Funciones de Variable Compleja - Apuntes de Clase

Jose Antonio Lorencio Abril

Índice

Resumen

Estos apuntes son una transcripción de las clases del profesor Víctor M. Jiménez, de Funciones de Variable Compleja en la Universidad de Murcia, curso 19/20. Me he apoyado también en el libro 'Curso de Análisis Complejo' de Francisco J. Pérez.

Es probable que haya errores y, quizás, explicaciones poco claras. Si detectas alguno puedes comentármelo enviándome un correo a *joseantonio.lorencioa@um.es* e intentaré solucionarlo. Si te han ayudado, también acepto agradecimientos.

Un saludo a todos.

1. Números complejos. Funciones complejas elementales

1.1. Introducción

No solemos aprender la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado:

$$x^3 = 3px + 2q$$

Es la siguiente:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Otras fórmulas importantes que nos brinda el análisis complejos son:

$$(cosx + isenx)^n = cos(nx) + isen(nx) \qquad (Fórmula \quad de \quad Moivre)$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (Euler)$$

1.2. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

- $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$
- $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- La unidad es $1 = (1, 0)$
- $(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$
- $(x, 0) := x$ (notación)
- $i := (0, 1) \implies i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$
- No hay orden en los números complejos
- Podemos manejarlos mediante su **forma binomial**: $x + yi := (x, y)$
- $Re(x + yi) = x$; $Im(x + yi) = y$
- **Conjugado:** $\overline{x + yi} = x - yi$
- **Módulo:** $\| z \|_2 = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w|$
- **Desigualdad triangular generalizada:**

$$|\sum_{j=1}^{n} z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

- $|zw| = |z||w|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Proposición 1. *No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica.*

Demostración. Supongamos que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$, como $i \neq 0 \implies 0 < i^2 = -1$. Pero, además, $0 < 1^2 = 1$.

Y así, ha de ser $0 < 1 + (-1) = 0\#$ Esto es una contradicción $\square$

1.2.1. Forma polar de un número complejo

Si $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, podemos identificar unívocamente a z por su módulo y su ángulo respecto al eje x positivo.

Vamos a ello:

$$\frac{z}{|z|} = cos\alpha + isen\alpha \iff z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$$

Al conjunto de ángulos que nos describen un mismo z lo llamamos $Arg(z)$.

$$Arg(z) = \{\alpha \in \mathbb{R} : z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)\}$$

Este conjunto es infinito, por convenio, llamaremos **argumento principal** de z, $argz$ a

$$argz = Arg(z) \cap (-\pi, \pi]$$

De esta forma, vemos que $Arg(z) = argz + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Para abreviar, escribimos la **forma polar** de z como

$$z = r_\alpha$$

Donde $r = |z|, \quad \alpha \in Arg(z)$.

Multiplicación en forma polar

$$\begin{cases} z = r_a \\ w = s_b \end{cases} \implies zw = rs_{a+b}$$

En particular:

$$z^2 = r^2_{2a} \overset{inducción}{\implies} z^n = r^n_{na}, \forall n \geq 1$$

Además

$$z^{-1} = r^{-1}_{-a}$$

Y, por lo tanto:

$$z^n = r^n_{na}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

La función argumento principal

Podemos definir una función que nos devuelva, dado un número, su argumento principal, sin embargo esta función no puede ser continua, precisamente por la multiplicidad de los argumentos.

$$argz = arg(x+yi) = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0, y < 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0, y \geq 0 \end{cases}$$

1.2.2. Fórmula de De Moivre

La forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos.

$$z = |z|(cosa + isena)$$
$$w = |w|(cosb + isenb)$$

Entonces

$$zw = |z||w|(cosa + isena)(cosb + isenb) = |zw|(cosacosb + icosasenb + isenacosb - senasenb) =$$

$$= |zw|(cosacosb - senasenb + i(cosasenb + senacosb)) = |zw|(cos(a + b) + isen(a + b))$$

Y vemos que para multiplicar dos números complejos en forma polar, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Geométricamente es un giro seguido de una homotecia.

Proposición 2. ***Fórmula de De Moivre***

Si z es un número complejo no nulo, a un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $na \in Arg(z^n)$.

Es decir:

$$z^n = |z|^n(cos(na) + isen(na))$$

Demostración. $n = 1$:

Es evidente.

Supongamos que se verifica para $n - 1$.

n :

$$z^n = z^{n-1+1} = z^{n-1}z = |z|^{n-1}(cos((n-1)a) + isen((n-1)a))|z|(cosa + isena) =$$

$$|z|^n(cos((n-1)a)cosa - sen((n-1)a)sena + i(sen((n-1)a)cosa + cos((n-1)a)sena)) =$$

$$|z|^n(cos(na) + isen(na))$$

□

1.2.3. Raíces de números complejos

Dado $z = x + yi \neq 0, \quad x \in \mathbb{N}$, ¿cómo podemos calcular $w : w^n = z$?

Si expresamos $z = r_a, w = s_b$ en su forma polar, entonces

$$w^n = z \iff (s_b)^n = r_a \iff s^n_{nb} = r_a \iff \begin{cases} s^n = r \\ nb \in Arg(z) \end{cases} \iff \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ nb = a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ b = \frac{a}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$

Hay n raíces, pues aunque puede parecer que hay infinitos k que pueden usarse en la ecuación, resulta que

$$\begin{cases} k = 0 \implies b = \frac{a}{n} \\ k = n \implies b = \frac{a}{n} + 2\pi \simeq \frac{a}{n} \end{cases}$$

Y se genera un ciclo.

Es decir, todo complejo z tiene exactamente n raíces n-ésimas.

Llamaremos **raíz principal n-ésima** al número

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_{\frac{argz}{n}}$$

Volvamos por un momento a $\mathbb{R}$:

Dado $a > 0$,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a_0}$$

Vemos que la raíz principal funciona bien en los positivos. Sin embargo

$$\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3}i \neq -2$$

Las raíces para $a < 0$ no funcionan como estamos acostumbrados, pues aparecen nuevas raíces complejas, y la principal no tiene por qué coincidir con la que obteníamos en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Proposición 3. *$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$ es una raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal $\sqrt[n]{zw}$. Y*

$$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < arg(z) + arg(w) \leq \pi$$

Demostración.

$$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff \frac{argz}{n} + \frac{argw}{n} = \frac{arg(zw)}{n} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff argz + argw = arg(zw) + 2kn\pi$$

Como $n \geq 2$ y $-2\pi < argz + argw \leq 2\pi$, deducimos que ha de ser $k = 0$, pues en otro caso $|2kn\pi| \geq 4\pi$ y no puede darse la igualdad.

Así, queda que

$$argz + argw = arg(zw) \iff -\pi < argz + argw \leq \pi$$

□

1.3. Topología en el plano complejo

Dados $a \in \mathbb{C}, r > 0$

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$$

$$C(a,r)^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$$

Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ está **acotado** si está contenida en algún disco centrado en el origen, es decir, si $\exists M \in \mathbb{R}^+ : |z| \leq M, \forall z \in A$.

Un conjunyo abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto (conexo) se llama **dominio.**

Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ se llama **compacto** si de todo recubrimiento de K por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Teorema 4. *Sea $K \subset \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *K es compacto*
2. *Todo subconjunto infinito de puntos de K tiene algún punto de acumulación en K.*
3. *Toda sucesión de puntos de K tiene alguna subsucesión convergente en K.*
4. *K es cerrado y acotado*

1.4. Sucesiones de números complejos

Definición 5. Se dice que una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente** si hay un número complejo z con la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 \implies |z_n - z| < \varepsilon$.

En tal caso, dicho número z es único y escribimos $lim\{z_n\} = z$ o $\{z_n\} \to z$ y se dice que z es el **límite** de la sucesión $\{z_n\}$.

Observación 6.

$$\{z_n\} \to z \iff |z_n - z| \to 0$$

Proposición 7. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y solo si, las sucesiones de números reales $\{Rez_n\}$ y $\{Imz_n\}$ son convergentes. Además, en dicho caso:*

$$lim\{z_n\} = z \iff \begin{cases} lim\{Rez_n\} = Rez \\ lim\{Imz_n\} = Imz \end{cases}$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{cases} |Rez_n - Rez| \\ |Imz_n - Imz| \end{cases} \leq |z_n - z| \leq |Rez_n - Rez| + |Imz_n - Imz|$$

Así, deducimos que

$$|z_n - z| \to 0 \iff \begin{cases} |Rez_n - Rez| \to 0 \\ |Imz_n - Imz| \to 0 \end{cases}$$

□

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos ahora que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que $\forall k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |z_n| \geq k$. Entonces diremos que la sucesión es **divergente** o que diverge y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$.

1.4.1. Álgebra de límites 1.5

- $\begin{cases} \{z_n\} \to z \\ \{w_n\} \to w \end{cases} \implies \begin{cases} \{z_n + w_n\} \to z + w \\ \{z_n w_n\} \to zw \\ \{\frac{1}{z_n}\} \to \frac{1}{z} \qquad , z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, z \neq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} \{z_n\} \to \infty \\ \{w_n\}\, acotado \end{cases} \implies \{z_n + w_n\} \to \infty$
- $\begin{cases} \{z_n\} \to \infty \\ \exists \rho > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies w_n \geq \rho \end{cases} \implies \{z_n w_n\} \to \infty$

Definición 8. $\{z_n\}$ se dice que es **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \implies |z_p - z_q| < \varepsilon$

Observación 9.

$$\{z_n\} \quad de \quad Cauchy \iff \{Rez_n\}, \{Imz_n\} \quad de \quad Cauchy$$

Teorema 10. ***Teorema de completitud de*** $\mathbb{C}$
Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

Definición 11. Una **sucesión parcial de una sucesión** $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Observación 12. Si $\{z_n\} \to z$, entonces cualquier sucesión parcial de $\{z_n\}$ converge a z.

Teorema 13. ***Teorema de Bolzano-Weierstrass***
Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna subsucesión convergente.

Demostración. Se deduce del hecho de que $\{z_n\}$ es acotada si, y solo si, $\{Rez_n\}, \{Imz_n\}$ son acotadas, y de esta misma propiedad para las sucesiones de números reales. □

1.5. Series de números complejos

Se llama **serie de término general z_n** a la sucesión $\sum z_n$.

Si la sucesión es convergente, al límite se le llama **suma de la serie** y es un número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = lim\{S_n\} = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Por la proposición 7, se tiene que la serie $\sum z_n$ converge si, y solo si, convergen las series $\sum Rez_n, \sum Imz_n$.

Proposición 14. *Si la serie $\sum z_n$ converge, entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y, por tanto, converge a 0.*

Definición 15. Una serie de números complejos $\sum z_n$ **converge absolutamente** si la serie de términos positivos $\sum |z_n|$ es convergente.

Proposición 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \textit{converge}$$

Demostración. Sean

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j,\ A_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

y supongamos que $\{A_n\}$ converge, o sea, $\sum z_n$ es absolutamente convergente.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\{A_n\}$ es de Cauchy (por ser convergente), entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| = |A_q - A_p| < \varepsilon, \forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq n_0$

Entonces, $\forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq n_0$, se tiene que

$$|S_q - S_p| = |z_{p+1} + ... + z_q| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon$$

Por lo que $\{S_n\}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente □

Teorema 17. ***Teorema de Riemann***

$$\sum |z_n| \quad \textit{converge} \iff \textit{toda biyección } \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \implies \sum z_{\pi(n)} \textit{ es convergente}$$

Además, en tal caso

$$\sum z_n = \sum z_{\pi(n)}$$

Proposición 18. ***Suma por partes***

Dadas dos sucesiones de números complejos $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*, pongamos* $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$*. Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, se verifica entonces que:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$$

Demostración. Pongamos $A_0 = 0$.
$\forall k \in \mathbb{N} \to a_k = A_k - A_{k-1}$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$$

□

1.6. Funciones complejas

Dada $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $a \in A'$(a es punto de acumulación en A, $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in A : |z - a| < \varepsilon$):

- $f(z) = u(z) + v(z)i$, donde $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$ se llaman $u(z) = Re(z), \quad v(z) = Im(z)$
- $\overline{f} = u - iv$
- $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$
- $lim_{z \to a} f(z) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |z - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - L| < \varepsilon$
- $lim_{z \to a} f(z) = \infty \iff \forall R > 0, \exists \delta_R > 0 : |z - a| < \delta_R \implies |f(z)| > R$
- $\begin{cases} f(z) \overset{z \to a}{\to} L \\ g(z) \overset{z \to a}{\to} M \end{cases} \implies f(z)g(z) \overset{z \to a}{\to} LM$
- Dado $b \in A$:

$$f \quad continua \quad en \quad b \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |z - b| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - f(b)| < \varepsilon$$

Proposición 19. ***Continuidad del argumento principal***
La función argumento principal es continua en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ *y es discontinua en* $\mathbb{R}^-$.

Demostración. Como $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ es abuierto y la restricción del argumento principal a dicho conjunto viene dado por

$$argz = 2arctg(\frac{Imz}{Rez + |z|})$$

deducimos, teniendo en cuenta el carácter local de la continuidad, que la función arcotangente es continua y que $Rez + |z| > 0, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$, que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$.

Sea $a \in \mathbb{R}^-$ y sea $z_n = a + i\frac{(-1)^n}{n}$. Claramente $\{z_n\} \to a$. Como

$$arg(z_{2n}) = arctg(\frac{1}{2n}) + \pi \to \pi$$

$$arg(z_{2n-1}) = arctg(\frac{-1}{2n-1}) - \pi \to -\pi$$

Concluimos así que la sucesión $\{arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a. $\square$

Definición 20. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in A \cap A'$

Diremos que ***f* es derivable en *a*** si $\exists lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = L \in \mathbb{C}$.

