

Un modelo en elementos finitos para estudiar las deformaciones del tejido mamario

Trabajo de Fin de Grado

Jose A. Lorencio Abril

Dirigido por **Ginés García Mateos**

Universidad de Murcia

Julio de 2022



Índice de contenidos

① Introducción y objetivos

- El cáncer de mama y la mamografía
- La localización por aguja

② Estado del arte

- Un modelo FEM para el tejido mamario
- Modelado de las deformaciones usando redes neuronales

③ Modelado del problema

- El método de los elementos finitos
- Nuestro modelo
- La librería deal.II

④ Estudio paramétrico del modelo

⑤ Aplicación a una mamografía real

- Preprocesamiento
- Resultados

⑥ Conclusiones y vías futuras

- Conclusiones
- Vías futuras

Índice de contenidos

① Introducción y objetivos

- El cáncer de mama y la mamografía
- La localización por aguja

② Estado del arte

③ Modelado del problema

④ Estudio paramétrico del modelo

⑤ Aplicación a una mamografía real

⑥ Conclusiones y vías futuras



- **Cella Medical Solutions:** empresa murciana enfocada en la aplicación de la informática y la tecnología a la medicina:
 - Planificación quirúrgica
 - Simulación quirúrgica
 - Guiado quirúrgico
- Miguel Rodríguez, CTO Dtor de Tecnología e Innovación de Cella Medical Solutions nos propuso:
 - Estudiar las deformaciones del tejido mamario
 - Problema difícil de abordar debido a la complejidad matemática del método de los elementos finitos
 - Escasas publicaciones al respecto

El cáncer de mama

El [cáncer de mama](#) tiene gran interés médico y social, presentando las siguientes características:

- 2º tipo de cáncer más diagnosticado entre mujeres
- 2º tipo de cáncer más letal entre mujeres
- Para su detección, la técnica más utilizada es la [mamografía](#): un escáner de rayos X de baja intensidad
- Para su extracción se debe tratar de dañar la menor cantidad posible de tejido sano

Este proceso de detección y extracción es la clave del interés de este trabajo.

La mamografía

Puntos clave:

- Por cuestiones tecnológicas, debe realizarse con la mujer en **posición sentada o de pie**
- Se utilizan dos placas para **comprimir el pecho** y mantenerlo fijo
- Si existen indicios de la existencia de un tumor, se realizan imágenes desde distintos ángulos, que pueden ensamblarse digitalmente, obteniendo un escáner tridimensional del pecho o **mamografía 3D**
- La **posterior biopsia y extracción** se realizan con la mujer acostada en la cama de operaciones. La gran elasticidad de las mamas implica que estas se deforman mucho desde la posición en la mamografía hasta la posición en la cama, complicando la localización del tumor
- Por tanto, es necesario un proceso de localización del tumor, siendo el más utilizado desde hace décadas el de **localización por aguja**

La mamografía: ejemplos

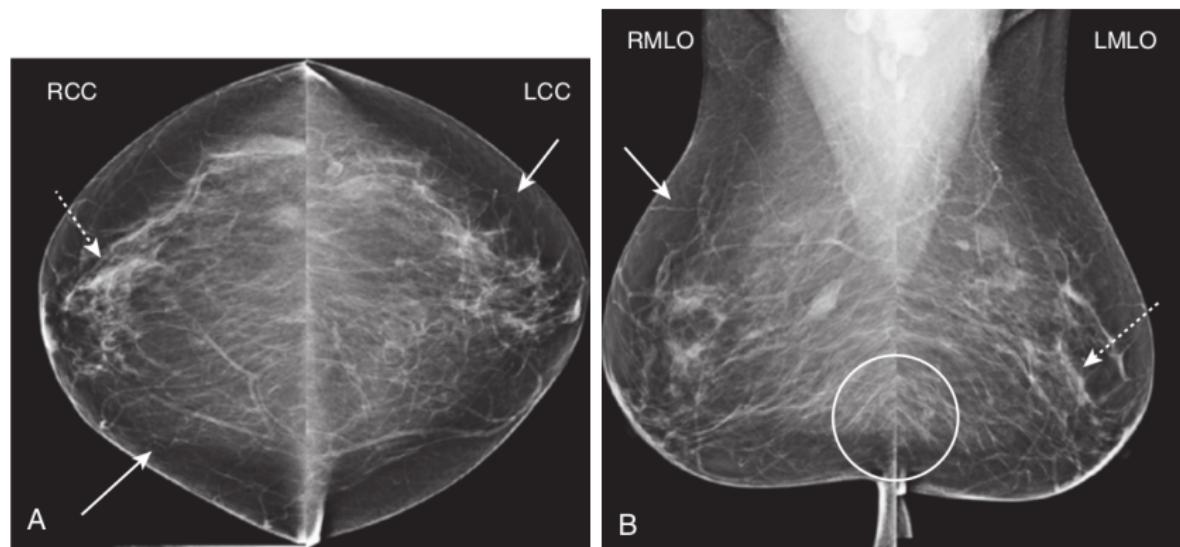


Figura: Mamografía en vista craneocaudal (izq) y mediolateral oblicua (dcha).

