Tarea 3

Jose Antonio Lorencio Abril

a)

Por un lado, sabemos que $\gamma_v(t)$ es la geodésica maximal con condiciones iniciales $\gamma_v(0) = p_0$ y $\gamma_v'(0) = v$.

Por otro, el lema de homogeneidad de las geodésicas nos dice que, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se verifica:

$$\gamma_v(t) = \exp_{p_0}(tv) = \exp_{p_0}(t(ae_1 + be_2)) = \exp_{p_0}(ate_1 + bte_2)$$

y vemos como la expresión en coordenadas de $\gamma_v(t)$ respecto de $X(u,v)$ es, efectivamente,

$$\overline{\gamma_v}(t) = (at, bt) = (u(t), v(t))$$

pues

$$X \circ \overline{\gamma_v}(t) = X(at, bt) = \exp_{p_0}(ate_1 + bte_2) = \gamma_v(t)$$

b)

La ecuación diferencial intrínseca de las geodésicas nos asegura que, al ser $\gamma_v(t)$ una geodésica, su expresión en coordenadas, $\overline{\gamma_v}(t)$ satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^1(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^1(u,v) & = 0 \\ v'' + (v')^2\Gamma_{11}^2(u,v) + 2u'v'\Gamma_{12}^2(u,v) + (v')^2\Gamma_{22}^2(u,v) & = 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas de u, v:

$$u(t) = at \implies u'(t) = a,\ u''(t) = 0$$

$$v(t) = bt \implies v'(t) = b,\ v''(t) = 0$$

y las sustituimos en el sistema anterior, obteniendo

$$\begin{cases} a^2\Gamma_{11}^1(at,bt) + 2ab\Gamma_{12}^1(at,bt) + b^2\Gamma_{22}^1(at,bt) & = 0 \\ a^2\Gamma_{11}^2(at,bt) + 2ab'\Gamma_{12}^2(at,bt) + b^2\Gamma_{22}^2(at,bt) & = 0 \end{cases}$$

como queríamos ver.

Para la segunda afirmación, basta notar que $u(0) = v(0) = 0$.

c)

Como el sistema obtenido se satisface para cualquier $v \in T_{p_0}S$, podemos tomar $v = e_1 = (1,0)$ (en la base $\{e_1, e_2\}$, como venimos trabajando a lo largo del ejercicio), y sustituyendo en el sistema obtenido para $t = 0$, obtenemos que

$$\Gamma_{11}^1(0,0) = \Gamma_{11}^2(0,0) = 0$$

Tomando $v = e_2 = (0,1)$, obtenemos

$$\Gamma_{22}^{1}(0,0) = \Gamma_{22}^{2}(0,0) = 0$$

Y el sistema para $t = 0$ queda, por tanto

$$\begin{cases} 2ab\Gamma_{12}^{1}(0,0) & = 0 \\ 2ab\Gamma_{12}^{2}(0,0) & = 0 \end{cases}$$

por lo que, para obtener el resultado, basta utilizar un $v \in T_{p_0}S$ tomado como $v = (a,b)$ con $a, b \neq 0$.

Para la última afirmación, usamos el sistema matricial para calcular los símbolos de Christoffel visto en Geometría de Curvas y Superficies

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{1} & \Gamma_{12}^{1} & \Gamma_{22}^{1} \\ \Gamma_{11}^{2} & \Gamma_{12}^{2} & \Gamma_{22}^{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}$$

como sabemos que los símbolos de Christoffel son todos nulos en $(0,0)$, podemos sustituirlos en ese punto, y expresar el sistema matricial como

$$0 = \rho A \cdot B$$

y sabemos que ρ y A son no nulos, porque $EG - F^2 > 0$ siempre y $\det(A) = \rho^{-1}$. Por tanto, debe ser $B = 0$, de donde obtenemos

$$E_u(0,0) = E_v(0,0) = G_u(0,0) = G_v(0,0) = 0$$

y

$$F_u(0,0) = \frac{E_v}{2}(0,0) = 0$$

$$F_v(0,0) = \frac{G_u}{2}(0,0) = 0$$

que es lo que queríamos probar.