Exámenes A.F.

Navidad Vilches
Lorencio Abril
Miralles González
Aguilar Martínez

Profesor: José
Orihuela
Calatayud

UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
5 de Septiembre de 2005

1. **Teoría**

T.1 Enunciado del lema de Riesz (*0.5 puntos*). Caracterización de los espacios de dimensión finita -Teorema de Riesz-: enunciado (*0.5 puntos*), demostración (*1 punto*).

T.2 Caracterización de las bases hilbertianas (*1 punto*). Demostrar que todo elemento de un espacio de Hilbert admite un desarrollo de Fourier respecto de una base hilbertiana (*1 punto*).

2. **Cuestiones y Problemas**

C.1 (*0.4 puntos cada una*) Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas dando una breve explicación en cada caso:

a) No existen espacios normados de dimensión algebraica numerable.

b) En todo espacio normado de dimensión finita existe una norma equivalente que satisface la Ley del Paralelogramo.

c) Una base hilbertiana es siempre una base de un espacio vectorial.

d) Todo operador definido en un espacio finito dimensional es compacto.

e) Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un isomorfismo lineal que es continuo entonces T^{-1} es continuo también.

P.1 (*1 punto*) En $C([-1,1],\mathbb{R})$ consideramos el producto escalar $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ y el subespacio $M = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) : f(x) = 0, x \leq 0\}$. Calcular $M^{\perp}$.

P.2 (*1 punto*) Sea X un espacio vectorial complejo y $f : X \to \mathbb{C}$ una forma lineal. Demostrar que si $\mathrm{Re}f$ está acotada superiormente entonces $\mathrm{Re}f$ es cero; deducir de esto último que $f = 0$.

P.3 (*2 puntos*) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_X$ denso en B_X. Pruébese que la aplicación $T : \ell^1 \to X$ dada por

$$T((\lambda_n)_n) = \sum_n \lambda_n x_n, \quad (\lambda_n)_n \in \ell^1,$$

es lineal y $\|\cdot\|_1 - \|\cdot\|$-continua. Utilizando ideas similares a las de la prueba del Teorema de la Aplicación Abierta demostrar que T es sobreyectiva.

a) No existen espacios normados de dimensión algebraica numerable.

Corolario del teorema Baire

X Banach $\Rightarrow$ dim algebraica de X es finita o no numerable

Así, es falso, si X no es de Banach (no es completo), puede tener dimensión algebraica numerable.

El conjunto de los polinomios en $[0,1]$ tiene dimensión algebraica numerable, tenemos el conjunto generador L.I. $\{1, x, x^2, \dots\}$

b) En todo espacio normado de dimensión finita existe una norma equivalente que satisface la Ley del Paralelogramo.

Verdadero. Como se tiene que $X \overset{*}{\sim} \mathbb{R}^n$ donde todas las normas son equivalentes, y $\|\cdot\|_2$ verifica la ley del Paralelogramo.

$*X$ es topológicamente equivalente a $\mathbb{R}^n$ (dim fin y normado $\Longrightarrow$ Banach)

c) Una base hilbertiana es siempre una base de un espacio vectorial.

Falso, $\{x_n\}_n$ es base hilbertiana de H si es un conjunto ortonormal y $\overline{\text{span}\{x_n\}_n} = H$.

Por ejemplo, podemos tomar un conjunto de polinomios ortonormales que generan las funciones continuas, pero no son una base vectorial, pues

$$\text{span}\{P_n\}_n = \{\text{polinomios}\} \subsetneq C([0,1])$$

d) Todo operador definido en un espacio finito dimensional es compacto.

Verdadero. En un espacio FD, la bola unidad es compacta, y los operadores lineales son continuos.

$T(B_X)$ es compacto por ser imagen continua de un compacto, en particular es precompacto y T es un operador compacto.

e) Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un isomorfismo lineal que es continuo entonces T^{-1} es continuo también.

Verdadero.

Trm de la aplicación abierta: X, Y Banach, $T: X \longrightarrow Y$ lineal cont

① T sobre $\longleftrightarrow$ ② T abierta

T iso lineal $\Rightarrow$ T sobre $\Rightarrow$ T abta $\Rightarrow$ T^{-1} cont

P.1 (*1 punto*) En $C([-1,1],\mathbb{R})$ consideramos el producto escalar $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ y el subespacio $M=\{f\in C([-1,1],\mathbb{R}) : f(x)=0, x\le 0\}$. Calcular $M^{\perp}$.

$$g\in M^{\perp} \leftrightarrow \langle g,f\rangle=0,\ \forall f\in M \leftrightarrow \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,dt=0,\ \forall f\in M$$

$$\leftrightarrow \int_{-1}^{0} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(t)\cdot 0}\,dt+\int_{0}^{1} g(t)\cdot f(t)\,dt=0 \quad \forall f\in M$$

$$\leftrightarrow \int_{0}^{1} g(t)\cdot f(t)\,dt=0 \quad \forall f\in \{C([0,1]) \text{ con } f(0)=0\}$$

, pero $\{C([0,1]), f(0)=0\}$ es denso en $C([0,1])$, luego la integral también es 0 para $f\in C([0,1])$

$$\leftrightarrow g=\begin{cases} 0 & x> \\ g(x) & x\le 0\end{cases}$$

Por estar en $C([0,1])$

luego $M^{\perp}=\{f\in C([-1,1],\mathbb{R}) \mid f(x)=0,\ x>0\} \overset{\substack{\text{se extiende por} \\ \text{continuidad} \\ \uparrow}}{=} \{f\in C([-1,1],\mathbb{R}) \mid f(x)=0,\ x\ge 0\}$

P.2 (*1 punto*) Sea X un espacio vectorial complejo y $f : X \to \mathbb{C}$ una forma lineal. Demostrar que si Ref está acotada superiormente entonces Ref es cero; deducir de esto último que $f = 0$.

$f(x) = \mathrm{Re}\, f(x) + i\, \mathrm{Im}\, f(x)$

$\exists M \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Re}\, f(x) < M \quad \forall x \in X$

Supongamos que $\mathrm{Re}\, f \not\equiv 0$.

- Notemos que $M > 0$, pues si $\mathrm{Re}\, f(x) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, f(-1 \cdot x) = -\mathrm{Re}\, f(x) > 0$

- Entonces, podemos $\exists x \in X \mid 0 < \mathrm{Re}\, f(x) < M$

pero dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es $\mathrm{Re}\, f(\lambda x) = \lambda\, \mathrm{Re}\, f(x)$ y podemos tomar $\lambda > \dfrac{M}{\mathrm{Re}\, f(x)}$, de modo que

$\mathrm{Re}\, f(\lambda x) = \lambda\, \mathrm{Re}\, f(x) > \dfrac{M}{\cancel{\mathrm{Re}\, f(x)}} \cancel{\mathrm{Re}\, f(x)} = M$ $\#$ contradicción

Por tanto, $\mathrm{Re}\, f \equiv 0$

Por otro lado $\forall x \in X$: $\quad i f(x) = f(ix) = \cancelto{0}{\mathrm{Re}\, f(ix)} + i\, \mathrm{Im}\, f(ix) = i\, \mathrm{Im}\, f(ix) = -\mathrm{Im}\, f(x)$

$-f(x) = f(-x) = -\mathrm{Im}\, f(x)$

Por tanto $-f(x) = i \cdot f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in X$

P.3 (*2 puntos*) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_X$ denso en B_X. Pruébese que la aplicación $T : \ell^1 \to X$ dada por

$$T((\lambda_n)_n) = \sum_n \lambda_n x_n, \quad (\lambda_n)_n \in \ell^1,$$

es lineal y $\|\cdot\|_1 - \|\cdot\|$-continua. Utilizando ideas similares a las de la prueba del Teorema de la Aplicación Abierta demostrar que T es sobreyectiva.

Lineal

$$T\big((\lambda_n)_n + (\mu_n)_n\big) = \sum_n (\lambda_n + \mu_n) x_n = \sum \lambda_n x_n + \sum \mu_n x_n = T((\lambda_n)_n) + T((\mu_n)_n)$$

$$T(\lambda(\lambda_n)_n) = T((\lambda\cdot\lambda_n)_n) = \sum_n \lambda\cdot\lambda_n x_n = \lambda\cdot\sum_n \lambda_n x_n = \lambda T((\lambda_n)_n)$$

$\|\cdot\|_1 - \|\cdot\|$ - cont.

$$\|T\| = \sup\{\|T((\lambda_n)_n)\| : \|(\lambda_n)_n\|_1 = 1\}$$

$$\|T((\lambda_n)_n)\| = \|\sum_n \lambda_n x_n\| \le \sum_n \|\lambda_n x_n\| \le \sum_n |\lambda_n| \underbrace{\|x_n\|}_{\le 1} \le \sum_n |\lambda_n| = 1$$

y T es continua //

Sobreyectiva

Las sucesiones $\lambda^i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots)$ están en B_{ℓ^1}

y $T(\lambda^i) = \sum_n \lambda_n^i \cdot x_n = \lambda_i^i \cdot x_i = x_i$

Por tanto $T(B_{\ell^1}) \supset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ahora $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ denso en $B_X \Leftrightarrow \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cap B_X} \cap B_X = B_X \Leftrightarrow B_X \subset \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cap B_X} \Leftrightarrow B_X \subset \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$

Entonces $B_X \subset \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}} \subset \overline{T(B_{\ell^1})}$ tiene interior no vacío (la bola unidad abierta está contenida en B_X) y coincide con el interior de $T(B_{\ell^1})$ porque B_{ℓ^1} es CS-compacto (⊛) $\overset{12.3}{\Rightarrow}$ $T(B_{\ell^1})$ también $\overset{12.2}{\Rightarrow}$ $T(B_{\ell^1})$ CS-cerrado $\overset{12.4}{\Rightarrow}$ $\overset{\circ}{T(B_{\ell^1})} = \overset{\circ}{\overline{T(B_{\ell^1})}}$

Por tanto $B_X(0,1) \subset T(B_{\ell^1})$ y como $X = \bigcup_r r\cdot B_X(0,1) \Rightarrow T$ supra.

