se pide

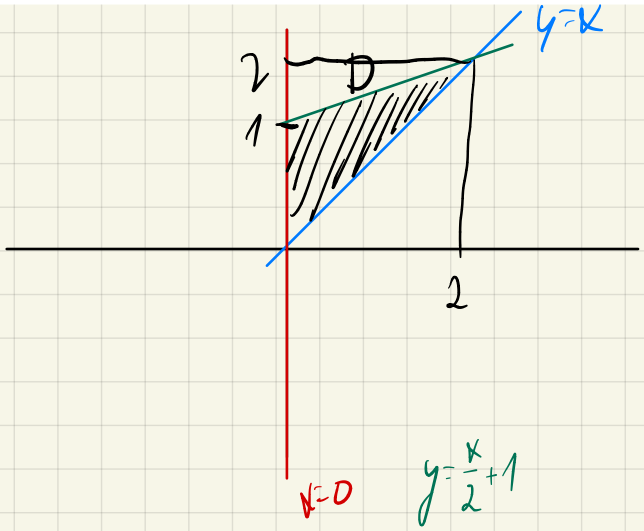
a) obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y y la función de densidad de X condicionada por $Y = y$,

b) calcular la recta de regresión de Y sobre X,

c) calcular la curva de regresión de X respecto de Y,

d) los momentos ordinarios de X,

e) la función generatriz de momentos de X.



a) Obtenemos primero la función de densidad de (x,y).

$$\int_D f(x,y)\,d(x,y) = K \cdot A(D) = K \cdot \frac{2\cdot 1}{2} = K = 1 \Rightarrow \boxed{K=1} \to f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in D \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_x^{1+\frac{x}{2}} dy = 1 + \frac{x}{2} - x = 1 - \frac{x}{2} \qquad x \in (1,2)$$

$f_X(x) = 0 \quad , \quad x \notin (1,2)$

$f_Y(y) = \int_0^y dx = y \quad , \quad y \in (0,1)$

$f_Y(y) = \int_{2y-2}^{y} dx = y - 2y + 2 = 2 - y \quad , \quad y \in (1,2)$

$f_Y(y) = 0 , \quad y \notin (0,2)$

$y \in (0,1)$:

$$f_{1|2}(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y} & x\in(0,y) \\ 0 & x\notin(0,y) \end{cases}$$

$y \in (1,2)$:

$$f_{1|2}(x|Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y} & x \in (2y-2, y) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

b)

$$Y = \mu_y + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(X - \mu_x)$$

$$\mu_y = E(Y) = \int y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^2 2y - y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 + y^2 - \frac{y^3}{3}\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{2} = 3 - 2 = 1$$

$$\mu_x = E(X) = \int x f_X(x)\,dx = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big]_0^2 = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x\mu_y = \int_D xy f(x,y)\,d(x,y) - 1 = \int_0^2\int_x^{1+\frac{x}{2}} xy\,dy\,dx - 1 = \int_0^2 x\cdot\frac{y^2}{2}\Big]_x^{1+\frac{x}{2}} dx - 1$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{1+x+\frac{x^2}{4}}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx - 1 = \int_0^2 \frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{8} - \cancel{\frac{x^3}{2}}\,dx - 1 =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32}\Big]_0^2 - 1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^2 x^2 - \frac{x^3}{2}\,dx - \frac{4}{9} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\Big]_0^2 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{Y = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\left(X - \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{9}{4}\left(X - \frac{2}{3}\right)}$$

c)

$$y = m_{2|1}(x) = E(Y|X=x)$$

$x \in (0,2)$

$$f_{2|1}(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} \qquad y \in (x, 1+\frac{x}{2})$$

$$y = m_{2|1}(x) = \int_x^{1+\frac{x}{2}} \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\, dy = \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\left[1+\frac{x}{2}-x\right] = \frac{1-\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = 1$$

d)

$$\alpha_n(X) = E(X^n) = \int_0^2 x^n f_X(x)\, dx = \int_0^2 x^n \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 x^n - \frac{x^{n+1}}{2}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{2(n+2)}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+2}}{2(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+2} = 2^{n+1}\left[\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}\right] =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

e)

$$g_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^2 e^{tx}\left(1-\frac{x}{2}\right) dx = \frac{e^{2t}-2t-1}{2t^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2t)^n - 2t - 1}{2t^2}$$

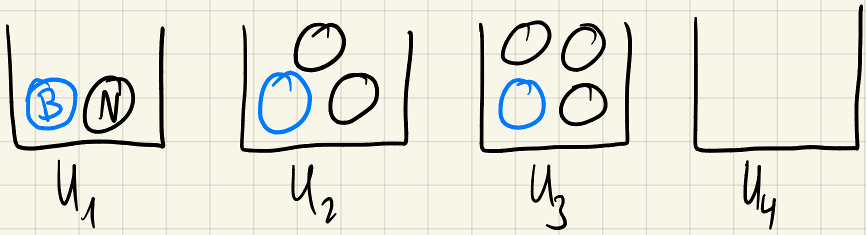
$$= \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(2t)^n}{2t^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{n-1} t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} 2^{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} t^n$$

3. Se tienen 3 urnas con las siguientes composiciones:

U_1 continene 1 bola blanca y 1 bola negra, U_2 que continene 1 bola blanca y 2 bolas negras, U_3 que continene 1 bola blanca y 3 bolas negras. Se saca al azar una bola de cada urna que se introduce en otra urna vacía U_4. Para cada $i = 1, 2, 3$, se define la variable aleatoria X_i que vale 1 si la bola extraida de la urna U_i es blanca y 0 en caso contrario y sea X la variable aleatoria que representa el número de bolas blancas que quedan finalmente en la urna U_4.

