Ejercicios GyA - Cap 6

Jose Antonio Lorencio Abril

6 Grupos de permutaciones

6.1 Ciclos y traposiciones

6.1.3 Calcular σ^{1000}, donde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 & 10 & 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1\ 3\ 2\ 5)\,(4\ 6\ 7)\,(8\ 10\ 11)$, luego $\sigma^{12} = 1$, y $1000 \mod 12 = 4$, entonces $\sigma^{1000} = \sigma^4$, el 4−ciclo va al 1 y los 3−ciclos vienen del 1, o sea $\sigma^{1000} = (4\ 6\ 7)\,(8\ 10\ 11)$

6.1.4 Dada la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 9 & 8 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, calcular el orden de σ^2

$\sigma = (1\ 5\ 2)\,(3\ 9\ 7\ 4\ 8\ 6)$, luego $\sigma^2 = (1\ 2\ 5)\,(3\ 7\ 8)\,(9\ 4\ 6)$, por lo que tiene orden 3.

6.1.5 Sea $1 \neq \sigma \in S_n$. Demostrar que σ es un ciclo si y solo si, para cualquiera $j, k \in M(\sigma)$, existe un entero $m:\ \sigma^m(j) = k$.

' $\Longrightarrow$ ' Si σ es un ciclo, entonces podemos escribirlo como $(j\ a_1...a_k\ k\ a_{k+2}...a_n)$, de forma que $\sigma^i(j) = \begin{cases} a_i & i \neq k \\ k & i = k \end{cases}$

' $\Longleftarrow$ ' Tomemos $a \in M(\sigma)$ y supongamos que σ no es un ciclo, entonces se puede escribir como producto de ciclos disjuntos, a estará en uno de estos ciclos, pero, entonces, dado b en un ciclo distinto del que está a, $\nexists m \in \mathbb{Z}/\sigma^m(a) = b\#$

6.1.6 Demostrar que una permutación tiene orden primo p si y solo si se factoriza como un producto de ciclos disjuntos, cada uno de longitud p.

' $\Longrightarrow$ ' Sea σ una permutación de orden primo p. Entonces esta permutación puede expresarse como producto de ciclos disjuntos, además, el orden de una permutación es el mcm de las componentes de su tipo, o sea, el mcm de las longitudes de los ciclos. Para que el mcm de un conjunto de naturales sea p, estos solo pueden ser 1 y p, y sabemos que no existen permutaciones de orden 1.

' $\Longleftarrow$ ' Como el orden es el mcm de las componentes del tipo, $mcm\{p, p, ..., p\} = p$

6.1.7 Demostrar que para todo $1 \leq k < n$, S_n tiene al menos $\binom{n}{k}$ subgrupos isomorfos a $S_k \times S_{n-k}$ y que todos son conjugados; es decir, para dos de estos grupos H, K existe $\sigma \in G/H^\sigma = K$.

Para cada subconjunto X de $\mathbb{N}_k$ tomamos

$$H_X = \{\sigma \in S_n : \sigma(X) = X\ (\iff \sigma(\mathbb{N}_n \setminus X) = \mathbb{N}_n \setminus X)\} \simeq S_{|X|} \times S_{|\mathbb{N}_n \setminus X|} = S_k \times S_{n-k}$$

esto nos da $\binom{n}{k}$ subgrupos distintos isomorfos a $S_k \times S_{n-k}$.

Falta ver que son conjugados. Sean X, Y dos subconjuntos con k elementos. Entonces existe $f \in S_n$ tal que $f(X) = Y$ y $f(\mathbb{N}_n \setminus X) = \mathbb{N}_n \setminus Y$.

Sea $\sigma \in H_X$, entonces $f\sigma f^{-1}(y)$ y $f^{-1}(y) = x \in X \implies \sigma(x) = z \in X \implies f(z) \in Y \implies f\sigma f^{-1}(y) \in Y$, por lo que $f\sigma f^{-1} \in H_Y$, y por tanto son conjugados.

