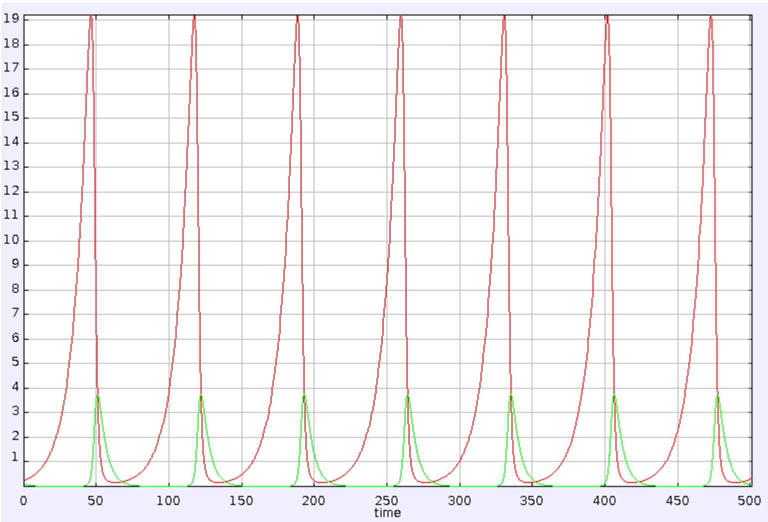
Examen de MNED

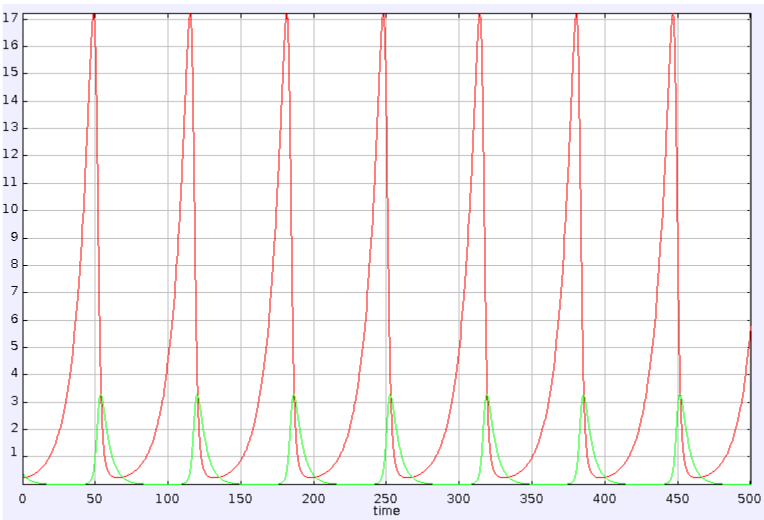
Jose Antonio Lorencio Abril

11 Febrero 2021

A) Al probar diferentes casos, se obtiene una gráfica con la siguiente forma.

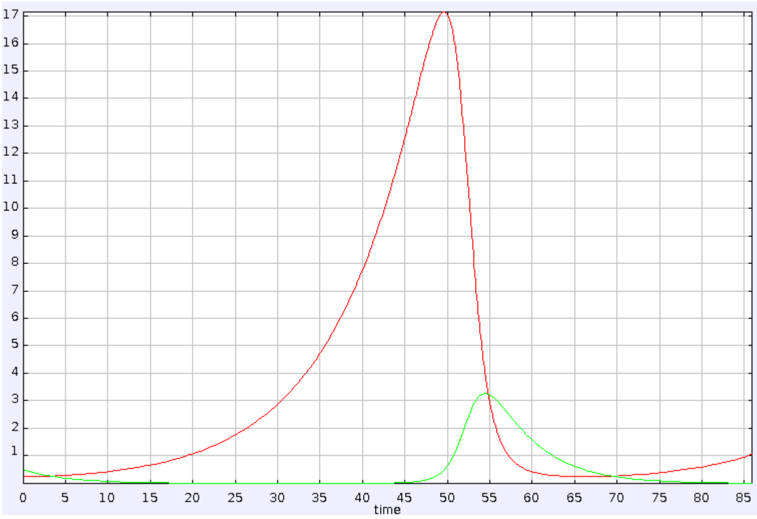


Y aunque hagamos que al inicio, y tenga más población que x, sigue ocurriendo lo mismo:



Parece, por tanto, que sí que es periódica. Vamos a calcular el período.