La localización por aguja

Antes de poder extraer un tumor detectado en una mamografía, se debe de realizar una biopsia, para determinar la malignidad del mismo. Para facilitar este proceso y minimizar el tejido sano dañado, se realiza la localización por aguja:

- ① Se introduce una aguja en la mama, estimando el lugar de introducción como el más cercano al tumor, en base a la mamografía
- ② Con la asistencia del mamógrafo, se desplaza la aguja hasta el tejido anómalo
- ③ En el interior de la aguja hay un hilo de alambre con un pequeño gancho. Cuando la aguja está posicionada en la lesión, se ancla el hilo a la misma usando el gancho
- ④ En este punto, el tumor se encuentra localizado, y la mujer puede ser desplazada sin temor a que el tumor se mueva

Problema y objetivos

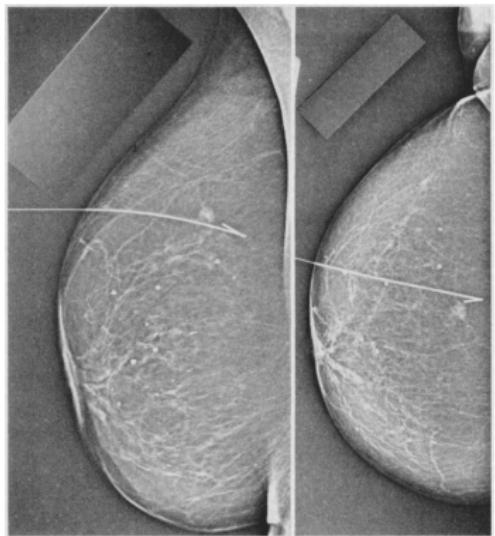


Figura: Localización por aguja:
fijado del hilo en el tejido
anómalo

Problema: este proceso es dependiente de la pericia del médico, e incluso un médico muy experimentado puede errar. Estos errores humanos suponen dañar tejido sano en las mamas de la paciente

Objetivos:

- Comprender el método básico utilizado hoy en día para modelar deformaciones en objetos: el **método de los elementos finitos**
- Desarrollar un módulo simple de simulación que permita estudiar las deformaciones sufridas por una mama a partir de una mamografía

Índice de contenidos

① Introducción y objetivos

② Estado del arte

Un modelo FEM para el tejido mamario

Modelado de las deformaciones usando redes neuronales

③ Modelado del problema

④ Estudio paramétrico del modelo

⑤ Aplicación a una mamografía real

⑥ Conclusiones y vías futuras

Vamos a repasar las principales aportaciones realizadas con el objetivo de mejorar el proceso de localización del tumor a partir de la mamografía:

- El primer modelo en elementos finitos del tejido mamario
- Sucesivas mejoras de este modelo
- Un enfoque con redes neuronales para el modelado del tejido mamario

Un modelo FEM para el tejido mamario

Azar et al. (2000) desarrollaron un modelo en elementos finitos para modelar las deformaciones del tejido mamario. Su modelo considera que los tejidos mamarios son:

- Isotrópicos: mismo comportamiento en todas direcciones
- Homogéneos: de composición uniforme
- Incompresible: el volumen no varía al deformarse
- Con propiedades elásticas no lineales

Un modelo FEM para el tejido mamario

El proceso desarrollado es el siguiente:

- ① Obtención del escáner 3D mediante resonancia electromagnética
- ② Preprocesamiento del escáner para segmentar los distintos tejidos de la mama
- ③ **Discretización** del modelo de la mama en elementos finitos
- ④ A cada elemento finito se le asignan las propiedades físicas del tejido más abundante en el mismo
- ⑤ Se realiza la **simulación**, en varias etapas, modificando los valores del módulo de Young en función de los niveles de compresión para modelar la no linealidad

Un modelo FEM para el tejido mamario: Resultados

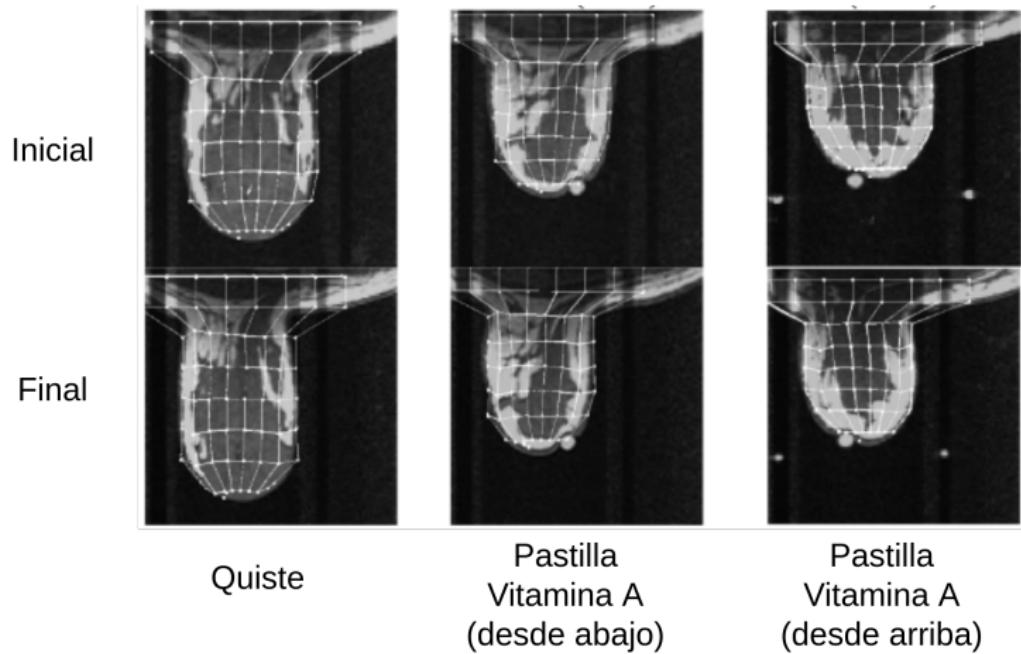


Figura: Resultados del modelo en elementos finitos.