⊛ Sea $\{\mu_n\}_n \subset [0,1] \mid \sum_n \mu_n = 1$ y $x_n \in B_{\ell^1} \to x_n = (\lambda_m^n)_m$ ¿ $\sum_n \mu_n x_n \in B_{\ell^1}$?

$$\sum_m |\sum_n \mu_n \lambda_m^n| \le \sum_m \sum_n \mu_n |\lambda_m^n| = \sum_n \mu_n \sum |\lambda_m^n| = \sum_n \mu_n \|x_n\|_1 \le \sum_n \mu_n = 1 \Rightarrow \sum_n \mu_n x_n \in B_{\ell^1}$$ y es CS-compacto

Examen Análisis Funcional

Diciembre 2007

1 Teoría

1. El teorema de Riesz en Análisis Funcional. (tema de 6 puntos)
2. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos. (teorema de 4 puntos)

2 Cuestiones

Responder, razonando la repuesta, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones: (2,5 puntos cada una)

1. El operador de Laplace Δ en un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene una sucesión de valores propios positivos que tiende a $+\infty$.
2. En un espacio de Hilbert infinito dimensional H, dado un subespacio cerrado M de codimensión finita pero suficientemente grande se tiene que H , M y H/M son isomorfos.
3. El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ son isometricamente isomorfos.
4. Dados vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$ en un espacio prehilbertiano $(H, < \cdot >)$ se nos piden las ecuaciones de

$$\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\},$$

sucesión de vectores obtenida con el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt aplicado a $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$.

2 En un espacio de Hilbert infinito dimensional H, dado un subespacio cerrado M de codimensión finita pero suficientemente grande se tiene que H , M y H/M son isomorfos.

Falso, $\text{codim}(M) < \infty$ si y solo si, $\dim(H/M) < \infty$
y entonces H/M no puede ser isomorfo a H, porque si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base de H/M y $\{v_k\}_k$ es base hilbertiana de H, no existe una aplicación sobreyectiva de $\{e_1, \dots, e_n\} \longrightarrow \{v_k\}_k$.

Si H es separable, entonces H y M son isomorfos, pues M es hilbert (por ser subespacio cerrado de hilbert) y separable (por ser subespacio de separable). Por tanto $H \cong \ell^2(\mathbb{N}) \cong M$
Si H no es separable, pueden serlo o no.

4. Dados vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$ en un espacio prehilbertiano $(H, < \cdot >)$ se nos piden las ecuaciones de

$$\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\},$$

sucesión de vectores obtenida con el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt aplicado a $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$.

$$y_1 = v_1 \qquad u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, y_j \rangle y_j \qquad u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \qquad n \geq 2$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
Junio 2007

1. **Teoría**
   1) El teorema de la proyección en el Análisis Funcional (tema de 6 puntos).
   2) Principio Fundamental para Problemas Variacionales Cuadráticos (teorema de 4 puntos).

2. **Cuestiones:** Responder, razonando la respuesta, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones (2 puntos cada una):
   1) El operador de Laplace Δ en un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene una sucesión de valores propios positivos que tiende a $+\infty$.
   2) En un espacio de Hilbert H un conjunto convexo C es cerrado si, y sólo si, para cualquier sucesión (x_n) en C la condición
   $$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \,,\ \forall y \in H$$
   debe implicar el que $x \in C$.
   3) Si X es un espacio de Banach y (x_n) e (y_n) son sucesiones en la esfera unidad de X tales que
   $$\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2,$$
   entonces
   $$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$
   4) En un espacio de Hilbert infinito dimensional H, dado un subespacio cerrado M de codimensión finita pero suficientemente grande se tiene que H, M y H/M son isomorfos.
   5) El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ son isométricamente isomorfos.

3. **Problemas**
   1) Sea T un operador compacto y autoadjunto en un espacio prehilbertiano H. Demostrar que el espectro de T contiene una sucesión de números reales que decrece hacia cero. (5 puntos)
   2) Sea C un cono convexo y cerrado en $L^2(\Omega)$ con vértice el origen (i.e., contiene a λx siempre que contenga a x y $\lambda > 0$). Supongamos que C contiene a las funciones $f : \Omega \to (-\infty, 0]$ y es tal que
   $$C \cap \{f : \Omega \to [0, +\infty)\} = \{0\}.$$
   Demostrar que existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega fg \le 0$ para cada $f \in C$ mientras que $\int_\Omega fg > 0$ para cada $f : \Omega \to [0, +\infty)$ que no sea la función cero. (5 puntos)

2. **Cuestiones:** Responder, razonando la respuesta, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones (2 puntos cada una):

1) El operador de Laplace Δ en un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene una sucesión de valores propios positivos que tiende a $+\infty$.

El operador de Laplace es $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ para $u \in A \subset \mathbb{R}^n$ con A abierto.

PROPOSICIÓN: La extensión de Friedrichs A de un operador $B: D(B) \to H$ ($D(B)$ denso en H) lineal simétrico y fuertemente monótono es autoadjunto, biyectivo y $\langle Au, u\rangle \geq c\|u\|^2 \; \forall u \in D(A)$. El operador inverso $A^{-1}: H \to H$ es lineal continuo y autoadjunto $\equiv$ simétrico.
Si además, la inmersión $H_E \subseteq H$ es compacta, entonces $A^{-1}: H \to H$ es compacta también.

LA LAPLACIANA

Para $-\Delta: (\mathcal{D}(\Omega), \langle\,\rangle_1) \to L^2(\Omega)$

Extensión de Friedrichs: $D(-\Delta) \xrightarrow{\Delta} L^2(\Omega)$

$L^2(\Omega)_E \equiv H_1^0$

Teorema de Rellich $\equiv$ compacta: $H_1^0 \to L^2(\Omega)$

Extensión de Friedrichs: $D(-\Delta) \equiv \{u \in H_1^0 : \exists f \in L^2(\Omega)$ con $\langle v, f\rangle_0 = \langle u, -\Delta v\rangle_0 \; \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\}$

$\int_\Omega f v = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_j} v \quad \forall v \in H_1^0$

$(-\Delta)^{-1} \equiv$ compacto y simétrico

Tiene desarrollo espectral.

$\Rightarrow -\Delta^{-1}$ es lineal, continuo, autoadjunto y compacto, luego $\exists \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ base hilbertiana de vectores propios de $-\Delta^{-1}$: $-\Delta^{-1} v_k = \beta_k v_k$ con $\beta_1 > \beta_2 > \cdots$ y $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$

positivos pq por Green $\int \Delta u \cdot u = \int |\nabla u|^2 = \|\nabla u\|_{L^2} \geq 0$

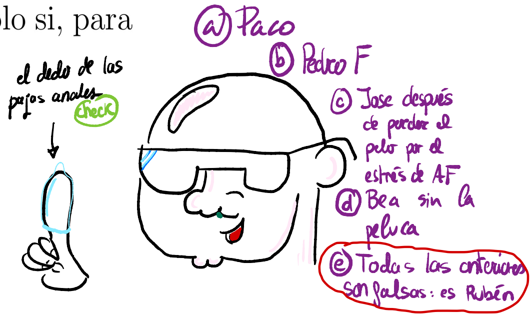
$\to \lambda_1 = 1/\beta_1,\; \lambda_2 = 1/\beta_2, \ldots, \lambda_n = 1/\beta_n, \ldots$ son valores propios de $-\Delta$ tales que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lim_{k\to\infty} 1/\beta_k = +\infty$.

Por tanto, los de Δ son negativos y tienden a $-\infty$. Es **FALSO**

2) En un espacio de Hilbert H un conjunto convexo C es cerrado si, y sólo si, para cualquier sucesión (x_n) en C la condición

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \; \forall y \in H$$

debe implicar el que $x \in C$.



$\boxed{\Rightarrow}$

C es convexo cerrado y supongamos por RA que $x \notin C$. Por HB $\exists f: H \to \mathbb{K}$ lineal y cont tal que $f(x) > \alpha > f(c) \; \forall c \in C$. Además por Riesz es $f(x) = \langle x, y\rangle$ para un único $y \in H$,
$\to \langle x, y\rangle = f(x) > \alpha > f(x_n) = \langle x_n, y\rangle \; \forall n$ # pues entonces no puede ser $\lim_n \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Para ver si es cerrado, sea $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ con $x_n \in C \; \forall n$. Entonces dado $y \in H$, $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle \overset{\langle\cdot,y\rangle \text{ cont}}{=} \langle \lim_n x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \overset{\text{Hip}}{\Rightarrow} x \in C$
luego es cerrado.

El enunciado es, entonces, VERDADERO.

3) Si X es un espacio de Banach y (x_n) e (y_n) son sucesiones en la esfera unidad de X tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

FALSO

$\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| = 2 \quad \forall n$

Si X es Hilbert $\quad \|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) = 2 \cdot 2 = 4$

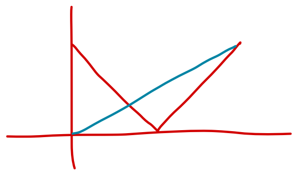
Luego $\lim_n \underbrace{\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2}_{= 4 + \lim \|x_n - y_n\|^2} = 4 \; \Big\} \to \lim_n \|x_n - y_n\|^2 = 0 \to \lim_n \|x_n - y_n\| = 0$

Si X no es Hilbert, no se verifica la ley del paralelogramo $\forall x, y$.

Contraejemplo $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach con la convergencia uniforme no es Hilbert porque $\|\cdot\|_\infty$ no viene de un producto escalar.

Las sucesiones dadas por $x_n = x = f(t) = t$, verifican $\|x_n\| = 1 = \|y_n\| \ \forall n \to (x_n)_n, (y_n)_n \subset B_X$

$$y_n = y = g(t) = \begin{cases} 1-2t & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 2t-1 & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$



Además, $x_n + y_n = f(t)+g(t) = \begin{cases} 1-t & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 3t-1 & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$ luego $\lim \|x_n+y_n\| = \|f+g\| = 2$

$x_n - y_n = f(t)-g(t) = \begin{cases} 1-3t & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ t-1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ luego $\lim \|x_n-y_n\| = \|f-g\| = 2 \neq 0$ //

5) El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ son isométricamente isomorfos.

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abto + acotado

Es cierto, $\mathcal{D}(\Omega)$ separable con $\|\cdot\|_\infty$ por Stone-Weierstrass $\Rightarrow$ separable con $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2} \Rightarrow L^2(\Omega)$ tmbn, por ser su completación.

Considero $T: W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow (L^2(\Omega))^{n+1} = H$, con la norma en H $\sqrt{\sum_1^{n+1} \|u_i\|_{L^2}^2}$.

$$u \longmapsto (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u)$$

$\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$ $\|Tu\|_H = \|u\|_{W^{1,2}} \Rightarrow$ isometría. (claramente T lineal), así que $W^{1,2}(\Omega) \cong T(W^{1,2}(\Omega)) = \tilde{H}$

Como el producto finito de separables es separable es separable, $(L^2(\Omega))^{n+1}$ lo es y $\tilde{H}$ también, con lo que $W^{1,2}(\Omega)$ también.

