Tarea Opcional: El teorema de completación de espacios normados

Jose Antonio Lorencio Abril

Theorem 1. *(Theorem 3. en P. Lax, Functional Analysis, Ch 5. Normed Linear Spaces)*
Dado $X = (S, d)$ un espacio métrico no completo, existe una ***completación*** $\overline{X} = \left(\overline{S}, \overline{d}\right)$*, de tal forma que*

$$(S, d) \quad \xrightarrow{i} \quad \left(\overline{S}, \overline{d}\right)$$

es una aplicación inyectiva, $\overline{X}$ es un espacio métrico completo, $i(S)$ es denso en $\overline{S}$ y

$$d(x, y) = \overline{d}(i(x), i(y)), \ \forall x, y \in S$$

Además, $\overline{S}$ es único salvo isometrías.

Proof. Primero, definimos en $S^{\mathbb{N}}$ la siguiente relación de equivalencia

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_n d(x_n, y_n) = 0$$

y definimos

$$\overline{S} = \{[(x_n)] : (x_n) \text{ es de Cauchy en } d\}$$
$$\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n)$$

Primero, veamos que $\overline{d}$ es una distancia:

- $\overline{d}([x_n], [y_n])$ es convergente:

  $$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \iff d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

  y, como (x_n) e (y_n) son de Cauchy, para $\varepsilon > 0$, podemos tomar n, m suficientemente grandes, de forma que

  $$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  de forma que $(d(x_n, y_n))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que es convergente.

- $\overline{d}$ está bien definida: sean $x_n \sim x'_n$ e $y_n \sim y'_n$, entonces

  $$\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n) \leq \lim_n d\left(x_n, x'_n\right) + \lim_n d\left(x'_n, y'_n\right) + \lim_n d\left(y'_n, y_n\right) \overset{*}{=} \lim_n d\left(x'_n, y'_n\right) = \overline{d}\left([x'_n], [y'_n]\right)$$

  donde $*$ se debe a que $x_n \sim x'_n \iff \lim_n d(x_n, x'_n) = 0$. Para ver la otra desigualdad y comprobar la igualdad el razonamiento es exactamente igual.

- Es no negativa: $\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n) \geq 0$, por ser límite de números no negativos. Además, $\overline{d}([x_n], [y_n]) = 0 \iff \lim_n d(x_n, y_n) = 0 \iff (x_n) \sim (y_n) \iff [x_n] = [y_n]$

- Es simétrica: $\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = \overline{d}([y_n], [x_n])$.

- Verifica la desigualdad triangular: $\overline{d}([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n) \leq \lim_n d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n) = \lim_n d(x_n, z_n) + \lim_n d(z_n, y_n) = \overline{d}([x_n], [z_n]) + \overline{d}([z_n], [y_n])$.

Ahora, veamos que $\overline{S}$ es una compleción de S:

- S es denso en $\overline{S}$: sea $\emptyset \neq A \subset \overline{S}$ un abierto de $\overline{S}$, entonces

$$S \cap A = \{[x_n] \in A : x_n = x \in S, \forall n\}$$

Sea $[x_n] \in A$ y tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que $B = B_{\overline{d}}([x_n], \varepsilon) \subset A$. Supongamos que $S \cap A$ es vacío, de forma que lo es $S \cap B$, en particular. Eso quiere decir que, $\forall s \in S, \overline{d}([x_n], [s]) \geq \varepsilon$, o sea

$$\lim_n d(x_n, s) \geq \varepsilon, \ \forall s \in S$$

no obstante, por la definición de $\overline{S}$, sabemos que (x_n) es de Cauchy en S, por lo que $\exists n_0 | \forall n, m > n_0, d(x_n, x_m) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción (pues encontramos un elemento $x_m \in S$ con $\lim_n d(x_n, x_m) < \varepsilon$), que surge de suponer que $S \cap A = \emptyset$. Por tanto, ha de ser $S \cap A \neq \emptyset$ y S es denso en $\overline{S}$.