En tal caso $f'(a) \coloneqq L$.

Observación 21. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, entonces $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$
$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$
$$(gof)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Proposición 22. *Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $a \in A \cap A' \implies f$ es continua en a.*

Demostración. f continua en $a \iff lim_{z\to a}f(z) = f(a) \iff$ ¿$lim_{z\to a}f(z) - f(a) = 0$?

Pero

$$lim_{z\to a}f(z)-f(a) = lim_{z\to a}(\frac{f(z)-f(a)}{z-a})(z-a) = lim_{z\to a}(\frac{f(z)-f(a)}{z-a})\cdot lim_{z\to a}(z-a) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

$\square$

Teorema 23. ***Condiciones de Cauchy-Riemann***

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}, w \in \Omega$.

$f = u + vi$ es derivable en $w\,(\exists f'(w)) \iff f$ es diferenciable en $w\,(\exists Df(w))$ y
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(w) = \frac{\partial v}{\partial y}(w) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(w) = -\frac{\partial v}{\partial x}(w) \end{cases}$$

*Estas son las **condiciones de Cauchy-Riemann**, y en tal caso se tiene que*

$$f'(w) = u_x(w) + v_x(w)i$$

Demostración. f derivable $\iff \exists c+di = f'(w):\quad lim_{z\to w}\frac{|f(z)-f(w)-(c+di)(z-w)|}{|z-w|} = 0$. Pongamos $z = x+yi$, $w = a+bi$

Entonces

$$(c+di)(z-w) = c(x-a) - d(y-b) + i[d(x-a) + c(y-b)]$$

Y teniendo en cuenta que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea, el límite anterior se escribe como

$$lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\|\ (u(x,y),v(x,y)) - (u(a,b),v(a,b)) - (c(x-a) - d(y-b) + i[d(x-a)+c(y-b))\ \|}{\|\ (x,y)-(a,b)\ \|} = 0$$

O, expresándolo en forma matricial

$$lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\|\ (u(x,y),v(x,y)) - (u(a,b),v(a,b)) - \left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right]^t \|}{\|\ (x,y)-(a,b)\ \|} = 0$$

O sea, que la aplicación $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en (a,b) y su diferencial es

$$(x,y)\mapsto\left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right]^t$$

Por lo que $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación anterior en (a,b), esto quiere decir que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = c,\ \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = d,\ \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -d,\ \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) = c$$

Como queríamos ver.

Finalmente

$$f'(w) = f'(a+bi) = c+di = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

□

Definición 24. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es **holomorfa en Ω** si f es derivable en todo punto de Ω. En tal caso la función definida para $z\in\Omega$ por $z\mapsto f'(z)$ se llama **función derivada de f.**

Denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Las funciones holomorfas en el plano complejo se llaman **funciones enteras**.

Proposición 25. *Sea $f\in\mathcal{H}(\Omega),\Omega$ dominio (un **dominio** es un abierto conexo), entonces*

$$f'\equiv 0 \implies f\equiv c$$

Demostración. Sea $z_0\in\Omega, f(z_0) = c$. Entonces ¿$f(z) = c, \forall z\in\Omega$?

Sea $A = \{z\in\Omega : f(z) = c\}\subset\Omega$. ¿Tendremos $A = \Omega$?

$A\neq\emptyset$: pues $z_0\in A$

A cerrado en Ω: pues es preimagen continua de un cerrado, $A = f^{-1}(\{c\})$

A abierto en Ω:

Sea $a\in A, D(a,r)\subset\Omega$, pues Ω es abierto, tomando r suficientemente pequeño. ¿$D(a,r)\subset A$?

Dado $b \in D(a,r) \implies$ ¿$b \in A$?
Sea el segmento que une a, b

$$[a,b]^* = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$$

Sea

$$g(t) = f((1-t)a + tb), \quad g : [0,1] \to \mathbb{C}$$

Entonces

$$\begin{cases} g'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0 \\ g(t) = u(t) + v(t)i \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u(t) = c_1 \\ v(t) = c_2 \end{cases}$$

Como $g(0) = f(a)$ y $g(1) = f(b)$, tenemos que

$$c = f(a) = g(0) = c_1 + ic_2 = g(1) = f(b) \implies f(b) = c \implies b \in A$$

Así, tenemos que $A \neq \emptyset$, es abierto y cerrado, y contenido en un conexo. Por tanto, $A = \Omega$ □

1.7. Funciones complejas elementales

1.7.1. Exponencial compleja

$$expz = exp(x + yi) = e^x(cosy + iseny)$$

Propiedades

1. $exp'(z) = exp(z), \forall z \in \mathbb{C}$
2. $exp(0) = 1$
3. $exp(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$
4. Las propiedades 1. y 2. caracterizan a la función exponencial
5. **Teorema de adición:** $exp(z + w) = exp(z)exp(w)$
6. **Fórmula de Euler:** $exp(it) = cost + isent$
7. $e^z = e^{Rez}(cos(Imz) + isen(Imz))$
8. La exponencial compleja nunca se anula
9. Es periódica de período $2\pi i$
10. Es una función analítica

1.7.2. Logaritmo complejo

$$Logw = z \iff e^z = w$$

- $w \neq 0$
- $\begin{cases} w = u + vi = r_a \\ z = x + yi \end{cases} \implies e^{x+yi} = e^x(cosy + iseny) = r(cosa + isena) \implies$
  $\begin{cases} |w| = e^x \iff x = log|w| \\ y \in Argw \end{cases}$

Así:
$$Logw = log|w| + iArgw$$

Nótese que hay tantos logaritmos como argumentos.

Así, se define el **logaritmo principal** como:
$$logw = log|w| + iargw$$

Propiedad

$$log(zw) = logz + logw$$

No es necesariamente cierta en $\mathbb{C}$.

Lo que sí que se verifica es
$$logz + logw \in Log(zw)$$

Definición 26. Sea $f : A \to \mathbb{C}^*, \emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$.

Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$, tal que $g(z) \in Logf(z), \forall z \in A$ se llama un **logaritmo de f en A**. Cuando f es la identidad se dice simplemente que g es un logaritmo en A.

Cualquier función $\alpha : A \to \mathbb{R}$, tal que $\alpha(z) \in Argf(z), \forall z \in A$ se llama un **argumento de f en A**. Cuando f es la identidad se dice simplemente que α es un argumento en A.

Proposición 27. *Sea $f : A \to \mathbb{C}^*, \emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A.*

Supongamos que f es derivable en a y que g es continua en a.

Entonces g es derivable en a y
$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

En consecuencia, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en Ω y tal que $e^{g(z)} = f(z), \forall z \in \Omega$. Entonces, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in \Omega$$

Demostración. Llamemos $b = g(a)$ y consideremos la aplicación

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{e^z - e^b}{z-b} & z \neq b \\ e^b & z = b \end{cases}$$

ϕ es continua en b

Porque e^b es la derivada de e^z en b, que coincide con $lim_{z\to b}\frac{e^z-e^b}{z-b} = lim_{z\to b}\phi(z)$.

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{e^{g(z)}-e^{g(a)}}{z-a} = \frac{e^{g(z)}-e^b}{g(z)-b}\frac{g(z)-b}{z-a} = \phi(g(z))\frac{g(z)-g(a)}{z-a}$

Como por hipótesis g es continua en a, y ϕ es continua en $g(a) = b$ tenemos que $\phi(g(z))$ es continua en $z = a$ y $\phi(g(a)) = e^b \neq 0$. Por continuidad $\exists\delta > 0 : z \in D(a,\delta) \cap A, z \neq a \implies \phi(g(z)) \neq 0$. Despejando de la expresión anterior tenemos

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{1}{\phi(g(z))}\frac{f(z) - f(a)}{z - a}, \forall z \in D(a,\delta) \cap A, z \neq a$$

Como $lim_{z\to a}\phi(g(z)) = e^b = f(a)$, deducimos que

$$lim_{z\to a}\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{1}{f(a)}f'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

□

Proposición 28. *El logaritmo principal es una función holomorfa en* $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$*, y su derivada viene dada por* $log'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$*.*

Demostración. Tomando $f(z) = z, g(z) = logz$ y aplicando la proposición anterior, lo tenemos.

Pues el logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, entonces el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ y su derivada viene dada por $log'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ □

Teorema 29. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}^*, f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Son equivalentes*

1. Existe un argumento continuo θ de f en Ω
2. Existe un logaritmo continuo g de f en Ω
3. Existe un logaritmo holomorfo g de f en Ω
4. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene primitiva en Ω, es decir, $\exists h \in \mathcal{H}(\Omega) : h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in \Omega$

Demostración. Veámoslo:

$1 \implies 2$ Si θ es un argumento continuo entonces la aplicación $g(z) = log|f(z)| + i\theta(z)$ es un logaritmo continuo de f.

$2 \implies 1$ Si g es un logaritmo continuo de f entonces $Img(z)$ es un argumento continuo de f.

$2 \implies 3$ Por la proposición 27

$3 \implies 4$ Por la proposición 27

$4 \implies 2$ Consideremos $v(z) = exp(-h(z))f(z)$. Tenemos que

$$v'(z) = e^{-h(z)}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)}f(z) + f'(z)\right] = 0$$

En consecuencia, v es constante en cada componente conexa de Ω. Sea $\lambda(z)$ una función constante en cada componente conexa (por tanto continua en Ω) que verifique $e^{\lambda(z)} = v(z), \forall z \in \Omega$. Entonces

$$e^{h(z)+\lambda(z)} = \frac{f(z)}{v(z)}v(z) = f(z)$$

Y así, $h(z) + \lambda(z)$ es un logaritmo continuo de f en Ω

□

Proposición 30. *Sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{C}^*$, y supongamos que hay un argumento continuo, ϕ, en A. Entonces cualquier otro argumento continuo en A es de la forma $\phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $\alpha : A \to \mathbb{R}$ otro argumento continuo en A.

La función $z \mapsto \frac{\phi(z)-\alpha(z)}{2\pi}$ es continua en A por ser resta de funciones continuas en A y toma valores enteros, pues, dado z, queda

$$\frac{\phi(z) - \alpha(z)}{2\pi} = \frac{argz + 2k_1\pi - argz - 2k_2\pi}{2\pi} = \frac{2\pi(k_1 + k_2)}{2\pi} = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como A es conexo concluimos que esta función debe ser constante, o sea $k_1 + k_2 = k$, por lo que, $\forall z \in A$ se tiene

$$\frac{\phi(z) - \alpha(z)}{2\pi} = k \iff \phi(z) - \alpha(z) = 2k\pi \iff \alpha(z) = \phi(z) + 2k\pi$$

□

Proposición 31. *Sea C un subconjunto de $\mathbb{C}^*$ que contiene a una circunferencia centrada en 0, entonces en C no hay ningún argumento continuo.*

En particular, en $\mathbb{C}^*$ no hay argumentos continuos.

Demostración. Supongamos que ϕ es un argumento continuo en C. Sea $C(0,r)^*$ una circunferencia contenida en C. La restricción de ϕ a $C(0,r)^* - \{-r\}$ es un argumento continuo. Como el argumento principal también es un argumento continuo en dicho conjunto, que es conexo, deducimos por la proposición anterior, que hay un entero k tal que $argz = \phi(z) + 2k\pi, \forall z \in C(0,r)^* - \{-r\}$. Como ϕ es continua en $C(0,r)^*$, la igualdad anterior implica que existe el límite $lim_{z\to -r; |z|=r} arg(z)$ lo que, a su vez, implica que

$$lim_{t\to\pi; 0<t<\pi} arg(re^{it}) = lim_{t\to\pi; 0<t<\pi} t = \pi = lim_{t\to -\pi; -\pi<t<0} arg(re^{it}) = lim_{t\to -\pi; -\pi<t<0} t = -\pi \#$$

Lo cual es una contradicción, y no puede haber argumentos continuos □

1.7.3. Potencias complejas

$$[a^b] = exp(bLoga) = \{exp(bw) : w \in Loga\}$$

De entre las potencias de base a y exponente b se destaca:

$$a^b = e^{bloga}$$

Que se llama **valor principal de la potencia de base *a* y exponente *b*.**

Observación 32.

$$[a^{\frac{1}{n}}] = \{ \sqrt[n]{|a|}(cos\frac{arga + 2k\pi}{n} + isen\frac{arga + 2k\pi}{n}) : k \in \mathbb{Z}\}$$

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, definidas por

$$a^z = e^{zloga}$$

Que son holomorfas en todo el plano

1.7.4. Funciones trigonométricas complejas

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

2. Series de potencias e integración compleja

2.1. Series de potencias

$$\begin{cases} \{f_n\} : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{cases} \quad f_n \overset{conv.punt.}{\to} f \iff f_n(z) \to f(z), \forall z \in A$$

$$f_n \overset{conv.unif.}{\to} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in A$$

Proposición 33. *El límite uniforme de funciones continuas es continuo.*

Dada la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

Se dice que:

- *Converge puntualmente:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ converge } \forall z \in A$$

- *Converge uniformemente:*

$$S_n(z) \overset{unif}{\to} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

- *Converge absolutamente:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \text{ converge } \forall z \in A$$

Proposición 34. ***Criterio de Weierstrass***

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in A$. *Supongamos que* $\exists (a_n), a_n \geq 0$ *tal que* $|f_n(z)| \leq a_n, \forall z \in A, \forall n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

es absoluta y uniformemente convergente en A.

