Tarea 5

Jose Antonio Lorencio Abril

i)

Primero veamos qué debe ocurrir para que ϕ sea una **variación**.

Observamos que es claramente diferenciable, ya que α es una curva regular y f es diferenciable.

Por tanto, solo resta asegurar que $\phi(s,0)=\alpha(s)\,,\ \forall s\in I$:

$$\phi(s,0)=\alpha(s)+(0,0,f(s,0))=\alpha(s)\iff f(s,0)=0,\ \forall s\in I$$

Para que sea **propia**:

$$\alpha(a)=\phi(a,t)=\alpha(a)+(0,0,f(a,t))\iff f(a,t)=0,\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\alpha(b)=\phi(b,t)=\alpha(b)+(0,0,f(b,t))\iff f(b,t)=0,\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

Y, por último, para que sea **normal**, calculamos $Z(s)$:

$$Z(s)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,0)=\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\phi(s,t)=\left(0,0,\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right)|_{t=0}=\left(0,0,\frac{\partial}{\partial t}f(s,0)\right)\in\left[T_{\alpha(s)}S\right]^{\perp}$$

por lo que es normal siempre, independientemente de f.

Así, tenemos que ϕ es una variación propia y normal si, y solo si, $f(s,0)=f(a,t)=f(b,t)=0,\ \forall s\in I,t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, tal y como queríamos demostrar.

ii)

Notemos primero que $X_s=\alpha'(s)$ y $X_v=(0,0,1)$.

Como α es ppa, entonces se tiene que

$$\left\|\alpha'(s)\right\|=1\overset{d/ds}{\Longrightarrow}\left\langle\alpha'(s),\alpha''(s)\right\rangle=0\implies\left\langle X_s,\alpha''(s)\right\rangle=0$$

Además

$$\alpha''(s)=\left(\alpha_1''(s),\alpha_2''(s),0\right)\perp X_v$$

por tanto

$$\alpha''(s)\parallel N(\alpha(s))\,,\ \forall s\in I$$

y entonces

$$\frac{D\alpha'}{Ds}(s)=0$$

y α es una geodésica.

Como ϕ es propia (y normal) de α, tenemos por el teorema 6.6 que

$$L'(0)=0$$

Por tanto, por el teorema 6.8, se tiene

$$L''(0)=\int_a^b\left(\left\|\frac{DZ}{ds}(s)\right\|^2-K(\alpha(s))\left\|Z(s)\right\|^2\right)ds$$

Además

$$Z'(s) = \left(0, 0, \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} f(s,0)\right) = \lambda(0,0,1) = \lambda X_v$$

por lo que

$$\frac{DZ}{ds}(s) = Z'(s)$$

Además,

$$E = \left\|\alpha'(s)\right\|^2 = 1$$
$$F = \left\langle \left(\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), 0\right), (0,0,1)\right\rangle = 0$$
$$G = \|(0,0,1)\|^2 = 1$$

Y vemos como S es localmente isométrica al plano y, por el teorema Egregium de Gauss, obtenemos que $K(\alpha(s)) = 0$. Por tanto

$$L''(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\left[f(s,0)\right]\right)^2 ds$$