Un modelo FEM para el tejido mamario: Resultados

Como vemos, el modelo presenta bastantes **virtudes**:

- Es preciso
- Modela bien las características de los tejidos del pecho
- Permite seguir el movimiento del tejido tumoral

No obstante, tiene un gran **problema**: el tiempo de cómputo, demasiado alto para su uso en aplicaciones de tiempo real.

Posteriores mejoras del modelo

Desde la publicación de este modelo, se han hecho diferentes estudios tratando de mejorarlo:

- Se descubrió que el factor más importante a tener en cuenta para las deformaciones es la **proporción entre los volúmenes de grasa y tejido glandular**
- Se añadió al modelo el **grosor de la piel**, mejorando su precisión
- Se desarrolló un **solver** que facilitaba la automatización del proceso
- Se utilizó software comercial para realizar este tipo de simulaciones

No obstante, el problema del tiempo de cálculo no sufrió ninguna contribución importante hasta 2022, cuando Wang y Kesavadas propusieron un **modelo compuesto por dos redes neuronales artificiales** para resolver el problema de la localización.

Modelado de las deformaciones usando redes neuronales

Recientemente, Wang y Kesavadas (2022) han publicado un nuevo enfoque en el que utilizan un modelo compuesto por dos redes neuronales:

- La primera predice los desplazamientos de todos los **nodos de la frontera**
- La segunda estima la posición final del punto central del tumor

El modelo presenta **resultados precisos** y su principal ventaja es que presenta **tiempos de ejecución muy bajos**, por debajo del segundo, permitiendo su uso en aplicaciones de tiempo real.

Índice de contenidos

① Introducción y objetivos

② Estado del arte

③ Modelado del problema

El método de los elementos finitos

Nuestro modelo

La librería deal.II

④ Estudio paramétrico del modelo

⑤ Aplicación a una mamografía real

⑥ Conclusiones y vías futuras

El método de los elementos finitos

Para resolver computacionalmente problemas de ecuaciones en derivadas parciales, el FEM es el método más ampliamente utilizado. Básicamente, consiste en:

- ① Pasar el problema de derivadas parciales (forma fuerte) a su problema equivalente en términos integrales (forma débil)
- ② Discretizar el dominio, en lo que se denominan los **elementos finitos**
- ③ Elegir una **base de funciones** para aproximar la función solución en cada elemento finito
- ④ Calcular, en cada elemento, las **matrices de rigidez y de fuerza**, utilizando integración numérica
- ⑤ **Ensamblar** las matrices globales de rigidez y fuerza a partir de las locales
- ⑥ Obtener la solución aproximada **resolviendo el sistema lineal disperso** resultante

Nuestro modelo

Nuestro modelo es la versión en elementos finitos de la ecuación lineal de elasticidad. Es decir, partimos de la ecuación

$$\sigma_{ij} + \vec{f} = 0 \text{ en } \Omega,$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \vec{u} = u_i^g \text{ en } \partial\Omega_{g_i} & \textbf{Condiciones de Dirichlet} \\ \sigma_{ij} n_j = t_i \text{ en } \partial\Omega_{t_i} & \textbf{Condiciones de Neumann} \end{cases}.$$

Desde aquí, usando el método de los elementos finitos, obtenemos una ecuación lineal dispersa de la forma

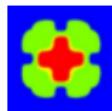
$$K \cdot d = F,$$

que será el modelo final que usamos.

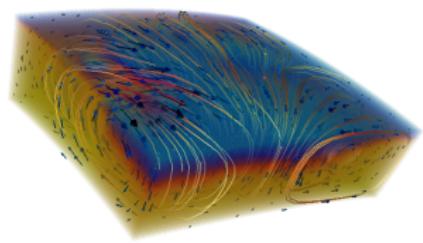
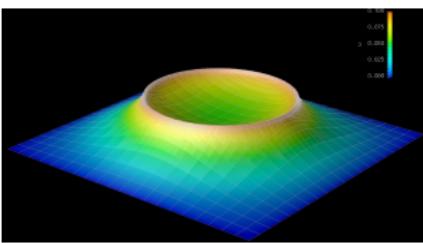
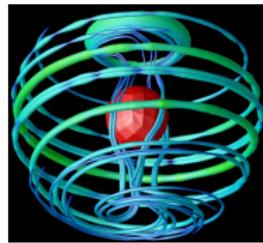
Nuestro modelo: simplificaciones

Para facilitar el proceso, asumimos que:

- La mama se compone de un único tejido, la **grasa**
- Consideramos que el comportamiento elástico de la mama es **lineal**
- Consideramos que la parte de la mama fija al tórax permanece completamente inmóvil



Para implementar la solución, utilizamos la [librería deal.II](#): differential equations analysis library, que es una librería especializada en proporcionar un entorno agradable para la implementación de modelos en elementos finitos.