a) Obtener la función generatriz de probabilidad de X a partir de las funciones generatrices de probabilidad de las X_i. Determinar la distribución de X a partir de su función generatriz de probabilidad.

b) Determinar a partir de la función generatriz de probabilidad de X la esperanza matemática del número de bolas blancas que hay en la urna U_4 y la varianza del número de bolas blancas que hay en la urna U_4. Calcular la probabilidad de que si se sacan dos bolas de la urna U_4 estas resulten blancas.



a) $\boxed{X_1}$ $P(X_1=0)=\frac{1}{2}$, $P(X_1=1)=\frac{1}{2}$

$$f_{X_1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$$

$\boxed{X_2}$ $P(X_2=0)=\frac{2}{3}$, $P(X_2=1)=\frac{1}{3}$

$$f_{X_2}(t)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$$

$\boxed{X_3}$ $P(X_3=0)=\frac{3}{4}$, $P(X_3=1)=\frac{1}{4}$

$$f_{X_3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t$$

$\boxed{X}$ $X=X_1+X_2+X_3 \underset{X_1,X_2,X_3 \text{ indep}}{\longrightarrow} f_X(t)=f_{X_1}(t)\,f_{X_2}(t)\,f_{X_3}(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\cdot$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}t+\frac{1}{6}t^2\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}t+\frac{1}{8}t+\frac{1}{24}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{1}{12}t^2$$

$$+\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{24}t^3=\frac{1}{4}+\frac{11}{24}t+\frac{6}{24}t^2+\frac{1}{24}t^3$$

O sea, $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{11}{24}$, $P(X=2)=\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{1}{24}$

(b) $\varphi_X(t) = E(e^{tX})$, $\varphi_X'(t) = E(Xe^{tX}) \to E(X) = \varphi_X'(0)$

$$\varphi_X'(t) = \frac{11}{24} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 \to E(X) = \varphi_X'(0) = \frac{11}{24}$$

$$\varphi_X''(t) = E(X^2 e^{tX}) \to E(X^2) = \varphi_X''(0)$$

$$\varphi_X''(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \to E(X^2) = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{24}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{121}{576} = \frac{167}{576}$$

$$P(\text{sacar } 2B \text{ en } U_4) = P(2B_4) = P(2B_4 | X=0)P(X=0) + P(2B_4|X=1)P(X=1)$$

$$+P(2B_4|X=2)P(X=2) + P(2B_4|X=3)P(X=3) = 0 + 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{24} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 7 (Mayo 2021)

1. Sea X variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, y a y b reales.

a) Obtener la función característica de la variable aleatoria $U = a + bX$.

b) Sea Z la variable aleatoria con función característica

$$\varphi(t) = \exp(3\ \exp(4it) - 3 - 2it)$$

Obtener la distribución de Z.

2. a) Sea

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1/n \\ 1/n & \text{para } x = 1/n \\ 1 & \text{para } x > 1/n \end{cases}$$

Estudiar si la sucesión de funciones $G_n(x)$, $n = 1,2,3,...$, converge débilmente o completamente.

Indicar cuál es el conjunto de puntos de continuidad de G_n.

Obtener, para cada n, una función de distribución $F_n(x)$ que coincida con $G_n(x)$ en su conjunto de continuidad. ¿Qué podemos decir de la convergencia débil y completa de la sucesión $F_n(x)$?

b) Sea

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < n \\ 1/n & \text{para } x = n \\ 1 & \text{para } x > n \end{cases}$$

Estudiar si la sucesión de funciones $G_n(x)$, $n = 1,2,3,...$, converge débilmente o completamente.

Indicar cuál es el conjunto de puntos de continuidad de G_n.

Obtener, para cada n, una función de distribución $F_n(x)$ que coincida con $G_n(x)$ en su conjunto de continuidad. ¿Qué podemos decir de la convergencia débil y completa de la sucesión $F_n(x)$?

3. Averiguar si hay convergencia débil o completa de $G_n(x)$ siendo

$$G_n(x) = \frac{1}{3} \mathrm{I}_{[-n,0)}(x) + \frac{2}{3} \mathrm{I}_{[0,n)}(x) + \mathrm{I}_{[n,+\infty)}(x)$$

4. Las variables aleatorias de la sucesión $X_1, X_2, X_3, ...$ son independientes y tienen distribuciones definidas por

$$P(X_n = 0) = 1/n \text{ , } P(X_n = a) = (n - 1)/n, \quad n = 1, 2, 3, ... \quad (a > 0)$$

Se llama $S_n = X_1 + X_2 + . . . + X_n$.

1. Sea X variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, y a y b reales.

a) Obtener la función característica de la variable aleatoria $U = a + bX$.

b) Sea Z la variable aleatoria con función característica

$$\varphi(t) = \exp(3\ \exp(4it) - 3 - 2it)$$

Obtener la distribución de Z.

