Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Jose Antonio Lorencio Abril

1 Definiciones y resultados previos

Definition 1.1. Supongamos que $u, v \in L^1_{loc}(U)$ y que α es un multiíndice. Decimos que ***v* es la *α*-ésima derivada parcial débil de *u*** y se denota $D^\alpha u = v$, si

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

para toda función $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Definition 1.2. El **espacio de Sobolev**, $W^{k,p}(U)$ consiste en todas las funciones localmente sumables $u : U \to \mathbb{R}$ tales que, para cada multiíndice α con $|\alpha| \leq k$, existe $D^\alpha u$ en sentido débil y pertenece a $L^p(U)$.

Notas:

1. Si $p = 2$, suele escribirse
$$H^k(U) = W^{k,2}(U), \ k = 0, 1, ...$$
donde se usa la letra H porque $H^k(U)$ es un espacio de Hilbert.

2. $H^0 = L^2(U)$

3. Identificamos funciones en $W^{k,p}(U)$ que coinciden en casi todo punto

Definition 1.3. Si $u \in W^{k,p}(U)$, definimos su **norma** como

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess\sup_U |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

donde $ees\sup_U$ denota el **supremo esencial**, que es un supremo obviando los conjuntos de medida 0.

Ejemplo de supremo esencial: supongamos la función $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, su supremo (y máximo) es claramente 1, pero su supremo esencial es 0.

Definition 1.4. Sea $\{u_m\}_m$ una sucesión en $W^{k,p}(U)$ y $u \in W^{k,p}(U)$. Decimos que $\boldsymbol{u_m}$ **converge a $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{W^{k,p}(U)}$** y se denota

$$u_m \to u, \; en\; W^{k,p}(U)$$

si

$$\lim_m \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

Por otro lado, se escribe

$$u_m \to u, \; en\; W^{k,p}_{loc}(U)$$

cuando

$$u_m \to u, \; en\; W^{k,p}(V)$$

para cada $V \subset\subset U$ (V es relativamente compacto en U).

Theorem 1.5. ***Teorema de extensión***
Sea U acotado y tal que ∂U es C^1. Sea V un abierto acotado tal que $U \subset\subset V$. Entonces existe un operador lineal acotado

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(U)$:

1. *$Eu = u$ en casi todo punto en U*
2. *Eu tiene soporte en V*
3. *Existe una constante C, que solo depende de p, U y V tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Tal Eu se denomina ***extensión de u a*** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Definition 1.6. Para $1 \leq p < n$, el **conjugado de Sobolev de $\boldsymbol{p}$** es

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Nota:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \; p^* > p$$

Theorem 1.7. ***Desigualdad de Galgiardo-Nirenberg-Sobolev***
Sea $1 \leq p < n$. Existe una constante C, dependiente solo de p y n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 1.8. ***Estimaciones para $W^{1,p}, 1 \leq p < n$***
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y con ∂U C^1. Asumamos $1 \leq p < n$ y $u \in W^{1,p}(U)$. Entonces $u \in L^{p^*}(U)$, con la estimación

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

donde la constance C solo depende de p, n y U.

Proposition 1.9. ***Desigualdad de interpolación para L^p-normas***
Asumamos $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ y que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$$

Supongamos que $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$. Entonces $u \in L^r(U)$ y

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^s(U)}^{\theta} \|u\|_{L^t(U)}^{1-\theta}$$

Definition 1.10. Sea $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde C es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.
Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

A η se le denomina la **aproximación de la identidad estándar**.
Las funciones η_ε son C^∞ y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1$$

$$sop(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$$

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, definimos su **suavización**

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y) dy$$

para $x \in U_\varepsilon$.

Propiedades de las funciones suavizadas

1. $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$
2. $f^\varepsilon \overset{\varepsilon \to \infty}{\to} f$ en casi todo punto
3. si $f \in C(U)$, entonces $f^\varepsilon \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de U
4. si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p_{loc}(U)$, entonces $f^\varepsilon \to f$ en $L^p_{loc}(U)$

Definition 1.11. Sea una sucesión de funciones $\{f_k\}_k$ reales definidas en $\mathbb{R}^n$. Se dice que son **uniformemente equicontinuas** si para todo $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, ...$

Proposition 1.12. ***Criterio de compacidad de Arzela-Ascoli***
Sea $\{f_k\}_k$ una sucesión de funciones reales definidas en $\mathbb{R}^n$,tal que

$$|f_k(x)| \leq M, \;\; k = 1, 2, ...; x \in \mathbb{R}^n$$

para alguna constante M, y que son uniformemente equicontinuas.
Entonces existe una subsucesión $\left\{f_{k_j}\right\}_j$ y una función continua f, tales que

$$f_{k_j} \to f \text{ uniformemente sobre compactos de } \mathbb{R}^n$$

2 El teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Definition 2.1. Sean X, Y espacios de Banach con $X \subset Y$. Decimos que X **está compactamente embebido** en Y, $X \subset\subset Y$ si

1. $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$ para cierta constante C y para todo $x \in X$
2. cada sucesión acotada en X es precompacta en Y

Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Theorem 2.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con ∂U C^1, y $1 \leq p < n$. Entonces*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

Proof. Vamos a hacer una prueba paso por paso:

1. Fijemos $1 \leq q < p^*$ y notemos que, como U es acotado, entonces el teorema 1.8 implica que
$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$$
$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$
Falta demostrar, por tanto, que si $\{u_m\}_m$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(U)$, entonces existe una subsucesión $\left\{u_{m_j}\right\}_j$ convergente en $L^1(U)$.