6.1.8 Dados dos números naturales n, k con $n \geq k \geq 2$, se pide

1. **Demostrar que, para cada subconjunto A de $\mathbb{N}_n$ de cardinal k, el número de k-ciclos σ de S_n con $M(\sigma) = A$ es $(k-1)!$**

   Hay $k!$ maneras de coger los k elementos y, dada una elección, las k presentaciones del ciclo son equivalentes (con esto me refiero a que $(a\ b\ c) = (c\ a\ b) = (b\ c\ a)$, y así en todo ciclo), por tanto hay $\frac{k!}{k} = (k-1)!$

2. **Demostrar que el número de $k-$ciclos en S_n es $\binom{n}{k}(k-1)!$**

   Como hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos, entonces, usando el apartado anterior, queda demostrado

3. **¿Cuántos elementos de tipo $[2,2]$ hay en S_5? ¿Y de $[2,3]$?**

   Para el primer $2-$ciclo hay $\binom{5}{2} \cdot 1!$ y para el segundo $\binom{3}{2} \cdot 1!$, en el segundo son 3 porque una vez has elegido dos elementos para el primero, no puedes repetirlos en el segundo. En total hay

$$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{4} = 30$$

   Para $[2,3]$ es

$$\binom{5}{2}\binom{3}{3} \cdot 2! = \frac{5!}{3!2!}2! = 20$$

4. **¿Cuántos elementos de tipo $[2,2]$ hay en S_6? ¿Y de $[2,3]$? ¿Y $[3,3]$?**

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{6!4!}{4!2!2!2!} = \frac{6!}{8} = 90$$

$$\binom{6}{2}\binom{4}{3}2! = \frac{6!4!}{4!2!3!}2 = \frac{6!}{6} = 120$$

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot \binom{3}{3} \cdot 2 = \frac{6!}{3!3!}4 = 80$$

5. **Calcular en general el número de elementos de S_n de tipo $[k_1, ..., k_r]$**

$$\prod_{i=1}^{r}\left[\binom{n - \sum_{j=1}^{i-1} k_i}{k_i}(k_i - 1)!\right]$$

6.1.9 Sea G un grupo finito de orden n, y sea $g \in G$ de orden m. Se define $\phi_g : G \to G$ por $\phi_g(x) = gx$. Viendo a ϕ_g como un elemento de S_n, demostrar que:

1. **ϕ_g es un producto de $\frac{n}{m}$ ciclos de longitud m**

   Consideremos $\langle g \rangle \setminus G$, para cada clase $\langle g \rangle x = \left\{x, gx, g^2x, ..., g^{m-1}x\right\}$ tenemos m elementos y $\phi_g = \left(x\ gx\ ...g^{m-1}x\right)$, como hay $\frac{n}{m}$ clases de equivalencia que forman una partición de G, lo tenemos.

2. **La paridad de ϕ_g coincide con la paridad del entero $(m-1)\frac{n}{m}$**

   Un ciclo de longitud m tiene signo $(-1)^{m-1}$, y tenemos $\frac{n}{m}$ de esos ciclos, por tanto ϕ_g par $\iff (m-1)\frac{n}{m}$ es par

3. **Si $(m-1)\frac{n}{m}$ es impar, entonces G tiene un subgrupo normal de índice 2**

   Sea el homomorfismo inyectivo de G a S_n dado por $g \to \phi_g$. Entonces, $G \simeq Im(h) = H$, que es un subgrupo de S_n. Usando el 3º teorema de isomorfía, tenemos que

   $$\frac{H}{H \cap A_n} \simeq \frac{A_n H}{A_n}$$

   Luego $H \cap A_n$ tiene índice 2 por ser subgrupo de un subgrupo con índice 2.

   Además, $A_n H = S_n$, porque hay elementos en H que no están en A_n, como ϕ_g, que es impar. Por lo tanto, $H \cap A_n$ está estrictamente contenido en A_n. La preimagen por h de $H \cap A_n$ tiene índice 2 (h es una biyección, conserva orden e índice) y, por tanto, también es normal.

6.1.10 Teorema de Cayley: demostrar que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de S_n para algún n.

La aplicación dada por $g \to \phi_g$, que va de G a S_n, es un homomorfismo inyectivo de anillos, por tanto, G es isomorfo a un subgrupo de S_n.

6.1.11 Demostrar que el centralizador de la permutación $\sigma = (1\ 2...n)$ en S_n es $\langle\sigma\rangle$.

El centralizador, $C_{S_n}(\sigma)$, es el estabilizador de la acción por conjugación. Es decir, buscamos $\left\{a : a^{-1}\sigma a = \sigma\right\}$.

