

1.1. Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada en una superficie regular  $S$ . Demuestra que

$$\frac{D(J\alpha')}{dt} = J \left( \frac{D\alpha'}{dt} \right).$$

$$(J\alpha')' = (N\alpha')' = N'\alpha' + N\alpha''$$

$$\frac{D(J\alpha')}{dt} = (J\alpha')' - \langle (J\alpha')', N \rangle N = N'\alpha' + N\alpha'' - \langle N'\alpha', N \rangle N$$

$$- \underbrace{\langle N\alpha'', N \rangle N}$$

$$0, N\alpha'' \perp N$$

$$\begin{aligned} \|N\| = 1 &\xrightarrow{d/dt} 2\langle N, N \rangle = 0 \rightarrow N \perp N' \\ \gamma'' \in T_{\gamma(s)}S \perp N &\rightarrow N \perp \gamma' \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} N'\alpha' \parallel N \Rightarrow \langle N'\alpha', N \rangle N \\ N\alpha'' \end{array} \right\}$$

Pero, tanto,  $\frac{D(J\alpha')}{dt} = N\alpha''$

$$J\left(\frac{D\alpha'}{dt}\right) = N\alpha'' - \underbrace{\langle \alpha'', N \rangle N}_0 = N\alpha''$$

1.2. Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada en  $S$  y sean  $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$  unitarios. Demuestra que si  $V$  es paralelo y  $W(t)$  es ortogonal a  $V(t)$  para todo  $t \in I$ , entonces  $W$  también es paralelo.

$$\langle V, W \rangle = 0 \implies \underbrace{\left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle}_{0} + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle = 0 \implies \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle = 0$$

$$\|W\| = 1 \implies \langle W, W' \rangle = 0$$

Asg,  $\frac{dW}{dt} \perp V \implies \frac{dW}{dt} = dW \quad \left\{ \begin{array}{l} d=0 \\ \text{y} \\ \frac{dW}{dt} = 0 \end{array} \right.$

pero  $\langle W, W' \rangle = \langle W, \frac{dW}{dt} \rangle$

Q

1.3. Sea  $S$  un plano de la forma  $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$  con  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario y  $c \in \mathbb{R}$ .

- Demuestra que un campo  $V \in \mathfrak{X}(S)$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$  si y sólo si es constante.
- Comprueba que si  $\alpha$  es una curva parametrizada en  $S$  con  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ , entonces  $P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  para todo  $\mathbf{v} \in T_p S$ .
- Concluye que, en un plano, el transporte paralelo no depende de la curva.

(a)

$$\boxed{\leftarrow} V \text{ de } \Rightarrow \frac{DV}{dt} = 0 \Rightarrow V \text{ paralelo}$$

$$\boxed{\rightarrow} V \text{ paralelo} \Rightarrow \frac{DV}{dt} = 0$$

$$V' = \frac{DV}{dt} + \langle V', N \rangle N = \frac{DV}{dt} - \langle V, N \rangle N$$

$$\langle V, N \rangle = 0 \rightarrow 0 = \langle V, N' \rangle = \langle V', N \rangle + \langle V, N' \rangle$$

y como  $S$  es un plano,  $N$  u de te  $\rightarrow N' = 0$

Aquí,  $V' = 0 - 0 = 0 \xrightarrow[\substack{\text{plano} \\ \text{curva}}]{} V \text{ de } \checkmark$

(b) El transporte paralelo es la solución de

$$\begin{cases} V' + \langle V, N' \rangle N = 0 \\ V(a) = v \end{cases}$$

y basta visto que  $V$  debe ser dr, luego  $\alpha$   $V(t) = v$

$$\text{y } P_\alpha(v) = v$$

(c) q/p de curva, entonces

$$P_q(v) = v = P_p(v) \quad \text{KUET}_p S$$

1.4. Sea  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$  el semi-meridiano que va del polo norte  $p = (0, 0, 1)$  al polo sur  $q = (0, 0, -1)$  dado por  $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ . Demuestra que, para  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \in T_p \mathbb{S}^2$ , se tiene  $P_\alpha(\mathbf{v}) = (-v_1, v_2, 0)$ . (Indicación: Compruébalo primero cuando  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  y cuando  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ , y utiliza después la linealidad de  $P_\alpha$ ).

$$\chi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

$$g(t) = \chi(0, t) = (\sin t, 0, \cos t)$$

$$N(t) = \chi(0, t) = (\sin t, 0, \cos t), N' = (\cos t, 0, -\sin t)$$

Noto  $v \in T_p S$ , buecaos  $V \in \mathcal{X}(g) \text{ en}$

$$\left. \begin{aligned} V' + V(N) &= 0 \\ V(0) &= v \end{aligned} \right\}$$

$N'' = (-\sin t, 0, -\cos t) \parallel N \perp N' \rightarrow N'$  es paralelo along  $g$

$$\Rightarrow \langle V, N' \rangle = \det = \lambda = \langle V(0), N'(0) \rangle = \langle V, N'(0) \rangle = \\ = \langle (v_1, v_2, 0), (1, 0, 0) \rangle = v_1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} V' + v_1 N &= 0 \\ V(0) &= v \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} (V_1, V_2, V_3) &= -v_1 (\sin t, 0, \cos t) \\ V(0) &= v \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} V_1' &= -v_1 \sin t \\ V_2' &= 0 \\ V_3' &= -v_1 \cos t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} V_1 &= v_1 \cos t + c_1 \\ V_2 &= c_2 \\ V_3 &= -v_1 \sin t + c_3 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} V(0) &= (v_1 + c_1, c_2, c_3) \\ (v_1, v_2, 0) &\\ c_1 &= 0, c_2 = v_2, c_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$V_v(t) = (v_1 \cos t, v_2, 0) \rightarrow P_g(t) = V_v(\pi) = (-v_1, v_2, 0)$$

- 1.5. Para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ , considera  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$  el semi-meridiano en la esfera que une el polo norte  $p = (0, 0, 1)$  con el polo sur  $(0, 0, -1)$  dado por  $\alpha(t) = (\cos \theta \sin t, \sin \theta \sin t, \cos t)$ . Demuestra que un campo de vectores  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  es paralelo si y sólo si verifica la siguiente ecuación diferencial (en  $\mathbb{R}^3$ )

$$\frac{dV}{dt}(t) + \lambda \alpha(t) = 0,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es la constante dada por  $\lambda = \langle V(0), \alpha'(0) \rangle$ . Resuelve la ecuación diferencial con la condición inicial  $V(0) = (1, 0, 0) \in T_p \mathbb{S}^2$  y comprueba que el transporte paralelo de  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  a lo largo de  $\alpha$  es  $P_\alpha(\mathbf{v}) = (-\cos(2\theta), \sin(2\theta), 0)$ .

$$X(\theta, t) = (\cos \theta \sin t, \sin \theta \sin t, \cos t)$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \alpha(t) = X(\theta, t)$$

$$N(t) = \alpha(t), N'(t) = N_t = (\cos \theta \cos t, \sin \theta \cos t, -\sin t) = \alpha'(t)$$

$V$  paralelo si y sólo si  $\langle V, N' \rangle = 0$

$$V' + \langle V, N' \rangle N = 0$$

$$\text{Ahora bien, } N''(t) = (-\cos \theta \sin t, -\sin \theta \sin t, -\cos t) = -N(t) / \|N(t)\|$$

$$\therefore \langle N'', N \rangle = 0$$

Por tanto,  $N'(t)$  es paralelo, por lo que, si  $V$  es paralelo entonces  $\langle V, N' \rangle = dt = \langle V(0), N'(0) \rangle = \langle V_0, \alpha'(0) \rangle = \lambda$

$$\rightarrow \boxed{V' + \lambda N = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} V_1' &= -\cos \theta \sin t \\ V_2' &= -\sin \theta \sin t \\ V_3' &= -\cos \theta \cos t \end{aligned} \right\}$$

Si  $V_0 = (1, 0, 0)$ , entonces  $\lambda = \cos \theta$  y  $\left. \begin{aligned} V_1' &= -\cos \theta \sin t \\ V_2' &= -\sin \theta \sin t \\ V_3' &= -\cos \theta \cos t \end{aligned} \right\}$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \cos^2 \theta \cos t + c_1 \\ v_2(t) &= \cos \theta \sin \theta \cos t + c_2 \\ v_3(t) &= -\cos \theta \sin t + c_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 1 = v_1(0) = \cos^2 \theta + c_1 \rightarrow c_1 = \sin^2 \theta \\ 0 = \cos \theta \sin \theta + c_2 \rightarrow c_2 = -\cos \theta \sin \theta \\ 0 = 0 + c_3 \rightarrow c_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$P_q(v) = V(\pi) = (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta, -2 \cos \theta \sin \theta, 0) = (-\cos(2\theta), -\sin(2\theta), 0)$$

**1.6.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S_1 \cap S_2$  una curva parametrizada, donde  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies regulares. Sea  $V$  un campo de vectores diferenciable a lo largo de  $\alpha$  que es tangente a ambas superficies. Supongamos que  $S_1$  y  $S_2$  son tangentes a lo largo de  $\alpha$ ; es decir,  $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$  para todo  $t \in I$ .

- Demuestra que  $V$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $S_1$  si y sólo si  $V$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $S_2$ .
- Concluye que el transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$  es el mismo para ambas superficies.

Demuestra mediante un contraejemplo que lo anterior no es cierto si  $S_1$  y  $S_2$  no son tangentes a lo largo de  $\alpha$ .

(a)  $V$  paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $S_1 \nrightarrow$

$$V' - \langle V', N_1 \rangle N_1 = 0$$

Pero  $N_1 = \pm N_2$ . Si  $N_1 = N_2$ , entonces

$$V' - \langle V', N_2 \rangle N_2 = 0$$

Si  $N_1 = -N_2$ , entonces

$$V' - \langle V', N_2 \rangle N_2 = V' + \langle V', N_1 \rangle (-N_1) = V' - \langle V', N_1 \rangle N_1 = 0$$

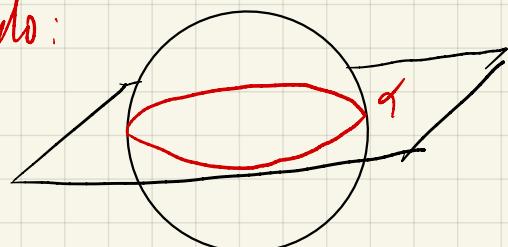
y  $V$  es paralelo along  $\alpha$  en  $S_2$ .

El reciproco es igual.

(b)  $T_\alpha S_1 = T_\alpha S_2 \rightarrow [v \in T_\alpha S_1 \Rightarrow v \in T_\alpha S_2]$

Si  $V$  es paralelo en  $S_1$  con  $V(0) = v$ , entonces  $V$  es paralelo en  $S_2$  con  $V(0) = v$ , y por la veracidad con condiciones iniciales tenemos el resultado.

Contraejemplo:

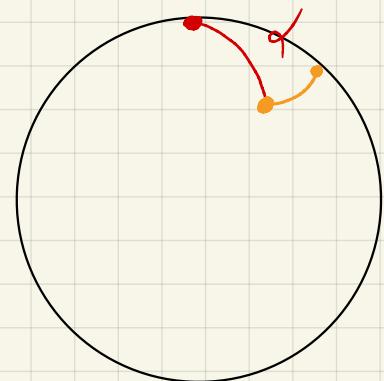


$\alpha'$  es paralelo along  $\alpha$  en  $S^2$   
pero no lo es en el plano

1.7. En la esfera  $\mathbb{S}^2$ , considera la curva  $\alpha \wedge \beta$  dada por la yuxtaposición de las curvas  $\alpha : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^2$  y  $\beta : [\pi/4, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^2$  dadas por

$$\alpha(t) = X(t, \pi/4) \quad \text{y } \beta(t) = X(\pi/2, t),$$

donde  $X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Sea  $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \in T_{\alpha(0)}\mathbb{S}^2$ . Calcula el transporte paralelo del vector  $\mathbf{v}$  a lo largo de  $\alpha \wedge \beta$  en el punto  $\beta(\pi/2) = (0, 1, 0)$ .



$$N(\theta, t) = X(\theta, t)$$

$$N_\alpha(t) = \alpha(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \cos t \right)$$

$$N'_\alpha(t) = \alpha'(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, -\cos t \right)$$

$$V^1 + \langle V, N \rangle N = 0$$

$$V(0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

1.8

$$\langle V, N' \rangle = \langle V(0), \alpha'(0) \rangle = \left\langle \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\rangle = 2 \frac{2}{4} = 1$$

$$\rightarrow V^1 = -N \rightarrow \begin{cases} V_1' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ V_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ V_3' = -\cos t \end{cases} \quad \begin{cases} V_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + C_1 \\ V_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + C_2 \\ V_3(t) = -\sin t + C_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = V_1(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = V_2(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \\ 0 = V_3(0) = C_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_\alpha(v) = V\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -1) = W(0)$$

$$N_\beta(t) = \beta(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad N'_\beta(t) = \beta'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$W^1 + \langle W, N \rangle N = 0$$

$$W(0) = (0, 0, -1)$$

$$\text{Sirve } W(t) = (0, 0, -1) \quad \text{y} \quad P_\beta(W(0)) = (0, 0, -1)$$

$$0 \text{ da, } P_{\beta \wedge \alpha}(v) = (0, 0, -1)$$

**1.8.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\alpha(t)$ , una curva parametrizada en  $S$  y sea  $\beta : J \rightarrow S$  una reparametrización de  $\alpha$  de la forma  $\beta(s) = \alpha(h(s))$  con  $h : J \rightarrow I$  un cambio de parámetro.

- a) Demuestra que si  $V(t)$  es un campo de vectores diferenciable tangente a  $S$  a lo largo de  $\alpha$  entonces el campo  $W(s) = V(h(s))$  es un campo de vectores diferenciable tangente a  $S$  a lo largo de  $\beta$  y sus derivadas covariantes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{DW}{ds}(s) = h'(s) \frac{DV}{dt}(h(s)), \quad s \in J.$$

- b) Concluye que  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$  si y sólo si el campo  $W = V \circ h \in \mathfrak{X}(\beta)$  es paralelo a lo largo de  $\beta$ .

- c) Como consecuencia, demuestra que el transporte paralelo a lo largo de una curva  $\alpha$  es independiente de la parametrización de  $\alpha$ . Es decir, si consideramos  $a, b \in I$  con  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ , y tomamos  $c, d \in J$  con  $h(c) = a$  y  $h(d) = b$ . Entonces

$$P_a^b(\alpha) = P_c^d(\beta).$$

- d) Demuestra que si  $p, q \in S$  y  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  es una curva parametrizada de  $p = \alpha(0)$  a  $q = \alpha(1)$ , el transporte paralelo de  $q$  a  $p$  a lo largo de  $\beta(s) = \alpha(1-s)$  es el inverso del transporte paralelo de  $p$  a  $q$  a lo largo de  $\alpha$ , es decir,  $P_0^1(\alpha)^{-1} = P_0^1(\beta)$ .

(a)  $W \in \mathfrak{X}(\beta)$ ?

Claramente es diferenciable.

Hay que ver que es tangente a  $\beta$ .

$$\langle W, N(\beta(s)) \rangle = \langle V(h(s)), N(\beta(h(s))) \rangle = 0 \quad \text{pues } V \perp N$$

$$\langle V(t), N(t) \rangle$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dV(h(s))}{dt} \cdot \frac{dh(s)}{ds} \rightarrow \left( \frac{dW}{ds} \right)^T = \left( \frac{dV(h(s))}{dt} \cdot h'(s) \right)^T = h'(s) \left( \frac{dV(h(s))}{dt} \right)^T$$

$$\frac{dW}{ds}$$

(b) Obvio, por ser  $h$  una bijección,  $W = V \circ h$

$$V = W \circ h^{-1}$$

(c)

$$P_c^d(\beta) = W_\beta(d) = W_\beta(h^{-1}(b)) = V_{q \circ h}(h^{-1}(b)) = V_q(b) = P_a^b(\alpha)$$

b

Y bei kontrahier. in zuläss.:  $W_{\beta_1}(c) = W$

$$V_{q \circ h}(h^{-1}(a)) = V_q(a)$$

(d)

$$\bar{q}(s) := q(1-s)$$

$$P_{0,q}^1(\vec{v}) = V(1), \quad V \text{ d. chs.}$$

$\overrightarrow{w}$   
parallel  $q/V(0) \approx \vec{v}$

$$P_0^1(\bar{q}) : T_g S \rightarrow T_p S$$

$$P_{0,\bar{q}}^1(\vec{w}) = W(1), \quad W \text{ d. zw. parallel } \bar{q}$$

$\overrightarrow{v}(0)$   
 $\overrightarrow{v}$   
T.g.  $w(0) = \vec{v}$

$$W(s) = V(1-s)$$

$$\text{An: } P_0^1(\bar{q})(P_0^1(q)(\vec{v})) = \vec{v}$$

- 2.1. Sea  $\gamma: I \rightarrow S$  una geodésica no constante en  $S$ . Demuestra que un campo  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  si y sólo si tanto su módulo  $\|V\|$  como el ángulo  $\underbrace{\angle(\gamma', V)}_{\theta}$  son constantes a lo largo de  $\gamma$ .

$\square$  ok, pre  $\gamma'$  también es paralelo along  $\gamma$ .



$$V = \frac{\|V\|}{\|\gamma'\|} \left[ \cos \theta \gamma' + \sin \theta \gamma \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\|V\|}{\|\gamma'\|} \left[ \cos \theta \frac{d\gamma'}{dt} + \sin \theta \frac{d(\gamma)}{dt} \right] - \frac{\|V\|}{\|\gamma'\|} \sin \theta \cancel{f} \cdot \frac{d\gamma'}{dt} = 0$$

de por cur  $\gamma$  constante

**2.2.** Sea  $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$  una curva parametrizada, donde  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies regulares que son tangentes a lo largo de  $\alpha$ ; es decir,  $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$  para todo  $t \in I$ . Demuestra que  $\alpha$  es geodésica de  $S_1$  si y sólo si  $\alpha$  es geodésica de  $S_2$ .