2.2. Serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{C}$ y con coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Proposición 35. ***(Lema de Abel)***

Sea
$$R = sup\{r \geq 0 : (c_n r^n)_n \text{ está acotada}\} \in [0, \infty]$$

A R se le llama **radio de convergencia** de la serie de funciones.

Entonces

1. Si $K \subset D(a, R)$ compacto $\implies \sum c_n (z-a)^n$ converge puntual, uniforme y absolutamente en K. En particular, la serie converge puntualmente en $D(a, R)$, que recibe el nombre de **dominio de convergencia**.

2. $z \notin \overline{D}(a, R) \implies$ la serie no converge en z

Demostración. Véamoslo:

1. $K \subset D(a, R)$. Sea $\rho = sup\{|z-a| : z \in K\} \overset{K \text{ compacto}}{=} max\{|z-a| : z \in K\} \overset{K \text{ compacto}}{<} R$. Sea $\rho < r < R$.

Por hipótesis, $(|c_n| r^n)$ es acotada, $|c_n| r^n \leq \delta, \forall n$.

$$|c_n (z-a)^n| = |c_n (z-a)^n \frac{r^n}{r^n}| \leq \delta \frac{\rho^n}{r^n}, \forall z \in K$$

Entonces, como
$$\sum_n \delta (\frac{\rho}{r})^n \overset{geométrica, ratio<1}{<} \infty$$

Así, por el criterio de Weierstrass, $\sum c_n (z-a)^n$ converge unif y abs en K.
Además, dado $\{z\} \subset D(a, R) \implies K = \{z\} \implies \sum c_n (z-a)^n$ converge en $\{z\}$.

2. $z \notin \overline{D}(a, R) \implies |z-a| = r > R \implies c_n (z-a)^n$ no está acotada $\implies$ no puede converger a 0 $\implies \sum c_n (z-a)^n$ no converge

□

Por tanto, ahora sabemos que

- $|z-a| < R \implies \sum c_n (z-a)^n$ converge
- $|z-a| > R \implies \sum c_n (z-a)^n$ no converge
- $|z-a| = R$ no podemos asegurar nada a priori

Proposición 36. ***(Criterio del cociente)***

$$lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R \implies R \text{ es el radio de convergencia}$$

Demostración. Si vemos que $\begin{cases} r < R \implies (c_n r^n) \text{ acotada} \\ r > R \implies (c_n r^n) \text{ no acotada} \end{cases}$ lo tendremos, por el criterio de Abel.

- $\boldsymbol{r < R} \implies \exists n_0 : n > n_0, \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} > r \implies |c_n|r^n > |c_{n+1}|r^{n+1} \implies |c_n r^n| > |c_{n+1} r^{n+1}| \implies (|c_n r^n|)_{n>n_0}$decreciente $\implies (|c_n r^n|)_{n>n_0}$acotada $\implies (|c_n r^n|)$ acotada
- $\boldsymbol{r > R} \implies \exists \varepsilon > 0 : (1-\varepsilon)r > R \implies \exists n_0 : n > n_0, (1-\varepsilon)r > \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \implies |c_{n+1}r^{n+1}| > \frac{1}{1-\varepsilon}|c_n r^n| \implies |c_{n_0+k} r^{n_0+k}| > (\frac{1}{1-\varepsilon})^k |c_{n_0} r^{n_0}| \overset{k\to\infty}{\to} \infty \implies |c_n r^n|$ no acotada

□

Proposición 37. ***Criterio de Cauchy-Hadamard***
Sea $L = limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Entonces $R = \frac{1}{L}$.

Demostración. Lo vamos a ver por casos:

- $L = 0 \implies R = \infty$

$L = 0 \implies limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \implies lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0$
Sea $r > 0$, entonces $lim\, r\sqrt[n]{|c_n|} = 0 \iff lim \sqrt[n]{|c_n|r^n} = 0 \implies \sqrt[n]{|c_n|r^n} < 1, \forall n > n_0 \implies |c_n|r^n < 1, \forall n > n_0 \implies (c_n r^n)$ acotada $\implies R = \infty$, pues $r > 0$ es arbitrario.

- $L = \infty \implies R = 0$

$L = \infty \implies limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \implies \exists (c_{n_k}) : \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \overset{k\to\infty}{\to} \infty$
Sea $r > 0 \implies r \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \to \infty \iff \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|r^{n_k}} \to \infty \implies \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|r^{n_k}} > 2, \forall n_k > n_{k_0} \implies |c_{n_k}|r^{n_k} > 2^{n_k}, \forall k > k_0 \implies |c_{n_k}|r^{n_k}$ no acotada $\implies R = 0$

- $0 < L < \infty \implies R = \frac{1}{L}$

Sea $\boldsymbol{r < \frac{1}{L}} \iff L < \frac{1}{r} \implies \exists n_0 : sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k > n_0\} < \frac{1}{r} \implies \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{r}, \forall k > n_0 \iff \sqrt[k]{|c_k|r^k} < 1, \forall k > n_0 \implies |c_k|r^k < 1, \forall k > n_0 \implies |c_k|r^k$ acotada
Sea $\boldsymbol{r > \frac{1}{L}} \iff \exists \varepsilon > 0 : (1-\varepsilon)r > \frac{1}{L} \implies L > \frac{1}{(1-\varepsilon)r} \implies \exists n_0 : sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k > n\} > \frac{1}{(1-\varepsilon)r}, \forall n > n_0 \implies \forall n > n_0, \exists k_n \geq n : \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > \frac{1}{(1-\varepsilon)r} \iff \forall n > n_0, \exists k_n \geq n : \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|r^{k_n}} > \frac{1}{(1-\varepsilon)} \iff \forall n > n_0, \exists k_n \geq n : |c_{k_n}|r^{k_n} > \frac{1}{(1-\varepsilon)^{k_n}} \overset{n\to\infty}{\to} \infty \implies |c_n r^n|$ no acotada □

Lema 38. *Sea $\sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ con radio de convergencia R. Entonces el radio de convergencia de $\sum_1^\infty c_n n(z-a)^{n-1}$ es R.*

Demostración. Lo vemos en dos partes:

- $\sum_1^\infty c_n n(z-a)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_1^\infty c_n n(z-a)^n$

En efecto,

$$\sum_1^\infty c_n n(z-a)^n = (z-a)\sum_1^\infty c_n n(z-a)^{n-1}$$

Y convergen en los mismos puntos.
Por tanto, basta hacer la prueba para $\sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ y $\sum_0^\infty c_n n(z-a)^n$

- $¿L = limsup \sqrt[n]{|c_n|} = limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = L'?$

***$L \leq L'$* :**

$$|c_n| \leq n|c_n|, \forall n > 0 \implies L \leq L'$$

***$L' \leq L$* :**

$$limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = lim_{n\to\infty} sup\{\sqrt[k]{k|c_k|} : k \geq n\} = lim_{n\to\infty} sup\{\sqrt[k]{k}\sqrt[k]{|c_k|} : k \geq n\} \leq$$

$$\leq lim_{n\to\infty} sup\{\sqrt[n]{n}\sqrt[k]{|c_k|} : k \geq n\} = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geq n\} = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} L = L \implies L' \leq L$$

□

Teorema 39. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in D(a,R)$.*

Entonces f es holomorfa en $D(a,R)$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-a)^{n-1}$.

De hecho, f es infinitamente derivable y $f^{k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}$

En particular, $c_n = \frac{f^{n)}(a)}{n!}, \forall n \geq 0$.

Demostración. Vamos a ver cada afirmación:

- Para $f^{k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}$ basta demostrarlo para $k = 1$, pues se deduce para $k \geq 1$ iterando la derivada.
- La última afirmación puede verse de la siguiente manera

$$f^{k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)c_n(a-a)^{n-k} = k!c_k \implies c_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!}$$

- Nótese que podemos suponer $a = 0$, pues

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in D(a,R)$$

Definimos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, z \in D(0,R) \implies ¿g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}?$$

Si fuera cierto tendríamos

$$f(z) = g(z-a) \implies f'(z) = g'(z-a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-a)^{n-1}$$

- $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \overset{??}{\implies} g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$

Sea $b \in D(0,R)$, vamos a calcular $g'(b)$:

$$lim_{z\to b} \frac{g(z)-g(b)}{z-b} = lim_{z\to b} \frac{\sum c_n z^n - \sum c_n b^n}{z-b} = lim_{z\to b} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - b^n}{z-b} \overset{ciclotómica}{=}$$

$$lim_{z\to b} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k b^{n-1-k}) = lim_{z\to b} \sum_{n=1}^{\infty} c_n p_n(z)$$

- ¿$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z)$ converge uniformemente en $\overline{D}(b,\delta)$?

$$|c_n p_n(z)| = |c_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k b^{n-1-k}| \leq |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^k b^{n-1-k}| \overset{*}{\leq} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} (|b|+\delta)^k |b|^{n-1-k} \leq |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} (|b|+\delta)^k (|b|+\delta)^{n-1-k} =$$

$$= |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} (|b|+\delta)^{n-1} = |c_n| n (|b|+\delta)^{n-1}$$

$*z = z - b + b \implies |z| \leq |z-b| + |b| \leq \delta + |b|$
¿$\sum_{n=0}^{\infty} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1} < \infty$?
Por el lema 38, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$ tiene radio de convergencia R. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n z^{n-1}$ tiene radio de convergencia R, por el criterio de Cauchy-Hadamard (criterio de la raiz).
¿$|b| + \delta < R$? Sí! pues $z \in \overline{D}(b,\delta) \subset D(0,R)$.
Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1} < \infty$$

Por el criterio de Weierstrass, pues $\sum n|c_n|R^{n-1} < \infty$.

- Por último, definimos

$$p(z) = \frac{g(z) - g(b)}{z - b}, z \in \overline{D}(b,\delta) - \{b\}$$

$$q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p_n(z), z \in \overline{D}(b,\delta)$$

Entonces

$$p(z) = q(z), \forall z \in \overline{D}(b,\delta) - \{b\}$$

Y

$$lim_{z\to b} p(z) = lim_{z \to b} q(z) \overset{**}{=} q(b)$$

$**q$ continua por ser límite uniforme de funciones continuas
Así

$$g'(b) = lim_{z\to b} \frac{g(z) - g(b)}{z - b} = q(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\sum_{k=0}^{n-1} b^k b^{n-1-k}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n b^{n-1}$$

Como queríamos ver □

Definición 40. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente derivable en Ω.

Sea $a \in \Omega$. Diremos que f es **analítica en a** si
$\exists \varepsilon > 0 : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \forall z \in D(a,\varepsilon)$.

Diremos que f es analítica en Ω si lo es $\forall a \in \Omega$.

Proposición 41. *La exponencial compleja es analítica, con*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Demostración. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \implies c_n = \frac{1}{n!}$$

Por el criterio del cociente

$$|\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n + 1 \to \infty$$

Así, el radio de convergencia de f es $R = \infty$.

$$¿e^z = f(z)?$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)$$

$$[e^{-z}f(z)]' = -e^{-z}f(z) + e^{-z}f(z) = 0 \implies e^{-z}f(z) = c \implies f(z) = ce^z$$

Pero

$$1 = f(0) = ce^0 = c \implies c = 1$$

Y, por lo tanto

$$f(z) = e^z$$

Así hemos visto que e^z es analítica en el origen.
Para ver que es analítica en todo el plano, basta notar que

$$e^z = e^{a+z-a} = e^a e^{z-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n$$

Y se ve cómo e^z es analítica en todo el plano □

2.3. Integración compleja

Vamos a ver ahora la integrabilidad de funciones en $\mathbb{C}$, sus propiedades y características muy interesantes que distinguen la integrabilidad de funciones complejas de la de funciones de variable real.

Definición 42. Funciones complejas integrables Riemann

Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ acotada.

Diremos que γ es integrable Riemann ($\gamma \in R([a, b])$) si $Re\gamma$ e $Im\gamma$ son integrables Riemann y definiremos:

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^b (Re\gamma)(t)dt + i \int_a^b (Im\gamma)(t)dt$$

Proposición 43. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. **Linealidad:**
$$\int_a^b (a\gamma + b\sigma)dt = a\int_a^b \gamma dt + b\int_a^b \sigma dt$$

2. **Desigualdad triangular:**
$$|\int_a^b \gamma dt| \leq \int_a^b |\gamma| dt$$

3. $$\gamma_n \overset{unif}{\to} \gamma \implies \int_a^b \gamma_n dt \overset{n}{\to} \int_a^b \gamma dt$$
. En particular, si
$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \overset{unif}{=} \gamma(t) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \gamma_n dt = \int_a^b \gamma dt$$

4. **T.F.C.:** Si $\gamma \in R([a,b])$ entonces
$$\Psi(t) = \int_a^t \gamma(s)ds \text{ es continua}$$
Si γ es continua, entonces Ψ es derivable y $\Psi'(t) = \gamma(t), \forall t \in [a,b]$

5. **Regla de Barrow:** Si $\Psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ es derivable y $\Psi' \in R([a,b])$. Entonces
$$\Psi(b) - \Psi(a) = \int_a^b \Psi'(t)dt$$

6. **Regla del cambio de variable:** Si $\gamma \in R([a,b])$ y $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es un difeomorfismo (C^1, biyectiva, $\varphi' \neq 0$). Entonces
$$\int_c^d \gamma(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \gamma(t)dt$$

7. $$\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^c \gamma(t)dt + \int_c^b \gamma(t)dt, \forall c \in [a,b]$$

Demostración. Voy a hacer un par de ellas:

1. Se aplica la definición de integral compleja y se usa la misma propiedad para integrales reales para la parte real y la imaginaria, se agrupan términos y se tiene el resultado.