O sea, ha de ser $\sigma a = a\sigma$, por lo que buscamos los elementos que conmutan con σ. Veamos que $\{a/a\sigma = \sigma a\} = \langle\sigma\rangle$.

'$\supset$' Dado $a \in \langle\sigma\rangle$, se tiene que $a = \sigma^k$, y entonces

$$\sigma a = \sigma\sigma^k = \sigma^{k+1} = \sigma^k\sigma = a\sigma$$

'$\subset$' Sea a tal que $a\sigma = \sigma a$. Esto podría suceder si $M(a) \cap M(\sigma) = \emptyset$, pero esto, quitando el caso $a = 1$, no puede suceder porque σ mueve todos los elementos. Es decir, todo lo que mueve a lo mueve σ. Supongamos que a no es una potencia de σ, entonces

6.2 El grupo alternado

6.2.2 Demostrar que el grupo alternado A_n es un subgrupo característico del grupo simétrico S_n.

Si $n \geq 2$, entonces A_n es el único subgrupo de cardinal $\frac{n!}{2}$, por el ejercicio 6.3.2, por el ejercicio 4.4.2.6, lo tenemos.

6.2.3 Sea $n \geq 2$ y sea $f : S_n \to S_{n+2}$ la aplicación dada por $f(\sigma) = \sigma^*$, donde σ^* actúa igual que σ sobre los elementos $1, 2, ..., n$ y σ^* fija (resp. intercambia) $n+1$ y $n+2$ cuando σ es par (resp. impar). Demostrar que f es un homomorfismo inyectivo de grupos y que su imagen está contenida en A_{n+2}. Deducir que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo alternado.

Sean $a, b \in S_n$, entonces, hay varios casos:

- a, b pares, entonces $f(a) = a$, $f(b) = b$, y ab es par, luego $f(ab) = ab$

  $$f(a)f(b) = ab = f(ab)$$

- a, b impares, $f(a) = a(n+1\ n+2)$, $f(b) = b(n+1\ n+2)$ y ab par, luego $f(ab) = ab$

$$f(a) f(b) = a(n+1\ n+2) b(n+1\ n+2) \stackrel{*}{=} ab = f(ab)$$

  la igualdad del * se da porque a, b no mueven $n+1$ ni $n+2$.

- a par, b impar, entonces $f(a) = a$, $f(b) = b(n+1\ n+2)$, ab es impar, y es $f(ab) = ab(n+1\ n+2)$

$$f(a) f(b) = ab(n+1\ n+2) = f(ab)$$

- a impar, b impar, análogo al anterior

Así, f es homomorfismo.

Para ver que la imagen está contenida en A_{n+2}, basta ver que $f(a)$ es par, para todo a.

Si a es par, entonces $f(a) = a$ y es par.

Si a es impar, entonces $f(a) = a(n+1\ n+2)$, luego es producto de dos permutaciones impares. Por lo tanto es par.

Por el teorema de Cayley (ej 6.1.10) todo grupo es isomorfo a un subgrupo de S_n, y acabamos de ver que dado un subgrupo de S_n es isomorfo a un subgrupo de A_{n+2}.

6.2.4 Probar que si P es un subgrupo de orden 4 del grupo alternado A_5, entonces P es isomorfo al grupo de Klein $C_2 \times C_2$.

Los subgrupos de orden 4 de A_5 están formados por el 1 y elementos de tipo $[2,2]$,porque los elementos de tipo $[2]$ son impares y los de tipo $[3]$ tienen orden 3 y los demás tipos tendrán exponentes mayores que 4. Se tiene, además, que

$$(a\ b)(c\ d) \cdot (a\ b)(c\ d) = 1$$

por lo que estos subgrupos no pueden ser cíclicos, ya que sus elementos tienen orden 2. Como los grupos finitos de orden 4 son isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y el primero no es posible, debe ser isomorfo al segundo, que es isomorfo a $C_2 \times C_2$.

6.2.5 Demostrar que D_n es isomorfo al subgrupo $\langle \rho, \sigma \rangle \subset S_n$, con $\rho = (1\ 2 \ldots n-1\ n)$ y σ es el producto de las trasposiciones $(i, n+1-i)$, donde i varía desde 1 hasta la parte entera de $\frac{n}{2}$. ¿Para qué valores de n se tiene $\langle \rho, \sigma \rangle \subset A_n$?

