

EDP y SF

O. Introducción

Definimos EDP a una ecuación del tipo

$$\textcircled{F} \quad F(\vec{x}, u(\vec{x}), D u(\vec{x}), \dots, D^N u(\vec{x})) = 0$$

donde la función incógnita es

$$u(\vec{x}), \text{ con } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

y donde

$$Du = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u), \dots, D^N u = \left(\partial_{x_1}^{q_1} \cdots \partial_{x_n}^{q_n} u \right)_{q_1 + \dots + q_n = N}$$

Decimos que $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es solución clásica de \textcircled{F} si

$$u \in C^N(\Omega) \text{ y es continua } \textcircled{F} \quad \forall \vec{x} \in \Omega$$

Notation

$$\cdot \quad \partial^{\underline{q}} = \partial_{K_1}^{q_1} \cdots \partial_{K_n}^{q_n} \quad \underline{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$\cdot \quad \Delta = \partial_{K_1 K_1} + \cdots + \partial_{K_n K_n} = \text{Tr}(\partial^2)$$

$$\cdot \quad \text{div } \vec{F} = \partial_{K_1} F_1 + \cdots + \partial_{K_n} F_n$$

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad \text{Ec. Laplace} \quad \Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Ec. calor} \quad \partial_t u = \Delta u \quad \text{con} \quad u(t, \vec{x}) \in (0, \infty) \times \Omega$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Ec. onda} \quad \partial_{tt} u = \Delta u \quad \text{con} \quad u(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Ec. Schrödinger} \quad i \partial_t u = \Delta u \quad \text{, , ,}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{EDP lineal general}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii}(\vec{x}) \partial_i^2 u = 0 \quad (\text{homogéneo})$$

$$= f \quad (\text{no homogéneo})$$

EDP no lineal

$$\cdot \quad \text{Ec. Burger} \quad \partial_t u + u \cdot \partial_x u = K \partial_{xx} u$$

$$\cdot \quad \text{Ec. media porosa} \quad \partial_t u = A(u^m) \quad \text{con} \quad m > 1$$

$$\cdot \quad p\text{-Laplaciano} \quad \partial_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-1} \cdot \nabla u) = f, \quad p > 1$$

$$\cdot \quad \text{Ec. superficie mínima}$$

$$\begin{cases} \text{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

② Sistemas de EDPs

• Ex Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t \vec{E} = \nabla \times \vec{B} \\ \partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(\mathbb{R}): \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

• Ex Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \Delta \vec{u} - \nabla p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \vec{u}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Objetivo Encuentro de un EDP que proporcione

Si EDP + $\begin{cases} \text{cond. contorno} \\ \text{cond. iniciales} \end{cases}$ \rightarrow Problema $\begin{cases} \text{- existencia y unicidad} \\ \text{- regularidad} \end{cases}$

Inferencias sobre EDOs

① No hay teoría general de existencia y unicidad
cada EDP se estudia individualmente

② Al revés, $\mathcal{A} \in C^N(\Omega)$ (sol. clásicas)
Inventar concepto de "solución débil",
expresiones alternativas $H^N(\Omega)$

③ Casi nunca hay soluciones explícitas y si las hay (EDPs lineales) es como serie o integral

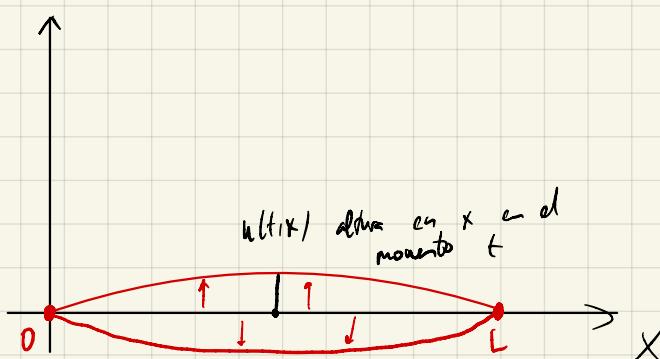
④ En general, requieren técnicas de análisis Matemático más sofisticadas

BLOQUE I: EDPs CLÁSICAS

1. La ecuación de la cuerda vibrante

1.1. Formulación física

Supongamos una cuerda flexible con extremos fijos



Buscemos:

$u(t, x)$ = altura de la cuerda en el punto $x \in (0, L)$ para t fijo

Hipótesis:

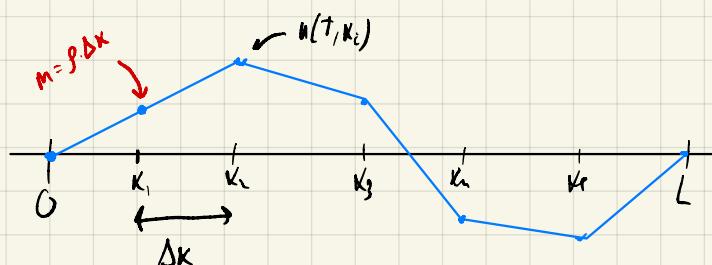
HIP1 Cuerda tensa de longitud L

HIP2 Desplazado $u_t = f$

HIP3 Tensión $u_{xx} = T$

HIP4 Solo pequeñas vibraciones verticales (vibr. lsgp. horizontal)

Para hallar la ec. cónsideremos la cuerda con una N partículas

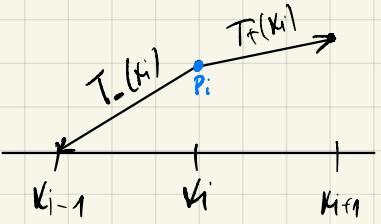


En cada K_i , la fuerza neta es

$$F(K_i) = m(K_i) \cdot a(K_i) = \underbrace{g\Delta x}_{m} \cdot \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} [u(t, K_i)]}_{a(K_i) \text{ (aceleración)}}$$

También se

$$\vec{F}(x_i) = (\vec{T}_-(x_i))_{\text{rest}} + (\vec{T}_+(x_i))_{\text{rest}}$$



la H3P3 nos dice

$$\vec{T}_-(x_i) = T \cdot \frac{p_{i-1} - p_i}{|p_{i-1} - p_i|}$$

$$\vec{T}_+(x_i) = T \cdot \frac{p_{i+1} - p_i}{|p_{i+1} - p_i|}$$

Notar que:

$$p_{i-1} - p_i = (\Delta x, \underbrace{u(k_{i-1}) - u(k_i)}_{\Delta u})$$

$$|p_{i-1} - p_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} \stackrel{\text{(H3P3)}}{\approx} \Delta x$$

$$\rightarrow (\vec{T}_{\pm}(x_i))_{\text{rest}} \approx T \cdot \frac{u(k_{i\pm 1}) - u(k_i)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \rho \Delta x \cdot u_{tt}(t, x_i) = T \cdot \frac{u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) - 2u(x_i)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow u_{tt}(t, x_i) = \frac{T}{\rho} \frac{u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) - 2u(x_i)}{(\Delta x)^2}$$

Lema

$f \in C^2(a-\delta, a+\delta)$, entonces

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lema \rightarrow

$$u_{tt}(t, x) = \frac{T}{\rho} u_{xx}(t, x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Nota
se dice escisión $\frac{T}{\rho} = c^2$, y c se le llama velocidad.

Aquí utilizo la ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 \cdot u_{xx}(t, x) & t > 0, x \in (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \quad \leftarrow \text{condición de contorno} \\ u(0, x) = f(x) & x \in (0, L) \quad \leftarrow \text{posición inicial} \\ u_t(0, x) = g(x) & x \in (0, L) \quad \leftarrow \text{velocidad inicial} \end{cases}$$

Esto es la ecuación de la cuerda vibrante (o ec. de onda en 1D)

Variantes

① Con rozamiento $u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_x$

② Con fuerza externa $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t, x)$

③ Densidad no cte $u_{tt} = \frac{I}{\rho(x)} u_{xx}$

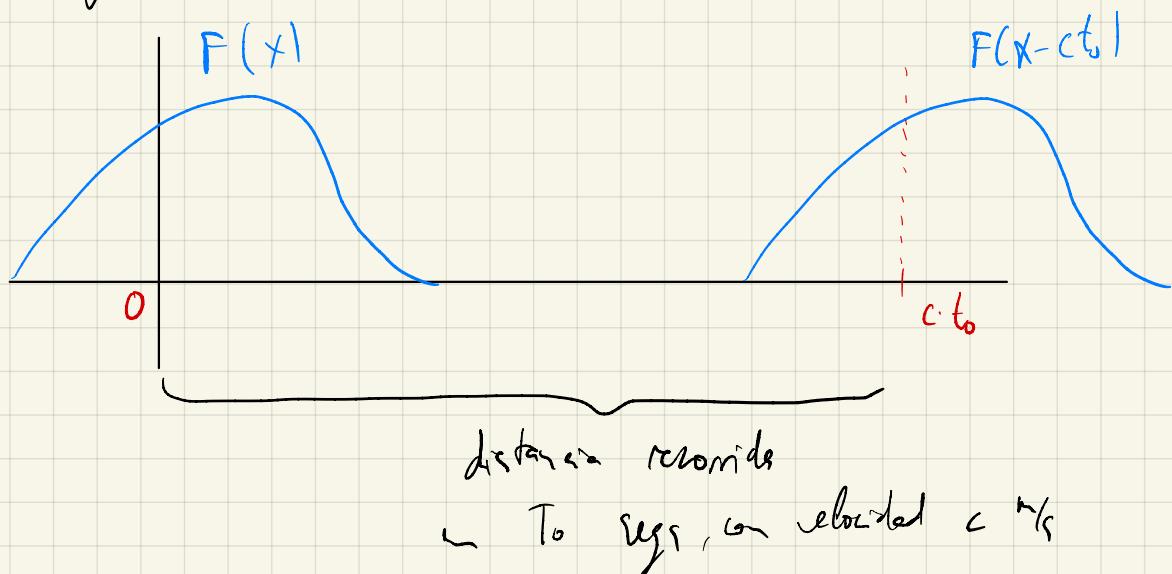
④ Fijo fijo $u_{tt} = c^2 \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \right)_x$

⑤ Cuerda vibrante rígida

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - M^2 u_{xxxx}$$

1.2. Solución general de la ec. onda vibrante (D'Alembert)

Observando el experimento esperamos soluciones del tipo "onda viajera"



D1 Dada $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$u(t, x) = F(x - ct) \quad \text{onda viajera hacia abajo}$$

$$u(t, x) = F(x + ct) \quad \text{onda viajera hacia arriba}$$

Lema de D'Alembert

a) Si $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ entonces $u(t, x) := F(x - ct) + G(x + ct)$

ejemplo

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

b) Si $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ entonces

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} \iff \begin{cases} \exists F, G \in C^2(\mathbb{R}) \text{ s.t.} \\ u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct) \end{cases}$$

Def

② Definition

$$u(tx) = F(x - ct) + G(x + ct) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

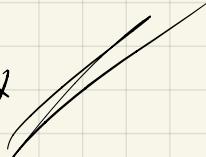
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F'(x - ct) \cdot (-c) + G'(x + ct) \cdot c$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F''(x - ct) \underbrace{(-c)^2}_{c^2} + G''(x + ct) / c^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(x - ct) + G'(x + ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = F''(x - ct) + G''(x + ct)$$

An:

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$


b) Cambio de variable

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\eta - \xi}{2c} \\ x = \frac{\eta + \xi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Hacemos } v(\xi, \eta) = u(t, x) = u\left(\frac{\eta - \xi}{2c}, \frac{\eta + \xi}{2}\right)$$

Añ, $v \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = V_\xi \cdot (-c) + V_\eta \cdot c$$

$$\partial_{tt} u = \left(V_{\xi\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) (-c) + \left(V_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) c = V_{\xi\xi} (-c)^2 + V_{\xi\eta} (-c)c + V_{\eta\xi} c(-c) + V_{\eta\eta} c^2$$

$$\text{Análogamente, } \partial_{xx}^2 u = V_\xi + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$$

Añ,

$$0 = (\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2) u = -4c^2 V_{\xi\xi} = 0$$

$$\Rightarrow V_{\xi\xi} = 0$$

$$\text{Integramos: } \partial_\xi \partial_\eta v = 0 \xrightarrow{\int d\xi} \partial_\eta v = C(\eta) \xrightarrow{\int d\eta} v = \int C du + D(\xi) = D(\xi) + G(\eta)$$

Añ,

$$v(\xi, \eta) = D(\xi) + G(\eta)$$

Deseando el cambio

$$u(t, x) = D(x - ct) + G(x + ct)$$

$$F \quad G$$

□

Ahi, hemos hallado la solución general de la EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad t, x \in \mathbb{R}$$

Para imponer las condiciones iniciales

$u(0, x) - f(x)$	→ pos inicial
$u_t(0, x) - g(x)$	→ velocidad inicial

$$(1) \quad u(0, x) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$(2) \quad u_t(0, x) = \left[F'(x - ct)(-c) + G'(x + ct)/c \right] \Big|_{t=0} = -c F'(x) + c G'(x) = g(x)$$

Sumando (1) + (2) :

$$c \cdot f'(x) + g(x) = 2c G'(x) \rightarrow G(x) = \frac{1}{2c} \int_0^x (c f'(s) + g(s)) ds$$

$$\rightarrow G(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$$

$$\rightarrow F(x) = f(x) - G(x) = \frac{f(x) + f(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x g(s) ds$$

Entonces se

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct) = \dots$$

$$u(t, x) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Fórmula de D'Alembert

Teorema 1 Solución de la cuerda vibrante en \mathbb{R}

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, entonces $\exists! u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ s.t.g.

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} \quad t, x \in \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(0, x) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Además, dicha $u(t, x)$ viene dada por

$$u(t, x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Ejemplos

- ① La cuerda penteada (plucked string)

1.3. La cuerda vibrante en un intervalo

Cuerda de longitud L con extremos fijos.
Queremos resolver la EDP

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & t \geq 0, x \in (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in [0,L] \end{cases}$$

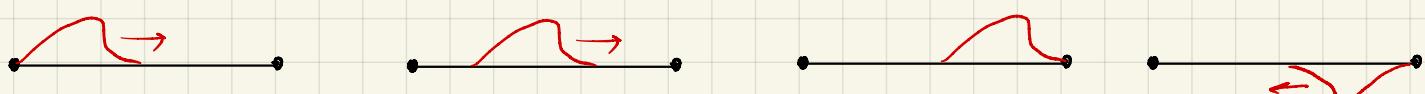
Vamos a suponer $g=0$.

Usando D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} \quad x \in [0,L], t \geq 0$$

queremos extender f desde $[0,L]$ a todo \mathbb{R}

Fijémonos en que pasa:



por tanto, la extensión natural es como función IMPAR y 2L periódica.

Def Si $f(x)$ ($[0, L]$) define en extensión impar y $2L$ -periódica

Luego

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & -L \leq x \leq 0 \\ 2L\text{-periódica} & x \notin (-L, L) \end{cases}$$

Definir el candidato a solución

$$u(t, x) = \frac{\tilde{f}(x-ct) + \tilde{f}(x+ct)}{2} + \frac{1}{2L} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{f}(s) ds \quad x \in [0, L], t > 0$$

Veamos que cumplen las condiciones de continuidad

$$u(0, x) = \tilde{f}(x) = f(x) \quad u_t(0, x) = \tilde{f}'(x) = g(x) \quad x \in [0, L]$$

$$u(0, 0) = \frac{\tilde{f}(-ct) + \tilde{f}(ct)}{2} + \frac{1}{2L} \int_{-ct}^{ct} \tilde{f}(s) ds = 0 \quad \text{porque } \tilde{f} \text{ es impar}$$

$$u(t, L) = \frac{\tilde{f}(L-ct) + \tilde{f}(L+ct)}{2} + \frac{1}{2L} \int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{f}(s) ds = 0$$

2L periódica

$$\frac{\tilde{f}(L-ct-2L) + \tilde{f}(L+ct)}{2} = - \int_{L-ct}^L \tilde{f}(-s+2L) ds + \int_L^{L+ct} \tilde{f}(s) ds = \int_{L-ct}^L \tilde{f}(s) ds + \int_L^{L+ct} \tilde{f}(s) ds =$$

impar

$$- \int_L^{L+ct} \tilde{f}(s) ds + \int_L^{L+ct} \tilde{f}(s) ds = 0$$

para concluir que $\omega_{H(X)}$ es la cohomoología buscada, faltó dar hipótesis

Lema 1

Ser $f \in C^2([0, L])$ y \tilde{f} su extensión impar, 2L-periodica.

Entonces

$$\textcircled{a} \quad \tilde{f} \in C(C\mathbb{R}) \iff f(0^+) - f(L^-) = 0$$

demuéstrelo en el caso

$$\textcircled{b} \quad \tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}) \quad (\text{gráficamente})$$

$$\textcircled{c} \quad \tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \iff f''(0^+) - f''(L^-) = 0$$

Lema 2

$$\text{Si } g \in C^1([0, L]) \quad \int_0^L g(0) - g(L) \rightarrow \int_0^L g(s) ds \in C^2(\mathbb{R})$$

Teorema 2 Si $u(x)$ es una función en $[0, L]$ con extremos fijos

sean $f \in C^2([0, L])$, $g \in C^1([0, L])$ t.g. $f(0) = f(L) = 0$
 $g(0) = g(L) > 0$
 $f''(0) = f''(L) = 0$

Entonces, $\exists! u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} & \text{para } x \in \mathbb{R}, t \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \forall t \\ u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x) & \forall x \in [0, L] \end{cases}$$

Además, la solución explícita viene dada por

$$u(t, x) = \frac{\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{xt} \tilde{g}(s) ds \quad \text{(X)}$$

Ahm

Existencia

Basta ver que $u(t,x)$ en EOP cumple la EDP

Por lema 1 y 2 $\rightarrow u(t,x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

Por lema D'Alembert, al ser $u(t,x)$ una solució, cumple

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Por el cálculo anterior, $u(t,0) = u(t,b) = 0$

Por último,

Unidad

Supongamos que $v(t,x) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,L])$ es solución de la EDP en $[0,L]$.

¿Es necesariamente true que $v(x,t)$ en EOP ?

Definimos $\gamma(t,x)$ su derivada imp, 2º-porudice de v en la coordenada x

Comprobar que $v \in C^2(\mathbb{R} \times [0,L])$ $\left. \begin{array}{l} \\ + \text{EOP}_{[0,L]} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ejercicio}} \tilde{V} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$+ \text{EOP}_{\mathbb{R}}$

Ejercicio

$$v(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L]) \text{ with } v_{tt} = C^2 u_{xx} \quad (t, x \in \mathbb{R} \times [0, L])$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \text{ with } v_{tt} = C^2 u_{xx} \quad (t, x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

$$v \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L]) \Rightarrow \tilde{v} \in C^2\left(\mathbb{R} \times \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k-1)L, kL)\right)$$

Si v impar que $\tilde{v}(kL^-) = \tilde{v}(kL) = \tilde{v}(kL^+)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{v}_x(kL^-) = \tilde{v}_x(kL) = \tilde{v}_x(kL^+) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{v}_{xx}(kL^-) = \tilde{v}_{xx}(kL) = \tilde{v}_{xx}(kL^+) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ya esto

k	impar
(positivo)	

$$\begin{aligned} \tilde{v}(kL^-) &= \tilde{v}(L^-) = v(L^-) = v(L) = 0 \\ \tilde{v}(kL^+) &= \tilde{v}(L^+) = -\tilde{v}(-L^-) = -\tilde{v}(L^-) = -v(L^-) = 0 \end{aligned} \quad \text{ok}$$

\uparrow impar \uparrow 2L-periodica

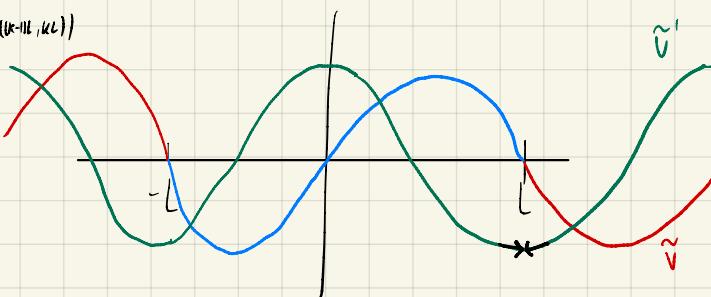
$$\tilde{v}_x(kL^-) = \tilde{v}_x(L^-) = v_x(L^-) = v_x(L) \quad \text{v es } C^2 \quad \parallel$$

$$\tilde{v}_x(kL^+) = \tilde{v}_x(L^+) = \tilde{v}_x(-L^-) = \tilde{v}_x(L^-)$$

\uparrow par \uparrow 2L-periodica

$(f \text{ impar} \Rightarrow f' \text{ par})$

$\tilde{v} \in C^2(\mathbb{R} \times (k-1L, kL))$



$$f \text{ impar} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x+p) + f(x)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(x+p) - f(x)}{p} = f'(x)$$

$p = -h$

$$\widetilde{V}_{KK}(KL) = \widetilde{V}_{KK}(L^-) = V_{KK}(L^-) \stackrel{V \propto C^2}{=} V_{KK}(L) = \frac{V_{KK}(t+L)}{C^2} = \frac{\left(\frac{d}{dt} V(t+L)\right)}{C^2} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} V}{C^2} = 0$$

$$\widetilde{V}_{KK}(KL^+) = \widetilde{V}_{KK}(L^+) = -\widetilde{V}_{KK}(-L^-) = -\widetilde{V}_{KK}(L^-) = -V_{KK}(L^-) = -V_{KK}(L) = 0$$

\widetilde{V}_{KK} impar 2c-p

Para k ímpar negativo tenemos la misma pero en $-L$.

Para k par la tenemos en 0.

Y $\widetilde{V} \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Veamos que verifica la EDP

$$\widetilde{V}_{tt}(t, x)$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad \forall t \in [0, L] \rightarrow \widetilde{V}_{tt}(t, x) = V_{tt}(t, x) = C^2 V_{KK}(t, x) = C^2 \widetilde{V}_{KK}(t, x) \\ \textcircled{2} \quad \forall t \in [-L, 0] \rightarrow \widetilde{V}_{tt}(t, x) = -\widetilde{V}_{tt}(t, -x) = -C^2 \widetilde{V}_{KK}(t, -x) = C^2 \widetilde{V}_{KK}(t, x) \end{cases} \quad x \in [-L, L] \text{ ok}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x \notin [-L, L], \text{ entonces } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } x + 2kL \in [-L, L], \text{ así}$$

$$\widetilde{V}_{tt}(t, x) = \widetilde{V}_{tt}(t, x + 2kL) \stackrel{x+b}{=} C^2 \widetilde{V}_{KK}(t, x + 2kL) \stackrel{2kL}{=} C^2 \widetilde{V}_{KK}(t, x) \quad //$$

Lemma $\tilde{v}(0, \alpha) = \tilde{f}$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{v}_t(0, \alpha) = \tilde{g} \\ \tilde{v}_{tt}(0, \alpha) = \tilde{h} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Teilen}} \tilde{v}(t, \alpha) = \text{K}$$

1.4. Propiedades de las soluciones

operador D'Alambertiano

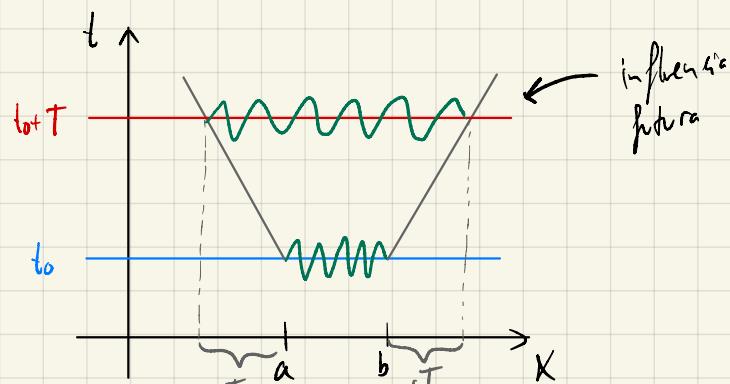
Sea $u(t,x)$ solución de $\square u = (\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) u = 0$

① La EDP es reversible en el tiempo:

si conocemos $\begin{cases} u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$, podemos determinar $u(t,x)$, $t > 0$, y también $u(-t,x)$

② La velocidad de propagación es finita

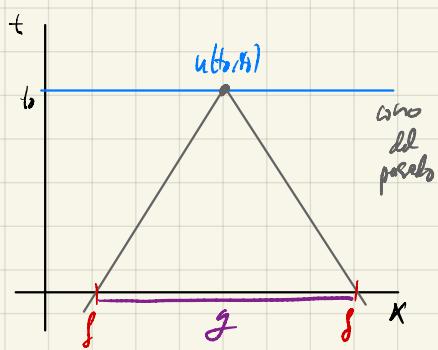
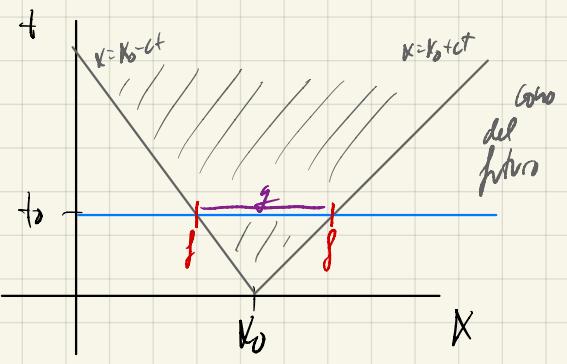
si $\text{sup } u(t_0, \cdot) \in [a, b] \Rightarrow \text{sup } u(t_0 + T, \cdot) \in [a - cT, b + cT]$



A medida que $u(t,x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$

$f(x_0)$ solo influye en $u(t,x)$ cuando $x = x_0 \pm ct$

$g(x_0)$ solo influye en $u(t,x)$ cuando $x \in [x_0 - ct, x_0 + ct]$



• $u(t_0|x_0)$ solo es infinito por fig en $|k-k_0| \leq cts$

Notes

Veremos otras EDPs que NO cumplen (1) ni (2),
como la ec. del calor

③ $\square = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ no es operador regularizante, o sea

$$\square u = 0 \not\Rightarrow u \in C^\infty$$

De hecho, la fórmula de D'Alembert sugiere que existen soluciones de $\square u = 0$ tal que $u \notin C^2$

Un estudio completo de \square necesita el concepto de "derivada débil"

Contrasta con
$\square u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty$
$u_x = v_y \Rightarrow u_{xy} \in H^1$
$u_y = -u_x \Rightarrow u_{xy} \in H^1$

④ Conservación de energía

En EDPs se suele llamar energía a

$$\int (|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) dx$$

Planteo por qué:

Definimos $E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$

en el modelo de la cuerda, con N partículas $\{k_i\}$,

$$E_{kin}(t, k_i) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{energía cinética}} = \frac{1}{2} \oint \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, k_i) \right]^2$$

particular

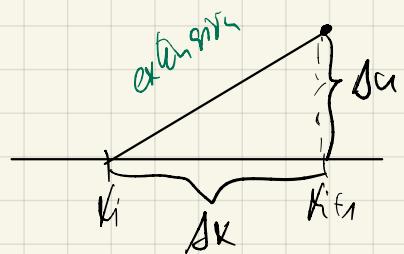
$$\Rightarrow E_{tot}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N E_{kin}(t, k_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, k_i) \right]^2 \Delta x = \boxed{}$$

energía cinética
total

$$L = \frac{J}{2} \int_0^L |u_t(t, x)|^2 dx = E_{kin}$$

Por otro lado, el $E_{pot}(t, x_i)$ se calcula usando el trabajo, W

$$W = |\vec{F}| \cdot \Delta x = T \cdot \underbrace{\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} - \Delta x \right)}_{\text{extensión}}$$



$$\rightarrow W = T \cdot \Delta x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right] =$$

$$= T \cdot \Delta x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 + O \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^4 - 1 \right] \approx T \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2$$

$$\rightarrow E_{pot}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{T}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 \Delta x = \frac{T}{2} \int_0^L |u_x(t, x)|^2 dx = E_{pot}(t)$$

O sea,

$$E_{tot} = \int_0^L \left(\frac{J}{2} |u_t(t, x)|^2 + \frac{T}{2} |u_x(t, x)|^2 \right) dx = \frac{J}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + C^2 / |u_x|^2) dx$$

Teorema

Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ solución de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u_0(t), t > 0, u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$E(t) = \text{cte} \quad \forall t > 0$$

Dan

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + c^2 |u_x|^2) dx$$

$t \quad h_j v$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{\rho}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} \left[(u_t(t, x))^2 + c^2 (u_x(t, x))^2 \right] dx = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^L (2 u_t \cdot \cancel{u_{tt}} + c^2 \cdot \cancel{2 u_x u_{xt}}) dx = \\ &= \rho \int_0^L c^2 (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) dx = c^2 \rho \int_0^L (u_t u_x)_x dx = \\ &= c^2 \rho \left[u_t u_x \right]_0^L = c^2 \rho \left[u_t(t, L) u_x(t, L) - u_t(t, 0) u_x(t, 0) \right] = 0, \end{aligned}$$

las condiciones la certifican:

$$u(t, 0) = 0 \rightarrow u_t(t, 0) = 0$$

$$u(t, L) = 0 \rightarrow u_t(t, L) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} E'(t) &= 0 \\ t \in (0, \infty) \end{aligned} \right\} \rightarrow E(t) \text{ constante} \quad \square$$

Notas

- ① El trabajo de fuerza para mover con extremos libres
 $0 \neq u_x(t,0), u_x(t,L) \neq 0$
 (o para extremos fijos)

② $E(t) - E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [g(x)^2 - c^2(g'(x))^2] dx$

- ③ Cuerda vibrante con rodamientos

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_t & \mu > 0 \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

probar que $E(t)$ es decreciente

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t)^2 + c^2(u_x)^2 dx$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} [u_t^2 + c^2 u_x^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^L 2u_t u_{tt} + 2c^2 u_x u_{xt} dx = \frac{1}{2} \int_0^L [2u_t(c^2 u_{xx} - \mu u_t) + 2c^2 u_x u_{xt}] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L [2/c^2(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) - 2\mu u_t^2] dx = \int_0^L \frac{d}{dx} (u_t u_x) dx - \mu \int_0^L u_t^2 dx =$$

$$\frac{d}{dx}(u_t u_x)$$

$$= \cancel{\int_0^L [u_t u_x]} = \int_0^L (u_t(t,L) u_x(t,L) - u_t(t,0) u_x(t,0)) - \mu \int_0^L u_t^2 dx = \mu \int_0^L u_t^2 dx \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t,0) = 0 \rightarrow u_t(t,0) = 0 \\ u(t,L) = L \rightarrow u_t(t,L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow E'(t) \leq 0.$$

La energía se pierde siempre que la cuerda se movea.

Condición / Unicidad

Sean $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ soluciones de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_t + F(t, x) & t > 0, x \in [0, L] \\ u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$u_1(t, x) - u_2(t, x)$$

1.5 - la solución de Bernoulli (TS3)

Ej 3a

Considerar cuerda con posición inicial un "arco de seno"

$$\begin{cases} u(0, x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

onda estacionaria

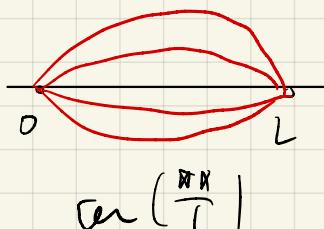
Con D'Alembert, la solución es $u(t, x) = \underbrace{\sin(\pi x)}_{\text{onda estacionaria}} \cos(\pi t)$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, L) \\ u(t=0) = u(0, x) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

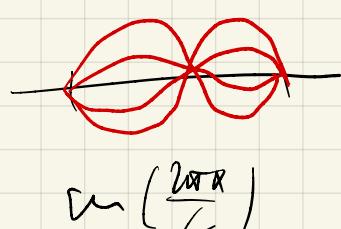
onda temporal
con $f = \frac{1}{2} \text{ Hz}$

deberá ser superposición de ondas estacionarias

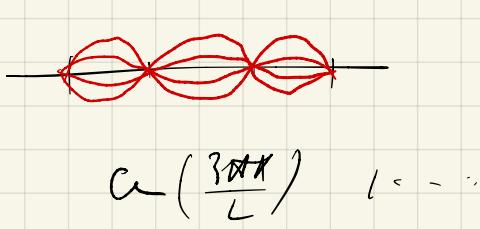
1º armónico



2º armónico



3º armónico



o sea,

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{onda estacionaria}} \cdot \underbrace{T_n(t)}_{\text{onda temporal}}$$

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t) \right)_{t=0} = c^2 (-\dots)_{x=K}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n''(t) = c^2 \left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t)$$

$$\rightarrow T_n''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t)$$

$$\rightarrow T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

the candidate be Bernoulli of

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right]$$

Derive $u(0, x) = f(x)$ $0 \leq x \leq L$
 $u_t(0, x) = g(x), \quad (1)$

$\xrightarrow{t=0}$ $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

TEMA 2: La convección del calor

2.1.- Formulación física

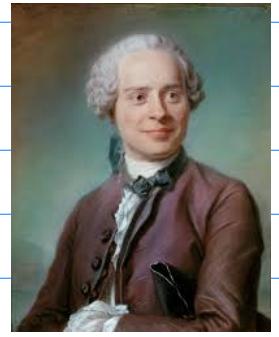
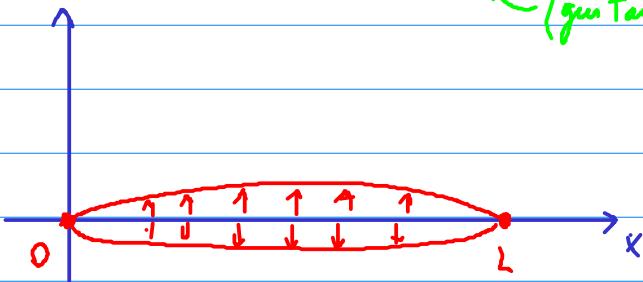
Bloque I : EDPs CLÁSICAS

TEMA 1 LA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE (D'Alembert 1747)

1.1.- Formulación finita

Supongamos una cuerda flexible con extremos fijos

↗ (guitarra)



Buena! $u(t, x)$ = altura de la cuerda en el pt. $x \in (0, L)$ tras t seg.

Hipótesis

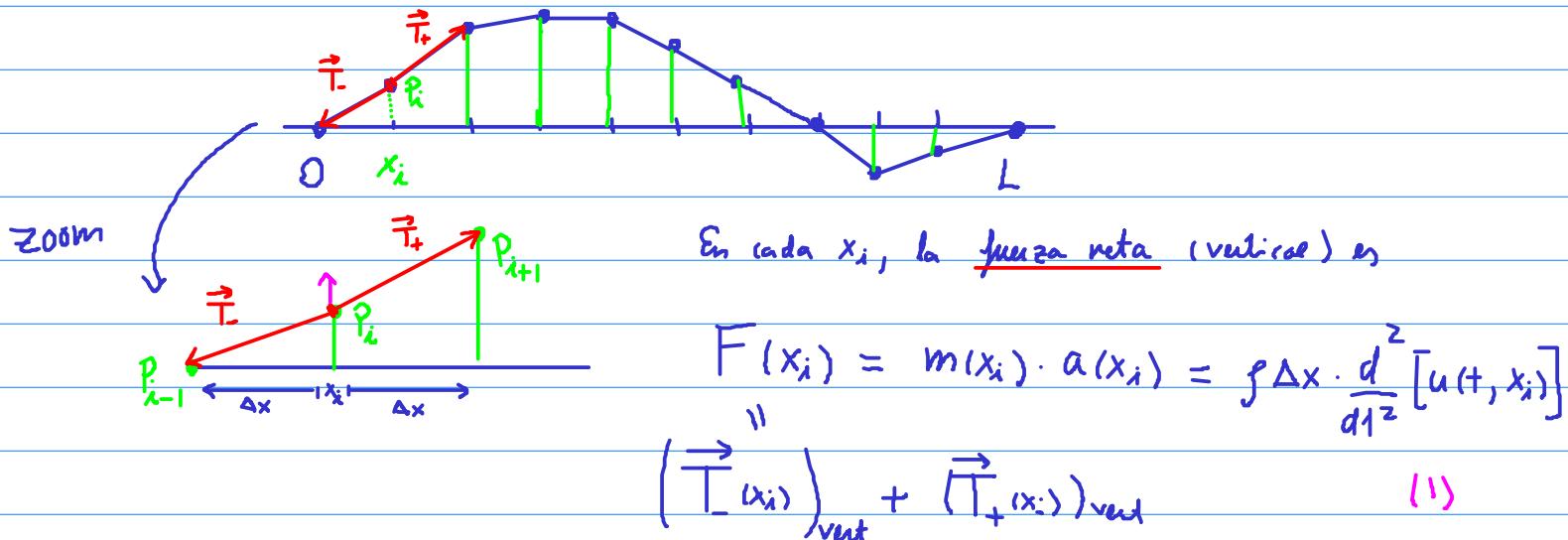
HIP 1: Cuerda tensa de longitud L

HIP 2: Densidad cte = ρ

HIP 3: Tensión cte = τ ← fuerzas tangentes a la cuerda

HIP 4: Sólo pequeñas vibraciones verticales (sin desplazamientos horiz.)

Para hallar la ec respongo la cuerda como unión de N partículas
(formulación de Lagrange 1759)



La HIP 3 nos dice

j. indep de x !

$$\vec{T}_-(x_i) = \tau \cdot \frac{\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i}{|\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i|}, \quad \vec{T}_+(x_i) = \tau \cdot \frac{\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i}{|\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i|}$$

Notan que

$$|\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} \approx \Delta x$$

HIP 4

$$\Rightarrow \left(\vec{T}_\pm(x_i) \right)_{\text{vert}} \approx \tau \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(t, x_i) = \tau \cdot \frac{u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) - 2u(x_i)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow u_{tt}(t, x_i) = \frac{\tau}{\Delta x} \cdot \frac{u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) - 2u(x_i)}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

Lema Si $f \in C^2(a-\delta, a+\delta)$, entonces

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Demo Usar Taylor o L'Hôpital.

Tomando en (2), $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ obtenemos,

$$(3) \quad u_{tt}(t, x) = \frac{\tau}{\Delta x} u_{xx}(t, x) \quad \forall x \in (0, L).$$

NOTA Se suele poner $\frac{\tau}{\rho} = c^2$ y se llama $c = \text{Velocidad}$

Ejerc Comprobar que $[c] = \text{m/seg}$ \leftarrow usar $[\tau] = N$
 $[\rho] = \text{kg/m}$

De este modo, la función $u(t, x)$ debe cumplir

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & t > 0, x \in (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0 \quad \leftarrow \text{extremos fijos} \\ u(0, x) = f(x), & x \in (0, L) \quad \leftarrow \text{posición inicial} \\ u_t(0, x) = g(x), & " \quad \leftarrow \text{veloc. inicial} \end{cases}$$

A esta expresión se le denomina ec. de la cuerda vibrante
(o ec de ondas en 1D)

Algunas variantes de ec cuerdas vibrantes

① Con rozamiento $u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu \cdot u_t$

② Con fuerza externa $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(t, x)$ \leftarrow EDP lineal no homog

③ Densidad variable $u_{tt} = \frac{\tau}{\rho(x)} u_{xx}$ \leftarrow EDP lineal con variables

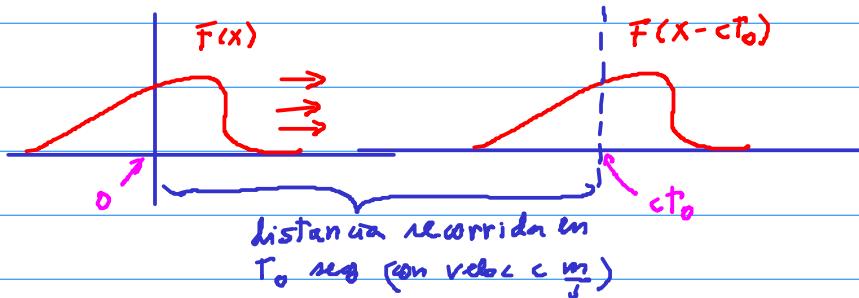
④ Sin HIP $u_{tt} = c^2 \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \right)_x$ \leftarrow EDP no lineal

⑤ Vuelta vibrante rígida
 \hat{u} ("onda" piano) $u_{tt} = c^2 u_{xx} - M^2 u_{xxxx}$ \leftarrow ("rigidez" repta aceleración)
 EDP lineal orden 4

[Eva Fletcher-Rossing, "Physics of Musical Instruments"]

1.2.- Solución general de la ec. onda vibrante (D'Alembert)

Observando el experimento esperamos soluciones de tipo "onda viajera"



D1 Dada $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que $\left\{ \begin{array}{l} u(t, x) = F(x - ct) = \text{onda viajera hacia delante} \\ u(t, x) = F(x + ct) = \text{onda viajera hacia atrás} \end{array} \right.$

Lema de D'Alembert

a) Si $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ entonces $u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$

$$\text{cumple } u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

b) Si $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ entonces

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists F, G \in C^2(\mathbb{R}) \text{ tal que} \\ u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct) \end{array} \right.$$

Dejar

a) Verificar como ejercicio

b) Cambiar variables $\left\{ \begin{array}{l} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\eta - \xi}{2c} \\ x = \frac{\eta + \xi}{2} \end{array} \right.$

Defino $v(\xi, \eta) := u(t, x) \rightarrow$ veremos que v cumple $v \dots$

$$u_t = v_\xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_\xi \cdot (-c) + v_\eta \cdot c$$

$$u_{tt} = v_{\xi\xi} \cdot (-c)^2 + v_{\xi\eta} \cdot (-c) \cdot c + v_{\eta\xi} \cdot c \cdot (-c) + v_{\eta\eta} \cdot c^2$$

$$u_x = v_3 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_n \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = v_3 + v_n$$

$$u_{xx} = v_{33} + 2v_{3n} + v_{nn}$$

$$\Rightarrow 0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 [v_{33} - 2v_{3n} + v_{nn} - v_{33} - 2v_{3n} - v_{nn}] \\ = -4c^2 v_{3n}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{3n} = 0} \quad \text{Integrando 2 veces} \\ \int ds \quad \rightarrow 0 = \int_0^3 v_{3n}(s, z) ds = v_n(3, z) - v_n(0, z)$$

$$\int dz \quad 0 = \int_0^n (v_n(\xi, z) - v_n(0, z)) dz \stackrel{\text{Barra}}{=} v(\xi, n) - v(\xi, 0) - v(0, n) + v(0, 0) \\ \Rightarrow v(\xi, n) = \underbrace{v(\xi, 0)}_{F(\xi)} + \underbrace{v(0, n) - v(0, 0)}_{G(n)} \rightarrow F, G \in C^2(\mathbb{R})$$

$$\text{3 desplazamiento de CV} \quad u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Ya hemos hallado la "solución general" de la EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t, x \in \mathbb{R}$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x) & \leftarrow \text{posición} \\ u_t(0, x) = g(x) & \leftarrow \text{veloc. inicial} \end{cases}$$

$$u(0, x) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(0, x) = [F'(x - ct) (-c) + G'(x + ct) \cdot c] \Big|_{t=0} = -cF'(x) + cG'(x) = g(x)$$

$$\xrightarrow{c \cdot f'(x) + g(x)} c \cdot f'(x) + g(x) = L \cdot f'(x) \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2c} \int_0^x (f'(s) + g(s)) ds$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$$

$$\xrightarrow{(1)} F(x) = f(x) - f(0) = \frac{f(x) + f(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$$

Concluimos que

$$u(t, x) = F(x - ct) + F(x + ct) = \dots$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Este se llama Fórmula de D'Alembert

Teorema 1 Sol. de onda vibrante en \mathbb{R}

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, entonces $\exists ! u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

s.t.