2. Sea $|I| = |\int_a^b \gamma(t)dt|$. Entonces, I será un complejo de módulo $|I|$ y argumento, por ejemplo, α:

$$|I| = e^{-i\alpha} I = e^{-i\alpha}\int_a^b \gamma(t)dt \overset{1.}{=} \int_a^b e^{-i\alpha}\gamma(t)dt = \overset{|I|}{\int_a^b Re(e^{-i\alpha}\gamma(t))dt} + i\overset{0}{\int_a^b Im(e^{-i\alpha}\gamma(t))dt} =$$

$$= \int_a^b Re(e^{-i\alpha}\gamma(t))dt \overset{x\leq\sqrt{x^2+y^2}}{\leq} \int_a^b |e^{-i\alpha}\gamma(t)|dt = \int_a^b |\gamma(t)|dt$$

$\square$

Definición 44. Llamamos **curva** a una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

$\gamma(a)$ es el **punto inicial** y $\gamma(b)$ es el **punto final**.

$\gamma^* = \gamma([a, b])$ es la **traza** o soporte de γ

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que es una **curva cerrada**.

Si $\gamma \in C^1([a, b])$ se dice que es una **curva regular**.

γ es un **camino** cuando sea una curva regular a trozos:

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b : \gamma_{|[a_{j-1},a_j]} \in C^1([a_{j-1}, a_j]), \forall j$$

Definición 45. Concatenación de caminos

$$\begin{cases} \gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \\ \sigma : [c, d] \to \mathbb{C} \\ \gamma(b) = \sigma(c) \end{cases} \implies t \overset{\gamma\dotplus\sigma}{\mapsto} \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a, b] \\ \sigma(t - b + c) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Definición 46. Camino opuesto

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \implies -\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

Definición 47. Poligonal

Dados $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ se define la **poligonal** que une estos n puntos como

$$[z_1, ..., z_n] = [z_1, z_2] \dotplus [z_2, z_3] \dotplus ... \dotplus [z_{n-1}, z_n]$$

Definición 48. Integral curvilinea

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función definida sobre la traza de γ.

Se define la **integral curvilínea de $\boldsymbol{f}$ sobre $\boldsymbol{\gamma}$** como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Definición 49. Longitud de una curva

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Definición 50. Caminos equivalentes

Dados

$$\begin{cases} \gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \\ \sigma : [c,d] \to \mathbb{C} \end{cases}$$

Son **caminos equivalentes** si $\exists \varphi : [c,d] \to [a,b]$ C^1-difeomorfismo creciente tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$.

En este caso se tiene que $\gamma^* = \sigma^*$.

Proposición 51. *Dos caminos equivalentes tienen la misma longitud.*

Demostración.

$$l(\gamma) = \int_{a=\varphi(c)}^{b=\varphi(d)} |\gamma'(t)|dt$$

$$l(\sigma) = \int_c^d |\sigma'(s)|ds = \int_c^d |(\gamma \circ \varphi)'(s)|ds = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)|ds = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))|\varphi'(s)ds$$

Y ambas fórmulas son iguales por el teorema del cambio de variable $\square$

Proposición 52.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:**
$$\int_\gamma (af(z)+bg(z))dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$$

2. Si γ y σ son caminos equivalentes, entonces
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz$$

3.
$$\int_{\gamma+\sigma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\sigma f(z)dz$$

4.
$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

5.
$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq max_{z\in\gamma^*}\{|f(z)|\}l(\gamma)$$

6.
$$f_n \overset{unif}{\to} f \text{ en } \gamma^* \implies \int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$$
$$f = \sum f_n \text{ unif } \implies \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sum f_n(z)dz = \sum \int_\gamma f_n(z)$$

Teorema 53. ***Regla de Barrow***

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (aunque basta que sea $f \in C(\Omega)$) y supongamos que f admite una primitiva F, es decir, $F'(z) = f(z), \forall z \in \Omega$.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ camino, $\gamma^* \subset \Omega$.

Sean $\alpha = \gamma(a), \beta = \gamma(b)$.

Entonces
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

Demostración. Lo vamos a hacer primero para una curva de clase C^1, y después generalizaremos el resultado:

- Hagámoslo primero para γ de clase C^1.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [F(\gamma(t))]'dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

- Ahora el caso general.

Sean $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tales que $\gamma_{|[a_{j-1},a_j]} =: \gamma_j$ es C^1. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1 \dot{+} ... \dot{+} \gamma_n} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz \stackrel{\text{caso anterior}}{=} \sum_{j=1}^{n} (F(\gamma(a_j)) - F(\gamma(a_{j-1})) =$$

$$= F(\gamma(a_n)) - F(\gamma(a_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

□

Lema 54. ***Lema para el TFC***

Si Ω es un dominio, y $z, w \in \Omega \implies \exists \gamma$ camino en Ω tal que z es el punto inicial y w el final de γ.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$. Sea $A = \{z \in \Omega : \exists \gamma \, camino \, en \, \Omega \, z_0 \, inicial \, y \, z \, final\}$
Vamos a ver que $A \neq \emptyset, A$ abto y A cerrado.

- $A \neq \emptyset : z_0 \in A, \gamma = [z_0, z_0]$
- A abto: Sea $a \in A$. Sea $\delta > 0 : D(a,\delta) \subset \Omega(abto)$, ¿será $D(a,\delta) \subset A$?

  $$a \in A \implies \exists \gamma : [c,d] \to \Omega : \gamma(c) = z_0, \gamma(d) = a$$

  Sea $z \in D(a,\delta)$, tomando $\sigma = \gamma \dot{+} [a,z]$, lo cual podemos hacer pues $D(a,\delta)$ es convexo, tenemos que $z \in A$. Así vemos que A es abierto.
- A cerrado: Sea $\{z_n\} \subset A, z_n \to a \in \Omega$,¿$a \in A$?

  $$\exists \delta > 0 : D(a,\delta) \subset \Omega \implies \exists n_0 : z_{n_0} \in D(a,\delta)$$

  Como $z_{n_0} \in A, \exists \gamma : [c,d] \to \Omega / \gamma(c) = z_0, \gamma(d) = z_{n_0}$. Entonces, tomando $\sigma = \gamma \dot{+} [z_{n_0}, a]$ tenemos que $a \in A \implies A$ cerrado

□

Teorema 55. ***Teorema Fundamental del Cálculo***

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (es suficiente $f \in C(\Omega)$), son equivalentes:

1. La integral curvilínea de f en cualquier camino cerrado en Ω es 0.
2. f admite una primitiva en Ω

Demostración. Véamoslo:

- **2 $\implies$ 1**

$\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f$.
Sea camino cerrado $\gamma : [a,b] \to \Omega \stackrel{Barrow}{\implies} \int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \stackrel{\gamma \, cerrado}{=} F(z) - F(z) = 0$

- **1 $\Longrightarrow$ 2**

No es restrictivo suponer que Ω es un dominio, pues, si no lo es, podemos buscar las primitivas en cada componente conexa.

Sea $z_0 \in \Omega$ fijo.

Definimos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

Con $\gamma_z : [a_z, b_z] \to \Omega$, $\gamma(a_z) = z_0, \gamma(b_z) = z$, que existe por el lema.

Veamos que ***F* está bien definida**:

Sean γ, σ caminos en Ω con $\gamma(a_1) = \sigma(a_2) = \alpha$, $\gamma(b_1) = \sigma(b_2) = \beta$, entonces ¿$\int_\gamma f dz = \int_\sigma f dz$?

Sí! Sea $\gamma \dot{+} (-\sigma)$, que es un camino cerrado, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\sigma f(z)dz = \int_{\gamma \dot{+} (-\sigma)} f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_\gamma f dz = \int_\sigma f dz$$

Podemos, por tanto, escribir

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

pues solo depende de los extremos. Falta ver que **es primitiva de *f*.**

Sea $a \in \Omega$, ¿$F'(a) = f(a)$?

$$lim_{z\to a} \frac{F(z) - F(a)}{z - a} = f(a) \iff lim_{z\to a} \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) = 0 \iff lim_{z\to a} \frac{F(z) - F(a) - f(a)(z - a)}{z - a} = 0$$

$$\iff lim_{z\to a} \frac{|F(z) - F(a) - f(a)(z - a)|}{|z - a|} = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua en $a, \exists \delta > 0 : |z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Podemos suponer que $\overline{D}(a, \delta) \subset \Omega$.

$$\frac{|F(z) - F(a) - f(a)(z - a)|}{|z - a|} = \frac{|\int_{\gamma_a \dot{+} [a,z]} f(w)dw - \int_{\gamma_a} f(w)dw - f(a)(z - a)|}{|z - a|} = \frac{|\int_{[a,z]} f(w)dw - f(a)(z - a)|}{|z - a|} \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{|\int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[a,z]} f(a)dw|}{|z - a|} = \frac{|\int_{[a,z]}[f(w) - f(a)]dw|}{|z - a|} \stackrel{**}{\leq} \frac{M \cdot l([a, z])}{|z - a|} = M \leq \varepsilon$$

$*$:

$$\int_{[a,z]} f(a)dw = f(a) \int_{[a,z]} dw = f(a) \int_0^1 (z - a)dt = f(a)(z - a)$$

$**$: $M = max|f(w) - f(a)| \leq \varepsilon$, pues $w \in [a, z] \subset \overline{D}(a, \delta)$

Y tenemos el resultado $\square$

3. Teoría elemental de Cauchy: Consecuencias

3.1. Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Teorema 56. ***Cauchy-Goursat***
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\Delta(a,b,c) = \{z = ra + sb + tc : r,s,t \geq 0, r+s+t = 1\} \subset \Omega$.
Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$$

Demostración. Sea

$$I = \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz$$

¿Tendremos $I = 0$?
Sean ahora

$$a' = \frac{c+b}{2} \quad b' = \frac{a+c}{2} \quad c' = \frac{a+b}{2}$$

Entonces, por la linealidad de la integral respecto al camino:

$$I = \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = \int_{[a,c',b',a]} f(z)dz + \int_{[b',a',c,b']} f(z)dz + \int_{[c',b,a',c']} f(z)dz + \int_{[b',c',a',b']} f(z)dz$$

Tomamos la integral que quede mayor en módulo:

$$I_1 = \int_{[a_1,b_1,c_1,a_1]} f(z)dz$$

Así:

$$|I| \leq 4|I_1|$$

Si llamamos:

$$[a_1, b_1, c_1, a_1] = \gamma_1$$

$$\Delta(a_1, b_1, c_1) = \Delta_1$$

Entonces

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f dz$$

Y se tiene que $diam(\Delta_1) = \frac{1}{2}diam(\Delta)$ y que $l(\gamma_1) = \frac{1}{2}l(\gamma)$.
Prosiguiendo de forma inductiva, obtenemos

$$\Delta_n, \gamma_n, I_n = \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

Con

$$|I_{n-1}| \leq 4|I_n|, \quad diam(\Delta_n) = \frac{1}{2}diam(\Delta_{n-1}), \quad l(\gamma_n) = \frac{1}{2}l(\gamma_{n-1})$$

Por tanto

$$|I| = |I_0| \leq 4^n|I_n|, \qquad diam(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}diam(\Delta), \qquad l(\gamma_n) = \frac{1}{2^n}l(\gamma_0)$$

Ahora, como $\Delta_n \subsetneq \Delta_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$, $diam(\Delta_n) \to 0$ y Δ_n es compacto, $\forall n$, entonces $\exists \alpha$ tal que

$$\cap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{\alpha\}$$

Como f es holomorfa en α, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - \alpha| \leq \delta \implies |\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - f'(\alpha)| \leq \varepsilon \iff |f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)|z - \alpha|| \leq \varepsilon|z - \alpha|$

Sea $n_0/\Delta_{n_0} \subset \overline{D}(\alpha, \delta)$, entonces:

$$|I| \leq 4^{n_0}|I_{n_0}| = 4^{n_0}|\int_{\gamma_{n_0}} f dz| \stackrel{*}{=} 4^{n_0}|\int_{\gamma_{n_0}} (f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha))dz| \leq 4^{n_0} M \cdot l(\gamma_{n_0})$$

Donde:

* es cierto porque γ_{n_0} es un camino cerrado y $f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha)$ es un polinomio, por lo que tiene primitiva, y entonces

$$\int_{\gamma_{n_0}} f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) dz = 0$$

Y $M = \text{máx}_{z \in \gamma_{n_0}^* \subset \overline{D}(\alpha,\delta)}\{|f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)|\} \leq \text{máx}_{z \in \gamma_{n_0}}\{\varepsilon|z - \alpha|\} \leq \varepsilon \cdot diam(\Delta_{n_0})$

Y así:

$$|I| \leq 4^{n_0} M \cdot l(\gamma_{n_0}) \leq 4^{n_0} \varepsilon \cdot diam(\Delta_{n_0}) l(\gamma_{n_0}) = 4^{n_0} \varepsilon \frac{1}{2^{n_0}} diam(\Delta_0) \frac{1}{2^{n_0}} l(\gamma_0) = \varepsilon \cdot diam(\Delta_0) \cdot l(\gamma_0)$$

Por lo que

$$|I| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \implies |I| = 0$$

□

Teorema 57. ***Cauchy para dominios estrellados***
Sea Ω un dominio estrellado, o sea, tal que $\exists z_0 \in \Omega : [z, z_0]^* \subset \Omega, \forall z \in \Omega$.
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces f admite primitiva en Ω.

Demostración. Definimos

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$

Sea $\alpha \in \Omega$. ¿Tendremos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - \alpha| < \delta \implies |\frac{F(z)-F(\alpha)-f(\alpha)(z-\alpha)}{z-\alpha}| \leq \varepsilon$?