2. a) Sea

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1/n \\ 1/n & \text{para } x = 1/n \\ 1 & \text{para } x > 1/n \end{cases}$$

Estudiar si la sucesión de funciones $G_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, converge débilmente o completamente.
Indicar cuál es el conjunto de puntos de continuidad de G_n.
Obtener, para cada *n*, una función de distribución $F_n(x)$ que coincida con $G_n(x)$ en su conjunto de continuidad. ¿Qué podemos decir de la convergencia débil y completa de la sucesión $F_n(x)$?

$$\lim_n G_n = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} = G$$

$\text{Cont}(G_n) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}$ $\qquad$ $\text{Cont}(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

O sea, $G_n \to G$ débilmente y completamente.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq 1/n \end{cases},$$

$F_n \to G$ débil y completamente

b) Sea

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < n \\ 1/n & \text{para } x = n \\ 1 & \text{para } x > n \end{cases}$$

Estudiar si la sucesión de funciones $G_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, converge débilmente o completamente.
Indicar cuál es el conjunto de puntos de continuidad de G_n.
Obtener, para cada n, una función de distribución $F_n(x)$ que coincida con $G_n(x)$ en su conjunto de continuidad. ¿Qué podemos decir de la convergencia débil y completa de la sucesión $F_n(x)$?

$Cont(G_n) = \mathbb{R} \setminus \{n\}$

$$\lim_n G_n = 0 = G(x)$$

$Cont(G) = \mathbb{R}$

$G_n \to G$ débilmente, pero no completamente

pues $\lim_n G_n(\infty) = 1 \neq 0 = G(\infty)$

$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$, $F_n \to G$ débilmente, pero no compl-

3. Averiguar si hay convergencia débil o completa de $G_n(x)$ siendo

$$G_n(x) = \frac{1}{3} I_{[-n,0)}(x) + \frac{2}{3} I_{[0,n)}(x) + I_{[n,+\infty)}(x)$$

$$\lim_n G_n(x) = \frac{1}{3} I_{(-\infty,0)}(x) + \frac{2}{3} I_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x < 0 \\ \frac{2}{3} & x \geq 0 \end{cases} = G(x)$$

$Cont(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y es $G_n \xrightarrow{d} G$

Pero no completamente, pues

$$\lim_n G_n(-\infty) = 0 \neq \frac{1}{3} = G(-\infty)$$

$$\lim_n G_n(+\infty) = 1 \neq \frac{2}{3} = G(+\infty)$$

a) Averiguar si existe el límite de X_n en distribución

b) Averiguar si existe el límite de X_n en probabilidad

c) Calcular la probabilidad de que para infinitos valores de n valga $X_n = 0$

Calcular la probabilidad de que para infinitos valores de n valga $X_n = a$

d) Averiguar si existe el límite de X_n casi seguramente

e) Averiguar si existe el límite de X_n en media de orden p

f) Calcular E(X_n), Var (X_n)

g) Calcular

$$\lim \frac{E(S_n)}{n} \text{ y } \lim \frac{Var(S_n)}{n^2}$$

Nota. Regla de Stolz. Sean (A_n) (B_n) dos sucesiones de números reales tales que

$$0 < B_n \leq B_{n+1} \;,\; n = 1,2,3,\ldots, \quad \text{y} \quad \lim B_n = +\infty$$

Se verifica que si

$$\lim \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = L \qquad \text{entonces} \qquad \lim \frac{A_n}{B_n} = L$$

y si $$\lim \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = +\infty \qquad \text{entonces} \qquad \lim \frac{A_n}{B_n} = +\infty$$

4. Las variables aleatorias de la sucesión $X_1, X_2, X_3, \dots$ son independientes y tienen distribuciones definidas por

$$P(X_n = 0) = 1/n \,,\ P(X_n = a) = (n - 1)/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (a > 0)$$

Se llama $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

a) Averiguar si existe el límite de X_n en distribución

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/n & 0 \le x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \xrightarrow{n \to \infty} \left.\begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}\right\} = F(x)$$

es f. de distribución ✓

$F_n(x) \longrightarrow F(x)$ débilmente (ig compl. pero da igual)

$$\Downarrow$$

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

con $X = a$ //

b) Averiguar si existe el límite de X_n en probabilidad

Como $X_n \xrightarrow{D} a$ cte $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} a$ //

c) Calcular la probabilidad de que para infinitos valores de n valga $X_n = 0$

Calcular la probabilidad de que para infinitos valores de n valga $X_n = a$

<u>Lema Borell-Cantelli</u>

$\sum P(A_n)$ conv $\Longrightarrow P(\limsup A_n) = 0$

$\sum P(A_n)$ div, A_n indep $\Longrightarrow P(\limsup A_n) = 1$

Sean $A_n = \{X_n = 0\}$

Lo que pide el enunciado es $P(\limsup A_n)$

$P(A_n) = P(X_n = 0) = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum P(A_n) = \sum \frac{1}{n} = \infty$ div.

y las X_n son indep. por hipótesis.

$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$ //

Sean $B_n = \{X_n = a\}$

$P(B_n) = P(X_n = a) = \frac{n-1}{n}$

$\sum P(B_n)$ div pues $\frac{n-1}{n} \not\to 0$, y B_n indeps

$\Rightarrow P(\limsup B_n) = 1$ //

d) Averiguar si existe el límite de X_n casi seguramente

Queremos ver si $X_n \xrightarrow{c.s.} a$ (pues $X_n \xrightarrow{c.s.} X \not\Leftarrow X_n \xrightarrow{P} X$; $X_n \xrightarrow{P} X$)

$X_n \xrightarrow{c.s.} a \leftrightarrow P(\lim_n X_n = a) = 1$

Equivalentemente, si $C_n = \bigcap_{p \geq n} \{|X_p - a| < \varepsilon\}$, $P(C_n) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$P\Big(\bigcap_{m \geq p \geq n} \{|X_p - a| < \varepsilon\}\Big) = \prod_{p=n}^{m} P(|X_p - a| < \varepsilon) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{n-1}{m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