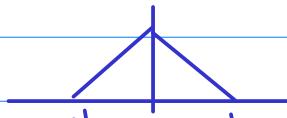
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, & t, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = g(x) & \end{cases}$$

A demás, dicha $u(t, x)$ viene dada por

$$u(t, x) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Ejemplos ① La cuerda punteada (plucked string)

Supongamos $u(0, x) = f(x) =$

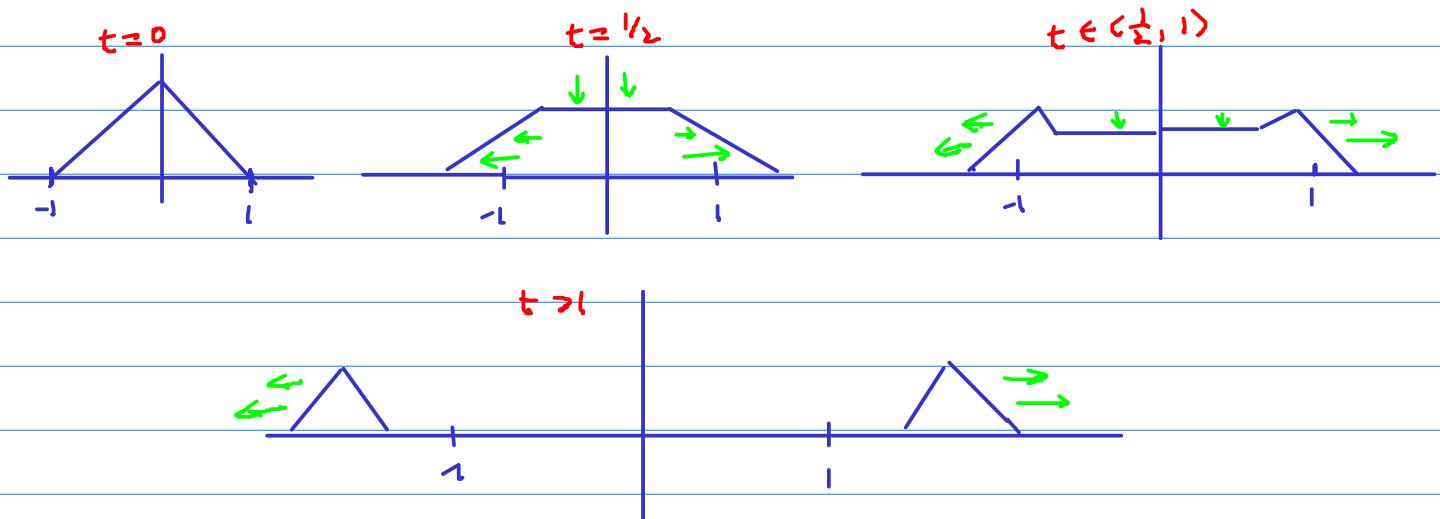


$$(y, g(x) \equiv 0)$$

¿Cómo se mueve esta onda cuando t crece?

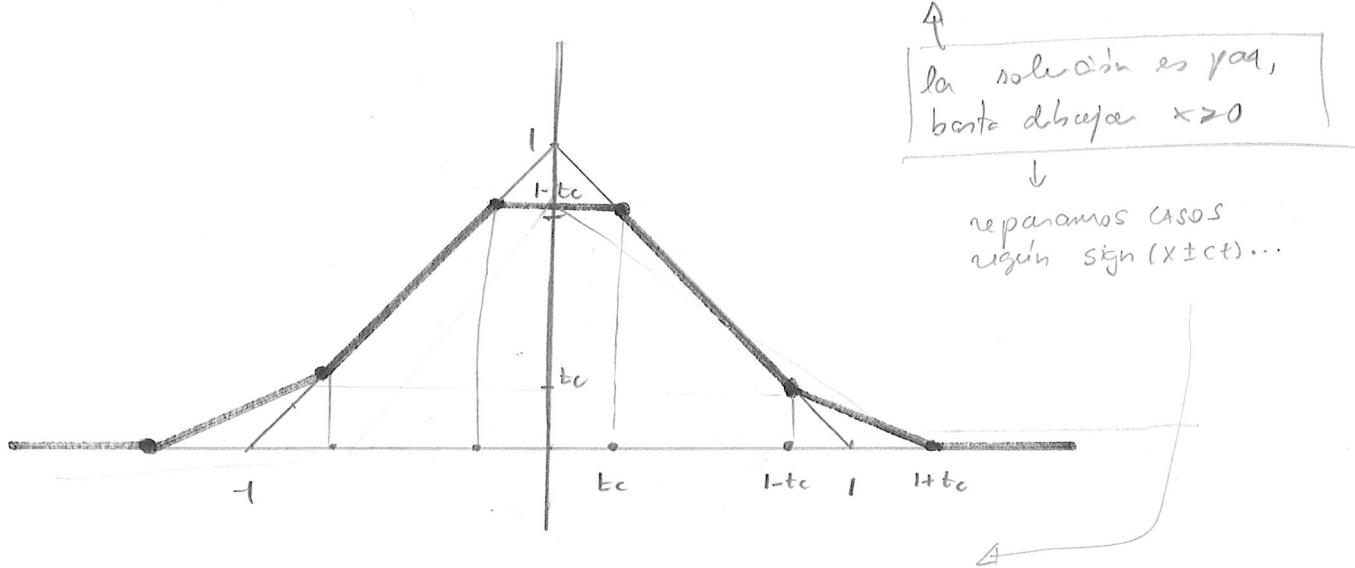
↳ Escribir la solución explícita y tratar de dibujar (a mano o con Maxima).

↳ Muestra animación



Dibujo de la cuerda puntoada

$$f(x) = (1-|x|)_+ \Rightarrow u(t,x) = \frac{(1-|x-ct|)_+ + (1-|x+ct|)_+}{2}$$



①

$$\boxed{t \leq \frac{1}{2c}}$$

$$\boxed{\text{caso 1}} \quad \boxed{0 \leq x+ct \leq 1} \rightarrow x \leq 1-ct$$

$$\boxed{1.a} \quad \boxed{0 \leq x-ct \leq 1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{if } \\ x \geq ct \end{array} \right\} \rightarrow u(t,x) = \frac{1-(x-ct) + 1-(x+ct)}{2} = 1-x$$

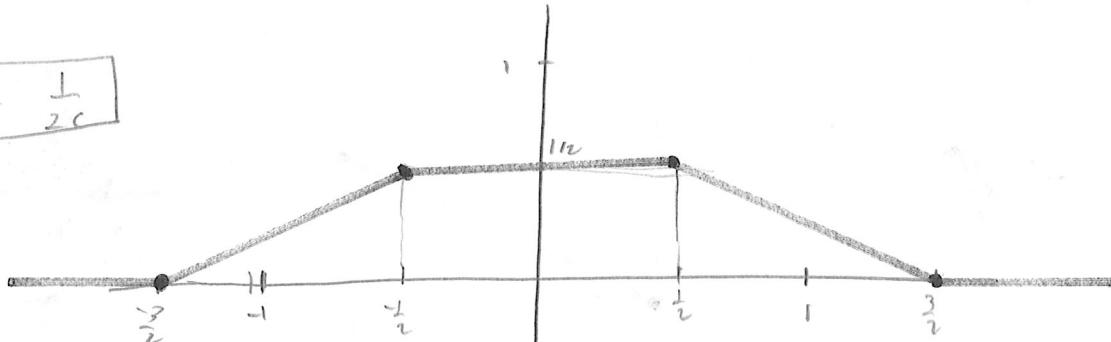
$$\boxed{1.b} \quad \left. \begin{array}{l} x-ct \leq 0 \\ x \leq ct \end{array} \right\} \rightarrow u(t,x) = \frac{1-(ct-x) + 1-(x+ct)}{2} = 1-ct.$$

$$\boxed{\text{caso 2}} \quad \boxed{x+ct \geq 1} \rightarrow x \geq 1-ct$$

$$\boxed{2.a} \quad \boxed{0 \leq x-ct \leq 1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{if } \\ x \leq 1+ct \end{array} \right\} \rightarrow u(t,x) = \frac{1-(x-ct) + 0}{2} = \frac{1+ct-x}{2}$$

$$\boxed{2.b} \quad \boxed{x-ct \geq 1} \quad \rightarrow u(t,x) = 0.$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2c}}$$



$$\textcircled{1} \quad \boxed{\frac{1}{2c} \leq t \leq \frac{1}{c}}$$

$$\boxed{(0001)} \quad \boxed{0 \leq x+ct \leq 1} \rightarrow \boxed{x \leq 1-ct} \leq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{1. a} \quad 0 \leq x-ct \rightarrow \emptyset$$

$$\boxed{1. b} \quad -1 \leq x-ct \leq 0 \rightarrow x \leq ct \text{ an} \rightarrow u(t|x) = \frac{1+(x-ct)+1-(x+ct)}{2} = 1-ct$$

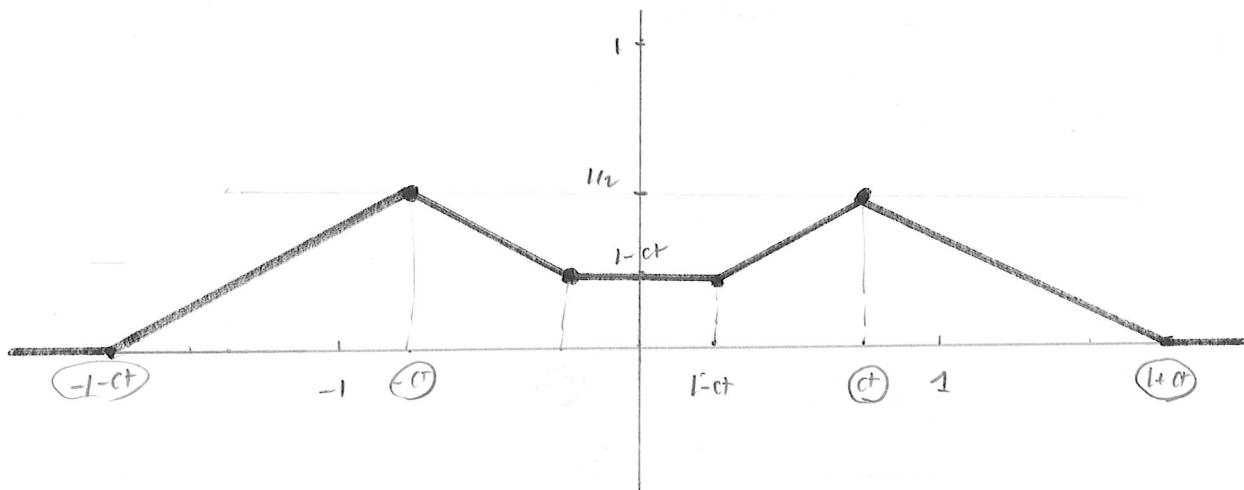
$$\boxed{(0002)} \quad \boxed{|x+ct| \geq 1} \rightarrow \boxed{x \geq 1-ct}$$

$$\boxed{2. a} \quad 0 \leq x-ct \leq 1 \rightarrow u(t|x) = \frac{1-x+ct}{2}$$

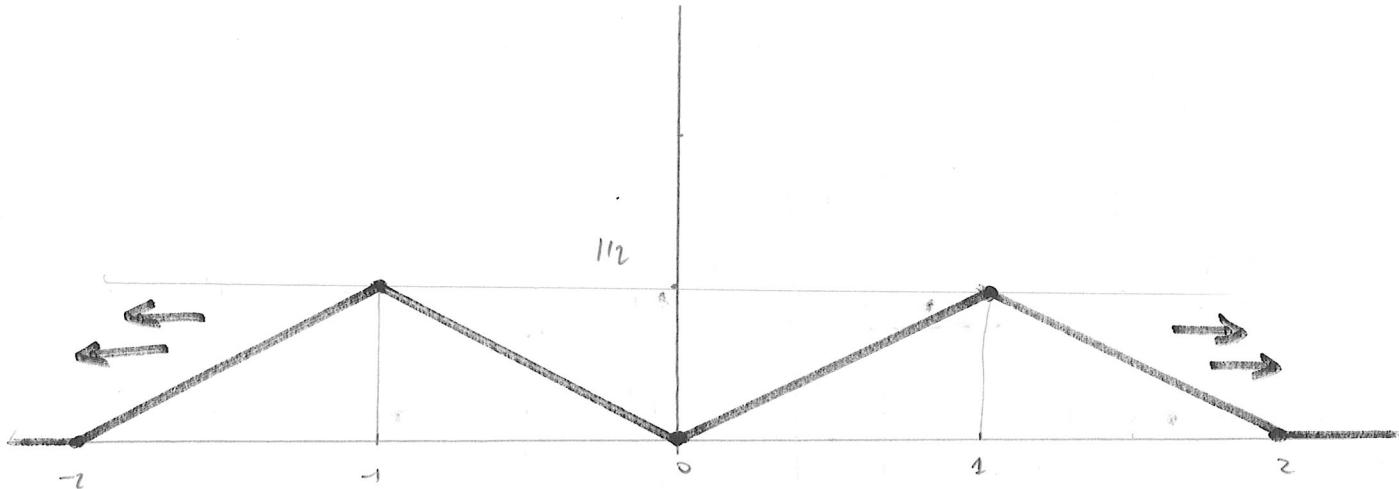
$$(ct \leq x \leq 1+ct)$$

$$\boxed{2. b} \quad -1 \leq x-ct \leq 0 \rightarrow u(t|x) = \frac{1-(ct-x)}{2} = \frac{1-ct+x}{2}$$

$$(-ct \leq x \leq ct)$$

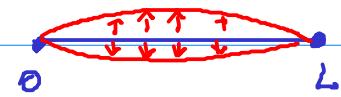


$$\boxed{t = \frac{1}{c}}$$



1.3.- La cuerda vibrante en un intervalo

- cuerda de longitud L con extremos fijos



Lo debemos resolver la EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t,x) = c^2 \cdot u_{xx}(t,x), \quad t > 0, \quad x \in [0, L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t \geq 0 \quad \leftarrow \boxed{\text{extremos fijos}} \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in [0, L] \\ u_t(0,x) = g(x), \quad " \\ \end{array} \right.$$

"condición exterior"

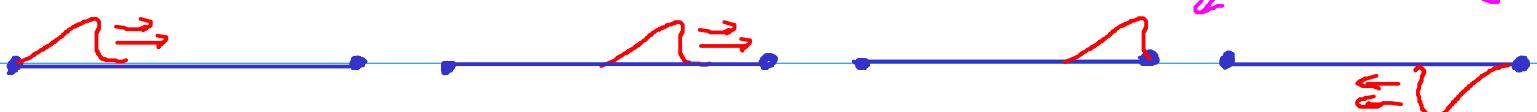
Suponer $g \geq 0$. Para poder usar D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

neusto EXTENDER f desde $[0, L]$ a todo \mathbb{R} !!

Fijémonos en que hace una onda viajera ...

↓ reflexión en el extremo ! ↗

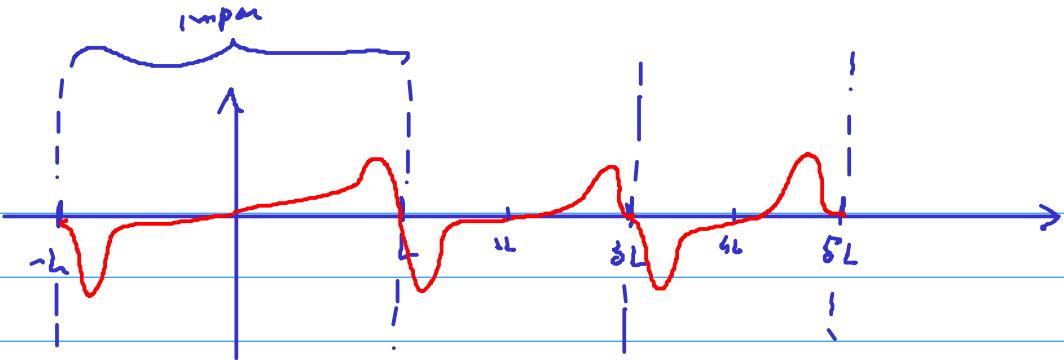


... por tanto, la extensión natural de f es como función IMPAR,
y $2L$ -periódica.

Def: Si $f \in C[0, L]$ definire extensión impar g $2L$ -periódica como

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0, L] \\ -f(-x), & x \in [-L, 0] \\ 2L\text{-períod. } x \notin [-L, L] \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x+2L) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Defino el candidato a solución:

$$u(t, x) = \frac{\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds, \quad x \in [0, L], t > 0.$$

Veamos que cumple las condic. CONTORNO (extensión 2L-pair):

$$\bullet \quad u(t, 0) = \frac{\tilde{f}(-ct) + \tilde{f}(ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \tilde{g}(s) ds = 0 \quad \leftarrow \tilde{f}, \tilde{g} \text{ odd}$$

$$\bullet \quad u(t, L) = \frac{\tilde{f}(L - ct) + \tilde{f}(L + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{g}(s) ds$$

$$\tilde{f}(L - ct) = \tilde{f}(L - ct - 2L) = \tilde{f}(-L - ct) \stackrel{\text{odd}}{=} -\tilde{f}(L + ct) \rightarrow 1^0 = 0$$

idem con

$$\int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{g} = \underbrace{\int_{L-ct}^L \tilde{g}}_{\substack{\text{odd} \\ \text{pair}}} + \int_L^{L+ct} \tilde{g} = 0$$

cv $2L-s=z \quad ds=-dz$

$$\int_{L-ct}^L \tilde{g}(s) ds = -\tilde{g}(-s+2L) ds = -\int_L^{L+ct} \tilde{g}(z) dz$$

Para concluir que $u(t, x)$ es la solución buscada, falta dar hipótesis en f que garantizan que $\tilde{f} \in C^2$

Lema 1

Sea $f \in C^2([0, L])$ y \tilde{f} = extensión impar + 2L-paríola.

Entonces

$$(a) \quad \tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \iff f(0^+) = f(L^-) = 0$$

Además, en ese caso

$$(b) \quad \tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}) \quad (\text{siempre})$$

$$(c) \quad \tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \iff f''(0^+) = f''(L^-) = 0.$$

Demos Ver Ejercicio 6

Hacemos el apdo (a)

$$\begin{aligned} \cdot \tilde{f}(0^+) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \tilde{f}(0+h) = f(0^+) \\ \cdot \tilde{f}(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}(0-h) \stackrel{\text{odd}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} -f(h) = -f(0^+) \end{aligned}$$

$\left\{ \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{f}(0^+) = \tilde{f}(0^-) \\ f(0^+) = 0 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \cdot \tilde{f}(L^-) &= f(L^-) \\ \cdot \tilde{f}(L^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}(L+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}(-L+h) \stackrel{\text{odd}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} -f(L-h) = -f(L^-) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{f}(L^-) = \tilde{f}(L^+) \Leftrightarrow f(L^-) = 0 //$

Los apartados ④ + ⑤ \longrightarrow ejercicio entregable.



De modo similar se prueba.

Lema 2

Si $g \in C^1([0, L])$ / $g(0) = g(L) \Rightarrow \int_0^L \tilde{g}(s) ds \in C^2(\mathbb{R})$

Dem ejercicio. B

Ahora ya podemos anunciar del TEOREMA.

Teorema 2 Sol. uerda vibrante en $[0, L]$ (extremos fijo)

Sean $f \in C^2([0, L])$, $g \in C^1([0, L])$ t.f. $\begin{cases} f(0) = f(L) = 0 \\ g(0) = g(L) = 0 \end{cases}$.

Entonces, $\exists ! u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ / $g''(0) = g''(L) = 0$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \forall t \\ u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{cases}$$

A continuación, la solución explícita viene dada por

$$u(t, x) = \frac{\tilde{f}(x-ct) + \tilde{f}(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds. \quad (x \neq 0)$$

Demo "Exist". Brinda un $u(t, x)$ en \mathbb{R}^2 que cumple la EDP.

Por lema 1 y 2 $\Rightarrow u(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Por lema 1 de la teoría de ondas viajeras, el $u(t, x)$ tiene la forma de ondas viajeras
 \Rightarrow ejemplo $u(t) = c^2 u_{xx}$

Por el cálculo anterior $u(t, 0) = u(t, L) = 0$

Por último $u(0, x) = \tilde{f}(x) = f(x), x \in [0, L]$,

y idem con $u_t(0, x) = \tilde{g}(x) = g(x), x \in [0, L]$.

"Unicidad"

Supongamos que $v(t, x)$ es solución de la EDP.

¿ Es visualmente la forma $u(x, t)$ en \mathbb{R}^2 ?

Definir $\tilde{v}(t, x) =$ extensión impar, $2L$ -periódica de v en la coordenada x

Lo comprobamos que $v \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ Ejuc!!
+ $\mathcal{E}DP_{[0, L]}$ } $\Rightarrow \tilde{v} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ {
+ $\mathcal{E}DP_{\mathbb{R}}$ }

Como $\tilde{v}(0, x) = \tilde{f}(x)$ { Final } $\Rightarrow \tilde{v}(t, x) = (x, t)$

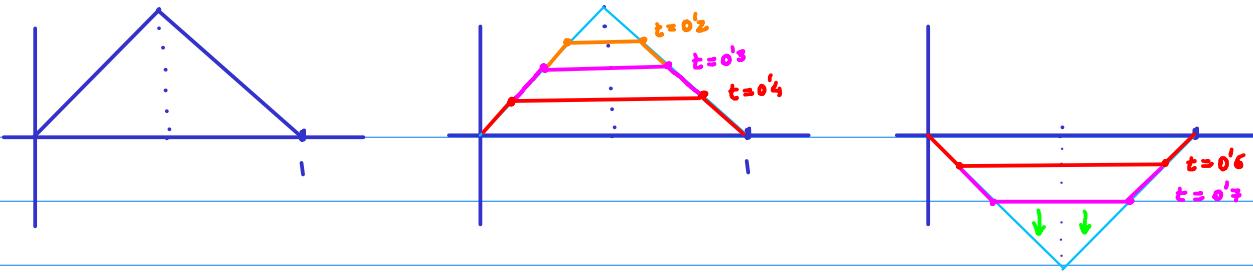
B

Nota: Despues veremos otras demostraciones distintas de unicidad.

Ejemplos Cuada punteada en $[0, 1]$ ~ Supon L=c=1

Sea $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ y $g(x) = 0$.

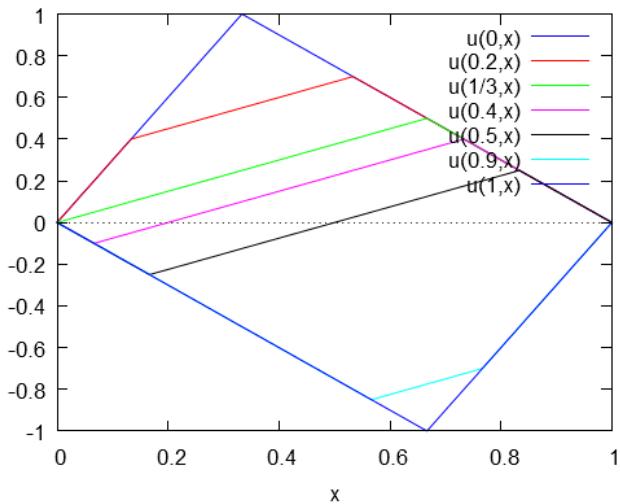
Lo escribir fórmulas para $u(t, x)$, $t \in [0, L_2]$



↳ Hacer dibujos animados con Maxima.

EJERCICIOS

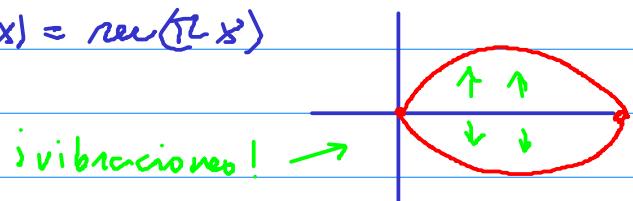
- ② Resolver y dibujar solución cuando $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{3}{2}(1-x) & , x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$



EJERCICIOS

- ③ Resolver caso $f \equiv 0$, $g \equiv l$ ← veo cto !!

- ④ Resolver caso $f \equiv 0$, $g(x) = \sin(\pi x)$



- ⑤ ¿ Es posible visualizar las "vibraciones" de una cuerda con la fórmula de D'Alembert ?

D. Bernoulli (1750) encontró otra fórmula con esa propiedad
↳ ver § 1.5.

1.4.- Propiedades de las soluciones

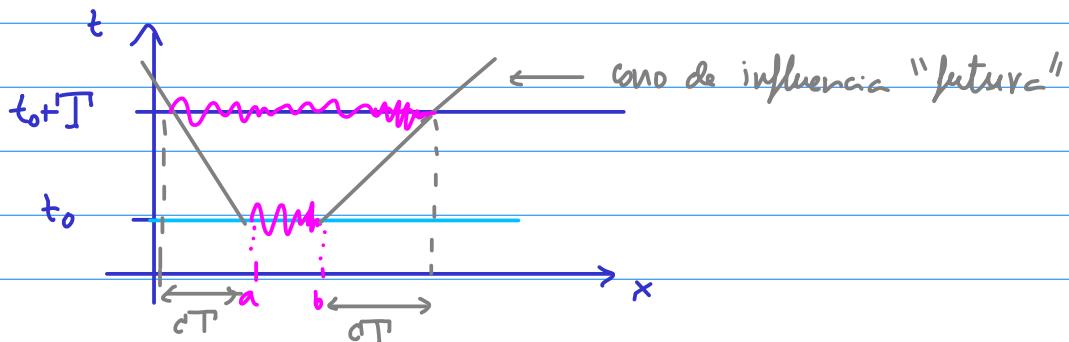
Sea $u(t, x)$ solución de $\square u := (\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) u = 0$.

(1) La EDP es reversible en el tiempo: si consto $\begin{cases} u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = g(x) \end{cases}$

\Rightarrow puedo determinar $u(t, x) \forall t > 0$
ii y b $\forall t < 0$!!

(2) La velocidad de propagación es finita:

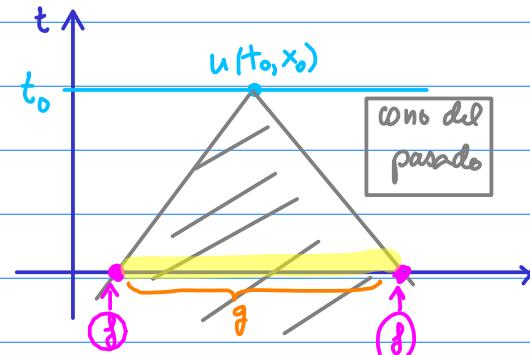
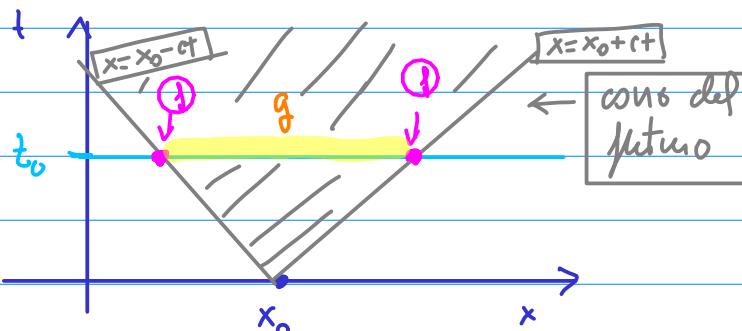
- L. $\text{sop } u(t_0, \cdot) \subseteq [a, b] \Rightarrow \text{sop } u(t_0 + T, \cdot) \subseteq [a - cT, b + cT]$



De hecho, $u(t, x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$,

- $f(x_0)$ sólo influye en $u(t, x)$ cuando $x = x_0 \pm ct$

- $g(x_0)$ sólo influye en $u(t, x)$ cuando $x \in [x_0 - ct, x_0 + ct]$



- $u(x_0, t_0)$ sólo se ve influido por f, g en $|x-x_0| \leq c t_0$.

Nota Vemos otras EDPs (ec. calor) que NO cumplen ni(1), ni(2).

(3) $\square = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ NO es operador regularizante,

es decir $\square u = 0 \not\Rightarrow u \in C^\infty$

De hecho, la fórmula de D'Alembert sugiere que \exists "soluciones" de $\square u = 0$ t. q. $u \notin C^2$!!

comparar con
 • $\Delta u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty$
 • $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow u + iv \in \mathcal{H}$

↳ un estudio completo de \square recitará el concepto de "derivada díbil"

(4) Conservación de energía

En EDPs se suele llamar "energía" a $\int (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx$.

Veamos por qué ...

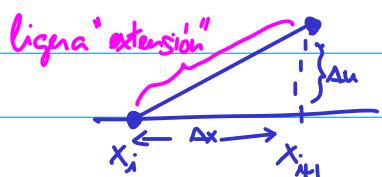
Definimos $E(t) := E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$.

Usando el modelo de la onda, como N partículas $\{x_i\}$,

$$E_{kin}(t, x_i) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right]^2$$

$$\Rightarrow E_{kin}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N E_{kin}(t, x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right)^2 dx = \frac{\rho}{2} \int_0^L |u_t(t, x)|^2 dx$$

Por otro lado, la $E_{pot}(t, x_i)$ se calcula usando el "trabajo" W



$$W = |\vec{F}| \cdot \text{dist} = \tau \cdot \underbrace{\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} - \Delta x \right)}_{\text{extensión}}$$

$$\Rightarrow W = \tau \cdot \Delta x \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right]$$

$$= \tau \cdot \Delta x \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 + O \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^4 - 1 \right]$$

$$\approx \tau \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2.$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 \Delta x = \frac{\tau}{2} \int_0^L |u_x(t, x)|^2 dx.$$

En total concluimos

$$\boxed{E(t) = \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} |u_t(t, x)|^2 + \frac{\tau}{2} |u_x(t, x)|^2 \right) dx}$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + c^2 |u_x|^2) dx$$

Teorema

Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ solución de $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, t > 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, t > 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow E(t) \equiv \text{cte}, t > 0.$$

Dem: Sea $t > 0$.

$$E'(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L (2u_t \cdot u_{tt} + c^2 2u_x \cdot u_{xt}) dx$$

$$= \rho \int_0^L (u_t \cdot c^2 u_{xx} + c^2 u_x \cdot u_{xt}) dx$$

$$= \rho \cdot c^2 \int_0^L (u_t \cdot u_x)_x dx = \rho \cdot c^2 \cdot [u_t \cdot u_x]_{x=0}^{x=L}$$

$$= g \cdot c^2 [u_t(t, L) u_x(t, L) - u_t(t, 0) \cdot u_x(t, 0)] \Big|_0 = 0 \quad //$$

luego $u(t, 0) = 0 \Rightarrow u_t(t, 0) = 0$

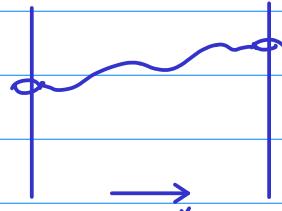
$u(t, L) = 0 \Rightarrow u_t(t, L) = 0$

$$E(t) = 0.$$



NOTAS ① El Tm es cierto para ondas con extremos libres

$$u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0 \rightarrow \text{ver ejerc 9}$$



$$\left(\begin{array}{l} \text{para extremos mixtos} \\ u(t, 0) = 0 \quad \text{etc...} \\ u_x(t, L) = 0 \end{array} \right)$$

$$② E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [g(x)^2 + c^2(f'(x))^2] dx$$

③ Cuende vibrante con rodamiento (Ejercicio 10).

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_t & (\mu > 0) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Probar que $E(t)$ es decreciente (ie $E'(t) \leq 0$).

Caráct UNICIDAD

Sean $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ soluciones de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_t + F(t, x) , & t > 0, x \in [0, L] \\ u_1(0, x) = f(x) , \quad u_1(0, x) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(0, x) = f(x) , \quad u_1(0, x) = g(x) \end{cases} \leftarrow (\text{mismas cond iniciales})$$

$$\begin{cases} u_1(0, x) = f(x) \\ u_1(0, x) = g(x) \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Entonces } u_1(t, x) = u_2(t, x)$$

Demo Defino $v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times [t_0, L])$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} - \mu v_t \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 \\ v(0, x) = v_x(0, x) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{cond inicia UNICA!}$$

$$\Rightarrow E^v(t) \hookrightarrow \Rightarrow E^v(t) \leq E^v(0) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left[(v_t)^2 + c^2 (v_x)^2 \right] dx \leq 0 \Rightarrow (v_t)^2 + c^2 (v_x)^2 = 0 \quad \forall x \in [t_0, L] \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_t = 0 \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t, x) = \text{cte} \xrightarrow{(t=0)} v(t, x) = 0.$$

$$\Rightarrow u_1(t, x) = u_2(t, x).$$

13

Nota: los teoremas de conservación (o de a.c.) de energía
nuevos implica UNICIDAD en muchas EDPs.

Ejercicio II equipartición de la energía

Sea $u(t, x)$ sol onda vibrante en \mathbb{R}

Supone que

$$\sup f, \sup g \in [-M, M].$$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Entonces } E_{kin}(t) = E_{pot}(t), \quad \forall t > M/c.$$

Ideas calcular E_{kin}, E_{pot} usando D'Alembert

$$u_t = \frac{-f'(x-ct) + f'(x+ct)}{2} \cdot c + \frac{1}{2c} (g(x+c) + g(x-c)). L$$

$$u_x = \frac{f'(x-ct) + f'(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} (g(x+ct) - g(x-ct))$$

Caso 1
$$\boxed{-M \leq x-ct \leq M}$$
 \rightarrow onda izda en $Sopf \rightarrow$ onda dcha FUERTE $Sopf$

$\hookrightarrow x \geq ct - M > 0 \Rightarrow x+ct > ct > M$

$t > \frac{M}{c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_t = -\frac{c}{2} f'(x-ct) + \frac{1}{2} g(x-ct) \\ u_x = \frac{1}{2} f'(x-ct) - \frac{1}{2c} g(x-ct) \end{cases} \Rightarrow (u_t)^2 = (c u_x)^2 !!$$

Caso 2
$$\boxed{-M \leq x+ct \leq M} \rightarrow$$
 onda dcha en $Sopf \rightarrow$ onda izda FUERTE $Sopf$

$\hookrightarrow x \leq M-ct \leq 0 \Rightarrow x-ct \leq -ct < -M.$

$+ > \frac{M}{c}$

$$\Rightarrow u_t = \frac{c}{2} f'(x+ct) + \frac{1}{2} g(x+ct) = c \cdot u_x \Rightarrow (u_t)^2 = (c u_x)^2.$$

Caso 3 resto $\rightarrow u_t = u_x = 0.$

$$\Rightarrow \text{en global } (u_t)^2 = (c u_x)^2$$

$$c^2 = \frac{\varepsilon}{\rho}$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} \int |u_t|^2 = \frac{\rho c^2}{2} \int |u_x|^2 = \frac{\varepsilon}{2} \int |u_x|^2 = E_{pot}$$

Notas

① Famoso tipo de le. ondas en dims d = impas.

② En la hipótesis $Sopf$, $SopS \subseteq [-M, M]$, el truc es visto ASINTÓTICAMENTE

(opcional)

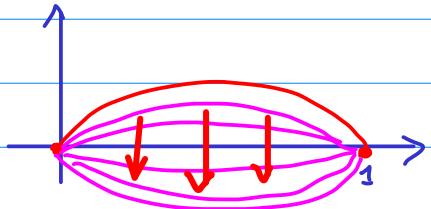
(suponiendo $f, g \in C \cap L^1(\mathbb{R})$ con $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{kin}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E_{pot}(t).$$

§ 1.5.- La solución de D. Bernoulli (1753)

Ejercicio 3a Considerar cuando con posición inicial una "onda de relo"

$$\begin{cases} u(0, x) = \operatorname{sen}(\pi x), & 0 < x < 1 \\ u_t(0, x) \equiv 0 \end{cases}$$



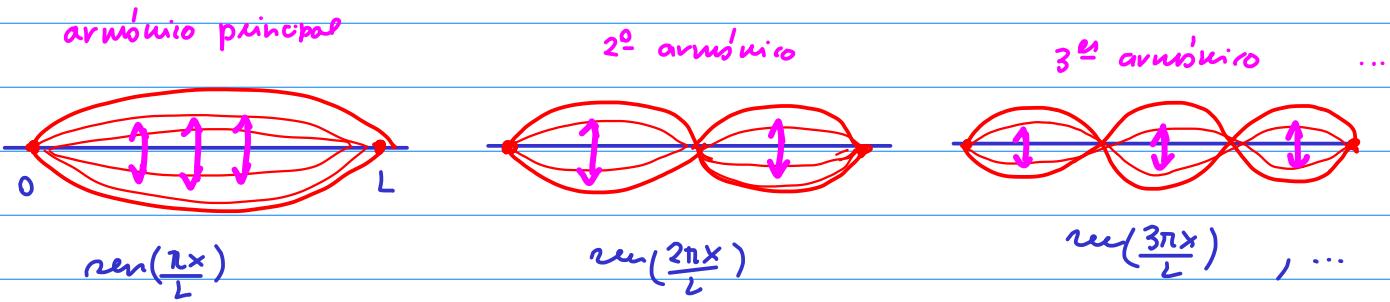
Comprobar con D'Alembert que la solución es

$$u(t, x) = \underbrace{\operatorname{sen}(\pi x)}_{\text{onda estacionaria}} \cdot \underbrace{\cos(\pi t)}_{\text{onda temporal con frecuencia } \frac{1}{2} \text{ Hz} = \frac{1}{2} \text{ ciclo seg}} \rightarrow$$

D. Bernoulli, tras observar las vibraciones de una cuerda, propuso que la solución general de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, & x \in (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) \equiv 0, & t > 0 \end{cases} \leftarrow (\text{extremos fijos})$$

debería ser superposición de ondas estacionarias



es decir,

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{armónico n-simo}} \cdot \underbrace{T_n(t)}_{\text{"amplitud" del n-armónico}}$$

"amplitud" del n-armónico
(asociada al timbre del instante)

Sustituyendo en la EDP:

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t) \right)_{tt} = c^2 \cdot (\dots)_{xx}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot T_n''(t) = c^2 \cdot \left[-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot T_n(t)$$

$$\Rightarrow T_n''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t)$$

$$\Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right]$$

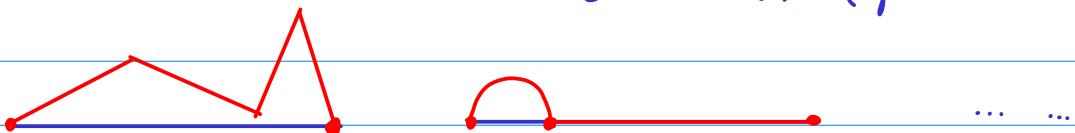
Euler criticó esta solución por ser "menos general"
(y menos rigurosa) que la obtenida por d'Alembert...

Solo válida para posiciones iniciales

$$u(0, x) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot a_n \quad (*)$$

y Nº para "curvas arbitrarias" $u(0, x) = f(x)$.