Ejercicio 4.6 //

2.3. Considera la superficie de revolución  $S$  generada al girar la curva parametrizada regular  $(f(t), 0, g(t))$  alrededor del eje OZ, dada por la parametrización

$$X(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)), \quad \text{con } t \in I \subset \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

con

$$f(t) > 0 \quad \text{y} \quad (f'(t))^2 + (g'(t))^2 > 0.$$

- a) Fijado  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ , demuestra que el meridiano  $\alpha_{\theta_0}(t) = X(t, \theta_0)$  es siempre una pre-geodésica de  $S$ .
- b) Fijado  $t_0 \in I$ , demuestra que el paralelo  $\beta_{t_0}(\theta) = X(t_0, \theta)$  es una geodésica de  $S$  si y solo si  $t_0$  es un punto crítico de  $f$ .
- c) Demuestra que los meridianos y los paralelos se cortan siempre ortogonalmente, es decir,  $\langle \alpha'_\theta(t), \beta'_t(\theta) \rangle = 0$  para todo  $t \in I, \theta \in [0, 2\pi]$ .

$\textcircled{a} \quad \alpha(t) = X(t, a) = (f(t) \cos a, f(t) \sin a, g(t))$

$$\mathbf{V}_t = (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t))$$

$$\mathbf{V}_\theta = (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0)$$

$$E = f'^2 + g'^2 \quad F = 0 \quad G = f^2, \quad EG - F^2 = f^2(f'^2 + g'^2)$$

$$\alpha'(t) = \mathbf{V}_t(t, a) = (f'(t) \cos a, f'(t) \sin a, g'(t)) \quad \| \alpha' \| = \sqrt{E} = \sqrt{f'^2 + g'^2}$$

$$\alpha''(t) = (f''(t) \cos a, f''(t) \sin a, g''(t))$$

$$\mathbf{V}_t \wedge \mathbf{V}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f' \cos \theta & f' \sin \theta & g' \\ -f s \theta & f c \theta & 0 \end{vmatrix} = (-g' f s \theta, -g' f c \theta, f f')$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} (-g' \cos \theta, -g' \sin \theta, f')$$

$$\det(\alpha'', \mathbf{N}, \alpha') = \frac{1}{\sqrt{E}} \begin{vmatrix} f'' \cos a & f'' \sin a & f' \\ -g' \cos a & -g' \sin a & g' \\ f' \cos a & f' \sin a & g' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \cancel{-g' f'' s \cos a} + \cancel{f' f'' s \cos a} - \cancel{g' f' s \cos a} + \cancel{g' f'' s \sin a} - \cancel{f' f'' s \sin a} + \cancel{g' f' s \sin a} \right)$$

$\rightarrow K_g(g) = 0 \rightarrow \alpha$  pregeodésica

(b)  $\beta(\theta) = \mathbf{v}(T, \theta) = (f(T)\cos\theta, f(T)\sin\theta, g(T))$

$$\beta'(\theta) = \mathbf{v}'_g(T, \theta) = (-f'(T)\sin\theta, f'(T)\cos\theta, 0), \|\beta'\| = \sqrt{G} = f(T)$$

$$\beta''(\theta) = (-f'(T)\cos\theta, -f'(T)\sin\theta, 0)$$

$$N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{f'(T)^2 + g'(T)^2}} (-g'(T)\cos\theta, -g'(T)\sin\theta, f'(T))$$

f geodätisch  $\leftrightarrow \beta''(\theta) \parallel N(\theta)$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow & \left. \begin{aligned} f'(T) &= \lambda g'(T) \\ 0 &= \lambda f'(T) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\boxed{\lambda=0}} f'(T)=0 \text{ } \cancel{\#} \\ & \boxed{f'(T)=0} \text{ OR} \\ & \downarrow \\ & g'(T) \neq 0 \rightarrow \lambda = \frac{f'(T)}{g'(T)} \end{aligned}$$

(c) Obvio,  $F=0$

2.4. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$  una geodésica de  $S$  con  $\gamma(0) = \gamma(t_0)$  y  $\gamma'(0) = \gamma'(t_0)$  para algún  $t_0 > 0$ . Demuestra que  $\gamma$  es periódica.

$$\exists T / \gamma(t+T) = \gamma(t), \forall t?$$

$\gamma(t+T)$  es geodésica, por ser reparametrización afín de  $\gamma$ , que es geodésica por hipótesis.

$$\text{Llamemos } \varphi(t) = \gamma(t+T).$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \varphi \text{ es geodésica con } \varphi(0) &= \gamma(T) = \gamma(0) \\ \varphi'(0) &= \gamma'(T) = \gamma'(0) \end{aligned}$$

y por la unicidad de geodésicas bajo condiciones iniciales, tenemos que  $\varphi(t) = \gamma(t)$  y entonces  $\gamma$  es  $T$ -periódica.

2.5. Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada regular en  $S$ . Demuestra que  $\alpha$  es una pregeodésica de  $S$  si y sólo si existe una función  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para todo  $t \in I$ .

$\alpha$  pregeodésica  $\Leftrightarrow k_g(\alpha) = 0$

$$k_g(\alpha) = \frac{\langle \alpha'' / J\alpha' \rangle}{\| \alpha' \|^3} = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha'', J\alpha' \rangle = 0$$

$$\langle \frac{D\alpha'}{dt} + \langle \alpha'', N \rangle N, J\alpha' \rangle = 0$$

$$\langle \frac{D\alpha'}{dt}, J\alpha' \rangle = 0$$

Así,  $\frac{D\alpha'}{dt} \perp J\alpha'$  y  $\frac{D\alpha'}{dt} \perp N$  (siempre)

por tanto,  $\frac{D\alpha'}{dt} \parallel \alpha'$  y  $\frac{D\alpha'}{dt} = \lambda(t)\alpha'$

**2.6.** Sea  $S$  una superficie regular y orientada con aplicación de Gauss  $N$ , y sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva en  $S$  parametrizada por la longitud de arco  $s$ . En cada punto  $\alpha(s)$  consideremos el triedro de **Darboux**, formado por los tres vectores unitarios

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{Jt}(s) = \mathbf{J}_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), \quad N(s) = N(\alpha(s)).$$

a) Demuestra que

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa_g(s)\mathbf{Jt}(s) + \kappa_n(s)N(s), \\ (\mathbf{Jt})'(s) &= -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) + \tau_g(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa_n(s)\mathbf{t}(s) - \tau_g(s)\mathbf{Jt}(s),\end{aligned}$$

donde  $\tau_g : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la función diferenciable dada por  $\tau_g(s) = \langle A_{\alpha(s)}\mathbf{t}(s), \mathbf{Jt}(s) \rangle$ . La función  $\tau_g$  se llama la **torsión geodésica** de  $\alpha$ .

- b) Concluye que  $\tau_g \equiv 0$  si y sólo si  $\alpha$  es una línea de curvatura de  $S$ .
- c) Demuestra que si  $\alpha$  es una geodésica con curvatura normal  $\kappa_n(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ , entonces  $\tau_g(s) = -\tau(s)$  para todo  $s \in I$ , donde  $\tau$  denota la torsión de  $\alpha$  vista como curva en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Qué se puede decir en tal caso de la curvatura normal de  $\alpha$ ?
- d) Considera  $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)\}$  una base ortonormal de direcciones principales en  $T_{\alpha(s)}S$ ,  $s \in I$ . Demuestra que la torsión geodésica viene dada por

$$\tau_g(s) = \cos \varphi(s) \operatorname{sen} \varphi(s) \left( \kappa_2(\alpha(s)) - \kappa_1(\alpha(s)) \right),$$

donde  $\varphi(s) = \angle(\mathbf{e}_1(s), \mathbf{t}(s))$  y  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las curvaturas principales de  $S$ .

(a)  $\gamma \text{ ppa} \rightarrow \|\mathbf{t}\| = \|\mathbf{q}'\| = 1 \xrightarrow{d/ds} 2\langle \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \rangle = 0 \rightarrow \mathbf{q}' \perp \mathbf{q}''$

$$\mathbf{t}'(s) = \mathbf{q}''(s) = \underbrace{\langle \mathbf{q}'', \mathbf{q}' \rangle}_{0} \mathbf{q}' + \underbrace{\langle \mathbf{q}'', \mathbf{Jq}' \rangle}_{\kappa_g} \mathbf{Jq}' + \underbrace{\langle \mathbf{q}'', N \rangle}_{\kappa_n} N = \kappa_g \mathbf{Jt} + \kappa_n N$$

$$(\mathbf{Jt})'(s) = \lambda_n(s) \cdot \mathbf{t} + \mu_1(s) \cdot N, \quad \lambda_n = \langle \mathbf{Jt}, t \rangle = -\langle \mathbf{Jt}, \mathbf{t}' \rangle = -\kappa_g$$

$$\|\mathbf{Jt}\|^2 = 1 \rightarrow \mathbf{Jt} \perp \mathbf{Jt}' \quad \mu_1(s) = \langle \mathbf{Jt}', N \rangle = -\langle \mathbf{Jt}, N' \rangle = \langle \mathbf{Jt}, At \rangle = T_g(s)$$

$$N'(s) = (\mathbf{t} \wedge \mathbf{Jt})(s) = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{Jt} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{Jt}' = \kappa_n N \wedge \mathbf{Jt} + T_g \mathbf{t} \wedge N = -\kappa_n \mathbf{t} - T_g \mathbf{Jt}$$

(b)  $\alpha$  líne curvatura  $\Leftrightarrow \mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{q}'(s)$  es dirección principal  $\Leftrightarrow A_{\mathbf{q}'}(\mathbf{q}') = \lambda(\mathbf{q}')$

$$\Leftrightarrow -N'(s) = \lambda(s) \mathbf{q}'(s) \Leftrightarrow N'(s) = -\lambda(s) \mathbf{q}'(s) \Leftrightarrow T_g \equiv 0$$

c) En tal caso es  $k_g = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} t' = k_n N \\ jt' = T_g N \\ N' = -T_g Jt \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} q' = t \\ q'' = t' = k_n N \\ q''' = t'' = k_n N' = -T_g k_n Jt \end{array}$$

$$T_\alpha(s) = - \frac{\det(q', q'', q''')}{|q' \wedge q''|^2}$$

$$\det(q', q'', q''') = \langle t, q'' \wedge q''' \rangle = \langle t, -T_g k_n^2 N \wedge Jt \rangle = -T_g k_n^2 \langle t, -t \rangle = T_g k_n^2$$

$$|q' \wedge q''|^2 = |t \wedge k_n N|^2 = |-k_n Jt|^2 = k_n^2$$

$$\rightarrow \boxed{T_\alpha(s) = -T_g(s)}$$

d)

de ppn

$$q'(s) = \cos \varphi(r) \vec{e}_1(r) + \sin \varphi(r) \vec{e}_2(r) \quad \varphi = \arg(\langle q', e_1 \rangle)$$

$$A(q') = \cos \varphi K_1 e_1 + \sin \varphi K_2 e_2$$

$$J_{q'} = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$$

$$T_g = \langle J_{q'}, A(q') \rangle = -\cos \varphi \sin \varphi K_1 + \cos \varphi \cos \varphi K_2 = \cos \varphi \sin \varphi (K_2 - K_1) \quad //$$

## 2.7. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo de la esfera.

$$\chi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$$

Paralelo  $\rightarrow u = a$

$$\alpha(t) = (r \cos a \cos t, r \cos a \sin t, r \sin a)$$

$$N(t) = \frac{1}{r} \alpha'(t)$$

$$\alpha'(t) = (-r \cos a \sin t, r \cos a \cos t, 0)$$

$$\|\alpha'(t)\| = r \cos a$$

$$\alpha''(t) = (-r \cos a \cos t, -r \cos a \sin t, 0)$$

$$\det(\alpha', N, \alpha'') = \begin{vmatrix} -r \cos a \sin t & -r \cos a \cos t & 0 \\ \cos a \sin t & \cos a \cos t & \cos a \\ -r \cos a \cos t & -r \cos a \sin t & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cos^2 a \sin^2 t + r^2 \cos^2 a \cos^2 t = r^2 \cos^2 a \sin^2 a$$

$$K_g(\alpha(t)) = \frac{r^2 \cos^2 a \sin^2 a}{r^3 \cos^3 a} = \frac{\sin a}{r \cos a}$$

2.8. Calcula la curvatura geodésica de un paralelo del toro de revolución  $(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}-a}_{t^2})^2+z^2=r^2$ . ¿Cuándo es geodésica?

$$t = r \cos u \quad t = r \sin u$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-a=r \cos u \rightarrow x^2+y^2=(r \cos u+a)^2 \rightarrow x=(a+r \cos u) \cos u \quad y=(a+r \cos u) \sin u$$

$$N(u,v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

$$\text{Paralelo} \rightarrow u=A$$

$$\alpha(t) = ((a+r \cos A) \cos t, (a+r \cos A) \sin t, r \sin A)$$

$$\alpha'(t) = (- (a+r \cos A) \sin t, (a+r \cos A) \cos t, 0)$$

$$\|\alpha'(t)\| = a+r \cos A$$

$$\alpha''(t) = (- (a+r \cos A) \cos t, - (a+r \cos A) \sin t, 0)$$

$$V_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \quad E=r^2 \quad F=0 \quad G=(a+r \cos u)^2$$

$$V_v = (- (a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, 0)$$

$$V_u \wedge V_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -(a+r \cos u) \sin v & (a+r \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-r(a+r \cos u) \sin v, -r(a+r \cos u) \cos v, -r(a+r \cos u) \sin u)$$

$$N = (- \cos u \cos v, - \cos u \sin v, \sin u)$$

$$N(t) = (- \cos A \cos t, - \cos A \sin t, \sin A)$$

$$\det(\alpha'', N, \alpha') = \begin{vmatrix} -(a+r \cos A) \cos t & -(a+r \cos A) \sin t & 0 \\ -A \sin t & -A \cos t & \sin A \\ -(a+r \cos A) \sin t & (a+r \cos A) \cos t & 0 \end{vmatrix} = (a+r \cos A)^2 \sin^2 t \sin A + (a+r \cos A)^2 \cos^2 t \sin A = (a+r \cos A)^2 \sin A$$

$$K_g(\alpha) = \frac{(a+r \cos A)^2 \sin A}{(a+r \cos A)^3} = \frac{\sin A}{a+r \cos A}$$

$$\text{Es geodésica cuando } \sin A = 0 \leftrightarrow A \in \{0, \pi\}$$

- 3.1. Considera la catenaria  $y = \cosh x$  contenida en el plano  $z = 0$  y parametrizada por la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = (t, \cosh t, 0)$ , y sea  $S$  el cilindro recto construido sobre dicha curva. Da una parametrización de esta superficie y determina su aplicación exponencial.

Reparametrizaciones y ppa  $\rightarrow \gamma(s) = (\arg \sinh(s), \sqrt{1+s^2}, 0)$

$$\kappa(s, r) = \gamma(s) + (0, 0, r)$$

$$V_s = \gamma'(s) \quad E=1, F=0, G=1$$

$$V_r = (0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}}_D$$

$$\rightarrow \Gamma_{ij}^k \geq 0$$

$$u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0$$

$$v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s^{(1)} = 0 \\ r^{(1)} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s(t) = a_1 t + b_1 \\ r(t) = a_2 t + b_2 \end{array}$$

$$\gamma(t) = (\arg \sinh(a_1 t + b_1), \sqrt{1 + (a_1 t + b_1)^2}, a_2 t + b_2)$$

$a_1, b_1$  serán las condiciones iniciales.

$$\text{y el } \exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

3.2. Sea  $X(r, \theta)$  un sistema de coordenadas polares geodésicas centrado en un punto  $p_0 \in S$ .

- a) Fijado  $r > 0$  considera la circunferencia geodésica de centro  $p_0$  y radio  $r$ , parametrizada por  $\alpha_r(\theta) = X(r, \theta)$  y demuestra que su curvatura geodésica viene dada por

$$\kappa_g^r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{G(r, \theta)}} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{G_r(r, \theta)}{2G(r, \theta)}.$$

- b) Concluye que en una superficie con curvatura de Gauss constante, las circunferencias geodésicas tienen curvatura geodésica constante.

(a)

$$F=0$$

$$e_1 = \frac{Nr}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{N\theta}{\sqrt{G}}$$

$$K_r = \sqrt{E} e_1$$

$$K_g = \sqrt{G} e_2$$

$$\alpha_r'(\theta) = K_g = \sqrt{G} e_2$$

$$J\alpha_r'(\theta) = J K_g = J(\sqrt{G} e_2) = \sqrt{G} (-e_1) = -\sqrt{G} e_1 = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} K_r$$

$$\alpha_r''(\theta) = K_{g\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{G}) e_2$$

$$K_g = \underbrace{\langle \alpha_r'', J\alpha_r' \rangle}_{\|\alpha_r'\|^3} = \underbrace{\langle K_{g\theta}, -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} K_r \rangle}_{\|\sqrt{G} e_2\|^3} = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \langle K_{g\theta}, K_r \rangle =$$

$$= \frac{1}{G\sqrt{E}} \langle K_{r\theta}, K_g \rangle$$

$$0=F=\langle K_r, K_g \rangle \xrightarrow{\text{es } 0} 0=\langle K_{r\theta}, K_g \rangle + \langle K_r, K_{g\theta} \rangle$$

Como  $E=1$ , entonces

$$\|e_2\|=1$$

$$K_g = \frac{1}{G} \langle K_{r\theta}, K_g \rangle = \frac{1}{G} \langle \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{G}) e_2, \sqrt{G} e_2 \rangle = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{G})}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{G_r}{2G}$$

⑥

Si  $K$  es de, entonces se tiene

i) Si  $K = 0$ , entonces  $G(r, \theta) = r^2$ .

ii) Si  $K > 0$ , entonces  $G(r, \theta) = \frac{1}{K} \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}r)$ .

iii) Si  $K < 0$ , entonces  $G(r, \theta) = \frac{-1}{K} \operatorname{senh}^2(\sqrt{-K}r)$ .