X_n indep

$\rightarrow P\Big(\bigcap_{p \geq n} \{|X_p - a| < \varepsilon\}\Big) = 0 \Rightarrow X_n \overset{c.s.}{\not\to} a$

e) Averiguar si existe el límite de X_n en media de orden p

($X_n \to X$ en media-p $\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$) $\Rightarrow$ Si converge, es $X_n \to a$ en media-p

$$\lim_n E(|X_n - X|^p) = \lim_n E(|X_n - a|^p) = \lim_n d \cdot \frac{1}{n} = 0 \text{ // OK}$$

f) Calcular $E(X_n)$, $Var(X_n)$

$$E(X_n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + a \cdot \frac{n-1}{n} = a\,\frac{n-1}{n}$$

$$Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = a^2\,\frac{n-1}{n} - a^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = a^2\left(\frac{n(n-1)-(n-1)^2}{n^2}\right) =$$

$$= a^2\,\frac{n^2 - n - n^2 + 2n - 1}{n^2} = a^2\,\frac{n-1}{n^2} \;//$$

g) Calcular

$$\lim \frac{E(S_n)}{n} \quad \text{y} \quad \lim \frac{Var(S_n)}{n^2}$$

Stolz

Nota. Regla de Stolz. Sean (A_n) (B_n) dos sucesiones de números reales tales que

$$0 < B_n \le B_{n+1}\ ,\quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{y} \quad \lim B_n = +\infty$$

Se verifica que si

$$\lim \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = L \qquad \text{entonces} \qquad \lim \frac{A_n}{B_n} = L$$

$$\text{y si} \quad \lim \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = +\infty \qquad \text{entonces} \qquad \lim \frac{A_n}{B_n} = +\infty$$

$$\lim \frac{E(S_{n+1}) - E(S_n)}{n+1-n} = \lim \frac{\sum_{k=1}^{n+1} a\,\frac{k-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} a\,\frac{k-1}{k}}{1} = \lim a\,\frac{n}{n+1} = a$$

$$\Rightarrow \lim \frac{E(S_n)}{n} = a \;//$$

$$\lim \frac{Var(S_{n+1}) - Var(S_n)}{(n+1)^2 - n^2} = \lim \frac{a^2\,\frac{n}{(n+1)^2}}{2n+1} = \lim a^2\,\frac{n}{(2n+1)(n+1)^2} = 0 \;//$$

$$\Rightarrow \lim \frac{Var(S_n)}{n^2} = 0$$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 8 (Mayo 2021)

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x,y)=\frac{1}{y} \quad \text{para } 0<x<y<1, \quad f(x,y)=0 \quad \text{en el resto}$$

Calcular

a) los momentos $\alpha_{m,n}$ y, a partir de ellos E(Y), E(Y^2), E(XY), E(X),

c) la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y en la forma $x = \alpha + \beta y$ y la recta de regresión de Y sobre X.

d) la curva de regresión de X respecto de Y, $x =$ E($X \mid Y = y$), y de Y respecto de X $y =$ E($Y \mid X = x$),

e) la función generatriz de momentos de Y.

2. La variable aleatoria X tiene una distribución uniforme en el intervalo (-1, 1)

a) Calcular la función generatriz de momentos y la función característica de X.

b) A partir del resultado anterior calcular los momentos respecto del origen.

3. Dado el espacio de probabilidad ($\mathbf{R}$, $\mathcal{B}_1$, P) donde $\mathcal{B}_1$ es la σ-álgebra de Borel y P la distribución de tipo continuo con función de densidad

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x) \qquad (\lambda>0)$$

Se considera la sucesión de variables aleatorias (X_n) (con $n \geq 2$),

X_n : ($\mathbf{R}$, $\mathcal{B}_1$, P)$\rightarrow$ ($\mathbf{R}$, $\mathcal{B}_1$), definidas mediante:

$$X_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in(-\infty,1/n) \\ 3 & \text{si} \quad x=1/n \\ 1 & \text{si} \quad x\in(1/n,n] \\ e^{n\lambda} & \text{si} \quad x>n \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad, en media cuadrática y casi segura (en este orden) de esta sucesión de variables aleatorias.

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x,y)=\frac{1}{y} \quad \text{para} \quad 0<x<y<1, \quad f(x,y)=0 \quad \text{en el resto}$$

Calcular

a) los momentos $\alpha_{m,n}$ y, a partir de ellos E(Y), E(Y^2), E(XY), E(X),

c) la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y en la forma $x = \alpha + \beta y$ y la recta de regresión de Y sobre X.

d) la curva de regresión de X respecto de Y, $x =$ E($X \mid Y = y$), y de Y respecto de X $y =$ E($Y \mid X = x$),

e) la función generatriz de momentos de Y.

a)

$$a_{n,m} = E(X^n Y^m) = \iint x^n y^m f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_x^1 x^n y^{m-1}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 x^n \left[\frac{y^m}{m}\right]_x^1 dx = \int_0^1 x^n \left[\frac{1}{m} - \frac{x^m}{m}\right] dx = \frac{1}{m}\int_0^1 x^n - x^{n+m}\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m+1}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{n}+\cancel{m}\cancel{+1}\cancel{-n}\cancel{-1}}{(n+1)(n+m+1)\cancel{m}} = \frac{1}{(n+1)(n+m+1)}$$

$$E(Y) = a_{0,1} = \frac{1}{2} \qquad E(Y^2) = a_{0,2} = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = a_{1,1} = \frac{1}{6} \qquad E(X) = a_{1,0} = \frac{1}{4}$$