Como f es continua en α, entonces $\exists \delta > 0 : |f(z) - f(\alpha)| \leq \varepsilon, \forall z \in \overline{D}(\alpha, \delta) \subset \Omega$

Basta ver que

$$F(z) - F(\alpha) = \int_{[\alpha,z]} f(w)dw, \forall z \in \overline{D}(\alpha, \delta) \subset \Omega$$

Por ser estrellado, $[z_0, z]$,$[z_0, \alpha] \subset \Omega$

Por ser $z \in \overline{D}(\alpha, \delta) \subset \Omega \implies [\alpha, z] \subset \Omega$

Así, tenemos que el triángulo $\Delta(z_0, \alpha, z) \subset \Omega, \forall z \in \overline{D}(\alpha, \delta) \implies \int_{[z_0,\alpha,z,z_0]} f(w)dw = 0$

Pero

$$\int_{[z_0,\alpha,z,z_0]} f(w)dw = \int_{[z_0,\alpha]} f(w)dw + \int_{[\alpha,z]} f(w)dw + \int_{[z,z_0]} f(w)dw = 0 \implies F(\alpha) + \int_{[\alpha,z]} f(w)dw - F(z) = 0 \implies$$

$$\implies F(\alpha) - F(z) = -\int_{[\alpha,z]} f(w)dw \implies F(z) - F(\alpha) = \int_{[\alpha,z]} f(w)dw$$

Volviendo atrás:

$$\left|\frac{F(z)-F(\alpha)-f(\alpha)(z-\alpha)}{z-\alpha}\right| = \left|\frac{\int_{[\alpha,z]} f(w)dw - f(\alpha)(z-\alpha)}{z-\alpha}\right| \overset{*}{=} \frac{|\int_{[\alpha,z]}[f(w)-f(a)]dw|}{|z-\alpha|} \overset{**}{\leq}$$

$$\overset{**}{\leq} \frac{M \cdot l([\alpha,z])}{|z-\alpha|} = M \leq \varepsilon$$

*:

$$\int_{[\alpha,z]} f(\alpha)dw = f(\alpha)(z-\alpha)$$

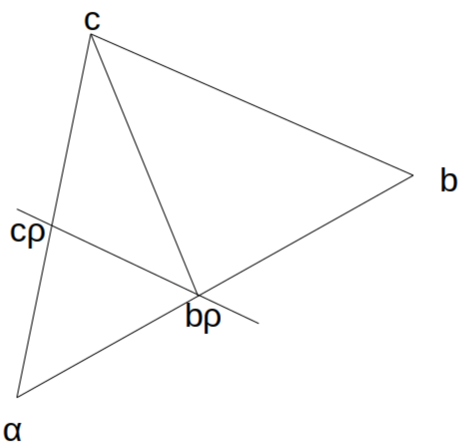
**: $M = \text{máx}\,|f(w)-f(a)| \leq \varepsilon$, como vimos al principio.
Y así, tenemos el resultado buscado. □

Teorema 58. ***De Cauchy-Goursat light***
Sea $f \in C(\Omega)$ tal que $\exists \alpha \in \Omega / f \in \mathcal{H}(\Omega - \{\alpha\})$. Supongamos que $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$. Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$$

Demostración. Veámoslo por casos:

- $\alpha \notin \Delta(a,b,c) \implies \Delta(a,b,c) \subset \Omega - \{\alpha\} \overset{Cauchy-Goursat(56)}{\implies} \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$
- $\alpha = a$:



Trazamos una paralela al segmento $[c,b]$, tal que corta al semento $[\alpha,b]$ a una distancia ρ de α y llamamos a este nuevo triángulo $\Delta\rho$, así como $\gamma\rho = [\alpha, b\rho, c\rho, \alpha]$.

Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = \int_{[\alpha,b\rho,c\rho,\alpha]} fdz + \int_{[b\rho,b,c,b\rho]} fdz + \int_{[b\rho,c,c\rho,b\rho]} fdz$$

Estas dos últimas integrales se ajustan al caso anterior, y por tanto son 0. Así:

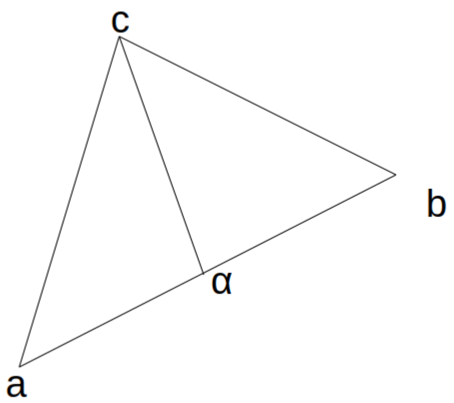
$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = \int_{[\alpha,b\rho,c\rho,\alpha]} fdz = \int_{\gamma\rho} fdz$$

Y, de esta manera:

$$|\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz| = |\int_{\gamma\rho} fdz| \leq M_\rho l(\gamma\rho) \leq M \cdot l(\gamma\rho) \overset{\rho\to 0}{\to} 0$$

Donde $M_\rho = \text{máx}_{z\in\gamma\rho^*}\{|f(z)|\} \leq \text{máx}_{z\in\Delta(a,b,c)}\{|f(z)|\} = M \overset{\Delta\, compacto, f\, cont}{<} \infty$

- $\alpha \in [a,b]$:

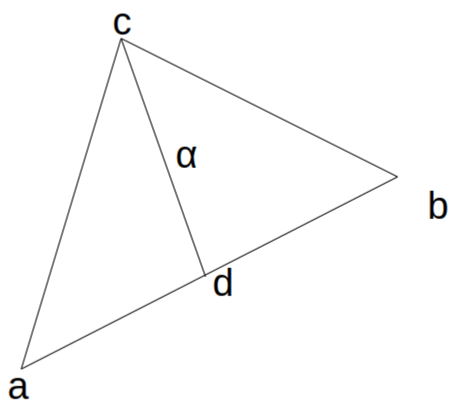


Ahora lo que hacemos es unir c con α, de tal forma que

$$\int_{[a,b,c,a]} fdz = \int_{[a,\alpha,c,a]} fdz + \int_{[\alpha,b,c,\alpha]} fdz = 0$$

Estas dos últimas integrales son 0, por el caso anterior.

- $\alpha \in int(\Delta a, b, c))$:



Ahora trazamos la recta que une c con α y definimos d como la intersección de esta recta con el segmento $[a,b]$. Ahora

$$\int_{[a,b,c,a]} fdz = \int_{[a,d,c,a]} fdz + \int_{[d,b,c,d]} fdz = 0$$

Pues estas dos últimas integrales se ajustan al caso anterior.

Cualquier caso no visto explícitamente entre los anteriores se ajusta de forma obvia a alguna de estas distinciones. $\square$

Teorema 59. ***Cauchy para dominios estrellados light***
Sea Ω un dominio estrellado. Sea $f \in C(\Omega)$ tal que $\exists \alpha \in \Omega$ con $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{\alpha\})$. Entonces f admite una primitiva en Ω.

Demostración. La demostración es igual que la de Cauchy para dominios estrellados, pero cuando usamos Cauchy-Goursat, debemos usar ahora Cauchy-Goursat light □

3.2. Analiticidad de las funciones holomorfas

Proposición 60. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $$\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = 0, \qquad |z-a| > r$$

2. $$\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i, \qquad |z-a| < r$$

Demostración. Veamos ambas afirmaciones:

1. Sea $\Omega = D(a, |z-a|)$, que es estrellado y sea $f(w) = \frac{1}{w-z} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces, por el teorema de Cauchy para dominios estrellados, tenemos que $\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = 0$

2. $$\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = \int_{C(a,r)} \frac{1}{w-a-(z-a)} dw = \int_{C(a,r)} \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} dw$$

Donde $\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$ podemos verlo como la suma de la progresión geométrica de ratio $\frac{z-a}{w-a} < 1$, así:

$$\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw = \int_{C(a,r)} \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-a}{w-a})^n dw = \int_{C(a,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw \overset{f_n(w) = \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}}{=}$$

$$= \int_{C(a,r)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w) dw \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(a,r)} f_n(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(a,r)} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{C(a,r)} \frac{1}{(w-a)^{n+1}} dw \overset{**}{=} \int_{C(a,r)} \frac{1}{w-a} dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+re^{it}-a} rie^{it} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} i dt = 2\pi i$$

*:

$$\forall w \in C(a,r)^*, \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(w)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{r^n} \overset{\frac{z-a}{r}<1}{<} \infty$$

Y así, f_n converge uniformemente, y podemos sacar el límite fuera de la integral.
**:

$$\forall n \geq 1, \int_{C(a,r)} \frac{1}{(w-a)^{n+1}} dw = 0$$

Esto se debe a que admite primitiva, $\frac{-1}{n} \frac{1}{(w-a)^n}$ □

Teorema 61. ***Fórmula de Cauchy en un disco***
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $\overline{D}(a,r) \in \Omega$.
Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in D(a,r)$$

Demostración. Sea

$$F(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in \Omega - \{z\} \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

$F \in \mathcal{H}(\Omega - \{z\})$ por ser suma y cociente de funciones holomorfas, con $w - z \neq 0$.
Y $F(w)$ es continua en z, pues f es derivable en z y ambos límites coinciden.
Así, $F \in C(\Omega)$.
Sea $\varepsilon > 0 : \Omega' = D(a, r+\varepsilon) \subset \Omega \implies F \in C(\Omega'), F \in \mathcal{H}(\Omega' - \{z\})$. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Cauchy para dominios estrellados light en Ω', quedando que

$$\int_{C(a,r)} F(w)dw = 0$$

Pero

$$0 = \int_{C(a,r)} F(w)dw \overset{z \notin C(a,r)}{=} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{w-z} dw =$$

$$= \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z} dw \overset{prop\,60}{=} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot 2\pi i$$

O sea, que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

□

Teorema 62. ***Teorema de Taylor***
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Sea $\rho_a = dist(a, \mathbb{C} - \Omega) = \inf\{|z-a| : z \in \mathbb{C} - \Omega\}$. ($\rho_a = \infty$ si $\Omega = \mathbb{C}$)
Para $0 < R < \rho_a$ definamos

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Entonces $\forall z \in D(a, \rho_a)$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

En consecuencia la función f es analítica en Ω y

$$f^{n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde la integral no depende de R.

Demostración. ¿$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ en $D(a,R)\subset\Omega$ con $0<R<\rho_a$?

$\overline{D}(a,R)\subset\Omega$, así, por la fórmula de Cauchy para un disco:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad z\in D(a,R)$$

Tomamos z fijo.

$$\frac{f(w)}{w-z}=\frac{f(w)}{w-a-(z-a)}=\frac{f(w)}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\overset{\frac{|z-a|}{|w-a|}<1}{=}\frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-a}{w-a})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

Sea ahora $k=\max\{|f(w)|:w\in C(a,R)^*\}\implies \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}}|z-a|^n\overset{|w-a|=R}{\leq}\frac{k}{R}(\frac{|z-a|}{R})^n=\alpha_n, \forall w\in C(a,R)^*$

Como la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{|z-a|}{R})^n$$

es convergente por ser una serie geométrica de razón menor que 1, entonces el criterio de Weierstrass asegura que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

converge uniformemente en $C(a,R)^*$ (la hemos acotado por una serie convergente). Por tanto, podemos permutar la suma con la integral:

$$f(z)\overset{Cauchy\,para\,discos}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n)dw=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw)(z-a)^n$$

Así, escribimos $f(z)$ como serie de potencias, pues z era fijo y arbitrario en $D(a,R)$. Además,

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

Y así

$$f^{n)}(a)=n!c_n=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

□

Corolario 63. *Si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es indefinidamente derivable.*
Más aún, si $a\in\Omega$, entonces

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

tiene radio de convergencia $R\geq sup\{r>0:\overline{D}(a,r)\subset\Omega\}$
En particular, si f es entera, entonces $R=\infty$

Teorema 64. ***Teorema de Morera***
Sea $f \in C(\Omega)$, son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
2. $\forall \Delta(a,b,c) \subset \Omega \implies \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$

Demostración. **1. $\implies$ 2.** Teorema de Cauchy-Goursat
2. $\implies$ 1. Sea $\alpha \in \Omega$,¿$\exists f'(\alpha)$?
Sea $r > 0 / D(\alpha, r) \subset \Omega$. Entonces $\forall \Delta(a,b,c) \subset D(\alpha,r) \implies \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$
La función

$$F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(z)dz$$

es una primitiva de f en $D(\alpha,r)$ por el teorema de Cauchy para dominios estrellados. Como $F \in \mathcal{H}(D(\alpha,r)) \implies F$ es indefinidamente derivable $\implies F' = f$ es derivable en $D(\alpha,r)$, en particular, $\exists f'(\alpha)$, pero α lo hemos tomado arbitrariamente de Ω. □

Corolario 65. *Sea $f \in C(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{\alpha\})$, $\alpha \in \Omega \implies f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

Demostración. Por el teorema de Cauchy-Goursat light tenemos el segundo punto del teorema de Morera, lo que es equivalente a que f sea holomorfa en Ω. □

3.3. Consecuencias

Corolario 66. ***Desigualdades de Cauchy***
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Entonces

$$|f^{n)}(a)| \leq n! \frac{M_r}{r^n}$$

Donde $M_r = \text{máx}_{z \in C(a,r)^*} |f(z)|$

Demostración.

$$\frac{f^{n)}(a)}{n!} \overset{Trm\,Taylor}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+re^{it})rie^{it}}{(re^{it})^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+re^{it})}{(re^{it})^n} dw$$

Entonces

$$|\frac{f^{n)}(a)}{n!}| \overset{|re^{it}|=r}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(a+re^{it})|}{r^n} dt \overset{|f(a+re^{it})| \leq M_r}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_r}{r^n} dt = \frac{M_r}{r^n}$$

Y, así

$$|f^{n)}(a)| \leq n! \frac{M_r}{r^n}$$

□

Corolario 67. ***Teorema de Liouville***
Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Supongamos f acotada, entonces f es constante.