Finalmente, como $H_0^1 \hookrightarrow W^{1,2}$ también separable. Por lo tanto:

$$L^2(\Omega) \cong \ell^2 \cong W^{1,2}$$
$$\ell^2 \cong H_0^1$$

3. Problemas

1) Sea T un operador compacto y autoadjunto en un espacio prehilbertiano H. Demostrar que el espectro de T contiene una sucesión de números reales que decrece hacia cero. (5 puntos)

Definition 7.4. Sea $M: X \to X$ un operador (aplicación lineal y continua), entonces la **resolvente del operador** es

$$\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \ invertible\}$$

y el **espectro del operador** es

$$\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$$

Theorem 7.5. *Se tiene:*

1. *$\rho(M)$ es abierto*
2. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \rho(M) & \xrightarrow{\phi} & L(X) \\ \lambda & \mapsto & (\lambda Id - M)^{-1} \end{array}$$

es analítica (se puede desarrollar como serie de potencias), por lo que vale el teorema de Liouville:

$$\lim_{\|\lambda\| \to \infty} \|\phi(\lambda)\| = 0 \implies \phi \ cte$$

2) Sea C un cono convexo y cerrado en $L^2(\Omega)$ con vértice el origen (i.e., contiene a λx siempre que contenga a x y $\lambda > 0$). Supongamos que C contiene a las funciones $f : \Omega \to (-\infty, 0]$ y es tal que

$$C \cap \{f : \Omega \to [0, +\infty)\} = \{0\}.$$

Demostrar que existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega fg \leq 0$ para cada $f \in C$ mientras que $\int_\Omega fg > 0$ para cada $f : \Omega \to [0, +\infty)$ que no sea la función cero. (5 puntos)

2

Como $L^2(\Omega)$ separable, sea $K = \{g_1, g_2, \ldots\} \subseteq L^+$, y puedo suponer $g_n \neq 0$ $\forall n$, si no lo cambio por una sucesion que tienda a 0.

Llamo $K_n = \{g_1, \ldots, g_n\}$ compacto. Por HBG $\forall n$ $\exists F_n \in L^2(\Omega)$: $\langle f, F_n \rangle \leq a_n \leq \langle g, F_n \rangle$ $\forall f \in C, g \in K_n$
Como $0 \in C$ $a_n \geq 0$. Puedo suponer $\|F_n\| = 1$, pues dividendo por su norma obtengo otra sucesión $a_n / \|F_n\|$ pero es una situación análoga. Como $(F_n)_n \subseteq B_{L^2}$, $\exists (F_{n_k})_k$ convergente débilmente a cierto F, esto es, $\langle f, F_{n_k} \rangle \longrightarrow \langle f, F \rangle$ $\forall f \in L^2$.

Tomando límites $\langle f, F \rangle \leq \overbrace{\lim_k a_{n_k}}^{a} \leq \langle g, F \rangle$ $\forall f \in C, g \in K$, y por continuidad del prod. escalar se cumple también $\forall g \in \overline{K} = L^+$. Solo puede ser $a = 0$ entonces, por $0 \in C \cap L^+$

Es esto un cono??

Diría además que el enunciado no es cierto. Por ejemplo, en $\Omega = [-1, 1]$, cojo C formado por L^-, las funciones de la forma $f_n = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ n & \text{si } x > 0 \end{cases}$, y el cierre convexo y por rayos. Creo que $C \cap L^+$ sigue siendo el 0, y sin embargo no se da el resultado:

$$\int_\Omega fg > 0 \quad \forall f \geq 0 \text{ no nula} \Rightarrow g > 0 \text{ c.t.p. y } \int_{-1}^1 f_n g = -\int_{-1}^0 g + n \cdot \underbrace{\int_0^1 g}_{>0} \text{ puedo hacer eso}$$

positivo.

UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
31 de Enero de 2008

1. **Teoría**

   1) El operador de Laplace (Tema de 6 puntos).
   2) Teorema espectral para operadores compactos y simétricos (Teorema de 4 puntos).

2. **Cuestiones**

   1) ¿Es cierto o falso que todos los espacios de Hilbert que aparecen en la resolución del problema de Dirichlet son isomorfos? (2 puntos)
   2) En un espacio de Hilbert, si (x_n) es una sucesión en la bola unidad B_H, ¿existirá $x \in B_H$ junto con una subsucesión (x_{n_k}) tal que

   $$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

   para todo $y \in H$? (2 puntos)
   3) Sea H un espacio de Hilbert y $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \ldots$ subespacios de dimensión finita con

   $$H = \overline{\bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

   Sean

   $$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

   bilineal, simétrica, acotada y fuertemente positiva,

   $$b : H \to \mathbb{R}$$

   lineal y continua definiendo la forma cuadrática

   $$J(u) := 2^{-1}a(u,u) - b(u)$$

   para $u \in H$. Si u es la solución del problema de minimización

   $$\inf\{J(v) : v \in H\}$$

   y u_n lo es para el problema restringido a H_n

   $$\inf\{J(v) : v \in H_n\},$$

   el teorema de Ritz nos asegura que $\lim_n u_n = u$. Determinar si hay o no alguna relación entre el teorema de la proyección y la convergencia descrita en el teorema de Ritz para la resolución de un problema variacional cuadrático (3 puntos).

1) ¿Es cierto o falso que todos los espacios de Hilbert que aparecen en la resolución del problema de Dirichlet son isomorfos? (2 puntos)

Verdadero, como en un ejercicio anterior:

$$\begin{array}{ccccc} H_0^1 & \cong & \ell^2(\mathbb{N}) & \cong & L^2(\Omega) \\ & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \\ & & W_2^1(\Omega) & & \end{array}$$

y estos tres son los espacios de Hilbert que aparecen en el problema de Dirichlet.

2) En un espacio de Hilbert, si (x_n) es una sucesión en la bola unidad B_H, ¿existirá $x \in B_H$ junto con una subsucesión (x_{n_k}) tal que

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todo $y \in H$? (2 puntos)

Sí, porque la bola unidad es débilmente compacta, lo cual quiere decir que toda sucesión $\{x_n\}_n \subset B_H$ tiene una subsucesión débilmente convergente: $\{x_{n_k}\}_k \rightharpoonup x \iff \lim_k \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall y \in H$ que es justo lo que pregunta el enunciado

4) Sea $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $K(t,s) = K(s,t)$ para todo $s,t \in [a,b]$. Estudiar la ecuación integral

$$\int_a^b K(s,t)u(t)\,dt - \lambda u(s) = h(s), \text{ donde } s \in [a,b],$$

para $h \in L^2([a,b])$. (3 puntos)

3. **Problemas**

1) Sea H el conjunto de funciones analíticas en algún disco que contenga al disco unidad $D(0,1)$. Definamos la aplicación de $H \times H$ en $\mathbb{C}$ dada por

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(z)}g(z)}{z}\,dz,$$

donde C denota la frontera del disco unidad orientada positivamente. Se nos pide:

(a) Demostrar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar (2 puntos).

(b) Probar que las funciones $\{z^n : n = 0,1,2,\dots\}$ forman una base hilbertiana (2 puntos).

(c) Determinar la relación entre el desarrollo en serie de Fourier y el desarrollo en serie de potencias para una función del espacio H (1 punto).

2) Si $(u_n)_n$ es una base hilbertiana de un espacio de Hilbert H y $(v_n)_n$ es una sucesión ortonormal tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n - v_n\|^2 < 1$, verifíquese entonces que $(v_n)_n$ es una base hilbertiana de H también. (5 puntos)

4) Sea $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $K(t,s) = K(s,t)$ para todo $s,t \in [a,b]$. Estudiar la ecuación integral

$$\int_a^b K(s,t)u(t)\,dt - \lambda u(s) = h(s), \text{ donde } s \in [a,b],$$

para $h \in L^2([a,b])$. (3 puntos)

Sea $A : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$

$$u(s) \longmapsto Au(s) = \int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt$$

Entonces A es lineal, continuo, simétrico y compacto.

Lineal: $A(u+v) = \int_a^b K(u+v) = \int Ku + \int Kv$

$A\lambda u = \lambda \int Ku$

Cont: $\|A\| = \sup \left\{ \left| \int Ku\,dt \right| : \|u\|_2 = 1 \right\}$

$$\left| \int_a^b Ku\,dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b K^2\,dt \int_a^b u^2\,dt} \leq \sqrt{(b-a)\|K\|_\infty^2 \|u\|_2^2} = \sqrt{b-a} \cdot \|K\|_\infty \cdot \underbrace{\|u\|_2}_{1}$$

$= \sqrt{b-a}\,\|K\|_\infty$ cte que no depende de u

Luego A cont

Simétrico:

$$\langle Au, v\rangle = \int_a^b Au(s) \cdot v(s)\,ds = \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt \right] v(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,u(t)\,v(s)\,dt\,ds$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)\,v(s)\,ds \right] u(t)\,dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\,v(s)\,ds \right] u(t)\,dt = \langle u, Av\rangle$$

Compacto: Sea $\{u_k\}_k$ $\|u_k\|_2 \leq C$ ¿$\{Au_k\}_k$ tiene una subsucesión convergente?

- Au es unif. cont: dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon$

$$|Au(t_1) - Au(t_2)| = \left| \int_a^b (K(t_1,s) - K(t_2,s))\,u(s)\,ds \right| \leq \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|u(s)|\,ds \leq \int_a^b \varepsilon |u(s)|\,ds$$

$\leq \varepsilon \cdot \|u\|_1$

• $\{Au_n\}_n$ está uniformemente acotado: $\|Au_n\|_\infty < C_1 \quad \forall n$

$$\|Au_n\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b K(s,t)\, u_n(t)\,dt \right|$$

$$\left| \int_a^b K(s,t)\, u_n(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b K^2 dt \int_a^b u_n^2 dt} \leq \sqrt{b-a} \cdot \|K\|_\infty \|u_n\|_2 \leq \overbrace{\sqrt{b-a}\ \|K\|_\infty \cdot C}^{C_1}$$

• $\{Au_n\}_n$ es una familia equicontinua: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |s_1 - s_2| < \delta \rightarrow |Au_n(s_1) - Au_n(s_2)| < \varepsilon \quad \forall n$

$$|Au_n(s_1) - Au_n(s_2)| = \left| \int_a^b K(s_1,t) u_n(t)\,dt - \int_a^b K(s_2,t)\, u_n(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b [K(s_1,t) - K(s_2,t)]\, u_n(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|\, |u_n(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \varepsilon\, |u_n(t)|\,dt = \varepsilon \|u\|_1$$

Así, por Arzelà-Ascoli, $\{Au_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente, y A es compacto.