Según Euler, funciones con picos, constantes a trozos o
o funciones no periódicas en general NUNCA podrían
desarrollarse en series de senos como (*) (para un adecuado)



Sin embargo, solo unos días después, Fourier postulaba la
estructura "armónica" de cualquier función arbitraria...

En teoría musical la solución anterior se interpreta como

$$\sum_n a_n \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{n\text{-imo armónico}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)}_{vibración temporal en frecuencia}$$

"amplitud"

$f_n = \frac{nc}{2L} \text{ Hz} = \frac{nc}{2L} \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}}$

Ajustando la cuerdas: L , ρ , c , podemos conseguir la nota musical deseada.

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho} \longrightarrow \text{frec. prop} \quad f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{\tau}}{2L\sqrt{\rho}} \text{ Hz}$$

Ejercicio 8

D: $L = 33 \text{ cm}$ } y queremos $f_1 = 440 \text{ Hz} \rightarrow$ hallar ρ , τ , c .
 $m = 2 \text{ g}$

Sol:

$$\bullet \rho = \frac{m}{L} = \frac{2 \text{ g}}{1/3 \text{ m}} = 6 \text{ g/m}$$

$$\bullet \text{Busco } c / \quad f_1 = 440 = \frac{c}{2L} \Rightarrow c = 2L \cdot 440 = \frac{2}{3} \cdot 440 \\ = 290 \text{ m/seg.}$$

$$\bullet \text{Usando } c^2 = \frac{\tau}{\rho} \Rightarrow$$

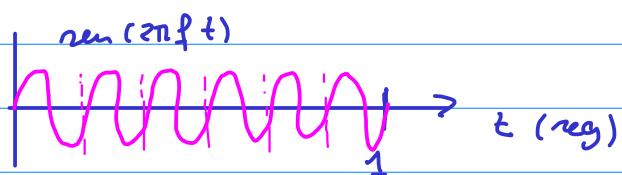
$$\tau = c^2 \cdot \rho = 290^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 506 \text{ N/m.} \\ (\simeq 51 \text{ "Kilos"})$$

Nota: El sonido es más agudo si

$$f_1 = \frac{\tau}{2\rho L} \nearrow , \text{ es decir: } \begin{cases} \tau \text{ crece} \\ \rho \text{ decrece} \\ L \text{ decrece} \end{cases} \rightarrow \text{madera corta y ligera.}$$

Nota: En física, las ondas temporales se describen con

$$T(t) = a \cos(2\pi f t) + b \sin(2\pi f t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

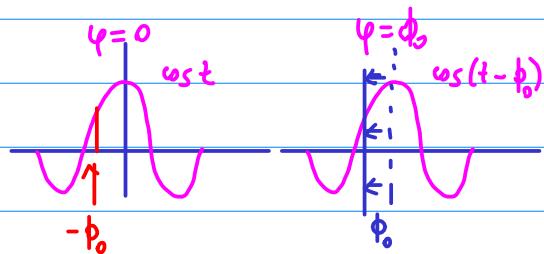


dónde f = frecuencia [Hz]

$$\omega = 2\pi f = \text{frecuencia angular [rad/seg]}$$

Ver gráfico 5a

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{amplitud} \\ \phi = \arctan(b/a) = \text{fase} \end{array} \right.$$

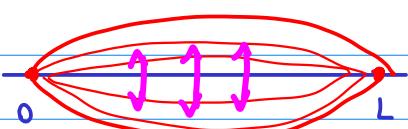


Además $\lambda = \frac{c}{f} = \text{long. onde [m.]}$

[periodo de la onda estacionaria]

e.d., $u(t, x) = \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}_{\text{armónico principal}} \cdot T(t)$

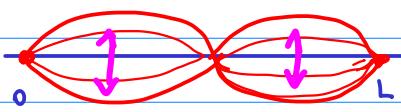
armónico principal



$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_1 = 2L$$

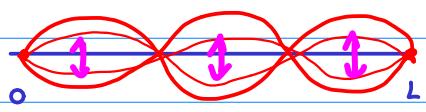
2º armónico



$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_2 = L$$

3º armónico ...



$$\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \dots$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

etc...

En general, si $u(t, x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot T_n(t) \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, f_n = \frac{nc}{2L}$

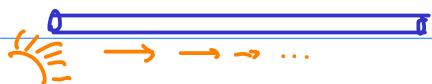
TEMA 2 : LA ECUACIÓN DEL CALOR (J. Fourier 1807)



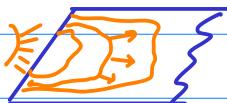
§ 2.1.- Formulación finita

Busco EDP para Propagación del calor en un cuerpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

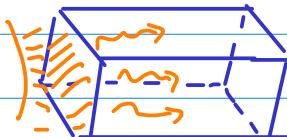
$n=1$ (varilla)



$n=2$ (lámina)



$n=3$ (solido)



Quiero determinar

$u(t, x) = \text{Temperatura del pto } x \in \Omega \text{ tras } t \text{ seg}$

a partir de

- Temperatura inicial $\rightarrow u(0, x) = f(x)$
- Condiciones de contorno $\rightarrow u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = \varphi(x), x \in \partial\Omega$

Hipótesis 1 (ley de Fourier)

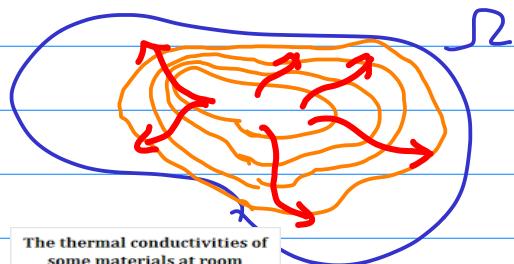
"El flujo de energía calorífica se propaga de CÁLIDO \rightarrow FRÍO en la dirección de MÁXIMO DECRECIMIENTO"

E.O.

$$\vec{\Phi} = -k \cdot \nabla_x u$$

$$\rightarrow [\vec{\Phi}] = [W/\text{area}] = [J/\text{seg m}^2]$$

conductividad térmica



Nota :

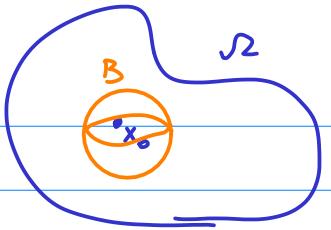
① Hay muchos modelos finitos que cumplen esta ley (modelos de difusión) :

- poblaciones
- concentraciones químicas, ...

② Unidades : $[x] = [W/m \cdot K]$

Material	$k, W/m \cdot K$
Diamond	2300
Silver	430
Copper	400
Gold	320
Aluminum	240
Iron	80
Glass	0.8
Brick	0.7
Water	0.61
Wood	0.17
Helium	0.15
Air	0.026

Para t fijo \rightarrow tomo bola $B = \overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega$



Hacemos un "balance de energía":

$$\underbrace{\Delta Q}_{\text{Cambio de calor}} = \sigma \cdot \underbrace{\text{cambio neto de temperatura}}_{\Delta T}$$

Usando el Teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \Delta Q &= - \int_{\partial B} \vec{\Phi} \cdot \vec{n} dS = - \int_B \operatorname{div}(\vec{\Phi}) dV \\ &= - \int_B \operatorname{div}(-\kappa \nabla u) dV = \kappa \int_B \Delta u \cdot dV \\ &\quad \text{div}(Du) = \Delta u !! \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\Delta T = \int_B \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) dx$$

$$\text{Igualando } \Delta Q = \sigma \cdot A T \quad \text{calor específico } [c] = \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

$$\rightarrow \kappa \int_B \Delta u dx = \sigma \int_B \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) dx$$

Como esto vale \forall bola $B_r(x_0) \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \{x_0\}$ y $\forall x_0 \in \Omega$

$$\boxed{\kappa \cdot \Delta u = \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial t} (t, x), \quad t > 0, x \in \Omega}$$

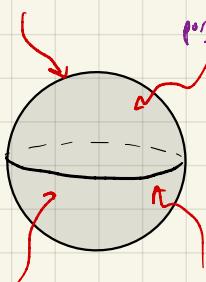
Llamando $\alpha = \kappa / \sigma$ (= difusividad térmica)

$$\boxed{\begin{cases} u_t = \alpha \cdot \Delta u, & t > 0, x \in \Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & x \in \partial \Omega \end{cases}}$$

Temperatura inicial Temperatura contorno

Flujo entrante en $B = \Delta Q$

$$\Delta Q = \iint_{\partial B} \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, ds = - \iiint_B \operatorname{div}(\vec{\Phi}) \, dV = - \iiint_B dV (-K \nabla u) \, dV = K \iiint_B dV (\nabla u) \, dV$$



porque apunta hacia afuera
apunto de calor entra

solo entra el
componente normal
del flujo

ley de Fourier

$$\sigma \Delta T = \sigma \iiint_B \frac{\partial u}{\partial t} (t, \mathbf{x}) \, dV$$

Ejercicio

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$$

$$\operatorname{div}(\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\partial_{x_1} u) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} (\partial_{x_n} u) = \Delta u$$

Lema

Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ / f cont en $K_0 \in \Omega$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x_0)} f(x) \, dx = f(x_0)$$

$$\text{defin } \bar{f}_{B_r(x_0)} = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x) \, dx \text{ es el promedio en}$$

la bola $B_r(x_0)$

Dens
De L

$\exists \delta_0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, K_0) > 0 \quad |f(x) - f(K_0)| < \varepsilon \quad \text{if } |x - K_0| < \delta$

Tomar $0 < r < \delta$
 el promedio de la media de una circunferencia

$$\left| \int_{B_r(K_0)} f(x) dx - f(K_0) \right| = \left| \int_{B_r(K_0)} (f(x) - f(K_0)) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{B_r(K_0)} |f(x) - f(K_0)| dx \leq \int_{B_r(K_0)} \varepsilon dx = \varepsilon //$$

Solucion:

$$\kappa \int_B \Delta u dx = \sigma \int_B \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) dx \quad \forall B = \overline{B_r}(K_0) \subset \Omega$$

Por el lema:

$$K \Delta u = \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) \quad t > 0, x \in \Omega$$

llamando $q = \frac{K}{\sigma} > 0$

$$\begin{cases} u_t = q \Delta u & t > 0, x \in \Omega \\ u(0, x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(t, x) = \varrho(t, x) & x \in \partial \Omega \end{cases}$$

(*) Para justificar este paso se usa

Lema Si $f \in C(\mathbb{R})$ y $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) dx = f(x_0)$$

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \left| \begin{array}{l} \\ \sim |x - x_0| < \delta \end{array} \right.$

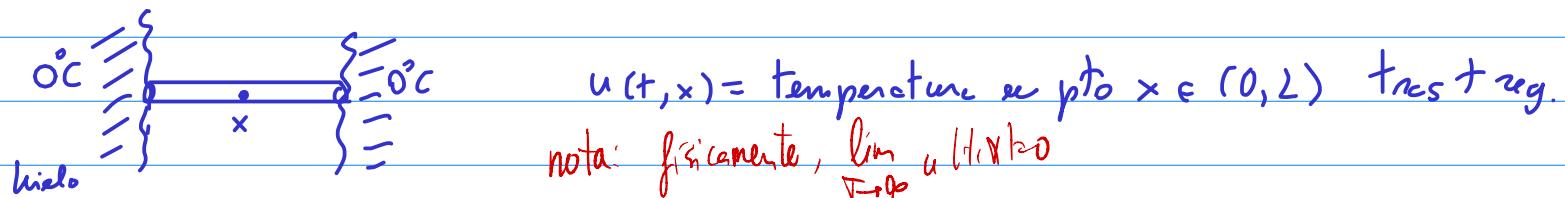
$$\Rightarrow \left| \int_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) dx - f(x_0) \right| = \left| \int_{\overline{B}_r(x_0)} (f(x) - f(x_0)) dx \right|$$

$$\leq \int_{\overline{B}_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)| dx < \varepsilon \quad \text{en } r \in (0, \delta). \quad \blacksquare$$

Nota: Tb se cumple $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\overline{B}_r(x_0)} f = f(x_0)$ d.p. $x_0 \in \mathbb{R}$
 (Tm. diferenciación de Lebesgue) FVV3.

2.2.- Resolución por separación de variables (dim $n=1$).

Ejemplo 1 (alar en una valla con extremos nulos)



$$\Rightarrow \begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx}, & t > 0, \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Busco soluciones de la forma $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$ (no trivios)
 $u \neq 0$

$$\Rightarrow T'(t) \cdot X(x) = \alpha \cdot T(t) \cdot X''(x)$$

$$\begin{cases} U_t = g \cdot U_{xx} \\ U(t=0) = u(t=L) = 0 \end{cases}$$

busco una solución que se escriba $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$
(no trivial).

Entonces es

$$T'(t) \cdot X(x) = g \cdot T(t) \cdot X''(x)$$

$$\rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = g \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv cte = f$$

no depende de x
no depende de t

dado por f
 $\boxed{}$

$$\rightarrow ① T'(t) = f T(t) \quad t > 0$$

$$\rightarrow ② \begin{cases} X''(x) = \frac{f}{g} X(x) & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$u(t=0) = T(t) \cdot X(0) \rightarrow X(0) = 0$$

$$u(t=L) = 0 = T(t) \cdot X(L) \rightarrow X(L) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad T(t) = C \cdot e^{\lambda t} \quad \text{como } g_{\text{varo}} \quad T(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

Entonces $f = -d^2 < 0$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} X''(x) = -\frac{d^2}{\alpha} X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow X(x) = A \cos\left(\frac{d}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B \sin\left(\frac{d}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

$$x=0 \rightarrow 0 = X(0) = A \rightarrow \boxed{A=0}$$

$$x=L \rightarrow 0 = X(L) = B \sin\left(\frac{d}{\sqrt{\alpha}} L\right) \xrightarrow{B \neq 0} \sin\left(\frac{d}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{\sqrt{\alpha}} L = n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N}$$

$$d_n = \frac{n \pi \sqrt{\alpha}}{L} \quad n: 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = B_n \cdot \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

El candidato a solución general es

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-d_n^2 t} \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

$$\rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv \text{cte} !! = \beta$$

Obtenemos 2 ecuaciones

$$(1) \quad T'(t) = \beta \cdot T(t)$$

$$(2) \quad X''(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot X(x)$$

Resolvemos (1)

$$\rightarrow T(t) = A \cdot e^{\beta t}$$

Como es puro que $T(t) \rightarrow 0$ $\left. \begin{array}{l} \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$ (vanilla o exponencial)

$$\Rightarrow \text{resolvemos} \quad \boxed{\beta = -\lambda^2 < 0}$$

Resolvemos (2)

$$X''(x) = -\frac{\lambda^2}{\alpha} \cdot X(x)$$

$$\rightarrow X(x) = A \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

Nota que

$$\text{(CC)} \rightarrow \begin{cases} u(t,0) = T(t) \cdot X(0) \equiv 0 \rightarrow X(0) = 0 \\ u(t,L) = T(t) \cdot X(L) \equiv 0 \rightarrow X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=0} 0 = X(0) = A$$

$$\xrightarrow{x=L} 0 = X(L) = 0 + B \cdot \sin\left(\frac{\lambda L}{\sqrt{\alpha}}\right) \xrightarrow{B \neq 0} \sin\left(\frac{\lambda L}{\sqrt{\alpha}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda L}{\sqrt{\alpha}} = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \lambda$ solo puede tomar los valores

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot n \pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(el resto da soluciones triviales o repetidas)

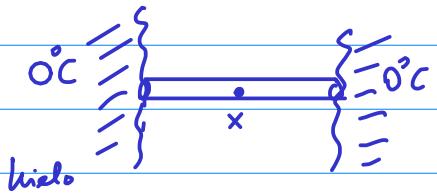
$$\Rightarrow X_n(x) = B_n \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow u_n(t, x) = B_n \cdot e^{-t \lambda_n^2} \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

La solución general queda

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\frac{\lambda n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

Ejemplo 1 (abrir en una vacailla con extremos nulos) (Continuación)



$u(t, x)$ = temperatura en pto $x \in (0, L)$ tras t seg.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx}, & t > 0, \quad x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Vimos que la solución general es:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

¿Cómo se calculan los B_n ? \rightarrow dato inicial

$$\xrightarrow{t=0} f(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right).$$

- L: SABEMOS que $f(x)$ es comb. lineal de senos \rightarrow ok
- L: no, necesitamos la idea de ORTOGONALIDAD

L: $f = \sum_n B_n \cdot \vec{e}_n$ y $\{\vec{e}_n\}$ es base "ortogonal"

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle f, \vec{e}_m \rangle &= \left\langle \sum_n B_n \vec{e}_n, \vec{e}_m \right\rangle = \sum_n B_n \underbrace{\langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle}_{0, \text{ si } n \neq m} \\ &= B_m \cdot \langle \vec{e}_m, \vec{e}_m \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ii } B_m = \frac{\langle f, \vec{e}_m \rangle}{\langle \vec{e}_m, \vec{e}_m \rangle} !!$$

Teorema de la ortogonalidad

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \vec{e}_n$$

donde $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son un sistema orthonormal:
 $\langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$

Fijado m :

$$\langle f, \vec{e}_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} B_n \vec{e}_n, \vec{e}_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = B_m \langle \vec{e}_m, \vec{e}_m \rangle$$

$$\rightarrow B_m = \frac{\langle f, \vec{e}_m \rangle}{\langle \vec{e}_m, \vec{e}_m \rangle} \quad \text{Hasta } \mathbb{N}$$

Si $f, g \in C[0, L]$, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x) dx$$

$$\left\{ \vec{e}_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ sistema ortogonal}$$

Lema

Si $n, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, entonces

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

Dem

$$\begin{aligned} - \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ + \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \quad \left\{ \text{sen} A \text{sen } B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \right.$$

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \sin A \sin B$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \frac{\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)}{2} dx$$

(caso $n \neq m$)

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)}{(m-n)\frac{\pi}{L}} - \frac{\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)}{(n+m)\frac{\pi}{L}} \right]_0^L = 0$$

Caso $n=m$

$$= \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2 \cdot \frac{2n\pi}{L}} \right]_0^L = \frac{L}{2} //$$

□

En un caso más general: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \underbrace{\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}_{\uparrow}$$

(supon que se puede justificar este paso)

Lema Si $m, n = 1, 2, 3, \dots$ entonces

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \frac{L}{2}, & \text{si } n = m \end{cases}$$

Por tanto

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Ejemplos particulares (ejercicio 3)

$\alpha = L = 1$

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

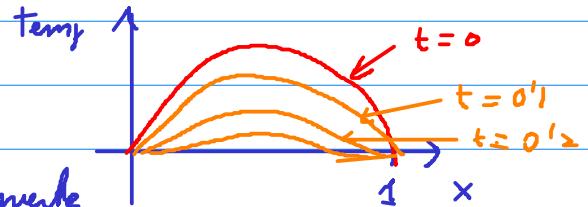
b) $f(x) = 1$.

Caso a). A ojo vemos que $B_1 = 1$, $B_n = 0$ si $n \neq 1$

$$\Rightarrow u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$$

→ La varilla se enfria exponencialmente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0.$$



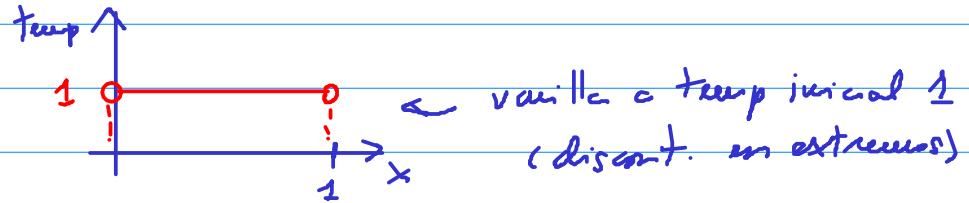
¿ Cuándo es $|u(t, x)| \leq 10^{-3}$?

$$|u(1, x)| = e^{-\pi^2 t} |\sin(\pi x)| \leq e^{-\pi^2 t} \leq 10^{-3}$$

δ/7 reg
||

$$\Leftrightarrow e^{\pi^2 t} \geq 10^3 \Rightarrow t \geq \frac{3}{\pi^2} \ln 10$$

(b) $f(x) \equiv 1$



¿ Podemos escribir $\underline{1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$, $x \in (0, 1)$?

$$B_n = 2 \int_0^1 \underline{1} \cdot \sin(n\pi x) dx = - \left[\frac{2 \cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1$$

$$- \frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n = \text{par} \\ \frac{4}{n\pi} & n = \text{impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4/\pi}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ x \in (0, 1) \end{array} \right\}$$

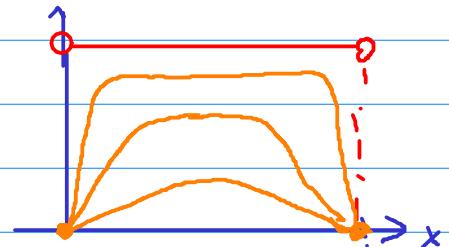
$n = 2k-1$

⇒ el candidato a solucion queda

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2(2k-1)^2 t} \cdot \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}, \quad x \in (0, 1)$$

→ Dibujamos su Máximo

→ progresivamente se va enfriando,
de forma simétrica .



¿ Puedo garantizar que esa solución $u(t, x) \in C^2$?

Teorema 1 Sol. ec. calor en $[0, L]$ con c.t.-c.m.s nulos

Sea $f(x) \in C[0, L]$ t.q. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ {
Entonces donde $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ }

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), t \geq 0, x \in [0, L]$$

es una función $u \in C^{\infty}((0, \infty) \times [0, L]) \cap C([0, \infty) \times [0, L])$
y cumple la EDP

$$\begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx}, x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Notas: ① La condición (*) se puede rebajar. De hecho veremos que todo $f \in C^1[0, L]$ (con $f(0) = f(L) = 0$) cumple (*).

② Más adelante veremos t3 la UNICIDAD.

③ El tma NO se aplica a $f(x) \equiv 1$, pues $\sum |b_n| = \infty$.

(en ese cas. $u(t, x) \in C^{\infty}((0, \infty) \times (0, L))$, pero NO en $[0, L]$)

Necesitamos 2 lemas de F1VR

Lema 1 Sean $f_n \in C^1[a, b]$ t.q.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ convergen UNIF $x \in [a, b]$

Entonces, $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es de clase $C^1[a, b]$ y

$$F'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), x \in [a, b]$$

→ buscar una referencia en libros de 1º.

Lema 2 M-test de Weierstrass

Sea $f_n \in C(S)$ tales que

$$\sup_{x \in S} |f_n(x)| \leq M_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

{ M_n tienen sumas con serie convergente

Entonces

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ conv uniforme}$$

y en particular $F \in C(S)$.

Dem Thm 1

- Como $|u(t, x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \pi^2 n^2 t} b_n \cos \frac{n \pi x}{L} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$

Lema 2

$$\Rightarrow u \in C([0, \infty) \times [0, L]).$$

- Veamos que $u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$

(+) > 0

Llamo

$$u_n(t, x) = b_n e^{-\alpha \pi^2 n^2 t} \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right)$$

Veamos si las series derivadas convergen uniformemente

$$\left| \partial_t^k \partial_x^\ell u_n(t, x) \right| = \left| b_n \cdot c_{k, \ell} \cdot n^{2k+\ell} \cdot e^{-\alpha \pi^2 n^2 t} \cdot \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right|$$

$$\leq C_{k, \ell} \cdot |b_n| \cdot n^{2k+\ell} \cdot e^{-\alpha \pi^2 n^2 t} \cdot L$$

Veamos

$$\sup_{s>0} s^n \cdot e^{-s} = d_n < \infty$$

$$\hookrightarrow e^{-s} \leq \frac{d_n}{s^n}$$

$$\leq C_{k, \ell} \cdot |b_n| \cdot \frac{n^{2k+\ell}}{\left(\frac{\alpha \pi^2 n^2 t}{L^2} \right)^{k+\ell}}$$

$$\leq \frac{C_{k, \ell}}{t^{k+\ell}} \cdot |b_n| =: M_n(t)$$

Demo del teorema

$$u_n(t,x) = b_n e^{-\mu n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \in C^\infty \quad \mu := \frac{\alpha \pi^2}{L} > 0$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) \in C([0,\infty) \times [0,L])$$

$$|u_n(t,x)| = |b_n| \cdot e^{-\mu n^2 t} \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |b_n|$$

por hipótesis $\sum |b_n| < \infty$

por el criterio $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$ cohav. uniforme en $C([0,\infty) \times [0,L])$

Mata: $u_n \in C^\infty$ y $(u_n(t,x))/y = \alpha(u_n(t,x))/x$

Si veo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \partial_t^k \partial_x^l (u_n(t,x)) \text{ es unif. con } f_k, g_k$$

$$\Rightarrow u \in C^\infty \text{ y } \partial_x^k \partial_x^l u(t,x) = \sum \partial_t^k \partial_x^l (u_n(t,x))$$

$$\Rightarrow (\partial_t - \alpha \partial_x x) u = \sum (\partial_t - \alpha \partial_x x) u_n = 0 //$$

Entonces $u \in C([0,\infty) \times [0,L])$ también es

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^0}{1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) //$$

$$u(H,0) = \sum \dots u_n(0) = 0 = u(H,L) //$$

y sobre jude u b conv. unif.

$$|\partial_t^\kappa \partial_x^\ell u_n(t, x)| = |\partial_t^\kappa \partial_x^\ell [e^{-\mu n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}]| |b_n| \leq$$

$$\leq |b_n| \mu^\kappa n^{2\kappa} e^{-\mu n^2 t} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^\ell \left\{ \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \leq$$

$$\leq C_{K,\epsilon} |b_n| n^{2\kappa + \ell} \cdot e^{-\mu n^2 t} \leq$$

usando

$$\sup_{N>0} N^K e^{-K} = C_K < \infty$$

$$\rightarrow e^{-K} = \frac{C_K}{N^K}$$



$$\leq C_{K,\epsilon} |b_n| n^{2\kappa + \ell} \cdot \frac{C_N}{(\mu n^2 + 1)^N} \quad \text{donde } N = K + \frac{\ell}{2} + 2$$

Y el

$$|\partial_t^\kappa \partial_x^\ell u_n(t, x)| \leq \frac{\overline{C}_{K,\epsilon} \sup_{N>0} \{ |b_n| \}}{t^N} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{\widetilde{C}}{t^N} \cdot \frac{1}{n^2}$$

\Rightarrow es uniforme $\forall K \in [0, L]$ \Rightarrow $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$.

Como $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, entonces

$\sum \partial_t^\kappa \partial_x^\ell u_n(t, x)$ converge uniformemente y absolutamente
en $[t_0, \infty) \times [0, L]$

$\rightarrow u \in C^\infty([t_0, \infty) \times [0, L])$, $t_0 > 0$

$\rightarrow u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$ \square

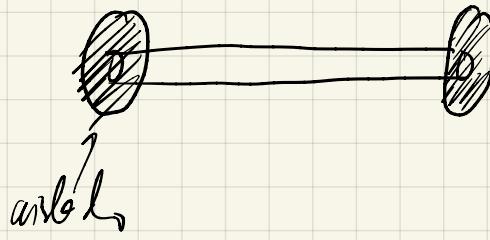
Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) < \infty$, $\forall t \geq t_0 > 0$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n \partial_x^n u_n(t, x)$ converge uniformemente en $[t_0, \infty) \times [0, L]$

luego
 $\Rightarrow u(t, x) \in C^\infty([t_0, \infty) \times [0, L]) \quad \forall t_0 > 0 \quad \Rightarrow u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$

Las otras propiedades siguen de aquí \blacksquare

Ejemplo 2 Varilla exterior andada



O sea, el flujo de calor sencillo a través de $x=0$ es nulo

D sea:

$$0 = -K \nabla u(t, 0) \cdot \vec{n} = -K \cdot u_x(t, 0) \cdot (-1) = K \cdot u_x(t, 0)$$

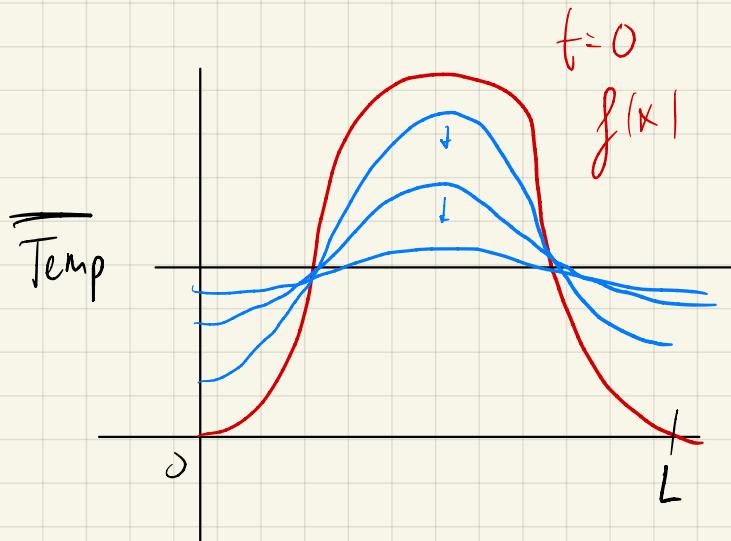
$$\rightarrow u_x(t, 0) = 0$$

Lo mismo en $x=L$:

$$0 = -K \cdot u_x(t, L) \cdot 1 \rightarrow u_x(t, L) = 0$$

La EDP queda:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x \in [0, L] \\ u(0, x) = f(x) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0 \end{cases}$$



pero que
en ult, $x = T_{\text{exp}}$
 \rightarrow

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

b) se solvencia

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$$

$$no \equiv 0$$

$$\rightarrow T'(t) X(x) = \alpha T(t) X''(x)$$

$$\rightarrow \frac{T'}{T} = \alpha \frac{X''}{X} = \sigma = f$$

$$\rightarrow \textcircled{1} \quad T' = f T$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} X'' = \frac{f}{\alpha} X \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$u_x(t, 0) = T(t) X'(0) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$$

$$u_x(t, L) = 0 \rightarrow X'(L) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad T(t) = C \cdot e^{\int f t}$$

Si $f > 0 \rightarrow \lim T(t) = \infty$ No
se podrían descartar

Otro modo de descartar $f > 0$. Supongamos $f = \lambda^2 > 0$

$$\textcircled{2} \quad X''(x) = \frac{\lambda^2}{\alpha} X(x) \rightarrow X(x) = A \cdot e^{\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x} + B e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x} =$$
$$= \tilde{A} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + \tilde{B} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$
$$X'(x) = \tilde{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sinh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right) + \tilde{B} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cosh\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

$$X'(0) = \tilde{B} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \xrightarrow[\alpha > 0]{} \tilde{B} = 0$$

$$X'(L) = \tilde{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \xrightarrow[\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \sin > 0 \end{matrix}]{} \tilde{A} = 0$$

γ es $X(x) = 0$ \neq no pedir $f \geq 0$.

caso $f = 0$

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \cdot X(x) \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} X(x) = A + BX \\ X'(0) = B = 0 \end{array} \right\} \quad X(x) = A_0$$

caso $f < 0$

$$\begin{cases} X''(x) = -\frac{1}{\alpha} X(x) \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

$$X'(x) = -A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} x\right) + B \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} x\right)$$

$$0 = X'(0) = B \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow B = 0$$

$$0 = X'(L) = -A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \xrightarrow{A \neq 0} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} L\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} L = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} d_n = \frac{n\pi\sqrt{\alpha}}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

$$T_n(t) \cdot C \cdot e^{st} = C \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 s}{L^2} t}$$

El candidato a solución general es

$$u(t, x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

Impormenta la temp. inicial

$$u(0, x) = f(x) \rightarrow f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad 0 < x < L$$

¿Cómo determinamos los A_n ?

Método 1: Si $f(x)$ es C.L. finita en $\left\{ 1, \cos \frac{n \pi x}{L} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

Entonces se toma A_n a gto.

Ejemplo (ej 2)

$$f(x) = \sin^2(x) = \frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} \quad A_0 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, 2$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 s t} \cos(2\pi x)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{2}$$

$$t / \|u(t, x)\|_2 \leq 10^{-3}$$

$$\left| \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 s t} \cos(2\pi x) \right| \leq \frac{1}{2} e^{-4\pi^2 s t} < 10^{-3} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1000}{2} = 500 < e^{4\pi^2 s t} \quad \leftrightarrow \quad \ln 500 < 4\pi^2 s t$$

$$\leftrightarrow t > \frac{\ln 500}{4\pi^2 s}$$

Método 2: Si $f(x)$ es función general en $[0, L]$

Fijo $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}_{0 \text{ si } n \neq m} = A_m \int_0^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Lema

$$n, m \in \mathbb{N}_0 \rightarrow \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m = 0 \\ \frac{L}{2} & n = m \geq 1 \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Nota ① $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t|x) = A_0 = \overline{f(x)}$

② La justificación de que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$

(bajo ciertas hipótesis como $f \in C^1([0, L])$)

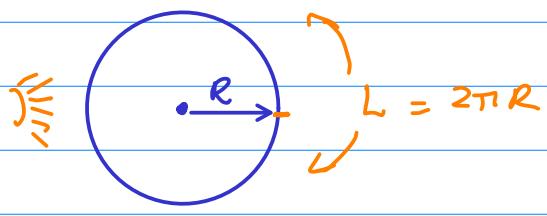
la veremos en el bloque II.

③ La misma demostración del Trm prueba que, si $\sum |A_n| < \infty \rightarrow u(t|x) \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$
 $u(t, x) \in C([0, \infty) \times [0, L])$

es solución clásica de la EDP.

Ejemplo 3 Ec. calor en anillo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \alpha u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in [0, L] \\ u(0, x) = f(x) \end{array} \right.$$



$$u(0, x) = f(x) \quad \leftarrow \text{cond. inicial}$$

$$u(t, 0) = u(t, L)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, L)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = u(t, L) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, L) \end{array} \right. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{cond. contorno} \\ \text{períodica} \end{array}$$

\leftarrow cond. contorno

Busco soluc (no trivial) del tipo $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$

$$\rightarrow \text{como siempre} \rightarrow \frac{T'}{T} = \alpha \frac{X''}{X} \equiv \text{cte} = g$$

$$(1) \quad T'(t) = g \cdot T(t)$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \frac{g}{\alpha} X(x) \\ X(0) = X(L) \\ X'(0) = X'(L) \end{array} \right. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{cond. contorno} \\ \text{periodicas} \end{array}$$

$$\text{Caso } g = 1^2 > 0 \quad (1) \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \infty$$

($T_b \approx$ puede resolver (2), y que $X_0 \equiv 0$)

$$\text{Caso } g = 0 \quad X''(x) = 0 \rightarrow X(x) = A + Bx \quad \rightarrow X_0(x) = A_0$$

$$X(0) = X(L) \rightarrow B = 0$$

$$\text{Caso } g = -1^2 < 0 \quad X(x) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)$$

$$X(0) = X(L) \rightarrow A = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}L\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}L\right)$$

$$X'(0) = X'(L) \rightarrow X'(0) = -A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)$$

$$\Rightarrow B \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}L\right) + B \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}L\right)$$

$$\rightarrow \text{Sistema } 2\text{rc} + 2\text{incds} \quad \left. \begin{array}{l} A(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}L)) - B \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}L) = 0 \\ A \cdot \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}L) + B(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}L)) = 0 \end{array} \right\}$$

\Rightarrow busco sol $(A, B) \neq (0, 0)$ \Rightarrow

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \cos & -\sin \\ \sin & 1 - \cos \end{vmatrix} = (1 - \cos)^2 + \sin^2 = \Rightarrow \begin{cases} \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}L) = 1 \\ \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}L) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}L = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \text{basta tomar } \lambda_n = \frac{2\pi n \sqrt{2}}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Así, la solución general quede

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 \alpha}{L} t} \cdot \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]$$

ojo
los coeficientes se determinan con

$$\underset{t=0}{\rightarrow} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right] \\ x \in [0, L] \end{array} \right\}$$

Note :

cada cond contorno \rightarrow sistema ortogonal de diferente

- $u(t, 0) = u(t, L) = 0 \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \leftarrow$ sol de senos
- $u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0 \rightarrow f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \leftarrow$ sol de cosenos
- $u = \text{periódica} \rightarrow$ mix senos + cosenos.

Fórmula para los coeficientes (caso periódico)

Usar ortogonalidad

$$\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = A_0 \underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx}_{L \cdot \delta_{m,0}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_{\frac{L}{2} \cdot \delta_{m,n}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx}_{=0}$$

Procediendo como antes,

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, & A_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx \\ B_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx \end{aligned} \right\} m \geq 1.$$

Notas :

① De nuevo, condiciones del tipo $\sum |A_n| + \sum |B_n| < \infty$

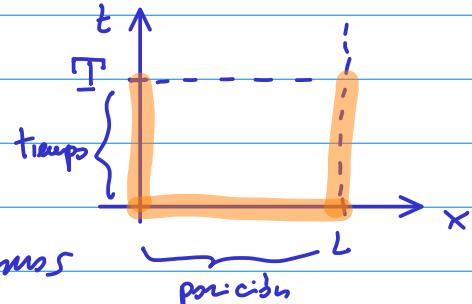
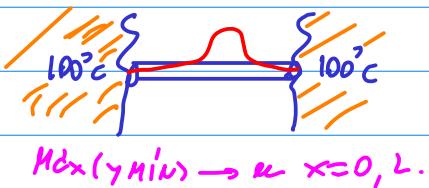
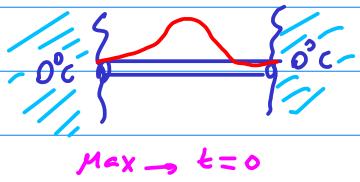
$\Rightarrow u(t, x) \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}) \times C([0, \infty) \times \mathbb{R})$
 es sol. clásica de la EDP.

2.2.- Propiedades: Principio del Máximo y Uniformidad

[Strauss, Cap 2.3]

Sea $u(t, x)$ sol. de ec. calor en una varilla $[0, L]$.

¿Dónde y cuándo pue de alcanzar su temp MAXIMA (o MIN) ?



Def Sea $R = [0, T] \times [0, L]$. Llamamos fronteira para bóblica de R a

$$\partial_p R := \partial R \setminus (\{T\} \times (0, L))$$

cont y U_{xx} tapa superior ($cb \leq$)

Teorema Principio del máximo (para la ec. calor)

Sea $u \in C^{1,2}_{(t,x)}([0,T] \times [0,L])$ que cumple

$$(*) \quad u_t \leq \alpha \cdot u_{xx} \quad \text{en } R = [0, T] \times [0, L]$$

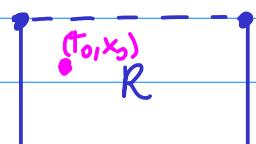
Entonces

$$\max_{(t,x) \in R} u(t, x) = \max_{\partial_p R} u$$

Nota: Por simetría, si $u_t \geq \alpha \cdot u_{xx}$, se cumple un "ppio del mínimo".

Dem:

$$\text{Sea } (t_0, x_0) \in R : \max_R u = u(t_0, x_0)$$



Caso 1 Supongan $u_t < \alpha \cdot u_{xx}$ en R

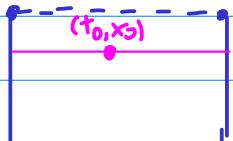
Véanlos que necesariamente $(t_0, x_0) \in \partial_p R$.

L. no tiene así tendencia que darle

a) obviamente $(t_0, x_0) \in R$

b) obtener $(t_0, x_0) \in \{T \times (0, L)\} \leftarrow$ tapa superior pto critico de u

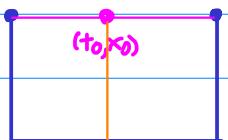
en el caso a $\Rightarrow (t_0, x_0)$ es MÁX local de $u \Rightarrow \begin{cases} u_t(t_0, x_0) = 0 \\ u_x(t_0, x_0) = 0 \end{cases}$



Ade más, $u_{xx}(t_0, x_0) \leq 0$ (pq x_0 es máximos local)
de $x \mapsto u(t_0, x)$

Entonces $u_t(t_0, x_0) - \alpha \cdot u_{xx}(t_0, x_0) \geq 0$ ✓.

en el caso b, $t_0 = T, x_0 \in (0, L)$



$\Rightarrow x_0$ es máx local de $x \mapsto u(T, x)$

$\Rightarrow u_{xx}(T, x_0) \leq 0$

Ade más, mirando la linea vertical $\{x = x_0\}$, $u(t, x_0) \leq u(T, x_0)$

$$\Rightarrow u_t(T, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(T, x_0) - u(T-h, x_0)}{h} \stackrel{\text{máx}}{\geq} 0 \quad (u \neq u(T))$$

Esto implica $u_t(T, x_0) - \alpha \cdot u_{xx}(T, x_0) \geq 0$ ✓.

Por tanto, necesariamente $(t_0, x_0) \in \partial_p R$.

CASO GRAL

$u_t \leq \alpha \cdot u_{xx}$ en R .

Dado $\varepsilon > 0$, definir $v(t, x) = u(t, x) + \varepsilon x^2 \in C^{1,2}(R)$.