c

$$x-\mu_x=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\mu_y)$$

$$x-\alpha_{1,0}=\frac{\alpha_{1,1}-\alpha_{1,0}\cdot\alpha_{0,1}}{\alpha_{0,2}-\alpha_{0,1}^2}(y-\alpha_{0,1})$$

$$x-\cancel{\frac{1}{4}}=\frac{1/6-1/8}{1/3-1/4}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{y}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{x=\frac{y}{2}}$$

$$y-\mu_y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{9}-\frac{1}{16}}\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{16-9}{144}}=\frac{144}{24\cdot 7}\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{7}\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{14}+\frac{6}{7}x\longrightarrow\boxed{y=\frac{2}{7}+\frac{6}{7}x}$$

d

$$x=m_{1|2}(y)=E(X|Y=y)$$

$$x=\int x\,dF_{1|2}(x|Y=y)=\int_0^y x\cdot\frac{f(x,y)}{f_2(y)}\,dx=\int_0^y x\cdot\frac{1}{y}\,dx=\left.\frac{x^2}{2y}\right]_0^y=\frac{y}{2}$$

$$f_2(y)=\int_0^y\frac{1}{y}\,dx=1\qquad y\in(0,1)$$

$$y=m_{2|1}(x)=E(Y|X=x)\qquad f_1(x)=\int_x^1\frac{1}{y}\,dy=\log(y)\Big]_x^1=-\log(x)\quad x\in(0,1)$$

$$y=\int_x^1 \cancel{y}\cdot\frac{\cancel{1/y}}{-\log x}\,dy=\frac{1-x}{-\log x}=\frac{x-1}{\log x}$$

d

$$g_y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0,n}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/(n+1)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^n = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(e^t - 1 \right)$$

2. La variable aleatoria X tiene una distribución uniforme en el intervalo (-1, 1)

a) Calcular la función generatriz de momentos y la función característica de X.

b) A partir del resultado anterior calcular los momentos respecto del origen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

a)

$$g(t) = E(e^{tX}) = \int_{-1}^{1} e^{tx} \frac{1}{2} dx = \left. \frac{e^{tx}}{2t} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2t} = \frac{\operatorname{senh} t}{t}$$

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \left. \frac{e^{itx}}{2t} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2t} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

b)

$$g(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-t)^n}{2t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t^n - (-t)^n))}{2t} =$$

$$= \frac{\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n!} 2t^n}{2t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} 2t^{(2n+1)}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n}$$

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2n+1} \qquad \alpha_{2n+1} = 0$$

3. Dado el espacio de probabilidad $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_1, P)$ donde $\mathcal{B}_1$ es la σ-álgebra de Borel y P la distribución de tipo continuo con función de densidad

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x) \qquad (\lambda > 0)$$

Se considera la sucesión de variables aleatorias (X_n) (con $n \geq 2$),
$X_n : (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1, P) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1)$, definidas mediante:

$$X_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 1/n) \\ 3 & \text{si} \quad x = 1/n \\ 1 & \text{si} \quad x \in (1/n, n] \\ e^{n\lambda} & \text{si} \quad x > n \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad, en media cuadrática y casi segura (en este orden) de esta sucesión de variables aleatorias.

$$P(X_n = 0) = \int_0^{1/n} \lambda e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}\Big]_0^{1/n} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