Si  $G$  no depende de  $\theta \rightarrow G'(\theta) = 0 \rightarrow G(\theta) = \text{de}$

3.3. Dada  $S$  una superficie regular y un punto  $p_0 \in S$ , considera  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow T_{p_0}S$  una parametrización por el arco de la circunferencia unitaria  $\mathcal{S}(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{v} \in T_{p_0}S : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ .

- Demuestra que para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la aplicación  $X : (0, \varepsilon) \times (0, 2\pi) \rightarrow S$  dada por  $X(t, s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$  está bien definida y es una parametrización de  $S$ .
- Calcula los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización  $X(t, s)$  y demuestra que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K(X(t, s)) = -\frac{1}{\|X_s(t, s)\|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\|X_s(t, s)\|).$$

(a)  $S(0, 1) = \{v \in T_{p_0}S : \|v\| = 1\} = \{ae_1 + be_2 : a^2 + b^2 = 1\} = q([0, 2\pi])$

$$q(s) = \cos(s)e_1 + \sin(s)e_2$$

Se sabe que,  $\forall v \in T_p S$ ,  $\exists l$  de forma que  $\lambda v \in D_{p_0}$

Por tanto, dado  $v \in S(0, 1)$ ,  $\exists \lambda$  con  $\lambda v \in D_{p_0}$ ,

y podemos tomar  $\lambda = \inf\{\lambda_v\}$  y a la vez que  $S(0, 1) \subset D_{p_0}$   
 $\{v \in T_{p_0}S : \|v\| = 1\}$   
 $\{\lambda q(s) : s \in [0, 2\pi]\}$

Por lo que  $\lambda q(s) \in D_{p_0} \rightarrow \exp_{p_0}(\lambda q(s))$  existe y está bien definido  
 más aún, lo está todo.

Tomando  $\varepsilon = 1$  y teniendo en cuenta que para ser una parametrización debe estar definida en un abierto, tenemos

$$X(t, s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s)) \quad (t, s) \in (0, \varepsilon) \times (0, 2\pi)$$

bien def. y es parametrización //

(b)

$$X(t, s) = \exp_{p_0}(t\alpha(s))$$

$$X_t = d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s))$$

$$X_s = d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))$$

$$E = \langle X_t, X_t \rangle = \langle d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s)), d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s)) \rangle = \|\alpha(s)\| = 1$$

colineares

$$F = \langle X_t, X_s \rangle = \langle d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(\alpha(s)), d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s)) \rangle = 0$$

ortogonales

$$G = \langle X_s, X_s \rangle = \langle d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s)), d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s)) \rangle = t^2 \|d \exp_{p_0(t\alpha(s))}(t\alpha'(s))\|^2$$

$$k(X(r, \theta)) = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{t\theta}{\sqrt{EG}} \right)_g + \left( \frac{Gr}{\sqrt{EG}} \right)_r \right]$$

$$k(X(t, s)) = \frac{-1}{2\sqrt{G}} \left[ \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\sqrt{G}} \right]_t = \frac{-1}{2\|X_s\|} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\|X_s\|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\|X_s\|^2) \right)$$

$$= \frac{-1}{2\|X_s\|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\|X_s\|} \cdot 2\|X_s\| \frac{\partial}{\partial t} (\|X_s\|) \right) = -\frac{1}{\|X_s\|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\|X_s\|)$$

**3.4.** Dada  $S$  una superficie regular y un punto  $p_0 \in S$ , considera  $V : \mathbb{R} \rightarrow T_{p_0}S$  una aplicación diferenciable con  $\|V(t)\| = 1$  para todo  $t$ , y  $X(u, t) = \exp_{p_0}(uV(t))$  definida en un abierto adecuado  $U \subset \mathbb{R}^2$  para que  $X$  sea un homeomorfismo.

- Prueba que  $X$  es una parametrización de  $S$  si, y sólo si,  $V'(t) \neq 0$  para todo  $t$ .
- En tal caso, calcula los coeficientes de la primera forma fundamental de  $X$ .
- Dado  $\varepsilon > 0$ , considera  $\alpha : [a, b] \rightarrow D(p_0, \varepsilon) \subset S$  la curva

$$\alpha(t) = X(u(t), t) = \exp_{p_0}(u(t)V(t)),$$

para una cierta función  $u(t)$ ,  $0 < u(t) < \varepsilon$ . Demuestra que

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \geq |u(b) - u(a)|,$$

dándose la igualdad si, y sólo si,  $u(t)$  es monótona y  $V(t)$  es constante.

(a)



$$\frac{\partial X}{\partial t} = d\exp_{p_0(uV(t))}(uV'(t)) \neq 0 \rightarrow V'(t) \neq 0 \quad \text{y}$$



$\|V(t)\| = 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \exists v \in T_p S : \|v\|=1, v=V(t)$  y como en el ejercicio anterior, vemos que  $\exists \lambda > 0$  s.t.  $\|V(t)\| \in D_p, \forall t \in \mathbb{R}\}$

Por tanto,  $U = (0, \lambda) \times \mathbb{R}$  es abierto y:

- $X$  es diferenciable en  $U$
- $X$  es un homeomorfismo (de hecho, difeo), teniendo al sf. pequeño.
- $\frac{\partial X}{\partial u} = d\exp_{p_0(uV(t))}(uV'(t)) \neq 0$  porque es isomorf. lineal en  $U$  y  $\|V(t)\|=1 \rightarrow V(t) \neq 0$ .

$$\frac{\partial X}{\partial t} = d\exp_{p_0(uV(t))}(uV'(t)) \neq 0 \quad \text{porque } V'(t) \neq 0$$

//

(b)  $E = \|V(t)\| = 1$

$$F = \langle d\exp_{p_0(uV(t))}(\underline{V(t)}), d\exp_{p_0(uV(t))}(\underline{uV'(t)}) \rangle = 0$$

*orthogonal*

$$\|V\|=1 \rightarrow 2\langle V, V' \rangle = 0$$

$$G = \|X_s\|$$

(c)  $\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(X(u(t), t)) = \frac{\partial}{\partial u} X(u(t), t) u'(t) + \frac{\partial}{\partial t} X(u(t), t)$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \|u' \cdot X_u + X_t\|^2 = \|u'\|^2 \|X_u\|^2 + \|X_t\|^2 = \|u'\|^2 + \|X_t\|^2$$

$\downarrow$   
 $F=0$   
 $X_u, X_t$  orthogonal

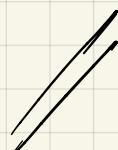
$$\|\alpha'\| = \sqrt{\|u'\|^2 + \|X_t\|^2} \geq \sqrt{\|u'\|^2} = \|u'\|$$

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_a^b \|u'(t)\| dt \geq \left| \int_a^b u'(t) dt \right| = |u(b) - u(a)|$$

$\uparrow$   
 $\|X_t\|=0$   
 $\uparrow$

$\uparrow$   
 $u'(t) > 0 \quad \forall t$   
 $u'(t) < 0 \quad \forall t$   
 $\leftrightarrow u$  monoton

$$\exp_{p_0(u(t)V(t))}(u(t)V(t)) = 0 \leftrightarrow V'(t) = 0 \leftrightarrow V(t) \text{ ist}$$



**3.5.** Sea  $X(r, \theta)$  un sistema de coordenadas geodésicas polares centrado en un punto  $p_0 \in S$ .

a) Deduce que

$$K(p_0) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \sqrt{G(r, \theta)}.$$

b) Demuestra que

$$\sqrt{G(r, \theta)} = r - \frac{K(p_0)}{6} r^3 + R(r, \theta),$$

con  $\lim_{r \rightarrow 0} R(r, \theta)/r^3 = 0$ .

c) Concluye que

$$K(p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{(2\pi r - L(r))}{r^3},$$

donde  $L(r)$  denota la longitud de la circunferencia geodésica de centro  $p_0$  de radio  $r > 0$ .

d) Justifica por qué, si  $p_0$  es un punto elíptico, las circunferencias geodésicas de centro  $p_0$  y radio  $r > 0$  tienen longitud menor que la longitud de la circunferencia euclídea del mismo radio para  $r$  suficientemente pequeño. ¿Qué se puede decir al respecto en un punto hiperbólico? ¿Y en un punto llano?

- 4.1. Sea  $S$  una superficie regular con distancia intrínseca  $d$ . Demuestra que para todo  $p \in S$  y para todo  $\mathbf{v} \in D_p$  se tiene  $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) \leq \|\mathbf{v}\|$ . ¿Bajo qué hipótesis se puede garantizar que  $d(p, \exp_p(\mathbf{v})) = \|\mathbf{v}\|$ ?

$$v \in D_p \Leftrightarrow \exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

Añ:

$$d(p, \exp_p(v)) = \inf_{\substack{\gamma \\ q}} L(\gamma) \leq L(\gamma_v) =$$

$$= \int_0^1 \|\dot{\gamma}_v(t)\| dt = \int_0^1 \|v\| dt = \|v\|$$

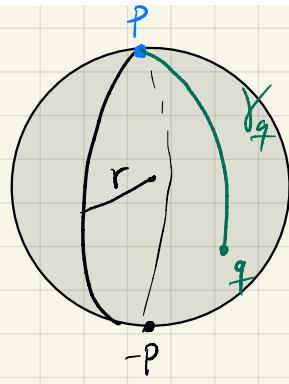
$$D_p = \{v \in T_p S : 1 \in J_v\}$$

$J_v$  intervalo maximal de existencia  
de la geodéctica con punto  
 inicial  $p$  y velocidad  $v$ .

Si  $v \in D_p(r) \subset U$  entorno normal entonces se da la igualdad  
(teorema 3.8 - Propiedad minimizante de las geodécticas).

4.2. Considera la esfera de radio  $\mathbb{S}^2(r)$  con distancia intrínseca  $d$ . Demuestra que para todos  $p, q \in \mathbb{S}^2(r)$  se tiene

$$d(p, q) = r \arccos \left( \frac{\langle p, q \rangle}{r^2} \right)$$



$d(p, -p)$  es medida curvatura:  $\pi r$

$$\exp_p : T_p S \rightarrow \mathbb{S}^2(r)$$

pero, més anh

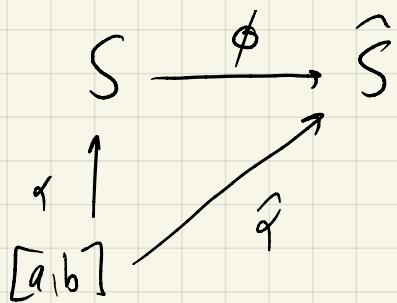
$$\exp_p|_{D(\vec{o}_p, \pi r)} : D(\vec{o}_p, \pi r) \longrightarrow D(p, \pi r) = \mathbb{B}^2(r) \setminus \{-p\} \text{ es difeo}$$

entorno normal

$$\Rightarrow d(p, q) = \|N_q\| = r \arccos \left( \frac{\langle p, q \rangle}{r^2} \right)$$

ej 1      ejemplo  
cap. 2

- 4.3. Sea  $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$  un difeomorfismo local entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva  $C > 0$  tal que  $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \leq C \|\mathbf{v}\|$  para todo  $p \in S$  y para todo  $\mathbf{v} \in T_p S$ . Demuestra que para todos  $p, q \in S$  se tiene  $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq C d(p, q)$ , donde  $d$  y  $\widehat{d}$  denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en  $S$  y en  $\widehat{S}$ .



Dado  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ , podemos considerar  $\hat{\alpha} : [a, b] \rightarrow \widehat{S}$   
 como  $\hat{\alpha} = \phi \circ \alpha$ .

$$L(\hat{\alpha}) = \int_a^b \|\hat{\alpha}'\| dt = \int_a^b \|d\phi_{\alpha}(t)\| dt \leq C \int_a^b \|\alpha'\| dt = C L(\alpha)$$

$$\Rightarrow \widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) = \inf \{L(\hat{\alpha})\} \leq \inf \{C L(\alpha)\} = C d(p, q)$$

- 4.4. Sea  $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$  una isometría local entre dos superficies regulares y conexas. Demuestra que para todos  $p, q \in S$  se tiene  $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq d(p, q)$ , donde  $d$  y  $\widehat{d}$  denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en  $S$  y en  $\widehat{S}$ . Concluye que si  $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$  es una isometría, entonces se da la igualdad  $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$  para todos  $p, q \in S$ . Muestra mediante un contraejemplo que esta última afirmación es falsa si  $\phi$  se supone solo isometría local.

•  $\phi$  isometría local  $\Rightarrow d\phi$  isometría local  $\Rightarrow \|d\phi(v)\| = \|v\| \leq 1 \cdot \|v\|$

$\Rightarrow \widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq 1 \cdot d(p, q)$  //

Ej 4.3

•  $\phi$  isometría  $\Rightarrow \phi^{-1}$  isometría

Entonces  $\widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \leq d(p, q)$

$$d(\phi^{-1}(\hat{p}), \phi^{-1}(\hat{q})) \leq \widehat{d}(\hat{p}, \hat{q}) = \widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(p, q) = \widehat{d}(\phi(p), \phi(q)) \\ \end{array} \right.$$

$$\|d(p, q)\|$$

•  $S = \mathbb{R}^2$ ,  $\widehat{S} = C = \{(x, y) / \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$$

$$d(u, v) = (r \cos(\frac{u}{r}), r \sin(\frac{u}{r}), v), \quad d\phi_{(u,v)}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d\phi_{(u,v)}((1,0)) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$d\phi_{(u,v)}((0,1)) = (0, 0, 1)$$

$$\langle d\phi_{(u,v)}((1,0)), d\phi_{(u,v)}((1,0)) \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1 = \langle (1,0), (1,0) \rangle$$

$$\langle d\phi((0,1)), d\phi((0,1)) \rangle = 1 = \langle (0,1), (0,1) \rangle$$

$$\langle d\phi((1,0)), d\phi((0,1)) \rangle = 0 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$$

$$\phi(0,0) = (r, 0, 0), \quad \phi(2\pi r, 0) = (r, 0, 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(\phi(0,0), \phi(2\pi r, 0)) = 0 < 2\pi r = d((0,0), (2\pi r, 0)) \\ \end{array} \right.$$

$\phi$  isometría local

- 4.5. Sea  $\phi : S \rightarrow \hat{S}$  una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva  $c > 0$  tal que  $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \geq c \|\mathbf{v}\|$  para todo  $p \in S$  y para todo  $\mathbf{v} \in T_p S$ . Demuestra que  $\phi$  es un difeomorfismo local en todo punto  $p \in S$ .

¿Se puede garantizar que, para todos  $p, q \in S$ , se verifica  $\hat{d}(\phi(p), \phi(q)) \geq c d(p, q)$ ? Aquí  $d$  y  $\hat{d}$  denotan, respectivamente, la distancia intrínseca en  $S$  y en  $\hat{S}$ .

- $\phi$  difeo local  $\Leftrightarrow \|d\phi_p(v)\| \neq 0, \forall v \neq 0$

Res: si  $\|d\phi_p\| = 0 \Rightarrow 0 \leq c\|v\| \leq \|d\phi_p\| = 0 \xrightarrow[c>0]{} \|v\| = 0$

- ¿ $\hat{d}(\phi(p), \phi(q)) \geq c d(p, q)$ ?

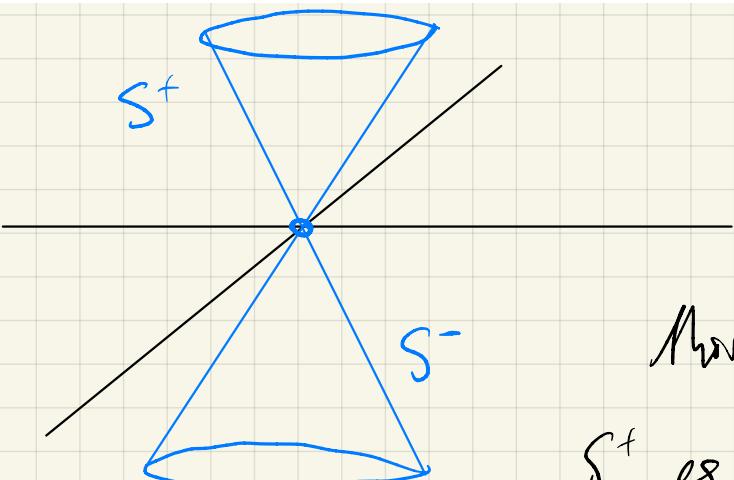
Contraseña

$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ , el del ejercicio anterior, es

$$\|d\phi_p(v)\| = \|v\| \geq \|v\|$$

pero vemos que  $\exists p, q \in \mathbb{R}^2 : d(\phi(p), \phi(q)) - 0 < 2\pi = d(p, q)$

5.1. Estudia si el cono de dos hojas dado por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$  es una superficie completa.



$S$  completa si  $S^+$  completa  
y  $S^-$  completa.