Notar que

$$v_t - \alpha \cdot v_{xx} = u_t - \alpha \cdot u_{xx} - 2\varepsilon \leq 0 \quad !! \quad (\text{en } R)$$

→ le aplico el caso 1

$$\max_R u \leq \max_R v = \max_{\partial_p R} v = \max_{\partial_p R} [u(t, x) + \varepsilon x^2] \leq \max_{\partial_p R} u + \varepsilon \cdot L^2$$

$$\text{Haciendo } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \max_R u \leq \max_{\partial_p R} u \quad (\leq \max_R u)$$

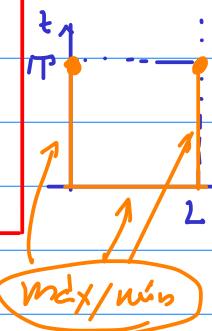
$$\Rightarrow \max_R u = \max_{\partial_p R} u$$

Corolario 1

$\exists u \in C_{t,x}^{1,2}(R) \text{ y } u_t = \alpha \cdot u_{xx} \text{ en } R$

$$\Rightarrow \max_R u = \max_{\partial_p R} u \quad \text{y} \quad \min_R u = \min_{\partial_p R} u$$

Dem ejercicio



Corolario 2 UNICIDAD

Sean $F(t, x)$, $f(x)$, $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ continuas en $R = [0, T] \times [0, L]$.

Entonces, la EDP

$$\begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx} + F(t, x), & (t, x) \in R \\ u(0, x) = f(x) & \leftarrow \text{cond inicial} \\ u(t, 0) = \phi_0(t), \quad u(t, L) = \phi_1(t) & \leftarrow \text{CC} \end{cases}$$

tiene a lo sumo una ÚNICA solución $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(R)$.

Dem:

Sean $u^1(t, x)$, $u^2(t, x)$ dos tales soluciones.

Entonces

$$v(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(R) \text{ y cumple}$$

$$\begin{cases} v_t = \alpha \cdot v_{xx} \text{ en } R \\ v(0, x) = 0 \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 \end{cases} \implies v \equiv 0 \text{ en } \partial_p R$$

|| cor 1

$$v \equiv 0 \Leftrightarrow \max_R v = 0, \quad \min_R v = 0$$

Veamos otra técnica "más fuerte" para probar unicidad (que vale tb para extremos dislocados).

Teorema 2 Desacumiento de "energía"

Sea $u \in C_{t,x}^{1,2}([0,\infty) \times [0,L])$ t.q.

$$\begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

$$y \quad u(t,0) \cdot u_x(t,0) \geq u(t,L) \cdot u_x(t,L)$$

- Incluye casos anómalos
- $u(t,0) = u(t,L) = 0$
 - $u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0$
 - $u_x(t,0) = \delta u(t,0)$

$$u_x(t,L) = 0 \\ (\text{ver ej 6})$$

Entonces

$$E(t) := \int_0^L |u(t,x)|^2 dx, \quad t > 0 \text{ es DEMONSTRANTE.}$$

En particular

$$E(t) \leq E(0) = \int_0^L |f(x)|^2 dx, \quad \forall t > 0.$$

Demo:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{d}{dt} (u^2) dx = \int_0^L 2u u_t dx = 2\alpha \int_0^L u \cdot u_{xx} dx$$

$$\stackrel{\text{parte}}{=} 2\alpha \left(\underbrace{[u \cdot u_x]_{x=0}^{x=L}} - \int_0^L u_x^2 dx \right) \leq 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 3 Unicidad + estabilidad.

Si $u^1(t,x), u^2(t,x) \in C^{1,2}(R)$ son soluciones de

$$\begin{cases} u_t = \alpha \cdot u_{xx} + f(t,x) \quad \text{en } R \\ u(t,0) = \phi_0(x), \quad u(t,L) = \phi_1(x) \quad \leftarrow \text{cc} \\ (\text{o bien } u_x(t,0) = \phi_0(t), \quad u_x(t,L) = \phi_1(t)) \end{cases}$$

con datos iniciales

$$u^1(t,x) = f_1(x), \quad u^2(t,x) = f_2(x)$$

entonces

$$\sup_{t>0} \int_0^L |u^1(t,x) - u^2(t,x)|^2 dx \leq \int_0^L |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx.$$

Deux: Aplicar Thm 2 a $V(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$.

Note: En general, los "métodos de energía" son más robustos que los Primos del Máximo, pero en algunas EDPs son más difíciles de probar (especialmente, encontrar la "función de energía").

Ejercicio → Opcionales 9.

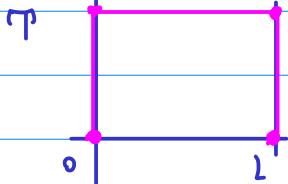
Usar Primo Máximo para probar

$$|u^{(0)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)| \leq m_0 x \left\{ \|f^{(1)} - f^{(2)}\|, \|\phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}\|, \|f_1^{(1)} - f_1^{(2)}\| \right\}.$$

Más sobre Primo Max

- Strauss, Chap 2.3
- Perla, Chap 6.2
- Evans, Chap 2.3

→ posible ejercicio: probar el Thm 11 sobre "unicidad inversa":

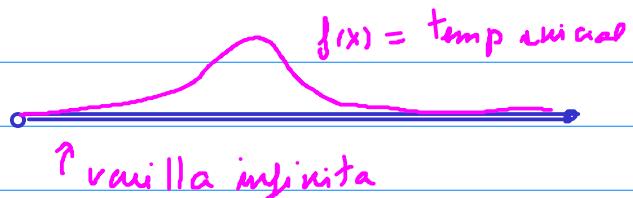


Si $u^1 = u^2$ en $\partial\Omega \setminus (\text{bottom edge})$ top abajo $\Rightarrow u^1 \equiv u^2$.

§2.3. La ecación del calor en IR

Busco soluciones de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$



Vamos a calcular una solución particular de

$$(*) \quad u_t = u_{xx} \quad | \quad \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = 1, \forall t > 0$$

\Rightarrow (normalización: calor neto en varilla = 1)

Usaremos el MÉTODO DE AUTOSEMEJANZAS:

Busco λ, μ, γ tales que:

$$\text{si } u(t, x) \text{ cumple } (*) \Rightarrow v(t, x) := \gamma u(\lambda t, \mu x) \text{ tb cumple } (*)$$

Operando

$$\begin{aligned} v_t &= \gamma u_t(\lambda t, \mu x) \cdot \lambda \\ v_{xx} &= \gamma u_{xx}(\lambda t, \mu x) \cdot \mu^2 \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow v_t = v_{xx} \Leftrightarrow \lambda = \mu^2 \right.$$

Por tanto

$$v(t, x) = \gamma \cdot u(\lambda t, \sqrt{\lambda} x) \quad \text{or (dilatación parabólica)}$$

Además

$$1 = \int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma u(\lambda t, \sqrt{\lambda} x) dx = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} u(\lambda t, z) dz$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma = \sqrt{\lambda}}$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{si } u(t, x) \text{ cumple } (*) \Rightarrow v(t, x) = \sqrt{\lambda} \cdot u(\lambda t, \sqrt{\lambda} x) \text{ cumple } (*) \quad \lambda > 0}$$

Busco λ, μ, γ :

$$u(t, x) \text{ sol de } \textcircled{*} \Rightarrow v(t, x) = \gamma u(\lambda t, \mu x) \text{ sol de } \textcircled{\oplus}$$

$$\textcircled{*} \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)| dx = 1 \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$\left. \begin{array}{l} v_t = \gamma u_t (\lambda t, \mu x) \Big|_{\textcircled{*}} \\ v_{xx} = \gamma u_{xx} (\lambda t, \mu x) \cdot \mu^2 \end{array} \right\} v_t = v_{xx} \Rightarrow \boxed{\mu^2 = 1} \rightarrow \mu = \sqrt{\lambda}$$

Además

$$1 = \int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma u(\lambda t, \mu x) dx = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} u(\lambda t, z) dz = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} = 1 \rightarrow \gamma = \sqrt{\lambda}$$

$$\begin{aligned} z &= \mu x = \sqrt{\lambda} x \\ dz &= \mu dx = \sqrt{\lambda} dx \end{aligned}$$

O sea

$$\boxed{v(t, x) = \sqrt{\lambda} \cdot u(\lambda t, \sqrt{\lambda} x)}$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \rightarrow v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(1, \frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Buscamos $\phi = \phi(r) / v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ simple

$$v_t = v_{xx} \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = 1$$

$$V_t = \frac{-1/2}{t^{3/2}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{t}} \phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{-1/2}{t^{3/2}} x$$

$$V_{KK} = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$$

$$V_t = V_{KK} \iff \cancel{\frac{-1/2}{t^{3/2}}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}} \phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right] = \cancel{\frac{1}{t^{3/2}}} \phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = r \implies \begin{cases} \phi(r) + r\phi'(r) = -2\phi''(r) \\ (r\phi(r))' \end{cases} \implies r\phi(r) = -2\phi'(r) + C$$

Tomo $C=0$

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{r}{2}\phi \implies \int \frac{d\phi}{\phi} = \int -\frac{r}{2} dr \implies \ln \phi = -\frac{r^2}{4} + C \implies \phi(r) = e^{-\frac{r^2}{4} + C} = k e^{-\frac{r^2}{4}}$$

Para determinar k usamos

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |V(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(r) dr = k \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{r^2}{4}} dr = k \cdot \sqrt{4\pi}$$

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = r$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} dx = dr$$

$$\implies k = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \implies \phi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{r^2}{4}}$$

Núcleo de Gauss-Weierstrass

Solución Fundamental de la
ecuación del calor en \mathbb{R}

$$\implies V(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =: W(t, x)$$

Utilizo esta relación para buscar una solución particular a partir de una función de 1 variable.

$$\lambda = \frac{1}{F} \rightarrow v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{F}} u(1, \frac{x}{\sqrt{F}}) = \frac{1}{\sqrt{F}} \phi(\frac{x}{\sqrt{F}})$$

¿Cuál debe cumplir ϕ para que $v_t = v_{xx}$?

$$v_t = \partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \phi \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) \right) = \frac{-1/2}{\sqrt{F}} \phi' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) + \frac{1}{\sqrt{F}} \phi'' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) \cdot \frac{-1/2}{\sqrt{F}} \cdot x$$

$$v_{xx} = \partial_{xx} (\text{"}) = \frac{1}{\sqrt{F}} \phi'' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right)^2$$

$$v_t = v_{xx} \Rightarrow \frac{-1/2}{\sqrt{F}} \left(\phi' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) + \frac{x}{\sqrt{F}} \phi' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{F}} \phi'' \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right)$$

$$r = \frac{x}{\sqrt{F}} \Rightarrow \underbrace{\phi(r) + r \phi'(r)}_{(r\phi)'} = -2 \phi''(r) \Rightarrow r\phi(r) = -2\phi'(r) + C$$

Tomo $C=0$, pues baso en la particular

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = -\frac{r}{2}\phi \rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi} = \int -\frac{r}{2} dr \Rightarrow \ln \phi = -\frac{r^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = e^{-\frac{r^2}{4} + C} = k \cdot e^{-\frac{r^2}{4}}}$$

Como apriew

$$1 = \int v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{F}} \phi \left(\frac{x}{\sqrt{F}} \right) dx \quad \left. \begin{array}{l} \forall t > 0 \\ \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi(r) dr = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}} k e^{-\frac{r^2}{4}} dr = k \cdot \sqrt{\pi/2}! \quad \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}}$$

↑ (apriew polares \mathbb{R}^2)

En consideración, hemos obtenido la solución particular

$$W(t, x) := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Def La función $W(t, x)$ se denomina núcleo de Gauss-Weierstrass, o solución FUNDAMENTAL de la ec. calor en \mathbb{R} .

Nota:

① Razonando de forma análoga se encuentra la sol. fundamental de la ec. calor en \mathbb{R}^n

$$\hookrightarrow W(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

② El método de autovalores es una técnica útil en otras EDPs, incluso NO-LINEALES (ver ejerc II, ec. medios porosos)

Propiedades de $W(t, x)$

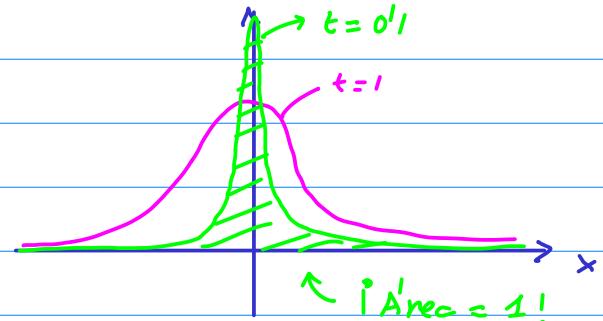
① $W(t, x) \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$

② $W(t, x) > 0 \quad \forall (t, x)$

③ $\int_{\mathbb{R}} W(t, x) dx = 1, \quad \forall t > 0$

④ $W_t = W_{xx}$

⑤ $\lim_{t \rightarrow 0^+} W(t, x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} = " \delta(x) "$

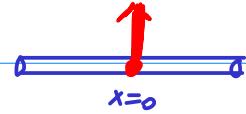


Ej decir, "formalmente", $W(t, x)$ es solución de la EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = \delta(x). \end{cases}$$

Aquí " $f(x)$ " es una temperatura inicial concentrada en $x=0$ y de calor total = 1, es d.

$$\text{Sop } f = \{0\} \text{ y } \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$



los finos llamas $f(x) = \delta$ de Dirac, pero...

ii) No existe ninguna función con esa propiedad !!

Lo para definir f de forma matemáticamente correcta

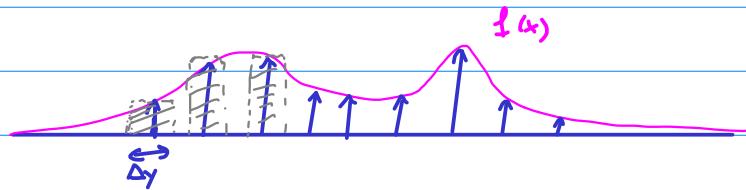
o bien se trabaja con " $f = \lim_{t \rightarrow 0} W(t, \cdot)$ "

o bien se interpreta f como una MEDIDA en \mathbb{R}

(o más general, como una "distribución") \rightarrow Anál. Func.

Nosotros trabajaremos "formalmente" con f para encontrar un candidato a solución general de la ec. calor en \mathbb{R}^2 ...

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$



Imagino le vuéllemos unido de "bolitas" particulares, en posición y_j , y cada una con "calor neto"

$$f(y_j) \Delta y \approx \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} f(y) dy$$

Es decir

$$f(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_j f(y_j) \Delta y \cdot \delta(y - y_j)$$

\curvearrowleft suma de δ 's centradas en y_j

Entonces el candidato a solución

$$u(t, x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_j f(y_j) \Delta y \cdot W(t, x - y_j) =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) W(t, x - y) dy}$$

Aunque la obtención ha sido heurística, se puede demostrar con rigor el siguiente teorema.

Teatrma SOL. EC. CALOR en \mathbb{R}^2 .

Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y ACOTADA. Entonces

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) W(t, x-y) dy, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

donde $W(t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}$, simple

(a) $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$

(b) $u_t = u_{xx}$ en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$

(c) $\lim_{(t, x) \rightarrow (0, x_0)} u(t, x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Es decir, si extendemos $u(0, x) := f(x)$ $\Rightarrow u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R})$,
y resuelve la EDP.

Dem $\textcircled{a} + \textcircled{b}$ se pueden probar pasando derivadas dentro de la integral (de forma justificada).

↳ Ver Lema de Derivación de Integrandos Permitidos

en [Folland, Thm 2.27]. \hookrightarrow (después abrazamos) le pue

(c) necesita justificar el paso al límite

$$\lim_{(t, x) \rightarrow (0, x_0)} \int f(y) W(t, x-y) dy = \int f(y) \delta(x_0 - y) dy = f(x_0)$$

E.g., ver
[Pud, Thm 6.1.1]
[Evans, Th 2.3.1]

Esto lo vemos con detalle y de forma más
que en el blogue II.



Notas:

① La sol gral en la fórmula integral, A veces, se puede calcular EXPLICITAMENTE.

para unos
poras $f(x)$

Ejemplos

$$① f(x) = e^{iax} = \cos(ax) + i \sin(ax)$$



→ completando cuadrados se obtiene

$$u(t, x) = e^{-a^2 t} \cdot e^{iax} \rightarrow \text{Exp 10 a.}$$

$$② f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{\pi a}} = w(a, x)$$



→ completando cuadrados se obtiene

$$u(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(a+t)}}}{\sqrt{\pi(a+t)}} = w(a+t, x) !!$$

↑ a esto se le llama

propiedad de recurrencia

$$\text{En general } u(t+s, x; f) = u(t, x; \underbrace{u(s, \cdot; f)}_{\text{temp sucesa}})$$

(temp sucesa)

↑ temp intermedia.

Dem Teorema

Necesitamos un lema que garantice

$$\partial_t \left[\int_{\mathbb{R}} F(t, y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) dy$$

[Folland, Thm 2.27]

Lema (Derivación de integrales paramétricas)

Sea $F: (a, b) \times Y \rightarrow C$ medible t.g.
 $(t, y) \mapsto F(t, y)$

(i) Si $y \in Y$ fijo entonces $t \in (a, b) \mapsto F(t, y)$ derivable

(ii) $\exists h \in L^1(Y)$ t.g. $\left| \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) \right| \leq h(y)$ {
 $\forall t \in (a, b)$ }

Entonces

$$\frac{d}{dt} \left[\int_Y F(t, y) dy \right] = \int_Y \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) dy \quad \{$$

$\forall t \in (a, b)$

Dem Ver Folland (usar T(D Lebesgue)).

En nuestro caso

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \underbrace{W(t, x-y) f(y)}_{F(t, x, y)} dy$$

Claramente F es medible y $C_{t,x}^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Hay que comprobar la hipótesis (ii), es decir
 mayorar

$$(*) \quad \left| \partial_t^\kappa \partial_x^\ell [w(t, x-y)] \right| \leq h(y) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \{$$

$\forall t \in (t_0, t_1), \forall x \in (-R, R)$

donde $t_0, t_1 > 0$ y $R > 0$ son tiempos.

Con ese radio también $u \in C^\infty((t_0, t_1) \times (-R, R))$,
y haciendo $t_0 \rightarrow 0$, $t_1, R \nearrow +\infty \Rightarrow u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Como $\frac{\partial}{\partial t} w = \partial_{xx}(w) \rightarrow$ puedo quitar las ∂_t^k .

Lema L : $l \in \mathbb{N}_0$, entonces \exists polinomio P_L (grado l)
t.q.

$$\partial_x^l [w(t, x)] = \frac{1}{(r_f)^l} P_l\left(\frac{x}{r_f}\right) w(t, x)$$

Demo ejercicio de inducción.

$\boxed{l=0} \rightarrow$ cierto con $P_0 \equiv 1$

$\boxed{l=n}$ hipótesis cierto

$$\boxed{l=n+1} \quad \partial_x^{n+1} [w(t, x)] = \partial_x (\partial_x^n w(t, x)) = \partial_x \left[\frac{1}{r_f^n} P_n\left(\frac{x}{r_f}\right) w(t, x) \right]$$

$$= \frac{1}{r_f^{n+1}} \left[P'_n\left(\frac{x}{r_f}\right) \cdot \frac{1}{r_f} w(t, x) + P_n\left(\frac{x}{r_f}\right) \cdot w(t, x) \left(-\frac{2x}{r_f^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r_f^{n+1}} \underbrace{\left[P'_n\left(\frac{x}{r_f}\right) - \frac{1}{2} \frac{2x}{r_f^2} P_n\left(\frac{x}{r_f}\right) \right]}_{P_{n+1}\left(\frac{x}{r_f}\right)} w(t, x).$$

$$\text{P}_{n+1}\left(\frac{x}{r_f}\right)$$

□

Ahora probaremos (x)

$$|\partial_t^k \partial_x^n [w(t, x-y)]| = |\partial_x^{n+k} [w(t, x-y)]|$$

lema

$$= \frac{1}{r_f^{n+k}} |P_{n+k}\left(\frac{x-y}{r_f}\right)| \frac{1}{(r_f)^{n+k}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}$$

$$|P_n(z)| e^{-\frac{z^2}{2}} \leq c_n \leq$$

$$c_n \frac{1}{\sqrt{e}^{n+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}$$

$$\begin{aligned}
 I(t, x, y) &= \left(\partial_x^n [w(t, x-y)] \right)^{\text{(Lemma)}} = \frac{1}{\sqrt{t}} |p_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right)| \cdot \frac{e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t}} \leq \\
 &\stackrel{t \in (t_0, t_1)}{\leq} \frac{C_n}{\sqrt{4\pi t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8t_0}} \quad |x-y| > |y| - |x| > |y| - R \\
 &\stackrel{y \in (-R, R)}{\leq} C_{n, t_0} e^{-\frac{(y-R)^2}{8t_1}} \in L^1(R)
 \end{aligned}$$

$\sup_{t \in (t_0, t_1)} |p_n(t)| e^{-\frac{t}{8}} = C_n < \infty$
 $t \in (t_0, t_1)$

$$\left. \begin{array}{l} t \in (t_0, b_1) \\ |x| < R \end{array} \right\} \rightarrow \dots \leq \frac{c_n}{t_0^{\frac{n+1}{2}}} \cdot e^{-\frac{(|y|-R)^2}{8t_1}} \in L^1(\mathbb{R}) !!$$

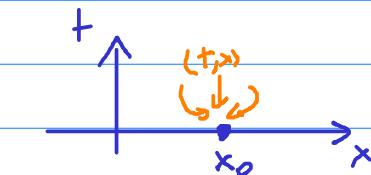
Usando el Lema de Desv de Integ Paramétricas

$$\Rightarrow u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}) \text{ y}$$

$$u_t = \int_{\mathbb{R}} f(y) \partial_t W(t, x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \partial_{xx} W(t, x-y) dy = u_{xx}.$$

→ se cumplen (a) + (b).

Dur c: $\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t,x) = f(x_0)$



Aquí usaremos $f \in C(\mathbb{R}) + \text{ACOTADA}$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon, x_0, f) > 0$ / $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ / $|x - x_0| < \delta$

Entonces

$$|u(t, x) - f(x_0)| \leq |u(t, x) - f(x)| + \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{< \epsilon}$$

Imponemos x : $|x - x_0| < \delta$ es fijo, y vemos

$$|u(t, x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) W(t, x-y) dy - f(x) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-z) W(t, z) dz - f(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} W(t, z) dz}_{=1} \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-z) - f(x)| |W(t, z)| dz$$

Como $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, cumplido y $f \in UC$ en círculos

$$\Rightarrow \exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon, \text{círculo}, f) : |f(x+z) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in \text{círculo}, \forall |z| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |u(t, x) - f(x)| \leq \int_{|z| \leq \delta_1} |f(x-z) - f(x)| w(t, z) dz + \int_{|z| \geq \delta_1} \dots$$

$$\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\int_{|z| \leq \delta_1} w(t, z) dz}_{\leq 1} + 2 \|f\|_\infty \underbrace{\int_{|z| > \delta_1} w(t, z) dz}_{I(t)}.$$

Por ultimo

$$I(t) = \int_{|z| > \delta_1} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dz = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{|s| > \frac{\delta_1^2}{4t}} e^{-s^2} ds \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$$

$\text{C.V. } \frac{z}{\sqrt{4t}} = s$

$$\Rightarrow \exists t_0 = t_0(\varepsilon, \delta_1) > 0 \quad / \quad I(t) < \varepsilon \quad \forall t \in (0, t_0).$$

Con conclusiones, si $|x - x_0| < \delta_0$, $t \in (0, t_0)$

$$\Rightarrow |u(t, x) - f(x_0)| < \delta \cdot \varepsilon.$$



Nota :

① El Teorema anterior sólo da existencia de solución para la ecuación en \mathbb{R}^2 .

¿Hay unicidad?

Tm 2 (A. Tychonoff, 1935).

$$\exists v(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \begin{cases} v_t = v_{xx} \text{ en } (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ v(0, x) = 0 \end{cases}$$

↳ ¡no hay unicidad en general! → ver [Peral, 5.1.8]

Para tener unicidad es necesario imponer condiciones de no crecimiento cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Teatrmo 3 de unicidad de Tydmonoff

Si $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C([0, \infty) \times \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) \equiv 0 \\ |u(t, x)| \leq C e^{a|x|^2} \end{cases} \quad \text{C.C. en } t \geq 0$$

entonces $u(t, x) \equiv 0$.

Vu t Pnd, Tma 6.4.1] o [Evans, Th 2.3.6].

Se demuestra usando Pgios del m醩imo en
subdominios de $(0, \infty) \times \mathbb{R}$...

5.2.4.- Resumen de propiedades de la ex. calor

$$\text{Sea } \begin{cases} u_t = u \times x & (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \rightarrow u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) W(t, x-y) dy$$

① Regulation and

$u \in C^{\omega}((0, \infty) \times \mathbb{H}^3)$ symmetric $\left(\text{basta f' antisim., o inclusivo menor} \right)$

③ Velocidad propagación infinita

$$\text{L} \quad f \geq 0 \Rightarrow \sup_{t \geq 0} u(t, \cdot) = M$$



También $f \neq 0$, pues de hecho $u(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$
 (en la derivación integrales paramétricas)

③ Irreversibilidad en t

Si $u(0, x) = f(x)$ \longrightarrow pero do n'aller $u(t, x)$, $t > 0$
 si pero NO $u(t, x)$, $t < 0$!!

④ Desarrollo en t (difusión)

Impover giv $f \in L^1(\mathbb{R})$, da $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$.

Por un lado

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = ct \quad \forall t > 0$$

↑ (color roto en la variable es ct)

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y) W(t, x-y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} W(t, x-y) dx \right] dy$$

Fubini

$$\begin{aligned} & f \in L^1(\mathbb{R}) \\ & \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right) \quad \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \\ & Q(t) = e^{t\hat{f}} \end{aligned}$$

$f(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|u(t, x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int f(x) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t, x) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} \dots \textcircled{4}$$

$$\text{Por otro lado } \|u(t, x)\| \leq \frac{\|f\|_L^1}{\sqrt{t} \pi} = \frac{C_1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

la temperatura puntual tiende a 0

→ el calor se "difunde" por todo la arena
y decae como $1/\sqrt{t}$ si $t \rightarrow \infty$.

⑤ No unicidad

Por el ejemplo de Tikhonoff, la ec calor NO tiene unicidad,
solvo que pongamos alguna condición en $|x| \rightarrow \infty$.

⑥ Otras : Pprio Máximo, Decay energía → ver § 2.2.

↳ Ver compacta en Strauss, pag 54.

2.5 COMPARISON OF WAVES AND DIFFUSIONS

We have seen that the basic property of waves is that information gets transported in both directions at a finite speed. The basic property of diffusions is that the initial disturbance gets spread out in a smooth fashion and gradually disappears. The fundamental properties of these two equations can be summarized in the following table.

Property	Waves	Diffusions
(i) Speed of propagation?	Finite ($\leq c$)	Infinite
(ii) Singularities for $t > 0$?	Transported along characteristics (speed = c)	Lost immediately
(iii) Well-posed for $t > 0$?	Yes	Yes (at least for bounded solutions)
(iv) Well-posed for $t < 0$?	Yes	No
(v) Maximum principle	No	Yes
(vi) Behavior as $t \rightarrow +\infty$?	Energy is constant so does not decay	Decays to zero (if ϕ integrable)
(vii) Information	Transported	Lost gradually

TEMA 3 La ecuación de Laplace.

Recordar $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2 = \underline{\text{laplaciano en } \mathbb{R}^n}$.

Def. Decimos que $u : \overset{\text{ab}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$ es ARMÓNICA en Ω ,
siendo $u \in \text{Harm}(\Omega)$, cuando

$$u \in C^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Ejemplos

① Si $n=1$ entonces $u \in \text{Harm}(\mathbb{R}) \iff u(x) = A + Bx$ ← directo!

② En \mathbb{R}^2 hay muchos más ejemplos:

"Si $F \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \implies u = \operatorname{Re} F, v = \operatorname{Im} F \in \text{Harm}(\mathbb{R})"$

Prueba usando $C-R$ $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y \\ = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0. \quad \square \end{cases}$

Nota: Si $\Omega = \text{domínio convexo}$ el recíproco es cierto

"Si $u \in \text{Harm}(\Omega) \implies \exists F \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) / u = \operatorname{Re} F."$

Prueba Buscar referencia en un libro de V. C.

(o demostrar en mano si $\Omega = \text{polo o rectángulo}$) □

③ Ejemplos de $u \in \text{Harm}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{array}{ll} \bullet u(x,y) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2) & \bullet u(x,y) = e^x \cdot \cos y = \operatorname{Re}(e^z) \\ \bullet u(x,y) = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(z^3) & \bullet u(x,y) = \log(x^2 + y^2) \\ & \text{Ley } \text{Harm}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \end{array}$$

④ En \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, hay aún más ejemplos...

$$\bullet u(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha}} \in \text{Harm}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \iff \alpha = n-2 \quad (\text{grac 1})$$

$F \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F(x, y) &\Rightarrow \operatorname{Re} F = u \in \operatorname{Har}(\Omega) \\ z = x + iy & \quad \operatorname{Im} F = v \in \operatorname{Har}(\Omega) \end{aligned}$$

Dem

for Cauchy-Riemann, we have $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x - (v_x)_y = 0 //$$

$$\Delta v = 0 //$$

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad u(v, y) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2) \in \operatorname{Har}(\mathbb{R}^2)$$

$$u(v, y) = 2vy = \operatorname{Im}(z^2)$$

$$\textcircled{2} \quad u(v, y) = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(z^3)$$

\rightarrow hay polinomios armónicos de todos los grados

$$\textcircled{3} \quad u(v, y) = c^x \cos y = \operatorname{Re}(e^z)$$

$$\textcircled{4} \quad u(v, y) = \log(x^2 + y^2) = \operatorname{Re}(\log z) \in \operatorname{Har}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

Si Ω es simplemente conexo y acotado (Ω)

entonces

$$\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) \mid u = \operatorname{Re}(F)$$

Ahora

Caso $\Omega = \text{disco o rectángulo}$

$$\text{busco } v \mid u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$$

O sea, busco v tal que

$$v_y = u_K \int_0^y ds \quad v(x,y) = \int_0^y u_x(x,s) ds + G(x)$$
$$v_K = -u_y$$

$$\rightarrow v_K(v_y) = \int_0^x u_{xx}(x,s) ds + G'(x) = -u_y(v_y)$$

II \leftarrow u armónica

$$- \int_0^y u_{yy}(x,s) ds = -u_y(x,y) + u_y(x,0)$$

$$\rightarrow C'(x) = -u_y(x,0)$$

$$\rightarrow C(x) = - \int_0^x u_y(r,0) dr + K$$

$$\rightarrow v(x,y) = \int_0^y u_x(x,s) ds - \int_0^x u_y(r,0) dr + G$$

- Hallar todos los polinomios anómicos en \mathbb{R}^3 , que sean homogéneos de grado 2

$$P(x, y, z) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot zx$$

L: $P_n = \{ \text{polinomios homogéneos de grado } n \text{ en } \mathbb{R}^3 \}$

$$\Rightarrow \dim P_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

como $\Delta: P_n \rightarrow P_{n-2} \Rightarrow \dim(\ker \Delta) \geq \dim P_n - \dim P_h$

$$\Rightarrow \dim P_n^{\text{Hau}} \geq 2n+1. \quad (\text{de hecho } "=") \quad (\text{ver Ej 1c})$$

§ 3.1. - Interpretación física

I. - Problema del calor estacionario

Para el problema de propagación del calor en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

se $\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \leftarrow \text{cond contorno} \\ u(0, \cdot) = f \leftarrow \text{temp inicia} \end{array} \right.$

¿Cuál será la temperatura de equilibrio, $\bar{u}(x)$, cuando $t \rightarrow \infty$?

Se puede probar que debe cumplir $\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} = 0 \text{ en } \Omega \\ \bar{u}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{array} \right.$

→ La funciones anómicas se pueden interpretar como temperaturas en equilibrio.

→ Tienen propiedades que recuerda (proporcionan, tienen sentido físico en este contexto).

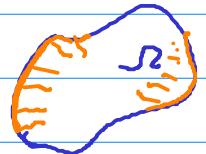
II. Tres problemas clásicos sobre la ec. Laplace

(1) Problema de DIRICHLET

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω , cuando se fija un dato φ en $\partial\Omega$.



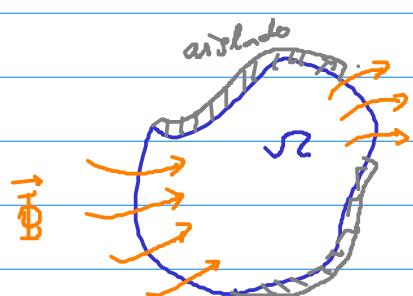
(2) Problema de NEUMANN

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

fluido calor entrante

Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω , cuando se fija un flujo de calor entrante.



(2 bis) Problema de Robin

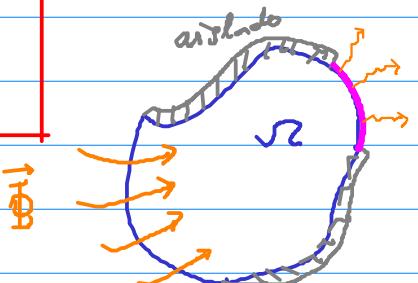
Si dices con

$$\begin{cases} \Delta u = \delta \text{ en } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} + \gamma u = \varphi \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

fluido calor saliente =
 $-\nabla u \cdot \vec{n} = \underline{\gamma u} - \varphi$

$\delta \cdot (u - 0) = \text{diferencia con temp exterior}$

es más general que (2) (caso $\gamma = 0$)



(8) Ecuación de Poisson

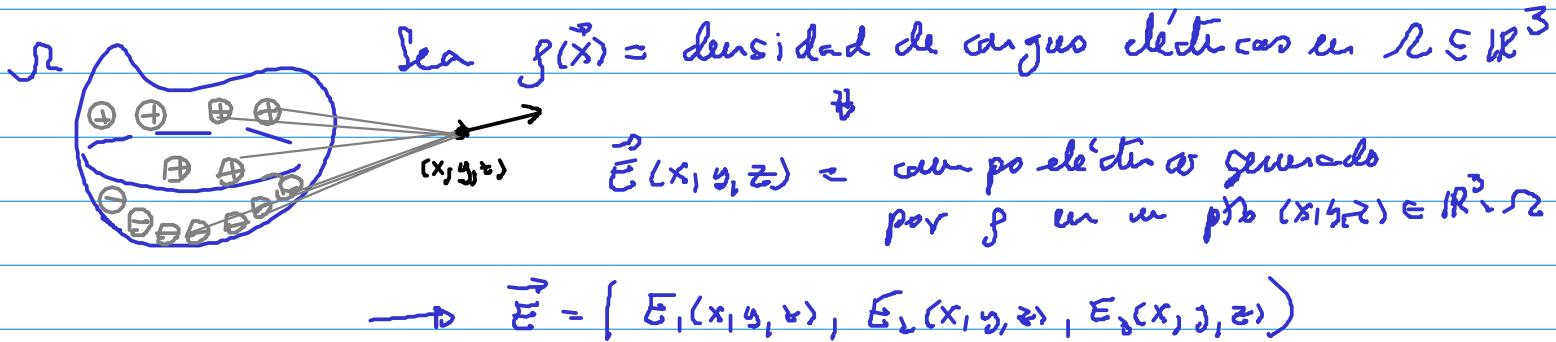
Dado $f \in C(\mathbb{R})$, hallar $u \in C^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ /

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \mathbb{R} \\ u|_{\partial \mathbb{R}} \equiv 0 \end{cases}$$

Es la versión no homogénea de (1).

→ tiene varias interpretaciones importantes en Física...

III.- Interpretación 3: Potencial electrostático



Q : ¿Podemos determinar \vec{E} a partir de g ?

