Tarea 5: la proyección estereográfica

Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$, dada por la ecuación $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, y consideremos la proyección estereigráfica $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que aplica el punto $p=(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}\,,\ N=(0,0,2$ en la intersección del plano XY con la recta que conecta N y p. Escribamos $(u,v)=\pi(x,y,z)$.

1) Demuestre que $X=\pi^{-1} : U=\mathbb{R}^2 \to V=\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ es una parametrización de la esfera

La recta que une N con p es $N+\lambda(p-N) \equiv \begin{cases} x=\lambda a \\ y=\lambda b \\ z=2+\lambda(c-2) \end{cases}$, donde hemos hecho $p=(a,b,c)$ por mera notación.

Esta recta corta al plano XY cuando $z=0$, o sea cuando

$$2+\lambda(c-2)=0 \overset{c\neq 2}{\iff} \lambda=\frac{2}{2-c}$$

Por tanto

$$x=\frac{2a}{2-c},\ y=\frac{2b}{2-c}$$

Es decir,

$$\pi(x,y,z)=\left(\frac{2x}{2-c},\frac{2y}{2-c}\right)$$

Para obtener π^{-1}, tomamos $(u,v)\overset{i}{\mapsto}(u,v,0)$ y la recta $N+\lambda((u,v,0)-N)$, de forma que

$$\begin{cases} x=\lambda u \\ y=\lambda v \\ z=2-2\lambda \end{cases}$$

y les obligamos a estar en la circunferencia:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \iff \lambda^2u^2+\lambda v^2+(2-2\lambda-1)^2=1 \iff \lambda^2\left(u^2+v^2\right)+1-4\lambda+4\lambda^2=1$$

$$\iff \lambda^2\left(u^2+v^2+4\right)-4\lambda=0 \iff \begin{cases} \lambda=0 & \textit{No, pues obtenemos } N \\ \text{ó} & \\ \lambda\left(u^2+v^2+4\right)-4=0 \iff \lambda=\frac{4}{u^2+v^2+4} & \end{cases}$$

Por lo que

$$\pi^{-1}(u,v)=\left(\frac{4u}{u^2+v^2+4},\frac{4v}{u^2+v^2+4},\frac{2\left(u^2+v^2\right)}{u^2+v^2+4}\right)$$

Ahora vamos a ver que es una parametrización:

(S1) Tenemos que

$$\pi^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

por construcción de π^{-1}.

Además, es obviamente diferenciable $\forall u, v | u^2 + v^2 + 4 \neq 0$, pero esta igualdad es evidente que no se da nunca $\left(u^2 + v^2 + 4 \geq 4 > 0\right)$.

(S2) π continua, pues $z \neq 2$

(S3)

$$d\pi^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{4\left(u^2+v^2+4\right)-4u\cdot 2u}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{-8uv}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \\ \frac{-8uv}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{4\left(u^2+v^2+4\right)-4v\cdot 2v}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \\ \frac{4u\left(u^2+v^2+4\right)-2\left(u^2+v^2\right)2u}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{4v\left(u^2+v^2+4\right)-2\left(u^2+v^2\right)2v}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4\left(v^2-u^2+4\right)}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{-8uv}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \\ \frac{-8uv}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{4\left(u^2-v^2+4\right)}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \\ \frac{16u}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} & \frac{16v}{\left(u^2+v^2+4\right)^2} \end{pmatrix} = \frac{4}{\left(u^2+v^2+4\right)} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 + 4 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 + 4 \\ 4u & 4v \end{pmatrix}$$

Y, tenemos que

$$\begin{vmatrix} -2uv & u^2 - v^2 + 4 \\ 4u & 4v \end{vmatrix} = -8uv^2 - 4u\left(u^2 - v^2 + 4\right) = -8uv^2 - 4u^3 + 4uv^2 - 16u =$$

$$= -4u^3 - 4uv^2 - 16u = u\left(-4u^2 - 4v^2 - 16\right) = 0 \iff \begin{cases} u = 0 \\ \textit{ó} \\ 4u^2 + 4v^2 + 16 = 0 & \textit{, no puede ser} \end{cases}$$

Por lo que es inyectiva $\forall (u, v) | u \neq 0$.

Si $u = 0$, entonces

$$d\pi^{-1}(0, v) = \begin{pmatrix} v^2 + 4 & 0 \\ 0 & 4 - v^2 \\ 0 & 4v \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} v^2 + 4 & 0 \\ 0 & 4 - v^2 \end{vmatrix} = \left(v^2 + 4\right)\left(4 - v^2\right) = 0 \iff v \neq \pm 2$$

Así, es inyectiva $\forall (u, v) \neq (0, \pm 2)$.

Por último

$$d\pi^{-1}(0, \pm 2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$$

Y vemos como $d\pi^{-1}(u, v)$ es inyectiva, y π^{-1} es una parametrización de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.

2) Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización anterior.

Sea $X = \pi^{-1}$, entonces

$$X_u = \frac{4}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}\left(v^2-u^2+4, -2uv, 4u\right)$$

$$X_v = \frac{4}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}\left(-2uv, u^2-v^2+4, 4v\right)$$

Por lo que

$$E = \langle X_u, X_u\rangle = \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^4}\left(\left(v^2-u^2+4\right)^2+4u^2v^2+16u^2\right) =$$

$$= \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^4}\left(v^4+u^4+16-2v^2u^2+8v^2-8u^2+4u^2v^2+16u^2\right) =$$

$$= \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^4}\left(v^4+u^4+16+8v^2+2u^2v^2+8u^2\right) = \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^4}\left(u^2+v^2+4\right)^2 = \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}$$

Por simetría, tenemos que

$$G = \langle X_v, X_v\rangle = \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}$$

Por último

$$F = \langle X_u, X_v\rangle = \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}\left(-2uv\left(v^2-u^2+4\right)-2uv\left(u^2-v^2+4\right)+16uv\right) =$$

$$= \frac{16}{\left(u^2+v^2+4\right)^2}\left(2uv\left(-v^2+u^2-4-u^2+v^2-4+8\right)\right) = 0$$