2. En vista del teorema de extensión (1.5), podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $U = \mathbb{R}^n$ y que las funciones $\{u_m\}_m$ tiene todas soporte compacto en algún abierto $V \subset \mathbb{R}^n$. También podemos asumir que
$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty \tag{1}$$

3. Estudiemos, primero, las funciones suavizadas
$$u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m$$
para $\varepsilon > 0, m = 1, 2, ...,$ donde η_ε denota la aproximación de la identidad usual (ver 1.10). Podemos suponer también que las funciones $\{u_m^\varepsilon\}_m$ tienen todas soporte en V.

4. Afirmamos que
$$u_m^\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\to} u_m,\ en\ L^q(V),\ uniformemente\ en\ m \tag{2}$$
Para probarlo, notemos que como u_m es diferenciable, entonces
$$u_m^\varepsilon(x)-u_m(x)=\int_{B(0,1)}\eta(y)\left(u_m(x-\varepsilon y)-u_m(x)\right)dy=\int_{B(0,1)}\eta(y)\int_0^1\frac{d}{dt}\left(u_m(x-\varepsilon ty)\right)dtdy=$$
$$=-\varepsilon\int_{B(0,1)}\eta(y)\int_0^1 Du_m(x-\varepsilon ty)\cdot ydtdy$$
Por tanto
$$\int_V|u_m^\varepsilon(x)-u_m(x)|\,dx\le\varepsilon\int_{B(0,1)}\eta(y)\int_0^1\int_V|Du_m(x-\varepsilon ty)|\,dxdtdy\le\varepsilon\int_V|Du_m(z)|\,dz$$
Por aproximación esta desigualdad se verifica si $u_m\in W^{1,p}(V)$. Por tanto
$$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}\le\varepsilon\|Du_m\|_{L^1(V)}\le\varepsilon C\|Du_m\|_{L^p(V)}$$
donde la última desigualdad se verifica porque V es acotado. Junto con lo visto en el paso 2, tenemos que
$$u_m^\varepsilon\to u_m,\ en\ L^1(V),\ uniformemente\ en\ m$$
Pero, como $1\le q<p^*$, vemos que usando la desigualdad de interpolación para L^p-normas (1.9) tenemos
$$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)}\le\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}^\theta\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$
donde $\frac{1}{q}=\theta+\frac{1-\theta}{p^*}$, $0<\theta<1$. Por tanto, por (1) y la desigualdad de Gagliardo-Niernberg-Sobolev (1.7) implican
$$\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^q(V)}\le C\|u_m^\varepsilon-u_m\|_{L^1(V)}^\theta \tag{3}$$
y entonces tenemos (2) por (3), como queríamos.

5. Afirmamos ahora que
$$\Big\{\text{para cada } \varepsilon>0, \text{ la sucesión } \{u_m^\varepsilon\}_m \text{ es uniformemente acotada y equicontinua} \tag{4}$$
Para verlo, si $x\in\mathbb{R}^n$, entonces
$$|u_m^\varepsilon(x)|\le\int_{B(x,\varepsilon)}\eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\,dy\le\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)}\le\frac{C}{\varepsilon^n}<\infty$$
para $m=1,2,....$ De forma análoga
$$|Du_m^\varepsilon(x)|\le\int_{B(x,\varepsilon)}|D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\,dy\le\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)}\le\frac{C}{\varepsilon^{n+1}}<\infty$$
para $m=1,2,...$ De ests dos desigualdades se deriva (4).

6. Fijemos ahora $\delta>0$. Vamos a ver que existe una subsucesión $\left\{u_{m_j}\right\}_j$ tal que
$$\limsup_{j,k\to\infty}\left\|u_{m_j}-u_{m_k}\right\|_{L^q(V)}\le\delta \tag{5}$$

Para ver esto, usamos (2) para elegir $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que

$$\|u_m^{\varepsilon} - u_m\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2} \tag{6}$$

para $m = 1, 2, ...$

Ahora, observamos que como las funciones $\{u_m\}_m$, y por tanto las $\{u_m^{\varepsilon}\}_m$, tienen soporte en un conjunto acotado $V \subset \mathbb{R}^n$ fijo, entonces podemos usar (4) y el criterio de compacidad de Arzela-Ascoli (1.12), para obtener una subsucesión $\left(u_{m_j}^{\varepsilon}\right)_j$ que converge uniformemente en V. En particular, tenemos

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j}^{\varepsilon} - u_{m_k}^{\varepsilon} \right\|_{L^q(V)} = 0 \tag{7}$$

Pero entonces, (6) y (7) implican que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j} - u_{m_k} \right\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

y tenemos (5).

7. Por último, utilizamos (5) con $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ y el típico argumento de la subsucesión diagonal, para extraer una subsucesión $\{u_{m_i}\}_i \subset \{u_m\}_m$ que satisface

$$\limsup_{i,k\to} \|u_{m_i} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0$$

$\square$