Mucha brú, por Hopf-Know,

$S^+$  es completa si  $(S^+, d)$  es

un espacio métrico completo, pero teniendo, por ejemplo:

$$a_n = \left( \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n} \right) \in S^+ \text{ true, pero } \lim a_n = (0, 0, 0) \notin S^+$$

y es de Cauchy, pues

$$d(a_n, a_m) = \|a_n - a_m\| = \left\| \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, 0, \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \right\| = \sqrt{2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)^2} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) < \epsilon$$

$\forall n, m > N_\epsilon(\epsilon)$

la recta que une  $a_n$  y  $a_m$   
está en  $S$

- 5.2. Sea  $S$  una superficie regular que viene dada como una superficie de nivel  $S = f^{-1}(c)$  para una función diferenciable  $f$  definida sobre  $\mathbb{R}^3$ . Estudia si  $S$  es completa. ¿Qué ocurre si la función  $f$  es diferenciable solo sobre un abierto  $W \subset \mathbb{R}^3$ ,  $W \neq \mathbb{R}^3$ ?

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable,  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$S = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

c valor regular de  $f$ :  $\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) \neq (0, 0, 0)$ ,

para todo  $(x, y, z) \in f^{-1}(c)$ .

$\Rightarrow f^{-1}(c)$  es cerrado en  $\mathbb{R}^3$  y es regular  $\Rightarrow S$  completa  
completo  
solo

- Si  $W \neq \mathbb{R}^3$ , entonces no necesariamente será completa,  
por ejemplo, elcono:

$$f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

diferenciable sobre  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\{S = f^{-1}(0)\}$  es uncono,

que vimos en S.1 que no es completo.

**5.3.** Una **curva divergente** en una superficie  $S$  es una curva diferenciable  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow S$  que se sale de los compactos, es decir, tal que para cada conjunto compacto  $A \subset S$  existe un instante  $t_0 < +\infty$  de modo que  $\alpha(t) \notin A$  para todo  $t > t_0$ . Se define entonces la **longitud** de  $\alpha$  como

$$L(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \leq +\infty.$$

Demuestra que  $S$  es completa si y solo si toda curva divergente tiene longitud infinita. Ésta fue, de hecho, la definición original de completitud dada por H. Hopf y W. Rinow en su artículo *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.

- 5.4. Considera el toro de revolución dado por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$ , con  $0 < r < R$ . Estudia si la geodésica que sale del punto  $p = (0, r+R, 0)$  con velocidad  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$  está definida para todo valor  $t$  de  $\mathbb{R}$ .

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2$$

$$\nabla f = \left( 2(\sqrt{x^2 + y^2} - R), \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2(\sqrt{x^2 + y^2} - R), \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Diferenciable en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , pero  $S = f^{-1}(r^2) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

y entonces  $S$  es cerrada y regular.

$$0 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

$$\rightarrow z^2 \leq r^2 \rightarrow |z| \leq r$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 \leq r^2 \rightarrow |\sqrt{x^2 + y^2} - R| \leq r \rightarrow R - r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + r$$

$$\rightarrow (R - r)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R + r)^2$$

$$\rightarrow \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq (R + r)^2 + r^2 \leq K$$

$\rightarrow S$  cerrada

$S$  cerrada y acotada en  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow S$  compacta en  $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow S$  completa  $\Rightarrow S$  geodésicamente completa

completa

5.9

$$(0, r+R, 0) \in S, \quad (\sqrt{(r+R)^2 - R^2} - R)^2 = ((r+R) - R)^2 = r^2 \text{ ok}$$

$\Rightarrow T_p S, H \in T_p S, I_V = \mathbb{R}, (0, 0, 1) \in T_p S$

Falls wir gre  $(0,0,1) \in T_p S \xrightarrow{f} (0,0,1) \in \nabla f_p$

$$\nabla f = \left( 2(\sqrt{x^2+y^2}-R), \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 2(\sqrt{x^2+y^2}-R) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)$$

$$\nabla f_p = \left( 0, 2r \frac{r+R}{r+R}, 0 \right) = (0, 2r, 0) \perp (0, 0, 1) \quad \underline{\underline{\partial K}}$$

- 5.5. Se dice que una geodésica  $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow S$  es un **rayo** que sale de  $p$  si  $\gamma$  es minimizante entre  $p = \gamma(0)$  y  $\gamma(t)$  para todo valor de  $t \in [0, +\infty)$ . Demuestra que toda superficie completa y no compacta admite rayos que salen de cualquier punto  $p \in S$ .

Sea  $p_0 \in S$ , entonces  $\text{the } \mathbb{N}, S \notin B_d(p_0, n)$  pues si fuese acotada, al ser completa sería compacta.

Aquí,  $\text{the } \mathbb{N}, \exists p_n \in S \setminus B_d(p_0, n) \rightarrow d(p_0, p_n) \geq n$

Tenemos, entonces una sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y

$\forall n, \exists \gamma_n: [0, b_n] \rightarrow S$  segmento de geodésica ppa minimizante, con  $\gamma_n(0) = p_0$ ,  $\gamma_n(b_n) = p_n$  y  $d(p_0, p_n) = \int_0^{b_n} |\dot{\gamma}_n| ds = b_n$ , por lo que  $b_n = d(p_0, p_n) \geq n, \forall n$

Además,  $\text{the } \mathbb{N}, \vec{v}_n = \overrightarrow{\gamma'_n(0)} \in S(\vec{o}_{p_0}, 1) \subset T_{p_0} S \approx \mathbb{S}^1$

Aquí, tenemos  $\{\vec{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\vec{o}_{p_0}, 1)$  compacto  $\Rightarrow \exists \{\vec{v}_{n_k}\}_{k=1, k \in \mathbb{N}}^{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{v} \in S(0, 1)$

Tomamos  $\gamma_{\vec{v}}(t): I_{\vec{v}} = \mathbb{R} \rightarrow S, \gamma_{\vec{v}}(t) = \gamma_{\vec{v}}|_{[0, \infty)}$  el rayo en  $S$ ?

$\forall t > 0, \gamma_{\vec{v}}(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t)$ , pues  $t \in [0, n_k]$ , a partir de  $n_0 \leq n_k$

y es  $n_k \leq d(p_0, p_{n_k}) = b_{n_k}, \forall n \Rightarrow \forall t > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid t < b_n, \forall n > n_k$

$\gamma_{n_k}(t) - \gamma_{\vec{v}}(t) = \exp_{p_0}(t \vec{v}_{n_k}), t \in [0, b_{n_k}]$

$\lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \exp_{p_0}(t \vec{v}_{n_k}) = \exp_{p_0} \left( \lim_{K \rightarrow \infty} t \vec{v}_{n_k} \right) = \exp_{p_0}(t \vec{v})$

Y entonces,  $\forall t > 0,$

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = \lim_{K \rightarrow \infty} \underbrace{d(\gamma_{n_k}(0), \gamma_{n_k}(t))}_t = t$$

5.6. Sea  $\phi : S \rightarrow \widehat{S}$  un difeomorfismo entre dos superficies regulares y conexas y supongamos que existe una constante positiva  $C > 0$  tal que  $\|d\phi_p(\mathbf{v})\| \leq C \|\mathbf{v}\|$  para todo  $p \in S$  y para todo  $\mathbf{v} \in T_p S$ . Demuestra que si  $\widehat{S}$  es completa, entonces  $S$  también lo es.

Sea  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $S$ .

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m, n > n_0, d(p_n, p_m) < \varepsilon_1$$

Definimos  $\{\phi(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una sucesión de  $\widehat{S}$ . ¿de Cauchy?

$$\text{por el ejercicio 4.3, } \text{es } d(\phi(p_n), \phi(p_m)) \leq C \cdot d(p_n, p_m)$$

$$\text{Así, dado } \varepsilon_2 > 0, \text{ tomado } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{C}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t. q.}$$

$$d(\phi(p_n), \phi(p_m)) \leq C \cdot d(p_n, p_m) < C \cdot \frac{\varepsilon_2}{C} = \varepsilon_2$$

y es de Cauchy.

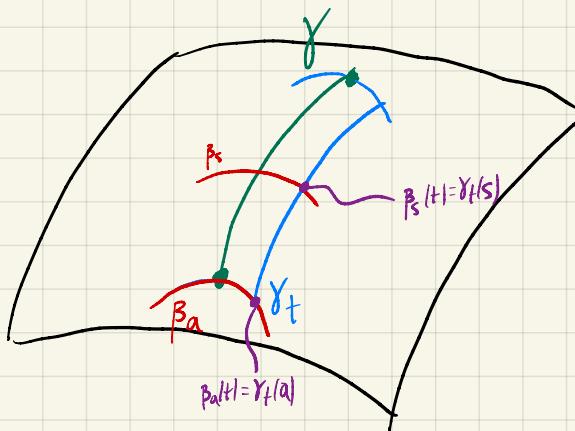
Como  $\widehat{S}$  es completa, entonces  $\exists \hat{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(p_n) \in \widehat{S}$

$$\Rightarrow g = \phi^{-1}(\hat{g}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \in S //$$

y  $S$  es completa

5.7. Sea  $\phi : S \longrightarrow \widehat{S}$  una isometría local entre dos superficies regulares y conexas. Supongamos que  $S$  es completa y que  $\widehat{S}$  cumple la siguiente propiedad: dos puntos cualesquiera de  $\widehat{S}$  se pueden unir mediante un único segmento de geodésica. Demuestra que  $\phi$  es una isometría global.

- 6.1. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  un segmento de geodésica parametrizado por el arco y sea  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  una variación de  $\gamma$  tal que las curvas de la variación  $\gamma_t(s) = \phi(s, t)$  son segmentos de geodésica de  $S$  parametrizados por el arco para todo valor de  $t$ . Demuestra que si las curvas de la variación  $\{\gamma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$  son ortogonales a la curva transversal  $\beta_0(t) = \phi(a, t)$ , entonces son ortogonales a todas las curvas transversales de la variación  $\beta_s(t) = \phi(s, t)$  para todo valor de  $s$ .



$$\gamma_t(a) \perp \beta_a(t) \Leftrightarrow \gamma_t'(a) \perp \beta_a'(t)$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(a, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t) \right\rangle = 0$$

↓ ¿?

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right\rangle = 0, \forall s, t$$

Sea  $h(s, t) = \langle \phi_s, \phi_t \rangle$ , entonces  $h(a, t) = 0$

$y$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle$$

Fijado  $t$ :

$$\phi(s, t) = \gamma_t(s)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \gamma_t'(s) \in T_{\gamma_t} S$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) = \gamma_t''(s) \in T_{\gamma_t} S \quad \text{①}$$

$\gamma$  gen.

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial s}(s, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t}(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t) \right\rangle$$

⇒  $\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = 0 \Rightarrow$  Fijado  $t$ ,  $h(s, t) = h(a, t) = 0 \quad \forall s$ .

Por esto podemos hacerlo para todo  $t$ , por lo que  $h = 0$

**6.2.** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  un segmento de geodésica parametrizado por el arco. Dada  $\phi(s, t)$  una variación normal y propia de  $\gamma$  con campo variacional  $Z$ , demuestra que

$$L''(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2 Z}{ds^2}(s) + K(\gamma(s))Z(s), Z(s) \right\rangle ds.$$

$$L''(0) = \int_a^b \left( \left\| \frac{D^2}{ds^2}(s) \right\|^2 - K(\gamma(s)) \left\| \dot{\gamma}(s) \right\|^2 \right) ds$$

$$\left\| \frac{D^2}{ds^2}(s) \right\|^2 - k(\gamma(s)) \| \dot{\gamma}(s) \|^2 = \underbrace{\left\langle \frac{D^2}{ds^2}(s), \frac{D^2}{ds^2}(s) \right\rangle}_{\text{?} \left\langle \frac{D^2}{ds^2}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle} - k(\gamma(s)) \underbrace{\left\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle}_{\left\langle k(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle}$$

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), \frac{d\dot{\gamma}}{ds}(s) \right\rangle$$

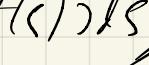
$\uparrow$   $\uparrow$   
 $T_{\gamma(s)} S$   $\frac{d}{ds}$   
↑ ↑  
 $\mathcal{F}(\gamma(s))$   $\frac{d\dot{\gamma}}{ds}(s)$   
↑ ↑  
 $\mathcal{F}'(\gamma(s))$

$$= \left\langle \frac{D^2 z}{ds^2}(s), z'(s) \right\rangle + \left\langle \frac{Dz}{ds}(s), \frac{Dz}{ds}(s) \right\rangle$$

$$y \text{ of } \int_a^b \frac{d}{ds} \left\langle \frac{dt}{ds}(s), z(s) \right\rangle ds = \left[ \left\langle \frac{dt}{ds}(s), z(s) \right\rangle \right]_a^b = \left\langle \frac{dt}{ds}(b), z(b) \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{D^2}{ds}(\alpha), \gamma(s) \right\rangle = 0 \Rightarrow \int_a^b \left\| \frac{D^2}{ds}(s) \right\|^2 ds = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2}{ds}(s), \gamma(s) \right\rangle ds$$

propri



- 6.3. Considera  $S \subset \mathbb{R}^3$  el paraboloide dado por la ecuación  $z = x^2 + y^2$ . Demuestra que  $S$  es una superficie completa y no compacta con  $K > 0$  en todo punto. Este ejemplo pone de manifiesto que la hipótesis  $K(p) \geq \delta > 0$  para todo  $p \in S$  en el Teorema de Bonnet no puede debilitarse a  $K(p) > 0$  para todo  $p \in S$ .

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) + (0, 0, 0) \quad \text{tangente}$$

$$S = f^{-1}(0)$$

Aquí  $S$  es regular y cerrada en  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow S$  completa.

Por tanto, por Heine-Borel,  $S$  es compacta si y solo si es acotada, pero

$$p_n = (n, 0, n^2), (-n, 0, n^2) \in S \quad \forall n \quad \text{y}$$

$$d(p_n, q_n)^2 \geq \|p_n - q_n\|^2 = 2n^2$$

y  $\nexists M > 0$  s.t.  $d(p_n, q_n) \leq M, \forall n \Rightarrow S$  no acotada

$\Rightarrow S$  no compacta

6.4. Considera  $\mathbb{S}^2(r) \subset R^3$  la esfera de radio  $r > 0$ . Demuestra que para todo punto  $p \in \mathbb{S}^2(r)$  se cumple  $K(p) = \delta$  con  $\delta = 1/r^2 > 0$  y que el diámetro (intrínseco) de  $\mathbb{S}^2(r)$  viene dado por  $\text{diam}(\mathbb{S}^2(r)) = \pi r = \pi/\sqrt{\delta}$ . Este ejemplo pone de manifiesto que la estimación para el diámetro de  $S$  dada en el Teorema de Bonnet es óptima, ya que en la esfera de radio  $r$  se verifica la igualdad.

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$$

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, 0)$$

$$E = r^2 s^2 u s^2 v + r^2 s^2 u c^2 v + r^2 c^2 u = r^2 s^2 u + r^2 c^2 u = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = r^2 \cos^2 u$$

$$K(u, v) = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{Ev}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{Gu}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] = \frac{-1}{2r^2 \cos u} \cdot \frac{(-2x \cancel{\cos u} \cancel{\cos u})}{x \cancel{\cos u} / u}$$

$$= \frac{-1}{2r^2 \cos u} \cdot (-2 \cancel{\cos u}) = \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Diam}(S^2) = d(N, S) = \pi r$$

6.5. Sea  $S$  una superficie regular. Se define el diámetro extrínseco de  $S$  como

$$\text{diam}_{\text{ext}}(S) = \sup_{\forall p,q \in S} \|p - q\|.$$

Demuestra que  $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \text{diam}(S)$ . Concluye que si  $S$  es completa con curvatura de Gauss  $K \geq \delta > 0$ , entonces  $S$  es compacta y su diámetro extrínseco verifica  $\text{diam}_{\text{ext}}(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ .

$$\text{diam}_{\text{ext}}(S) = \sup_{p,q \in S} \|p - q\| \leq \sup_{p,q \in S} d(p, q) = \text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

S completa,  $K \geq \delta > 0$   
Bonnet

**6.6. El funcional energía.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) en una superficie  $S$ , con  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ . Se define la *energía* de  $\alpha$  como

$$E(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|^2 du.$$

- i) Demuestra que  $L(\alpha)^2 \leq (b-a)E(\alpha)$ , dándose la igualdad si y solo si  $\alpha$  está parametrizada proporcional al arco.
  - ii) Demuestra que si  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  es un segmento de geodésica minimizante (p.p.a.) con  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ , entonces para cualquier  $\alpha$  uniendo  $p$  con  $q$  se tiene  $E(\gamma) \leq E(\alpha)$ , con igualdad si y sólo si  $\alpha$  es a su vez un segmento de geodésica minimizante.
  - iii) Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  un segmento de curva regular (no necesariamente p.p.a.) y sea  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  una variación de  $\alpha = \alpha(u)$  con campo variacional  $Z(u)$ . Considera la función

$$E(t) = E(\alpha_t) = \int_a^b \|\alpha'_t(u)\|^2 du$$

dada por la energía de las curvas de la variación  $\alpha_t(u) = \phi(u, t)$ . Demuestra que  $E(t)$  es diferenciable en un entorno de  $t = 0$  y se tiene

$$\frac{1}{2}E'(0) = \left\langle Z(u), \alpha'(u) \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\langle Z(u), \alpha''(u) \right\rangle du.$$

Concluye que si  $\alpha$  es un segmento de geodésica,  $E'(0) = 0$  para toda variación propia de  $\alpha$ .

$$L(q)^2 = \left( \int_a^b \|q'(u)\| du \right)^2 = (\langle \|q'(u)\|, 1 \rangle)^2 \leq \langle \|q'\|, \|q'\| \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle =$$

Cauchy-Schwarz

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$$

$$= \int_a^b \|g'\|^2 du \int_a^b du = (b-a) E(a)$$

la gralde de la si  $\|g\| = k \cdot 1 = k$  // (b-a) E(8) || pp<sup>a</sup>

ii)  $\gamma$  just minimize  $\gamma$  pps  $\Rightarrow L(\gamma) \leq L(\eta)$  for  $\Rightarrow L(\gamma) \leq L(\eta)$   
 $(b-a)E(\gamma)$

$$\Rightarrow E(\beta) \leq E(\alpha)$$

$y$  soll " $=$ "  $\mapsto L(y) = L(g)$   $\mapsto$  d. reg. glob. Minimum.

