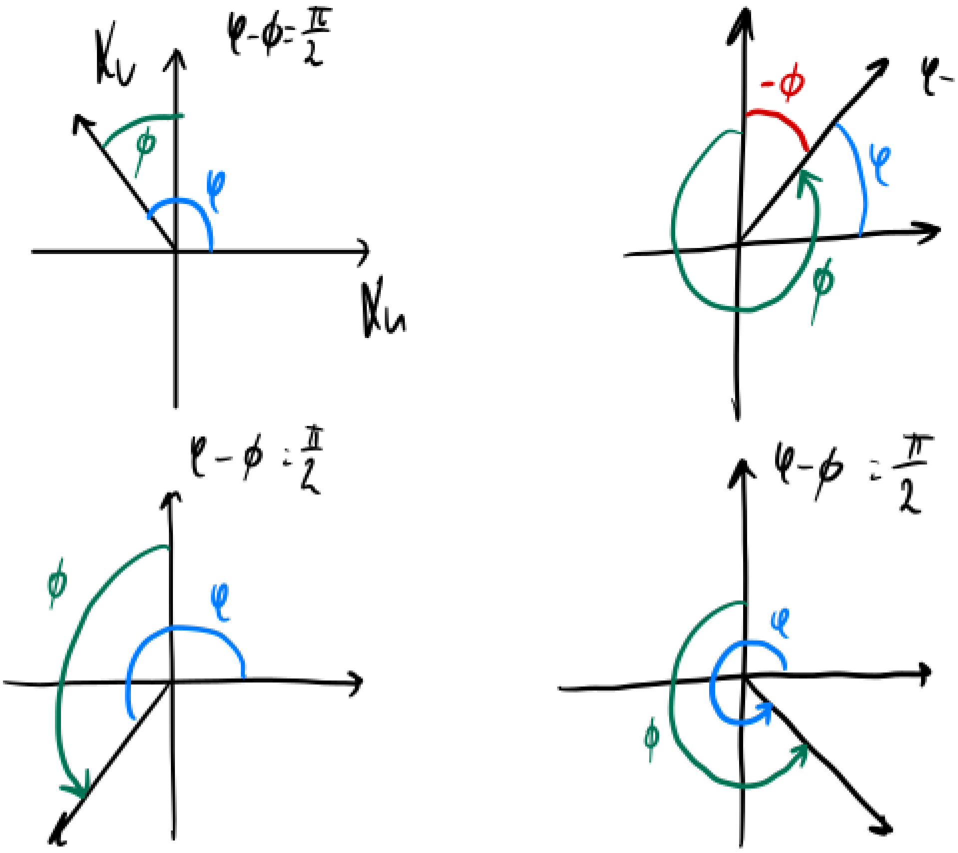
Tarea 2

Jose Antonio Lorencio Abril

En este pequeño diagrama podemos ver las distintas posibilidades para los ángulos que se forman:



Esto es debido a que $\{X_u, X_v\}$ va a ser una base ortogonal del plano tangente, pues veremos que $F = 0$.

Y veamos que $\sin(\varphi) = \cos(\phi)$ (el signo depende del cuadrante, pero no es importante para la tarea):

$$\sin(\varphi) = \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\phi\cos\frac{\pi}{2} + \cos\phi\sin\frac{\pi}{2} = \cos\phi$$

Nota: ahora voy a abusar un poco de notación, al escribir indistintamente $\frac{df}{du} = f'$, $\frac{du}{ds} = u'$ y $\frac{dv}{ds} = v'$, por simplicidad, pero es importante remarcarlo, ya que podría malinterpretarse $f' = \frac{df}{ds}(u(s)) = \frac{df}{du}(u(s))\frac{du}{ds}(s)$.

Calculemos la base del plano tangente a S y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\right) \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \left(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0\right)$$

$$E = f'(u)^2 + g'(u)^2 \qquad F = 0 \qquad G = f(u)^2$$

Y podemos calcular el $\sin\varphi(s)$ usando los hechos probados anteriormente y que, dado que $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$, entonces

$$\alpha'(s) = \frac{\partial X}{\partial u}(u(s), v(s))\, u'(s) + \frac{\partial X}{\partial v}(u(s), v(s))\, v'(s)$$

por lo que

$$\sin\varphi(s) = \cos\phi = \frac{\left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \alpha' \right\rangle}{\left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\| \|\alpha'\|} \overset{\alpha\ ppa}{=} \frac{v'(s) \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2}{\left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = v'(s) \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\| = v'(s)\, f(u)$$

Y podemos sustituir esta expresión en nuestra función

$$G(s) = f(u(s)) \sin\varphi(s) = f(u(s))^2\, v'(s)$$

Tenemos, entonces

$$G'(s) = \left[f(u(s))^2\, v'(s) \right]' = 2f'(u(s))\, f(u(s))\, u'(s)\, v'(s) + f(u(s))^2\, v''(s)$$

Y ahora vamos a usar la ecuación intrínseca de las geodésicas (que α verifica). Primero obtenemos los símbolos de Christoffel:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(f'^2 + g'^2)\, f^2} \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f'^2 + g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'f'' + g'g'' & 0 & -f'f \\ 0 & f'f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} & 0 & \frac{-f'f}{f'^2 + g'^2} \\ 0 & \frac{f'}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora nos centramos en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones intrínsecas para α:

$$v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0$$

donde sustituimos los símbolos y obtenemos:

$$v'' + 2u'v' \frac{f'}{f} = 0 \overset{\cdot f^2 (>0)}{\Longrightarrow} f(u(s))^2\, v''(s) + 2u'(s)\, v'(s)\, f'(s)\, f(s) = 0$$

y esta es precisamente la expresión que obtuvimos para la derivada. Por tanto:

$$G'(s) \equiv 0$$

y $G(s)$ es constante en todo el intervalo I en el que está definido α ($f : A \to B,\ A\ \textit{abierto y conexo} | f' \equiv 0 \implies f \equiv \textit{cte}$), como queríamos ver.