Una forma de hacerlo es obtener dos ceros de la función $x - 1$ comprobando que la derivada tiene el mismo sentido. Así, obtenemos:



Y la salida del programa dice que:

El período es: 66.3096.

Para ver que es independiente de las condiciones iniciales, voy a probar algunas combinaciones:

(x, y)	Período
$(0.25, 0.4)$	66.3096
$(0.25, 0.8)$	66.9583
$(0.5, 0.5)$	58.5232
$(0.7, 0.3)$	55.7431

Y el período no parece independiente de las condiciones iniciales.

B) Para calcular la población media voy a utilizar una suma de Riemann. Obtenemos una tabla:

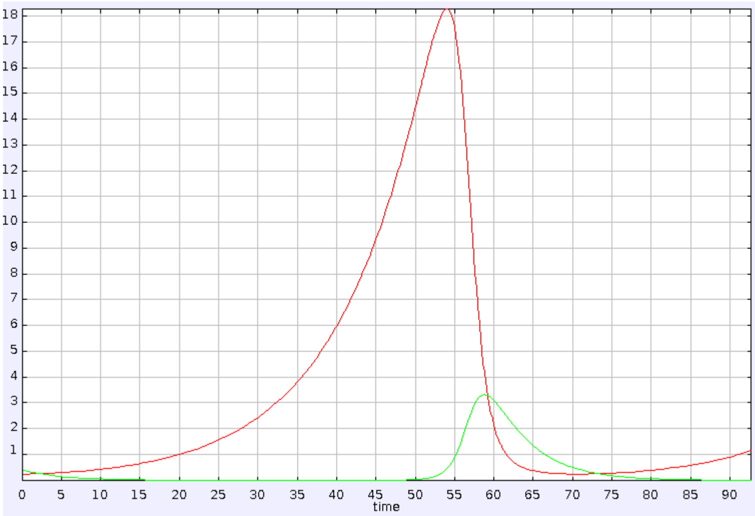
(x, y)	Población Media X	Población Media Y
$(0.25, 0.4)$	3.999999	0.500002
$(0.25, 0.8)$	4.0000058	0.50002
$(0.5, 0.5)$	4.000017	0.50002
$(0.7, 0.3)$	4.000024	0.50001

Y parece bastante justificado pensar que esta afirmación es acertada, las poblaciones medias en un período no dependen de las condiciones iniciales.

C) Cambiamos el PVI por

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - fx \\ y' = -cy + dxy - fy \end{cases}$$

he introducido $f = 0.1$ (una cantidad moderada, y obtengo lo siguiente):



La forma de la solución no se ve afectada, esto era predecible ya que realmente introducir esta f es como variar a y $-c$ en una misma cantidad. Ahora bien, Obtenemos un período de 71.1461 para $x0 = 0.25$ e $y0 = 0.4$, por lo que el período se ve afectado, aumentando. Recalculamos las poblaciones medias y obtenemos que la población media de x es 4.20001, y la de y es 0.45002. Parece que, efectivamente, la población de presas aumenta, pero además la de depredadores parece que disminuye. Voy a repetir esto con un par más de condiciones iniciales:

(x, y)	f	Población Media X	Población Media Y
$(0.25, 0.4)$	0.1	4.20001	0.45002
$(0.25, 0.8)$	0.1	4.20002	0.45008

Y estos datos parecen consistentes con la afirmación B) (las poblaciones medias son independientes de las condiciones iniciales) y con la afirmación C) (al introducir pesca aumenta la población media de presas).

1) He utilizado el método de Runge-Kutta-Felberg. He elegido este método porque en las últimas prácticas proporcionaba unos resultados tan buenos como los demás métodos, pero solía necesitar menos evaluaciones de la función de evaluación. Por ejemplo, lo comparábamos con RK4, un método del mismo orden, y necesitaba aproximadamente la mitad del tiempo para proporcionar una solución con una misma tolerancia. Esperaba, por tanto, obtener resultados buenos con este método. Respecto al comportamiento frente a largos períodos de tiempo, este método aguantaba bastante tiempo sin desviarse de la órbita para el problema de Arenstorf, y en el problema Sol-Tierra podía dar 100 vueltas sin despeinarse.