Índice de contenidos

- ① Introducción y objetivos
- ② Estado del arte
- ③ Modelado del problema
- ④ Estudio paramétrico del modelo
- ⑤ Aplicación a una mamografía real
- ⑥ Conclusiones y vías futuras

Estudio paramétrico del modelo

Para probar el funcionamiento del modelo, comenzamos realizando pruebas sobre un dominio ideal definido como una semiesfera. Para ello utilizamos la función de deal.II `GridGenerator :: half_hyper_ball(Triangulation < dimension >, triangulation, Point < dimension > centro, double radio)`, que genera una semiesfera en dimensión *dimension*, de centro *centro* y radio *radio*:

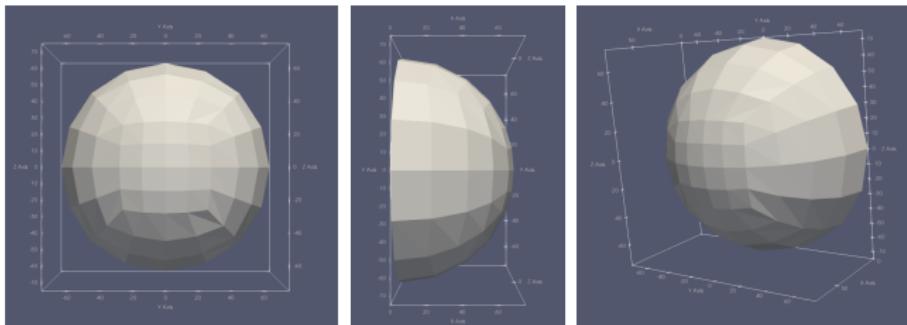
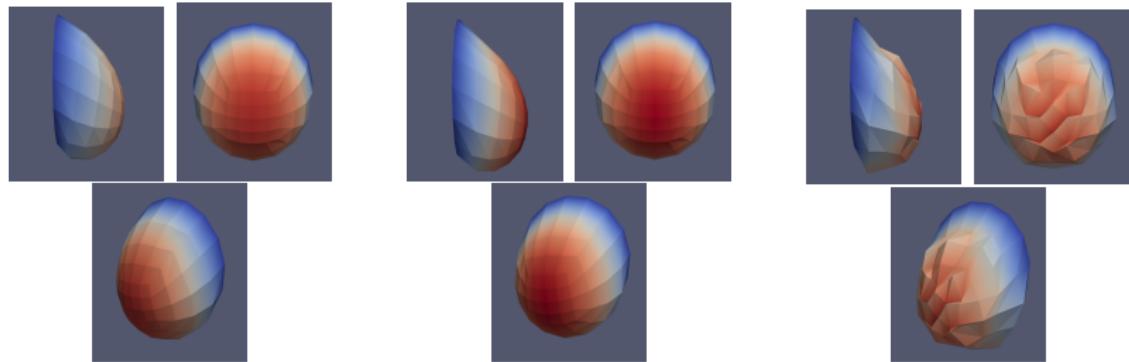


Figura: Semiesfera que usamos para realizar un análisis de la influencia de los parámetros.

Estudio paramétrico del modelo: E fijo



$$E = 18 \text{ kPa}, \nu = 0'28$$

$$E = 18 \text{ kPa}, \nu = 0'48$$

$$E = 18 \text{ kPa}, \nu = 0'68$$

Figura: Simulación con el dominio ideal, $E = 18 \text{ kPa}$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.

Estudio paramétrico del modelo: E fijo

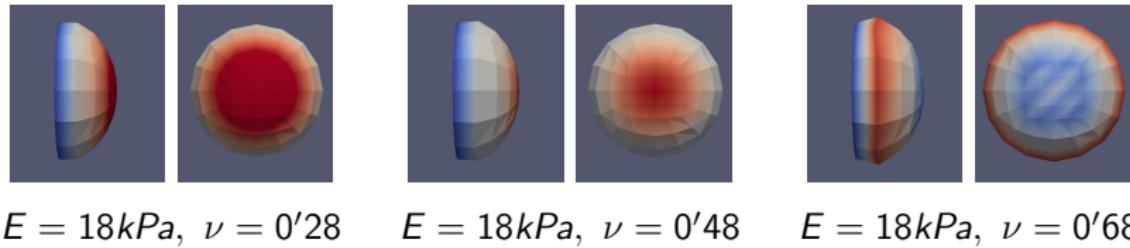
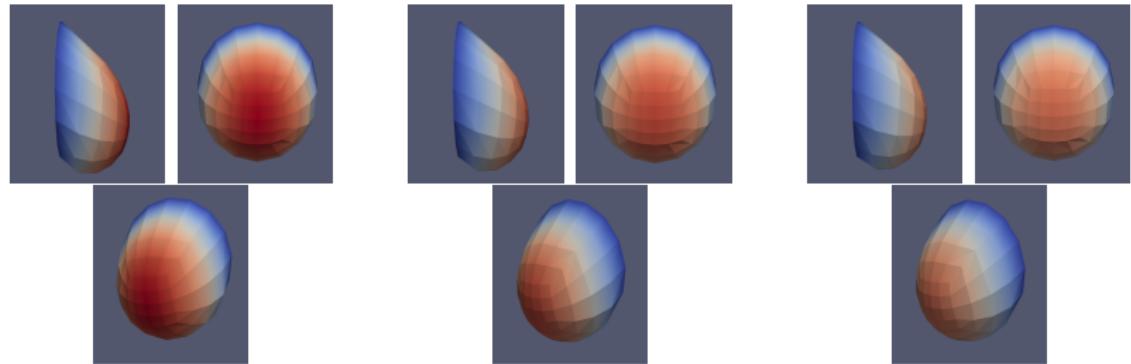


Figura: Simulación con el dominio ideal, $E = 18 \text{ kPa}$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso.