(iii)

$$E(t) = E(\alpha_t) = \int_a^b \|\alpha'_t(u)\|^2 du$$

$$|E(t)| = |E(\varphi_t)| = \int_a^b \left\| \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t)}_{\text{differentiable in } 0} \right\|^2 ds \quad \text{6 norma}^2 \text{ & differentiable}$$

Entonces,  $|E(t)|$  es diferenciable.

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \right\|^2 ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \right\|^2 ds =$$

$$= \int_a^b 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(s, t) \right\rangle ds$$

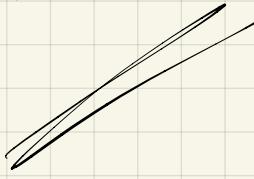
$$\frac{1}{2} E'(0) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, 0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(s, 0) \right\rangle ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle ds$$

---


$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} \right\rangle$$


---

$$= \left\langle \alpha'(s), Z(s) \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\langle \alpha''(s), Z(s) \right\rangle ds$$



Si  $\alpha$  segment de geodetica:

$$\alpha'' \in (T_{\alpha(s)} S)^\perp \quad , \quad Z(s) \in T_{\alpha(s)} S \implies \langle \alpha'', Z \rangle = 0$$

$$\frac{1}{2} E'(0) = \langle \alpha'(b), Z(b) \rangle - \langle \alpha'(a), Z(a) \rangle = \langle \alpha'(b), \alpha(b) \rangle - \langle \alpha'(a), \alpha(a) \rangle = 0$$

$\uparrow$  propia

- 6.7. Considera  $S \subset \mathbb{R}^3$  el cilindro circular recto de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ , orientado por la aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Considera la curva  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow S$  dada por  $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ .

- Demuestra que la aplicación  $\phi : [0, \pi] \times (-1, 1) \rightarrow S$  dada por  $\phi(s, t) = (\cos s, \sin s, t \sin s)$  define una variación normal y propia de  $\alpha$ .
- Para cada  $t \in (-1, 1)$ , se considera la función  $L(t) =$  longitud de la curva  $\alpha_t$ , donde, como es habitual,  $\{\alpha_t\}_{t \in (-1, 1)}$  denota la familia de las curvas de la variación. Calcula  $L'(0)$  y  $L''(0)$ .

i) •  $\phi$  variación

diferenciable:  $\alpha_t$

$$\phi(s, 0) = (\cos s, \sin s, 0) = \alpha(s) \quad \text{OK}$$

• propia

$$\phi(0, t) = (1, 0, 0) = \alpha(0)$$

$$\phi(\pi, t) = (-1, 0, 0) = \alpha(\pi) \quad \text{OK}$$

• normal

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) = (0, 0, \sin s) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) = (0, 0, \sin s) \perp \alpha(s) \quad \text{OK}$$

ii) ¿es geodética?

$$V(u)v = (\cos u, \sin u, v), \quad V_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad V_v = (0, 0, 1)$$

$$\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0), \quad \alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\langle \alpha''(s), V_u(s) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \alpha'(s), V_v(s) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{D\alpha'}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow L'(0) = 0$$

$$\int_0^\pi \left\| \frac{D\alpha}{ds}(s) \right\|^2 ds = \int_0^\pi \cos^2 s ds = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow$   $\kappa=0$  (cilindro)  $\quad z = (0, 0, \cos s), \quad \frac{dt}{ds} = (0, 0, \cos s) \in \text{span}\{X_v\}$

- 6.8.** Considera  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular p.p.a. contenida en el plano  $z = 0$  de la forma  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$  y sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el cilindro recto construido sobre la curva  $\alpha$ , con su parametrización natural  $X : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$

$$X(s, v) = \alpha(s) + (0, 0, v) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), v).$$

Dado  $[a, b] \subset I$ , considera el segmento de curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ , visto como curva en  $S$ .

- i) Demuestra que la aplicación  $\phi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  dada por

$$\phi(s, t) = \alpha(s) + (0, 0, f(s, t)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), f(s, t))$$

define una variación normal y propia de  $\alpha$ , donde  $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable que cumple las siguientes propiedades:  $f(s, 0) = f(a, t) = f(b, t) = 0$  para todo  $s \in [a, b]$  y para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

- ii) Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , se considera la función  $L(t) =$  longitud de la curva  $\alpha_t$ , donde, como es habitual,  $\{\alpha_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$  denota la familia de las curvas de la variación. Calcula  $L'(0)$  y  $L''(0)$ .

①

ⓐ Variación

$\phi$  diferenciable OK

$$\phi(s, 0) = \alpha(s) + (0, 0, \underbrace{f(s, 0)}_0) = \alpha(s)$$

ⓑ Normal

$$Z(s) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, 0) = (0, 0, \frac{\partial f}{\partial t}(s, 0)) \perp (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), 0) = \alpha'(s) \text{ HS } \underline{\text{OK}}$$

ⓒ Propia

$$\phi(a, t) = \alpha(a) + (0, 0, \underbrace{f(a, t)}_0) = \alpha(a) \quad \checkmark$$

$$\phi(b, t) = \alpha(b) + (0, 0, \underbrace{f(b, t)}_0) = \alpha(b) \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } X_s = \alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), 0), \quad N_u = (0, 0, 1)$$

$$E = \| \alpha'(s) \| = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

$\Rightarrow k = 0$

Por otro lado,  $(\alpha', \alpha') = 1 \Rightarrow \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \Rightarrow \alpha'' \perp X_s$

$$\text{y } \alpha'' = (\alpha''_1(s), \alpha''_2(s), 0) \perp (0, 0, 1) = N_u$$

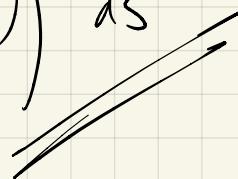
Por tanto,  $q' \in (T_{q(s)} S)^\perp$  } or  $\frac{D q'}{ds} = 0$ , e se,  
q es geodesica.

Por tanto, como  $\phi$  es normal (y propia), es  
 $L''(0) = 0$ .

y  $L''(0) = \int_a^b \left\| \frac{D\phi}{ds}(s) \right\|^2 ds$

$Z = (0, 0, f_t(s, 0)) \Rightarrow \frac{D\phi}{ds}(s) = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(s, 0))$

$\Rightarrow L''(0) = \int_a^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(s, 0) \right)^2 ds$



7.1. Calcula el área de la esfera de radio  $r$  mediante la parametrización

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

$\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$  } X sobre  $S^2 \setminus \text{meridiano}$

$$A(S^2) = \int dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} \, d\theta \, d\varphi$$

$$K_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$K_\varphi = (-r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$E = r^2 c^2 \theta c^2 \varphi + r^2 c^2 \theta s^2 \varphi + r^2 s^2 \theta = r^2 c^2 \theta + r^2 s^2 \theta = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = r^2 s^2 \theta$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^4 s^2 \theta} = r^2 \sin \theta$$

$$A(S^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi r^2$$

7.2. Calcula el área del toro de revolución mediante la parametrización

$$X(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u), \quad r < a.$$

$$\mathbf{N}_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$\mathbf{N}_v = (-(\cos u + a) \sin v, (\cos u + a) \cos v, 0)$$

$$E = r^2 s^2 u c^2 v + r^2 s^2 u s^2 v + r^2 c^2 u = r^2 s^2 u + r^2 c^2 u = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = (\cos u + a)^2 s^2 v + (\cos u + a)^2 c^2 v = (\cos u + a)^2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = r(\cos u + a)$$

$$A(\pi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\cos u + a) \, du \, dv = 2\pi r \int_0^{2\pi} r \cos u + a \, du$$

$$= 2\pi r \left[ r \sin u + au \right]_0^{2\pi} = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 r a$$

7.3. Calcula el área de la pseudoesfera, esto es, la superficie de revolución generada por la curva tractriz  $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \operatorname{cost} + \log \operatorname{tg}(t/2))$ , y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (\operatorname{sen} t \cos \theta, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \theta, \operatorname{cost} + \log \operatorname{tg}(t/2)), \quad (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi/2).$$

No es compacto... tenemos que tomar  
(relativamente)  $U_\varepsilon = \underbrace{(0, 2\pi)}_t \times \underbrace{(\varepsilon, \frac{\pi}{2})}_t$   
y  $R_\varepsilon = X(U_\varepsilon)$ .

$$\text{Así, } A(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon$$

$$X_\theta = (-\operatorname{cost} \operatorname{sen} \theta, \operatorname{cost} \operatorname{cos} \theta, 0)$$

$$X_t = (\operatorname{cost} \operatorname{cos} \theta, \operatorname{cost} \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{cost} + \frac{1}{\operatorname{tg}(t/2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos}^2(\frac{\theta}{2})} \cdot \frac{1}{2})$$

$$E = s^2 t \cdot s^2 \theta + s^2 t \cdot c^2 \theta = r^2 t$$

$$F = 0$$

$$G = c^2 t \cdot c^2 \theta + c^2 t \cdot s^2 \theta + s^2 t + \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(t/2) \operatorname{cos}^4(t/2)} - \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{tg}(t/2) \operatorname{cos}^2(t/2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(t/2) \operatorname{cos}^4(t/2)} - \frac{2 \operatorname{sen}(t/2) \operatorname{cos}(t/2)}{\operatorname{sen}(t/2) \operatorname{cos}^2(t/2)} = \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4(t/2) \operatorname{cos}^4(t/2)} - 1$$

$$EG - F^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{4 \frac{\operatorname{sen}^2(t/2)}{\operatorname{cos}^2(t/2)} \operatorname{cos}^4(t/2)} - \operatorname{sen}^2(t) = \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{4 \operatorname{sen}^2(\frac{t}{2}) \operatorname{cos}^2(t/2)} - \operatorname{sen}^2(t) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot \frac{t}{2}) \operatorname{cos}(2 \cdot \frac{t}{2})}{4 \operatorname{sen}^2(t/2) \operatorname{cos}^2(t/2)} - \operatorname{sen}^2 t = \frac{4 \operatorname{sen}^2(t/2) \operatorname{cos}^2(t/2)}{4 \operatorname{sen}^2(t/2) \operatorname{cos}^2(t/2)} - \operatorname{sen}^2 t =$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$= 1 - \operatorname{sen}^2 t = \operatorname{cos}^2 t$$

0 sea,

$$A_c = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta dt = 2\pi \left[ \sin \theta \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} =$$
$$= 2\pi (1 - \sin \varepsilon)$$

$$A(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 2\pi$$

- 7.4. Sea  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ , con  $U = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ , una parametrización de la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$  (un abierto del paraboloide de revolución). Calcula la integral sobre  $S$  de la función  $f(x, y, z) = \sqrt{1+4z}$ .

$$N_u = (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$N_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$E = 1 + 4u^2$$

$$F = 0$$

$$G = u^2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = u \sqrt{1 + 4u^2}$$

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4u^2} \cdot u \sqrt{1 + 4u^2} \, dv \, du =$$

$$= 2\pi \int_0^1 u (1 + 4u^2) \, du = 2\pi \int_0^1 u + 4u^3 \, du = 2\pi \left[ \frac{u^2}{2} + u^4 \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = 3\pi //$$

7.5. Calcula la integral sobre la esfera de la función  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = z^2$ .

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos u) \quad u \in (0, \pi)$$

$$X_u = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin u) \quad v \in (0, 2\pi)$$

$$X_v = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, 0)$$

$$E = \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u = 1$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2 u$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin u \quad f(u, v) = \cos^2 u$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} f dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 u \cdot \sin u \, dv \, du = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 u \cdot \sin u \, du =$$

$$\left[ \frac{\cos^3 u}{3} \right] = \frac{3 \cdot \cos^2 u}{3} \cdot (-\sin u)$$

$$= 2\pi \left[ -\frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^\pi = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

7.6. Sea  $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja de variable compleja y sean  $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones reales dadas por

$$f(u, v) = \operatorname{Re}(\phi(u + iv)) \quad \text{y} \quad g(u, v) = \operatorname{Im}(\phi(u + iv)),$$

siendo  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + iv \in \Omega\}$ , de manera que  $\phi(z) = f(z) + ig(z)$  para todo  $z = u + iv \in \Omega$ . Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  son diferenciables. Se dice que la función  $\phi$  verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann si se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Demuestra que si  $\phi(z)$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces  $\operatorname{Área}(S_1) = \operatorname{Área}(S_2)$  siendo  $S_1 = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$  y  $S_2 = \{(u, v, g(u, v)) : (u, v) \in U\}$ .

$$S_1 = K_1(U) \quad S_2 = K_2(U)$$

$$K_{1u} = (1, 0, f_u), \quad K_{1v} = (0, 1, f_v)$$

$$E_1 = 1 + f_u^2, \quad F_1 = f_u f_v, \quad G_1 = 1 + f_v^2$$

$$K_{2u} = (1, 0, g_u), \quad K_{2v} = (0, 1, g_v)$$

$$E_2 = 1 + g_u^2, \quad F_2 = g_u g_v, \quad G_2 = 1 + g_v^2$$

$$E_1 G_1 - F_1^2 = (1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 f_v^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2 =$$

$$= 1 + g_u^2 + g_v^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

Aquí, los elementos de área coinciden y también coincide el punto de integración,  $\underline{\underline{u}}$

8.1. Sea  $S$  una superficie regular y  $A_p$  su operador forma. Se define la *tercera forma fundamental* de  $S$  en  $p$  como  $\text{III}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$ .

- i) Demuestra que  $\text{III}_p = 2H(p)\text{II}_p - K(p)\text{I}_p$ , donde  $\text{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  y  $\text{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .
- ii) Concluye que una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si existe  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y no nula tal que  $\text{III}_p = \lambda(p)\text{I}_p$  para todo  $p \in S$ .
- iii) En otras palabras, una superficie regular sin puntos umbilicales es minimal si y solo si la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación conforme.

(i) En general:

$$A \text{ endomorfismo} \Leftrightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\boxed{n=2} \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$$

$$\boxed{\text{Cayley-Hamilton}} \quad P_{\lambda}^{(A)}(A) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 = \text{tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 \\ A^2 - \text{tr}(A)A + \det A I_2 \end{array} \right.$$

Ahora bien,

$$P_{A_p}(\lambda) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p)$$

$$\rightarrow A_p^2 = 2H(p) \cdot A_p - K(p) \cdot I_2$$

Añádese:

$$\begin{aligned} \text{II}_p &= \langle A_p v, A_p w \rangle = \langle A_p^2 v, w \rangle = \langle 2H(p) A_p v, w \rangle - \\ &- \langle K(p) v, w \rangle = 2H(p) \langle A_p v, w \rangle - K(p) \langle v, w \rangle = \\ &= 2H(p) \text{II}_p - K(p) \text{I}_p \end{aligned}$$

(ii)



$$\text{Minimal} \Leftrightarrow \kappa_p = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_p = \frac{-k(p)}{d(p)} I_p$$

$\Downarrow$

$$d_1 = -d_2$$

$A(p), d(p) = 0 \Leftrightarrow d_1 = d_2 = 0$ , pero no hay punto umbilical



$$\overline{\mathcal{M}}_p = d(p) I_p \quad \forall p \in S$$

$$2\kappa(p) \overline{\mathcal{M}}_p - k(p) I_p \Leftrightarrow 2\kappa(p) \overline{\mathcal{M}}_p = (d(p) + k(p)) I_p$$

O sea,  $\kappa_{V,W} \in T_p S$ , es

$$2\kappa(p) \langle A_p V, W \rangle = (d(p) + k(p)) \langle V, W \rangle$$

Supongamos  $k(p) \neq 0$ , entonces

$$\langle A_p V, W \rangle = \frac{d(p) + k(p)}{2\kappa(p)} \langle V, W \rangle = \langle \frac{d(p) + k(p)}{2\kappa(p)} V, W \rangle \quad \forall V, W$$

O sea:

$$A_p V = \frac{d(p) + k(p)}{2\kappa(p)} V \quad \forall V \in T_p S$$

pero, entonces todos los direcciones son principales y

$d_1 = d_2 = \frac{d(p) + k(p)}{2\kappa(p)}$  ~~contradicción, pues S no tiene punto umbilical.~~

Por tanto,  $\kappa(p) = 0$   $\overline{\mathcal{M}}_p$

$\phi: S_1 \rightarrow S_2$  es conforme si  $\exists \lambda > 0$ ,  $\lambda \in C^\infty(S_1)$

d.g.

$$\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle \quad \forall v, w$$

(iii)

$$S \text{ minimal} \Leftrightarrow \lambda(p) = \lambda(p) J_p \Leftrightarrow \langle A_p v, A_p w \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle$$
$$\lambda(p) = -K(p) > 0 \quad \forall v, w \in T_p S, \forall p \in S$$

$$\Leftrightarrow \langle -dN_p v, -dN_p w \rangle = \langle dN_p v, dN_p w \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle$$
$$\forall v, w \in T_p S, \forall p \in S$$
$$\lambda(p) > 0$$

$\cancel{\Leftrightarrow N_p}$  es conforme

- 8.2. Sea  $S$  una superficie regular que, localmente, puede expresarse como el grafo de una función diferenciable  $u = u(x, y)$  definida sobre un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Demuestra que  $S$  es minimal si y solo si la función  $u(x, y)$  verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* de las superficies minimales. Las soluciones triviales de esta ecuación son las funciones lineales, de la forma  $u(x, y) = ax + by + c$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , cuyos grafos se corresponden con los planos, vistos como superficies minimales. Cualquier otra solución de esta ecuación da lugar a una superficie minimal no trivial (véase el ejercicio 8.7).