Ley de Gauss "El flujo neto de \vec{E} saliente a través de ∂B es proporcional a la carga total dentro de B "

$$\text{Flujo saliente} = \int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_B g(x) dx$$

↑ permitividad eléctrica
en vacío $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

$$\Rightarrow \int_B \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_B g$$

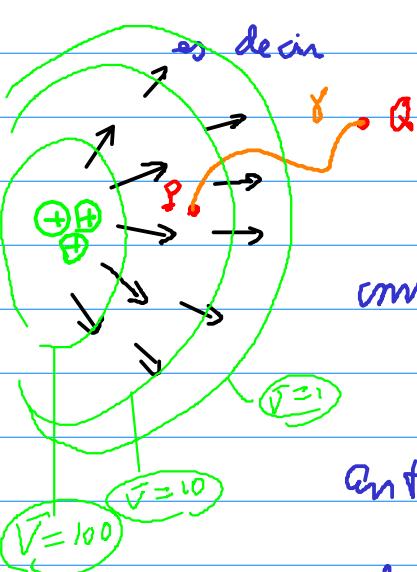
↑ solo B

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot g \quad (\text{Ley 1 de Maxwell})$$

Este EDP tiene 3 incógnitas E_1, E_2, E_3, \dots

→ necesita otra hipótesis física

Ley 2: "los campos ELECTROSTÁTICOS son conservativos"



$$W_{P \rightarrow Q} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{solo depende de } P, Q \\ \text{¡no del trayecto!}$$

Un Tmz de FVV 3 considera esta propiedad

$$\text{como } \exists \vec{V}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ / }$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

∇V = potencial electrostático

Entonces la EDP tiene 1 sola incógnita V ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\nabla V) = -\Delta V = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot f$$

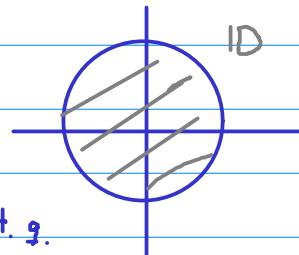
Por tanto, un problema del potencial consiste en resolver

$$\begin{cases} \Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} f & \text{en } \mathbb{R} \\ V|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad \rightarrow \text{ec de Poisson.}$$

(Hay tb soluciones en \mathbb{R}^n , $\sigma = \dots$)

3.2.- Resolución del Problema de Dirichlet en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$



Dado $\varphi \in C(\partial\Omega)$, buscamos $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ t.g.

$$(P_D) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Pasamos la EDP a coordenadas polares

Definimos

$$v(r, \theta) := u(x, y)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow v_r = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$v_{rr} = u_{xx} \cdot \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cdot \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \cdot \sin^2 \theta$$

$$v_\theta = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = u_x \cdot (-r \sin \theta) + u_y \cdot (r \cos \theta)$$

$$v_{\theta\theta} = u_{xx} \cdot r^2 \sin^2 \theta + u_{xy} (-r \sin \theta) \cdot (r \cos \theta) + u_{yy} (-r \cos \theta)$$

$$+ u_{yx} (r \cos \theta) (-r \sin \theta) + u_{yy} \cdot r^2 \cos^2 \theta + u_{yy} \cdot (-r \sin \theta)$$

$$\Rightarrow v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r = u_{xx} + u_{yy}$$

Por tanto, hemos probado

Lema: En coordenadas polares en \mathbb{R}^2

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u|_{\partial D} = \varphi \end{cases}$$

Vamos a transformar a coord polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & r \in (0,1) \\ y = r \sin \theta & \theta \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\text{Llamamos } v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\rightarrow V_r = u_x \frac{\partial}{\partial r} + u_y \frac{\partial}{\partial \theta} = u_x \cancel{\cos \theta} + u_y \cancel{\sin \theta}$$

$$V_{rr} = u_{xx} \cdot \cos^2 \theta + \cancel{2u_{xy} \cdot \cos \theta \sin \theta} + u_{yy} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow V_\theta = u_x (-r \sin \theta) + u_y (r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} V_{\theta\theta} = & u_{xx} (-r \sin \theta)^2 + u_{xy} (-r \sin \theta) (\cancel{r \cos \theta}) + u_x (-r \cos \theta) \\ & + u_{yx} (\cancel{r \cos \theta}) (-r \sin \theta) + u_{yy} (r \cos \theta)^2 + u_y (-r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$V_{rr} + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r} V_r = u_{xx} + u_{yy}$$

Lema

El Laplaciano en \mathbb{R}^2 en coordenadas polares se escribe

$$V_{rr} + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r} V_r$$

Ejercicio

Giveno $\nabla u = (u_x, u_y)$ en polares

Por tanto, buscamos $v(r, \theta)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0, \quad (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \\ v(1, \theta) = b(\theta), \quad \theta \in (0, 2\pi) \\ v \text{ 2}\pi\text{-periódica en } \theta \\ \exists \lim_{r \rightarrow 0^+} v(r, \theta) \end{array} \right.$$

Separación de variables

buscamos $v(r, \theta) = R(r)G(\theta) \neq 0$

$$R'' \cdot G + \frac{1}{r} R' G + \frac{1}{r^2} R \cdot G'' = 0 \xrightarrow{\cdot \frac{r^2}{R G}} \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = - \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} \equiv cte = \rho$$

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) = \rho R(r) \\ \exists R(0^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G''(\theta) = -\rho G(\theta) \\ G \text{ 2}\pi\text{-periódica} \\ \downarrow \\ G(0) = G(2\pi) \\ G'(0) = G'(2\pi) \end{cases}$$

Empezamos con ①

$$\boxed{\rho = -d^2 < 0} \rightarrow G'' = d^2 G \rightarrow G(\theta) = A \sin(d\theta) + B \cos(d\theta) \rightarrow A = B = 0 \quad \cancel{\text{if } G \text{ 2}\pi\text{-periódica}}$$

$$\boxed{\rho = d^2 > 0} \rightarrow G'' = -d^2 G \rightarrow G(\theta) = A \cos(d\theta) + B \sin(d\theta)$$

$$\stackrel{G(0)=G(2\pi)}{\rightarrow} A = A \cos(2\pi d) + B \sin(2\pi d)$$

$$\stackrel{G'(0)=G'(2\pi)}{\rightarrow} B = -A \sin(2\pi d) + B \cos(2\pi d)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1-\cos(2\pi\vartheta)) - B\sin(2\pi\vartheta) = 0 \\ A\cdot\sin(2\pi\vartheta) + B(1-\cos(2\pi\vartheta)) = 0 \end{array} \right\}$$

Bisecante solvendo cas (A,B) ≠ (0,0)

$$\rightarrow \det(\dots) = (1-\cos(2\pi\vartheta))^2 + (\sin(2\pi\vartheta))^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(2\pi\vartheta) = 1 \\ \sin(2\pi\vartheta) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{dg H}$$

Ahi,

$$\boxed{G_n(\vartheta) = A_n \cos(n\vartheta) + B_n \sin(n\vartheta)}$$

$$g = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vamos a probar ①

$$\text{Ponemos } \boxed{g = f_n = n^2} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$r^2 R'' + r R' = n^2 R$$

$$\boxed{n=0} \quad r^2 R'' + r R' = 0 \rightarrow r R'' + R' = 0 \rightarrow (r R')' = 0 \rightarrow r R' = A \rightarrow R' = \frac{A}{r}$$

$$\rightarrow R = A \cancel{\log(r)} + B$$

porque $\exists \lim_{r \rightarrow 0^+}$

$$\boxed{n > 0} \quad r^2 R'' + r R' = n^2 R$$

buscamos soluciones $R(r) = r^\gamma$

$$r^2 \cdot (\gamma(\gamma-1) \cdot r^{\gamma-2}) + r(\gamma r^{\gamma-1}) = n^2 r^\gamma \rightarrow \gamma(\gamma-1) r^\gamma + \gamma r^\gamma = n^2 r^\gamma$$

$$\rightarrow \gamma(\gamma-1) + \gamma = n^2 \rightarrow \gamma^2 = n^2 \rightarrow \boxed{\gamma = \pm n}$$

$$\rightarrow \text{la solucion general es } R(r) = \cancel{A r^{-n} + B r^n}$$

$\exists R(0^+)$

Y grade

$$R_n(r) = B_n r^n$$

for b ge b solution general to EDP as

$$v(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

$$\varphi(\theta) = v(1, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Using orthogonality $\rightarrow A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta$

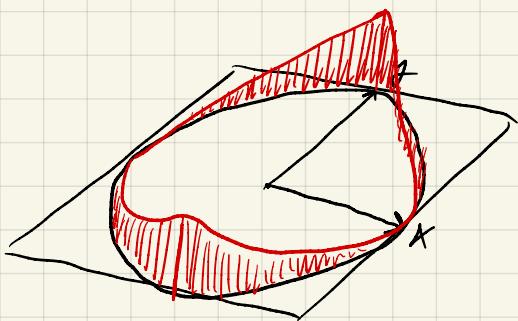
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

n > 1

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Example

$$\varphi(\theta) = \sin^2(\theta)$$



$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \quad A_1 = -\frac{1}{2} \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, 1$$

$$B_n = 0, \quad n \neq 0$$

$$\rightarrow v(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2 \cos(2\theta)}{2}$$

Ahora busco soluciones de

$$(PD) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0 \quad , \quad (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi), \\ V(1, \theta) = \varphi(\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{cond contorno}$$

Aplico separación de variables: busco solución del tipo

$$V(r, \theta) = R(r) \cdot G(\theta) \quad (\neq 0)$$

$$\rightarrow R''(r) \cdot G(\theta) + \frac{R'(r)}{r} \cdot G(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \cdot G''(\theta) = 0$$

$$\times \frac{r^2}{R \cdot G} \rightarrow r^2 \cdot \frac{R''}{R} + r \cdot \frac{R'}{R} = - \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \text{cte} = f$$

Obtengo 2 EDOs

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} G''(\theta) = -f G(\theta) \\ G = 2\pi\text{-periódica} \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 R''(r) + r R'(r) = f R(r) , \\ r \in (0, 1) \\ \exists R(0+) \end{array} \right.$$

Resolvemos (1)

$$\boxed{\text{caso 1}} \quad , \quad \boxed{f = -\lambda^2 < 0} \quad \rightarrow \quad G''(\theta) = \lambda^2 \cdot G(\theta) \rightarrow G(\theta) = A \sin(\lambda \theta) + B \cos(\lambda \theta)$$

$$\boxed{\text{probar } G(0) = G(2\pi) \quad \text{y} \quad G'(\theta) = G'(2\pi)} \quad \not\rightarrow \quad \text{No son } 2\pi\text{-periódicas salvo } A=B=0 \quad \not\rightarrow$$

$$\underline{\text{caso 2}} : \boxed{f=0} \quad \rightarrow \quad G''(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad G(\theta) = A + B\theta$$

$$G(0) = G(2\pi) \rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\rightarrow \lambda_0 = 0, \quad G_0(\theta) = 1 \quad \text{es posible soler.}$$

$$\text{Uso 3} \quad f = \lambda^2 > 0 \rightarrow f''(0) = -\lambda^2 f(0) \rightarrow f(0) = A \cos(\lambda 0) + B \sin(\lambda 0)$$

$$f(0) = f(2\pi) \rightarrow A = A \cos(2\pi\lambda) + B \sin(2\pi\lambda)$$

$$f'(0) = f'(2\pi) \rightarrow B \cancel{x} = -A \cancel{x} \sin(2\pi\lambda) + B \cancel{x} \cos(2\pi\lambda)$$

$$\Rightarrow (1 - \cos 2\pi\lambda) \cdot A - \sin(2\pi\lambda) \cdot B = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Mejorar } | \cdot | = 0$$

$$\sin 2\pi\lambda \cdot A + (1 - \cos 2\pi\lambda) \cdot B = 0$$

para que \exists sol $(AB) \neq 0$

$$\Rightarrow (1 - \cos 2\pi\lambda)^2 + (\sin 2\pi\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\pi\lambda = 1 \\ \sin 2\pi\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = n \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow f = n^2 \quad y \quad f_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Resolvemos ahora

$$(2) \quad r^2 \cdot R''(r) + r \cdot R'(r) = n^2 \cdot R(r)$$

$$\text{Uso } n=0 \quad r \cdot R'' + R' = 0 \Rightarrow (rR')' = 0$$

$$\Rightarrow rR' = c \Rightarrow R' = \frac{c}{r} \Rightarrow R = c \ln r + b$$

$$\text{Como queremos que } \exists R(0^+) \Rightarrow c=0 \Rightarrow \boxed{R_0(r)=b}$$

$$\text{Uso } n \geq 1 \quad r^2 R'' + r R' = n^2 R$$

Buenas soluciones del tipo $R(r) = r^\gamma$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2} + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} = n^2 \cdot r^\gamma \Rightarrow \gamma \cdot (\gamma-1) + \gamma = n^2$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = n^2 \Rightarrow \boxed{\gamma = \pm n}$$

$$\Rightarrow R(r) = a \cdot r^n + b \cdot r^{-n} \xrightarrow{\exists R(0^+)} a=0, \boxed{R_n(r) = b_n \cdot r^n}$$

Podemos que el candidato a solución general es

$$\boxed{U(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))}$$

$$\xrightarrow[r=1]{} \varphi(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Usando ortogonalidad podemos determinar A_n, B_n

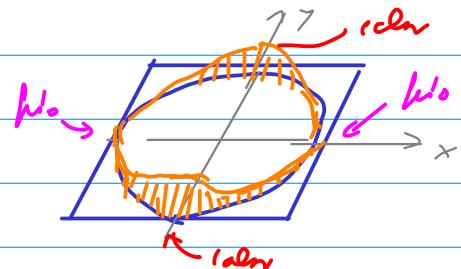
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

$$n \geq 1.$$

Ejemplo: Suponer temperatura en DD, $\varphi(\theta) = \sin^2 \theta$

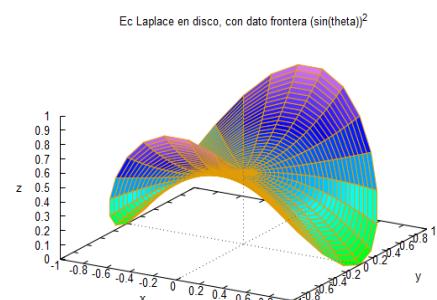
$$\Rightarrow \varphi(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad \begin{cases} A_n = 0 & n \neq 0, 2 \\ B_n = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow U(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} \cos(2\theta)$$

Dibujando en Máximo



→ notar Máx / Min / Pto medio ...

Ejercicio 2 : Resolver el problema de Neumann

→ otras ecuaciones, con Cond Gnt

$$V_r(1, \theta) = \varphi(0)$$

$$\boxed{\text{NOTA en 2D}}$$

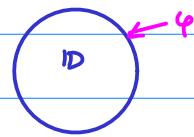
$$\vec{n}(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$V_r = u_x \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} = u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta = \nabla u \cdot \vec{n}$$

3.3.- El vídeo de Poisson

Recordan que (P.D)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$



tiene como candidato a solución en polares la serie

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

El objetivo es encontrar una fórmula integral explícita

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) P(r, \theta-s) ds$$

cond. contorno vídeo

Para ello escribimos la serie trigonométrica en "forma compleja", es decir:

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(r, \theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[A_n \frac{e^{ino} + e^{-ino}}{2} + B_n \frac{e^{ino} - e^{-ino}}{2i} \right] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{A_n - iB_n}{2} e^{ino} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-ino} \right] \\ &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d_n e^{ino} + \sum_{m=-\infty}^{-1} r^{|m|} d_m e^{im\theta} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m \cdot r^{|m|} e^{im\theta}. \end{aligned}$$

los coeficientes d_m se calculan usando

$$\xrightarrow{r=1} u(1, \theta) = \varphi(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m e^{im\theta}$$

serie de Fourier compleja de φ

Lema 1
$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \bar{e}^{-ino} d\theta = \delta_{m,n}}$$

Demo ejercicio elemental.

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

$$V(1,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[A_n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + B_n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{A_n - iB_n}{2} e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-in\theta} =$$

$$\begin{aligned} n &= m, \\ \sum_{m=1}^{\infty} r^{|m|} q_m e^{im\theta} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad \leftarrow \text{Sol de PD en forma compleja}$$

$$\xrightarrow{r=1} V(1,\theta) = \ell(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m e^{im\theta}$$

Para determinar q_m .

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ell(\theta) e^{-im\theta} d\theta}_{\langle \ell, e^{-im\theta} \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n e^{in\theta} \right) e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

a través del
conjunto para que
se difieran positivamente



$$q_n = \langle \ell, e^{-in\theta} \rangle = \int_0^{2\pi} \ell(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

But cannot use formula integral part

$$V(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m r^{|m|} e^{im\theta} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-is} ds \right) r^{|m|} e^{im\theta}$$
$$= \int_0^{2\pi} \varphi(s) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im(\theta-s)} \right) ds$$

$\underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im(\theta-s)}}_{\rho(r, \theta-s)}$

De aquí sigue, por ortogonalidad,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) e^{-in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{im\theta} \right) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{a_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = a_n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \hat{q}(n) \quad \begin{cases} \leftarrow n\text{-ésimo coeficiente de Fourier de } q \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ahora escribimos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{in} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} q(s) e^{-ins} ds}_{P(r, \theta-s)} \cdot e^{in\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} q(s) \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{in} e^{in(\theta-s)} \right)}_{P(r, \theta-s)} ds \end{aligned}$$

Def : Llamamos número de Poisson en 1D a la función

$$P(r, \theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{in} e^{in\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Lema 2

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

Demo :

$$P(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m e^{-im\theta}$$

$$\text{z := } r e^{i\theta} \rightarrow = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{z^m}$$

$$\text{z := } r e^{i\theta} \rightarrow = \frac{1}{1-z} + \left(\frac{\overline{z}}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1-\bar{z} + \bar{z}(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

$$= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} \rightarrow 1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re} z$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad \blacksquare$$

Propiedades

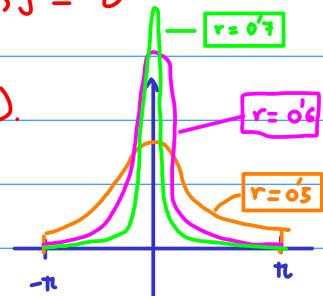
① $P(r, \theta) > 0$ en ID

② $P \in C^\infty(\text{ID})$

③ $\Delta P = (\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}) [P(r, \theta)] = 0$

④ $\int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = 1, \quad \forall r \in [0, 1].$

⑤ $\lim_{r \rightarrow 1^-} P(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \sim \theta \neq 0 \\ +\infty & \sim \theta = 0. \end{cases}$



Por tanto $P(r, \theta) \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{\text{"delta-like"}}$.

Demo:

①+② Usan $P(r, \theta) = \frac{1-|z|^2}{1-r^2}, \quad z=re^{i\theta} \in \text{ID}. \quad \hookrightarrow \text{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

③ Usan $P(r, \theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n = 1 + 2 \text{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right)$
 $\hookrightarrow z \in \text{Ma(ID)}.$

④ Usar la serie

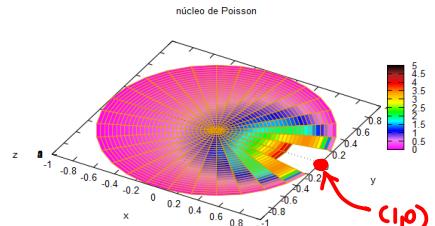
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \right) d\theta = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta}_{\delta_{n,0}} = 1. \end{aligned}$$

⑤ Del punto 2, $P(r, \theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \frac{0}{2-2 \cos \theta} = 0 \quad \text{si } \theta \neq 0$

Y $\theta = 0 \Rightarrow P(r, 0) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \frac{2}{0} = +\infty$

Formalmente, $P(r, \theta)$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en ID} \\ u|_{\partial \text{ID}} = \delta_{(1,0)} \end{cases}$$



Teorema Solución de PD en ID

Sea $\varphi \in C(\partial D)$. Entonces

$$u(re^{i\theta}) := \int_0^{\pi} \varphi(e^{is}) \cdot P(r, \theta-s) ds, \quad re^{i\theta} \in D$$

cumple

$$(1) \quad u \in C^1(D)$$

$$(2) \quad \Delta u = 0 \text{ en } ID$$

$$(3) \quad \lim_{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta_0}), \quad \forall \theta_0$$

$$\text{Es decir } u|_{\partial D} = \varphi \Rightarrow u \in C(\overline{D}).$$

Nota:

(1) La demostración es similar al Thm del Thm 2.3
(usan lema Deriv de Int. Parciales + cont. uniforme)

(2) Este Thm implica un Prio del Máximo y Mínimo

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{\pi} \varphi(s) P(r, \theta-s) ds \leq (\max \varphi) \underbrace{\int_0^{\pi} P(r, \theta-s) ds}_{(1) \text{dado} \geq (\min \varphi) \cdot \frac{\pi}{2}}$$

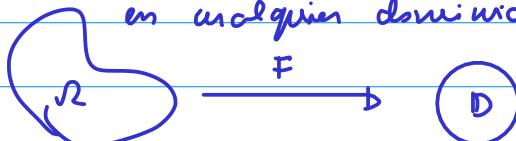
$$\Rightarrow \min_{\partial D} u \leq u(re^{i\theta}) \leq \max_{\partial D} u$$

$$\Rightarrow \min_{ID} u = \min_{\partial D} u \quad y \quad \max_{ID} u = \max_{\partial D} u$$

(3) Tb implican regularidad (en particular, unicidad)

$$\text{~} \begin{cases} \Delta u^{(1)} = 0 \\ u^{(1)}|_{\partial D} = \varphi^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \sup_{ID} |u^{(1)} - u^{(2)}| \leq \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{\infty}.$$

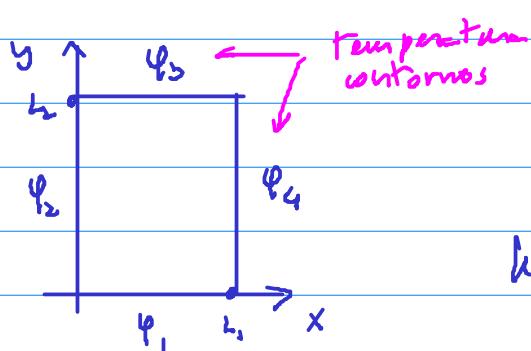
(4) Usando aplicaciones biholomorfas $F : \Omega \rightarrow D$
se puede probar la resolubilidad de Probl. Dirichlet
en cualesquier dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexo



← Ver Thm Aplicación de Riemann
en Variables Complejas

Ejemplo 5 : Problema de Dirichlet en rectángulo

$[0, L_1] \times [0, L_2]$



Buena $u(x_1, 0) + g$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial R} = \varphi \end{array} \right.$$

Hipótesis $\varphi_0 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$, $\varphi_1 = f(x)$.

Buena forma solucion $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Notar que las cond. contorno implican $u(0, y) = u(L_1, y) = 0$, $u(x, L_2) = 0$

$$\Rightarrow X(0) = X(L_1) = 0, \quad Y(L_2) = 0.$$

$$\rightarrow X''Y + X \cdot Y'' = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv c_0 = f$$

Plantearas los EDOS

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} X'' = fX \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} Y'' = -fY \\ Y(L_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{caso } f = \lambda^2 > 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' = \lambda^2 X \rightarrow X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow A = B = 0.$$

$$\boxed{\text{caso } f = 0}$$

idea

$$\boxed{\text{caso } f = -\lambda^2 < 0}$$

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$X(0) = 0 = A$$

$$X(L_1) = 0 = B \sin(\lambda L_1) \Rightarrow \lambda L_1 \in \pi \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L_1}, \quad X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \quad n=1, 2, \dots$$

Paramos en (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'' = -fY = \lambda^2 Y \rightarrow Y(L_2) = A \sin(\lambda L_2) + B \cos(\lambda L_2) \\ Y(L_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$= B \sin(\lambda(L_2 - 0)) + B \cos(\lambda(L_2 - 0))$$

$$\Rightarrow y(L_2) = 0 = \tilde{A} \Rightarrow Y_n(y) = \tilde{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}(L_2 - y)\right)$$

$$= \tilde{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}(L_2 - y)\right)$$

En total, la sol general que da

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}(L_2 - y)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)$$

Para determinar los b_n usamos la CC

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right).$$

Por la DG de las series seno

$$\int_0^{L_1} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi L_2}{L_1}\right) \cdot \underbrace{\int_0^{L_1} \sin\frac{m\pi x}{L_1} \sin\frac{n\pi x}{L_1}}_{=0 \text{ } m \neq n}$$

$$= b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi L_2}{L_1}\right) \cdot \frac{L_1}{2}$$

$$= \frac{L_1}{2} \text{ } m = m$$

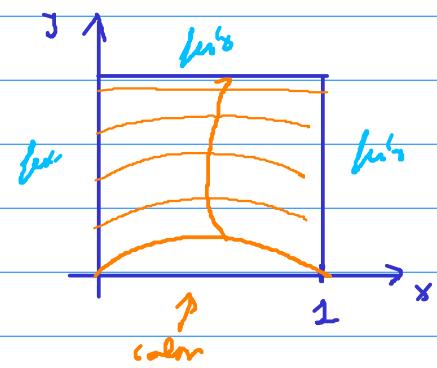
$$\Rightarrow b_m = \frac{2/L_1}{\sin(m\pi L_2/L_1)} \int_0^{L_1} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right) dx$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Ejemplos concretos $L_1 = L_2 = 1$

$$\text{D) } \psi_1(x) = \sin(\pi x) \rightarrow \begin{cases} b_n = 0, & n \geq 2 \\ b_1, \sin \pi = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{m\pi} \cdot \sin(\pi x) \sin(\pi(1-y))$$

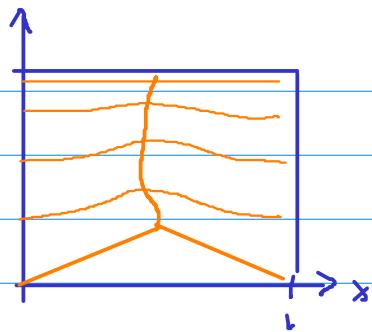


$$\textcircled{3} \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{l}{2} \\ 2(l-x), & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

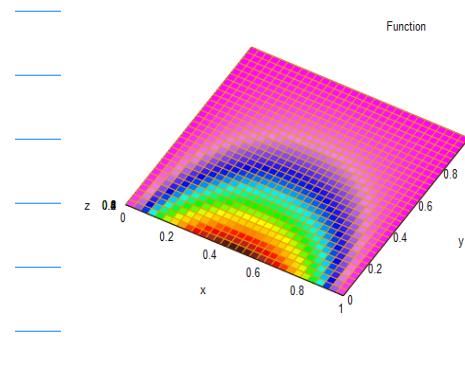
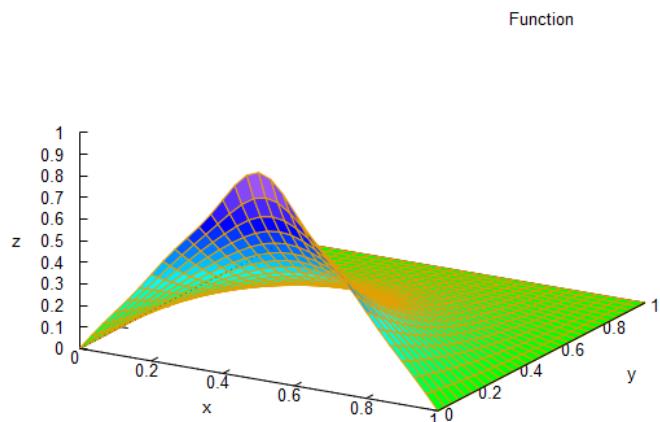
Ahora $b_n = \frac{2}{\pi n (l \cdot 2)} \int_0^l \varphi_1(x) \sin(n \pi x) dx$

$$= \frac{2}{\pi n (l \cdot 2)} \cdot 4 \underbrace{\sin\left(\frac{n \pi x}{2}\right)}_{\pi^2 n^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 & n \in 2\mathbb{Z} \\ (-1)^n \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$



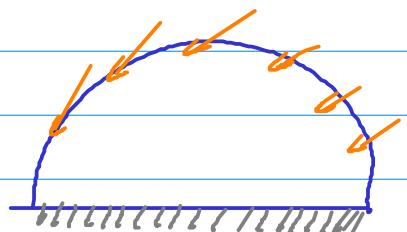
$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\sin((2n+1)\pi x) \cdot \sin((2n+1)\pi(y-l))}{\sin((2n+1)\pi l)}$$



Ejercicios : practicar ejercicios 3, 4, 5 (vectores polares)

Más ejemplos : ec Laplace en semicírculo

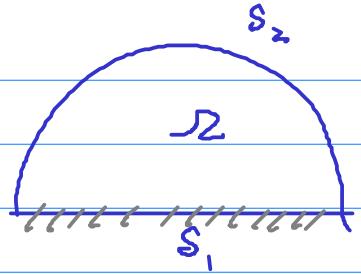
Suponer placa semicircular aireada por debajo,
y con flujo entrante conocido ψ por arriba



Ecuación $u(x, y) = \psi(r, \theta)$ en polares

$$\Rightarrow \Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla u \cdot \vec{n} = \varphi_1 \text{ em } S_1, \\ \nabla u \cdot \vec{n} = \varphi_2 \text{ em } S_2 \end{array} \right.$$



$$\bullet \text{ Em } S_1 \Rightarrow \vec{n} = (0, -1) \Rightarrow \nabla u \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Usando $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) \Rightarrow v_\theta = u_x (-r \sin \theta) + u_y (r \cos \theta)$

$$\text{Em } S_1 \quad \theta \in [0, \pi] \Rightarrow v_\theta = \pm r \cdot u_y = 0$$

$$\Rightarrow v_\theta(r, 0) = v_\theta(r, \pi) = 0$$

$$\bullet \text{ Em } S_2 = \partial D \Rightarrow \vec{n} = (u \cos \theta, u \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \nabla u \cdot \vec{n} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = v_r$$

$$\Rightarrow v_r(1, \theta) = \varphi(\theta)$$

cond
conform)

Ahora resolvemos la EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 \quad (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ v_\theta(r, 0) = v_\theta(r, \pi) = 0 \\ v_r(1, \theta) = \varphi(\theta) \end{array} \right.$$

Además $\exists \lim_{r \rightarrow 0^+} v(r, \theta) !!$

Buscamos $v(r, \theta) = R(r) \cdot f(\theta)$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{f''}{f} = \sigma^2 = \sigma$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 R'' + r R' = \sigma \cdot R \\ \sigma > 0 \end{array} \right. \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'' = -\sigma f \quad \theta \in (0, \pi) \\ f(\pi) = f(0) = 0 \end{array} \right.$$

Empezamos con (2) $\boxed{[480 \quad f= -\lambda^2 < 0]} \rightarrow A=B=0 \quad \text{y}$

$$\boxed{480 \quad f=0} \rightarrow G_0(\theta) \equiv A_0$$

$$\boxed{480 \quad f= -\lambda^2 > 0} \quad G'' = -\lambda^2 G \rightarrow G(\theta) = A \cos(\lambda \theta) + B \sin(\lambda \theta)$$

$$\rightarrow G'(\theta) = 0 = 0 + B\lambda \rightarrow \boxed{B=0}$$

$$G'(\pi) = 0 = -A\lambda \sin(\lambda \pi)$$

$$\hookrightarrow \lambda \pi = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = n\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} G_n(\theta) = a_n(\theta) \\ , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

Veamos (1) $\left. \begin{array}{l} r^2 R'' + r R' = n^2 R \\ \exists R(r) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{n=0} \quad R(r) = A + B \ln r$
 $\rightarrow \boxed{n \geq 1} \quad R(r) = Ar^n + Br^{n-1}$

$$\Rightarrow R_n(r) = r^n$$

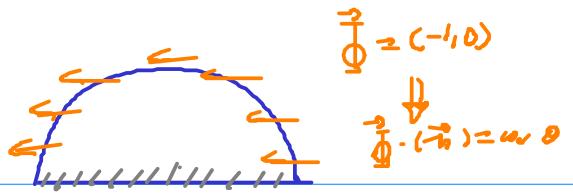
$$\rightarrow \text{La sol general es} \quad \boxed{U(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos(n\theta)}$$

Para calcular A_n uso dato contorno superior

$$\psi(\theta) = U_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot n \cdot \cos(n\theta)$$

$$\Rightarrow A_n \cdot n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Notar A_0 es arbitrario, pues el PN no tiene inciдал. (salvo cero)



Example $\psi(\theta) = \cos\theta$

$$\Rightarrow \psi(\theta) = \cos = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos(n\theta) \rightarrow \begin{cases} A_n = 0, n \geq 2 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(r, \theta) = A_0 + r \cos\theta}$$

$$\psi(\theta) = \cos^3\theta = \frac{3}{4} \cos\theta + \frac{1}{4} \cos(3\theta) \rightarrow \text{harmonic wave.}$$

§ 3.4.- Propiedades de las funciones armónicas

Teatrma 1 Principio del Máximo (doble)

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierta acotada, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tq

$$\Delta u \geq 0 \text{ en } \Omega$$

Entonces

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u$$

Pues \leftarrow [caso especial del Teor en § 2.2]

Así imponer $\Delta u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.

Fijo $x_0 \in \bar{\Omega}$ /

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = u(x_0)$$



Si $x_0 \notin \partial\Omega \implies x_0$

Si $x_0 \in \Omega \stackrel{\text{Max loc}}{\implies} \nabla u(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad D^2 u(x_0) \leq 0$



$$\Rightarrow \Delta u(x_0) = \operatorname{Tr}(D^2 u(x_0)) \leq 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ (\text{Poder los anteriores}) \\ \downarrow \\ \text{van} \leq 0 \end{matrix}$$

Así $\Delta u(x) \geq 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, definir $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \cdot |x|^2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \Delta v_\varepsilon = \underbrace{\Delta u}_{0} + 2n\varepsilon > 0$$

Caso 1

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \cdot \max_{\partial\Omega} |x|^2$$

$$\max_{\bar{\Omega}} u$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} u < \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

□

Corolario 1 Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ / $\Delta u = 0$

$$\Rightarrow \max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u \quad , \quad \min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Dem Aplicar Tma a $u(x) - u(x)$ \square

Corolario 2 Unicidad de PD

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $F \in C(\Omega)$

Entonces $\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$

Tiene, A LO SUMO, 1 solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Dem [caso especial de § 2.2]

Si u_1, u_2 son soluciones, definir $v = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \max_{\Omega} v = \min_{\Omega} v = 0$$
$$\Rightarrow v \equiv 0 \quad \square$$

Nota:

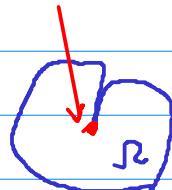
- La UNICIDAD no siempre se tiene en el PD (si Ω es cerrado).
- Si Ω no es cerrado NO siempre hay unicidad.

Ej $\Omega = H = \{x + iy \mid y > 0\}$

$$\Rightarrow u(x, 0) = y \text{ cumple} \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } H \\ u|_{\partial H} = 0 \end{cases}$$

(para tener unicidad)
(hay que dar condiciones)
 $u(x, 0) = 0$

- La EXISTENCIA es un problema más difícil que requiere un poco de "regularidad" en $\partial\Omega$...



Corolario 3 Regularidad respecto a cond contorno

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado, $F_j \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi_j \in C(\partial\Omega)$, $u_j \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$

Tales que

$$\begin{cases} \Delta u_j = F_j & \text{en } \Omega \\ u_j|_{\partial\Omega} = \varphi_j & \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Entonces

$$\sup_{\Omega} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty} + C_{\Omega} \cdot \|F_1 - F_2\|_{\infty}.$$

Dens ejercicio optional 12.

Lo caso $F_1 = F_2 \rightarrow$ conec final del Tma

caso gen \rightarrow optioan para Max a $u_1 - u_2 + C|x|^2$ con C muy grande

Problema de Neumann

En este caso se conoce $\nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \psi \rightarrow$ puro Max no es útil

\rightarrow usar "métodos de energía"

Lema 1

$$\operatorname{div}(u \nabla u) = |\nabla u|^2 + u \Delta u$$

Dens ejercicio de derivació

Lema 2 Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado con arreci, $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} u \cdot (\nabla u \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\Omega} u \Delta u$$

Dens Usar Lema 1 + Tma div

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla u) - \int_{\Omega} u \Delta u$$

B

Moto, Lema 2 es una fórmula de integración por partes en \mathbb{R}^n ...

$$\operatorname{div}(v \cdot \nabla u) = \sum_{j=0}^n \partial_{x_j} [v \cdot \partial_{x_j} u] = \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v \cdot \partial_{x_j} u + v \cdot \partial_{x_j} \partial_{x_j} u) =$$

$$= \nabla v \cdot \nabla u + v \cdot \Delta u$$

Trm Divergenza

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx$$

Lemma 2

7. Div.

$$\int_{\partial\Omega} (v \nabla u) \cdot \vec{n} \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} - \int_{\Omega} v \Delta u}$$

Teorema 3 Unicidad (salvo des) del PR

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ^{acotado} _(conexo), con $\partial\Omega \in C^1$, $F \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Entonces si

$$(P_N) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Tiene 2 soluciones $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\rightarrow u_1 - u_2 \equiv c_0$$

Demos Definir $v = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } \Omega \\ \nabla v \cdot \vec{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \stackrel{\text{L2}}{\Rightarrow} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla v \equiv 0 \Rightarrow v \equiv c_0 \quad \square$$

Ejercicio

Probar UNICIDAD con condición de Robin

$$\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} + \gamma u = \varphi \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{donde } \gamma > 0.$$

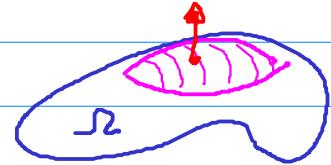
ver [Pavlo, §1.2] o [Evans, AppC]

Notes Sobre el Tma Div.

D) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice dominio de clase C^1 (o bien $\partial\Omega \in C^1$) si

- $\Omega = ab^T + \text{un poco} + \text{acotado}$

- $\partial\Omega$ es localmente la gráfica de una función C^1



es $\forall x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \exists \text{ abi } U \ni x_0, \exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ clase } C^1 / \boxed{\nabla \varphi \neq 0}$
de modo que $\partial\Omega \cap U = \{x \in U / \varphi(x) = 0\}$

$$\Omega \cap U = \{x \in U / \varphi(x) < 0\}$$

En ese caso $\vec{n}(x_0) := \frac{\nabla \varphi(x_0)}{|\nabla \varphi(x_0)|}$

Tma divergencia (Gauss)

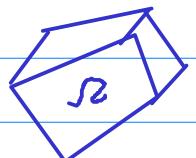
L) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 , $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})$$

- El Tma es tb cierto si $\partial\Omega \in C_{pw}^1$ con "c¹ a trozos"

y incluso si $\partial\Omega \in \text{Lip}$

→ en ese caso $\vec{n}(x)$ es tal qf en $\partial\Omega$.



Vé [Kellogg, div] , o [Evans-Gariepy, §5.8]

↑ referencia clásica

↑ referencia moderna

Integración por
partes en \mathbb{R}^n

Corolario 1 Fórmula de Green 1 (IP28)

L) Ω clase C^1 , $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) \cdot v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

Des Aplican Tma-Div a $\vec{F} = v \nabla u$

Corolario 3 Fórmula de Green 2 _____

Si Ω tiene C^1 , $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ entonces

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} [u(v \cdot \vec{n}) - v(u \cdot \vec{n})] d\sigma$$

Demo Aplican Green 1 los veas y restar.



§3.5. La propiedad del valor medio

Recordar la fórmula de Cauchy en \mathbb{C} : $f \in H(\Omega)$ y $\overline{D_R(z_0)} \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Parametrizando

$$\begin{aligned} z = z_0 + R e^{i\theta} & \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\theta}) / R e^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta = \int_{\partial D_R(z_0)} f \end{aligned} \right\} \quad \theta \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta = \int_{\partial D_R(z_0)} f$$

Tomando parte real, vemos que $u = \operatorname{Re} f \in \operatorname{Har}(\Omega)$ cumple

$$u(z_0) = \int_{\partial D_R(z_0)} u, \quad \forall \overline{D_R(z_0)} \subseteq \Omega.$$

Vemos que esta propiedad se sigue cumpliendo en \mathbb{R}^n , sin hacer uso de variables complejas.

Teorema 1 PVM

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \operatorname{Har}(R)$. Entonces

$$u(x_0) = \int_{\partial B_R(x_0)} u(x) d\sigma(x) = \int_{B_R(x_0)} u(x) dx, \quad \forall \overline{B_R(x_0)} \subseteq R$$

↑ PVM1 ↑ PVM2

Dem. Ver [Evans, §2.2.2].

Defino $\phi(r) := \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dx$, $0 < r < R$. Vemos que $\phi(r) \equiv \text{cte}$

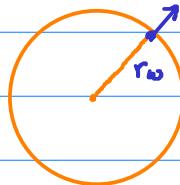
En ese caso, como $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(x_0) \rightarrow$ statement (PVM1).

Escribimos

$$\phi(r) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) = \frac{1}{r^{n-1} \cdot |S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + r\omega) r^{n-1} d\sigma(\omega)$$

$x = x_0 + r\omega, \omega \in S^{n-1}$
 $d\sigma(x) = r^{n-1} d\sigma(\omega)$

Derivando,

$$\phi'(r) = \int_{S^{n-1}} \frac{d}{dr} [u(x_0 + r\omega)] d\sigma(\omega) \rightarrow \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cdot \omega_i = \nabla u \cdot \vec{n}$$


desarrollando el CV

$$= \int_{B_r(x_0)} \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma(x) \stackrel{\text{Teorema de la div}}{=} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \operatorname{div}(\nabla u) dx$$

$$\star = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u dx = \partial_u u \in \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(R).$$

Por tanto

$$\phi'(r) = 0, \forall r \Rightarrow \phi \equiv \text{cte.} \rightarrow (\text{PVM1}).$$

Dar PVM2

Es consecuencia de (PVM1), usando coordenadas polares en \mathbb{R}^n

$$\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx = \frac{1}{|B_R(\omega)|} \int_0^R \left[\int_{S^{n-1}} u(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega) r^{n-1} dr \right]$$

$x = x_0 + r\omega$
 $dx = r^{n-1} dr d\sigma(\omega)$

$\int_{\partial B_R(x_0)} u(x) d\sigma(x) \stackrel{\text{PVM1}}{=} |B_R(\omega)| \cdot u(x_0)$

$$= \frac{u(x_0)}{|B_R(\omega)|} \cdot \int_0^R |S^{n-1}| \cdot r^{n-1} dr = u(x_0) \cdot \frac{|S^{n-1}|}{|B_R(\omega)|} \cdot \frac{R^n}{n}$$

Nota Tomando $u \equiv 1 \in \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow |B_R(\omega)| = \frac{R^n}{n} \cdot |S^{n-1}|$.

Por tanto, para $u \in \mathcal{X}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ sucede, $\int_{B_R(x_0)} u = u(x_0) \Rightarrow \text{PVM2}$

Teatrmo 2 reciproco

$u \in C^2(\Omega)$ simple

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\sigma, \quad \forall \overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega$$

Entonces; $u \in \text{Har}(\Omega)$

Dem R.A. Si $\Delta u(x_0) \neq 0 \rightarrow$ puede suponer $\Delta u(x_0) > 0$

$$\begin{aligned} u \in C^2 \\ \Rightarrow \exists \overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega : \Delta u > 0. \end{aligned}$$

Mirando la proba de $(*)$,

$$\begin{aligned} \text{prueba} \rightarrow \phi(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u > 0 \quad \text{S} \\ \square \end{aligned}$$

Notas. Tb se puede probar (ejercicio)

① PVM 2 $\Rightarrow u \in \text{Har}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \text{(SPVM1)} \\ \text{② } \Delta u \geq 0 \Leftrightarrow u(x_0) \leq \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\sigma, \quad \forall \overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u(x_0) \leq \int_{B_R(x_0)} u \, dx, \quad \forall \overline{B_R(x_0)} \subseteq \Omega$$

Idea dem 1 Definir

$$\psi(R) := \int_{B_R(x_0)} u(x) \, dx = \dots = \frac{n}{R^n} \int_0^R \phi(r) r^{n-1} dr = n \int_0^1 \phi(Rs) s^{n-1} ds$$

Si $\psi(R) \equiv \infty \Rightarrow \psi'(R) = 0 \rightarrow$ llegan a $\frac{1}{2}$ con $\Delta u(x_0) > 0$.

Idea dem 2 " \Rightarrow " Mismo punto: si $\Delta u \geq 0 \Rightarrow$

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u \geq 0 \Rightarrow \phi' \nearrow \Rightarrow \phi(R) \geq \phi(0^+) = u(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \text{RA} \cdot n \Delta u(x_0) < 0 \Rightarrow 0 \leq \phi(R) - \phi(0^+) = \int_0^R \phi'(r) dr = \iint_{\partial B_r} \frac{\Delta u}{|\partial B_r|} < 0 \text{ S.}$$

Nota La PVM caracteriza las funciones armónicas.

Puntito incluso generalizar la definición, sin usar EPPs...

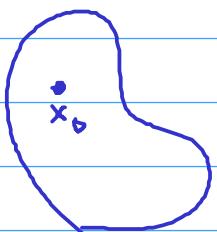
Corolario 1 Punto Mínimo Finito

Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, y sea $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\text{Lí} \quad \exists x_0 \in \Omega \quad / \quad u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u \quad \Rightarrow \quad u \equiv \text{cte.} \quad (\times)$$

Decu

Sea $M = \max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$



Veamos algo más fuerte: (SPVMZ) \Rightarrow (\times)

(SPVMZ)

$$M = u(x_0) \leq \int_{B_R(x_0)} u(x) dx \leq \int_{B_R(x_0)} M dx = M$$

$$\Rightarrow \text{también son igualdades} \Rightarrow \int_{B_R(x_0)} (M - u(x)) dx = 0$$

$$\Rightarrow M - u(x) \equiv 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ u \in B_R(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow u(x) \equiv M \quad \text{en } B_R(x_0)$$

Sea ahora $A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$

- $A \neq \emptyset$ ($\forall x_0 \in A$)

- $A = u^{-1}(M)$ es cdo ($\forall z \in C$)

- A es ab^z ($\forall x_0 \in A \Rightarrow B_R(x_0) \subseteq A$)

$\xrightarrow{\text{A cdo}}$ $A = \Omega$



Corolario 2

Si $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y $u \not\equiv$ de extremos

$$\min_{\Omega} u < u(x) < \max_{\Omega} u$$



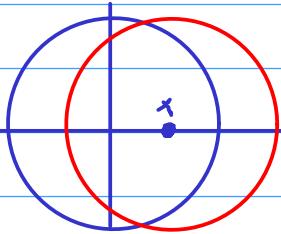
Corolario 3 Tma de Liouville

Si $u \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{R}^n)$ y acotada $\Rightarrow u \equiv \text{cte}$

Demo

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Vemos que $u(x) \equiv u(0)$.