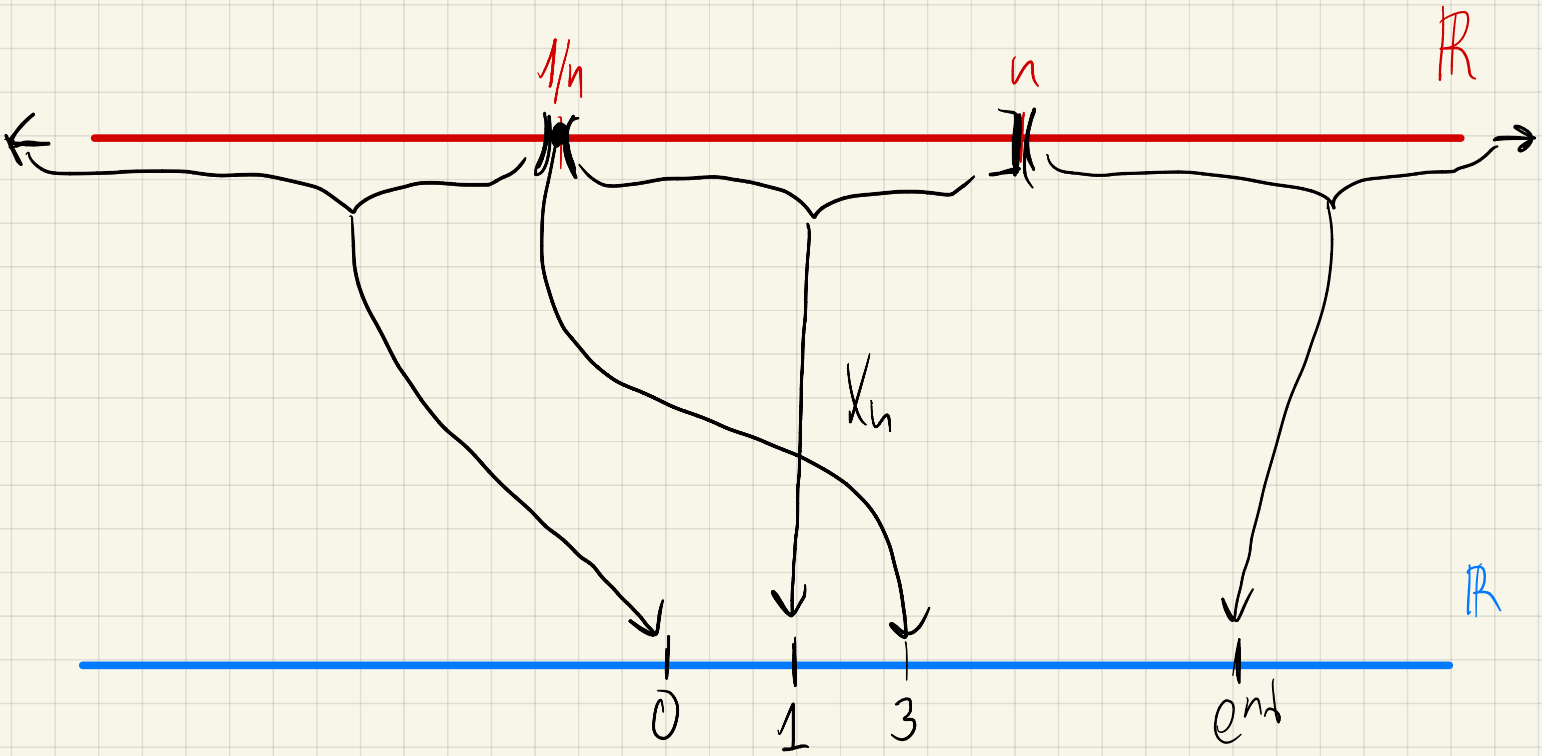
$$P(X_n = 3) = 0$$

$$P(X_n = 1) = -e^{-\lambda x}\Big]_{1/n}^{n} = -e^{-\lambda n} + e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

$$P(X_n = e^{n\lambda}) = -e^{-\lambda x}\Big]_n^{\infty} = e^{-\lambda n}$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} & x \in [0, 1) \\ 1 - e^{-\lambda n} & x \in [1, e^{n\lambda}) \\ 1 & x \geq e^{n\lambda} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \left.\begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}\right\} = F(x)$$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$, con $X \equiv 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$



$$P(X_n = 1) = \int_{1/n}^{n} f(x)\,dx$$

$$E(|X_n-1|^2) = 1\cdot P(X_n=0) + 2^2 P(X_n=3) + 0\cdot P(X_n=1) + (e^{nd}-1)^2 P(X_n=e^{nd})$$

$$= 1-e^{-\frac{d}{n}} + 0+0+(e^{nd}-1)^2 e^{-dn}$$

$$= 1-e^{-\frac{d}{n}} + (e^{2nd}-2e^{nd}+1)e^{-dn} =$$

$$= 1-e^{-\frac{d}{n}} + e^{nd} - 2 + e^{-dn} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

No hay convergencia cuadrática

¿$X_n \xrightarrow{c.s.} 1$?

$$\lim_n P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m-1|>\varepsilon\}\right) = 0 \qquad \forall \varepsilon>0$$

Supongamos $0<\varepsilon<1$

$$\{X_m-1>\varepsilon\} = \{x\in\mathbb{R} : |X_m(x)-1|>\varepsilon\} = \{x\in\mathbb{R} : X_m(x)=0 \text{ ó } X_m(x)=e^{md}\}$$

$$= \left(-\infty, \frac{1}{m}\right) \cup (r,\infty) \subset \left(-\infty, \frac{1}{m-1}\right) \cup (r-1,\infty) =$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : |X_{r-1}(x)-1|>\varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m\geq n} \{|X_m-1|>\varepsilon\} = \{|X_n-1|>\varepsilon\}$$

y como $X_n \xrightarrow{P} 1 \Rightarrow \lim_n P(\{|X_n-1|>\varepsilon\}) = 0$

$$\quad\quad\quad\quad \| $$

$$\lim_n P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m-1|>\varepsilon\}\right)$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{cs} 1 \quad //$$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 9 (Mayo 2021)

1. Dado el espacio de probabilidad $(\mathbf{R},\mathcal{B}_1,P)$ donde $\mathcal{B}_1$ es la σ-álgebra de Borel y P la distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, se considera la sucesión de variables aleatorias (X_n), $n\geq 2$, $X_n:(\mathbf{R},\mathcal{B}_1,P)\to(\mathbf{R},\mathcal{B}_1)$, definidas mediante

$$X_n(x)=\begin{cases} e^{-n} & \text{si} \quad x\in(0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si} \quad x\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}) \\ e^{n} & \text{si} \quad x\in[1-\frac{1}{n},1) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la convergencia casi segura y en probabilidad.
b) Estudiar la convergencia en media cuadrática.
c) Estudiar la convergencia en distribución a partir de la definición.

2. Las variables aleatorias Y_n son independientes y tienen una distribución uniforme en el intervalo (0, 2). Se lanza sucesivamente una moneda y si en el n-ésimo lanzamiento sale cara se define $X_n = Y_n$ mientras que si sale cruz se define $X_n = Y_n + Y_{n+1}$

Llamamos

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

a) Calcular $E(S_n)$ y Var (S_n)
b) Averiguar si vale la ley débil de los grandes números y calcular en su caso

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} \quad \text{en probabilidad}$$

3. Se tiene la sucesión (Y_n) de variables aleatorias independientes de modo que

Y_n tiene la distribución $N(\mu , \sigma^2)$ si n es par,

Y_n tiene la distribución $N(2\mu , 2\sigma^2)$ si n es impar.

Llamamos

$$X_n = Y_{2n-1} + Y_{2n} + Y_{2n+1} , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Determinar a_n y b_n para que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n}$$

converja en ley a una distribución normal.