Por tanto, tenemos el problema

$$\circledast \quad Au - \lambda u = h$$

con A operador compacto y simétrico, luego para $\lambda \neq 0$ es:

• $\lambda \neq \lambda_k \quad \forall \lambda_k$ valor propio de A: $\circledast$ tiene solución única

• $\lambda = \lambda_k$ para cierto K: $\circledast$ tiene solución $\leftrightarrow h \in \operatorname{Ker}(\lambda I - A)^\perp$

Si $\lambda = 0$, entonces el problema es

$$\circledast\circledast \quad Au = h$$

$$Au = \sum \lambda_k \langle u, v_k\rangle v_k = \sum \langle h, v_k\rangle v_k$$

$\leftrightarrow \lambda_k \langle u, v_k\rangle = \langle h, v_k\rangle \quad \forall k$

En particular, si $\lambda_k = 0$, debe ser $\langle h, v_k\rangle = 0 \leftrightarrow h \in \ker(A)$

Y para los demás queda $\langle u, v_k\rangle = \dfrac{\langle h, v_k\rangle}{\lambda_k}$

luego la única solución es de la forma $\quad u = \sum_{\lambda_k \neq 0} \dfrac{\langle h, v_k\rangle}{\lambda_k} v_k$

y debe ser $\quad \|u\|^2 = \sum \left| \dfrac{\langle h, v_k\rangle}{\lambda_k} \right|^2 < \infty$

Es decir, tendrá solución única sii

$$h \in \ker A^\perp \quad \text{y} \quad \sum \left| \frac{\langle h, v_k\rangle}{\lambda_k} \right|^2 < \infty$$

2) Si $(u_n)_n$ es una base hilbertiana de un espacio de Hilbert H y $(v_n)_n$ es una sucesión ortonormal tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - v_n\|^2 < 1$, verifíquese entonces que $(v_n)_n$ es una base hilbertiana de H también. (5 puntos)

Dado $x \in H$ tq $\langle x, v_n \rangle = 0 \ \forall n$, ¿ $x = 0$?

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n = \sum_n \langle x, u_n - v_n + v_n \rangle u_n = \sum_n \cancel{\langle x, v_n \rangle}^{\,0} u_n + \sum_n \langle x, v_n - u_n \rangle u_n$$

$0 \ \forall n$

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, v_n - u_n \rangle|^2 \leq \sum_n \|x\|^2 \|v_n - u_n\|^2 = \|x\|^2 \sum_n \|v_n - u_n\|^2 < \|x\|^2$$

contradicción

Cauchy-Schwartz

Si $\|x\| \neq 0$, entonces

↳ o también que $\sum_n \|v_n - u_n\|^2 \geq 1$ #

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
Tercer Control
12 de Enero de 2009

1. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador autoadjunto y compacto tal que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para cualquier $x \in H$. Calcular la raíz cuadrada de T.

2. Sea $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $K(t, s) = K(s, t)$ para todo $s, t \in [a, b]$. Estudiar la ecuación integral

$$\int_a^b K(s,t)u(t)\,dt - \lambda u(s) = h(s), \text{ donde } s \in [a, b],$$

para $h \in L^2([a, b])$.

3. Sea H un espacio de Hilbert y $C \subset H$ un subconjunto convexo. Nos preguntamos si es lo mismo afirmar que C sea débilmente cerrado y que sea cerrado en la norma. Lo mismo para C débilmente acotado y acotado en la norma. Lo mismo para C débilmente compacto y compacto en la norma.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
29 de Enero de 2009

1. **Teoría**
    1. La integral de Dirichlet. (Tema de 6 puntos)
    2. Teorema de alternativa de Fredholm. (Teorema de 4 puntos)
2. **Cuestiones**
    1. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador autoadjunto y compacto tal que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para cualquier $x \in H$. Calcular la raíz cuadrada de T (2 puntos).
    2. Sea H un espacio de Hilbert y $C \subset H$ un subconjunto convexo. Nos preguntamos si es lo mismo afirmar que C sea débilmente cerrado y que sea cerrado en la norma. Lo mismo para C débilmente acotado y acotado en la norma. Lo mismo para C débilmente compacto y compacto en la norma (2 puntos).
    3. Demostrar el teorema de separación de Hahn Banach para un subconjunto cerrado convexo y otro subconjunto compacto y convexo de un espacio de Hilbert H (2 puntos).
    4. En un espacio de Hilbert infinito dimensional existen formas lineales no continuas (2 puntos).
    5. ¿Es cierto o falso que una sucesión de polinomios ortogonales no puede tener subsucesiones convergentes? (2 puntos).
3. **Problemas**
    1. Sea H un espacio de Hilbert y $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de subespacios cerrados de H. Sea P_n (con $\|P_n\| = 1$) la proyección ortogonal de H sobre M_n y consideremos una sucesión acotada de vectores (x_n) en H tales que $P_n(x_{n+1}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se pide demostrar que $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle$ existe para cualquier $y \in H$, lo que nos define un elemento x de H tal que $P_n(x) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (4 puntos).
    2. Supongamos que T es un operador acotado en el espacio de Hilbert H que es diagonal respecto de la base hilbertiana $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ con $T(v_k) = \lambda_k v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que T es compacto si, y sólo si, $\lim_k v_k = 0$ (3 puntos).
    3. Sea $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal en el espacio de Hilbert H. Si (c_k) es una sucesión de números positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, entonces el conjunto
    $$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : |a_k| \leq c_k \right\}$$
    es un subconjunto compacto de H (3 puntos).

2. Cuestiones

1. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador autoadjunto y compacto tal que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para cualquier $x \in H$. Calcular la raíz cuadrada de T (2 puntos).

T autoadjunto y compacto $\Rightarrow \exists \{\lambda_k\}_k \quad |\lambda_k| \xrightarrow{k} 0$

$\{e_k\}_k$ base hilbertiana

tal que $\quad Tx = T(\sum \langle x, e_i\rangle e_i) = \sum \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$

Además, $\langle T e_k, e_k\rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k\rangle = \lambda_k \geq 0$

Así, podemos definir $\quad \sqrt{T}x = \sum \sqrt{\lambda_k} \langle x, e_k\rangle e_k$

y es

$$\sqrt{T}(\sqrt{T}x) = \sqrt{T}\left(\sum \sqrt{\lambda_k}\langle x, e_k\rangle e_k\right) = \sum_j \sqrt{\lambda_j} \langle \sum_k \sqrt{\lambda_k}\langle x, e_k\rangle e_k, e_j\rangle e_j =$$

$$= \sum \sqrt{\lambda_j} \langle \sqrt{\lambda_j}\langle x, e_j\rangle e_j, e_j\rangle e_j = \sum \lambda_j \langle x, e_j\rangle \|e_j\|^2 e_j = \sum \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j = Tx$$

2. Sea H un espacio de Hilbert y $C \subset H$ un subconjunto convexo. Nos preguntamos si es lo mismo afirmar que C sea débilmente cerrado y que sea cerrado en la norma. Lo mismo para C débilmente acotado y acotado en la norma. Lo mismo para C débilmente compacto y compacto en la norma (2 puntos).

La última equivalencia no se da en general, pues en un Hilbert separable (dim infinita) la bola unidad no es compacta en la topología de la norma por Riesz pero sí es débilmente compacta por Banach-Alaoglu.

En cuanto a los cerrados, si $C = A^c$ con A débilmente abierto (C débilmente cerrado), entonces como A también es abierto (en la top de la norma), C es también cerrado. Es decir, débilmente cerrado $\Rightarrow$ cerrado. Para la otra implicación, si C es convexo y cerrado (y suponemos $C \neq H$), dado $x_0 \in H \setminus C$ por Hahn-Banach analítico (9.4 apuntesAF) existe $f \in H^*$ tal que $f(x_0) > \alpha > f(c)$ $\forall c \in C$, luego $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es un abierto débil que contiene a x_0 y no interseca a C, es decir, $A = f^{-1}(\alpha, +\infty) \subset C^c \Rightarrow C^c$ es abierto débil $\Rightarrow C$ es cerrado débil.

Por último, como los espacios duales en ambas topologías son iguales (ya que la topología débil es la más gruesa que hace continuas a las funciones de H^*) debe ser equivalente ser acotado en una topología y en otra.

3. Demostrar el teorema de separación de Hahn Banach para un subconjunto cerrado convexo y otro subconjunto compacto y convexo de un espacio de Hilbert H (2 puntos).

C cerrado convexo, K compacto convexo, no vacíos, $K \cap C = \emptyset$

Lema 1 $\exists x_0 \in K, y_0 \in C : d(K, C) = \|x_0 - y_0\|$

$\exists (x_n)_n \subseteq K, (y_n)_n \subseteq C : \|x_n - y_n\| \to d(K, C)$, tomo $(x_{n_k})_k$ convergente a $x_0 \in K$, de forma que $\lim_k \|x_0 - y_{n_k}\| = d(K, C)$. Tomo entonces y_0 la mejor aproximación de x_0 a C, y se tiene:

$$d(K, C) \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_{n_k}\| \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

luego $\|x_0 - y_0\| = d(K, C)$.

$\square$

Considero x_0, y_0 del lema. Por el ejercicio (1.52.):

$$\begin{cases} \forall z \in C & \langle x_0 - y_0, z - y_0 \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x_0 - y_0, z \rangle \leq \langle x_0 - y_0, y_0 \rangle \\ \forall w \in K & \langle y_0 - x_0, w - x_0 \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x_0 - y_0, w - x_0 \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x_0 - y_0, x_0 \rangle \leq \langle x_0 - y_0, w \rangle \end{cases}$$

Considero $f : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x_0 - y_0, x \rangle$ y dados $z \in C$, $w \in K$:

$$f(w) \geq f(x_0) = f(x_0 - y_0) + f(y_0) = \|x_0 - y_0\|^2 + f(y_0) \geq \|x_0 - y_0\|^2 + f(z)$$

donde $\|x_0 - y_0\|^2 > 0$ porque $K \cap C = \emptyset$

4. En un espacio de Hilbert infinito dimensional existen formas lineales no continuas (2 puntos).

Cierto. Sea $\{v_k\}_k$ una base hilbertiana y $f: H \to \mathbb{R}$ la forma lineal que lleva $v_k \to k$

Entonces f no es acotada $\Rightarrow$ f no es continua

5. ¿Es cierto o falso que una sucesión de polinomios ortogonales no puede tener subsucesiones convergentes? (2 puntos).