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_{B_R(x)} u - \int_{B_R(0)} u \right| = \frac{1}{|B_R|} \left| \int_{B_R(x)} u - \int_{B_R(0)} u \right|$$



$$= \frac{1}{|B_R|} \left| \int_{B_R(0) \setminus B_r(0)} u + \int_{B_r(0)} (-u) \right| \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(0) \setminus B_r(0)} |u|$$

Ahora

$$B_R(0) \setminus B_r(0) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n / R - |x| \leq |y| \leq R + |x|\}$$

si $R \gg |x|$

$$\Rightarrow |u(x) - u(0)| \leq \|u\|_\infty \cdot \frac{(R+|x|)^n - (R-|x|)^n}{R^n}$$

$$\stackrel{\text{binomio Newton}}{\leq} \|u\|_\infty \cdot \frac{C_x \cdot R^{n-1}}{R^n} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0$$

□

Corolario 4 Regularidad

Si $u \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$ $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$

Demo: Probaremos incluso algo más fuerte

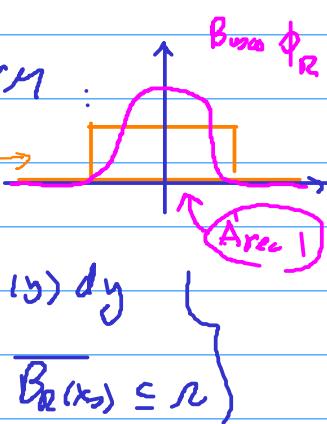
$$^* \text{ si } u \in C(\Omega) \cap (\text{PVM1}) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega) ^*$$

Para ello necesito una versión "mejor" de PVM.

Recordar que (PVM2) dice

$$u(x_0) = \int_{B_R(x_0)} u(y) dy = \int \frac{\chi_{B_R(0)}(x_0-y)}{|B_R|} u(y) dy$$

$$\approx \frac{1}{|B_R(x_0)|} \leq \frac{1}{R^n}$$



Tomo $\phi_R \in C_c^\infty(B_R \cap \mathbb{R}^n)$ tq.

$$(i) \int \phi_R dx = 1$$

(ii) ϕ_R RADIAL

$$\text{Defino } u_R(x) := \int \phi_R(x-y) u(y) dy, \text{ cuando } \overline{B_R(x)} \subseteq \Omega$$

(Notar que esto bien definido, pues el soporte $\phi_R \subseteq B_R(0) \Rightarrow$
 \Rightarrow solo integra en $|x-y| < R$, e $y \in B_R(x) \subseteq \Omega$)

$$\text{De modo, } \mathcal{D}_R = \{x \in \Omega \mid \overline{B_R(x)} \subseteq \Omega\}$$

$$= \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > R\}$$



entonces el Lema Deir Integres Parciales nos da

$$u_R(x) \in C^\infty(\mathcal{D}_R).$$

Veamos ahora que $u_R = u$ en \mathcal{D}_R .

$$u_R(x) = \int \psi_R(z) u(x-z) dz$$

$$= \int_0^R \psi_R(r) \left[\int_{S^{m-1}} u(x - rw) d\sigma(w) r^{m-1} dr \right] d\sigma$$

porque
 $z = rw$

PVM!

$$= \int_0^R \psi_R(r) \cdot u(x) \cdot |\partial B_r(x)| dr$$

$$= u(x) \cdot |S^{m-1}| \cdot \int_0^R \psi_R(r) r^{m-1} dr = u(x) \cdot \int_{B_R(0)} \psi_R$$

$$\Rightarrow u_R = u \text{ en } \mathcal{D}_R \Rightarrow u \in C^\infty(\mathcal{D}_R) \quad \forall R > 0$$

$$\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$$



§3.5. EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE DIRICHLET

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Martes, 17 marzo 2020

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PD

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto **acotado**. Un objetivo del capítulo es resolver

PROBLEMA DE DIRICHLET

Dado $\varphi \in C(\partial\Omega)$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tq

$$(PD) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- **Idea de Dirichlet:** entre todas las funciones de la clase

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

- ... la que resuelve (PD) es la que tiene **mínima energía**

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2$$

La formulación rigurosa es así

TEOREMA 1: PRINCIPIO DE DIRICHLET

EJ8

Sea $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y $u \in \mathcal{A}_\varphi$. LSAE

- ① $\Delta u = 0$
- ② $E(u) = \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 : w \in \mathcal{A}_\varphi \right\}$

- Da un método variacional (minimización) para resolver EDPs
- Implementable numéricamente: buscar sucesiones

$$u_n : E(u_n) \searrow E(u) \dots$$

- Aplicable a muchas EDPs **elípticas**...
- Teorema “condicionado” a la existencia de solución minimizante...

REPASO DE FVV3

FÓRMULA DE GREEN 1

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de clase C^1 . Entonces

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (G_1)$$

(si $u \in C^2(\Omega)$ y $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$)

- **Dem:** aplicar a $\mathbf{F} = (\nabla u)v$ el Tma Div

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$$

- En particular, si $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$,

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

DEM TEOR 1

Dem "(1) \Rightarrow (2)"

$$\text{Sea } A_\varphi = \left\{ w \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mid w|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

Suponer $u \in A_\varphi$ cumple $\Delta u = 0$

$$\text{Veamos que } E(u) = \min_{w \in A_\varphi} E(w).$$

Sea $w \in A_\varphi$, y definimos $\psi = w - u \stackrel{\in C(\bar{\Omega})}{\rightarrow} \psi|_{\partial\Omega} = 0$!!

Entonces

$$E(w) = E(u + \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla \psi|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla \psi|^2 + 2 \nabla u \cdot \nabla \psi$$

$$= E(u) + E(\psi) + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi}_{\text{Caso 1}} +$$

$$= E(u) + E(\psi) + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) \psi}_{\psi = 0} - \underbrace{\int_{\Omega} (\Delta u) \psi}_{\Delta u = 0}$$

$$\geq E(u)$$

$$\text{Por tanto, } \inf_{w \in A_\varphi} E(w) \geq E(u) \xrightarrow{\text{u.d.p.}} \min_{w \in A_\varphi} E(w) = E(u).$$

DEM TEOR 1: RECÍPROCO

TMA

Dem "2) \Rightarrow 1)"

Suponen que $\exists u \in \mathcal{A}_p$: $E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}_p} E(w)$.

Veamos que $\Delta u \equiv 0$

Sea $\psi \in C_c^2(\Omega) \Rightarrow \psi|_{\partial\Omega} \equiv 0$

Considero

$$I(t) = E(u + t\psi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

función 1-variable!

$$\text{Como } \min_{t \in \mathbb{R}} I(t) = I(0) \Rightarrow I'(0) = 0.$$

$$\text{Pero } I'(0) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t\psi)|^2 \right] \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi \stackrel{(61)}{=} - \int_{\Omega} (\Delta u) \psi + \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \psi$$

$$\text{Concluyo } 0 = I'(0) = - \int_{\Omega} (\Delta u) \psi \quad \left. \begin{array}{l} \psi \in C_c^2(\Omega) \\ \psi|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta u \equiv 0 \text{ en } \Omega.$$

EJERCICIO 8

8. Demuestra que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ es solución de la EDP indicada si y sólo si

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w),$$

donde el funcional de energía E aparece indicado, y debes determinar quién es la clase \mathcal{A}

a) *Ecuación de Poisson* $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} f u$

b) *Problema de Neumann* $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} \varphi u$

EJERCICIO 8A

Demostrar un Pcio de Dirichlet para la ecuación de Poisson

EJERCICIO 8 @ FUNCIONAL DE ENERGIA ASOCIADO A: Ecu. Poisson

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad \rightarrow \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + f u)$$

Sea $A_\varphi = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C'(\bar{\Omega}) / u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$.
n ≥ 1 Veamos que $E(u) = \min_{w \in A_\varphi} E(w)$.

Suponemos que $u \in A_\varphi$ cumple (P).

Sea $w \in A_\varphi \Rightarrow w - u \in C^1(\bar{\Omega}) \times \{0\}_{\partial\Omega} \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(w) &= E(u + w - u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla(u + w)|^2 + f(u + w)) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2 + 2 \nabla u \cdot \nabla w + 2f(u + w)) \\ &= E(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 + 2f(u + w)) + \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla w|}_{\geq 0} - \underbrace{\int_{\Omega} \Delta u \cdot w}_{\Delta u \stackrel{\text{per } \Omega}{=} 0} \\ &= E(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 + 2f(u + w)) - \int_{\Omega} w^2 \\ &= E(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \geq E(u) \end{aligned}$$

Por tanto, $\inf_{w \in A_\varphi} E(w) = E(u) \Rightarrow \min_{w \in A_\varphi} E(w) = E(u)$

EJERCICIO 8A

Ejerc 8

$\boxed{1^{\circ} \Delta = 0}$

$$\text{Sea } u \in \Delta \varphi : \min_{w \in \Delta \varphi} E(w) = E(u).$$

$$\text{Tomé } \psi \in C_c^2(\Omega) \Rightarrow \text{defino } I(t) = E(u + t\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla(u+t\psi)|^2 + 2\beta(u+t\psi))$$

$$\Rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} I(t) = I(0) \implies I'(0) = 0.$$

$$\stackrel{\text{Paso}}{I'(0)} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + t^2 |\nabla \psi|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla \psi + 2fu + 2t f\psi) \right]$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} f \psi = \underset{\text{Green}}{\cancel{\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \psi}} - \int_{\Omega} \Delta u \psi + \int_{\Omega} f \psi$$

$$= \int_{\Omega} (-\Delta u + f) \psi = 0, \quad \forall \psi \in C_c^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow -\Delta u + f \equiv 0 \text{ en } \Omega$$

$\rightarrow u$ cumple (P).

EJERCICIO 8A

Ejerc 8

$\boxed{1^{\circ} \Delta = 0}$

Sea $u \in \Delta \varphi$: $\min_{w \in \Delta \varphi} E(w) = E(u)$.

Tomo $\psi \in C_c^2(\Omega) \Rightarrow$ defino $I(t) = E(u+t\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla(u+t\psi)|^2 + 2\beta(u+t\psi))$

$$\Rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}} I(t) = I(0) \implies I'(0) = 0$$

$$\text{Paso } I'(0) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + t^2 |\nabla \psi|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla \psi + 2fu + 2t f \psi) \right]$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} f \psi = \underset{\text{(Green)}}{\cancel{\int_{\partial\Omega} u \psi \nu +}} - \int_{\Omega} \Delta u \psi + \int_{\Omega} f \psi$$

$$= \int_{\Omega} (-\Delta u + f) \psi = 0, \quad \forall \psi \in C_c^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow -\Delta u + f = 0 \text{ en } \Omega$$

$\rightarrow u$ cumple (P).

Hacer el ejerc 8b (ídem para problema de Neumann)



MÁS EDPs...

La misma prueba funciona con muchas otras EDPs...

- **Ec elípticas generales:**

$$Lu = \operatorname{div}(A(x)\nabla u),$$

se dice unif elíptico si $A(x) \in C^1(\overline{\Omega}; \operatorname{Sim}_d(\mathbb{R}))$ cumple

$$\langle A(x)\xi|\xi\rangle \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \text{donde } \lambda > 0.$$

Entonces, para $u \in \mathcal{A}_\varphi$, se tiene $Lu = 0$ si u minimiza

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)\nabla u|\nabla u\rangle dx$$

Problema de Plateau (superficies mínimas)

- Dado $\varphi \in C(\partial\Omega)$, busco

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} : u \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ y } u|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

- Para $u \in \mathcal{A}_\varphi$ equivale a resolver la **EDP no lineal**

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

- demostración: ejercicio 9...

MÁS EDPs...

Operador p -Laplaciano, $1 < p < \infty$

- **Ejer 10.** Encuentra la EDP que corresponde a minimizar

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

- ... debería salir la EDP no lineal

$$\Delta_p u := \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

- Δ_p se llama p -Laplaciano, y para $p = 2$ coincide con Δ ...

SOBRE LA EXISTENCIA DE MINIMIZANTES...

NOTA FINAL: Sobre la existencia de MINIMIZANTES.

¿ Cuándo existe un minimizante de

$$E_0 := \min \left\{ E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 / u \in C^2(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = q \right\} ?$$

- Riemann (1857) afirmó que tales minimizantes "siempre existen"...

Pero Weierstrass (1872) y otros dieron contraproyectos...

- El problema es la "compatibilidad" de A_q :
el pts límite de una suc. func. $\subseteq A_q$: $E(u_n) \rightarrow E_0$
¡podrá no pertenecer a A_q !

- Es necesario trabajar en espacios de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \nabla u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

- Usando ANÁLISIS FUNCIONAL se prueba que SIEMPRE existe

$$\min \left\{ E(u) / u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = q \right\}$$

- Este minimizante $u \in H^1(\Omega)$ es solo "solución débil" de

$$\Delta u = 0$$

[Peral, Cap 5], [Evans, 2.2.4]

[Strauss, Cap 7]

§ 3.7. Función de Green

Def: Se denomina solución fundamental de Δ en \mathbb{R}^n a

$$K(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{donde } c_n = \frac{-1}{(n-2)|S^{n-1}|}, n \neq 2$$

$$\left[\text{o bien } K(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \text{si } n=2 \right]$$

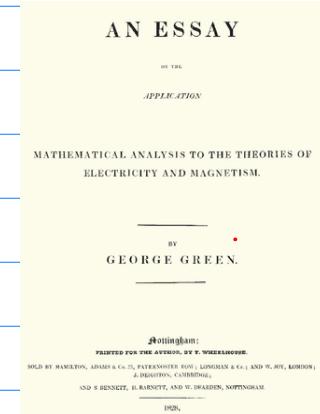
- Si $x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow K_{x_0}(x) := K(x-x_0) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$

Teatrma 1 Fórmula de Green 3

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$
entonces,

$$u(x_0) = \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot K_{x_0}(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left[u \cdot D_{\vec{n}} K_{x_0} - K_{x_0} \cdot D_{\vec{n}} u \right] ds \quad (1)$$

$\forall x_0 \in \Omega$



Notas:

- ① La fórmula vale para CUALQUIER u (no necesariamente armónica)
- ② Si considero $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, $Du \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \psi$

\Rightarrow obtengo una fórmula explícita

$$u(x_0) = \int_{\Omega} f \cdot K_{x_0} + \int_{\partial\Omega} \left[\varphi \cdot D_{\vec{n}} K_{x_0} - K_{x_0} \cdot D_{\vec{n}} \varphi \right] ds$$



(candidateo a resolver PD ó PN ó Prob Poisson inhomog)
¡¡en cualquier dominio Ω general!!

- ③ Ver historia de George Green en Wikipedia o MacTutor

Para demostrar el Thm 1 usaremos la fórmula de Green 2

$$(2) \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} [u \nabla v \cdot \vec{n} - v \nabla u \cdot \vec{n}] d\sigma$$

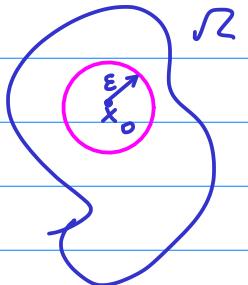
Desarrollar

Aunque no aplican (2) con $v(x) = K_{x_0}(x) = \frac{c_n}{|x-x_0|^{n-2}}$ (^{suponen $n \neq 2$})

Pero v NO es $C^2(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, definir

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)$$

$\Rightarrow u, v \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, y usando (2)

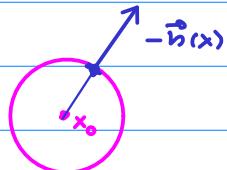


$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u \nabla v \cdot \vec{n} - v \nabla u \cdot \vec{n}) d\sigma \quad (*)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \dots + \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} (u \nabla v \cdot \vec{n} - v \nabla u \cdot \vec{n}) d\sigma \quad I_\varepsilon$$

Como $v(x) = \frac{c_n}{|x-x_0|^{n-2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, usando el T(D)
Trm. Conv. Dominada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u = \int_{\Omega} v \Delta u.$$



Por otro lado,

$$|I_\varepsilon^2| = \left| \int_{|x-x_0|=\varepsilon} v \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma \right| = \left| c_n \int_{|x-x_0|=\varepsilon} \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \nabla u \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} d\sigma(x) \right|$$

$$\leq |c_n| \cdot \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \|\nabla u\|_{\infty} |S^{n-1}| \cdot \varepsilon^{n-1} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

$$I_\varepsilon^1 = \int_{|x-x_0|=\varepsilon} u \nabla v \cdot \vec{n} d\sigma = -c_n \int_{|x-x_0|=\varepsilon} u(x) \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \right)}_{-(n-2)|x-x_0|^{-n+1}} \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} d\sigma(x)$$

$$= (n-2) \cdot c_n \cdot \int_{|x-x_0|=\varepsilon} u(x) \cdot \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} d\sigma(x)$$

$$= (n-2) |S^{n-1}| \cdot c_n u(x_0) = -u(x_0)$$

Despejando en (2) se obtiene $-\int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\partial\Omega} (\dots) - u(x_0)$.

$$\Rightarrow u(x_0) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot v + \int_{\partial\Omega} (u \nabla v \cdot \vec{n} - v \nabla u \cdot \vec{n}) \, ds \quad (3)$$

■

Notas:

① En la práctica sólo se conoce UNA condición en $\partial\Omega$

$$\circ \text{ bien } u|_{\partial\Omega} = \varphi, \text{ o bien } \nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = \psi$$

→ ¿podemos encontrar variantes con sólo 1 condición?

② La demostración de (3) tb es válida si toma

$$v = K_{x_0} + V(x), \text{ donde } V(x) \in \text{Har}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$$

Si escojo V adecuado podré eliminar un término de frontera...

Por ejemplo, para que $\nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$ basta elegir V tal que

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ en } \Omega \\ V|_{\partial\Omega} = -K_{x_0} \end{cases} \implies \begin{cases} u = K_{x_0} + V = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ t.g. $\text{PD}(x_0, \Omega)$ tiene solución $\bar{V} = V_{\Omega, x_0}, \forall x_0 \in \Omega$. Se define la función de Green de Ω como

$$G_{\Omega}(x; x_0) = K(x - x_0) + V_{\Omega, x_0}(x), \quad x \in \Omega$$

Notas:

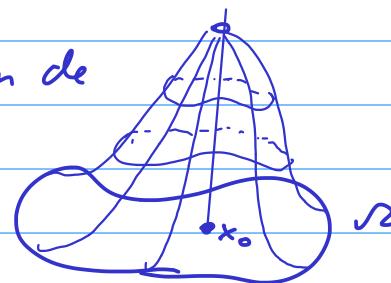
① Si Ω es de clase $C^1 \Rightarrow$ se puede probar que $\text{P}(x_0, \Omega)$ tiene sol. (y por tanto que existe $G_{\Omega}(x; x_0)$)

② En algunos Ω no se puede calcular $G_{\Omega}(x; x_0)$ explícitamente

③ $G_{\Omega}(x; x_0)$ es la única solución de

Interpretación

$$\begin{cases} \Delta v = \delta_{x_0} \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



A veces se le llama tb solución fundamental de Δ_{Ω} en x_0

Corolario

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , y sea $G_\Omega(x; x_0)$ una función de Green.

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

entonces

$$(*) \quad u(x_0) = \int_{\Omega} f(x) G_{\Omega}(x; x_0) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) D_{\nu}(G_{\Omega}(x; x_0)) d\sigma(x)$$

del lado en Ω → *versión de Poisson en Ω*

También se tiene el recíproco (cuando es más difícil)

Tma 2

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado t.q. $\exists G_\Omega(x; x_0)$.

Si $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y $f \in \text{Lip}_{\alpha}(\bar{\Omega})$ entonces

$$u(x_0) = (*)$$

cuando

$$(1) \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$(2) \quad \Delta u = f$$

$$(3) \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Dem : Ver [Peral, Tma 5.6.3], o libros más avanzados de EDPs
(Gilbarg-Turdingen)

Ejemplos de funciones de Green

① $\Omega = \mathbb{R}^n \rightarrow \partial\Omega = \emptyset$ y se toma $V = 0$

$$\Rightarrow G(x; x_0) = V(x - x_0) = \frac{c_n}{|x - x_0|^{n-2}}$$

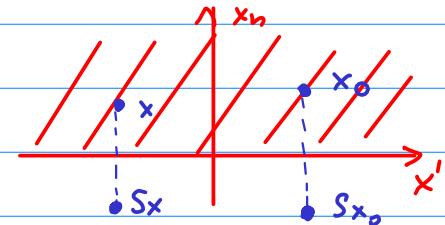
y el candidato a solución de $\begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$

es

$$u(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

$\leftarrow (n=3, \text{ es el potencial de Coulomb})$

② $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x_n > 0\}$



Busco $V(x', x_n)$ / $\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+^n \\ V(x_0, 0) = -V_{x_0} \end{cases}$

"Método de los simétricos": $S: (x', x_n) \mapsto Sx = (x', -x_n)$.

Si $x = (x', 0) \in \partial\Omega \Rightarrow |x - x_0| = |x - Sx_0|, \forall x_0 \in \Omega$

\hookrightarrow candidato para $(*)$ $V(x) = \frac{-c_n}{|x - Sx_0|^{n-2}} \in \mathcal{H}_{\Omega}(\Omega)$
 (de hecho en $\mathbb{R}^n \setminus \{Sx_0\}$)

$$\Rightarrow G_n(x; x_0) = V(x - x_0) + V(x) = \frac{c_n}{|x - x_0|^{n-2}} - \frac{c_n}{|x - Sx_0|^{n-2}}$$

$$\text{y } D_{\partial\Omega} G_n(x; x_0) = -\partial_{x_n} G(x; x_0)$$

$$= -c_n \left(\frac{-(n-2)}{|x - x_0|^{n-1}} \cdot \frac{x_n - x_{0,n}}{|x - x_0|} + \frac{(n-2)}{|x - Sx_0|^{n-1}} \cdot \frac{x_n + x_{0,n}}{|x - Sx_0|} \right)$$

$$= -\frac{c_n \cdot (n-2)}{|x - x_0|^n} \cdot (-x_n + x_{0,n} + x_n + x_{0,n}) = \frac{2}{|S^{n-1}|} \cdot \frac{x_{0,n}}{|x - x_0|^n}$$

núcleo de Poisson
en \mathbb{R}_+^n

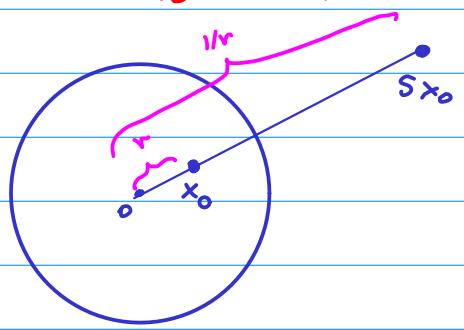
El candidato a solución del PD en \mathbb{R}_+^n :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+^n \\ u(x_0) = q(x) \end{cases} \rightarrow$$

$$u(x_0) = \frac{2}{|S^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{x_{0,n} \cdot q(x')}{|x_0 - x'|^n} dx'$$

③ $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ← Problema Dirichlet en la bola de \mathbb{R}^n

Busco $V(x)$ / $\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\partial\Omega} = -K_{x_0} \end{cases}$



Método de simetrías :

$\forall x \in \partial B \Rightarrow |x - x_0| = |x_0| \cdot (x - S(x_0))$ donde $S(x_0) = \frac{x_0}{|x_0|^2}$.

[$\text{Dím } RHS^2 = \left| |x_0|x - \frac{x_0}{|x_0|} \right|^2 = |x_0|^2 \cancel{\cdot |x|^2} - 2|x_0|x \cdot \frac{x_0}{|x_0|} + \cancel{\left| \frac{x_0}{|x_0|} \right|^2} = |x_0 - x|^2$]

→ tomo $V(x) = \frac{c_n}{(|x_0| |x - Sx_0|)^{n-2}} \in \mathcal{X}_{\partial\Omega}(B)$ (de hecho en $\mathbb{R}^n \setminus \{Sx_0\}$)

⇒ $G_B(x; x_0) = \frac{c_n}{|x - x_0|^{n-2}} - \frac{c_n}{(|x_0| |x - Sx_0|)^{n-2}}$

⇒ $D_{\vec{n}(x)} G_B(x; x_0) = \nabla G \cdot \vec{x}$ $= c_n \left(\frac{-(n-2)}{|x-x_0|^{n-1}} \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot x + \frac{(n-2)}{|x_0|^{n-2} |x-Sx_0|^{n-1}} \frac{x-Sx_0}{|x-Sx_0|} \cdot x \right)$
x ∈ ∂B
 $= \frac{c_n \cdot (n-2)}{|x - x_0|^n} \left(-(x - x_0) \cdot x + |x_0|^{-2} \left(x - \frac{x_0}{|x_0|^2} \right) \cdot x \right)$
 $= \frac{c_n \cdot (n-2)}{|x - x_0|^n} \left(-1 + |x_0|^2 \right) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \frac{1 - |x_0|^2}{|x - x_0|^n}$

Por tanto, el candidato en sol de

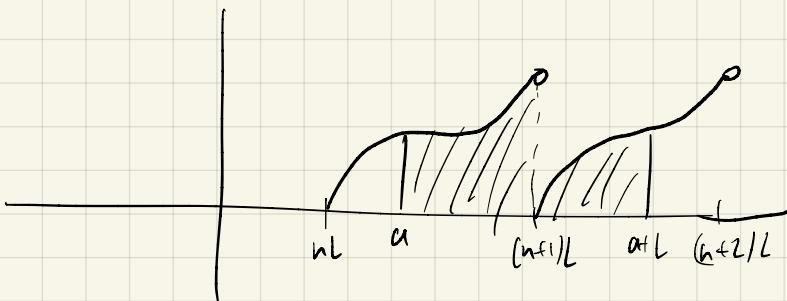
(PD) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial B} = \varphi \end{cases}$

$$u(x) = \int_{S^{n-1}} \frac{1 - |x_0|^2}{|x - x_0|^n} \cdot \varphi(\xi) d\sigma(\xi)$$

Nota : Hemos hecho los cálculos con $n \geq 3$. Comprobá que sale lo mismo cuando $n = 2$ y $K_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \log |x - x_0|$.

Cap 4: Series de Fourier

Lema 1



Tomamos $a \in \mathbb{R}$: $nl \leq a < (n+1)L$

$$x = nL + t$$

$$x = (n+1)L + t$$

$$\int_a^{a+L} f(x) dx = \int_{nl}^{(n+1)L} f(x) dx - \int_{(n+1)L}^{a+L} f(x) dx = \int_{a-nL}^L f(nL+t) dt + \int_0^{a-nL} f((n+1)L+t) dt$$

$$= \int_{a-nL}^L f(t) dt + \int_0^{a-nL} f(t) dt = \int_0^L f(t) dt$$

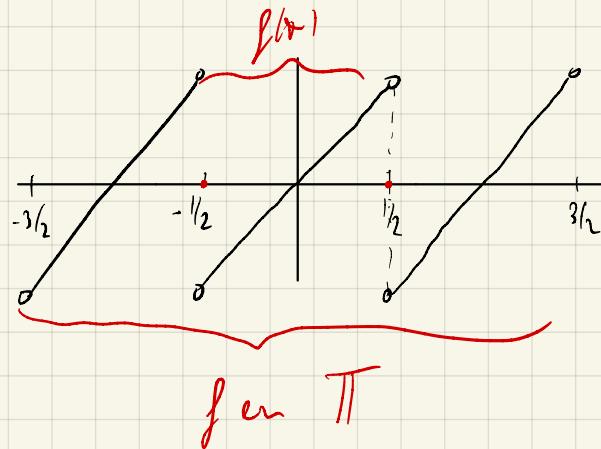
f L-periodica

13

Ejemplo

① $f(x) = x$

$|x| < \frac{1}{2}$



Calcular la SF y estudiar convergencia

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i ux} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{-2\pi i ux} dx = \left[\frac{-x e^{-2\pi i ux}}{2\pi i u} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi i u} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i ux} dx \\
 &\quad \text{u: } x, dx \\
 &\quad dv = e^{-2\pi i ux} dx, v = -\frac{e^{-2\pi i ux}}{2\pi i u} \\
 &= \frac{1}{2} \left[e^{-\pi i u} + e^{\pi i u} \right] = \frac{(-1)^u}{-2\pi i u} = \frac{(-1)^{u+1}}{2\pi i u}
 \end{aligned}$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx = 0 //$$

$$\rightarrow f(x) = x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i nx}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

Como $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ \Rightarrow

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i nx} \quad \text{t.e. } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\text{Si } x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n \pm \frac{1}{2}} \Big|_{x=\pm \frac{1}{2}} = 0$$

la SF en forma real sera

$$\begin{aligned}
 x &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \left[e^{2\pi i n x} - e^{-2\pi i n x} \right] \\
 &\quad \text{(-n)} \quad \text{2sen}(2\pi n x)
 \end{aligned}$$

BLOQUE II: TEORÍA DE LAS SERIES DE FOURIER

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Lunes, 12 abril 2021

§1.1. INTRODUCCIÓN

OBJETIVO

Dada una función $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$, determinar cuándo se tiene

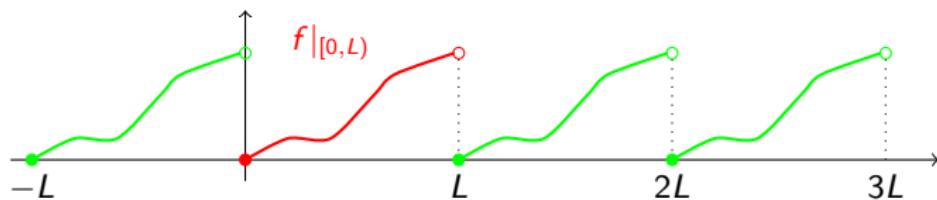
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right] \quad (*)$$

- Fourier (1822) afirmó que (*) es cierto “*para toda función f*”, pero sin demostración rigurosa...
- Varias preguntas
 - ① ¿Cuándo converge la serie?
 - ② ¿Converge a $f(x)$?
 - ③ Condiciones en f para: conv uniforme, converg de derivadas, etc...
- Contribuciones: Dirichlet (1829), Riemann (1851), Cantor (1870), Fejér (1900), Lebesgue (1902), Kolmogorov (1926), Carleson (1966),...

CONVENCIÓN

- Defino $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(L\mathbb{Z}) \equiv [0, L)$
- $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, significa $f : [0, L) \rightarrow \mathbb{C}$ extendida de forma L -periódica, es

$$f(x + L) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



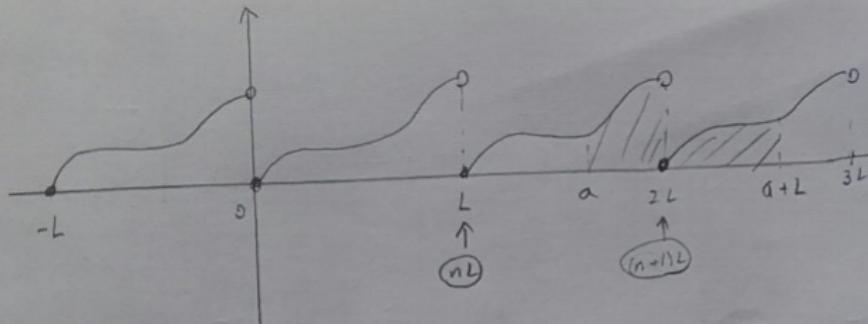
- A veces reemplazamos $\mathbb{T} \equiv [0, L)$ por $\mathbb{T} \equiv [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$...
- **Lema.** Si f es L -periódica, entonces

$$\int_a^{a+L} f(x) dx = \int_0^L f(x) dx =: \int_{\mathbb{T}} f(x) dx$$

Dem: ejercicio...

- Desde ahora $L = 1$ $\rightarrow \mathbb{T} \equiv [0, 1)$ o bien $\mathbb{T} \equiv [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$...

DEM DEL LEMA



Dem Lema: Sea $n \in \mathbb{Z}$: $nL \leq a < (n+1)L$. Entonces

$$\int_a^{a+L} f(x) dx = \int_a^{(n+1)L} f(x) dx + \int_{(n+1)L}^{a+L} f(x) dx$$

$x = u + nL$

$$= \int_{a-nL}^L f(u+nL) du + \int_0^{a-nL} f(u+(n+1)L) du = \int_0^L f(x) dx$$

§1.2. SERIES DE FOURIER DE $f \in L^1(\mathbb{T})$

Recordar $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv [0, 1)$, y

$$L^1(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} \quad : \quad \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

- **Def:** Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, se define su *serie de Fourier (compleja)* como

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \tag{1}$$

donde

$$\hat{f}(n) := \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-2\pi i n y} dy, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

se denomina *n-simo coeficiente de Fourier de f*

- **Obj:** ¿Cuándo podemos reemplazar “ \sim ” por “ $=$ ” en (1)?

LOS CRITERIOS DE DINI

Idea general: si f suave \implies su SF converge...

TEOREMA 1: CRITERIO DE DINI (VERSIÓN 1)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es **derivable** en x_0 entonces

$$\exists \lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = f(x_0)$$

- Tb funciona si f es “suave con saltos” ...

TEOREMA 2: CRITERIO DE DINI (VERSIÓN 2)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(x_0)^{\pm}$ y $f'(x_0)^{\pm}$, entonces

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \frac{f(x_0)^- + f(x_0)^+}{2}.$$

EJEMPLOS: CÁLCULO DE SERIES

① Sea $f(x) = x$, si $|x| < 1/2$. Calcular su SF y estudiar convergencia.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x, \quad \forall |x| < \frac{1}{2}$$

En este ejemplo $\Pi = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$...

Calculamos coeficientes

$$\bullet \hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{-2\pi i n x} dx = \text{parte real}$$

$$= \left[x \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi i n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n x} dx = \frac{1/2}{-2\pi i n} \left[e^{-\pi i n} + e^{\pi i n} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n}, \quad n \neq 0.$$

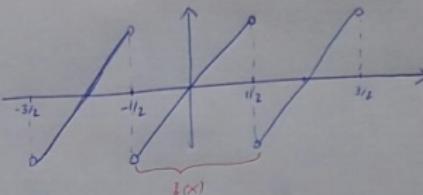
$$\bullet \hat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx = 0 \quad (\text{impar})$$

$$\Rightarrow x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Serie de Fourier REAL

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \underbrace{\left(e^{-\pi i n} - e^{\pi i n} \right)}_{2i \sin(\pi n x)}$$



El criterio DIRICHLET garantiza que la serie converge en $|x| < 1/2$.

¿Qué pasa en $x = \pm 1/2$?

¿Qué pasa en $|x| > 1/2$?

$\sum_{n=1}^{m-n}$

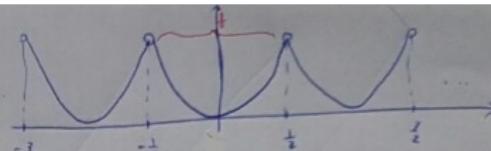
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \sin(\pi n x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x = \pm 1/2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \sin(\pi n x) \Big|_{x=\pm \frac{1}{2}} = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

¡Concorda con DIRICHLET!

① Sea $f(x) = x^2$, si $|x| < 1/2$. Calcular su SF y estudiar convergencia.

$$② f(x) = x^2, \quad \text{si } |x| < 1/2$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = 2 \int_0^{1/2} x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{12}$$



$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} x^2 e^{-2\pi n x} dx \stackrel{\text{parte}}{=} \left[x^2 \frac{e^{-2\pi n x}}{-2\pi n} \right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2\pi n} \int_{-1/2}^{1/2} 2x e^{-2\pi n x} dx$$

$$= \frac{1/4}{-2\pi n} \left[e^{-\pi n} - e^{\pi n} \right] + \frac{1}{\pi n} \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} x e^{-2\pi n x} dx}_{\text{Ejemplo 1}} = \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi^2 n^2}, \quad n \neq 0.$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2} e^{2\pi n x}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Por el CRITERIO DIRICHLET,
la serie converge en $|x| < 1/2$
... y por DIRICHLET, tb en $x = \pm \frac{1}{2}$!

Serie de Fourier real

$$x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2} \underbrace{\left(e^{2\pi n x} + e^{-2\pi n x} \right)}_{2 \cos(2\pi n x)} = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x).$$

MÁS SOBRE EJEMPLO 2...

Hemos probado que

$$x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x), \quad |x| \leq 1/2.$$

- Si $x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow \cos(2\pi n x) = (-1)^n \dots$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

- ... que despejando da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!!
- Análogamente si $x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \dots$
- ... que despejando da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$!!
- **Deberes...** pensar ejerc 1,2,3,4 de Hoja 4

§1.2. SERIES DE FOURIER EN $L^1(\mathbb{T})$: DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO DE DINI

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Martes, 13 abril 2021

UN RESULTADO PRELIMINAR

Recordar un lema sobre la integral de Lebesgue (FVV2)

LEMA: APROX POR FUNC SIMPLES

Si $f \in L^1(0, 1)$ entonces existen **func simples** s_1, s_2, s_3, \dots tq

① $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \quad \text{ctp } x \in (0, 1)$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - s_n(x)| dx = 0$

- **Nota:** Pueden tomarse **func simples** del tipo $s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{(a_j, b_j)}$
ver [Folland, Thm 2.26]
- [Incluso podrían tomarse $s_n \in C_c^\infty(0, 1) \dots$]

EL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Demostración:

- Caso $f = \chi_{(a,b)}$

$$\hat{f}(n) = \int_a^b e^{-2\pi i n x} dx = \left[\frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} \right]_a^b = \frac{e^{-2\pi i n a} - e^{-2\pi i n b}}{2\pi i n}$$

y por tanto $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\pi |n|} \rightarrow 0, \quad \text{si } |n| \rightarrow \infty$

- En particular, si $s(x)$ es func simple $\implies \lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{s}(n) = 0.$

DEM LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

Caso $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Dem lema Riemann Lebesgue

• Caso $f \in L^1(\mathbb{T})$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists s = \text{func. simple}$ / $\|f - s\|_L < \varepsilon$

Como $s = \sum_{j=1}^k a_j X_{[a_j, b_j]}$ $\Rightarrow |\hat{s}(n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ por l'hopital.

Entonces $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, s) : |\hat{s}(n)| < \varepsilon, \forall |n| \geq n_0$.

Concluimos que, para $|n| \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= |\hat{f-s}(n) + \hat{s}(n)| \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - s(x)| |e^{2\pi i nx}| dx + |\hat{s}(n)| \\ &= \|f - s\|_L + |\hat{s}(n)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

CRITERIO DE DINI 1

TEOREMA 1: CRITERIO DE DINI (VERSIÓN 1)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es **derivable** en x_0 entonces

$$\exists \lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = f(x_0)$$

Notación (sumas parciales):

$$S_{M,N}f(x) := \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad y \quad S_Nf(x) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

DEM DINI 1

(2)

Dem Dim 1

[CASO 1] Suponer $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Entonces

$$S_{M,N} f(x_0) := \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{g(x)}{e^{2\pi i n x} - 1} \cdot (e^{2\pi i n x} - 1) \cdot e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) e^{-2\pi i (n-1)x} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n). \end{aligned}$$

Por tanto, tengo una razón telescópica

$$\begin{aligned} S_{M,N} f(0) &= \sum_{n=-N}^M (\hat{g}(n-1) - \hat{g}(n)) = (\hat{g}(-N-1) - \hat{g}(-N)) + \dots + (\hat{g}(M-1) - \hat{g}(M)) \\ &= \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(M) \xrightarrow[N, M \rightarrow \infty]{} 0 \} \end{aligned}$$

Por el Lema Riemann-Lebesgue ...

se puede probar que
 $g \in L^1(\mathbb{T}) !!$

DEM DINI 1 (CONTINUACIÓN)

Falta demostrar que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{e^{m|x|} - 1} \in L^1(\Pi).$$

Tomo $\Pi \cong [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

posible problema
 $\sim x \rightarrow 0$

Uso hipótesis: f derivable en $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x}}_{x \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{e^{m|x|} - 1}}_{x \rightarrow 0} \\ &= f'(0) \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x)$ es ACOTADA cerca de $x = 0$

$$\rightarrow \exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} |g(x)| dx < \infty \quad (1).$$

• En el resto $\delta \leq |x| \leq 1/2 \rightarrow h(x) = e^{m|x|} - 1$ es cont. y uniformemente continua, $\forall \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$.

por tanto

$$(2) \quad \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} |g(x)| dx \leq \frac{1}{m} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} |f(x)| dx < \infty.$$

Al unir (1) + (2) obtenemos

$$\int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |g(x)| dx < \infty.$$

DEM DINI 1: CASO f GENERAL

CASO f general

Llamo $F(x) := f(x_0 + x) - f(x_0) \in L^1(\pi)$. ④

Como $F(0) = 0$ y $F'(0) = f'(x_0)$ puedo usar CASO 1:

$$S_{M,N} F(0) = \sum_{n=-N}^N \hat{F}(n) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

Por $\hat{F}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + x) - f(x_0)) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) e^{-2\pi i n x} dx - f(x_0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i n x} dx$

$\begin{aligned} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-2\pi i n u} du \cdot e^{2\pi i n x_0} - f(x_0) \cdot \delta_{n,0} \\ &\quad \text{Círculo: } x_0 + x = u, dx = du \end{aligned}$

Por tanto

$$S_{M,N} F(0) = \left(\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} \right) - f(x_0) = S_{M,N} f(x_0) - f(x_0) \xrightarrow[M, N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \boxed{\square}$$

LA CONDICIÓN DE DINI: SIGNIFICADO

NOTA:

El criterio de Dini es VALIDO con menos que "f derivable en x_0 " ...

Solo necesita que $\exists \delta > 0 : g(x) \in L^1(-\delta, \delta)$.