Demostración. Podemos escribir f como serie de potencias centrada en el origen, con radio $R = \infty$ por ser f entera.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad c_n = \frac{f^{n)}(0)}{n!}$$

¿$c_n = 0, \forall n \geq 1$? $\iff f^{n)}(0) = 0, \forall n \geq 1$
Sea $M > 0 : f(z) \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$

$$|f^{n)}(0)| \overset{desigualdad\, Cauchy}{\leq} n! \frac{M_r}{r^n} \leq n! \frac{M}{r^n}$$

Pero esto ocurre $\forall r > 0$, y el límite de esto, fijado $n \geq 1$, cuando hacemos tender $r \to \infty$ es 0. Así

$$|f^{n)}(0)| = 0, \forall n \geq 1 \implies f^{n)}(0) = 0, \forall n \geq 1$$

Y, por lo tanto, tenemos que

$$f(z) = c_0$$

□

Corolario 68. ***Teorema fundamental del álgebra***
Sea $P(z)$ un polinomio de grado ≥ 1. Entonces, $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$

Demostración. Supongamos $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Entonces podemos definir

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

y se tiene que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pues el denominador nunca se anula.
Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{z \to \infty} P(z) = \lim_{z \to \infty} (a_n z^n + ... + a_1 z + a_0) \overset{a_n \neq 0}{=} \infty \implies \lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

Vamos a ver que f es acotada.
Por ser el límite en el infinito igual a 0, tenemos que $\exists R_0 : \forall z / |z| > R_0 \implies |f(z)| \leq 1$.
Además, $\exists M > 0 : |f(z)| < M, \forall z \in \overline{D}(0, R_0)$, por ser f continua sobre un compacto (alcanza su máximo).
Así

$$|f(z)| \leq \max\{1, M\}, \forall z \in \mathbb{C}$$

Entonces, por el Teorema de Liouville, tenemos que f ha de ser constante, o sea

$$k = f(z) = \frac{1}{P(z)} \overset{k \neq 0, pues\ \frac{1}{P(z)} \neq 0}{\implies} P(z) = \frac{1}{k} \#$$

Esto es una contradicción, pues $P(z)$ no es un polinomio de grado 0 □

Corolario 69. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si f no es constante, entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$*

Demostración. Supongamos $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C} \implies \exists a \in \mathbb{C}, r > 0 : D(a,r) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$

Consideremos $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ que es entera pues f lo es y $f(z) \neq a, \forall z \in \mathbb{C}$

Además $|f(z) - a| \geq r, \forall z \in \mathbb{C} \implies |g(z)| \leq \frac{1}{r}$

Así, g es entera y acotada, por el trm de Liouville podemos asegurar que es constante

$$g(z) = c \neq 0 \implies \frac{1}{f(z) - a} = c \implies f(z) = \frac{1}{c} + a\#$$

Pero esto es una contradicción, pues f no es constante. □

Corolario 70. ***Teorema de extensión de Riemann***
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $a \in \Omega$. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$. Entonces, son equivalentes:

1. f se puede extender a una función holomorfa en Ω. O sea, $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z), \forall z \neq a$
2. f se puede extender a una función continua en Ω. O sea, $\exists g \in C(\Omega) : g(z) = f(z), \forall z \neq a$
3. f está acotada en un entorno de a. O sea, $\exists \varepsilon > 0, M > 0 : |f(z)| \leq M, \forall z \in D(a, \varepsilon)$
4. $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$

Demostración. 1. $\implies$ 2. $\implies$ 3. $\implies$ 4. son inmediatas

Veamos 4. $\implies$ 1.

Sea $h(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & z \in \Omega - \{a\} \\ 0 & z = a \end{cases}$, por la hipótesis, $h \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$ y $h \in C(\Omega)$. Así, por el corolario del teorema de Morera (corolario 65), tenemos que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ y entonces podemos escribir h como serie de potencias alrededor de a por el teorema de Taylor

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in D(a, r)$$

Donde $c_0 = h(a) = 0$, entonces

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} = (z-a) \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n$$

Llamamos

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n$$

Entonces,

$$(z-a)f(z) = (z-a)g_1(z), \forall z \in D(a,r) - \{a\} \implies f(z) = g_1(z), \forall z \in D(a,r) - \{a\}$$

Por último, haciendo

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega - \{a\} \\ g_1(a) = c_1 & z = a \end{cases}$$

Tenemos una extensión holomorfa de f. □

Corolario 71. ***Teorema de convergencia de Weierstrass***
Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, *sea* $f \in C(\Omega)$. *Supongamos*

$$f_n \overset{unif\ sobre\ compactos}{\rightarrow} f$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $f_n^{k)} \overset{unif\ sobre\ compactos}{\rightarrow} f^{k)}$

Demostración. Sea $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$, ¿tendremos que $\int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$? Si así fuera, por el teorema de Morera obtendríamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Ahora bien, como $k = [a,b,c,a]^*$ es compacto, tenemos que

$$f_n \in \mathcal{H}(\Omega) \implies \int_{[a,b,c,a]} f_n dz = 0 \implies \int_{[a,b,c,a]} f_n dz \to \int_{[a,b,c,a]} f dz = 0$$

Y tenemos la primera de las afirmaciones.
Ahora, sea $K \subset \Omega$ compacto, ¿$f_{n|K}^{k)} \overset{unif}{\rightarrow} f_{|K}^{k)}$?
Sea $\varepsilon > 0$, ¿$\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \implies |f_n^{k)}(z) - f^{k)}(z)| \leq \varepsilon, \forall z \in K$?
Sea

$$r = \frac{d(K, \mathbb{C} - \Omega)}{2} > 0$$

Sea ahora $K_r = \{z \in \mathbb{C} : d(z,K) \leq r\} \subset \Omega$, tenemos que K_r es compacto
Como $f_{n|K_r} \overset{unif}{\rightarrow} f_{|K_r} \implies \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \forall z \in K_r$
Sea $a \in K \implies \overline{D}(a,r) \subset K_r$, entonces

$$|(f_n - f)^{k)}(a)| \overset{desig\,Cauchy}{\leq} k!\frac{M_r}{r^k} \leq \varepsilon\frac{k!}{r^k}$$

Donde $M_r = \text{máx}\{|(f_n - f)(z)| : z \in C(a,r)^*\} \leq \varepsilon$
Como a es arbitrario, queda demostrado. □

Corolario 72. *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *con* Ω *dominio. Definimos*

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

Son equivalentes:

1. $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$, o sea, $Z(f)$ tiene al menos un punto de acumulación en Ω
2. $\exists a \in \Omega : f^{n)}(a) = 0, \forall n \geq 0$
3. $f \equiv 0$

Demostración. 3. $\implies$ 1. Trivial

1. $\implies$ 2. Vamos a verlo por inducción.

Para $n = 0$, sea $a \in \Omega$ tal que $\exists (z_n)_{n=1}^{\infty} \subset Z(f)$ con $z_n \neq a$ y $z_n \to a$. Entonces $f(z_n) \to f(a)$ pues f es continua, pero $f(z_n) = 0, \forall n \implies f(a) = 0$.

Supongamos que $f^{n)}(a) = 0, \forall n < k$, entonces, por el teorema de Taylor:

$$\forall z \in D(a,r) \subset \Omega, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \overset{hip\,inducción}{=} \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k} =$$

$$= (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$$

Y llamamos ahora

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$$

que es holomorfa por ser una serie de potencias en el disco $D(a,r)$.
Así, se tiene que

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \forall z \in D(a,r), g \in \mathcal{H}(D(a,r))$$

Entonces, tenemos que

$$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k g(z_n) \overset{z_n - a \neq 0}{\Longrightarrow} g(z_n) = 0 \overset{g\,cta}{\Longrightarrow} g(a) = 0$$

Pero $g(a) = c_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!} = 0 \implies f^{k)}(a) = 0$, como queríamos demostrar.
2. $\implies$ 3. Como podemos escribir f como serie de potencias alrededor de a, entonces tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0, \forall z \in D(a,r)$$

Así, f es nula al menos en un disco alrededor de a.
Sea

$$A = \{z \in \Omega : f^{n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$$

$A \neq \emptyset$: pues $a \in A$ por hipótesis
A es abierto: sea $z_0 \in A$, por el teorema de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \forall z \in D(z_0,r) \implies f(z) = 0, \forall z \in D(z_0,r) \implies$$

$$\implies f^{n)}(z) = 0, \forall n, \forall z \in D(z_0,r) \implies D(z_0,r) \subset A$$

A es cerrado: podemos escribir

$$A = \cap_{n=0}^{\infty}(f^{n)})^{-1}(\{0\})$$

Donde $(f^{n)})^{-1}(\{0\})$ es cerrado por ser preimagen continua de un cerrado. Por tanto, podemos expresar A como intersección numerable de cerrados, lo que implica que A es cerrado.

Así, $A \neq \emptyset$, cerrado y abierto, $A \subset \Omega$ dominio $\implies A = \Omega \implies f(z) = 0, \forall z \in \Omega$ □

Corolario 73. ***Principio de identidad***
Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω dominio.
Si el conjunto de puntos donde f y g son iguales se acumula en Ω, entonces

$$f \equiv g$$

Demostración. Basta aplicar el corolario anterior a $f - g$ □

Definición 74. Orden de un cero
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω dominio. Sea $a \in \Omega / f(a) = 0$.
Supongamos que $f \neq 0$
Sea $k_a = \text{mín}\{n \geq 1 : f^{n)}(a) \neq 0\} \geq 1$
Llamamos a k_a **orden de a para f**

Corolario 75. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω dominio y $f(a) = 0$. Son equivalentes:*

1. El orden de a es un cierto $k \geq 1$
2. $f(z) = (z-a)^k g(z)$ con $g \in \mathcal{H}(\Omega), g(a) \neq 0$

Demostración. 2. $\implies$ 1.

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \overset{Taylor}{=} (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_{n-k}(z-a)^n, \forall z \in D(a,r)$$

Hemos encontrado, entonces, un desarrollo en serie de f, empezando en $n = k \implies c_0 = g(a) \neq 0$ es el primer término no nulo, y es el $k-$*ésimo.*

1. $\implies$ 2.

Si el orden de a para f es $k \geq 1$, por el teorema de Taylor, queda que, $\forall z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^{n+k} = (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$$

Si llamamos $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$, entonces

$$f(z) = (z-a)^k g_1(z), \forall z \in D(a,r) \text{ y } g_1 \in \mathcal{H}(D(a,r))$$

Sea

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^k} & z \in \Omega - \{a\} \\ g_1(a) = c_k \neq 0 & z = a \end{cases}$$

Entonces, como $z-a$ no se anula y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, y además $\frac{f(z)}{(z-a)^k} = g_1(z), \forall z \in D(a,r)$, tenemos que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \quad \forall z \in \Omega - \{a\}$$

Pero sabemos que $f(a) = 0$, y también $(a-a)^k g(z) = 0$. Por tanto tenemos la igualdad en todo Ω $\square$

4. Versión general del teorema de Cauchy

4.1. Índice de un punto respecto de una curva cerrada

Proposición 76. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ una curva ($\gamma \in C([a,b])$). Entonces existe un argumento continuo de γ.*
Es decir, $\exists \theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\theta(t) \in Arg(\gamma(t)), \forall t \in [a,b]$.
Más aún, $\theta(b) - \theta(a)$ no depende de θ.

Demostración. Sea $\varepsilon = dist(\gamma^*, 0) > 0$, como γ es una función continua definida en un compacto, es uniformemente continua, y así, $\exists \delta > 0 : t, t' \in [a,b] / |t - t'| < \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(t')| < \varepsilon$

Podemos tomar $\delta = \frac{b-a}{k}$ con $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Sean ahora $a = t_0, t_1 = t_0 + \delta, ..., t_k = t_0 + k\delta = b$ y consideremos $D(\gamma(t_j), \varepsilon) \subset \mathbb{C}^*, \forall j = 0, ..., k-1$

Entonces $\frac{1}{z} \in \mathcal{H}(D(\gamma(t_j), \varepsilon))$ y tiene primitiva, pues es un dominio estrellado (teorema de Cauchy para dominios estrellados). Esto equivale a que exista un logaritmo continuo de la identidad en $D(\gamma(t_j), \varepsilon)$ (Prop 28) y esto, a su vez, implica que $\exists \mu_j \in C(D(\gamma(t_j), \varepsilon))$ tal que $\mu_j(z) \in Arg z, \forall z \in D(\gamma(t_j), \varepsilon)$.

Así, podemos definir

$$\theta_j : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{R}, \forall j = 0, ..., k-1 / \theta_j(t) = \mu_j(\gamma(t))$$

Que son todos argumentos continuos de cada uno de los subintervalos de la partición que hemos fabricado. Ahora nos interesa 'pegarlos' para conseguir un argumento continuo de todo el intervalo, sin embargo, esto no es necesariamente posible de hacer directamente. Para hacerlo, consideramos:

$$\theta_j(t_{j+1}) - \theta_{j+1}(t_{j+1}) \stackrel{*}{=} 2\pi m_j,\ m_j \in \mathbb{Z}$$

* Esta igualdad se debe a que $\theta_j(t_{j+1}), \theta_{j+1}(t_{j+1}) \in Arg(\gamma(t_{j+1}))$ y a la proposición 30.