Dar la distribución límite para dichos valores de a_n y b_n.

1. Dado el espacio de probabilidad $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_1, P)$ donde $\mathcal{B}_1$ es la σ-álgebra de Borel y P la distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, se considera la sucesión de variables aleatorias (X_n), $n \geq 2$, $X_n : (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1, P) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1)$, definidas mediante

$$X_n(x) = \begin{cases} e^{-n} & \text{si} \quad x \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) \\ e^{n} & \text{si} \quad x \in [1 - \frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la convergencia casi segura y en probabilidad.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} = X \quad \text{punto a punto}$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{c.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

b) Estudiar la convergencia en media cuadrática.

$$E((X_n - X)^2) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} e^{-2n}\,dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{n}} 0\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} (e^n - 1)^2\,dx$$

$$= e^{-2n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + (e^n - 1)^2 \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Por lo que no converge en media cuadrática

c) Estudiar la convergencia en distribución a partir de la definición.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{\begin{matrix} 0 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{matrix}\right\} = X$$

$P(X=0) = \frac{1}{2}$ $\quad P(X=1) = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/2 & 0\leq x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$

$P(X_n = e^{-n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

$P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < e^{-n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \leq x < e^{n} \\ 1 & x \geq e^{n} \end{cases} \xrightarrow{n} F(x)$

$P(X_n = e^{n}) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$

2. Las variables aleatorias Y_n son independientes y tienen una distribución uniforme en el intervalo (0, 2). Se lanza sucesivamente una moneda y si en el n-ésimo lanzamiento sale cara se define $X_n = Y_n$ mientras que si sale cruz se define $X_n = Y_n + Y_{n+1}$

Llamamos

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

a) Calcular E(S_n) y Var (S_n)

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in (0,2) \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad E(Y_n) = \int_0^2 x \frac{1}{2}\, dx = \left.\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

$$E(Y_n^2) = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \left.\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$E(S_n) = E(\Sigma X_n) = \Sigma E(X_n)$$

$$E(X_n) = E(Y_n)\cdot\frac{1}{2} + E(Y_n + Y_{n+1})\frac{1}{2} = E(Y_n) + \frac{1}{2}E(Y_{n+1}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E(S_n) = \frac{3n}{2}$$

$$Var(S_n) = Var(\Sigma X_n) = \Sigma Var(X_n) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

$$Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}E(Y_n^2) + \frac{1}{2}E((Y_n + Y_{n+1})^2) - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\left(E(Y_n^2) + E(Y_n Y_{n+1}) + E(Y_{n+1}^2)\right)$$

$$E(Y_n)E(Y_{n+1}) = E(Y_n)^2 - 9/4$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{4}{3} + 1\right) - 9/4 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$cov(X_i, X_j) = 0 \quad \forall j > i+1$$

$$\operatorname{cov}(X_i, X_{i+1}) = E\left(\left(X_i - \frac{3}{2}\right)\left(X_{i+1} - \frac{3}{2}\right)\right) =$$

$$= E\left(X_i X_{i+1} - \frac{3}{2} X_i - \frac{3}{2} X_{i+1} + \frac{9}{4}\right)$$

$$= E(X_i X_{i+1}) - 3E(X_k) + \frac{9}{4}$$

$$= E(X_i X_{i+1}) - 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = E(X_i X_{i+1}) - \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} E(Y_i Y_{i+1}) + \frac{1}{4} E((Y_i + Y_{i+1}) Y_{i+1}) +$$

$$+ \frac{1}{4} E(Y_i (Y_{i+1} + Y_{i+2})) + \frac{1}{4} E((Y_i + Y_{i+1})(Y_{i+1} + Y_{i+2})) - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{8-6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{Var}(S_n) = \frac{3n}{4} - 2\,\frac{n-1}{6} = \frac{3n}{4} + \frac{n-1}{3} = \frac{9n + 4n - 4}{12} = \frac{13n-4}{12}$$

b) Averiguar si vale la ley débil de los grandes números y calcular en su caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \quad \text{en probabilidad}$$

$$\lim_n \frac{S_n}{n^2} = \lim_n \frac{13n-4}{12n^2} = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{S_n - E(S_n)}{n} = \lim_n \frac{S_n - \overbrace{3n/2}^{a_n}}{n} = 0$$ sí la satisface

$$\lim_n \frac{E(S_n)}{n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{S_n}{n} = \frac{3}{2} \text{ en prob}$$

3. Se tiene la sucesión (Y_n) de variables aleatorias independientes de modo que

Y_n tiene la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ si n es par,

Y_n tiene la distribución $N(2\mu, 2\sigma^2)$ si n es impar.

Llamamos

$$X_n = Y_{2n-1} + Y_{2n} + Y_{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Determinar a_n y b_n para que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n}$$

converja en ley a una distribución normal.