Estudio paramétrico del modelo: ν fijo



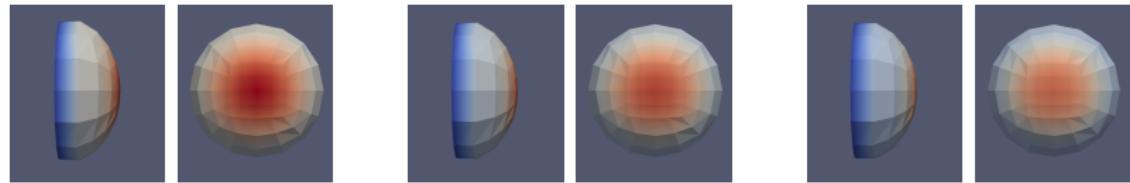
$$E = 18 \text{ kPa}, \nu = 0.48$$

$$E = 20 \text{ kPa}, \nu = 0.48$$

$$E = 22 \text{ kPa}, \nu = 0.48$$

Figura: Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0.48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.

Estudio paramétrico del modelo: ν fijo



$E = 18 \text{ kPa}, \nu = 0.48$

$E = 20 \text{ kPa}, \nu = 0.48$

$E = 22 \text{ kPa}, \nu = 0.48$

Figura: Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0.48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso.

Estudio paramétrico del modelo: conclusiones

Como conclusiones de este estudio de los parámetros:

- El modelo capta bien la aplicación de la acción de la gravedad
- Al aumentar E , aumenta la rigidez del sólido, como debe ocurrir teóricamente
- Valores de ν demasiado altos producen resultados indeseados

Índice de contenidos

- ① Introducción y objetivos
- ② Estado del arte
- ③ Modelado del problema
- ④ Estudio paramétrico del modelo
- ⑤ Aplicación a una mamografía real
 Preprocesamiento
 Resultados
- ⑥ Conclusiones y vías futuras

Aplicación a una mamografía real: preprocesamiento

Cella Medical Solutions nos proporcionó una mamografía completa, segmentada en sus distintos tipos de tejidos y en formato STL.

Para realizar la simulación, consideramos únicamente la superficie total, que queda como:

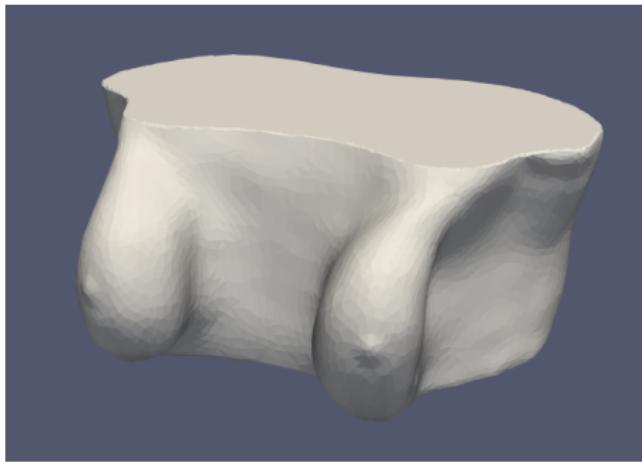


Figura: Superficie total de la mamografía

Aplicación a una mamografía real: preprocesamiento

Para aligerar el tiempo de cálculo, nos centramos únicamente en una mama, para lo que la recortamos utilizando el programa [FreeCAD](#), siguiendo un proceso como el siguiente:

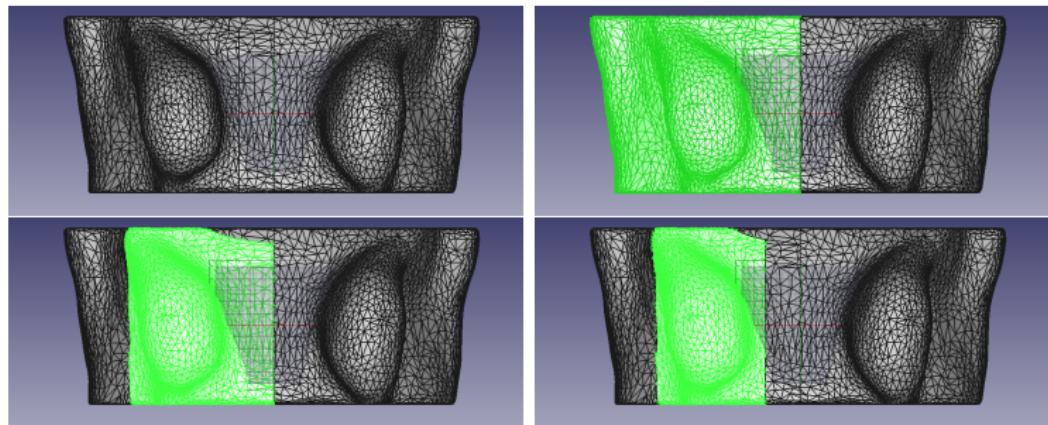


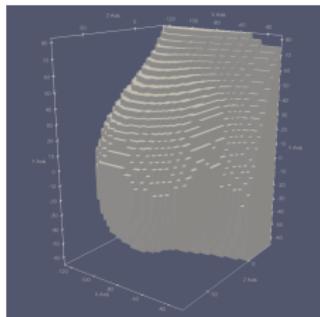
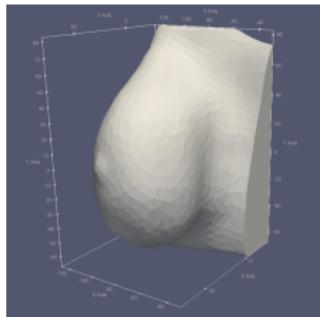
Figura: Proceso de separación de una mama a partir del STL inicial.