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, u(x, y))$$

$$\mathbf{X}_x = (1, 0, u_x) \quad \mathbf{X}_y = (0, 1, u_y)$$

$$E = 1 + u_x^2 \quad F = u_x u_y \quad G = 1 + u_y^2$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = (-u_x, -u_y, 1)$$

Falta dividir  
por  $E G - F^2$

$$\mathbf{X}_{xx} = (0, 0, u_{xx}), \quad \mathbf{X}_{xy} = (0, 0, u_{xy}), \quad \mathbf{X}_{yy} = (0, 0, u_{yy})$$

$$e = u_{xx}, \quad f = u_{xy}, \quad g = u_{yy}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{u_{xx}(1+u_y^2) + u_{yy}(1+u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y}{(1+u_x^2)(1+u_y^2) - u_xu_y}$$

$$S \text{ minimal} \iff H = 0 \iff u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1+u_x^2) = 0$$

8.3. Sea  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular dada por  $\alpha(t) = (f(t), 0, t)$ , con  $f(t) > 0$ . Demuestra que la superficie de revolución generada por  $\alpha$  al girar alrededor del eje OZ y parametrizada por

$$X(\theta, t) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t)$$

es minimal si y solo si la función  $f(t)$  verifica la ecuación diferencial

$$f(t)f''(t) - f'(t)^2 = 1 \quad \text{o, equivalentemente, } \frac{2f'(t)f''(t)}{1+f'(t)^2} = \frac{2f'(t)}{f(t)}.$$

Concluye que  $S$  debe ser un trozo abierto de catenoide, es decir, de la superficie de revolución generada por la curva catenaria, la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\alpha(t) = \left( a \cosh\left(\frac{t}{a}\right), 0, t \right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

$$K_g = (-f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, 0), \quad K_t = (f_t \cos \theta, f_t \sin \theta, 1)$$

$$E = |f(t)|^2 \quad F = 0 \quad G = |f_t(t)|^2 + 1$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -f_s & f_c & 0 \\ f_{tc} & f_{ss} & 1 \end{vmatrix} = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, -f(t)f_t(t))$$

Falta dividir N  
por  $\sqrt{G-F}$

$$K_{gg} = (-f(t) \cos \theta, -f(t) \sin \theta, 0)$$

$$K_{tt} = (-f_t(t) \cos \theta, f_t(t) \cos \theta, 0)$$

$$K_{tf} = (f_{tt}(t) \cos \theta, f_{tt}(t) \sin \theta, 0)$$

$$e = f'(t) \quad f = 0 \quad g = |f(t)f_{tt}(t)|$$

$$H=0 \Leftrightarrow eG + fE = 0 \Leftrightarrow -f^2(1+f'^2) + ff'f'' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t)f''(t) - f'(t)^2 = 1$$

Variable que debe ser el catenide:

$$ff'' - f'^2 = 1 \iff ff'' = 1 + f'^2 \iff \frac{ff''}{1+f'^2} = 1 \iff \frac{ff''}{1+f'^2} = f'$$

$$\rightarrow \int \frac{ff''}{1+f'^2} dt = \int \frac{f'}{f} dt \rightarrow \frac{1}{2} \log(1+f'^2) = \log(f) + C$$

$$\rightarrow \log(1+f'^2) = 2 \log(|cf|) = \log((cf)^2)$$

$$\rightarrow 1+f'^2 = (cf)^2 \rightarrow f'^2 = (cf)^2 - 1 \rightarrow \frac{f'^2}{(cf)^2 - 1} = 1 \rightarrow \frac{f'}{\sqrt{(cf)^2 - 1}} = \pm 1$$

$$\rightarrow \int \frac{f'}{\sqrt{(cf)^2 - 1}} = \frac{1}{c} \int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)}} dx = \frac{1}{c} \int dx = \frac{x}{c}$$

$$(cf)(t) = \cosh(x) \rightarrow$$

$$cf'(t)dt = \cosh(x)dx$$

$$(cf)^2 - 1 = \cosh^2(x) - 1 = \sinh^2(x)$$

$$\rightarrow \frac{x}{c} = \int \pm 1 = \pm t + K \rightarrow x = \pm ct + K$$

$$\rightarrow cf(t) = \cosh(x) = \cosh(\pm ct + K)$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{c} \cosh(\pm ct + K)$$

8.4. Demuestra que el helicoide, parametrizado por la aplicación  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

es una superficie minimal.

$$N_u = (-v \sin u, v \cos u, a) \quad N_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$E = v^2 + a^2 \quad F = 0 \quad G = 1$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \sin u & v \cos u & a \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-a \sin u, a \cos u, -v)$$

Falta dividir  $N$   
por  $\sqrt{EG - F^2}$

$$N_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0)$$

$$N_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$N_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\epsilon = 0 \quad \gamma = 0$$

$$H = 0 \leftrightarrow \epsilon G + \gamma E = 0 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

8.5. Demuestra que la superficie de Enneper, parametrizada por

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

es una superficie minimal.

$$\mathbf{x}_u = (1-u^2+v^2, 2uv, 2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (2uv, 1-v^2+u^2, -2v)$$

$$E = (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = 1+u^4+v^4-2u^2+2v^2-2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = 1+u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2 = (1+u^2+v^2)^2$$

$$F = 2uv(1-\cancel{u^2+v^2} + 1-\cancel{u^2+v^2} + \cancel{u^2}) - 4uv = 4uv - 4uv = 0$$

$$G = 4u^2v^2 + (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2 = \dots = (1+u^2+v^2)^2$$

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} = (-4uv^2 - 2u(1-v^2+u^2), 4u^2v + 2v(1-u^2+v^2),$$

$$(1-u^2+v^2)(1-v^2+u^2) - 4u^2v^2) = (-4uv^2 - 2u + 2uv^2 - 2u^3, 4u^2v + 2v - 2u^2v + 2v^3,$$

$$, 1-\cancel{u^2}+\cancel{u^2}-\cancel{u^2}+u^2v^2-u^4+\cancel{v^2}-v^4+u^2v^2-4u^2v^2)$$

Falta dividir  
N por  $\sqrt{E-G-F^2}$

$$= (-2u(1+2v^2+u^2), 2v(1+2u^2+v^2), \frac{1-u^4-v^4-2u^2v^2}{1-(u^2+v^2)^2})$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-2u, 2v, 2) \quad \mathbf{x}_{uv} = (2v, 2u, 0) \quad \mathbf{x}_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

$$e = 4u^2(1+2v^2+u^2) + 4v^2(1+2u^2+v^2) + 2(1-u^4-v^4-2u^2v^2) =$$

$$= 4u^2 + 8u^2v^2 + 4u^4 + 4v^2 + 8u^2v^2 + 4v^4 + 2 - 2u^4 - 2v^4 - 4u^2v^2 =$$

$$= 4u^2 + 12u^2v^2 + 2u^4 + 4v^2 + 2v^4 + 2$$

$$g = -4u^2(1+2v^2+u^2) - 4v^2(1+2u^2+v^2) - 2(1-u^4-v^4-2u^2v^2) = -e$$

Con.  $F=0$ ,  $\phi$

$$n=0 \rightarrow eG+gE=0$$

then  $g=-e$ ,  $G=E \rightarrow eG+gE = eE-eE=0$  //

**8.6.** Demuestra que la primera superficie de Scherk, dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^z \cos x - \cos y = 0\},$$

es una superficie minimal. Indicación: observa que  $S$  puede expresarse como el grafo  $z = u(x, y)$  de la función

$$u(x,y) = \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

definida sobre el abierto (no conexo)  $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos x \cos y > 0\}$ .

$$Es \quad X(xy) = (x_1y, u(x_1y))$$

Ati, we send 8.2, sur minimal sig do si,

$$-u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 0$$

$$u_K = \frac{\log x}{\log y} \cdot \frac{-\log(1-\alpha x)}{\log x_K} = \frac{\alpha x}{\log x} = f_K$$

$$u_y = \frac{\cancel{c x^k}}{\cancel{c y^k}} \cdot \frac{-\ln y}{\cancel{c x^k}} = -\frac{1}{x} \ln y$$

$$u_{KK} = 1 + \tanh^2 K \quad u_{K\bar{K}} = 0 \quad u_{\bar{K}\bar{K}} = -1 - \tanh^2 j$$

$$(1+\tan^2 x) (1+\tan^2 y) - 0 - (1+\tan^2 y) (1+\tan^2 x) = 0 \quad //$$

8.7. La primera superficie de Scherk se puede caracterizar como la única superficie minimal no trivial que viene dada como grafo de una función de la forma  $u(x, y) = f(x) + g(y)$ . Este resultado fue obtenido en 1835 por Scherk, quien demostró que una función de la forma  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  es una solución no trivial de la ecuación de Euler-Lagrange si y solo si viene dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{a} \log(\cos(ax)) + \frac{1}{a} \log(\cos(ay)) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos(ay)}{\cos(ax)} \right), a \neq 0.$$

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1+u_x^2) = 0$$

$$\downarrow u(xy) = f(x) + g(y)$$

$$f''(1+f'^2) - 2f'g' \cdot 0 + g''(1+f'^2) = 0$$

↓

$$\underbrace{\frac{f''}{1+f'^2}}_{\text{depende de } x} + \underbrace{\frac{-g''}{1+f'^2}}_{\text{depende de } y} = \text{cte} = K$$

Obtendremos dos EDS:

$$\frac{f''}{1+f'^2} = K \quad - \quad \frac{g''}{1+f'^2} = K$$

↓

$$\int \frac{f''}{1+f'^2} dx = Kx + C \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \tan(Kx+C) = \frac{\sin(Kx+C)}{\cos(Kx+C)} \\ \arctan(f'(x)) \end{array} \right.$$

↓

$$f(x) = -\frac{1}{K} \cdot \log(\cos(Kx+C_1)) + L_1$$

$$g(y) = \frac{1}{K} \cdot \log(\cos(Ky+C_2)) + L_2$$

Nota:  $C_1, C_2, L_1, L_2$  solo son desplazamientos de  $f$  y  $g$

8.8. Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el catenoide obtenido como superficie de revolución alrededor del eje OZ de la curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = (\cosh t, 0, t)$ , parametrizado por la aplicación

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

convenientemente restringida a abiertos  $U = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto, en los que  $X(\theta, t)$  sea inyectiva.

- i) Demuestra que  $S$  es una superficie minimal. ¿Tiene algún punto umbílico?
- ii) Para cada  $a > 0$ , calcula el área del trozo de catenoide  $S_a = \{(x, y, z) \in S : |z| < a\}$ .
- iii) Observa que  $S_a$  es el trozo abierto de catenoide cuya frontera está formada por dos circunferencias, que son precisamente las circunferencias obtenidas al cortar el catenoide  $S$  con los planos  $z = a$  y  $z = -a$ . Existe otra superficie minimal (no conexa) con la misma frontera que  $S_a$ , que es justamente la formada por la unión disjunta de los dos discos planos determinados por las dos circunferencias  $z = a$  y  $z = -a$ . Denotando por  $\hat{S}_a$  a esta otra superficie minimal, se tiene que  $\hat{S}_a = D_+(a) \cup D_-(a)$ , siendo  $D_+(a)$  y  $D_-(a)$  los dos discos planos determinados por las dos circunferencias  $z = a$  y  $z = -a$ , respectivamente. Calcula el área de  $\hat{S}_a$  y demuestra que para valores de  $a$  suficientemente grandes se tiene que  $\text{área}(\hat{S}_a) < \text{área}(S_a)$ .

(i)

$$X(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

$$E = \cosh^2(t)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = (-\cosh t \sin \theta, \cosh t \cos \theta, 0)$$

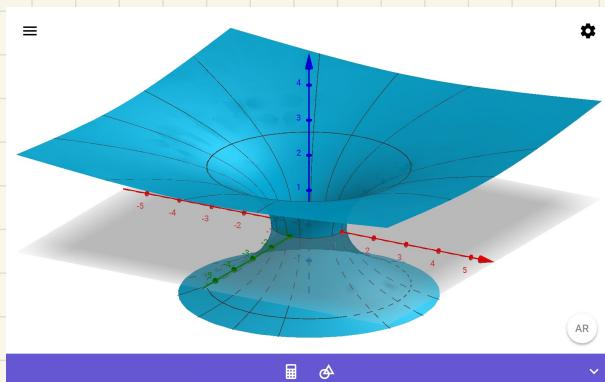
$$F = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (\sinh t \cos \theta, \sinh t \sin \theta, 1)$$

$$G = \sinh^2(t) + 1 = \cosh^2(t)$$

$\rightarrow X$  es Rotinaria

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow S \text{ minimal}$$



(6)

$$A(S_a) = \iint_{X^*(S_a)} \sqrt{EG - P^2} \, d\theta dt = \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{ch}^4(t)} \, d\theta dt =$$

$$= 2\pi \int_{-a}^a \text{ch}^2(t) \, dt = 4\pi \int_0^a \text{ch}^2(t) \, dt$$

$$\left[ \text{ch}(t)dt - \text{ch}(t)\text{sh}(t) \right]_0^a - \int_0^a \text{sh}^2(t)dt = \text{ch}(a)\text{sh}(a) - \int_0^a \text{sh}^2(t)dt$$

$$u = \text{ch}(t), du = \text{sh}(t)dt$$

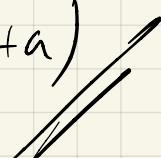
$$dv = \text{ch}(t)dt, v = \text{sh}(t)$$

$$= \text{ch}(a)\text{sh}(a) - \int_0^a \text{ch}^2(t) \cdot 1 \, dt = \text{ch}(a)\text{sh}(a) + a - \int_0^a \text{ch}^2(t) \, dt$$

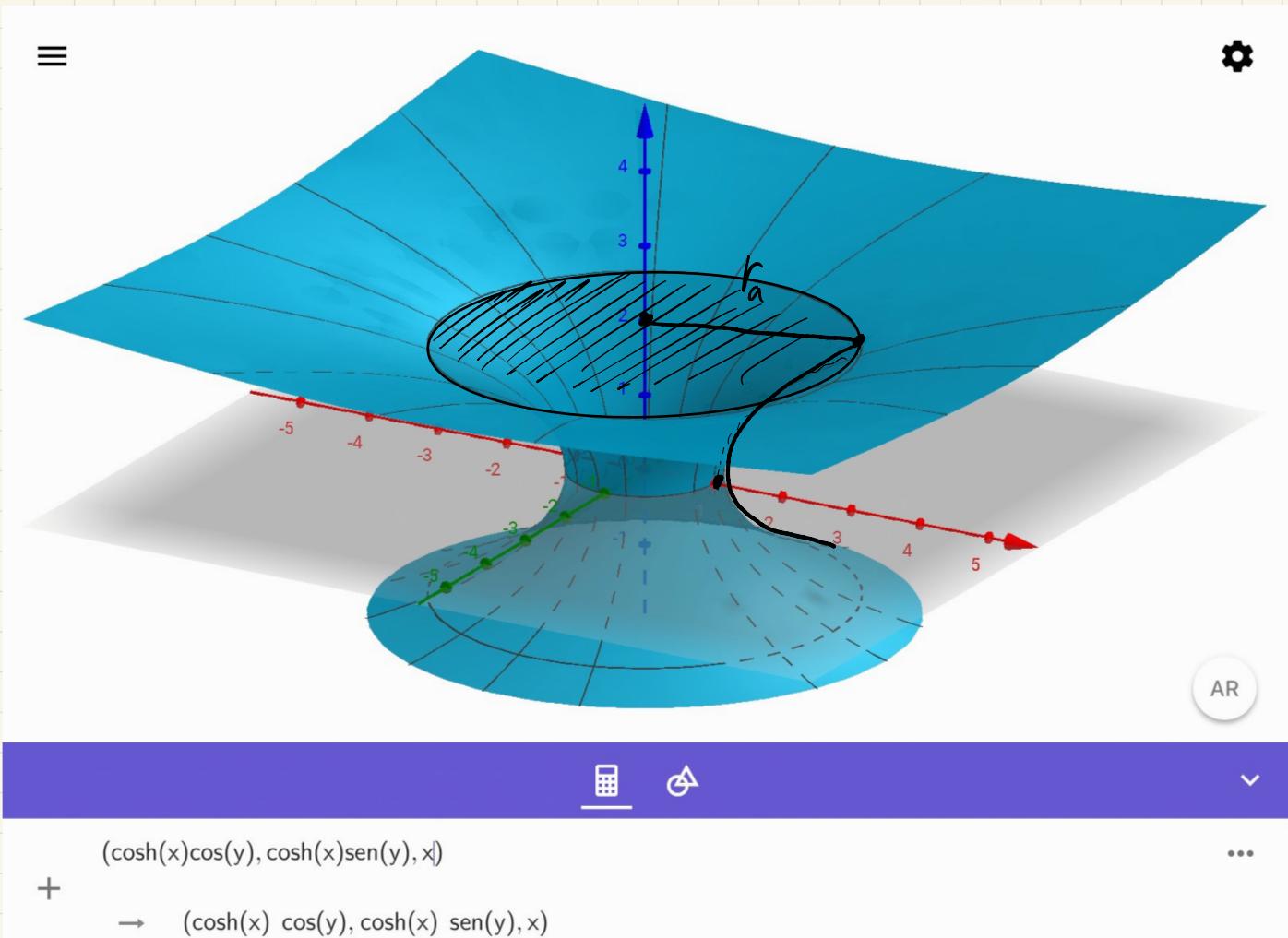
$$\Rightarrow 2 \int_0^a \text{ch}^2(t) \, dt = \text{ch}(a)\text{sh}(a) + a \rightarrow \int_a^a \text{ch}^2(t) \, dt = \frac{\text{ch}(a)\text{sh}(a) + a}{2}$$