- $\overline{S}$ es completo:

  - **Lema:** sea (M, d) un espacio métrico, (b_n) una sucesión de Cauchy en M y sea (a_n) una sucesión en M tal que $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}, \forall n$. Entonces (i) (a_n) es de Cauchy en M y (ii) $\lim_n a_n = p \in M \iff \lim_n b_n = p \in M$.
  Dem: (i) $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + (b_m, b_n) + d(b_n, a_n)$ y para $\varepsilon > 0, \exists n_1 | \frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{3}$ y para $n, m > n_1$ es

$$d(a_m, a_n) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + d(b_n, b_m)$$

  y por ser b_n de Cauchy, $\exists n_2 | n, m > n_2 \implies d(b_m, b_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces, para $n, m > n_0$ se tiene

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

  y (a_n) es de Cauchy.
  $(ii)[\implies]$Se tiene que $\lim_n d(a_n, p) = 0$, y $0 \leq d(b_n, a_n) \leq \frac{1}{n}$, por lo que $\lim_n d(a_n, b_n) = 0$. Entonces

$$0 \leq d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$$

  y tomando límites tenemos $\lim_n d(b_n, p) = 0 \iff \lim_n b_n = p$.
  $[\impliedby]$ Igual.
  - Sea $(\alpha_n) \subset \overline{S}$ una sucesión de Cauchy en $\overline{S}$, tenemos que ver que es convergente. Como S es denso en $\overline{S}$, para todo $n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in S$ tal que $\overline{d}([y_n], \alpha_n) < \frac{1}{n}$. Entonces, por (i) del lema, la sucesión (y_n) es también de Cauchy en $\overline{S}$, pero es una sucesión de sucesiones constantes, por lo que también es de Cauchy en S. Por ser S denso en $\overline{S}$, se tiene que $\lim_n([y_n]) = y \in \overline{S}$, y por (ii) del lema se tiene $\lim_n \alpha_n = y$.

- $i(S) \subset \overline{S}$: obvio, tomando, para cada $x \in S$ la sucesión $x_n = x, \forall n$.

- $i(S)$ es denso en $\overline{S}$: sea $\emptyset \neq A \subset \overline{S}$ un abierto de $\overline{S}$, entonces

$$S \cap A = \{[x_n] \in A : x_n = x \in S, \forall n\}$$

Sea $[x_n] \in A$ y tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que $B = B_{\overline{d}}([x_n], \varepsilon) \subset A$. Supongamos que $S \cap A$ es vacío, de forma que lo es $S \cap B$, en particular. Eso quiere decir que, $\forall s \in S, \overline{d}([x_n], [s]) \geq \varepsilon$, o sea

$$\lim_n d(x_n, s) \geq \varepsilon, \ \forall s \in S$$

no obstante, por la definición de $\overline{S}$, sabemos que (x_n) es de Cauchy en S, por lo que $\exists n_0 | \forall n, m > n_0, d(x_n, x_m) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción (pues encontramos un elemento $x_m \in S$ con $\lim_n d(x_n, x_m) < \varepsilon$), que surge de suponer que $S \cap A = \emptyset$. Por tanto, ha de ser $S \cap A \neq \emptyset$ y S es denso en $\overline{S}$.

- $d(x,y) = \overline{d}(i(x), i(y))$:

$$\overline{d}(i(x), i(y)) = \overline{d}([x_n = x], [y_n = y]) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x,y) = d(x,y)$$

Falta ver la unicidad salvo isometrías.
Para ello, sea $\overline{R}$ una completación de S. Entonces S es isométrico a un subespacio denso de $\overline{R}$. Podemos asumir que S es subespacio de $\overline{R}$. Al ser S denso en $\overline{R}, \forall r \in \overline{R}, \exists (x_n) \subset X$ tal que $\lim_n x_n = y$, por lo que (x_n) es de Cauchy.
Definimos

$$\begin{array}{rcc} g : \overline{R} & \longrightarrow & \overline{S} \\ y & \mapsto & [(x_n)] \end{array}$$

La aplicación está bien definida, porque si otra sucesión tiene a y como límite, entonces el límite de las distancias entre las dos sucesiones será 0, y estarán en la misma clase de equivalencia.
Ahora

$$g(y) = g(y') \iff [(x_n)] = \left[(x'_n)\right] \implies \lim_n d\left(x_n, x'_n\right) = 0 \implies y = y'$$

y g es inyectiva.
Ahora, si $[(x_n)] \in \overline{S}$, la sucesión es de Cauchy en $X \subset \overline{R}$, por lo que converge a $y \in \overline{R}$, luego $g(y) = [(x_n)]$, y g es sobreyectiva.
Falta comprobar que conserva distancias:

$$\overline{d}\left(g(y), g(y')\right) = \overline{d}\left([(x_n)], \left[(x'_n)\right]\right) = \lim_n d\left(x_n, x'_n\right) = d\left(\lim_n x_n, \lim_n x'_n\right) = d(y, y')$$

Por tanto, g es una isometría, y $\overline{S}$ único salvo isometrías. □