Aplicación a una mamografía real: preprocesamiento

En este punto, tenemos la mama descrita en formato STL como en la figura de arriba.

Pero deal.II espera un archivo en el que se describa el volumen interior, no solo la frontera, en formato VTK. Por tanto, desarrollamos un programa [closed_stl_to_vtk.m](#) en MATLAB para transformar una superficie cerrada descrita en un STL en su sólido interior en formato VTK. Para ello, primero se voxeliza la figura y, posteriormente, se genera adecuadamente el archivo de salida.

Se obtiene la figura de abajo.



Aplicación a una mamografía real

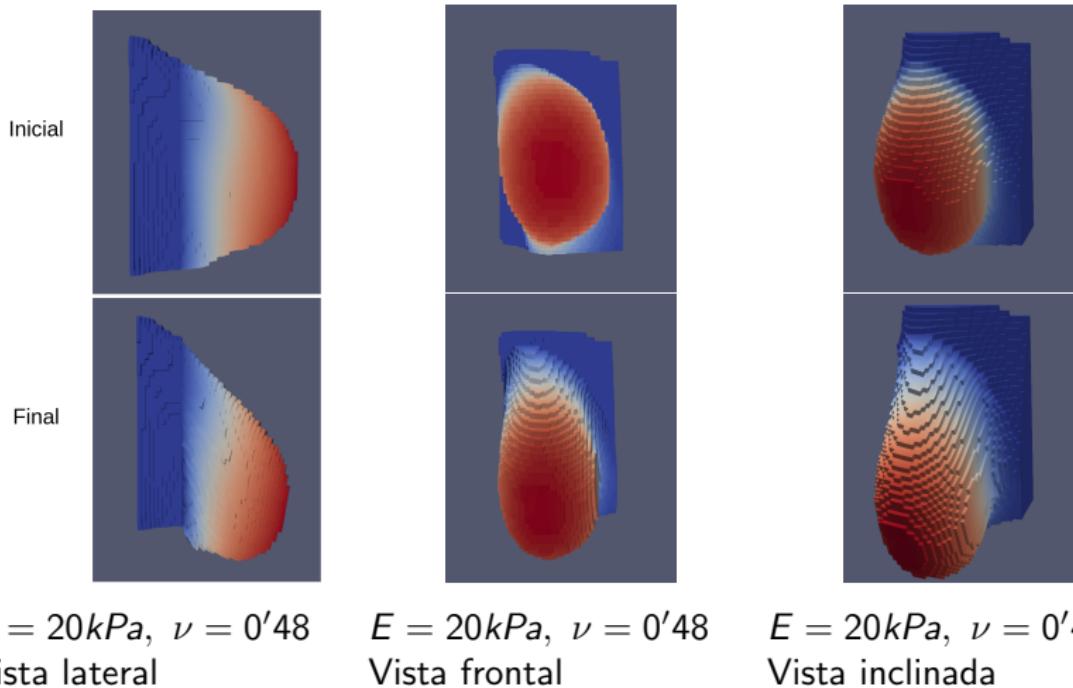


Figura: Simulación con el modelo de la mama, $E = 20\text{kPa}$, $\nu = 0'48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.

Aplicación a una mamografía real

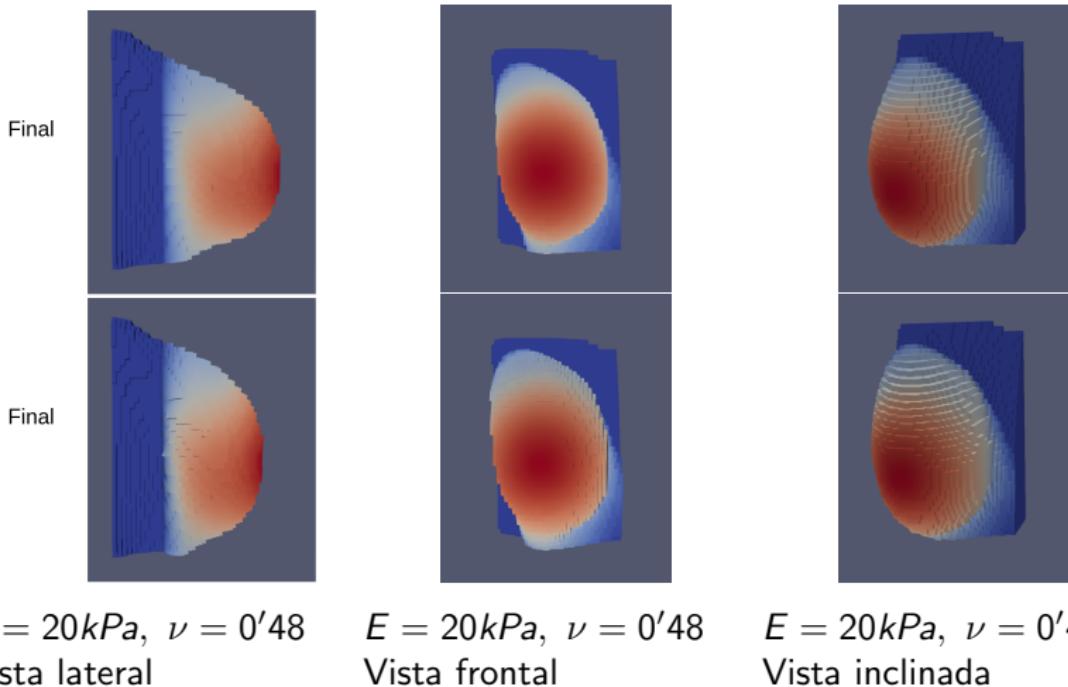


Figura: Simulación con el modelo de la mama, $E = 20kPa, \nu = 0'48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada boca arriba, perpendicular al torso.

