Entrega ejercicio Temas 6 y 7

Jose Antonio Lorencio Abril

Curso 21/22

Ejercicio 3. Sea X una población con función de densidad

$$f(x,\theta) = 2\left[(2\theta-1)x + (1-\theta)\right]\chi_{(0,1)}(x)$$

con $\theta \in (0,1)$.
Para muestras de tamaño 1, obtener el test de máxima potencia y extensión α para el contraste

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta = \theta_1 \end{cases}$$

con $\theta_0 < \theta_1$.
Por el teorema de Neymann-Pearson, es

$$S_1 = \left\{ x \in (0,1) : \frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} \geq k \right\}$$

con

$$P\left(\frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} > k | \theta = \theta_0 \right) = \alpha$$

Veamos cómo es el cociente de las verosimilitudes:

$$\frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} = \frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)} = \frac{(2\theta_1-1)x + 1 - \theta_1}{(2\theta_0-1)x + 1 - \theta_0} =: g(x)$$

Calculamos la derivada de $g(x)$, para estudiar su comportamiento:

$$g'(x) = \frac{(2\theta_1-1)\left[(2\theta_0-1)x+1-\theta_0\right] - \left[(2\theta_1-1)x+1-\theta_1\right](2\theta_0-1)}{\left[(2\theta_0-1)x+1-\theta_0\right]^2} =$$

$$= \frac{4\theta_1\theta_0 x - 2\theta_1 x + 2\theta_1 - 2\theta_1\theta_0 - 2\theta_0 x + x - 1 + \theta_0 - 4\theta_1\theta_0 x + 2\theta_1 x + 2\theta_0 x - x - 2\theta_0 + 1 + 2\theta_1\theta_0 - \theta_1}{\left[(2\theta_0-1)x+1-\theta_0\right]^2} =$$

$$= \frac{\theta_1 - \theta_0}{\left[(2\theta_0-1)x+1-\theta_0\right]^2} \overset{\theta_0<\theta_1}{>} 0$$

Por tanto, g es estrictamente monótona creciente en x y $g(x) \geq k \iff x \geq g^{-1}(k) = c$. Calculemos c:

$$g(c) = k \iff \frac{(2\theta_1-1)c + 1 - \theta_1}{(2\theta_0-1)c + 1 - \theta_0} = k \iff (2\theta_1-1)c + 1 - \theta_1 = k(2\theta_0-1)c + k - k\theta_0 \iff$$

$$\iff c(2\theta_1 - 1 - 2k\theta_0 + k) = k - k\theta_0 - 1 + \theta_1 \iff c = \frac{k - k\theta_0 - 1 + \theta_1}{2\theta_1 - 1 - 2k\theta_0 + k}$$

Por tanto, queda

$$S_1 = \{x \in (0,1) : x \geq c\}$$

con

$$P\left(x > c | \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

O, lo que es lo mismo:

$$P\left(x < c | \theta = \theta_0\right) = 1 - \alpha$$

O sea

$$1 - \alpha = \int_0^c 2\left[(2\theta_0 - 1)x + 1 - \theta_0\right] dx = 2\left[(2\theta_0 - 1)\frac{x^2}{2} + 2(1 - \theta_0)x\right]_0^c = (2\theta_0 - 1)c^2 + 2(1 - \theta_0)c$$

Esto se da si, y solo si,

$$(2\theta_0 - 1)c^2 + 2(1 - \theta_0)c + \alpha - 1 = 0$$

Donde, además, queremos que $c \in (0,1)$ puesto que $x \in (0,1)$ y la probabilidad tanto de que sea menor, como mayor, son no nulas.
Tenemos, ahora, que distinguir casos:

- $\theta_0 = \frac{1}{2}$: nos queda

$$2\left(\frac{1}{2}\right)c + \alpha - 1 = 0 \iff c = 1 - \alpha \in (0,1)$$

- $\theta_0 \neq \frac{1}{2}$: en esta ocasión tenemos que resolver la ecuación de segundo grado anterior, obteniendo

$$c = \frac{\theta_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)}}{2\theta_0 - 1}$$

  y vamos a necesitar distinguir casos, de nuevo:

  - $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$: se tiene en este caso $2\theta_0 - 1 < 0$ y queremos que $\theta_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)} < 0$. Si tomamos la raíz positiva, obtenemos que

$$\theta_0 - 1 + \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)} < 0 \iff \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)} < 1 - \theta_0$$

    y, como ambos lados son positivos, esto es equivalente a

$$(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1) < (1 - \theta_0)^2 \iff (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1) < 0$$

    lo cual es cierto, pues $(1 - \alpha) > 0$ y $(2\theta_0 - 1) < 0$. Por tanto, $c_+ > 0$.
    Veamos que también es menor que 1:

$$\frac{\theta_0 - 1 + \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)}}{2\theta_0 - 1} < 1 \iff \theta_0 - 1 + \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)} > 2\theta_0 - 1$$

$$\iff \sqrt{(1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1)} > \theta_0 \iff (1 - \theta_0)^2 + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1) > \theta_0^2 \iff$$
$$\iff (1 - 2\theta_0) + (1 - \alpha)(2\theta_0 - 1) > 0 \iff \alpha(2\theta_0 - 1) < 0$$

    y esto se verifica, pues $\alpha > 0$ y $(2\theta_0 - 1) < 0$. Por tanto, $0 < c_+ < 1$ y este nos sirve.