Dar la distribución límite para dichos valores de a_n y b_n.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + \dots + Y_{2n-1} + Y_{2n} + Y_{2n+1}$$

$$= Y_1 + Y_2 + 2Y_3 + Y_4 + 2Y_5 + \dots + 2Y_{2n-1} + Y_{2n} + Y_{2n+1}$$

$$2Y_n = Z_n$$

n impar

$$f_{Z_n} = \frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{z}{2} - 2\mu\right)^2}{2 \cdot 2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{(z-4\mu)^2}{2 \cdot 8\sigma^2}} \longrightarrow Z_n \sim N(4\mu, 8\sigma^2)$$

$$S_n = Y_1 + Y_2 + Z_3 + Y_4 + Z_5 + Y_6 + \dots + Z_{2n-1} + Y_{2n} + Y_{2n+1}$$

Y_i, Y_j, Z_k indeps, normales

$$S_n = \underbrace{X_1}_{Y_1,\, Y_2,\, \frac{1}{2}Z_3} + \underbrace{X_2}_{\frac{1}{2}Z_3,\, Y_4,\, \frac{1}{2}Z_5} + X_3 + \dots + \underbrace{X_n}_{\frac{1}{2}Z_{2n-1},\, Y_{2n},\, Y_{2n+1}}$$

Desde el X_2 al X_{n-1} hay $(n-2)$ Y_k (par) y $2 \cdot (n-2) \frac{1}{2} Z_k$

$+ Y_1 + Y_2 + \frac{1}{2}Z_3 + Y_{2n} + Y_{2n+1} + \frac{1}{2}Z_{n-1}$

$\rightarrow$ n Y_k (par) y $(n-1)\, Z_k$

$2\, Y_k$ impar

Así,

$$S_n \sim n Y_{2n} + 2Y_{2m-1} + (n-1) Z_j \sim N(n\cdot\mu + 2\cdot 2\mu + (n-1)\cdot 4\mu,\ n\cdot\sigma^2 + 2\cdot 2\sigma^2 + (n-1)\cdot 8\sigma^2)$$

$$\sim N(5n\mu, (9n-4)\sigma^2)$$

Así, $\dfrac{S_n - 5n\mu}{\sqrt{9n-4}\,\sigma}$

converge en distribución a $N(0,1)$ //

1. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes todas ellas con la misma distribución de Bernoulli de parámetro p.

Se definen las sucesiones de variables aleatorias siguientes:

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 1 \\ 1 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 0 \\ 2 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ y } X_n = 1 \\ 3 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ y } X_n = 0 \end{cases}$$

$$Z_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Explicar, razonadamente, si la sucesión (Y_n) determina una cadena de Markov y en caso afirmativo obtener su matriz de probabilidades de transición. Si es cadena de Markov calcular $P(Y_{n+2} = 0 | Y_n = 1)$

b) Explicar, razonadamente, si la sucesión (Z_n) determina una cadena de Markov y en caso afirmativo obtener su matriz de probabilidades de transición.

2. Se lanzan dos dados, uno negro y uno rojo, repetidamente de manera que los lanzamientos son independientes.

Para cada $n = 1, 2, 3, ...$, se define X_n como 0 si en el dado negro se obtiene 1 en el n-ésimo lanzamiento y, si en el n-ésimo lanzamiento no se obtiene 1 entonces X_n es igual al mayor número obtenido en el dado rojo en los lanzamientos posteriores al último en el que se obtuvo un 1 en el dado negro. Explicar si (X_n) es una cadena de Markov. En caso afirmativo indicar cual es el conjunto de estados de la cadena y obtener la matriz de probabilidades de transición.

1. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes todas ellas con la misma distribución de Bernoulli de parámetro p.

Se definen las sucesiones de variables aleatorias siguientes:

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 1 \\ 1 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 0 \\ 2 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ y } X_n = 1 \\ 3 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ y } X_n = 0 \end{cases}$$

$$Z_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ y } X_n = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Explicar, razonadamente, si la sucesión (Y_n) determina una cadena de Markov y en caso afirmativo obtener su matriz de probabilidades de transición. Si es cadena de Markov calcular $P(Y_{n+2} = 0 | Y_n = 1)$

b) Explicar, razonadamente, si la sucesión (Z_n) determina una cadena de Markov y en caso afirmativo obtener su matriz de probabilidades de transición.

a) ① $P(Y_n \in \{0,1,2,3\}) = 1$ OK

② Consideremos que el evento -1 a cuenta como fallo $(X_{-1}=0)$, entonces

$$a^0 = (0, 0, p, q) \qquad p+q=1$$

③
$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix} \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

④ $P(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) = a^0_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{n-1} j_n}$

$$P(Y_{n+2} = 0 / Y_n = 1) = P^{(2)}_{10} = p^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & q \\ ¿? & \end{pmatrix} \end{array}$$

No podemos determinar la matriz P, pues desconocemos el valor de X_n cuando $Z_n = 1$. Solo sabemos que $(X_{n-1}, X_n) \neq (1, 1)$

2. Se lanzan dos dados, uno negro y uno rojo, repetidamente de manera que los lanzamientos son independientes.

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, se define X_n como 0 si en el dado negro se obtiene 1 en el n-ésimo lanzamiento y, si en el n-ésimo lanzamiento no se obtiene 1 entonces X_n es igual al mayor número obtenido en el dado rojo en los lanzamientos posteriores al último en el que se obtuvo un 1 en el dado negro. Explicar si (X_n) es una cadena de Markov. En caso afirmativo indicar cual es el conjunto de estados de la cadena y obtener la matriz de probabilidades de transición.

$$a^0 = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)$$

$$= \begin{array}{c} \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}\right) \\ \quad 0 \quad\ 1 \quad\ 2 \quad\ 3 \quad\ 4 \quad\ 5 \quad\ 6 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1/6 & 5/36 & 5/36 & 5/36 & 5/36 & 5/36 & 5/36 \\ 1 & 1/6 & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} \\ 2 & 1/6 & 0 & \frac{10}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} \\ 3 & 1/6 & 0 & 0 & 15/36 & 5/36 & 5/36 & 5/36 \\ 4 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 20/36 & 5/36 & 5/36 \\ 5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25/36 & 5/36 \\ 6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30/36 \end{array}$$