Índice de contenidos

① Introducción y objetivos

② Estado del arte

③ Modelado del problema

④ Estudio paramétrico del modelo

⑤ Aplicación a una mamografía real

⑥ Conclusiones y vías futuras

Conclusiones

Vías futuras

Conclusiones

- Hemos conseguido un alto grado de comprensión del FEM
- Se ha desarrollado un modelo simple capaz de capturar la acción de la gravedad sobre una mamografía real
- Se ha logrado discretizar correctamente la mamografía para poder aplicarle el modelo
- Cella Medical Solutions dispone ahora de mucho material sobre el que continuar investigando por esta línea
- Estamos muy contentos con los resultados obtenidos

- Desarrollar una función de **discretización adaptativa**
- Ampliar el modelo para que considere **múltiples tejidos** en la simulación. Especialmente: tejido adiposo, tejido glandular y el tumor
- Modelar la **no linealidad**
- Obtener **datos reales** que permitan contrastar de manera precisa los resultados del modelo

Fin de la presentación

Muchas gracias por su atención.

Bibliografía I

- [Ait22] Adam H. Aitkenhead. *Mesh voxelisation*. MATLAB Central File Exchange. 2022. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27390-mesh-voxelisation>.
- [Arn+21] Daniel Arndt y col. «The deal.II Library, Version 9.3». En: *Journal of Numerical Mathematics* 29.3 (2021), págs. 171-186. DOI: 10.1515/jnma-2021-0081. URL: <https://dealii.org/deal93-preprint.pdf>.
- [Aya15] Utkarsh Ayachit. *The ParaView guide: updated for ParaView version 4.3*. eng. Ed. por Lisa Avila. Full color version. Clifton Park, NY: Kitware Inc, 2015. ISBN: 9781930934306.
- [AMS00] F.S. Azar, D.N. Metaxas y M.D. Schnall. «A finite element model of the breast for predicting mechanical deformations during biopsy procedures». En: *Proceedings IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. MMBIA-2000 (Cat. No.PR00737)*. IEEE Comput. Soc, 2000. DOI: 10.1109/mmbia.2000.852358.
- [AMS02] Fred S. Azar, Dimitris N. Metaxas y Mitchell D. Schnall. «Methods for modeling and predicting mechanical deformations of the breast under external perturbations». En: *Medical Image Analysis* 6.1 (mar. de 2002), págs. 1-27. DOI: 10.1016/s1361-8415(01)00053-6.
- [Big85] Roger Bigelow. «Needle Localization of Nonpalpable Breast Masses». En: *Archives of Surgery* 120.5 (mayo de 1985), pág. 565. DOI: 10.1001/archsurg.1985.01390290045007.
- [BC96] Morten Bro-Nielsen y Stephane Cotin. «Real-time Volumetric Deformable Models for Surgery Simulation using Finite Elements and Condensation». En: *Computer Graphics Forum* 15.3 (ago. de 1996), págs. 57-66. DOI: 10.1111/1467-8659.1530057.

Bibliografía II

- [Cas12] Bernardo Cascales Salinas. *Análisis funcional*. Spanish. OCLC: 864356789. Murcia: Electolibris, 2012. ISBN: 978-84-940688-2-9.
- [Cig+08] Paolo Cignoni y col. «MeshLab: an Open-Source Mesh Processing Tool». En: *Eurographics Italian Chapter Conference*. Ed. por Vittorio Scarano, Rosario De Chiara y Ugo Erra. The Eurographics Association, 2008. ISBN: 978-3-905673-68-5. DOI: 10.2312/LocalChapterEvents/ItalChap/ItalianChapConf2008/129-136.
- [DBS17] Marta Danch-Wierzchowska, Damian Borys y Andrzej Swierniak. «Comparison of two approaches to breast deformation modelling based on a biomechanical model». En: *2017 Computing Conference*. IEEE, jul. de 2017. DOI: 10.1109/sai.2017.8252273.
- [DBS20] Marta Danch-Wierzchowska, Damian Borys y Andrzej Swierniak. «FEM-based MRI deformation algorithm for breast deformation analysis». En: *Biocybernetics and Biomedical Engineering* 40.3 (jul. de 2020), págs. 1304-1313. DOI: 10.1016/j.bbe.2020.07.009.
- [ESG76] J. F. Egan, C. B. Sayler y M. J. Goodman. «A Technique for Localizing Occult Breast Lesions». En: *CA: A Cancer Journal for Clinicians* 26.1 (ene. de 1976), págs. 32-37. DOI: 10.3322/canjclin.26.1.32.
- [Fau+12] François Faure y col. «SOFA: A Multi-Model Framework for Interactive Physical Simulation». En: *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*. Ed. por Yohan Payan. Vol. 11. Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials. Springer, jun. de 2012, págs. 283-321. DOI: 10.1007/8415_2012_125. URL: <https://hal.inria.fr/hal-00681539>.