? es

$$A(S_a) = 2\pi(\text{ch}(a)\text{sh}(a) + a)$$



①

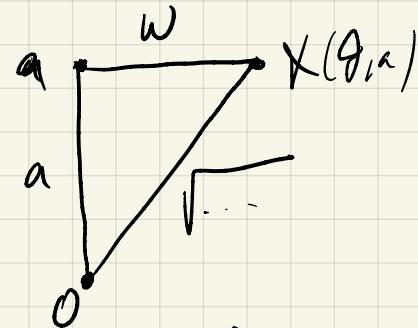


$|t|=a$ , per grafico  $t=a$ :

$$\mathbf{X}(\theta, t) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$$

$$\rightarrow \mathbf{X}(\theta, a) = (\cosh a \cos \theta, \cosh a \sin \theta, a)$$

$$\|\mathbf{X}(\theta, a)\| = \sqrt{\cosh^2 a + a^2}$$



$$\cosh^2 a + a^2 = w^2 \rightarrow w = \cosh a \xrightarrow{w \geq 0} \underline{\underline{w = \cosh a}}$$

$$\text{Ari}, \quad A(S_a) = 2 \cdot A(D_{\cosh(a)}) = 2 \cdot \pi \cdot \cosh^2(a)$$

$$A(\widehat{S}_a) < A(S_a) \Leftrightarrow 2\pi ch^2 a / c < 2\pi (cha sha ta)$$

$$\Leftrightarrow ch^2 a < cha sha ta$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{e^a + e^{-a}}{2} \right)^2 < \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + a$$

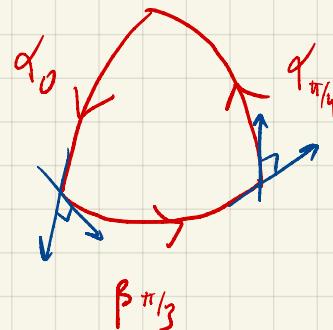
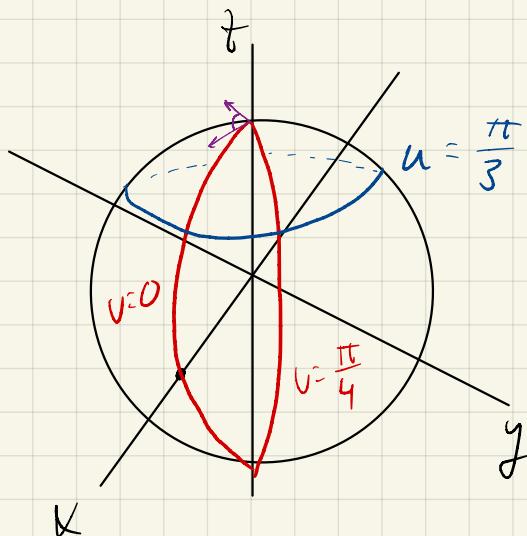
$$\frac{e^{2a} + 1 + e^{-2a}}{4} < \frac{e^2 - 1 + 1 - e^{-2a}}{4} + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + e^{-2a}}{4} < \frac{4a - e^{-2a}}{4} \Leftrightarrow 1 + e^{-2a} < 4a - e^{-2a}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot e^{-2a} < 4a$$

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow 0 & \downarrow & \\ 1 & & \end{array} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{ccc} \downarrow a \rightarrow \infty & & \\ \infty & & \end{array}$$

9.1. Considera la parametrización de la esfera  $X(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$ . Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región  $R$  limitada por los meridianos de longitudes  $v = 0$  y  $v = \pi/4$ , y el paralelo de colatitud  $u = \pi/3$ .



$$X_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u), X_v = (-r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, 0)$$

$$E = r^2, F = 0, G = r^2 \sin^2 u \quad EG - F^2 = r^2 \sin^2 u, G_u = 2r^2 \sin u \cos u$$

- $F=0$ , por lo que el paralelo  $\gamma$  y los meridianos son ortogonales,
- $u_s, \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\pi}{2}$
- Los meridianos son geodésicos  $\rightarrow k_g = 0$
- $k = \frac{1}{r^2}$

Aquí hay que calcular:  $\int_R k dS + \int_{\Gamma_p} k_g (\beta_{\pi/3}) ds + \pi + \epsilon_1 = ?$

$$\int_R k dS = \iint_D \frac{1}{r^2} \sqrt{1 + r^2 \sin^2 u} du dv = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/4} \sin u du = \frac{\pi}{4} [-\cos u]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \cdot \left[ -\frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos u \cos v & r \cos u \sin v & -r \sin u \\ -r \sin u \cos v & r \sin u \sin v & 0 \end{vmatrix} = (r^2 s^2 u \cos v, r^2 s^2 u \sin v, r^2 \cos u)$$

$$N(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

$$\beta_{\pi/3}(v) = \left(r \frac{\sqrt{3}}{2} \cos v, r \frac{\sqrt{3}}{2} \sin v, \frac{r}{2}\right)$$

$$k_g^P(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G(u,v)}{\partial u} = \frac{1}{2r^2 \sin u} \cdot 2r \frac{\partial \tan \cos u}{\partial u} = \frac{\cos u}{r \sin u} = \frac{\sqrt{3}}{3r}$$

$$\beta_{\pi/3}'(v) = \frac{r}{2} (-\sqrt{3} \cos v, \sqrt{3} \sin v, 0)$$

$$\|\beta_{\pi/3}'(v)\| = \sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$\int_0^{\pi/4} k_g ds = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{3}}{8r} \frac{\sqrt{3}}{2} \times dv = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} dv = \frac{\pi}{8}$$

Holo folgt  $\epsilon_1$ .

$$\alpha_0 = (r \cos u, 0, r \sin u) \quad u \in (0, \frac{\pi}{3})$$

$$\alpha_{\frac{\pi}{3}}' = \left(r \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}-u\right), r \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}-u\right), r \cos\left(\frac{\pi}{3}-u\right)\right) \quad u \in (0, \frac{\pi}{3})$$

$$\alpha_0' = (r \cos u, 0, -r \sin u), \quad \alpha_0'(0) = (r, 0, 0)$$

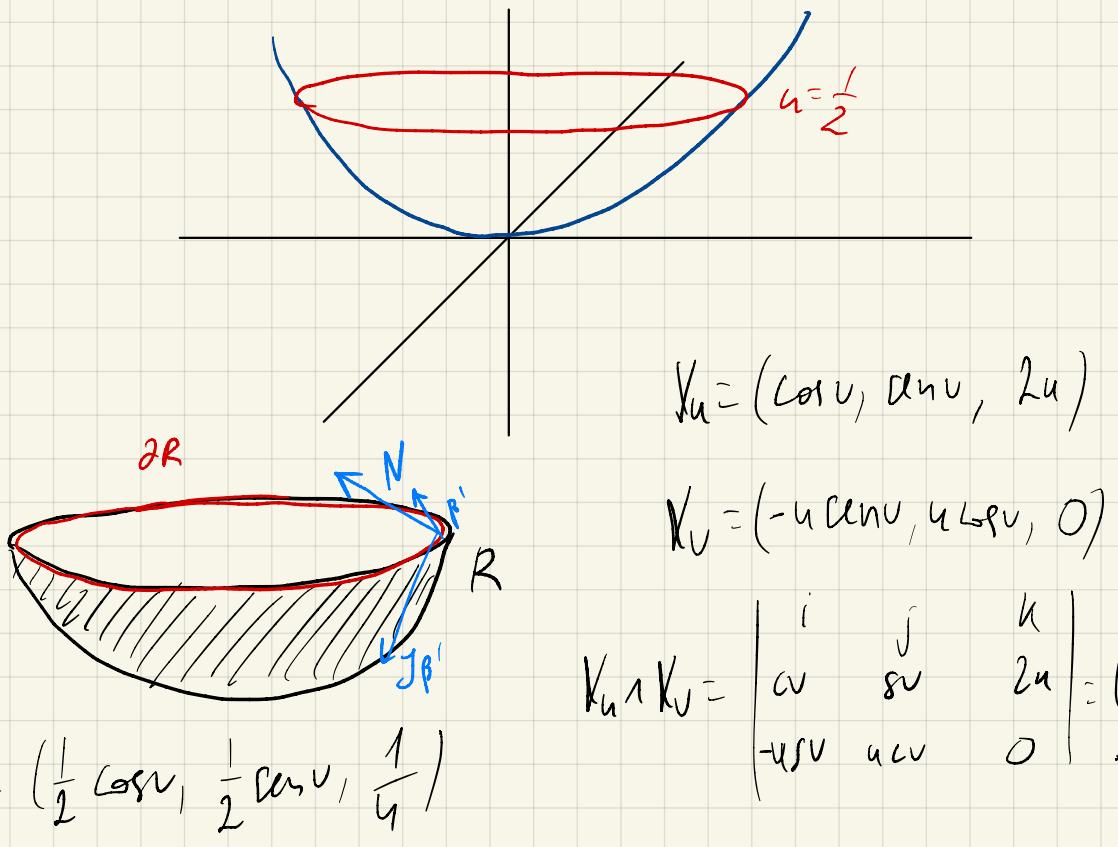
$$\alpha_{\frac{\pi}{3}}' = \left(-r \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}-u\right), -r \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}-u\right), r \sin\left(\frac{\pi}{3}-u\right)\right)$$

$$\alpha_{\frac{\pi}{3}}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r, 0\right) \rightarrow \|\alpha_{\frac{\pi}{3}}'\| = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3}r^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\langle \alpha_0', \alpha_{\frac{\pi}{3}}' \rangle = \|\alpha_0'\| \|\alpha_{\frac{\pi}{3}}'\| \cos(\epsilon_1) = r \cdot r \cdot \cos(\epsilon_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(\epsilon_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \epsilon_1 = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi + \pi + 8\pi + 6\pi}{8} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi$$

**9.2. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.3)** Considera la parametrización  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ ,  $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  del paraboloide de revolución. Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región  $R$  determinada por la curva coordenada  $u = 1/2$ .



$$\begin{cases} E = 1 + 4u^2 \\ F = 0 \\ G = u^2 \end{cases} \quad EG - F^2 = u^2 + 4u^2$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} (-2u \cos v, -2u \sin v, u)$$

$$N\left(\frac{1}{2}, v\right) = \frac{1}{2} \left(-\cos v, -\sin v, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta_{1/2}'(v) = \left(-\frac{1}{2} \sin v, \frac{1}{2} \cos v, 0\right), \|\beta_{1/2}'\| = \frac{1}{2}$$

$$J_{\beta_{1/2}'}(v) = N \wedge \beta_{1/2}' = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos v & -\sin v & \frac{1}{2} \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos v, -\frac{1}{2} \sin v, -1\right)$$

$$k_g^{\beta_{1/2}}(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \cdot G_u = \frac{1}{2u^2\sqrt{1+4u^2}} \cdot 2u = \frac{1}{u\sqrt{1+4u^2}} \stackrel{u=1/2}{=} \frac{1}{1/2\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\int_{\partial R} k_g ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi = \sqrt{2}\pi$$

$$k = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{\epsilon_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] = \frac{-1}{2u\sqrt{1+4u^2}} \left[ 0 + \left( \frac{8u}{\sqrt{1+4u^2}} \right)_u \right]$$

$$= \frac{1}{u\sqrt{1+4u^2}} \cdot \frac{4u}{\sqrt{(1+4u^2)^3}} = \frac{4}{(1+4u^2)^2}$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \right)' = (1+4u^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (1+4u^2)^{-3/2} \cdot 8u = \frac{-8u}{2\sqrt{(1+4u^2)^3}}$$

$$\int_R k ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{4}{(1+4u^2)^2} \cdot u\sqrt{1+4u^2} du du = 2\pi \int_0^{1/2} \frac{4u}{\sqrt{(1+4u^2)^3}} du$$

$$= 4\pi \left[ -\frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} \right]_0^{1/2} = 2\pi \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right] = 2\pi \left[ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right] = 2\pi \left[ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right] =$$

$$= \boxed{\pi[2-\sqrt{2}]}$$

$$\cancel{\sqrt{2}\pi + \pi[2-\sqrt{2}] = 2\pi}$$

9.3. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.5) Sea  $P \subset \mathbb{S}^2$  un polígono geodésico (esto es, las curvas que lo forman son trozos de geodésica) en la esfera con  $n$  lados. Si  $\phi_i$  son sus ángulos interiores, demuestra que  $A(P) = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n-2)\pi$ .

$$\varepsilon_i + \phi_i = \pi \rightarrow \varepsilon_i = \pi - \phi_i$$

$$A(P) = \int_P dS$$

por Gauß-Bonnet es

$$\underbrace{\int_P K dS}_{\frac{1}{r^2} \int_P dS} + \underbrace{\int_{\partial P} k_g dS}_{0, \text{ por ser segmentos de geodésicas}} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^n \pi - \phi_i = n\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i$$

$$\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n A(P) = A(P)$$

$$\text{Así, } A(P) = 2\pi - n\pi + \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i - (n-2)\pi$$

**9.4. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.6)** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular p.p.a. no plana. Para cada  $s \in I$  considera la recta que pasa por  $\alpha(s)$  con dirección su vector binormal,  $\mathbf{b}(s)$ . Representamos por  $S$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  obtenido como la unión de todas estas rectas, y suponemos  $\alpha$  tal que  $S$  es una superficie regular reglada, al menos para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Una parametrización natural para dicha superficie viene dada por

$$X(t, s) = \alpha(s) + t \mathbf{b}(s), \quad (t, s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I.$$

- i) Calcula las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas.
- ii) Supóngase que  $\alpha$  tiene torsión constante, y considérese la región simple  $R$  determinada por las curvas coordenadas correspondientes a los valores  $t = t_0, t = t_1, s = s_0$  y  $s = s_1$ , para  $t_0 < t_1$  y  $s_0 < s_1$ , con  $t_0, t_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  y  $s_0, s_1 \in I$ . Calcula  $\int_R K dS$ .
- iii) Comprueba que se verifica el teorema de Gauss-Bonnet para la región  $R$ .

i)  $X_t = b(s)$        $X_s = \alpha'(s) + t b'(s) = \alpha'(s) + t \cdot T \tau(s)$

$$E = 1 \quad F = 0 \quad G = 1+tT$$

$$\alpha_s(t) \rightarrow k_g \alpha_s(t) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} E_s = 0$$

$$\beta_t(s) \rightarrow k_g \beta_t(s) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} G_t = \frac{1}{2(1+tT)} \cdot T(s)$$

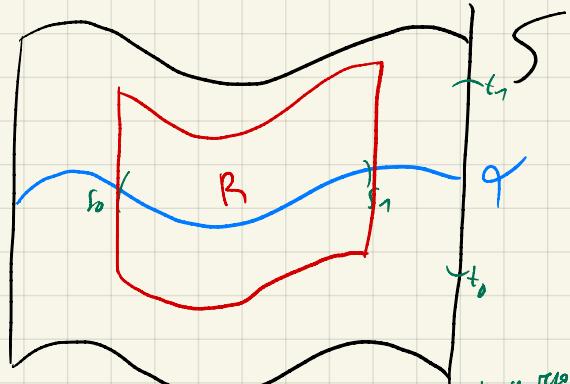
ii)  $T(s) = T$

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{E_s}{\sqrt{EG}} \right)_s + \left( \frac{G_t}{\sqrt{EG}} \right)_t \right] = \frac{-1}{2\sqrt{1+tT}} \left[ 0 + \left( \frac{T}{\sqrt{1+tT}} \right)_t \right] = \frac{T^2}{4(1+tT)^2}$$

$$(T(1+tT)^{-1/2})' = T \left( -\frac{1}{2} \cdot (1+tT)^{-3/2} \right) \cdot T = \frac{T^2}{2\sqrt{(1+tT)^3}}$$

$$\int_R K dS = \int_{t_0}^{t_1} \int_{s_0}^{s_1} \frac{T^2}{4(1+tT)^2} \cdot \sqrt{1+tT} ds dt = (s_1 - s_0) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{T^2}{4\sqrt{(1+tT)^3}} dt =$$

$$= (s_1 - s_0) \cdot \left[ \frac{-T}{\sqrt{1+tT}} \right]_{t_0}^{t_1} = (s_1 - s_0) \left[ \frac{-T}{\sqrt{1+t_0T}} + \frac{T}{\sqrt{1+t_1T}} \right]$$



Como  $F=0$ , las curvas coordinadas son perpendiculares, y  $\epsilon_i = \frac{\pi}{2}$ , para  $i=1,\dots,9$

Tenemos visto que  $k_g^{\alpha_S} = 0$ .

esta u recorre en sentido inverso

$$\text{Así, resulta que } \int_{t_0}^{t_1} k_g^{\beta_{t_0}} d\vec{s} + \int_{t_0}^{t_1} k_g^{-\beta_{t_1}} d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{I}{1+t_0T} \cdot \sqrt{1+t_0T} - \frac{I}{1+t_1T} \sqrt{1+t_1T} ds =$$

$$\|\beta_t'(s)\| = \sqrt{G} = \sqrt{1+tT}$$

$$= T(s_1 - s_0) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+t_0T}} - \frac{1}{\sqrt{1+t_1T}} \right] = - \int_R k ds$$

$$\text{Así} \quad \int_R k ds + \int_{\partial R} k_g d\vec{s} + \sum \epsilon_i = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \cancel{\text{}}$$

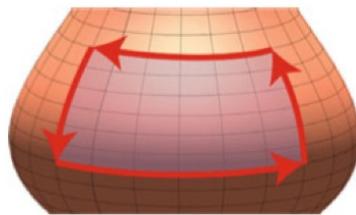
$-\int_R k ds$

**9.5. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.7)** Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular p.p.a. contenida en el plano  $xz$  de la forma  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  con  $x(s) > 0$  para todo  $s \in I$ , y sea  $S$  la superficie de revolución generada al girar la curva  $\alpha$  alrededor del eje  $z$ . Una parametrización natural de  $S$  es  $X : I \times (0, 2\pi) \rightarrow S$  dada por

$$X(\theta, s) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)),$$

la cual cubre toda la superficie  $S$  excepto la curva generatriz  $\alpha$ .