Es decir, basta que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0+x) - f(x_0)|}{|x|} dx < \infty.$$

Condición de Dini

Racóndole

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{e^{mx}-1} \approx cte$$

Ejemplo:

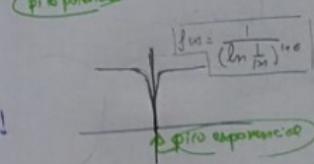
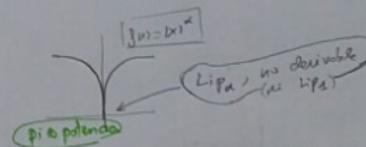
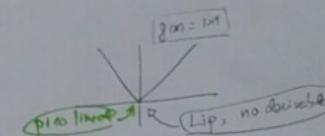
① Si $f \in \text{Lip}(x_0)$ en $\exists \delta > 0 : |f(x_0+h) - f(x_0)| \leq M|h| \quad \forall |h| \leq \delta$

② Si $a \in (0, 1]$, se dice que $f \in \text{Lip}_a(x_0) [o C^a(x_0)]$ si

$\exists \delta > 0 : |f(x_0+h) - f(x_0)| \leq M|h|^a \quad \forall |h| \leq \delta$

③ ¿Cuánto de agudo puede ser el piso?

Si: $f(x) = \frac{1}{(\ln \frac{1}{|x|})^{1+\epsilon}} \Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x)|}{|x|} dx = 2 \int_0^{\delta} \frac{dx}{|x|(\ln \frac{1}{|x|})^{1+\epsilon}} < \infty !!$



CONTRAEJEMPLOS (SIN DEMOSTRAR)

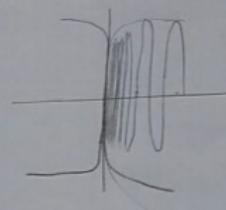
- ¿Será la SF convergente si sólo pido f cont en x_0 ?

⑥

Teorema Du Bois Reymond (1873)

$$\boxed{\exists f \in C(\Pi) / \limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty}$$

si SF DIVERGE en $x = 0$!!



[de hecho, incluso $\exists f \in C(\Pi)$:

$$|g(x+\Delta) - g(x)| \leq \frac{C}{\delta g(x)}$$

$\forall x, \delta x$

¿y si x_0 no es continua?

Teorema Kolmogorov (1926)

$$\boxed{\exists f \in L^1(\Pi) / \limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty, \forall x \in \Pi}$$

si SF DIVERGE
en TODOS los PTS !!

Teorema Carleson 1966

$f \in C(\Pi)$ (\circ incluso $f \in L^p(\Pi)$ con $p > 1$)

$$\Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x) \quad \text{ctp } x \in \Pi.$$

Teorema de Dirichlet I

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ / f es derivable en $x_0 \in \mathbb{T}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{N, M \rightarrow \infty} S_{N, M} f(x_0) = f(x_0)$$

Notar que

$$\begin{aligned} S_{N, M} f(x) &= \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^M \underbrace{\int_{\mathbb{T}}}_{-\pi \leq y \leq \pi} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n y} dy e^{2\pi i n x} \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(y) \underbrace{\sum_{n=-N}^M e^{2\pi i n(x-y)}}_{D_{N, M}(x-y)} dy = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) D_{N, M}(t) dt \end{aligned}$$

\uparrow
 $x-y=t$

Nota $D_{N, M}(t) = \sum_{n=-N}^M e^{2\pi i n t} =$ m\'u\'edo de Dirichlet (acim\'etico)

Usaremos 2 propiedades de $D_{N, M}(t)$

$$\textcircled{1} \quad \int_{\mathbb{T}} D_{N, M}(t) dt = 1, \quad \forall N, M \in \mathbb{N}.$$

Dem usan $\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n t} dt = \delta_{n, 0}$

$$\textcircled{2} \quad D_{N, M}(t) = \frac{e^{2\pi i (M+1)t} - e^{-2\pi i Nt}}{e^{2\pi i t} - 1} \quad \text{si } t \neq 0 \pmod{2\pi}$$

Dem $\because z = e^{2\pi i t} \Rightarrow D_{N, M}(t) = \sum_{n=-N}^M z^n = \frac{z^{M+1} - z^{-N}}{z - 1}$.

EJERCICIO ③ $\int_0^1 D_{N, M}(t) dt = \frac{1}{2}$

Dem Dim I

1

$$\begin{aligned}
 S_{N,M} f(x_0) - f(x_0) &= \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - t) D_{N,M}(t) dt - f(x_0) \underbrace{\int_{\mathbb{T}} D_{N,M}(t) dt}_{1} \\
 &= \int_{\mathbb{T}} [f(x_0 - t) - f(x_0)] \cdot D_{N,M}(t) dt \\
 (\text{verificar}) \quad \textcircled{2} \quad &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{e^{2\pi i t} - 1} \cdot (e^{2\pi i (M+1)t} - e^{-2\pi i Nt}) dt \\
 &\quad \underbrace{g(t)}_{g(t)} \\
 &= \hat{g}(-M-1) - \hat{g}(N)
 \end{aligned}$$

Si probro que $\boxed{g \in L^1(\mathbb{T})}$ entonces, por Lema Pr 2,

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} S_{N,M} f(x_0) - f(x_0) = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \hat{g}(-M-1) - \hat{g}(N) = 0 \quad \checkmark$$

Falta demostrar que

$$\boxed{g(t) = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{e^{2\pi i t} - 1} \in L^1(\mathbb{T})}$$

↑ posible problema si $t \rightarrow 0$

Tomo $t \in \mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Uso hipótesis, f derivable en x_0

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \cdot \frac{t}{e^{2\pi i t} - 1} = -f'(x_0) \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

$\Rightarrow g$ es ACOTADA cerca de $x=0$, es d.

$$\exists \delta > 0 / \int_{-\delta}^{\delta} |g(t)| dt < \infty \quad (1)$$

• En el resto $|\delta| \leq |t| \leq \frac{1}{2} \rightarrow h(t) = e^{2\pi i t} - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists c_\delta > 0 / |h(t)| \geq c_\delta, \quad \forall \delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$(2) \int_{\delta \leq t \leq \frac{1}{2}} |g(t)| dt \leq \frac{1}{c_\delta} \int_{\mathbb{R}} |f(x_0 - t) - f(x_0)| dt \leq \frac{\|f\|_2 + \|f\|_\infty}{c_\delta} < \infty.$$

De (1) + (2) sigue que $\int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt < \infty$

NOTAS:

El CRITERIO DINI I es válido con MENOS que " f derivable en x_0 ".

En la definición sólo necesito que $\exists \delta > 0 / g(rt) \in L^1(-\delta, \delta)$

Como

$$|g(t)| = \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{t}{e^{2\pi i t} - 1} \right|}_{\approx \left| \frac{1}{2\pi i t} \right| = ct}$$

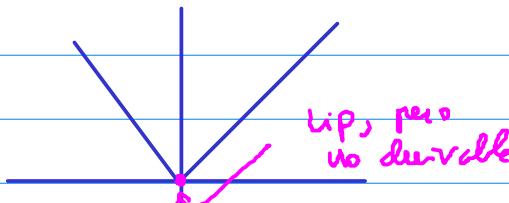
entonces, el criterio de Dini es cierto ~

$$\boxed{\exists \delta > 0 / \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0)|}{|t|} dt < \infty.}$$

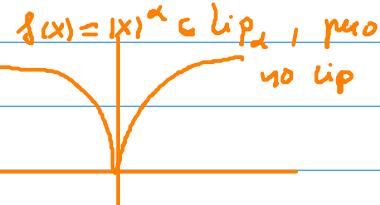
Condición de Dini

Ejemplos

① $f \in \text{Lip}(x_0) \sim \exists \delta > 0 / |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M \cdot |t| \quad \left\{ \begin{array}{l} M \cdot |t| \leq \delta \\ |t| \leq \delta \end{array} \right.$



Def



② Si $0 < \alpha \leq 1$, se dice que

$$f \in \text{Lip}_\alpha(x_0)$$

$$\sim \exists \delta > 0 /$$

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M \cdot |t|^\alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} M \cdot |t|^\alpha \leq \delta \\ |t|^\alpha \leq \delta \end{array} \right.$$

ejemplo

Def

$$0 < q \leq 1$$

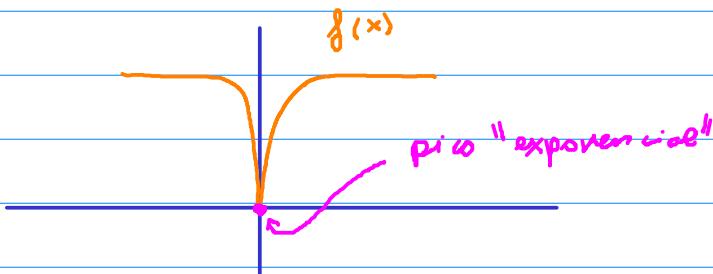
$f \in \text{Lip}_q(x_0) \iff \exists \delta > 0 / |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M|t|^q, \forall |t| \leq \delta$

Y en este caso:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0)|}{|t|} dt \leq 2 \int_0^{\delta} \frac{M|t|^q}{|t|} dt = 2M \left[\frac{t^{q+1}}{q+1} \right]_0^{\delta} = \frac{2M}{q+1} \delta^{q+1} < \infty$$

③ ¿Cuánto de agudo puede ser el pico?

$$\text{Ej: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\ln \frac{1}{|x|})^{1+\varepsilon}} & |x| \leq V_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x)|}{|x|} dx = 2 \int_0^{\delta} \frac{dx}{x (\ln \frac{1}{x})^{1+\varepsilon}} < \infty$$



$$CV \frac{1}{x} = e^t$$

→ Moral: con un poco de suavidad, la SF es convergente

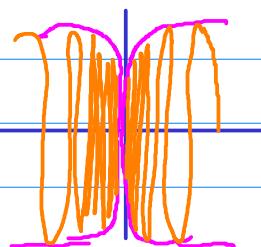
Q ¿Será la SF convergente si sólo pido $f \in C(\bar{\mathbb{T}})$?

Teatrero 1 Du Bois-Reymond (1873)

$$\exists f \in C(\bar{\mathbb{T}}) / \lim_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty.$$

si SF diverge en $x=0$!!

muchas oscilaciones dentro de un pico muy agudo

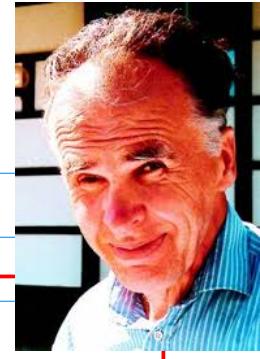


¿Y si no pido f continua?

Teatrero 2 Kolmogorov (1925)

$$\exists f \in L^1(\mathbb{T}) / \lim_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty, \forall x \in \mathbb{T}$$

El teorema que cierra la Teoría es debido a L. Carleson



Teatrino 3

$f \in C(\mathbb{T})$ (ω incluso si $\int_{\mathbb{T}} |f|^p < \infty$, con $p > 1$)

$$\Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x) \text{ en dt p } x \in \mathbb{T}.$$

§1.2. SERIES DE FOURIER EN $L^1(\mathbb{T})$: DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO DE DINI 2, EJEMPLOS Y COROLARIOS

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Miércoles, 14 abril 2021

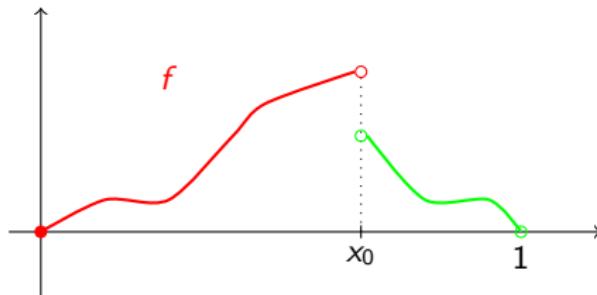
CRITERIO DE DINI 2

Hoy vamos a demostrar

TEOREMA 2: CRITERIO DE DINI (VERSIÓN 2)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(x_0)^\pm$ y $f'(x_0)^\pm$, entonces

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \frac{f(x_0)^- + f(x_0)^+}{2}.$$



DEM DINI 2

Dem Dini 2

①

$$\begin{aligned}
 S_N f(x_0) &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-2\pi i n (x-x_0)} dx \\
 \text{cv: } &\left\{ \begin{array}{l} x-x_0=y \\ dx=dy \end{array} \right. \quad \sum_{n=-N}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+y) e^{-2\pi i n y} dy = \sum_{n=-N}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \dots \\
 &= \sum_{n=-N}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x_0+y) - f(x_0^-)) e^{-2\pi i n y} dy + f(x_0^+) \cdot \sum_{n=-N}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n y} dy \\
 &+ \sum_{n=N}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x_0+y) - f(x_0^+)) e^{-2\pi i n y} dy + f(x_0^+) \cdot \overbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^0 e^{-2\pi i n y} dy}^{\text{EJERCICIO: } \sum_{n=-N}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n y} dy = 1/2}
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 S_N f(x_0) &= \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} + \sum_{n=-N}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x_0+y) - f(x_0^+)}{e^{2\pi i n y} - 1} (e^{2\pi i n y} - 1) e^{-2\pi i n y} dy \\
 &+ \sum_{n=N}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{f(x_0+y) - f(x_0^+)}{e^{2\pi i n y} - 1} (e^{2\pi i n y} - 1) e^{-2\pi i n y} dy
 \end{aligned}$$



DEM DINI 2 (CONTINUACIÓN)

Por tanto, ~

$$g(y) = \begin{cases} g_1(y), & y \in (0, \frac{1}{2}) \\ g_2(y), & y \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$\in L^1(\Pi)$

②

$$\Rightarrow S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} + \underbrace{\sum_{n=-N}^N (\hat{f}(n-1) - \hat{f}(n))}_{= \hat{f}(-N-1) - \hat{f}(N)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

lema R-L

Sólo hay que ver si $\boxed{g \in L^1(\Pi)}$

$$\boxed{y > 0} \quad g(y) = g_1(y) = \frac{f(x_0+y) - f(x_0^+)}{y} \cdot \frac{y}{e^{2\pi i y} - 1} \xrightarrow{\text{cota}} f'(x_0^+) \cdot \frac{1}{2\pi i} \quad \int_0^\delta |g(y)| dy < \infty \quad (1)$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : g(y) \text{ acotada en } (0, \delta) \Rightarrow$

(2)

$\boxed{y < 0}$ idem con x_0^- usando $\exists f'(x_0^-)$

$$\boxed{|y| < 0} \quad |h(y)| = |e^{2\pi i y} - 1| \geq m \rightarrow \int_{-\delta/2}^{\delta/2} |g(y)| dy \leq \frac{1}{m} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (|f(y+x_0)| + |f(x_0^{\pm})|) dy < \infty$$

Uniendo (1) + (2) $\longrightarrow g \in L^1(\Pi)$.

NOTA

Tb funciona con:

$$\boxed{\exists \delta > 0 : \int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm h) - f(x_0^{\pm})|}{|h|} dh < \infty}$$

Condiciones de Dini "laterales"

EJEMPLO: EJERCICIO 2

EJERCICIO 2

Piden SF de $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2ni\alpha x}$, $|x| < \pi$.
 Tomando $\theta = 2ni\alpha x \rightarrow$ calculo SF de $f(x) = e^{-2ni\alpha x}$, $|x| < \pi/2$.

$$\Rightarrow f(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2ni\alpha x} \cdot e^{-2ni\alpha x} dx = \left[\frac{e^{-2ni(n+\alpha)x}}{-2ni(n+\alpha)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-ni(n+\alpha)} - e^{ni(n+\alpha)}}{-2ni^2(n+\alpha)} = \frac{2ni\sin(n+\alpha)}{\pi(n+\alpha)}$$

$$= \frac{\overset{(0)}{\text{sen}(n\alpha)} + \overset{(1)}{\text{cos}(n\alpha)\text{sen}(n\alpha)}}{\pi(n+\alpha)} = \frac{(-1)^n \cdot \text{sen}(n\alpha)}{\pi(n+\alpha)}.$$

Como $f \in C^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, por Crt Dini 1,

$$f(x) = e^{-2ni\alpha x} = \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \cdot e^{2ni\alpha x}, \quad |x| < \pi/2.$$

Tomando $x=0$

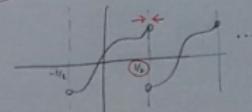
$$\rightarrow \frac{\pi}{\text{sen}(n\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

descomposición en "series de nímplos" de
 $F(z) = \frac{\pi}{\text{sen}(iz)}$

¿Qué sucede si $x = \pm \pi/2$? Uso Dini 2 ...

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi \text{sen}(n\alpha)}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{n+\alpha} e^{2ni\alpha \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{f(\frac{\pi}{2}^+) + f(\frac{\pi}{2}^-)}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2}^+) = f(-\frac{\pi}{2}^-)$$



$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi \text{sen}(n\alpha)}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n+\alpha} = \frac{e^{-ni\alpha} + e^{ni\alpha}}{2} = \cos(n\alpha) \Rightarrow \frac{\pi}{\tan(n\alpha)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n+\alpha}$$

NOTA: FÓRMULA DE PARSEVAL

En algunos ejercicios se debe usar la

FÓRMULA DE PARSEVAL

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

- La probaremos la semana que viene...
- **Ejemplo:** $e^{-2\pi i \alpha x} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n + \alpha} e^{2\pi i n x}, \quad |x| < 1/2$

$$\Rightarrow 1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{\sin^2(\pi \alpha)}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \alpha)^2}.$$

- Hacer ejercicio 3...

DERIVACIÓN DE SERIES DE FOURIER

Recordar

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \rightarrow \text{¿Derivadas de SF?}$$

③

Proposición 1

$$\text{Si } f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f}^{(k)}(n) = (2\pi i n)^k \cdot \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En particular,

$$\hat{f}'(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2\pi i n)^1 \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Dem: $|k=1|$

$$\hat{f}'(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx = \left[f(x) e^{-2\pi i n x} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-e^{-2\pi i n x})' dx$$

(parte)

¡Función periódica!

(coincide en $x=0, x=1$).

$$= 2\pi i n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

$$= 2\pi i n \cdot \hat{f}(n).$$

Corolario 1

$$\text{Si } f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow |\hat{f}(n)| \leq \frac{C_{p,k}}{|n|^k}, \quad n \neq 0$$

" f mide $\Rightarrow \hat{f}(n) \rightarrow 0$ "
(desde $n \rightarrow \infty$)

Un opac?

Dem:

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{\hat{f}^{(k)}(n)}{(2\pi i n)^k} \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_L}{(2\pi i n)^k} \cdot \frac{1}{|n|^k}.$$

Corolario 2

$$\text{Si } f \in C^2(\mathbb{T}) \Rightarrow f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

convergencia UNIF y ABSOLUTA.

Dem: M-teor.

INTEGRACIÓN DE SERIES DE FOURIER

(4)

Integración de SF

Proposición 2 Sean $f \in L^1(\Pi)$ y $F(x) := \int_0^x f(t) dt$

Entonces $\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n) - \hat{f}(0)}{2\pi i n}$, $n \neq 0$.

Además $F(x) - \hat{f}(0)x \sim \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + C_0 \quad (*)$

Dem:

caso 1: Suponen $\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f = 0 \rightarrow F$ es periódica

$$\Rightarrow \hat{F}(n) = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 f(t) \int_{-\pi}^1 e^{-2\pi i n x} dx dt$$
$$= \int_0^1 f(t) \left[\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_{-\pi}^1 dt = \int_0^1 f(t) \frac{1 - e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} dt = \frac{\hat{f}(n) - \hat{f}(0)}{2\pi i n} = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n}.$$

caso general: Aplican razon 1 a $g(x) = f(x) - \hat{f}(0)$. (ejercicio) □

NOTAS: ① La cte C_0 es el 0-coef de $F(x) - \hat{f}(0)x$.

② Se puede probar que (*) converge uniformemente $\forall x \in \Pi$ →

Criterio de Dirichlet-Jordan

EJEMPLOS

(5)

EJEMPLOS

① Vimos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n x), \quad |x| < 1/2$$

ejemplo 1

intoyando

$$\frac{x^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \left[\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \right] + d_0 = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x).$$

¡coincide con ejemplo 2!

② Sabiendo

$$x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x), \quad |x| < 1/2$$

intoyando

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} + d_0, \quad |x| < 1/2$$

③ Sabiendo

$$|x| = \frac{1}{4} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)x), \quad |x| < 1/2$$

EJERCICIO

$$\int_0^x \frac{x^2}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \int_0^x \cos(2\pi(2k+1)t) dt \rightarrow \left[\frac{\cos(2\pi(2k+1)t)}{2\pi(2k+1)} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} = -\frac{1}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cdot \cos(2\pi(2k+1)x)} \quad 0 < x < 1/2$$

$$x = 1/4 \rightarrow \frac{1}{32} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{\pi^3} \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad !!}$$

EJERCICIO 4b

Hallar

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}}$$

Teorema Criterio de Dini (variedad II).

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $\exists f(x_0)^+$ y $\exists f(x_0)^-$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \frac{f(x_0)^+ + f(x_0)^-}{2}$$

Notación

- $f(x_0)^{\pm} = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} f(x_0 + t)$

- $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \dots = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) D_N(t) dt.$

donde $D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n t} = \text{máximo de Dirichlet (mínimo local)}$

- Recordar el ejercicio

$$\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = \frac{1}{2}$$

Nota

$$D_N(t) = D_N(-t)$$

- Recordar que $D_N(t) = \frac{e^{2\pi i (N+1)t} - e^{-2\pi i Nt}}{e^{2\pi i t} - 1}$

$$= \frac{e^{2\pi i (N+1)t} - e^{-2\pi i Nt}}{e^{2\pi i t} - 1} = \frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

(ya)

Dem Dini II

$$S_N f(x_0) - \frac{f(x_0)^+ + f(x_0)^-}{2} = \int_{\mathbb{T}} f(x_0 + t) D_N(t) dt - \frac{1}{2} f(x_0)^+ - \frac{1}{2} f(x_0)^-$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + t) - f(x_0)^+] D_N(t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0)^-] D_N(t) dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \cdot (e^{2\pi i (N+1)t} - e^{-2\pi i Nt}) dt$$

$g_1(t)$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)^+}{e^{2\pi i t} - 1} & \text{si } t \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)^-}{e^{2\pi i t} - 1} & \text{si } t \in (-\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$$

$g_2(t)$

Por tanto, si demostramos que $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$S_N f(x_0) - f(x_0) = \widehat{g}^{(-N-1)} - \widehat{g}^{(N)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{=} 0 \quad \text{por Teorema R-L.}$$

Razonando como en Dini I, conseguimos

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)^+}{e^{2\pi i t} - 1} = \frac{f'(x_0)^\pm}{2\pi i}$$

entonces $\exists \delta > 0$ t.q. $g_1(t)$ y $g_2(t)$ estén acotadas en $(-\delta, \delta)$.

En particular

$$\int_0^\delta |g_1(t)| dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_{-\delta}^0 |g_2(t)| dt < \infty. \quad (17)$$

L. $\delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}$, entonces $|h(t)| = |e^{2\pi i t} - 1| \geq c_\delta > 0$

y también se tiene

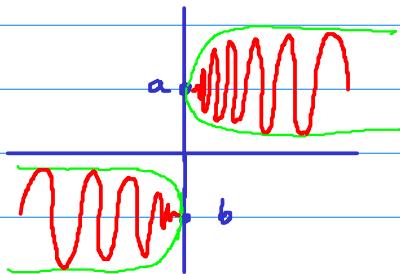
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g_1(t)| dt \leq \frac{\|g\|_{L^1} + \|f(x_0)\|^+}{c_\delta} < \infty \quad \text{y} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g_2(t)| dt \leq \frac{\|g\|_{L^1} + \|f(x_0)\|^+}{c_\delta} < \infty. \quad (2)$$

Uniendo (1) + (2) se concluye que $\sum_{n=-N_2}^{N_2} |g_n| < \infty$.

Nota: La demostración tb funciona con las condiciones de Dini laterales

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)^\pm}{t} \right| dt < \infty$$

Ej. Si $f(x) = \begin{cases} a + |x|^2 \cdot \cos \frac{1}{|x|}, & 0 < x \leq 1 \\ b + |x|^2 \cdot \cos \frac{1}{|x|}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$



Dini II $\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0) = \frac{a+b}{2}$

Diferenciación e integración de SF

Sea $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$. Entonces, "formalmente"

$$(1) \quad f'(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i n}$$

$$(2) \quad \int_0^x f(t) dt \sim \widehat{f}(0)x + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\widehat{f}(n)}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + C$$

¿Podemos dar un teorema que justifique cuando se tiene " \sim "?

Lema 1 Si $f \in C^k(\mathbb{T})$ entonces $\widehat{f}^{(k)}(n) = (2\pi i n)^k \cdot \widehat{f}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Además, $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}$, $|n| \geq 1$.

Dem Hacemos el caso $k=1$

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \int_{\mathbb{T}} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx = \left[f(x) e^{-2\pi i n x} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{\mathbb{T}} f(x) \left(e^{-2\pi i n x} \right)' dx \\ &\quad \text{por periodicidad} \\ &= 2\pi i n \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = 2\pi i n \cdot \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Iterando por inducción sobre $\widehat{f}^{(k)}(n) = (2\pi i n)^k \cdot \widehat{f}(n)$.

En particular

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{\widehat{f}^{(k)}(n)}{(2\pi i n)^k} \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_2}{(2\pi)^k} \cdot \frac{1}{|n|^k}.$$

□

Corolario Si $f \in C^2(\mathbb{T})$ entonces $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$, $\forall x \in \mathbb{T}$
 con convergencia UNIF + ABS

Dem: Se puede usar el M-teor.

□

Corolario 2 Si $f \in C^N(\mathbb{T})$ entonces para $0 \leq n \leq N$ se tiene

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n x}, \quad \forall x \in \mathbb{T} \text{ uniformemente.}$$

Para integrar series de Fourier usaremos el lema

Lema 3 Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ con $\int_{\mathbb{T}} f = 0$, y sea $F(x) := \int_0^x f(t) dt$.

Entonces

$$\hat{F}(n) = \frac{\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt}{2\pi i n}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

En particular

$$F(x) \sim \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + C_0 \quad (*)$$

Demo: Notar que F es periódica pues

$$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(1) = \int_0^1 f = 0. \quad \Rightarrow \quad F \in C(\mathbb{T}).$$

$$\begin{aligned} \underset{n \neq 0}{\hat{F}(n)} &= \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i n t} dt = \int_0^1 \int_0^x f(t') dt' e^{-2\pi i n t} dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 f(t) \left(\int_t^1 e^{-2\pi i n x} dx \right) dt = \int_0^1 f(t) \frac{e^{-2\pi i n t} - e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} dt \\ &= \frac{\hat{f}(0) - \hat{f}(n)}{-2\pi i n} = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} \end{aligned}$$

Notas

① La cte $C_0 = \hat{F}(0)$ se debe calcular a mano

② Se puede probar que la SF (*) siempre converge UNIF $\{x \in \mathbb{T}\}$
en sentido de Dirichlet-Jordan

③ Cuando $\int_{\mathbb{T}} f \neq 0$, se aplica el Thm a $g(x) = f(x) - \hat{f}(0)$

$$\Rightarrow F(x) - \hat{f}(0)x = \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + C_0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{(converges UNIF en } \mathbb{T} \text{)} \\ \text{(converges UNIF en } \mathbb{T} \text{)} \end{array} \right\}$$

Ejemplos

↓
ejemplo 1

① Vemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n} \sin(2\pi n x)$, $|x| < \frac{1}{2}$ $\leftarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x = 0$

integrandos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n} \left(-\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \right) + C_0 \\ &= C_0 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(2\pi n x). \quad \text{|| ejemplo 2 !!} \\ &\quad \text{ya vimos que } C_0 = \frac{1}{2}. \quad i \frac{1}{24} \end{aligned}$$

integrandos

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3} &= \frac{x}{12} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} + C_0 \\ &\quad \leftarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{12} \right) dx = 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

② Ejercicio 4 Sabiendo $|x| = \frac{1}{4} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2n+1)x)}{(2n+1)^2}$, $|x| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \frac{x}{4} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \underbrace{\int_0^x \cos(2\pi(2n+1)t) dt}_{L_2 = \frac{\sin(2\pi(2n+1)x)}{2\pi(2n+1)}} \\ \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} &= -\frac{1}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2n+1)x)}{(2n+1)^3}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si: $x = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{32} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} !!}$$

Ejercicio 4b : Probar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{5}{1536} \pi^5.$$

§1.2. SERIES DE FOURIER EN $L^1(\mathbb{T})$: UNICIDAD DE LAS SF, EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Jueves, 15 abril 2021

TEOREMA DE UNICIDAD

Hoy vamos a demostrar

TEOREMA 3: UNICIDAD DE LA SF

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow f \equiv g.$$

- Lo vamos a deducir de lo anterior y un resultado de Teoría de la Medida...
- Más adelante se obtendrá también como corolario directo del Teorema de Féjer

DEM TMA UNICIDAD

①

Teorema 3: Unicidad de la SF

$$\boxed{\text{Sean } f, g \in L^1(\mathbb{T}) : \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow f \equiv g}$$

Dem: Sea $h := f - g \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{h}(n) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$. Veamos que $h \equiv 0$.

[CASO 1]: $h \in C^1(\mathbb{T})$ (\circ derivable). Por Cálculo Dif 1

$$h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{h}(n) e^{2\pi i n x} \equiv 0, \forall x \in \mathbb{T}$$

[CASO 2]: $h \in C(\mathbb{T})$ Defino la primitiva $H(x) := \int_0^x h(t) dt \in C^1(\mathbb{T})$ (\circ periódica, pues $\hat{h}(0) = 0$)

Defino la primitiva $H(x) := \int_0^x h(t) dt \in C^1(\mathbb{T})$ (\circ periódica, pues $\hat{h}(0) = 0$)

Por la Prop 2 $\hat{H}(n) = \frac{\hat{h}(n) - \hat{h}(0)}{2\pi i n} = 0 \quad \xrightarrow{n \neq 0} \quad H(x) \equiv \hat{H}(0) = cte$

TFC $0 = H'(x) = h(x)$.

[CASO 3]: $h \in L^1(\mathbb{T})$. La misma prueba vale si conozco:

Lema TFC - Lebesgue

ver [Folland, Corol 3.33]

$$\boxed{\text{Si } f \in L^1(0,1) \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ es derivable en } \mathbb{C}^p \times \text{ y además } F'(x) = f(x) (\mathbb{C}^p \times)}$$

EJERCICIOS 3 Y 4: SUMAS DE SERIES ARMÓNICAS

Aplicaciones a sumas de series armónicas

Hemos visto cómo usar SF para probar

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Variantes

① $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = S_{\text{par}} + S_{\text{ímpar}}$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} S + S_{\text{ímpar}}$$

$$S_{\text{ímpar}} = \frac{3}{4} S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

② Serie alternada

$$S^{\pm} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{3}{4} S - \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} S$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Conclusión: $S, S_{\text{ímpar}}, S^{\pm}$ están relacionados
(si conozco una, conozco todas)

EJERCICIO 3 iii: Calculan $S, S_{\text{ímpar}}, S^{\pm}$ para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

MÁS SOBRE SERIES ARMÓNICAS

②

Algunos problemas abiertos

① ¿Qué se sabe de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$?

Con SF se puede hallar ejerc 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

... pero no parece posible hallar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}$) ...

Tma Apéry (1979): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}$

¿Es $S(3)$ trascendente? ¿Es $S(2m+1) \notin \mathbb{Q}$, $m=2, 3, \dots$?

Problema Ab²: ¿Es $S(3)$ trascendente?

② Indoso con potencias 2,

¿Es $G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$ irracional?

$$G = \text{constante de Catalan}$$

↳ problema ab² (G = constante de Catalan)

SERIES DE FOURIER REALES (EJERC 5)

SERIE DE FOURIER REAL

(ejercicio 5)

①

Recordar

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^N [\hat{f}(n) e^{2\pi i n x} + \hat{f}(-n) e^{-2\pi i n x}]$$

$$\xrightarrow{\text{F. Euler}} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^N [\hat{f}(n) (\cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)) + \hat{f}(-n) (\cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x))]$$

$$= \underbrace{\hat{f}(0)}_{\downarrow} + \sum_{n=1}^N \left[\underbrace{(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))}_{a_n} \cos(2\pi n x) + \underbrace{i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))}_{b_n} \sin(2\pi n x) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$$

Es decir,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$$

donde

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{(e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x})}{2} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2\pi n x) dx, \quad n=0,1,2,$$

$$b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) i \frac{(e^{2\pi i n x} - e^{-2\pi i n x})}{-2i} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2\pi n x) dx$$

NOTA: Los teoremas de convergencia sobre S_N son los mismos para SF real y compleja !!

Ejerc: SF para
 $f(x)$ par / impar

MÁS SOBRE SF REALES (EJERC 5 Y 6A)

Resumen

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \\ b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ \hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{array} \right.$$

(2)
n=0, 1, 2, ...

[NOTA] Fórmula de Parseval

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

EJERCICIOS : SF con f real

Notan que $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{2\pi n x} dx = \hat{f}(-n)$. ⊗

Entonces:

$$\textcircled{1} \cdot f \text{ real} \Leftrightarrow f = \bar{f} \Leftrightarrow \overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n) \quad \left[\begin{array}{l} \text{"\Leftrightarrow con el} \\ \text{Tomo unicidad} \end{array} \right]$$

$$\textcircled{11} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \hat{f}(n) + \overline{\hat{f}(n)} = 2 \operatorname{Re}(\hat{f}(n)) \\ b_n = \dots = -2 \operatorname{Im}(\hat{f}(n)) \end{array} \right. \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

SERIES DE FOURIER PARES/IMPARES (EJERCICIO 6B)

EJERCICIO 6 (iii+iv)

SF de f par / impar

(3)

Recordar

$$a_n(f) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2\pi n x) dx, \quad b_n(f) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2\pi n x) dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$(iii) \quad f \text{ par} \Leftrightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n(f) = 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)}.$$

? Reciprocidad?

$$\text{Sea } \tilde{f}(x) := f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n(\tilde{f}) = a_n(f) \\ b_n(\tilde{f}) = -b_n(f) \end{cases}$$

$$\text{Ahora } \sim b_n(f) = 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n(\tilde{f}) = a_n(f) \\ b_n(\tilde{f}) = 0 = b_n(f) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \quad \downarrow \text{func.} \quad \Rightarrow \quad f = \tilde{f}$$

$$(iv) \quad f \text{ impar} \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow a_n(f) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)}$$

(Completar como ejercicio)

Teatrma 3 : Unicidad de la SF

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$: $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = g \text{ dp.}$

Demo

Sea $h := f - g \Rightarrow h \in L^1(\mathbb{T}) \text{ y } \hat{h}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow h = 0 \text{ dp. ?}$

Caso 1 : $h \in C^1(\mathbb{T})$ (\circ derivable)

$$\text{Dim I} \quad h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{h}(n) e^{2\pi i n x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Caso 2 : $h \in C(\mathbb{T})$ \rightarrow no puedo aplicar Dim I a $h(x)$, pero si a

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt \in C^1(\mathbb{T}) \quad \leftarrow \text{(periodicidad)} \quad (H(1) = \hat{h}(0) = 0)$$

Lema 2

$$\Rightarrow \hat{h}(n) = \frac{\hat{h}(0)}{2\pi n} = 0, \quad \forall n \neq 0$$

Dim I

$$\Rightarrow H(x) = \hat{h}(0) = \text{cte} \quad \xrightarrow{\text{TFC}} \quad h(x) = H'(x) \equiv 0.$$

Caso 3 $h \in L^1(\mathbb{T})$. La misma prueba del caso 2 valdría si conociera

TFC-Lebesgue [Folland, Corol 3.33]

$\Sigma f \in L^1(0,1) \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt$ es derivable en ctp x y además $F'(x) = f(x) \text{ dpx}$

Notas

① Más adelante veremos otra prueba de la unicidad (usando Tmz Fejér)

② Se puede evitar TFC-Lebesgue usando

$$H(x) = \text{cte} \Rightarrow H(b) - H(a) = \int_a^b h(t) dt = 0, \quad \forall a, b$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{T}} h(t) s(t) dt = 0 \quad \forall s(t) = \text{func simple}$$

$$\rightarrow \text{tomando } S_n(t) \rightarrow \text{sign}(h(t)) \xrightarrow{\text{TCD}} \int_{\mathbb{T}} |h(t)| dt = 0$$

$$\Rightarrow h(t) \equiv 0 \text{ ctp } t \in \mathbb{T}$$

Ejercicios : Sumas de series aritméticas

Hemos visto cómo usar SF para probar

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Veamos algunas variantes

① $S_{\text{impar}} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

↳ $S = S_{\text{par}} + S_{\text{impar}} = \frac{1}{4}S + S_{\text{impar}}$

$$\Rightarrow S_{\text{impar}} = \frac{3}{4}S = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} //$$

② $S^{\pm} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$\begin{aligned} S^{\pm} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = S_{\text{impar}} - S_{\text{par}} \\ &= \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12} // \end{aligned}$$

Conclusión : $S, S_{\text{impar}}, S^{\pm}$ están relacionadas ↵ (si conozco una, conozco todas)

Problema ab^o : Hallar

$$S_{\text{impar}}^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \text{cte G de Catalán}$$

↳ no sabe si es racional o irracional

Ejercicio (3c)

(calcular $S, S_{\text{impar}}, S^{\pm}$ para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$)

Problema famoso: ¿Qué se sabe de $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$?

Con SF se puede hallar

$$S_{\text{impares}}^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \rightarrow \text{ver ejercicio 4}$$

... pero no parece posible calcular S , S_{impares} , S^{\pm} ...

Tema de Apéry (1979)

$$S(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}$$



Lo sigue estando ab^o, ¿es $S(3)$ trascendente?

¿es $S(2m+1) \notin \mathbb{Q}$, $m=2,3,\dots$?

Ejercicio 5 Series de Fourier reales

Veamos cómo escribir $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

como SF real

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$$

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^N [\hat{f}(n) e^{2\pi i n x} + \hat{f}(-n) e^{-2\pi i n x}]$$

$$\stackrel{i\theta = a\theta + ib\theta}{=} \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^N [\hat{f}(n) (\cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)) + \hat{f}(-n) (\cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x))]$$

$$= \underbrace{\hat{f}(0)}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^N \left[\underbrace{(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))}_{a_n} \cos(2\pi n x) + i \underbrace{(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))}_{b_n} \cdot \sin(2\pi n x) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)]$$

Pero tanto

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\bar{e}^{inx} + e^{-inx}) dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx$$

$$b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = \dots = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2nx) dx$$

Notas

(mismas fórmulas que ya obtuvimos por ortogonalidad)

① los teoremas de convergencia de $S_N f(x) \rightarrow f(x)$ son los mismos para la ST real y compleja

② Se define $\hat{f}(n) = \frac{a_0}{2}$ para que la fórmula de a_n valga $\forall n \geq 0$.

③ Recuérden

$$\begin{aligned} a_n &= \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \\ b_n &= i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(n) = \frac{a_n - i b_n}{2} \\ \hat{f}(-n) = \frac{a_n + i b_n}{2} \end{array} \right\}$$

④ Fórmula de Parseval

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

⑤ Ejercicio 6.5 : $\boxed{\text{Si } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow a_n, b_n \in \mathbb{R}}$

$$\text{Dado } \hat{f}(-n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx} = \overline{\hat{f}(n)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 2 \operatorname{Re}[\hat{f}(n)] \in \mathbb{R} \\ b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = -2 \operatorname{Im}[\hat{f}(n)] \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejercicio 6 cd SF de funciones pares / impares

6c f es par $\Leftrightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$

6d f es impar $\Leftrightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$

Dar 6c $a_n = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2\pi n x) dx$,
 $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2\pi n x) dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Ahora

$$f \text{ par} \Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x)$$

Recíprocamente, defino $\tilde{f}(x) = f(-x) \Rightarrow a_n(\tilde{f}) = a_n(f)$ $\left. \begin{array}{l} \\ b_n(\tilde{f}) = -b_n(f) \end{array} \right\}$

Ahora si $b_n(f) = 0 \Rightarrow b_n(\tilde{f}) = 0$

$\Rightarrow f$ y \tilde{f} tienen los mismos coeficientes a_m, b_m

$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \hat{f}(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

desde $\Rightarrow f = \tilde{f}$.

Dar 6d ejercicio.

§1.3. SERIES DE FOURIER EN $L^2(\mathbb{T})$

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

19 y 20 abril 2021

EL ESPACIO $L^2(\mathbb{T})$

Se define

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} \quad : \quad \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Algunas propiedades:

- $L^2(\mathbb{T})$ tiene una **norma** y un **producto escalar**

$$\|f\|_{L^2} = \left[\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{y} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

- $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio **completo**: *toda sucesión de Cauchy es convergente*
- $L^2(\mathbb{T}) \subsetneq L^1(\mathbb{T})$

① “ \subseteq ”. Por desig Cauchy-Schwarz, $\int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

② “ \neq ”. Si $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}, |x| < 1/2$; entonces $f \in L^1(\mathbb{T}) \setminus L^2(\mathbb{T})$

LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

LEMA: DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN.