Sea

$$\begin{array}{rcl} f : D_n (= \langle a, b \rangle) & \to & \langle \rho, \sigma \rangle \\ a & \mapsto & \rho \\ b & \mapsto & \sigma \end{array}$$

se tiene que $|a| = |\rho| = n$ y $|b| = |\sigma| = 2$.

Para ver que está bien definida hay que ver que $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$:

$$\sigma\rho(i) = \begin{cases} \sigma(i+1) = n - i & si\ i < n \\ \sigma(1) = n & si\ i = n \end{cases}$$

$$\rho^{-1}\sigma(i) = \rho^{-1}(n+1-i) = \begin{cases} n - i & si\ n+1-i > 1 \iff i < n \\ n & si\ n+1-i = 1 \iff i = n \end{cases}$$

Por lo que está bien definida y está bastante claro que es un homomorfismo.

La suprayectividad es bastante evidente también.

Como tienen el mismo cardinal, entonces también es inyectiva, y se tiene la isomorfía.

Para la segunda parte, es necesario $\sigma, \rho \in \langle \sigma, \rho \rangle \subset A_n$ y es suficiente, pues el producto de elementos de A_n está en A_n (es subgrupo).

Para que sea $\rho \in A_n$, n debe ser impar.

Para que $\sigma \in A_n$, debo tener un número par de trasposiciones en σ, esto es $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ debe ser par.

Si $n = 4k + 1$, se cumplen ambas condiciones, y si $n = 4k + 3$, entonces $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1$, luego no se cumple la segunda.

Es decir, que debe ser $n \equiv 1 \mod 4$.

6.2.7 Demostrar que $A_n$está generado por los 3−ciclos de la forma $(1\ 2\ i)$, $i = 3, ..., n$.

Si vemos que, dado un 3-ciclo, podemos expresarlo como producto de este tipo de 3-ciclos, lo tendremos.

$$(1\ a\ b) = (1\ 2\ b)\,(1\ 2\ a)^2$$
$$(2\ a\ b) = (1\ 2\ b)^2\,(1\ 2\ a)$$
$$(2\ 1\ a) = (1\ 2\ a)^2$$
$$(i\ j\ k) = (1\ 2\ i)^2\,(1\ 2\ k)\,(1\ 2\ j)^2\,(1\ 2\ i)$$

6.3 El teorema de Abel

6.3.1 Para $n \geq 5$, demostrar que S_n tiene exactamente tres subgrupos normales.

Van a ser $1, A_n, S_n$.

Sea $G \leq S_n$ normal, entonces $G \cap A_n$ es normal, luego es subgrupo normal de A_n y se tiene $A_n \cap G = 1$ o $A_n \cap G = A_n$, por ser A_n simple.

- $A_n \cap G = A_n \implies \frac{|S_n|}{2} \mid |G| \mid |S_n|$, luego $|G| = \frac{|S_n|}{2}$ o $|G| = |S_n|$. En el primer caso $G = A_n$ (es el único por el ejercicio siguiente) y en el segundo $G = S_n$.
- $A_n \cap G = 1$, entonces $G = 1$, pues dado $g \in G \setminus \{1\}$, $|g| > 1$ y $g^2 \in A_n \cap G$, pues A_n tiene índice 2 y es normal, luego $1 = A_n \cap G \ni g^2$. Tenemos entonces que el tipo de g es $[2, ..., 2]$ y, además, como $g \notin A_n$, $sgn\,(g) = -1$, por lo que g es el producto de un número impar de trasposiciones. Además, como G es normal, contiene a la clase de conjugación de g, luego contiene a todas las permutaciones con el mismo tipo. Distinguimos dos casos:
  - $g = (1\ 2)$, una sola trasposición que podemos considerar es esta. Entonces, como $n \geq 5$, $(3\ 4) \in G$ y $(1\ 2)\,(3\ 4) \in A_n \cap G\#$
  - $g = (1\ 2)\,(3\ 4)\,(5\ 6) ...$, entonces $\overline{g} = (1\ 4)\,(2\ 3)\,(5\ 6) ...$ tiene el mismo tipo y está en G, luego $g\overline{g} = (1\ 2)\,(3\ 4) ... (1\ 4)\,(2\ 3) ... = (1\ 2)\,(3\ 4)\,(1\ 4)\,(2\ 3) = (1\ 3)\,(2\ 4) \in G \cap A_n\#$