Tarea 4 - Ejercicios del Capítulo 4

Jose Antonio Lorencio Abril

4.2.7 Sea G un grupo y sean $H,\ K$ dos subgrupos finitos de G. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. **La siguiente es una relación de equivalencia en $H \times K$:**

$$(h_1, k_1) \sim (h_2, k_2) \iff h_1k_1 = h_2k_2$$

- Reflexiva:

$$(h, k) \sim (h, k) \iff hk = hk\checkmark$$

- Simétrica:

$$(h_1, k_1) \sim (h_2, k_2) \iff h_1k_1 = h_2k_2 \iff h_2k_2 = h_1k_2 \iff (h_2, k_2) \sim (h_1, k_1)\checkmark$$

- Transitiva: sean $(h_1, k_1) \sim (h_2, k_2) \sim (h_3, k_3)$, ¿será $(h_1, k_1) \sim (h_3, k_3)$?

$$\begin{cases} (h_1, k_1) \sim (h_2, k_2) \iff h_1k_1 = h_2k_2 \\ (h_2, k_2) \sim (h_3, k_3) \iff h_2k_2 = h_3k_3 \end{cases} \implies h_1k_1 = h_3k_3 \implies (h_1, k_1) \sim (h_3, k_3)\checkmark$$

2. **La clase de equivalencia que contiene a (h, k) es $\overline{(h, k)} = \left\{\left(hx, x^{-1}k\right) : x \in H \cap K\right\}$.**

'$\subset$' Como $1 \in H \cap K$, por ser ambos subgrupos, entonces (h, k) está en este conjunto. Dado un elemento relacionado con (h, k), ¿podemos escribirlo de esta forma?

Sea $(a, b) \sim (h, k) \iff hk = ab \implies \begin{cases} hkb^{-1} = a \\ a^{-1}hk = b \end{cases}$. ¿Será $a^{-1}h = \left(kb^{-1}\right)^{-1}$?

Sí, pues

$$\left(a^{-1}h\right)\left(kb^{-1}\right) = a^{-1}(hk)\,b^{-1} = a^{-1}(ab)\,b^{-1} = 1$$

Por tanto, y dado que es evidente que $a^{-1}h \in H$, tenemos que $kb^{-1} = \left(a^{-1}h\right)^{-1} \in H$, pero $kb^{-1} \in K$.

Es decir, ambos pertenecen a la intersección, y podemos escribir $(a, b) = \left(h\left(kb^{-1}\right), \left(a^{-1}h\right)k\right)$, como queríamos.

'$\supset$' Sea $x \in H \cap K$, que es un subgrupo por ser intersección de subgrupos. Por tanto, $x^{-1} \in H \cap K$. Entonces, queremos ver si

$$¿\,(h, k) \sim \left(hx, x^{-1}k\right)?$$

Pero $hxx^{-1}k = hk$, por lo que están relacionado y queda demostrado.

3. **$\overline{(h, k)} \mapsto hk$ define una biyección del conjunto cociente $\frac{H \times K}{\sim}$ a HK.**

Voy a llamar f a la aplicación. Entonces:

- Bien definida: dados $(a,b) \sim (h,k)$, ¿tendremos que $f(a,b) = f(h,k)$?

$$f(a,b) = ab = hk = f(hk) \checkmark$$

- Inyectiva: sean (a,b), (h,k) de tal forma que su imagen coincide, entonces

$$ab = f(a,b) = f(h,k) = hk \implies (a,b) \sim (h,k)$$

es decir, pertenecen a la misma clase de equivalencia ✓

- Sobreyectiva: sea $x \in HK$, ¿$\exists (h,k) \in H \times K / hk = x$? Claro, porque si $x \in HK \implies x = hk/h \in H, k \in K$, luego $f(h,k) = hk = x \checkmark$

Por tanto, f es biyectiva, como queríamos ver.

4. $\boldsymbol{|H|\,|K| = |HK|\,|H \cap K|}$

Al ser la aplicación anterior biyectiva, tenemos que $|HK| = \left|\frac{H \times K}{\sim}\right|$.

¿Podemos saber cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? Claro... dado un elemento (h,k), la clase de equivalencia tiene tantos elementos como $H \cap K$, como hemos visto en el apartado 2.

Entonces, $|HK| = \frac{|H \times K|}{|H \cap K|}$. Esto se debe a que, si $H \times K$ tiene $|H \times K|$ elementos y los agrupamos en grupos de $|H \cap K|$elementos, el conjunto resultado tendrá $\frac{|H \times K|}{|H \cap K|}$ elementos.

Ahora bien, es evidente que $|H \times K| = |H|\,|K|$, pues para cada elemento de H, podemos formar una pareja con cada elemento de K. Por tanto, queda que

$$|HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|} \implies |H|\,|K| = |HK|\,|H \cap K|$$

4.3.6 Sea N un subgrupo normal de índice n de un grupo G. Demostrar que $g^n \in N, \forall g \in G$ y dar un ejemplo que muestre que la propiedad falla si N no es normal en G.

Dado que el índice de N es n, tenemos que $g^n(N) = (gN)^n = 1\,(N)$, por el corolario 4.20. O sea, que

$$g^n \equiv 1 \; modN \iff g^n \in N$$

Para el contraejemplo, debe ser un grupo no abeliano. Tras probar con varias cosas, me he dado cuenta de las permutaciones sirven.

Consideremos S_3, y sabemos que $|S_3| = 3! = 6$.

Tomando a la permutación identidad y $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $\langle b \rangle = \{a, b\}$, luego el índice de $\langle b \rangle$ es 3.

Pero, haciendo $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $c^3 = c \notin \langle b \rangle$. Como queríamos.

4.5.6 Calcular el orden de cada elemento de los grupos diédricos D_n.

Por el teorema de Lagrange, el orden de los elementos debe ser divisor de $2n$.

Independientemente de n, sabemos que $|1| = 1$ y $|b| = 2$, pues $b^2 = b \cdot b = a^{\lfloor 0 \rfloor_n} b^{\lfloor 2 \rfloor_2} = 1$.

Ahora debemos ver el orden de a^i y el de $a^i b$.

Esto es equivalente a calcular k tal que $\left(a^i\right)^k = 1$, pues $\left(a^i\right)^{k+1} = \left(a^i\right)^k a^i = a^i$, y comienza de nuevo el ciclo.

Ahora bien, el orden de a es n, pues $a^n = a^{\lfloor n \rfloor_n} = 1$.

Entonces, por el Lema 4.21, sabemos que

$$k = \left|a^i\right| = \frac{|a|}{mcd\left(|a|, i\right)} = \frac{n}{mcd\left(n, i\right)}$$

Ahora, el orden de $a^i b$.
Primero calculemos $|ab|$, tenemos que $(ab)(ab) = a^{\lfloor 1-1 \rfloor_n} b^{\lfloor 2 \rfloor_2} = 1$, luego $|ab| = 2$.
Ahora bien, $\left(a^i b\right)\left(a^i b\right) = a^{\left\lfloor i+(-1)^1 i \right\rfloor_n} b^{\lfloor 2 \rfloor_2} = a^{\lfloor 0 \rfloor_n} b^{\lfloor 0 \rfloor_2} = 1$, luego $\left|a^i b\right| = 2,\ \forall i = 1, ..., n-1$.