Para este problema, podemos calcular los períodos obtenidos y ver cuánto se van distanciando del original.

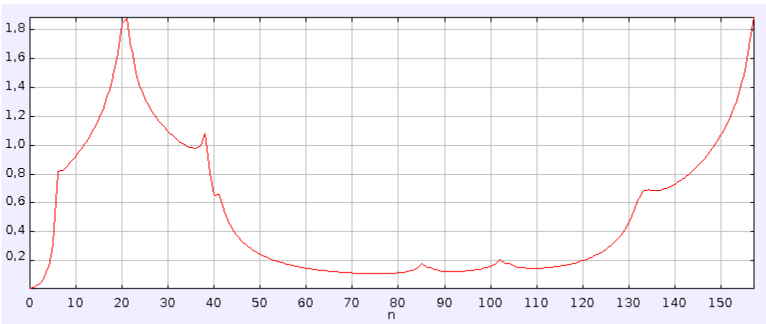
Poniéndole de tiempo hasta 10000, obtenemos 75 períodos, que resumo en la siguiente tabla:

Lapso	Período
1	66.30954937017759
2	66.30953894189304
3	66.30953207154823
4	66.30952157931688
5	66.30951259629546
10	66.3094658254945
15	66.30941790263955
20	66.3093690095834
50	66.30908631665261
60	66.30899134749234
75	66.30885054815008

Y vemos como, realmente, el método trabaja genial con este problema, obteniendo una variación entre el primer período el 75-ésimo de tan solo ~10^{-5}.

Para realizar este último caso, bastante extremo, del problema, el método necesita usar 597162 evaluaciones de la función de evaluación. Esto es bastante sorprendente, teniendo en cuenta que, si hacemos memoria, por ejemplo Euler necesitaba millones de pasos para el problema de los dos cuerpos.

Volvemos ahora al problema original, en el que solo buscamos el primer período, y vamos a ver la evolución del paso:



Podemos observar cómo da pasos de hasta 1.8 (aproximadamente $\frac{1}{30}$ del período) y que no parece bajar de tamaños de alrededor de 0.1. Esto explica los pocos pasos necesarios para resolver el problema.

2) Esto ya lo he ido haciendo en los apartados anteriores. También hemos visto en el apartado anterior que el resultado se mantiene en el tiempo, y que el método lo calcula con bastante precisión.

Respecto a estos resultados, a nivel de computación, ya hemos discutido en 1) el comportamiento del método elegido para este problema, así como, en los demás apartados, cómo se ha obtenido cada resultado y las conclusiones pertinentes.

Respecto a cómo se traducen estos resultados hacia el fenómeno que tratamos de modelar, hay varias conclusiones que podemos obtener:

- Las poblaciones animales en competencia presa-depredador son altamente dependientes entre sí, y el mecanismo de caza puede ser un regulador natural muy bueno de control de población.

Por otro lado, hemos de tener en cuenta que no hemos contado con las limitaciones materiales del entorno, por ejemplo, está claro que la cantidad de presas no puede crecer ilimitadamente, aunque no hubiera cazadores, ya que las presas deben alimentarse de, por ejemplo, plantas, que existen también en una cantidad limitada.

- Que las poblaciones medias sean constantes en un período, parece indicativo de que esta cantidad estará altamente relacionada con la capacidad del medio de absorber las necesidades de ambos grupos.

- Por último, al introducir pesca aumenta la población media de las presas. Esto tiene una sencilla explicación. Somos un nuevo depredador, pero que consume ambos tipos de animales indistintamente. Esto hace que haya menos depredadores, por lo que las presas pueden desarrollarse más libremente, ya que nosotros consumimos menos presa que cada uno de los depredadores que consumimos nosotros también.

3) Este apartado ha ido llevándose a cabo a lo largo del examen, en cada ejercicio.