Si son ortonormales $\Rightarrow$ verdadero [pq si $n,m \in \mathbb{N}$ $\|P_n - P_m\|^2 \underset{\text{Pitágoras}}{=} \|P_n\|^2 + \|P_m\|^2 = 2$ $\to$ no es de Cauchy $\to$ no puede tener subsucs. converg.]

Si son ortogonales, falso.

Sea $\{P_n\}_n$ una sucesión de polinomios ortogonales.

Entonces $\{\frac{1}{n} P_n\}_n$ también es una sucesión de polinomios ortogonales

y además $\lim_n \frac{1}{n} P_n = 0$ //

1. Sea H un espacio de Hilbert y $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de subespacios cerrados de H. Sea P_n (con $\|P_n\| = 1$) la proyección ortogonal de H sobre M_n y consideremos una sucesión acotada de vectores (x_n) en H tales que $P_n(x_{n+1}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se pide demostrar que $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle$ existe para cualquier $y \in H$, lo que nos define un elemento x de H tal que $P_n(x) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (4 puntos).

P1

- $\|P_n\| = 1 \Rightarrow M_n \neq 0$ (1)
- $P_n(x_{n+1}) = x_n \Rightarrow x_n \in M_n \quad \forall n \Rightarrow P_n(x_n) = x_n$ (2)

Si $m > n$, $\quad x_n = P_n(x_{n+1}) = \underbrace{P_n \circ P_{n+1}}_{P_n}(x_{n+2}) = \cdots = P_n(x_m)$ (3)

Por lo tanto, si $n < m$:

$$|\langle x_n - x_m, y\rangle| \leq \|y\| \cdot \|P_n(x_m) - P_m(x_m)\| \leq \|y\| \cdot \underbrace{\|x_m\|}_{\text{acotada}} \cdot \|P_n - P_m\| \leq C \cdot \|y\| \cdot \|P_n - P_m\|$$

Como vimos en el método de Ritz, $P_n x \to x \ \forall x \in H$, y por Banach-Steinhaus $P_n \to P$ en la convergencia uniforme sobre compactos, luego $\|P_n - P_m\|$ lo podemos hacer pequeño y $\langle x_n, y\rangle$ es de Cauchy, en $\mathbb{R}$ completo, es convergente.

Como $(x_n)_n \subseteq C \cdot B_X$, $\exists\, (x_{n_k})_k$ convergente débilmente a cierto x, es decir, $\langle x_{n_k}, y\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \langle x, y\rangle$, luego el límite encontrado anteriormente es de hecho $\langle x, y\rangle$, $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle \ \forall y \in H$.

Ahora bien, dados $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ y $z \in M_n$:

$\langle x_m - x_n, z\rangle \overset{(3)}{=} \langle x_m - P_n(x_m), z\rangle = 0$, de donde

$\langle x_m, z\rangle - \langle x_n, z\rangle = 0$

Tomando límites en m obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in M_n$ $\quad \langle x, z\rangle - \langle x_n, z\rangle = \langle x - x_n, z\rangle = 0$, es decir, $P_n(x) = x_n$.

3. Problemas

2. Supongamos que T es un operador acotado en el espacio de Hilbert H que es diagonal respecto de la base hilbertiana $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ con $T(v_k) = \lambda_k v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que T es compacto si, y sólo si, $\lim_k v_k = 0$ (3 puntos).

Sea $P_n : H \longrightarrow F_n$ proyección ortogonal sobre $F_n = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Entonces P_nT e $(I-P_n)T$ también son operadores diagonales respecto a la base hilb. $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, pues:

$$P_nT(v_k) = P_n(\lambda_k v_k) = \begin{cases} \lambda_k v_k & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases} \qquad (I-P_n)T(v_k) = (T-P_nT)(v_k) = \begin{cases} \lambda_k v_k - \lambda_k v_k = 0 & 1 \leq k \leq n \\ \lambda_k v_k - 0 = \lambda_k v_k & k > n \end{cases}$$

y tienen normas $\|P_nT\| = \sup\{|\lambda_k| \; 1 \leq k \leq n\}$ y $\|T - P_nT\| = \sup\{|\lambda_k| : k > n\}$.

$\downarrow$

P_nT es operador acotado de rango finito ($\Rightarrow$ compacto, pues $\overline{P_nT(B_H)}$ es cerrado y acotado en $P_nT(H)$ de dim finita)

luego:

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lim_n \lambda_n = 0$, entonces $0 = \lim_n \|T - P_nT\| = \|\lim_n (T - P_nT)\| = \|T - \lim_n P_nT\| \Leftrightarrow T = \lim_n P_nT$, luego P_nT es una sucesión de operadores compactos que converge a T y por 7.19 (2) de los apuntes de Lorenzo se concluye que T es compacto.

$\boxed{\Rightarrow}$ Recíprocamente si T es compacto se puede poner por 7.19 (3) como límite $T = \lim_n P_nT$ de operadores de rango finito y entonces $\|T - P_nT\| = \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \longrightarrow 0$.

1. Sea H un espacio de Hilbert y $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de subespacios cerrados de H. Sea P_n (con $\|P_n\| = 1$) la proyección ortogonal de H sobre M_n y consideremos una sucesión acotada de vectores (x_n) en H tales que $P_n(x_{n+1}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se pide demostrar que $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle$ existe para cualquier $y \in H$, lo que nos define un elemento x de H tal que $P_n(x) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (4 puntos).

$\|P_n\| = 1$ y $\|x_n\| \leq C \;\; \forall n$. Sea $\overset{0}{\underset{\shortparallel}{}} y \in H$, entonces

$$|\langle x_n, y\rangle|^2 \leq \|x_n\|^2 \|y\|^2 \leq C^2 \|y\|^2 \quad \forall n$$

$$|\langle x_n, y\rangle|^2 \leq \|x_n\|^2 \|y\|^2 = \|P_n(x_{n+1})\|^2 \|y\| \leq \|P_n\|^2 \|x_{n+1}\|^2 \|y\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 \|y\|^2$$

$\underset{y \neq 0}{\Longrightarrow}$ $\|x_n\| \leq \|x_{n+1}\| \;\; \forall n$ y $\|x_n\| \leq C$ $\Longrightarrow$ $z_n = \|x_n\|$ es una sucesión real, creciente y acotada superiormente, por tanto, convergente $\longrightarrow \exists z = \lim_n z_n = \lim_n \|x_n\|$

Por otro lado $P_n(x_k) = x_k \;\; \forall k \leq n$, pues $M_k \subset M_n$.

Así, $|\langle x_n, y\rangle - \langle x_m, y\rangle| = |\langle x_n - x_m, y\rangle| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suponemos } m > n}}{=} |\langle P_m(x_n) - P_m(x_{m+1}), y\rangle| = |\langle P_m(x_n - x_{m+1}), y\rangle| \leq \|P_m(x_n - x_{m+1})\| \, \|y\| \leq$

$\leq \|x_n - x_{m+1}\| \, \|y\|$

Podemos escribir $x_{n+1} = \underset{\in M_n}{x_n} + \underset{\in M_n^{\perp}}{(x_{n+1} - x_n)} = x_n + w_{n+1}$

y entonces es $z_n = \|x_n\| = \|x_{n-1} + w_n\| \leq \|x_{n-1}\| + \|w_n\|$

$$\lim_n z_n = \lim_n \|x_n\| = z \leq \lim_n \left(\|x_{n-1}\| + \|w_n\|\right) = z + \lim_n \|w_n\|$$

$\to \lim_n \|w_n\| = 0 \Rightarrow \lim_n w_n = 0$

Y entonces $\lim_n \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_n \|w_n\| = 0 \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| = 0$

3. Sea $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal en el espacio de Hilbert H. Si (c_k) es una sucesión de números positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, entonces el conjunto

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : |a_k| \le c_k \right\}$$

es un subconjunto compacto de H (3 puntos).

Sea $\{x_n\}_n \subset A$, ¿admite una subsucesión convergente?

Como $\sum c_k^2 < \infty \Rightarrow c_k \xrightarrow{k} 0 \Rightarrow \exists R>0 \,/\, \{c_k\}_k \subset [-R,R]$

Pensemos en:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
x_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

Sea $(a_{m1})_m \subset [-c_1, c_1] \Rightarrow$ admite subsucesión convergente $(a_{m_k 1})_k \to A_1 \in [-c_1, c_1]$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
x_{m_1,1} & a_{m_1,1,1} & a_{m_1,1,2} & a_{m_1,1,3} & \cdots & a_{m_1,1,n} & \cdots \\
x_{m_1,2} & a_{m_1,2,1} & a_{m_1,2,2} & a_{m_1,2,3} & \cdots & a_{m_1,2,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
x_{m_1,n} & a_{m_1,n,1} & a_{m_1,n,2} & a_{m_1,n,3} & \cdots & a_{m_1,n,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

$(a_{m_1,m_2,2})_{m_2}$

$(a_{m_1 m_2,2})_{m_2} \subset [-c_2, c_2] \Rightarrow$ subsuc. conv. $(a_{m_1,m_{2k},2})_k \to A_2 \in [-c_2, c_2]$

Y así vamos tomando reiteradamente subsucesiones convergente en cada componente y tomamos finalmente

$\{X_k\}_k$ con $X_k = x_{m_1 m_2 \dots m_k, k}$

Y entonces esta subsucesión converge a $X = \{A_i\}_i$ con $|A_i| \le c_i \Rightarrow X \in A$

UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
6 de Julio de 2009

1. **Teoría**

   1. Compacidad y completitud en Análisis Funcional. (Tema de 6 puntos)
   2. Teorema espectral para operadores compactos y simétricos. (Teorema de 4 puntos)

2. **Cuestiones**

   1. ¿Es cierto o falso que todos los espacios de Hilbert que aparecen en la resolución del problema de Dirichlet son isomorfos? (2'5 puntos). Ya hecho, sí es cierto
   2. En un espacio de Hilbert H, si (x_n) es una sucesión en la bola unidad B_H, determinar si existe $x \in B_H$ junto con una subsucesión (x_{n_k}) tal que
   $$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$
   para todo $y \in H$ (2'5 puntos). Ya hecho, sí es cierto
   3. Determinar si existen formas lineales discontinuas en un espacio de Hilbert (2'5 puntos). Ya hecho, sí existen
   4. Sea $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $K(t, s) = K(s, t)$ para todo $s, t \in [a, b]$. Estudiar la ecuación integral
   $$\int_a^b K(s, t)u(t)\, dt - \lambda u(s) = h(s), \text{ donde } s \in [a, b],$$
   para $h \in L^2([a, b])$ (2'5 puntos).