Ahora definimos

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_0(t) & t \in [t_0, t_1] \\ \theta_1(t) + 2\pi m_1 & t \in [t_1, t_2] \\ \theta_2(t) + 2\pi(m_1 + m_2) & t \in [t_2, t_3] \\ ... & ... \\ \theta_{k-1}(t) + 2\pi \sum_{j=1}^{k-1} m_j & t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}$$

Que es continua y $\theta(t) \in Arg(\gamma(t)), \forall t \in [a,b]$.

Para la última afirmación, sean $\theta, \overline{\theta}$ dos argumentos continuos de γ. Entonces

$$\theta(t) - \overline{\theta}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}, \forall t \in [a,b]$$

Entonces como $(\theta - \overline{\theta})([a,b])$ es conexo, ha de ser $\theta(t) - \overline{\theta}(t) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \forall t \in [a,b]$

Y así:

$$\theta(b) - \theta(a) = \overline{\theta}(b) + 2k\pi - \overline{\theta}(a) - 2k\pi = \overline{\theta}(b) - \overline{\theta}(a)$$

□

Ahora, dada una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ cerrada y $z \notin \gamma^*$, podemos considerar la curva $\gamma(t) - z$, que no pasa por el origen y, por tanto, es susceptible para aplicarle el resultado anterior. Definimos, así:

$$\theta : [a,b] \to \mathbb{R} / t \hookrightarrow \theta(t) \in Arg(\gamma(t) - z)$$

Y definimos el **índice de z respecto a γ** como

$$Ind_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Proposición 77. *La función $Ind_\gamma(z) : \mathbb{C} - \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es continua.*
Por tanto, constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma^*$.
En particular

$$Ind_\gamma(z) = 0, \forall z \in \Omega_\infty$$

Donde Ω_∞ es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} - \gamma^*$

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C} - \gamma^*$, $r = d(z_0, \gamma^*) > 0$. ¿$Ind_\gamma(z) = Ind_\gamma(z_0), \forall z \in D(z_0, r)$? Si demostrásemos esto, tendríamos que la función es localmente constante en cada componente conexa y, por lo tanto, continua en cada una de estas componentes.

Se tiene que $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} - \gamma^*$ y podemos hacer

$$\gamma(t) - z = (\gamma(t) - z_0)\frac{\gamma(t) - z}{\gamma(t) - z_0}$$

Ahora bien, como la suma de los argumentos pertenece al argumento del producto, si tuviéramos

$$\begin{cases} \theta_1(t) \in Arg(\gamma(t) - z_0) \\ \theta_2(t) \in Arg(\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}) \end{cases} \implies \theta_1(t) + \theta_2(t) \in Arg(\gamma(t) - z)$$

Sea $\theta_1 : [a, b] \to \mathbb{R} / \theta_1(t) \in Arg(\gamma(t) - z_0)$, que existe por la proposición anterior.
Nótese que $\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}$ es una curva cerrada. Pues $\frac{\gamma(b)-z}{\gamma(b)-z_0} = \frac{\gamma(a)-z}{\gamma(a)-z_0}$.

$$\left|\frac{\gamma(t) - z}{\gamma(t) - z_0} - 1\right| = \left|\frac{\gamma(t) - z - \gamma(t) + z_0}{\gamma(t) - z_0}\right| = \left|\frac{z_0 - z}{\gamma(t) - z_0}\right| < \frac{r}{r} = 1$$

Así que $\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0} \in D(1, 1)$ y no interseca a $\mathbb{R}_0^-$.
Entonces hacemos $\theta_2(t) = arg\left(\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}\right)$, que es continuo por ser el argumento principal en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$.
Y así

$$\theta(t) = (\theta_1 + \theta_2)(t) = \theta_1(t) + arg\left(\frac{\gamma(t) - z}{\gamma(t) - z_0}\right)$$

es argumento de $\gamma(t) - z$.
E

$$Ind_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{\theta_1(b) + arg\left(\frac{\gamma(b)-z}{\gamma(b)-z_0}\right) - \theta_1(a) - arg\left(\frac{\gamma(a)-z}{\gamma(a)-z_0}\right)}{2\pi} = \frac{\theta_1(b) - \theta_1(a)}{2\pi} = Ind\gamma(z_0)$$

Y, efectivamente, $Ind\gamma$ es localmente constante, como queríamos ver. Veamos ahora la última afirmación.

Si $\gamma^* \subset \overline{D}(0, R)$ sea $\Omega = \{z : |z| > R\}$, entonces $\Omega \subset \mathbb{C} - \gamma^*$ y $\Omega \subset \Omega_\infty$. ¿$\exists z_0 \in \Omega_\infty : Ind_\gamma(z_0) = 0$?
Sea $z_0 : Re z_0 < -R \implies Re(-z_0) > R$, entonces

$$Re(\gamma(t) - z_0) = Re(\gamma(t)) + Re(-z_0) \overset{Re(\gamma(t)) \geq -R; Re(-z_0) > R}{>} 0$$

Y, así

$$(\gamma(t) - z_0)^* \subset \mathbb{C} - \{z : Re(z) \leq 0\}$$

donde el argumento principal es continuo, y podemos tomar $\theta(t) = arg(\gamma(t) - z_0)$, así:

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{arg(\gamma(b) - z_0) - arg(\gamma(a) - z_0)}{2\pi} \overset{\gamma\, cerrada}{=} \frac{0}{2\pi} = 0$$

□

Proposición 78. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado. Sea $z \notin \gamma^*$. Entonces*

$$\int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i \cdot Ind_\gamma(z)$$

Demostración. Sea $a = a_0 < a_1 < ... < a_k = b$ una partición tal que γ es C^1 en cada subintervalo. Sea también $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}/\theta(t) \in Arg(\gamma(t) - z)$, un argumento continuo de $\gamma - z$. Entonces la función

$$L(t) = log|\gamma(t) - z| + i\theta(t)$$

es un logaritmo continuo de $\gamma - z$. Por la proposición 28, como $\gamma - z$ es derivable, tenemos que $L(t)$ es derivable y $L'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$. Así:

$$\int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} L'(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} [L(t)]_{a_j}^{a_{j+1}} = L(b) - L(a) =$$

$$= log|\gamma(b) - z| + i\theta(b) - log|\gamma(a) - z| - i\theta(a) \overset{\gamma(b) = \gamma(a)}{=} i(\theta(b) - \theta(a)) \overset{Ind_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}}{=} i \cdot 2\pi \cdot Ind_\gamma(z)$$

□

4.2. Versión general del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy

Definición 79. Sean $\{\gamma_j\}_{j=1}^k$ caminos y $\{m_j\}_{j=1}^k$ enteros.
Definimos una **cadena** como

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$$

Cuando los caminos son cerrados, se denomina **ciclo**.
Se denomina **soporte** a

$$\Gamma^* = \cup_{j=1}^k \gamma_j^*$$

Definición 80. Sea $f : \Gamma^* \to \mathbb{C}$ continua, definimos la **integral sobre la cadena** como

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

Y su **longitud** como

$$l(\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} |m_j| l(\gamma_j)$$

Y se tendrá que

$$|\int_\Gamma f(z)dz| \leq M \cdot l(\Gamma)$$

Donde $M = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \Gamma^*\}$

Demostración. Veamos esta última afirmación.

Como Γ^* es una unión finita de compactos, entonces es compacto, y así, $\exists M = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \Gamma^*\}$
Entonces

$$|\int_\Gamma f(z)dz| = |\sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} f(z)dz| \leq |\sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} Mdz| = M|\sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} 1dz| =$$

$$= M|\sum_{j=1}^{k} m_j \int_a^b |\gamma_j'(t)|dt| = M|\sum_{j=1}^{k} m_j l(\gamma_j)| \leq M \cdot \sum_{j=1}^{k} |m_j| l(\gamma_j) = M \cdot l(\Gamma)$$

□

Definición 81. Suma de cadenas
Supongamos que tenemos $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} m_j\gamma_j$ y $\Sigma = \sum_{r=1}^{s} n_r\sigma_r$, podemos definir

$$\Gamma \pm \Sigma = \sum_{j=1}^{k} m_j\gamma_j \pm \sum_{r=1}^{s} n_r\sigma_r$$

$$(\Gamma \pm \Sigma)^* = (\cup_{j=1}^{k} \gamma_j^*) \cup (\cup_{r=1}^{s} \sigma_r^*)$$

También, si $f \in C(\Gamma \pm \Sigma)^*$, podemos hacer

$$\int_{\Gamma\pm\Sigma} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \pm \int_\Sigma f(z)dz$$

Definición 82. Índice de z con respecto a Γ
Si $z \notin \Gamma$, siendo Γ un ciclo, definimos el **índice de z con respecto a Γ** como

$$Ind_\Gamma(z) = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot Ind_{\gamma_j}(z)$$

Esta es una función continua en $\mathbb{C} - \Gamma^*$ y constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} - \Gamma^*$y nula en la componente conexa no acotada.
También se tiene que

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i \cdot Ind_\Gamma(z)$$

Definición 83. Nulhomólogo
Sea Ω abierto y Γ un ciclo con $\Gamma^* \subset \Omega$. Diremos que Γ es **nulhomólogo** con respecto a Ω si $Ind_\Gamma(z) = 0, \forall z \notin \Omega$

Teorema 84. ***Forma general del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy***

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, sea Γ ciclo tal que $\Gamma^* \subset \Omega$. Supongamos que Γ es nulhomólogo con respecto a Ω. Entonces

1. $$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

2. $$\forall z \in \Omega - \Gamma^*, \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i \cdot f(z) \cdot Ind_\Gamma(z)$$

Lema 85. *Lema 1 para la demostración del teorema de Cauchy*
Sea $F : \Omega \times \Gamma^* \to \mathbb{C}$, con $(z, w) \hookrightarrow F(z, w) = F_w(z)$ continua, donde Γ es un ciclo.
Entonces $g(z) = \int_\Gamma F(z, w)dw$ es continua.
Más aún, si $F_w \in \mathcal{H}(\Omega), \forall w \in \Gamma^*$, entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Lema 86. *Lema 2 para la demostración del teorema de Cauchy*
Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,se verifica que la función $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

es continua en $\Omega \times \Omega$

Demostración. Del teorema de Cauchy y su fórmula integral:

1. Es un caso particular de 2. Sea $z_0 \in \Omega - \Gamma^*$, y $g(w) = (w - z_0)f(w),\ g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces

$$0 = 2\pi \cdot i \cdot g(z_0) \cdot Ind_\Gamma(z_0) = \int_\Gamma \frac{g(w)}{w - z_0} dw = \int_\Gamma \frac{(w - z_0)f(w)}{w - z_0} dw = \int_\Gamma f(w)dw$$

2. Sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea

$$F(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(w) & w = z \end{cases}$$

que es continua por el Lema 2 para la demostración del trm de Cauchy (Lema 86).

¿Es $F_w \in \mathcal{H}(\Omega)$?

Fijado w, está claro que $F_w \in C(\Omega), F_w \in \mathcal{H}(\Omega - \{w\})$. Entonces, por el corolario 65, tenemos que $F_w \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Definimos ahora

$$g(z) = \int_\Gamma F(z,w)dw$$

que es holomorfa por el Lema 1 para la demostración del trm de Cauchy (Lema 85).

Sea ahora $\Omega_0 = \{z_0 \in \mathbb{C} - \Gamma^* : Ind_\Gamma(z) = 0\}$, que es abierto por ser la unión de las componentes conexas tales que $Ind_\Gamma(z) = 0$, que es constante en cada componente conexa. Y sea ahora

$$F_0 : \Omega_0 \times \Gamma^* \to \mathbb{C}/(z,w) \hookrightarrow F_0(z,w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

Nótese que $w - z \neq 0$, pues $w \in \Omega_0$ y $z \in \Gamma^* \implies z \notin \Omega_0$.

Definimos

$$g_0(z) = \int_\Gamma F_0(z,w)dw$$

Y notamos que $\exists R > 0/\Gamma^* \subset \overline{D}(0,R) \implies \{z : |z| > R\} \subset \Omega_\infty \subset \Omega_0$

Para continuar, sea

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & z \in \Omega \\ g_0(z) & z \in \Omega_0 \end{cases}$$

¿$\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$? Sí, pues Γ es nulhomólogo con respecto a Ω, entonces $z \notin \Omega \implies Ind_\Gamma(z) = 0 \implies z \in \Omega_0$

¿$g(z) = g_0(z), \forall z \in \Omega \cap \Omega_0$? Sí, nótese que $w - z \neq 0$ en la integral sobre Γ, pues $z \in \Omega_0 \implies z \notin \Gamma^*$, así:

$$g(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw \overset{prop\,anterior (78)}{=}$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z) \cdot 2\pi i \cdot Ind_\Gamma(z) \overset{Ind_\Gamma(z)=0}{=} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = g_0(z)$$

Y vemos como $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pues es holomorfa en $\Omega, \Omega_0, \Omega \cap \Omega_0$ y se tiene que $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$.

Ahora bien:

$$\lim_{z\to\infty} h(z) \overset{*}{=} \lim_{z\to\infty} g_0(z) = \lim_{z\to\infty} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \overset{**}{=} 0$$

*: porque g_0 está definida en la componente conexa no acotada Ω_∞

**:

$$\left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \overset{M=\max_{w\in\Gamma^*}\left|\frac{f(w)}{w-z}\right|}{\leq} M \cdot l(\Gamma) \overset{N=\max_{w\in\Gamma^*}|f(w)|}{\leq} \frac{N}{|w-z|}l(\Gamma) \overset{|w-z|\geq|z|-|w|\geq|z|-R}{\leq} \frac{N}{|z|-R}l(\Gamma)$$

que tiende a 0 cuando z tiende a infinito.

