Tarea 4

Jose Antonio Lorencio Abril

Dado $p_0 \in S$, considera V un entorno normal de p_0 y sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que la clausura del disco geodésico $\overline{D(p_0,\varepsilon)} \subset V$, de modo que $D(p_0,\varepsilon) = \exp_{p_0}(\mathcal{D}(0,\varepsilon))$ es también un entorno normal de p_0 y la circunferencia geodésica $S(p_0,\varepsilon) = \partial D(p_0,\varepsilon) = \exp_{p_0}(\mathcal{S}(0,\varepsilon)) \subset V$.

Dado p un punto de S tal que $p \notin D(p_0,\varepsilon)$, considera la función continua $r : S \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = d(x,p)$. Sea $m \in S(p_0,\varepsilon)$ el punto de $S(p_0,\varepsilon)$ donde $r(x)$ alcanza el mínimo sobre el compacto $S(p_0,\varepsilon)$; es decir, $r(m) = d(m,p) = \min_{x \in S(p_0,\varepsilon)} r(x)$. Entonces se cumple que

$$d(p_0,p) = d(p_0,m) + d(m,p)$$

Proof Primero, comprobamos que $S(p_0,\varepsilon)$ es compacto, ya que es la imagen por una aplicación continua (de hecho un difeomorfismo, $\exp_{p_0}$, pues estamos dentro de un entorno normal) de $\mathcal{S}(0,\varepsilon)$, que es compacto, pues es cerrado y acotado en un espacio homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Así, el mínimo del enunciado se alcanza en $S(p_0,\varepsilon)$ y el punto m, efectivamente, existe y está contenido en $S(p_0,\varepsilon)$.

Pasamos ahora a la igualdad:

[$\leq$] Obvio, por la desigualdad triangular, por ser d una distancia

$$d(p_0,p) \leq d(p_0,m) + d(m,p)$$

[$\geq$] Observemos que para cualquier $\alpha \in \Omega(p_0,p)$ con $\alpha : [0,b] \to S$ (puede tomarse 0 en el extremo izquierdo reparametrizando, si este es c, con el cambio $x \mapsto x - c$), existe un valor $a \in (0,b)$ tal que $\alpha(a) \in S(p_0,\varepsilon)$ y $\alpha(t) \in D(p_0,\varepsilon)$, $\forall t < a$.

Para ver que este punto existe, observamos que, en general si $\alpha \in \Omega(p_0,p)$, dado $U \in \mathcal{E}(p_0)$, $\exists t_1 / \alpha(t_1) \in U$ y, de igual forma, $\forall U' \in \mathcal{E}(p)$, $\exists t_2 / \alpha(t_2) \in U'$.

Supongamos que existe una curva α sin tal punto a. Podemos entonces tomar $U = D(p_0,\varepsilon)$ y $U' = S \setminus \overline{D(p_0,\varepsilon)}$ (ya que estamos en el caso en el que $p \notin D(p_0,\varepsilon)$), de tal forma que ambos entornos comparten la frontera y son abiertos disjuntos, con $\alpha([0,b]) \subset U \cup U' = S \setminus S(p_0,\varepsilon)$, que no es conexo, pues lo hemos escrito como unión disjunta de dos abiertos no vacíos. Encontraríamos, entonces, t_1 y t_2 tales que

$$\alpha(t_1) \in U, \ \alpha(t_2) \in U'$$

pero esto no puede ser, puesto que entonces estaríamos uniendo mediante α dos puntos de dos conjuntos inconexos. Por tanto, suponer que puede existir una curva que no corte a $S(p_0,\varepsilon)$ nos lleva a una contradicción, y concluimos que existe tal punto a para cualquier $\alpha \in \Omega(p_0,p)$.

Una cuestión relativamente importante es que hemos dicho que $a < b$, cuando p podría estar en $S(p_0,\varepsilon)$ y ser $a = b$. Pero este caso no nos preocupa, ya que podemos usar el caso anterior de la demostración del lema original, cuando $q \in D(p_0,\varepsilon)$ y construir una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(p_0,\varepsilon)$ con $q_n \overset{n\to\infty}{\to} p$ y obtenemos el resultado para ese caso, pudiendo excluirlo ahora.

Sean ahora $\alpha_1 = \alpha_{|[0,a]}$ y $\alpha_2 = \alpha_{|[a,b]}$, de donde obtenemos

$$L(\alpha) = L(\alpha_1) + L(\alpha_2) \geq d(p_0,\alpha(a)) + d(\alpha(a),p)$$

Ahora bien, dado $0 < \delta < \varepsilon$, se tiene que

$$S(p_0,\delta) \subset D(p_0,\varepsilon)$$

y dado $q_\delta \in S(p_0, \delta)$ se tiene que

$$q_\delta = \exp_{p_0}(w_{q_\delta}) = \gamma_{q_\delta}(1)\,, \;\; \|w_{q_\delta}\| = \delta$$

y entonces, por el teorema 3.8,

$$d(p_0, q_\delta) = L(\gamma_{q_\delta}) = \int_0^1 \left\|\gamma'_{q_\delta}(s)\right\| ds = \int_0^1 \|w_{q_\delta}\|\, ds = \delta$$

y haciendo tender $\delta \to \varepsilon$ obtenemos que, dado $q_\varepsilon \in S(p_0)$ se tiene $d(p_0, q_\varepsilon) = \varepsilon$. En concreto tenemos

$$d(p_0, \alpha(a)) = d(p_0, m) = \varepsilon$$

Por otro lado, tenemos

$$d(\alpha(a), p) = r(\alpha(a)) \overset{\alpha(a)\in S(p_0,\varepsilon)}{\geq} \min_{x\in S(p_0,\varepsilon)} r(x) = r(m) = d(m, p)$$

Por lo que

$$L(\alpha) = L(\alpha_1) + L(\alpha_2) \geq d(p_0, \alpha(a)) + d(\alpha(a), p) = d(p_0, m) + d(\alpha(a), p) \geq d(p_0, m) + d(m, p)$$

Tomando ínfimos en $\alpha \in \Omega(p_0, p) \neq \emptyset$ por ser S conexa, obtenemos

$$d(p_0, p) \geq d(p_0, m) + d(m, p)$$

y tenemos con esto ambos lados de la desigualdad.