Bibliografía III

- [FHS76] Howard A. Frank, Ferris M. Hall y Michael L. Steer. «Preoperative Localization of Nonpalpable Breast Lesions Demonstrated by Mammography». En: *New England Journal of Medicine* 295.5 (jul. de 1976), págs. 259-260. DOI: 10.1056/nejm197607292950506.
- [Fri+14] Sarah M. Friedewald y col. «Breast Cancer Screening Using Tomosynthesis in Combination With Digital Mammography». En: *JAMA* 311.24 (2014), págs. 2499-2507. ISSN: 0098-7484. DOI: 10.1001/jama.2014.6095. eprint:
<https://jamanetwork.com/journals/jama/articlepdf/1883018/joi140069.pdf>.
- [Gar] Krishna Garikipati. *The Finite Element Method for Problems in Physics*. University of Michigan. Coursera. URL:
<https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/home/info>.
- [Gav+08] David J. Gavaghan y col. «Predicting Tumor Location by Modeling the Deformation of the Breast». En: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 55.10 (oct. de 2008), págs. 2471-2480. DOI: 10.1109/tbme.2008.925714.
- [Han+11] Lianghao Han y col. «Development of patient-specific biomechanical models for predicting large breast deformation». En: *Physics in Medicine and Biology* 57.2 (dic. de 2011), págs. 455-472. DOI: 10.1088/0031-9155/57/2/455.
- [Hen17] Reinhard Hentschke. *Classical Mechanics*. Springer International Publishing, ene. de 2017. 392 págs. ISBN: 3319487094. URL: https://www.ebook.de/de/product/27060435/reinhard_hentschke_classical_mechanics.html.

Bibliografía IV

- [Her20] William Herring. *Learning radiology: recognizing the basics*. 4th. Elsevier - Health Science Division, 2020.
- [Hic37] N. Frederick Hicken. «Mammography. The roentgenographic diagnosis of breast tumors by means of contrast media.». En: *Surg Gynecol Obstet* 64 (1937), págs. 593-603.
- [Jee15] Nadir Jeevanjee. *An introduction to tensors and group theory for physicists*. New York, NY: Springer Science+Business Media, 2015. ISBN: 9783319147932.
- [JJ87] Claes Johnson y Claes Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press, 1987. ISBN: 978-0-521-34514-9 978-0-521-34758-7.
- [Kin+94] David Kincaid y col. *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico*. Spanish. OCLC: 1024062633. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994. ISBN: 9780201601305.
- [Kro+98] Thomas A. Krouskop y col. «Elastic Moduli of Breast and Prostate Tissues under Compression». En: *Ultrasonic Imaging* 20.4 (oct. de 1998), págs. 260-274. DOI: 10.1177/016173469802000403.
- [Llo+12] J. A. Solves Llorens y col. «Segmentation of the Breast Skin and Its Influence in the Simulation of the Breast Compression during an X-Ray Mammography». En: *The Scientific World Journal* 2012 (2012), págs. 1-8. DOI: 10.1100/2012/876489.
- [Man20] Antonio Mangas. *Algoritmos de corte para aplicaciones de planificación quirúrgica*. Universidad de Murcia, 2020.

Bibliografía V

- [Mar+17] F. Martínez-Martínez y col. «A finite element-based machine learning approach for modeling the mechanical behavior of the breast tissues under compression in real-time». En: *Computers in Biology and Medicine* 90 (nov. de 2017), págs. 116-124. DOI: 10.1016/j.combiomed.2017.09.019.
- [MAT22] MATLAB. *MatLab R2022a*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2022. URL: <https://es.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [Pal+08] A. Pérez del Palomar y col. «A finite element model to accurately predict real deformations of the breast». En: *Medical Engineering & Physics* 30.9 (nov. de 2008), págs. 1089-1097. DOI: 10.1016/j.medengphy.2008.01.005.
- [RMH] Juergen Riegel, Werner Mayer y Yorik van Havre. *FreeCAD (version 0.20)*. Software. URL: https://wiki.freecadweb.org/Main_Page.
- [Sed97] L. I. Sedov. *Mechanics of continuous media*. eng. Series in theoretical and applied mechanics 4. Singapore: World Scientific, 1997. ISBN: 9789971507282.
- [Smi09] Michael Smith. *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.9*. English. United States: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.
- [Thr+74] Barbara Threatt y col. «Percutaneous needle localization of clustered mammary microcalcifications prior to biopsy». En: *American Journal of Roentgenology* 121.4 (ago. de 1974), págs. 839-842. DOI: 10.2214/ajr.121.4.839.

Bibliografía VI

- [TGY17] Michele Tonutti, Gauthier Gras y Guang-Zhong Yang. «A machine learning approach for real-time modelling of tissue deformation in image-guided neurosurgery». En: *Artificial Intelligence in Medicine* 80 (jul. de 2017), págs. 39-47. DOI: 10.1016/j.artmed.2017.07.004.
- [WK22] KuoCheng Wang y Thenkurussi Kesavadas. «Real-Time FEA-based breast deformation simulation using artificial neural network». En: *Computer Methods and Programs in Biomedicine Update* 2 (2022), pág. 100052. DOI: 10.1016/j.cmpbup.2022.100052.
- [Yeh15] Jacob Rubinstein Yehuda Pinchover. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, mayo de 2015. 384 págs. ISBN: 052161323X. URL: https://www.ebook.de/de/product/4209282/yehuda_pinchover_jacob_rubinstein_an_introduction_to_partial_differential_equations.html.
- [TZT05] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Lee Taylor y J. Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. eng. 6th ed. Burlington (Mass.): Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN: 978-0-7506-6320-5.