Así, h es acotada, usando un razonamiento análogo al que hicimos en el Trm Fundamental del Álgebra (corolario 68). Por tanto, por el Teorema de Liouville (corolario 67), tenemos que h es constante. Además, como h tiende a 0, ha de ser $h \equiv 0$.

Entonces

$$g(z) = 0, \forall z \in \Omega - \Gamma^*$$

O sea

$$0 = g(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \overset{razonando\,como\,arriba}{=} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \cdot 2\pi i \cdot Ind_\Gamma(z)$$

Reordenando:

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \cdot 2\pi i \cdot Ind_\Gamma(z)$$

□

Definición 87. Homológicamente conexo
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Diremos que Ω es **homológicamente conexo** si $\forall \Gamma$ ciclo tal que $\Gamma^* \subset \Omega$, se verifica que Γ es nulhomólogo respecto a Ω.

Corolario 88. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto.*

1. Ω es homológicamente conexo $\iff \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) / F' = f \overset{T.F.C}{\iff} \forall \gamma$ camino cerrado, con $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$, $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$
2. Sea γ un camino cerrado, con $\gamma^* \subset \Omega$. Entonces γ es nulhomólogo respecto a Ω $\iff$ $\int_\gamma f(z)dz = 0, \forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Demostración. Veamos cada afirmación:

1. $' \implies '$ Sea γ un camino cerrado tal que $\gamma^* \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por la hipótesis, γ es nulhomólogo con respecto a Ω, entonces, por 1. del trm de Cauchy, tenemos que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

$' \impliedby '$ Supongamos que Ω **no** es homológicamente conexo. Entonces, $\exists \Gamma = \sum_{j=1}^k m_j \gamma_j$ ciclo, tal que $\Gamma^* \subset \Omega$ y $\exists z_0 \notin \Omega / Ind_\Gamma(z_0) \neq 0 \implies \exists j_0 / Ind_{\gamma_{j_0}}(z_0) \neq 0$
Sea $f(w) = 1$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pues $z_0 \notin \Omega$. Así

$$\int_{\gamma_j} \frac{1}{w - z_0} dw = 2\pi i \cdot Ind_{\gamma_{j_0}}(z_0) \neq 0$$

Y por hipótesis sabemos que esto no es así, sino que da 0.

2. $' \implies '$ Por el teorema de Cauchy, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

$' \impliedby '$ Supongamos que γ no es nulhomólogo con respecto a Ω, entonces $\exists z_0 \notin \Omega$ tal que $Ind_\gamma(z_0) \neq 0$.
Sea $f(w) = 1, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y así

$$\int_\gamma \frac{1}{w - z_0} dw = 2\pi i \cdot Ind_\gamma(z_0) \neq 0$$

Pero por hipótesis esta integral debería dar 0, como antes. □

Teorema 89. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Son equivalentes:*

1. Ω es homológicamente conexo
2. Todas las componentes conexas de $\mathbb{C} - \Omega$ son no acotadas

Demostración. Solo vamos a ver 2. $\Longrightarrow$ 1., la otra implicación da menos juego y es muy técnica.

Sea Γ un ciclo, tal que $\Gamma^* \subset \Omega$. Sea $z_0 \notin \Omega$. ¿$Ind_\Gamma(z_0) = 0$?

Sea
$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} - \Gamma^* : Ind_\Gamma(z) = 0\}$$

La pregunta ahora es: ¿$z_0 \in \Omega_0$?

Ahora bien, si Ω_∞ es la componente de $\mathbb{C} - \Gamma^*$ no acotada, sabemos que $\Omega_\infty \subset \Omega_0$. Así que la pregunta pasa a ser: ¿$z_0 \in \Omega_\infty$? De ser así, tendríamos el resultado.

Sea C la componente conexa de $\mathbb{C} - \Omega$ que contiene a z_0. Por hipótesis, C no es acotada. Entonces

$$C \cap \Omega_\infty \neq \emptyset \overset{C \subset \mathbb{C} - \Omega \subset \mathbb{C} - \Gamma^*}{\Longrightarrow} C \subset \Omega_\infty$$

□

4.3. El teorema de los residuos

Definición 90. Puntos regulares y singulares
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$. Diremos que a es **regular con respecto a f** si f puede extenderse a una función holomorfa en Ω ($\iff$ f puede extenderse a una función continua $\iff$ f acotada en un entorno de a $\iff$ $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$)
En caso contrario, diremos que a es **singular** o una **singularidad con respecto a f**.

Definición 91. Tipos de singularidades
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$ con a una singularidad de f.
Si $\exists k \geq 1$ tal que a es regular para $(z-a)^k f(z)$ se dice que a es un **polo para f**.
Al menor k con dicha propiedad se le llama el **orden de a**.
En caso contrario, diremos que a es una **singularidad esencial**.

Definición 92. Residuo
Sea $a \in \Omega \subset \mathbb{C}, f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$, con $\overline{D}(a, \rho) \subset \Omega$
Definimos el **residuo de f en a** como

$$Res(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} f(z)dz$$

Ahora es natural hacernos la pregunta de si el residuo depende del radio del disco tomado. La respuesta, como es previsible, es que es independiente del radio elegido.

Sea $\Gamma = C(a, \rho_1) - C(a, \rho_2)$ y $\widetilde{\Omega} = \Omega - \{a\}$. ¿$\Gamma$ nulhomólogo con respecto a $\widetilde{\Omega}$?

Si así fuera, entonces

$$0 = \int_\Gamma f(z)dz = \int_{C(a,\rho_1)} f(z)dz - \int_{C(a,\rho_2)} f(z)dz$$

Y tendríamos el resultado.

Γ será nulhomólogo con respecto a $\widetilde{\Omega}$ si $Ind_{C(a,\rho_1)}(z) = Ind_{C(a,\rho_2)}(z), \forall z \notin \widetilde{\Omega}$, pues el índice de Γ será la resta de estos índices.

Para $z = a$ tenemos que $Ind_{C(a,\rho_1)}(a) = 1 = Ind_{C(a,\rho_1)}(a)$

Para $z \notin \Omega \implies z \notin \overline{D}(a,\rho_1)\, ni\, z \notin \overline{D}(a,\rho_2) \implies z$ está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} - \overline{D}(a,\rho_1) \implies$

$\implies Ind_{C(a,\rho_1)}(z) = 0 = Ind_{C(a,\rho_2)}(z)$

Y tenemos el resultado.

Vamos ahora a calcular el residuo dependiendo del tipo de punto que sea a respecto a f. Si ***a* es regular**, entonces $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega), g(z) = f(z), \forall z \neq a \implies Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} g(z)dz \overset{g\in\mathcal{H}(\Omega)}{=} 0$

Si ***a* es un polo de orden *k***, entonces $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = (z-a)^k f(z), \forall z \neq a$ donde ahora a es regular para g. Así

$$Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{g(z)}{(z-a)^k}dz \overset{trm\,Taylor}{=} \frac{g^{k-1)}(a)}{(k-1)!} =$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{g^{k-1)}(z)}{(k-1)!} = \lim_{z\to a}\frac{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-a)^k f(z))}{(k-1)!}$$

Si $\boldsymbol{k=1}$, entonces $Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

Y en el caso particular en el que $\boldsymbol{f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}}$ es una función racional, con $P(a) \neq 0$ y a es un cero simple de $Q(z)$ ($Q(a) = 0$ pero $Q'(a) \neq 0$). Entonces

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-a)g(z)} \implies Res(f,a) = \frac{P(a)}{g(a)} \overset{*}{=} \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

*

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \overset{c_0=Q(a)=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-1} =$$

$$= (z-a)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(z-a)^n$$

Y queda que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(z-a)^n$, pero $g(a) = c_1 = Q'(a)$.

Teorema 93. ***Regla de L'hôpital***
Sean f, g no identicamente nulas cerca de a, con $f, g \in \mathcal{H}(D(a,\varepsilon))$. Con $f(a) = g(a) = 0$. Entonces

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Demostración. Supongamos que a es un cero de orden $k \geq 1$ de $f \implies f(z) = (z-a)^k F(z),\ F(a) \neq 0\ y\ F \in \mathcal{H}(D(a,r))$

a cero de orden $l \geq 1$ de $g \implies g(z) = (z-a)^l G(z),\ G(a) \neq 0\ y\ F \in \mathcal{H}(D(a,r'))$

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^k}{(z-a)^l}\frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z\to a}(z-a)^{k-l}\frac{F(z)}{G(z)} = \begin{cases} 0 & k > l \\ \frac{F(a)}{G(a)} & k = l \\ \infty & k < l \end{cases}$$

Y, por otro lado

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^k F'(z)+k(z-a)^{k-1}F(z)}{(z-a)^l G'(z)+l(z-a)^{l-1}G(z)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^{k-1}}{(z-a)^{l-1}}\frac{(z-a)F'(z)+kF(z)}{(z-a)G'(z)+lG(z)} =$$

$$= \lim_{z\to a}(z-a)^{k-l}\frac{(z-a)F'(z)+kF(z)}{(z-a)G'(z)+lG(z)} \overset{*}{=} \begin{cases} 0 & k>l \\ \frac{F(a)}{G(a)} & k=l \\ \infty & k<l \end{cases}$$

*: Pues

$$\lim_{z\to a}(z-a)F'(z) = 0 = \lim_{z\to a}(z-a)G'(z)$$

Y vemos así como ambos límites coinciden. □

Teorema 94. ***Teorema de los residuos***
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ con $S' \cap \Omega = \emptyset$, donde S' es el conjunto de los puntos de acumulación de S.
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - S)$, Γ un ciclo y $\Gamma^* \subset \Omega - S$.
Supongamos que Γ es nulhomólogo con respecto a Ω. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in S} Ind_\Gamma(a)\cdot Res(f,a)$$

Demostración.

$$\exists R>0/\Gamma^* \subset \overline{D}(0,R) \implies \{z\in\mathbb{C} : |z|>R\} \subset \Omega_\infty \subset \Omega_0 = \{z\in\Omega-\Gamma^* : Ind_\Gamma(z)=0\}$$

Nótese que Ω_0 es abierto por ser unión de componentes conexas abiertas.

Sea ahora $K = \mathbb{C} - \Omega_0 \subset \Omega$ cerrado, pues Ω_0 es abierto. Además $K \subset \mathbb{C} - \Omega_\infty \subset \overline{D}(0,R)$, por lo que K es acotado. Por tanto, al ser cerrado y acotado, es compacto.

Consideremos

$$K \cap S = \{a_1, ..., a_k\} \quad finito$$

Si fuera infinito, entonces tendría un conjunto de acumulación en $K \subset \Omega$, lo que contradice que $S' \cap \Omega = \emptyset \#$

Así, si $a \in S - \{a_1,...,a_k\} \implies a \in \Omega_0 \implies Ind_\Gamma(a) = 0$.

Por ser $S'\cap\Omega = \emptyset$, podemos tomar $\varepsilon_j > 0$ tal que $\overline{D}(a_j,\varepsilon_j)\cap S = \{a_j\}, j=1,...,k$ y $\overline{D}(a_j,\varepsilon_j) \subset \Omega$.

Sea el ciclo

$$\Sigma = \sum_{j=1}^k Ind_\Gamma(a_j) C(a_j,\varepsilon_j)$$

y nótese que $\Sigma^* \subset \Omega - S$.

$$¿\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Sigma f(z)dz?$$

Por un lado,

$$\int_\Sigma f(z)dz = \sum_{j=1}^k Ind_\Gamma(a_j)\int_{C(a_j,\varepsilon_j)} f(z)dz = \sum_{j=1}^k Ind_\Gamma(a_j)\cdot Res(f,a)\cdot 2\pi i =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^k Ind_\Gamma(a_j)\cdot Res(f,a) = 2\pi i \sum_{a\in S} Ind_\Gamma(a)\cdot Res(f,a)$$

Así, si tuvieramos la igualdad por la nos preguntábamos, tendríamos el resultado.

Para ello, veamos si

$$¿\int_{\Gamma-\Sigma} f(z)dz = 0? \overset{trmCauchy(84)}{\Longleftrightarrow} \Gamma-\Sigma \text{ nulhomólogo con respecto a } \Omega-S \iff Ind_\Gamma(z) = Ind_\Sigma(z), \forall z \notin \Omega-S?$$

Ahora bien, si $z \notin \Omega - S$, hay varias posibilidades:

- $z \notin \Omega \implies Ind_\Gamma(z) = 0$ e $Ind_\Sigma(z) = 0$, pues $z \in \Omega_{\Sigma,infty}$
- $z = a_{j_0}, 1 \leq j_0 \leq k \implies \begin{cases} Ind_\Gamma(z) = Ind_\Gamma(a_{j_0}) \\ Ind_\Sigma(z) = Ind_\Sigma(a_{j_0}) = \sum_{j=1}^k Ind_\Gamma(a_j) \cdot d_j = Ind_\Gamma(a_{j_0}) \quad d_j = \begin{cases} 1 & j = j_0 \\ 0 & j \neq j_0 \end{cases} \end{cases}$
- $z \in S - \{a_1, ..., a_k\} \implies z \in S - S \cap K = S - K \implies z \notin K \implies z \in \Omega_0 \implies Ind_\Gamma(z) = 0 \overset{z\in\Omega_{\Sigma,\infty}}{=} Ind_\Sigma(z)$

Y tenemos el resultado. □