   Ya hecho

2. En un espacio de Hilbert H, si (x_n) es una sucesión en la bola unidad B_H, determinar si existe $x \in B_H$ junto con una subsucesión (x_{n_k}) tal que

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todo $y \in H$ (2'5 puntos).

Dado un espacio normado (en este caso H) y una sucesión $(x_n)_n$ se dice que esta converge débilmente a un punto $x \in H$ si $\forall f \in H^*$, $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

En particular se puede considerar el funcional
$$\begin{aligned} \langle\cdot\rangle_y : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$
para cada $y \in H$, que es claramente lineal (tb es continuo pq es acotado por $\|y\|$).

Además, como H es un Hilbert, B_H es débilmente compacta y entonces para cada sucesión $(x_n)_n$ en B_H esta tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge débilmente en B_H.

Es evidente entonces que si para alguna sucesión $(x_n)_n$ no existiese tal $x \in B_H$ y tal subsucesión $(x_{n_k})_k$ se estaría contradiciendo la compacidad débil de B_H pues $\langle\cdot\rangle_y \in H^*$ $\forall y \in H$.

3. Problemas

1. Sea H el conjunto de funciones analíticas en algún disco que contenga al disco unidad $D(0,1)$. Definamos la aplicación de $H \times H$ en $\mathbb{C}$ dada por:

$$(f,g) \rightsquigarrow \langle f,g \rangle := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(z)}g(z)}{z}\,dz$$

donde C denota la frontera del disco unidad orientada positivamente. Se nos pide:

(a) Demostrar que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es un producto escalar (2 puntos).

(b) Probar que las funciones $\{z^n : n = 0,1,2,\dots\}$ forman una base hilbertiana (2 puntos).

(c) Determinar la relación entre el desarrollo en serie de Fourier y el desarrollo en serie de potencias para una función del espacio H (2 puntos).

2. Sea $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal en el espacio de Hilbert H. Si (c_k) es una sucesión de números positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$, se pide demostrar que el conjunto $A = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : |a_k| \le c_k : k = 1,2,\dots\}$ es un subconjunto compacto de H (4 puntos).

Ya hecho, subsucesión recurrente

UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
2 de Febrero de 2010

1. **Teoría**

   1. Ecuaciones diferenciales y Análisis Funcional. (Tema de 6 puntos)
   2. Teorema de alternativa de Fredholm. (Teorema de 4 puntos)

2. **Cuestiones**

   Responder si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   1. $l^2(\mathbb{N})$, $L^2(\mathbb{R}^3)$ y $L^2([0,1]\times[0,1])$ son isométricamente isomorfos (2 puntos).
   2. La bola unidad cerrada de un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H es un retracto de la bola unidad de H (2 puntos).
   3. La serie de Fourier de una función f continua y 2π-periódica es convergente hacia f (2 puntos).
   4. Las sucesiones minimizantes para formas cuadráticas basadas en formas bilineales continuas y fuertemente positivas, en un espacio de Hilbert, convergen hacia el mínimo (2 puntos).
   5. En un espacio de Hilbert si (x_n) es una sucesión en la bola unidad B_H existe $x \in B_H$ junto con una subsucesión (x_{n_k}) tal que

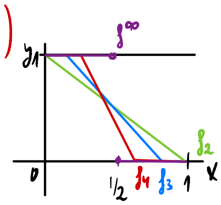
   $$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

   para todo $y \in H$ (2 puntos).

3. **Problemas**

   1. Para un subconjunto compacto K del plano complejo podemos definir un operador en $l^2(\mathbb{N})$ cuyo espectro coincida con K (5 puntos).
   2. Los espacios $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ y $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ no son espacios de Hilbert (5 puntos).

$C([a,b], \|\cdot\|_\infty)$ no verifica la ley del paralelogramo (hecho ya)



$C([a,b], \|\cdot\|_2)$ no es completo: $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{2}x & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$

$\cong$

$C([0,1], \|\cdot\|_2)$ $n \geq 2$

$y = 1 - \lambda \to \lambda = 1 - y$

$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \lambda\frac{2}{n} \to \lambda = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{2}$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 1\right) + \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 0 - 1\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 1\right) + \lambda\left(\frac{2}{n}, -1\right)$

$1 - y = x\frac{n}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$

El límite no es continuo //

$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{2}x}$

1. $l^2(\mathbb{N})$, $L^2(\mathbb{R}^3)$ y $L^2([0,1]\times[0,1])$ son isométricamente isomorfos (2 puntos).

H separable $\Leftrightarrow$ H isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$

$L^2([0,1]\times[0,1])$ es separable porque $\mathcal{D}([0,1]\times[0,1])$ es denso en $L^2([0,1]\times[0,1])$ y $C([0,1]\times[0,1])$ es separable por Stone-Weierstrass. Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset C(\Omega)$, entonces $\mathcal{D}$ es separable y lo es $L^2([0,1]\times[0,1])$, luego $L^2([0,1]\times[0,1]) \cong \ell^2(\mathbb{N})$

Algo similar sucede para $L^2(\mathbb{R}^3)$ que, aunque estemos sobre un dominio no acotado, podremos aproximar cualquier función con una suma de funciones de la forma $f = \sum_1^n \alpha_j \chi_{(a_{j1},b_{j1})\times(a_{j2},b_{j2})\times(a_{j3},b_{j3})}$

y esto es un conjunto numerable.

Por tanto $L^2(\mathbb{R}^3) \cong \ell^2(\mathbb{N}) \cong L^2([0,1]\times[0,1])$

2. La bola unidad cerrada de un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H es un retracto de la bola unidad de H (2 puntos).

$P_Y : H \to Y$ es continua y $P_Y|_Y \equiv id$ ¿por el teo proyección ok

Falta ver que $P_Y(B_H) = B_Y$ y entonces B_Y sería retracto de B_H

$\boxed{\text{$A$ retracto de B si $\exists f: H \to H$ continua, con $f|_A = A$ y $f(B) = A$}}$

3. La serie de Fourier de una función f continua y 2π-periódica es convergente hacia f (2 puntos).

No necesariamente, tiene que ser derivable donde es continua y tener derivadas laterales donde no es continua.

Contraejemplo (xD):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right]$$ (contraejemplo de Féjer)

es continua pero su serie de Fourier es divergente.

1. Para un subconjunto compacto K del plano complejo podemos definir un operador en $l^2(\mathbb{N})$ cuyo espectro coincida con K (5 puntos).

$K \subset \mathbb{C}$ compacto $\leftrightarrow$ K cerrado y acotado, $\rightarrow \exists M>0 \,/\, |c|<M, \forall c \in K$

Además, por ser compacto en $\mathbb{C}$, podemos extraer un subconjunto denso y numerable de K, $\{d_k\}_k$

Sea $\{v_k\}_k$ una base hilbertiana de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definimos el operador $T: \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$

$$x \longmapsto \sum_k d_k \langle x, v_k \rangle v_k$$

Que es claramente lineal.

Además, es acotado porque $\|Tx\|^2 = \sum_k |d_k|^2 |\langle x, v_k\rangle|^2 \leq \sum_k c^2 |\langle x, v_k\rangle|^2 = c^2 \|x\|^2 < \infty$

Así, $\{d_k\}_k \subset \sigma(T) \Rightarrow K = \overline{\{d_k\}_k} \subset \sigma(T)$ por ser $\sigma(T)$ compacto (y entonces cerrado).

4. Las sucesiones minimizantes para formas cuadráticas basadas en formas bilineales continuas y fuertemente positivas, en un espacio de Hilbert, convergen hacia el mínimo (2 puntos).

4

$F(w) = \frac{1}{2} B(w, w) - b(w)$ mín en w_0. $F(z_n) \to F(w_0)$

$z_n = w_0 + (z_n - w_0)$

$F(z_n) = F(w_0) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{1}_{t}^2 \cdot B(z_n - w_0, z_n - w_0)$ (ver prueba de TPPVC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow b\|z_n - w_0\|^2 \leq B(z_n - w_0, z_n - w_0) = 2\left[F(z_n) - F(w_0)\right] \to 0$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
28 de Junio de 2010

1. **Teoría**

    1. La integral de Dirichlet. (Tema de 6 puntos)
    2. Teorema de Lax-Milgram. (Teorema de 4 puntos)

2. **Cuestiones**

    Responder si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

    1. $L^2(\mathbb{R}^3)$ y H_0^1 no son isométricamente isomorfos (2'5 puntos).
    2. Un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H es un retracto de H (2'5 puntos).
    3. Un espacio de Hilbert con bola unidad compacta es un espacio euclídeo finito dimensional (2'5 puntos).
    4. En un espacio de Hilbert un operador compacto, simétrico y positivo de norma uno tiene al uno como valor propio (2'5 puntos).

3. **Problemas**

    1. Sea $V : H \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua definida sobre el espacio de Hilbert H tal que $\lim_{\|u\|\to\infty} V(u) = +\infty$. Consideremos el problema de minimización:
    $$\min_{u\in H} V(u).$$
    Demostrar que dicho problema tiene solución y es única si V es estrictamente convexa ($V(\frac{x+y}{2}) < \frac{V(x)+V(y)}{2}$) (5 puntos).
    2. En el espacio $C([0,1])$ consideramos el conjunto
    $$C := \{x \in C([0,1]) : \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt = 1\}.$$
    Probar que C es un subconjunto convexo, no vacío y cerrado para la norma del supremo y que en dicha norma la distancia de C al origen es 1. Probar que, sin embargo, no existe elemento $x \in C$ de norma mínima (5 puntos).

1. $L^2(\mathbb{R}^3)$ y H_0^1 no son isométricamente isomorfos (2'5 puntos).

Falso, ya hemos visto antes que $L^2(\mathbb{R}^3) \cong \ell^2(\mathbb{N}) \cong H_0^1$

2. Un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H es un retracto de H (2'5 puntos).

Verdadero. Sea $M \subset H$ subesp. cerrado, por el teorema de la proyección, P_M es continua y $P_M(H) = M$ y $P_M(M) = M$.

Por lo que M es un retracto de H //

3. Un espacio de Hilbert con bola unidad compacta es un espacio euclídeo finito dimensional (2'5 puntos).

Verdadero. Supongamos que H es infinito dimensional, entonces podemos tomar una base hilbertiana $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esta base es una sucesión en B_H, que es compacto por hipótesis, luego tiene una subsucesión convergente $\{e_{n_k}\}_k$, pero

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m\rangle = \|e_n\|^2 - 2\langle e_n, e_m\rangle + \|e_m\|^2 = 2$$

Por lo que ninguna subsucesión puede ser de cauchy, y entonces $\{e_{n_k}\}_k$ no converge # contradicción. Entonces H es finito dimensional $\Rightarrow H \cong \mathbb{R}^n$ //

4. En un espacio de Hilbert un operador compacto, simétrico y positivo de norma uno tiene al uno como valor propio (2'5 puntos).

