ANM - Tarea 1

Jose Antonio Lorencio Abril, 3º PCEO

18-3-2020

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathbf{10x_1} & \mathbf{-x_2} & & \mathbf{= 9} \\ \mathbf{-x_1} & \mathbf{10x_2} & \mathbf{-2x_3} & \mathbf{= 7} \\ & \mathbf{-2x_2} & \mathbf{10x_3} & \mathbf{= 6} \end{array}\right.$$

que tiene matriz de coeficientes con tridiagonal.

- **Demuestra que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para este sistema son convergentes**

Observemos que, si $A = (a_{i,j})$ es la matriz de coeficientes, entonces

$$|a_{1,2}| + |a_{1,3}| = 1 + 0 < 10 = |a_{1,1}|$$

$$|a_{2,1}| + |a_{2,3}| = 1 + 2 < 10 = |a_{2,2}|$$

$$|a_{3,1}| + |a_{3,2}| = 0 + 2 < 10 = |a_{3,3}|$$

de forma que A es una matriz con diagonal estrictamente dominante. Por tanto, el teorema 3.3.2 nos asegura que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

- **Primeras iteraciones de los métodos comenzando en $\boldsymbol{x^0 = (0, 0, 0)^t}$**

Jacobi

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to r_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - diag \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix} \to r_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{21}{10} \\ -\frac{14}{10} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix} - diag \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{21}{10} \\ -\frac{14}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{97}{100} \\ \frac{91}{100} \\ \frac{74}{100} \end{pmatrix} \to r_2 = \begin{pmatrix} -\frac{21}{100} \\ -\frac{35}{100} \\ -\frac{42}{100} \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to r_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$r(1) = -9 \to x(1) = \frac{9}{10}$$

$$r(2) = \frac{-79}{10} \to x(2) = \frac{79}{100}$$

$$r(3) = \frac{-758}{100} \to x(3) = \frac{758}{1000}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} \\ \\ \dfrac{79}{100} \\ \\ \dfrac{758}{1000} \end{pmatrix}, \; r_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ \\ \dfrac{-79}{10} \\ \\ \dfrac{-758}{100} \end{pmatrix}$$

$$r(1) = \frac{-79}{100} \to x(1) = \frac{979}{1000}$$

$$r(2) = \frac{-1595}{1000} \to x(2) = \frac{9495}{10000}$$

$$r(3) = \frac{-319}{1000} \to x(3) = \frac{7899}{10000}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{979}{1000} \\ \\ \frac{9495}{10000} \\ \\ \frac{7899}{10000} \end{pmatrix}, \; r_2 = \begin{pmatrix} \frac{-79}{100} \\ \\ \frac{-1595}{1000} \\ \\ \frac{-319}{1000} \end{pmatrix}$$

- **Comprueba si su matriz de coeficientes es definida positiva y en el caso afirmativo, encuentra la elección óptima de w_0 para el método de relajación y efectúa las primeras iteraciones de ese método empezando en el origen**

Los determinantes de los menores principales son:

$$10 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 99 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 950 > 0$$

Así, vemos como A es definida positiva, además es simétrica y tridiagonal. Por tanto, por el teorema 3.4.5, tenemos que el w_0 óptimo es

$$w_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_J)^2}}$$

Ahora bien,

$$T_J = D^{-1}(-(L+U)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular su radio espectral, calculamos sus valores propios:

$$|T_J - xI| = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & x & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & x \end{vmatrix} = x^3 - \frac{5}{100}x = x(x^2 - \frac{5}{100}) = x(x + \frac{\sqrt{5}}{10})(x - \frac{\sqrt{5}}{10})$$

Por lo que queda que el radio espectral es

$$\rho(T_J) = \frac{\sqrt{5}}{10} \implies \rho(T_J)^2 = \frac{5}{100}$$

Y se tiene que

$$w_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{100}}} = \frac{20}{10 + \sqrt{95}} \approx 1.0128$$

Voy ahora a calcular hasta x_2.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to r_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$r(1) = -9 \to x(1) = \frac{9115}{10000}$$

$$r(2) = \frac{-79115}{10000} \to x(2) = \frac{80128}{100000}$$

$$r(3) = \frac{-760255}{100000} \to x(3) = \frac{76999}{100000}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{9115}{10000} \\ \\ \dfrac{80128}{100000} \\ \\ \dfrac{76999}{100000} \end{pmatrix}, \ r_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ \\ \dfrac{-79115}{10000} \\ \\ \dfrac{-760255}{100000} \end{pmatrix}$$

$$r(1) = \frac{-68628}{100000} \to x(1) = \frac{981006}{1000000}$$

$$r(2) = \frac{-1508186}{1000000} \to x(2) = \frac{954029}{1000000}$$

$$r(3) = \frac{-2081582}{10000000} \to x(3) = \frac{791072}{1000000}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{981006}{1000000} \\ \\ \frac{954029}{1000000} \\ \\ \frac{791072}{1000000} \end{pmatrix}, \ r_2 = \begin{pmatrix} \frac{-68628}{100000} \\ \\ \frac{-1508186}{1000000} \\ \\ \frac{-2081582}{10000000} \end{pmatrix}$$