Dados  $s_1, s_2 \in I$  con  $s_1 < s_2$  y  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$  con  $\theta_1 < \theta_2$ , considera la región rectangular  $R$  limitada por los paralelos  $s = s_1$  y  $s = s_2$ , y por los meridianos  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , tal y como se observa en la figura adjunta.



Calcula  $\int_{\partial R} \kappa_g ds$  y  $\int_R K dS$  en términos de las coordenadas  $x(s)$  y  $z(s)$  de la curva generatriz y verifica explícitamente el teorema de Gauss-Bonnet para este ejemplo.

$$\kappa_g = (-\kappa(s) \sin \theta, \kappa(s) \cos \theta, 0) \quad \kappa_s = (\kappa'(s) \cos \theta, \kappa'(s) \sin \theta, \tau'(s))$$

por p.p.a.  $\rightarrow \| \kappa' \| = \| (\kappa', 0, \tau') \| = \sqrt{\kappa'^2 + \tau'^2}$

$$E = \kappa'^2(s) \quad F = 0 \quad G = \kappa'(s)^2 + \tau'(s)^2 = 1$$

$$\kappa_s(\theta) \rightarrow \kappa_g \cdot \kappa_s(\theta) = -\frac{1}{2E\sqrt{G}} E_s - \frac{2\kappa \kappa'}{2\kappa^2} = -\frac{\kappa'}{\kappa}$$

$$\kappa_\theta(s) \rightarrow \kappa_g \cdot \kappa_\theta(s) = \frac{1}{2\sqrt{E}} G_g = 0$$

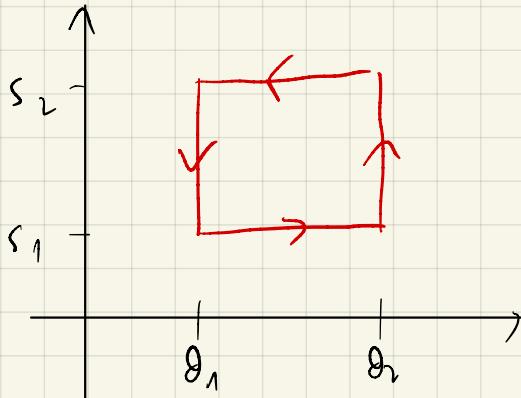
$$\kappa = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{E_s}{\sqrt{EG}} \right)_s + \left( \frac{G_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta \right] = \frac{-1}{2\kappa} \left[ \left( \frac{2\kappa \kappa'}{\kappa} \right)_s + 0 \right] = \frac{-\kappa''}{\kappa}$$

$$\int_R k ds = \int_{S_1}^{S_2} \int_{\partial_1}^{\partial_2} -\frac{x''}{x} \cdot x' ds = -(\partial_2 - \partial_1) \int_{S_1}^{S_2} x'' ds =$$

$$= -(\partial_2 - \partial_1) (x'(S_2) - x'(S_1))$$

Como  $F=0$ , las curvas coordinadas se cortan perpendicularmente  $\rightarrow \varepsilon_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $i=1, \dots, 4$

Como  $k g^F(s)=0$ ,  $\int_{\partial R} k g d\zeta^i = \int_{I_{\alpha_{S_1}}} k g d\zeta^i + \int_{I_{\alpha_{S_2}}} k g d\zeta^i$



$$\begin{aligned} \int_{\partial R} k g d\zeta^i &= \int_{\partial_1}^{\partial_2} k g^{\zeta_1} \|g_{\zeta_1}\| ds + \int_{\partial_2}^{\partial_1} k g^{\zeta_2} \|g_{\zeta_2}\| ds = -\int_{\partial_1}^{\partial_2} \frac{x'(s_1)}{|x(s_1)|} k(x_1) + \frac{x'(s_2)}{|x(s_2)|} x(s_2) ds \\ &= (\partial_2 - \partial_1) (x'(s_2) - x'(s_1)) = - \int_R k ds \end{aligned}$$

$\gamma$  es  $\int_R k ds + \int_{\partial R} k g d\zeta^i + \sum \varepsilon_i = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$

**9.6. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.8)** Sea  $S$  una superficie regular cuya curvatura de Gauss verifica  $K(p) \leq -1$  para todo  $p \in S$  y sea  $\Gamma \subset S$  un polígono geodésico de  $n$ -lados. Es decir  $\Gamma \subset S$  es un polígono curvado formado por  $n$  segmentos de geodésicas que encierra una región simplemente conexa  $R \subset S$ .

- Demuestra que  $n \geq 3$  (es decir, no puede ser  $n = 2$ ). Indicación: Échale un ojo a la demostración de la Consecuencia 3, p. 238, del libro de texto.
- Demuestra que si  $n = 3$ , entonces el área de  $R$  es menor o igual que  $\pi$ .
- ¿Qué puedes decir en general del área de  $R$  si  $n > 3$ ?

(i)

Supongamos  $n=2$ .

$$\text{Entonces } \int_R k dS + \int_{\partial R} k_g ds + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\pi$$

$\overbrace{0}$  por ser círculo de radio 1.

$$\rightarrow \int_R k dS + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \int_R -1 dS + \pi + \pi = 2\pi - A(R) \quad \left( \begin{array}{l} \rightarrow A(R) = 0 \\ \cancel{\text{}} \end{array} \right)$$

(ii)

$$\left. \begin{aligned} \int_R k dS + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 2\pi \\ \int_R -1 dS &= 3\pi \end{aligned} \right\} 2\pi \leq -A(R) + 3\pi \rightarrow A(R) \leq \pi$$

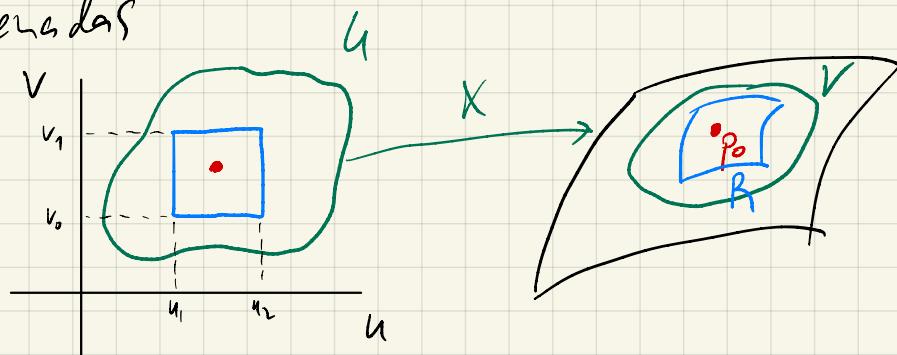
(iii)

$$\left. \begin{aligned} \int_R k dS + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i &= 2\pi \\ -A(R) &+ n\pi \end{aligned} \right\} A(R) \leq (n-2)\pi$$

9.7. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.9) Sea  $S$  una superficie regular tal que para todo punto  $p \in S$  existe una parametrización orthogonal  $(U, X)$  con  $p \in V = X(U)$  y cuyas curvas coordenadas son geodésicas de  $S$ . Demuestra que la superficie es llana, es decir,  $K \equiv 0$ . Indicación: Aplica el teorema de Gauss-Bonnet local a las pequeñas regiones rectangulares limitadas por las curvas coordenadas de  $X$ .

Sea  $p_0 \in S$  y sea  $V$  un entorno de  $p_0$  cubierto por una  $X$  como la del anexo.

Podemos tomar  $R \subset V$  en  $\partial R$  un cuadro geodésico de coordenadas



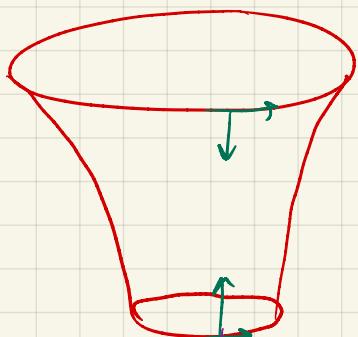
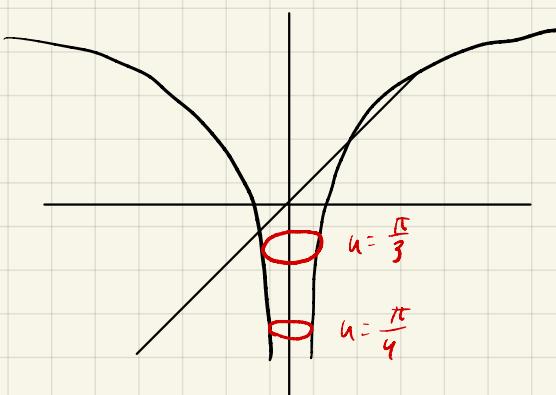
Entonces, por Gauss-Bonnet, es

$$\int_R K dS + \underbrace{\left( \int_{\partial R} k_g ds + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \right)}_{0, \text{por ser quadrilateros}} = 2\pi$$

$4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi, \text{ por } \alpha = F = 0$

Ahí  $\int_R K dS = 0$  y  $k(p_0) = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \cdot \int_R K dS = \lim_{A(R) \rightarrow 0} 0 = 0$

**10.1.** (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.2) Para la parametrización  $X(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan(u/2))$  de la pseudoesfera, comprueba el teorema de Gauss-Bonnet en la región limitada por los paralelos  $u = \pi/3$  y  $u = \pi/4$  (en este caso  $\chi(R) = 0$ ).



$$K_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u + \frac{1}{\tan(\frac{u}{2})} \cdot (1 + \tan^2(\frac{u}{2})) \cdot \frac{1}{2})$$

$$-\sin u + \frac{1}{\tan(\frac{u}{2})} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{u}{2})} \cdot \frac{1}{2} = -\sin u + \frac{1}{\sin(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{u}{2})} \cdot \frac{1}{2} = -\sin u + \frac{1}{2 \sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{u}{2})}$$

$$\therefore -\sin u + \frac{1}{\sin(u)} = -\frac{\sin^2 u + 1}{\sin u} = \frac{\cos^2 u}{\sin u}$$

$$K_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \frac{\cos^2 u}{\sin u}) \quad K_v = (-\sin u \cos v, \sin u \cos v, 0)$$

$$E = \cos^2 u + \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2 u$$

$$K_u \wedge K_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \cos v & \sin u \sin v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, \cos u \sin v)$$

$$N = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u)$$

$$K_g^{R^u}(u) = \frac{1}{2\sqrt{E}} G_u = \frac{1}{2\sqrt{E}} \cancel{\frac{\partial g}{\partial u}} \cdot \cancel{2\sin u \cos u} = 1$$

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{E}G} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial E} \right)_u + \left( \frac{\partial u}{\partial G} \right)_v \right) = \frac{-1}{2\cos u} \cdot \left( 0 + \left( \frac{2\sin u \cos u}{\sin u} \right)_v \right) = \frac{-2\cos u}{2\cos u} = -1$$

$$\beta_u(v) = K(u, v)$$

$$\beta_u'(v) = K_v(u, v) = (-\cos u \cos v, \cos u \sin v, 0), \|\beta_u'\| = \sin u$$

$$J_{\beta_u}(v) = N \wedge \beta_u'(v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos u \cos v & -\cos u \sin v & \sin u \\ -\sin u \cos v & \sin u \sin v & 0 \end{vmatrix} = (-\sin^2 u \cos v, -\sin^2 u \sin v, -\cos u)$$

Queremos que  $J_{\beta_u}(v)$  apunte "hacia dentro" luego de

$$\boxed{u: \frac{\pi}{3}} - \text{es } \frac{\pi}{3} \text{ ac-} \frac{\pi}{3} < 0 \quad \checkmark \rightarrow \beta_{\pi/3}$$

$$\boxed{u: \frac{\pi}{4}} - \text{es } \frac{\pi}{4} \text{ ac-} \frac{\pi}{4} < 0 \quad \times \rightarrow -\beta_{\pi/4}$$

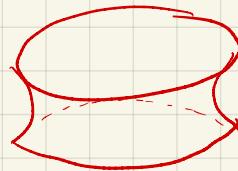
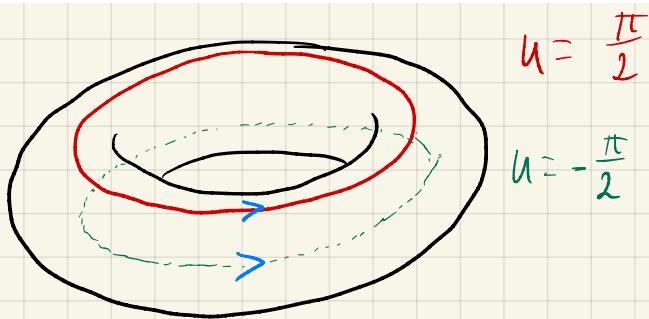
$$\int_R k dS = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos u du dv = 2\pi \left[ -\cos u \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\pi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$\int_{\partial R} k_g ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dv + \int_{\sqrt{2}\pi}^0 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dv = 2\pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2\pi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Ahí,

$$\int_R k dS + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_i \varepsilon_i = 0 = 2\pi \chi(R)$$

10.2. (En la versión anterior de los apuntes del Bloque 4, este ejercicio era el 9.4) Considera la parametrización  $X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$  del toro. Comprueba el teorema de Gauss-Bonnet para la región limitada por los paralelos superior e inferior (en este caso  $\chi(R) = 0$ ).



$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v = (-(\alpha + r \cos u) \sin v, (\alpha + r \cos u) \cos v, 0)$$

$$E = r^2 \quad F = 0 \quad G = (\alpha + r \cos u)^2$$

$$k = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_u}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) = \frac{+1}{2r(\alpha + r \cos u)} \cdot \left( 0 + \left( \frac{+2(\alpha + r \cos u) \times (\alpha \sin u)}{r(\alpha + r \cos u)} \right)_u \right)$$

$$= \frac{\cos u}{r(\alpha + r \cos u)}$$

$$\int_R k dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{r(\alpha + r \cos u)} \cdot |\alpha + r \cos u| du dv = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du = 2\pi [\alpha \sin u]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi$$

$$Kg^{\beta_u}(v) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} G_u = \frac{1}{2(\alpha + r \cos u)^2} \cdot \cancel{(\alpha + r \cos u)} \cdot \cancel{|(\alpha \sin u)|} = \frac{-\sin u}{\alpha + r \cos u}$$

$$Kg^{\beta_{\pi/2}}(v) = \frac{-1}{\alpha} \quad Kg^{\beta_{-\pi/2}}(v) = \frac{1}{\alpha}$$

$$V_u \wedge V_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ rsuv & -rsuv & rcu \\ (atrcu)sv & (atrcu)cv & 0 \end{vmatrix} = (r(atrcu)cu, -r(atrcu)cv, -r(atrcu)sv)$$

$$N = (\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

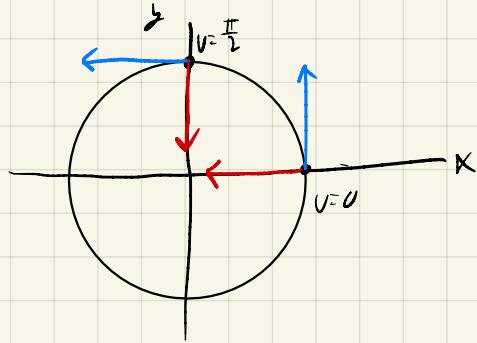
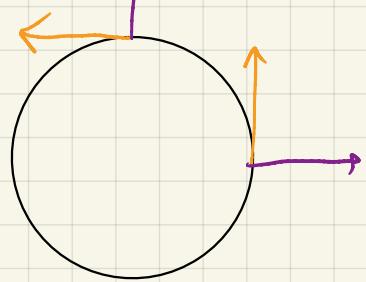
$$\beta_u(u) = K(u, u), \quad \beta_u'(u) = K_u(u, u) = (-(\alpha + r cu) sv, (\alpha + r cu) cv, 0)$$

$$J_{\beta_u}(u) = N \wedge \beta_u'(u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cu & cv & -su \\ -cu & -cv & -su \\ -(\alpha + r cu)cv & (\alpha + r cu)cu & 0 \end{vmatrix} = (-(\alpha + r cu)/su)cv, (\alpha + r cu)su, cu(\alpha + r cu))$$

$$\beta_{\pi_h}'(u) = (-\alpha \cos v, \alpha \sin v, 0) \bullet$$

$$J_{\beta_{\pi_h}}'(u) = (\alpha \cos v, -\alpha \sin v, 0) \bullet$$

$$\beta_{-\frac{\pi}{2}}'(u) = (-\alpha \sin v, \alpha \cos v, 0) \bullet$$



$\beta_{\pi_h}$  u recorre  
directamente

$\beta_{-\frac{\pi}{2}}$  u recorre n sentido inverso.

$$\int_R K ds = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{a} a dv + \int_{2\pi}^0 \frac{1}{a} a dv = -2\pi - 2\pi = -4\pi$$

O sítio,

$$\int_R K ds + \int_{2\pi} K ds + \sum_i G_i = H_{II} - H_{II} = 0 = 2\pi \underbrace{g(R)}_0$$