Verdadero. Por el teorema espectral, $\exists \{v_n\}_n$ base hilbertiana y $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{R}$ $|\lambda_n| \to 0$ tales que

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n\rangle v_n$$

Además $\|T\| = \sup_n \{|\lambda_n|\} \Rightarrow \sup_n \{|\lambda_n|\} = 1$ y como $\lambda_n \to 0$, este supremo es un máximo (por ejemplo, hay una cantidad finita de $\lambda_n \geq 1/2$).

Por ser T positivo, $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ $\forall x \Rightarrow \langle Tv_n, v_n\rangle = \lambda_n \geq 0$.

Por último, sabemos que $\pm\|T\|$ es valor propio.

Así, ± 1 es valor propio, pero estos son positivos, luego 1 es valor propio //

2. En el espacio $C([0,1])$ consideramos el conjunto

$$C := \{x \in C([0,1]) : \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} x(t)\,dt = 1\}.$$

Probar que C es un subconjunto convexo, no vacío y cerrado para la norma del supremo y que en dicha norma la distancia de C al origen es 1. Probar que, sin embargo, no existe elemento $x \in C$ de norma mínima (5 puntos).

C es convexo

Dados $x, y \in C$ ¿ $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ para $\lambda \in (0,1)$?

$$\int_0^{1/2} \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)\,dt = \lambda\left[\int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} x(t)\,dt\right] + (1-\lambda)\left[\int_0^{1/2} y(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} y(t)\,dt\right] = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

$C \neq \emptyset$

$$f(x) = -4x^2 \in C([0,1]) \text{ y } (-4)\int_0^{1/2} x^2\,dx + 4\int_{1/2}^{1} x^2\,dx = (-2)x^2\Big]_0^{1/2} + 2x^2\Big]_{1/2}^{1} = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$$

Cerrado para $\|\cdot\|_\infty$

Dada $(f_n)_n$ sucesión en C tq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in C[0,1]$, ¿$f \in C$?

Como $f_n \in C([0,1])$ es continua en un compacto está acotada con $\|\cdot\|_\infty \to$ la integral está acotada $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Entonces } \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \lim_n f_n(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} \lim_n f_n(x)\,dx \overset{TCD}{=} \lim_n \int_0^{1/2} f_n(x)\,dx - \lim_n \int_{1/2}^{1} f_n(x)\,dx$$

$$= \lim_n \left[\int_0^{1/2} f_n(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f_n(x)\,dx\right]$$

$$= 1 \to f \in C$$

$\inf\{\|f\|_\infty : f \in C\} = 1$

Voy a ver que si $\|f\|_\infty < 1$ entonces $f \notin C$, por lo que si $f \in C$ su norma será por lo menos 1.

Sea entonces $f \in C[0,1]$ con $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\ x \in [0,1]\} < 1$. Se tiene:

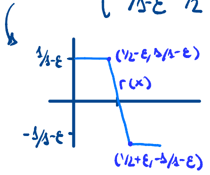
$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \left|\int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx\right| \leq \int_0^{1/2} |f(x)|\,dx + \int_{1/2}^{1} |f(x)|\,dx = \int_0^{1} |f(x)|\,dx \leq \int_0^{1} \sup |f(x)|\,dx < 1$$

Por lo que $f \notin C$.

Falta ver ahora que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists f_\varepsilon \in C : \|f_\varepsilon\|_\infty < 1 + \varepsilon$. Dado entonces $\varepsilon > 0$, hay que encontrar $f_\varepsilon \in C$ tal que $\sup\{|f_\varepsilon(x)| : x \in [0,1]\} < 1 + \varepsilon$

$$\text{Tomo } f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(1-\varepsilon) \cdot 1/2 & [0, 1/2 - \varepsilon] \\ \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{x}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} & [1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon] \\ -1/(1-\varepsilon) \cdot 1/2 & [1/2 + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

que es continua para $\varepsilon > 0$ y $|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1-\varepsilon}\right| = \frac{1}{2}\left|1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{\left|\varepsilon/1+\varepsilon\right|}_{\varepsilon < 1+\varepsilon}\right) < \frac{1+\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$



$(x_0, y_0) = \left(\frac{1-2\varepsilon}{2}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$

$(x_1, y_1) = \left(\frac{1+2\varepsilon}{2}, \frac{-1}{1-\varepsilon}\right)$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-2/1-\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{-1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$r(x) - \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{-1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left(\frac{2x - 1 + 2\varepsilon}{2}\right)$$

$$r(x) = -\frac{x}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \frac{2}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} + \frac{-2\varepsilon}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{2(1-\varepsilon)}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} - \frac{x}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{x}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

Además como es simétrica resp del eje x, $\int_0^{1/2} f_\varepsilon(x) = -\int_{1/2}^{1} f_\varepsilon(x) \to \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} f(x)\,dx =$ no sale 😢

$\nexists f \in C$ con $\|f\|_\infty = 1$

Supongo por RA que sí existe $f \in C$ con $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} = 1$

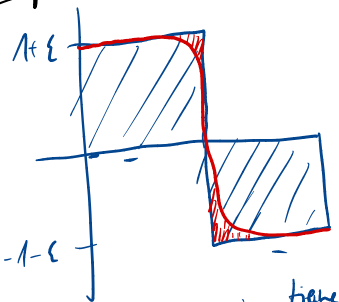
Si llamo $\alpha = \int_0^{1/2} f(x)\,dx$ y $\beta = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ entonces $\alpha - \beta = 1$ y $|\alpha| \leq \int_0^{1/2} |f(x)|\,dx = \frac{1}{2}$ y análogamente $|\beta| \leq \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \alpha = 1 + \beta \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \underset{\alpha \leq 1/2}{\Longleftrightarrow} \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{2}$

Es decir $\begin{cases} \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2} = \int_0^{1/2} 1\,dx \\ \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} = -\int_{1/2}^{1} 1\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{1/2} f(x) - 1\,dx = 0 \to f(x) = 1 \quad x \in [0, 1/2] \\ \int_{1/2}^{1} f(x) + 1\,dx = 0 \to f(x) = -1 \quad x \in [1/2, 1] \end{cases}$ #

$f(1/2) = 1 \neq -1$

Infimo



$2 \cdot \frac{1}{2}(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon$

El área roja tiene que ser ε y el área azul 1 ... no es trivial sacar la fórmula de este bicho, pero gráficamente sí se ve

Control de Análisis Funcional

28-Noviembre-2011

1. Sea H un espacio de Hilbert y $H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n \subset ....$ subespacios de dimensión finita con
$$H = \overline{\cup\{H_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$
Sean
$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$
bilineal, simétrica, acotada y fuertemente positiva,
$$b : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
lineal y continua definiendo la forma cuadrática
$$J(x) := 2^{-1}a(x,x) - b(x)$$
para $x \in H$. Si u es la solución del problema de minimización
$$\inf\{J(v) : v \in H\}$$
y u_n lo es para el problema restringido a H_n:
$$\inf\{J(v) : v \in H_n\},$$
el teorema de Ritz nos asegura que $\lim_n u_n = u$. Determinar si hay o no alguna relación entre el teorema de la proyección y la convergencia descrita en el teorema de Ritz para la resolución de un problema variacional cuadrático.

2. Sea $V : H \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua definida sobre el espacio de Hilbert separable H tal que $\lim_{\|u\| \to \infty} V(u) = +\infty$. Consideremos el problema de minimización:
$$\inf_{u \in H} V(u).$$
Demostrar que dicho problema tiene solución y que será única si V es estrictamente convexa:
$$(V(\frac{x+y}{2}) < \frac{V(x)+V(y)}{2}).$$
para cualesquiera $x \neq y \in H$

Control de Análisis Funcional

19 - Diciembre - 2011

1. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$ un operador. Probar que T es compacto si, y solamente si, el adjunto T^* lo es también.

2. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$ un operador compacto, autoadjunto con $< Tx, x > \geq 0$ para todo $x \in H$. Calcular el operador $\sqrt{T}$ tal que $T = \sqrt{T} \circ \sqrt{T}$.

1

Proof. Como $T^{**} = T$, basta ver la suficiencia.
Como T es compacto, entonces existe una sucesión de operadores $(T_n)_n$ acotados de rango finito con $T = \lim_n T_n$ en la norma de de operadores. Es decir, $\lim_n \|T - T_n\| = 0$.
Adenás, T_n^* es también acotado y de rango finito:

- acotado porque $\|T_n\| = \|T_n^*\|$
- de rango finito porque, si no, se podríamos tomar $(e_m)_m$ una sucesión ortonormal en ImT_n^* con $e_m = Tu_m, \forall m$. Como T_n son todas de rango finito, entonces existe k tal que $T_n e_k = 0$. Y entonces
$$0 = \langle T_n e_k, u_k \rangle = \langle e_k, T_n u_k \rangle = \langle e_k, e_k \rangle = 1$$
lo cual es una contradicción, y T_n^* debe tener rango finito

Por último, como $\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\|$, tenemos que $T^* = \lim_n T_n^*$ y por tanto T^* es compacto. $\square$

Examen Análisis Funcional

Enero 2012

Teoría

1. El teorema de Riesz en el Análisis Funcional. (tema de 30 puntos)
2. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos. (teorema de 20 puntos)

Cuestiones (6 puntos por cuestión de la 1 a la 5)

1. Sea $C_0^\infty(\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones de clase infinito y soporte compacto definidas en la recta real. Dados una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \epsilon > 0$ y $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto compacto ver que siempre es posible encontrar $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $|\varphi(x) - f(x)| \leq \epsilon$ para cualquier $x \in S$

2. Sea H un espacio de Hilbert y $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots$ subespacios de dimensión finita con $H = \overline{\cup\{H_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Sean $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal, simétrica, acotada y fuertemente positiva, $b : H \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua definiendo la forma cuadrática $J(x) := 2^{-1}a(x,x) - b(x)$ para $x \in H$. Si u es la solución del problema de minimización
$$\inf\{J(v) : v \in H\}$$
y u_n lo es para el problema restringido a H_n, i.e.
$$\inf\{J(v) : v \in H_n\},$$
el teorema de Ritz nos asegura que $\lim_n u_n = u$. Determinar la relación entre el teorema de la proyección y la convergencia descrita en el teorema de Ritz para la resolución de un problema variacional cuadrático.