Si tomamos la raíz negativa, c_-, tenemos que es positiva, pues $\theta_0 - 1 < 0$ y le restamos la raíz. No obstante, no es menor que 1, puesto que es

$$\frac{\theta_0 - 1 - \sqrt{(1-\theta_0)^2 + (1-\alpha)(2\theta_0 - 1)}}{2\theta_0 - 1} < 1 \iff \theta_0 - 1 - \sqrt{(1-\theta_0)^2 + (1-\alpha)(2\theta_0 - 1)} > 2\theta_0 - 1$$

$$\iff -\sqrt{(1-\theta_0)^2 + (1-\alpha)(2\theta_0 - 1)} > \theta_0$$

pero la parte izquierda es negativa, y la derecha es positiva. Así, c_- no sirve.

- $\frac{1}{2} < \theta_0 < 1$: en esta ocasión, el denominador es positivo, $2\theta_0 - 1 > 0$, y queremos que también lo sea el numerador. c_- está claro que no sirve, pues es negativo. Al estudiar qué sucede con c_+, siguiendo el razonamiento aplicado antes, llegamos a que el numerador es positivo si, y solo si,

$$(1-\alpha)(2\theta_0 - 1) > 0$$

lo cual es cierto pues ambos factores son positivos. Falta ver que $c_+ < 1$. En esta ocasión, obtenemos que lo será si, y solo si,

$$\alpha(2\theta_0 - 1) > 0$$

y esto se verifica.

Por tanto, tenemos el siguiente **criterio de decisión**, dada una muestra aleatoria simple de tamaño 1, x, distinguimos los siguientes casos:

- Si $\theta_0 = \frac{1}{2}$, entonces:
  - Si $x \geq 1 - \alpha$, rechazamos H_0
  - Si $x < 1 - \alpha$, aceptamos H_0
- Si $\theta_0 \neq \frac{1}{2}$, entonces:
  - Si $x \geq c_+$, rechazamos H_0
  - Si $x < c_+$, aceptamos H_0

  Donde $c_+ = \frac{\theta_0 - 1 + \sqrt{(1-\theta_0)^2 + (1-\alpha)(2\theta_0 - 1)}}{2\theta_0 - 1}$.

Ejercicio 4. Sea X una población con función de densidad

$$f(x,\theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} \chi_{(0,1)}(x)$$

con $\theta > 0$.
Se considera una m.a.s. de tamaño n de X.

a) Estudiar, aplicando la definición, si X tiene cociente de verosimilitud monótono en el estadístico.

$$L(\boldsymbol{x},\theta) = \theta^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \exp\left\{\frac{n}{2}\log\theta + \left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right\}$$

y el estadístico $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$ parece una buena opción.

$$\frac{L(\boldsymbol{x},\theta_1)}{L(\boldsymbol{x},\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\exp\left\{\left(\sqrt{\theta_1}-1\right)\sum_1^n \log x_i\right\}}{\exp\left\{\left(\sqrt{\theta_0}-1\right)\sum_1^n \log x_i\right\}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{\left(\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_0}\right)\sum_1^n \log x_i\right\}$$

y definimos $g(r) = \exp\left\{\left(\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_0}\right) r\right\}$, de forma que X tendrá cociente de verosimilitud monótono en el estadístico T si $g(r)$ es creciente.

$$g'(r) = \left(\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_0}\right)\exp\left\{\left(\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_0}\right) r\right\}$$

que es positivo, puesto que $\theta_1 > \theta_0$, la raíz es una función creciente, y la exponencial es positiva. Por tanto, $g(r)$ es creciente y tenemos que, efectivamente, X tiene cociente de verosimilitud monótono en el estadístico $T(\boldsymbol{X}) = \sum_1^n \log X_i$.

b) Obtener, si existe, el test uniforme de máxima potencia para el contraste

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Por el teorema 1 del capítulo 7, es

$$S_1 = \left\{\boldsymbol{x} \in (0,1)^n : \sum_1^n \log x_i > c\right\}$$

con

$$P\left(\sum_1^n \log x_i > c | \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Definimos $Y = \log X$, de forma que $X = e^Y, X' = e^Y$, y entonces

$$f_Y(y) = f_X(x(y))\, x' = \sqrt{\theta} e^{y\left(\sqrt{\theta}-1\right)} e^y = \sqrt{\theta} e^{y\sqrt{\theta}}$$

Y tomamos ahora $Z = -Y$, de donde es

$$f_Z(z) = \sqrt{\theta} e^{-\sqrt{\theta} z} \sim Exp\left(\sqrt{\theta}\right)$$

Y como $T = \sum_1^n \log X_i$, entonces $R = -T = \sum_1^n Z_i$, y como hemos visto ya varias veces en el curso, se tiene que

$$R \sim \gamma\left(\sqrt{\theta}, n\right)$$

De esta forma, queda la siguiente región de rechazo

$$S_1 = \{\boldsymbol{x} \in (0,1)^n : -T < -c\} = \{\boldsymbol{x} \in (0,1)^n : R < c_1\}$$

con

$$P\left(R < c_1 | \theta = \theta_0\right) = \alpha$$

Ahora bien, se verifica que $U = 2\sqrt{\theta}T \sim \chi^2_{2n}$, y entonces esta última igualdad puede expresarse como

$$P\left(U < 2\sqrt{\theta_0}c_1\right) = \alpha$$

por lo que queda

$$c_1 = \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\sqrt{\theta_0}}$$

Y obtenemos el siguiente **criterio de decisión**, dada $x_1, ..., x_n$ una muestra aleatoria simple de X. Calculamos

$$R_{exp} = -\sum_1^n \log x_i$$

y distinguimos casos:

- $R_{exp} < \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\sqrt{\theta_0}}$: rechazamos H_0
- $R_{exp} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\sqrt{\theta_0}}$: aceptamos H_0