3. Sea $U : H \to \mathbb{R}$ una función cóncava y continua definida sobre el espacio de Hilbert separable H tal que $\lim_{\|v\|\to\infty} U(v) = -\infty$. Consideremos el problema de optimización:
$$\sup_{v\in H} U(v).$$
Demostrar que dicho problema tiene solución $v_0 \in H$.

4. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Calcular los operadores $cos(T)$ y $sen(T)$ tales que $cos(T)^2 + sen(T)^2 = Id$

5. Sea $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $K(t,s) = K(s,t)$ para todo $s,t \in [a,b]$. Estudiar la ecuación integral

$$\int_a^b K(s,t)u(t)dt - \lambda u(s) = h(s), \text{where } s \in [a,b],$$

para $h \in L^2([a,b])$

6. Analizar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones (5 puntos cada una):

   (a) Una función continua $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ verificando
   $$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)cos(nt)dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)sen(nt)dt = 0$$
   para cada $n \geq 1$ es identicamente nula.

   (b) El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ son isométricamente isomorfos.

   (c) El espacio de funciones integrables $L^1[a,b]$ con su $\|\cdot\|_1$ es un espacio de Hilbert.

   (d) El operador de Laplace $\Delta(\cdot) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^2}$ para funciones definidas en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es compacto y simétrico teniendo asociada una base hilbertiana de vectores propios en $L^2(\Omega)$

4. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Calcular los operadores $cos(T)$ y $sen(T)$ tales que $cos(T)^2 + sen(T)^2 = Id$

Sea $\{v_k\}_k$ base hilbertiana de H con $Tv_k = \lambda_k v_k$ $\lim_k \lambda_k = 0$ (Hilbert-Schmidt)

$\cos(T)^2(x) + sen(T)^2(x) = x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ siendo el producto la composición de operadores

Defino $\cos(T)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\lambda_k) \langle x, v_k \rangle v_k$ y $sen(T)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} sen(\lambda_k) \langle x, v_k \rangle v_k$, que son evidentemente lineales y continuas:

$$\|\cos(T)(x)\|^2 = \sum_k |\cos(\lambda_k)|^2 |\langle x, v_k \rangle|^2 \leq \sum_k |\langle x, v_k \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty \Rightarrow \cos T \text{ cont}$$, el sen igual

Además se tiene entonces que $(\cos(T)^2 + sen(T)^2)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos^2(\lambda_k) \langle x, v_k \rangle v_k + \sum_{k=1}^{\infty} sen^2(\lambda_k) \langle x, v_k \rangle v_k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\cos^2(\lambda_k) + sen^2(\lambda_k)) \langle x, v_k \rangle v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, v_k \rangle v_k$$

$$= Id(x) \quad \forall x \in H$$

6. Analizar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones (5 puntos cada una):

(a) Una función continua $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ verificando

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)cos(nt)dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)sen(nt)dt = 0$$

para cada $n \geq 1$ es identicamente nula.

VERDADERO.

$\{sen(nt), \cos(nt)\}_{n \geq 1}$ es base hilbertiana de $L^2(-\pi, \pi)$, luego el enunciado dice que $\langle f, e_i \rangle = 0$ para cada e_i elemento de la base. Por el teo de la base debe ser $f \equiv 0$.

(c) El espacio de funciones integrables $L^1[a, b]$ con su $\|\cdot\|_1$ es un espacio de Hilbert.

FALSO.

Supongamos que $\exists \langle \cdot, \cdot \rangle$ prod. escalar tal que $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, entonces por el teo de Von Neumann debería cumplirse la ley del paralelogramo $\forall f, g \in L^1[a,b]$. $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Tomo $f = \chi_{[a, \frac{a+b}{2}]}$ $g = \chi_{[\frac{a+b}{2}, b]}$ que están en L^1 trivialmente y:

$$\|f+g\| = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} dx = \frac{a+b - a+b-(a+b)}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\|f-g\| = \|f+g\|$$

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\cdot\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\|f\|^2 = \frac{(b-a)^2}{4} = \|g\|^2 \to \|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{(b-a)^2}{2} \to 2(\|f\|^2+\|g\|^2) = (b-a)^2 \longrightarrow$$

no se cumple la ley del paralelogramo!

(d) El operador de Laplace $\Delta(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^2}$ para funciones definidas en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es compacto y simétrico teniendo asociada una base hilbertiana de vectores propios en $L^2(\Omega)$

Falso, el compacto es el inverso de $-\Delta$, luego los valores propios del inverso van a 0, y entonces los de Δ divergen, por lo que Δ no es un operador acotado, no es continuo ni compacto.

UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
Enero 2013

1. **Teoría**

   1. El teorema de la categoría de Baire y el Análisis Funcional. (Tema de 3 puntos)
   2. Teorema de Malgrange y Ehrenpreis. (Teorema de 2 puntos)

2. **Cuestiones** (1 punto cada cuestión de la 1 a la 4)

   1. Sean (e_n) y (f_n) sucesiones ortonormales en un espacio de Hilbert H. Decidir si son convergentes las filas y las columnas de la matriz infinita $(\langle e_i, f_j \rangle_{i,j})$. ¿Es convergente la diagonal?
   2. Sea H un espacio de Hilbert y $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$. ¿Es posible que $\|\sigma x + (1-\sigma)y\| = 1$ para algún $0 < \sigma < 1$?
   3. Explique la razón para la convergencia del algoritmo de Galerkin.
   4. Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$ un operador compacto, autoadjunto y positivo. Calcular el operador $\sqrt{T}$.
   5. Analizar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones (0.5 puntos cada una):

      (a) Una función continua $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ verificando

      $$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\, dt = 0$$

      para cada $n > 0$ es idénticamente nula.

      (b) El espacio de Sobolev H_1^0 y el dual del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, para un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, son isométricamente isomorfos. Hecho, teniendo en cuenta que H hilbert $\Downarrow$ $H^* = H$

      (c) El espacio de funciones continuas $C[a, b]$ con la norma $\|\cdot\|_2$ es un espacio de Hilbert.

      (d) El inverso del operador de Laplace $\Delta(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^2}$ (en $L^2(\Omega)$) para funciones definidas en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es compacto y autoadjunto, por lo que tiene asociada una base hilbertiana de vectores propios en $L^2(\Omega)$.

(c) El espacio de funciones continuas $C[a,b]$ con la norma $\|\cdot\|_2$ es un espacio de Hilbert.

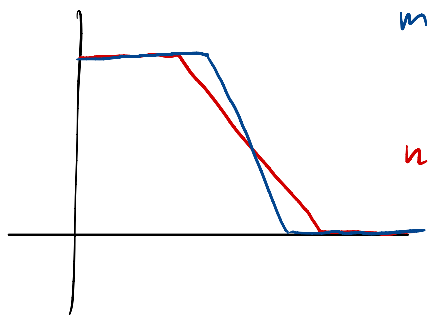
Falso, pues no es completo. Vimos

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{2}x & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases} \qquad n \geq 2$$

Veamos que es $\|\cdot\|_2$-cauchy, pero su límite no está en $C([a,b])$

$m > n$

$$(f_m - f_n)(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \frac{n}{2}x & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \\ \frac{m-n}{4} - \frac{m-n}{2}x & \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \frac{n}{2}x & \frac{1}{2} + \frac{1}{m} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$



$$\|f_m - f_n\|_2 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} \frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \frac{n}{2}x \, dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \frac{m-n}{4} - \frac{m-n}{2}x \, dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \frac{1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{2}x \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] + \frac{n}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} + \frac{m-n}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right] + \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right]$$

$$- \frac{n}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right] + \frac{n}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^2}{2}\right] + \frac{m-n}{4} \cdot \frac{2}{m} + \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right]$$

$$- \frac{n}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)^2}{2}\right] = \frac{2-\cancel{n}}{4}\left(\frac{m-n}{mn}\right) + \frac{n}{4}\left[\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{m^2} - \cancel{\frac{1}{m}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{n^2} + \cancel{\frac{1}{n}}\right] + \frac{m-n}{2m} + \frac{2+\cancel{n}}{4}\left(\frac{m-n}{nm}\right)$$

$$- \frac{n}{4}\left[\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{n^2} + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{m^2} - \cancel{\frac{1}{m}}\right] = \frac{m-n}{mn} + \frac{n}{4}\left[\frac{2}{m^2} - \frac{2}{n^2}\right] \le \frac{m-n}{mn} = \frac{k}{(n+k)n} = \frac{k}{n^2+kn}$$

y para n suficientemente grande, esto es pequeño

Además

$$\lim_k \frac{k}{n^2+kn} = \frac{1}{n}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
Junio 2013

1. **Teoría**

   1. El teorema de la proyección en el Análisis Funcional. (Tema de 6 puntos)
   2. Teorema de aproximación de Ritz-Galerking. (Teorema de 4 puntos)

2. **Cuestiones**

   Responder, razonando la respuesta, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones: (2 puntos cada una)

   1. El operador de Laplace Δ en un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene una sucesión de valores propios positivos que tiende a $+\infty$.
   2. En un espacio de Hilbert H un conjunto convexo C es cerrado si, y sólo si, para cualquier sucesión (x_n) en C la condición
   $$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle\,, \quad \forall y \in H$$
   debe implicar el que $x \in C$.
   3. Si X es un espacio de Banach y (x_n) e (y_n) son sucesiones en la esfera unidad de X tales que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$, entonces
   $$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$
   4. En un espacio de Hilbert infinito-dimensional H, dado un subespacio cerrado M de codimensión finita pero suficientemente grande se tiene que H, M y H/M son isomorfos.
   5. El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ son isométricamente isomorfos.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Funcional
Julio 2013

1. **Teoría**

    1. El teorema de Lax-Milgram en Análisis Funcional. (Tema de 6 puntos)
    2. Teorema expectral de operadores compactos y autoadjuntos. (Teorema de 4 puntos)

2. **Cuestiones**

    Responder, razonando la respuesta, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones: (2 puntos cada una)

    1. El operador de Laplace Δ en un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene una sucesión de valores propios positivos que tiende a 0. Hecho para ∞, este es falso
    2. En un espacio de Hilbert H un conjunto convexo C es cerrado si, y sólo si, para cualquier sucesión (x_n) en C la condición

    $$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle\,, \quad \forall y \in H$$

    debe implicar el que $x \in C$.

    3. Si X es un espacio de Banach y (x_n) e (y_n) son sucesiones en la esfera unidad de X tales que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$, entonces

    $$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

    4. El espacio de Sobolev H_1^0 y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ son isométricamente isomorfos.
    5. Sea T un operador compacto y autoadjunto en un espacio prehilbertiano H, entonces el espectro de T contiene una sucesión de números reales que decrece hacia cero.