Suponer spdg que $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \implies |f(x)| |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

Por tanto, tomando integrales...

$$\int_{\mathbb{T}} |fg| \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^2 + \int_{\mathbb{T}} |g|^2 \right) = \frac{1+1}{2} = 1 = \|f\|_2 \|g\|_2$$

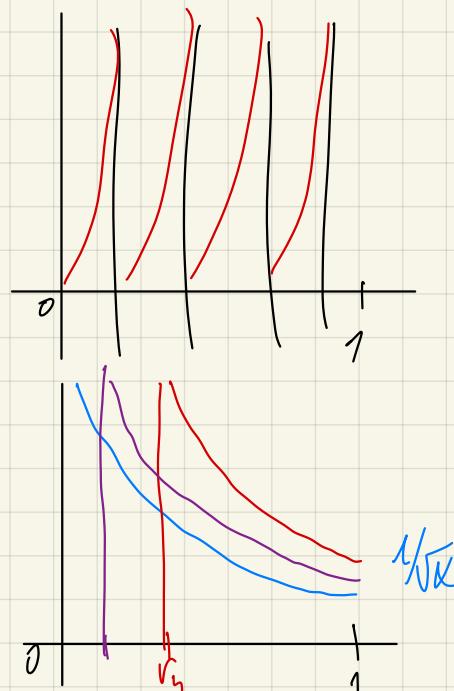


$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \psi(x - r_n)$$

$$0 < x < 1$$



$$\int_0^1 |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_n}^1 2^{-n} \psi(x - r_n) dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int_0^{1-r_n} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2$$

ESPACIOS DE HILBERT

La teoría de SF en $L^2(\mathbb{T})$ es un caso especial de la

teoría de bases ortonormales en un espacio de Hilbert

Def: sea $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -esp vectorial con un *producto escalar*

- ① *Lineal 1^a:* $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$
- ② *Anti-lineal 2^a:* $\langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle f, g_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle f, g_2 \rangle$
- ③ *Hermítico:* $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
- ④ *Def positivo:* $\langle f, f \rangle \geq 0$, $\forall f \in \mathbb{H}$, y además, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Se define la norma asociada al producto escalar

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad f \in \mathbb{H}$$

Se dice que \mathbb{H} es un **espacio de Hilbert** si la norma $\|\cdot\|$ es completa:

toda suc de Cauchy es convergente

EJEMPLOS DE ESPACIO DE HILBERT

- $L^2(\mathbb{T})$ es un esp Hilbert con $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx$
- \mathbb{C}^d es un esp Hilbert con prod escalar usual

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots z_d \overline{w_d}, \quad z, w \in \mathbb{C}^d$$

- $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty\}$ es esp Hilbert con

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

- $H^k(\Omega)$ = espacio de Sobolev, es un esp Hilbert con

$$\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f(x) \overline{\partial^{\alpha} g(x)} dx$$

- $\mathcal{R}[0, 1]$ no es un esp Hilbert: **no es completo**

$$H^k(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid \exists^x f \in L^2(\Omega), \forall |q| \leq k \}$$

onde ∂^q é a derivada lítbil

Def

Si $f \in L^1(\Omega)$ se dice que tiene derivada lítbil $\partial^q f = g$

s.

$$\int_{\Omega} f \partial^q \varphi = (-1)^q \int_{\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\{ \text{ Si } f \in L^1(\Omega) \cap C_c^k(\Omega) \Rightarrow " \partial^q f " = \partial^q f$$

Ejemplos

$$f = 1_{(0, \infty)} \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \int_0^\infty f(x) \varphi'(x) dx = [f(x) \varphi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty f'(x) \varphi(x) dx = -f(0) \varphi(0) = -\varphi(0) = \\ & = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$g = \delta_{\{0\}}$$

ORTOGONALIDAD EN \mathbb{H}

Sea $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert (con $\dim \mathbb{H} = \infty$).

Definiciones:

- ① f es *ortogonal* a g , $f \perp g$, si $\langle f, g \rangle = 0$
- ② $\{\mathbf{e}_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{H}$ es un *sistema ortonormal* (SON) si

$$\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall j, k \in J$$

- ③ $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una *base ortonormal* (BON) en \mathbb{H} si es SON y además
 $\forall f \in \mathbb{H}$ existen $a_j \in \mathbb{C}$ tales que $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbf{e}_j$ (en $\|\cdot\|$)

Ejemplo:

- En $L^2(\mathbb{T})$, la familia $\{\mathbf{e}_n(x) := e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es SON, pues

$$\int_{\mathbb{T}} \mathbf{e}_n(x) \overline{\mathbf{e}_m(x)} dx = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i(n-m)x} dx = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Objetivo: probar que $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es BON en $L^2(\mathbb{T})$...



LEMAS DE ORTOGONALIDAD: LEMA 1

Lemas de ortogonalidad

Lema 1: Si $f, g \in H^1$, entonces

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re} [\langle f, g \rangle]$$

①

Dem: $\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle$

$$= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re} [\langle f, g \rangle]$$

□

Corolario Identidad de Pitágoras

$$\text{① Si } f \perp g \Rightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\text{② Si } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ son los dos lados} \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^N f_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2$$

□

Dem Trivial, del lema 1 + indicación

□

LEMA 2

LEMÁ 2 Si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es SON y $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$, entonces

(converg. en $\| \cdot \|_1$)

① $a_j = \langle f, e_j \rangle$, $\forall j$

② $\| f \|_1^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2$

Dím Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\langle f, e_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, e_n \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \underbrace{\langle e_j, e_n \rangle}_{\delta_{jn}} = a_n. \rightarrow ①$$

(se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es $\| \cdot \|_1$ -continua)

Para ver ②, se usa Pitágoras

$$\| f \|_1^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \underbrace{\| e_j \|_1^2}_{=1}.$$

(converg. en $\| \cdot \|_1$)

LEMA 3: DESIGUALDAD DE BESSEL

LEMMA 3 Desigualdad de Bessel.

Si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es S.O.N., entonces

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2, \quad \forall f \in H.$$

Además, si $S_N f := \sum_{j=1}^N \langle f, e_j \rangle e_j$, entonces se tiene

$$(**) \quad \|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2$$

Dem: Basta probar (**), que claramente implica (*). comprobar

Veamos (**): $\|f - S_N f\|^2 \stackrel{(1)}{=} \|f\|^2 + \|S_N f\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle f, S_N f \rangle$.

Ahora, $\langle f, S_N f \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^N \langle f, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^N \overline{\langle f, e_j \rangle} \langle f, e_j \rangle = \sum_{j=1}^N |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|S_N f\|^2$ (2)

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|f - S_N f\|^2 &= \|f\|^2 + \|S_N f\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\|S_N f\|^2) = \|f\|^2 - \|S_N f\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=N+1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

CARACTERIZACIÓN DE BON

TEOREMA 1: CARACTERIZACIÓN DE BON

Sea \mathbb{H} esp Hilbert y $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ un SON. Entonces LSAE (las siguientes afir.
son equivalentes)

① $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es BON

② $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2, \forall f \in \mathbb{H}$ (igualdad de Bessel)

③ Si $f \in \mathbb{H}$ y $\begin{cases} \langle f, e_j \rangle = 0 \\ \forall j \in \mathbb{N} \end{cases}$ entonces $f = 0$ (sistema total)

COROLARIO 1

$\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una BON de $L^2(\mathbb{T})$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{en } \|\cdot\|_{L^2}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Dem: El sist trig cumple (3), por el Teorema de Unicidad.

DEMOSTRACIÓN TMA

Dem Tma Caracterización BON

①

"(1) \Rightarrow (2)"

$$\text{Si } \{e_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ es BON} \Rightarrow f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para algunos } \alpha_j \in \mathbb{C} \\ \text{y } \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty \end{array} \right. \quad \text{②} \quad \alpha_j = \langle f, e_j \rangle, \forall j.$$

A demostrar, por def de convergencia,

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{j=1}^N |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)$$

$$\text{Por tanto } \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2, \quad \forall f \in H. \quad \longrightarrow (2)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

"(2) \Rightarrow (3)" Trivial, pues $\langle f, e_j \rangle = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

"(3) \Rightarrow (1)" Sea $f \in H$ y llamemos $g_N := \sum_{j=1}^N \langle f, e_j \rangle e_j$. Basta ver que $g_N \xrightarrow{H} f$.

Veamos que $\{g_N\}_N$ es de Cauchy:

$$\|g_N - g_M\|^2 = \left\| \sum_{j=M+1}^N \langle f, e_j \rangle e_j \right\|^2 \stackrel{(2)}{=} \sum_{j=M+1}^N |\langle f, e_j \rangle|^2 \xrightarrow[M \geq N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{por (2)} \\ \text{en el m=3} \end{array}}$$

Como H es p. Hilbert $\Rightarrow \exists g \in H : g_N \xrightarrow{H} g$.

$$\text{Es decir } g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j. \quad \text{Pero } \langle g, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{③} \quad \Rightarrow g = f.$$

□ □ □

MÁS COROLARIOS...

COROLARIO 2: IDENTIDAD DE PARSEVAL GENERAL

Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

Dem: De hecho, si $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es BON y $f, g \in \mathbb{H}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f, g \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, g \right\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \overline{\langle g, \mathbf{e}_j \rangle},\end{aligned}$$

donde la serie converge abs por desig de Cauchy-Schwarz y Bessel.

COROLARIO 3: CRITERIO DE CONVERGENCIA UNIFORME

Si $f \in C^1(\mathbb{T})$ entonces

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad \text{unif y absol } \forall x \in \mathbb{T}.$$

Dem

Por Dim 1, ya sabemos la conv. puntual.

Por tanto, basta ver que la serie es de Cauchy unif+abs.

Sea $M \geq N$.

$$\left| \sum_{N \leq |m| \leq M} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x} \right| \leq \sum_{N \leq |m| \leq M} |\hat{f}(m)| = \sum_{N \leq |m| \leq M} |\hat{f}(m) e^{2\pi i m x}| \cdot \frac{1}{e^{2\pi i m x}}$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|m| \geq M} \frac{1}{|2\pi m|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bord

$$\leq \underbrace{\|\hat{f}'\|_{L^2(\mathbb{T})}}_{\text{de}} \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{|m| \geq N} \frac{1}{|m|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \boxed{\text{cola de serie convergente}}$$

COROLARIO 4: SF REALES

El sistema $\left\{1, \cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)\right\}_{n \geq 1}$ es BOG de $L^2(\mathbb{T})$ ¡sin normalizar!

En particular,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx) \right) \quad \text{en } \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

- Notar, por la identidad de Pitágoras, que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2 dx &= \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 \| \cos(2\pi nx) \|_{L^2}^2 + |b_n|^2 \| \sin(2\pi nx) \|_{L^2}^2 \right) \\ &= \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2). \end{aligned}$$

- También $b_n(f) = \left\langle f, \frac{\sin(2\pi nx)}{\| \sin(2\pi nx) \|_{L^2}^2} \right\rangle = 2 \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin(2\pi nx) dx$, etc...

MÁS EJEMPLOS DE BON...

- Salio o trajo*  $\left\{ \sin(\pi nx) \right\}_{n \geq 1}$ es BOG de $L^2(0, 1)$, ... y también $\left\{ 1, \cos(\pi nx) \right\}_{n \geq 1}$
- $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ familia de polin ortogonales \rightarrow BOG de $L^2(w(x)dx)$

Eg: polin Legendre, Chebyshev, Hermite,...

- $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$ soluciones de probl Sturm-Liouville...

Aparecen en EDPs al “separar variables” ...

- sistema de Haar $\left\{ 1, h_{j,k} := \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j})} - \mathbf{1}_{[\frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})} \right\}_{0 \leq k < 2^j, j \in \mathbb{N}}$

① es BOG de $L^2(0, 1)$

② hay variantes $\psi_{j,k}$ suavizadas (bases de wavelets)

③ importantes aplicaciones en tratam de señales e imágenes (jpeg2000)

Tema 5 Convoluciones y SF

5.1.- Convolución: definición y propiedades

Def Si $K, f \in L^1(\mathbb{T})$ se define un convolución como

$$K * f(x) = \int_{\mathbb{T}} K(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{T}$$

siempre que la integral sea abs. conv. (es $\int |K(x-y)f(y)| dy < \infty$)

NOTA La misma def vale para definir la convolución en \mathbb{R}^n

$$K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(aunque en este tema sólo consideraremos funciones en \mathbb{T})

Ejemplos

① Sumas parciales de Fourier

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-y) f(y) dy$$

$$\text{donde } D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x} = \text{u'video de Dirichlet} \\ (\text{de orden } N)$$

② Solución de EDP del calor en \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-y) f(y) dy,$$

$$\text{donde } W_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \text{u'video de Gauss-Weierstrass}$$

③ Solución EDP de Laplace en ID

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ en } ID \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial ID} = \varphi \end{array} \right. \rightarrow u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(t) dt$$

donde $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$ = núcleo de Poisson

④ Promedios sobre bolas

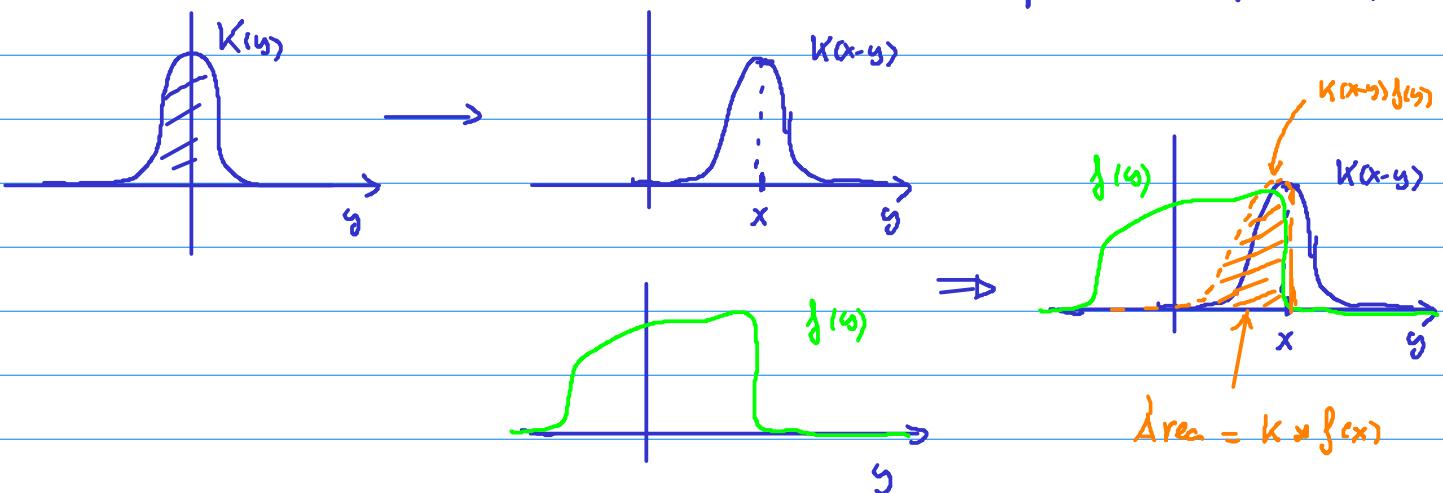
$$\int_{B_\epsilon(x)} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \cdot \mathbf{1}_{B_\epsilon(x)}}_{K_\epsilon(x-y)} f(y) dy$$

$K_\epsilon(x-y) \leftarrow$ núcleo de promedios

Interpretación:

• En general, si $\int K(x) dx = 1 \Rightarrow$

$K * f(x) = \int K(x-y) f(y) dy \approx$ "promedio" de f alrededor de x ,
"ponderado" por el peso K .



Ejercicio 1:

(calcular $\chi_{[0,a]} * \chi_{[0,b]}$ y dibujar su gráfica.

Propiedades

Propos 1 Si $K, f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\exists K * f(x) d\mu_x \in \mathbb{T}$.

Además,

$$\|K * f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1}.$$

Dem:

Veamos que $I(x) := \int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| |f(y)| dy < \infty \quad \text{d.p. } x \in \mathbb{T}$.

Integrando

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}} I(x) dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| |f(y)| dy \right) dx$$

Fubini-Torelli

$$= \int_{\mathbb{T}} |f(y)| \left(\underbrace{\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| dx}_{\|K\|_1} \right) dy = \|K\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty.$$

$$\stackrel{\cong}{=} \int_{x-\mathbb{T}} |K(z)| dz = \|K\|_1$$

Por tanto, $I(x) < \infty \quad \text{d.p. } x \in \mathbb{T}$, y

$$\int_{\mathbb{T}} |K * f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{T}} I(x) dx \leq \|K\|_1 \cdot \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbb{T}} dx.$$



Propos 2 Si $K, f, g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces

CONMUT

$$\textcircled{1} \quad K * f(x) = f * K(x)$$

ASOCIA

$$\textcircled{2} \quad K * (f * g)(x) = (K * f) * g(x)$$

Fourier

$$\textcircled{3} \quad (\widehat{K * f})(n) = \widehat{K}(n) \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dem

$$\textcircled{1} \quad K * f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) f(y) dy \stackrel{x-y=z}{=} \int_{-\pi}^{\pi} K(z) f(x-z) dz = f * K(x).$$

② ejercicio (usar Fubini)

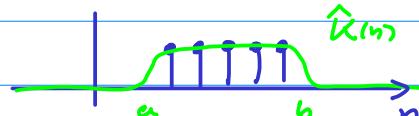
$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \widehat{K * f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} K * f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) f(y) dy \right] e^{-2\pi i n x} dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y) e^{-2\pi i n x} dx \right) f(y) dy \\ &\stackrel{x-y=z}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K(z) e^{-2\pi i n z} dz \right) e^{-2\pi i n y} f(y) dy \\ &= \widehat{K}(n) \cdot \widehat{f}(n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario (de ③)

$$\sum g, K \in L^1(\mathbb{T}) \quad y \quad f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$\Rightarrow K * f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{K}(n) \cdot \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

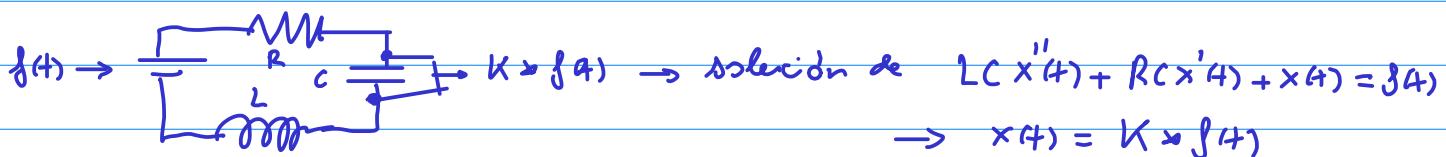
Interpretación: Si basramos K t.g.



$\Rightarrow K * f(x) = \text{filtrado de } f \text{ con frecuencias en } [a, b].$

\hookrightarrow En Ingeniería se usa para diseñar filtros, equalizadores y otros aparatos de tratamientos de señales ...

\hookrightarrow se pueden trazar mecanicos (análogos) o digitales



Proposición 3 derivación

$K \in C^M(\mathbb{T})$ y $f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow K * f \in C^M(\mathbb{T})$ y

$$D^{(m)} [K * f(x)] = (D^{(m)} K) * f(x), \quad \forall 0 \leq m \leq M$$

Demo:

Usan el Thm derivación de integrales paramétricas

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{\mathbb{T}} K(x-y) f(y) dy \right] = \int_{\mathbb{T}} K'(x-y) f(y) dy.$$

→ Ejercicio: justificar uso correcto del Thm. 

Comprobar enunciados previos

- Fubini - Tonelli \longrightarrow ver Folland, Thm 2.37
- Deriv Integ Param \longrightarrow ver Folland, Thm 2.27.

§2.2. APROXIMACIONES DE LA IDENTIDAD

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Lunes, 26 abril 2021

▶ cor

§2.2. APROXIMACIONES DE LA IDENTIDAD

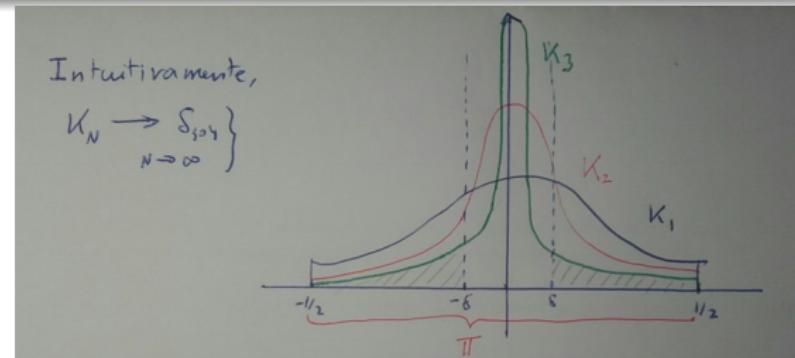
DEFINICIÓN:

$\{K_N\}_{N \geq 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ es una *aproximación de la identidad* (AI) si:

① $\int_{\mathbb{T}} K_N(y) dy = 1, \quad \forall N \geq 1$

② $A := \sup_{N \geq 1} \int_{\mathbb{T}} |K_N(y)| dy < \infty$

③ $\forall \delta > 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy = 0$



EJEMPLOS DE APROXIMACIÓN DE LA IDENTIDAD

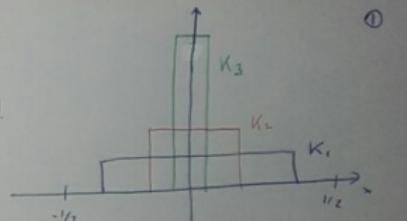
① [Promedios]

Sea $K_N = \frac{1}{2\delta_N} \mathbb{1}_{(-\delta_N, \delta_N)}$ con $\delta_N > 0$.

los A.I.!

- ① y ② son evidentes

- ③ sigue de $\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N| = 0$ y $\delta < \delta_N$



② [Núcleo de Poisson]

Sea $K_N(t) = P_{r_N}(2\pi t)$, con $r_N \geq 1$, donde

$$P_r(2\pi t) = \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(2\pi t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2\pi i n t}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}.$$

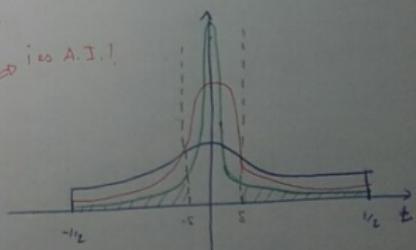
los A.I.!

- ① y ② ya lo vimos: como $P_r \geq 0$

$$\int_{\mathbb{T}} |P_r| = \int_{\mathbb{T}} P_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \left[\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n t} dt \right] = 1$$

- ③: $\approx \delta > 0$, como P_r es PAR + DECRECIENTE

$$\int_{-\delta}^{\frac{1}{2}} |P_r(2\pi t)| dt = 2 \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(2\pi t)} dt \leq \frac{2(1-r^2)}{1+r^2 - 2r \cos(2\pi \delta)} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} dt \leq \begin{cases} P_r(2\pi \delta) \rightarrow 0 \\ r \geq 1 \end{cases}$$



MÁS EJEMPLOS...

③ Núcleo de Gauss-Wienerstrass

$$W_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}, \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\text{es A.I. en } L^1(\mathbb{R})}$$

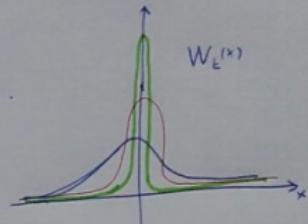
- ① y ② trivial

$$\int_{\mathbb{R}} |W_t(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} W_t(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx$$

\uparrow

$x = \sqrt{t} z$
 $dx = \sqrt{t} dz$

$$\begin{aligned} \text{• ③} \quad \int_{|x| > \delta} |W_t(x)| dx &= \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\text{por TCD}} 0 \end{aligned}$$



④ Núcleo de Dirichlet

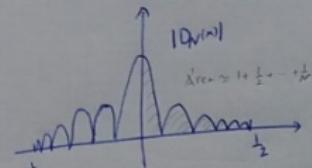
$$D_N(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} e^{2\pi i n x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, \quad |x| < 1/2.$$

veremos

$$\text{Cumple } ① \quad \int_{\mathbb{R}} D_N(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i n x} dx = 1$$

... pero NO cumple ②...

$$\int_{\mathbb{R}} |D_N(x)| dx \approx \log N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \infty$$



$\left\{ D_N(x) \right\}_{N \geq 1}$ NO es A.I.

Lemma:

$$\text{Sei } \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int \varphi = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

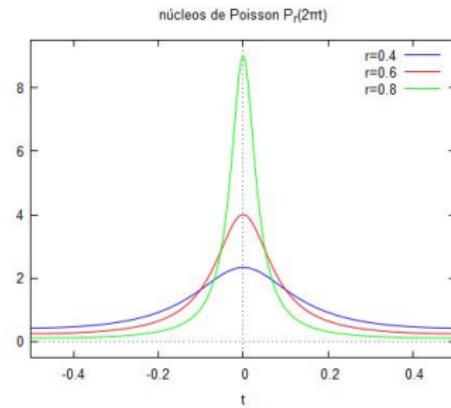
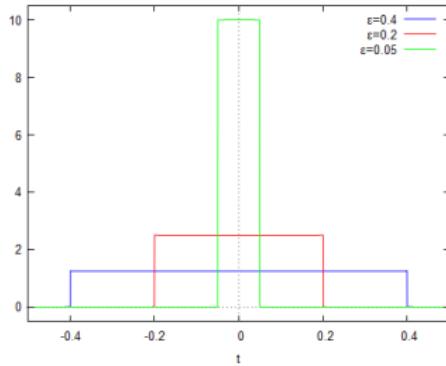
$$\rightarrow \textcircled{1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| dz < \infty$$

$$\textcircled{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| dz \stackrel{\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)}{<} \infty$$

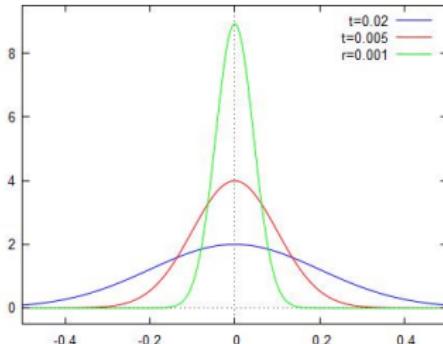
$$\textcircled{3} \int_{|x| \geq \delta} |\varphi_\varepsilon(x)| dx \stackrel{cv}{\rightarrow} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\varepsilon}} |\varphi(z)| dz \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$$

↪ $\{\varphi_{\varepsilon_N}\}_N$ ist A.I.

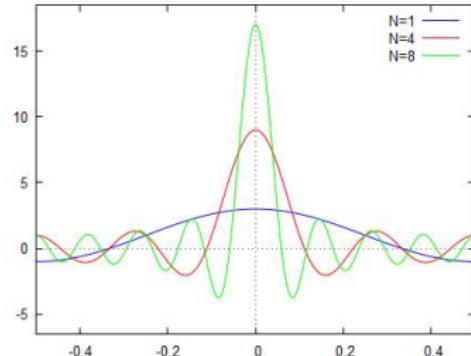
GRÁFICAS DE NÚCLEOS (CON MAXIMA)



núcleos de Gauss-Weierstrass $W_t(x)$



núcleos de Dirichlet $D_N(x)$



TEOREMA 1: CONVERGENCIA DE AI

Sea $\{K_N\}_{N \geq 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ una AI.

- ① Si f acotada y continua en un punto $x \in \mathbb{T}$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N * f(x) = f(x) \quad (\dagger)$$

- ② Si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces (\dagger) es cierto **uniformemente** $\forall x \in \mathbb{T}$
- ③ Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces (\dagger) es cierto en la norma de $L^1(\mathbb{T})$

TEOREMA 1.1'

Sea $\{K_N\}_{N \geq 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ una AI, con núcleos pares $K_N(x) = K_N(-x)$.

- ① Si f acotada y existen $f(x_0^\pm)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N * f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \quad (\ddagger)$$

DEM TEOREMA 1.1 Y 1.2

Dem

① Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon, x) > 0 : |f(x+h) - f(x)| < \epsilon \quad \forall |h| < \delta$.

$$|K_N * f(x) - f(x)| = \left| \int_{\pi} f(x-y) K_N(y) dy - f(x) \int_{\pi} K_N(y) dy \right| \xrightarrow{\text{Cond 1}}$$

$$= \left| \int_{\pi} (f(x-y) - f(x)) K_N(y) dy \right| \leq \int_{\pi} | \dots |$$

$$= \int_{(-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| \cdot |K_N(y)| dy + \int_{\pi \setminus (-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| |K_N(y)| dy$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{(cont de p) 2}}{\leq} \epsilon \cdot \underbrace{\int_{(-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy}_{\leq \int_{\pi} |K_N(y)| dy} + 2 \|f\|_{\infty} \cdot \underbrace{\int_{\pi \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy}_{\text{Por Cond 3, } \exists N_0 = N_0(\epsilon, \delta, \|f\|_{\infty}) :} \\ &\qquad\qquad\qquad \sim N \geq N_0 \Rightarrow \int_{\pi \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy \leq \frac{\epsilon}{2\|f\|_{\infty}}. \\ &\leq \epsilon \cdot A + 2 \|f\|_{\infty} \cdot \frac{\epsilon}{\|f\|_{\infty}} \end{aligned}$$

$$= (A+2) \cdot \epsilon, \quad \forall N \geq N_0 = N_0(\epsilon, x, \|f\|_{\infty}).$$

② Si $f \in C(\pi) \Rightarrow f \in UC \rightarrow f \text{ no depende de } x! \Rightarrow N_0 = N_0(\epsilon, \|f\|_{\infty})$.

$\Rightarrow K_N * f(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f(x)$ UNIFORMEMENTE $\forall x \in \pi$.

Notas:

- La demostración de Teorema 1.1' es similar (ejercicio!!)
- Tb cierto para funciones en \mathbb{R}^d ... si $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ y acotada...
- Para probar el caso $f \in L^1$ necesito un lema...

LEMA

Si $f \in L^1$ entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^1} = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

- Caso $f = \mathbf{1}_E$: tomar $h_n \rightarrow 0$ y usar TCD en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot + h_n) - f\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\mathbf{1}_{E-h_n}(x) - \mathbf{1}_E(x)| dx = 0$$

- Caso $f = \text{simple}$: extender por linealidad
- Caso $f \in L^1$ general: aproximar con funciones simples (ejercicio)



DEM TEOREMA 1.3

Dem Tma 1.3

$$\text{S. } f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0 : \|f(\cdot + h) - g\|_{L^1} < \varepsilon \quad \text{y } |h| < \delta$$

④

$$\begin{aligned} \|K_N * f - g\|_{L^1(dx)} &= \int_{\mathbb{T}} |K_N * g(x) - g(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{(-\delta, \delta)} |\hat{g}(x-y) - \hat{g}(x)| |K_N(y)| dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |\hat{g}(x-y) - \hat{g}(x)| |K_N(y)| dy \right] dx \end{aligned}$$

igual que
antes

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Fubini}}{\leq} \int_{y \in (-\delta, \delta)} |K_N(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{T}} |\hat{g}(x-y) - \hat{g}(x)| dx}_{= \|\hat{g}(\cdot - y) - \hat{g}\|_{L^1}} dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| \cdot 2\|\hat{g}\|_{L^1} dy \\ &= \|\hat{g}(\cdot - y) - \hat{g}\|_{L^1} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \cdot A + 2\|\hat{g}\|_{L^1} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)}}_{< \varepsilon / \|\hat{g}\|_{L^1}} \quad \text{y } N \geq N_0 = N_0(\varepsilon, f).$$

$$< (\Lambda + 2) \cdot \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0.$$

④

Notas:

- La misma demostración vale para funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$...
- Si $f \in L^p(\mathbb{T} \text{ ó } \mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$, también se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K_N * f - f\|_{L^p} = 0$$

... usando en la prueba anterior la “desigualdad integral de Minkowski”

$$\left\| \int_Y f(x, y) dy \right\|_{L^p(dx)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(dx)} dy$$

ver [Folland, Thm 6.19]

COROLARIO 1: SOLUCIÓN PROBLEMA DIRICHLET EN \mathbb{D}

Sea $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$. Entonces la función

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - s) \varphi(s) ds = P_r * \varphi(\theta), \quad re^{i\theta} \in \mathbb{D}$$

cumple

- ① $u \in C^\infty(\mathbb{D})$ y $\Delta u = 0$ en \mathbb{D}
- ② $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $u|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, es decir

$$\lim_{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}} u(re^{i\theta}) = \varphi(\theta_0), \quad \forall \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

DEM COROLARIO 1

Dem

① sigue del Lema Deriv Integral Paramétricas y de $\Delta(P_r(\theta)) = 0$.

② Sea $r_n \nearrow 1$. Pr es Tma 1, $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{r_N} \times \varphi(\theta) = \varphi(\theta)$ UNIF $\forall \theta \in \Pi$.

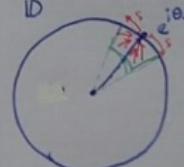
→ Dado $\epsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\epsilon) / |P_{r_N} \times \varphi(\theta) - \varphi(\theta)| < \epsilon, \forall N \geq N_0$

→ Como f cont, $\exists \delta = \delta(\epsilon) / |\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)| < \epsilon, \forall |\theta - \theta_0| < \delta$

Entonces $|P_{r_N} \times \varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)| \leq |P_{r_N} \times \varphi(\theta) - \varphi(\theta)| + |\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)| < 2\epsilon \quad \begin{cases} r_N \geq N_0, \\ |\theta - \theta_0| < \delta \end{cases}$

Por tanto,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ \theta \rightarrow \theta_0}} P_r \times \varphi(\theta) = \varphi(\theta_0).$$



□

MÁS COROLARIOS...

COROLARIO 2: SOLUCIÓN ECUACIÓN DEL CALOR EN \mathbb{R}^d

Sea $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ y acotada. Entonces la función

$$u(t, x) = W_t * f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

donde $W_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ cumple

- ① $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ y $u_t = \Delta u$ en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$
- ② $u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ y $u(0, \cdot) = f$, es decir

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Dem: similar...

MÁS COROLARIOS...

COROLARIO 3

$C^\infty(\mathbb{T})$ es denso en $L^1(\mathbb{T})$

Dem:

- Sea $\varphi \in C_c^\infty(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ con $\int \varphi = 1$, y sea $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$
- Entonces $\{\varphi_{\varepsilon_N}\}$ es una AI si $\varepsilon_N \searrow 0$ (comprobar)
- ... y por tanto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^1} = 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T}) \quad (*)$
- Además, $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{T})$, por Lema 3 de §2.1.

□

COROLARIO 4: UNICIDAD DE LAS SF

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ tiene $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f \equiv 0$.

Dem:

- $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{T})$ tiene coeficientes $\widehat{\varphi_\varepsilon}(n)\hat{f}(n) \equiv 0$
- Entonces, por Dini, $\varphi_\varepsilon * f \equiv 0$, y por $(*)$ sigue que $f \equiv 0$.

□

§ 52.- Aproximaciones de la identidad

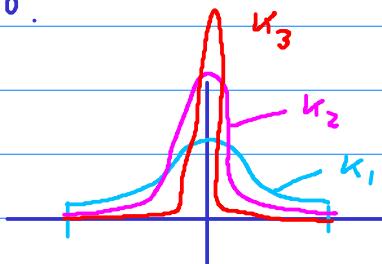
Def $\{K_N\}_{N=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mathbb{T})$ es una Aproximación de la identidad (A.I.)

si

$$\textcircled{1} \quad \int_{\mathbb{T}} K_N = 1, \quad \forall N$$

$$\textcircled{2} \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_N| = A < \infty$$

$$\textcircled{3} \quad \forall \delta > 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N| = 0.$$



Nota • Intuitivamente " $K_N \rightarrow \delta_{x_0}$ "

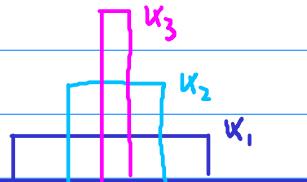
- Veremos que $K_N * f \rightarrow f$, que justifica el nombre A.I.

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad \text{Promedios: } K_N(x) = \frac{1}{2\varepsilon_N} \cdot \mathbf{1}_{(-\varepsilon_N, \varepsilon_N)} \quad \text{on } \varepsilon_N \rightarrow 0.$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ triviales

$\textcircled{3}$ Si fijo $\delta > 0 \Rightarrow$ tomando $\varepsilon < \delta$, $\text{Supp } K_N \cap [\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)] = \emptyset$



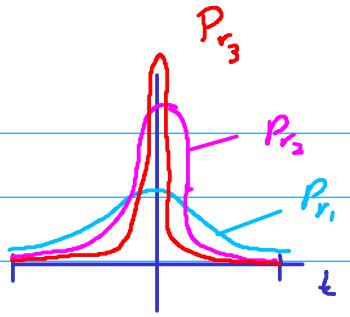
$\rightarrow \textcircled{3}$ es trivial.

$$\textcircled{2} \quad \text{M\'etodo Poisson} \quad K_N(t) = P_{Y_N}(2\pi t), \quad \text{on } Y_N \geq 1.$$

$$\text{Recordar } P_r(2\pi t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{rn} e^{2\pi i n t} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi t)}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \int_{-\pi}^{\pi} P_r(2\pi t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{1+|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i n t} dt = 1$$

\textcircled{2} Siempre $P_r \geq 0 \rightarrow$ similar de \textcircled{1}



\textcircled{3} Sea $\delta > 0$. Siempre P_r es PAR + DECREciente

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} P_r = 2 \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(2\pi t)} dt \leq 2 \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r \cos(2\pi \delta)} \cdot \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} dt \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0$$

Núcleo de Gauss-Weierstrass en \mathbb{R}

$$K_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{|x|^2}{4n}} \quad \text{on } t_n \rightarrow 0.$$

Son un caso especial de Eje c 3

Lema Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$: $\int \varphi = 1$ y $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = 1$$

$\frac{x}{\varepsilon} = z \rightarrow \frac{dx}{\varepsilon^n} = dz$

$$\textcircled{2} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| dz < \infty$$

$$\textcircled{3} \quad \int_{|x| \geq \delta} |\varphi_\varepsilon(x)| dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\varepsilon}} |\varphi(z)| dz \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{T.C.D.}} 0$$

Por tanto $\{K_n = \varphi_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es AT $n \cdot \varepsilon_n \rightarrow 0$.

$$\boxed{\text{Para la Gaussiana } W_t(x) = W_t\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \int_{\mathbb{R}} W_t(z) dz = 1}$$

④ Vídeo de Dirichlet $D_N(x) = \sum_{m \leq n} e^{2\pi i m x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, |x| \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ ¡No es cierto! } \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \approx \log N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \infty$$

$\longrightarrow \{D_N\}$ no es A. I.

NOTA En parte explica la mayor dificultad de la convergencia SF.

los resultados principales del tema son:

Teatrero 1 Convergencia de A. I.

Sea $\{K_N(x)\}_{N \geq 1}$ una A. I. en $L^1(\pi)$, entonces

① Si f acotada, y cont en $x_0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} K_N \circ f(x_0) = f(x_0)$

② Si $f \in C(\pi) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} K_N \circ f(x) = f(x) \quad \forall x \in \pi$

③ Si $f \in L^1(\pi) \Rightarrow K_N \circ f \xrightarrow{} f$ en norma $L^1(\pi)$

Teatrero 1 bis

$\Sigma \{K_N\} \subseteq L^1(\pi)$ es A. I. y $K_N(x) = K_N(-x)$ \Leftarrow vides PARES

(1 bis) Si f acotada y $\exists f(x_0^\pm)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N \circ f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

(Tema 1 bis, ejercicio)

Demo (Tema 1)

$$\textcircled{1} \quad \text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ sea } \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ / } \left| f(x_0 + h) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \approx |h| < \delta \\ \|h\| < \delta \end{array} \right\} \quad (\star)$$

Entonces

$$\left| K_N \circ f(x_0) - f(x_0) \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - y) K_N(y) dy - f(x_0) \int_{\mathbb{T}} K_N(y) dy \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - y) - f(x_0)) \cdot K_N(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{T}} | \dots | dy$$

$$= \int_{(-\delta, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot |K_N(y)| dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| |K_N(y)| dy$$

$$\xrightarrow[\text{cont de } f]{x \in x_0} \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\int_{(-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy}_{\leq \int_{\mathbb{T}} |K_N(y)| dy \leq A} + 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy}_{\text{resto}}$$

Por $\textcircled{3}$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, \delta, \|f\|_\infty) :$

$$\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}, \forall N \geq N_0.$$

$$\leq (A + 2) \cdot \varepsilon, \quad \text{si } N \geq N_0 \quad \xrightarrow{\text{N}_0(\varepsilon, x_0, \|f\|_\infty)}$$

$\textcircled{2} \quad \text{L: } f \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow f \in UC(\mathbb{T}) + \text{resto.}$

\rightarrow en (1) tenemos $f = f(\varepsilon) \leftarrow \text{index de } x_0!$

$$\Rightarrow N_0 = N_0(\varepsilon, \|f\|_\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} K_N \circ f(x_0) = f(x_0) \quad \text{UNIF en } \mathbb{T} \text{ si } x_0 \in \mathbb{T}.$$

NOTA :

La demostración para AT en \mathbb{R}^n , no se puede

en $\textcircled{2}$ $f \in UC(\mathbb{R}^n) + \text{resto.}$

Dur 3 $f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \text{¿} \|K_N * f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow 0 ?$

Necesito un lema de integral de Lebesgue

Lema $\boxed{\Sigma \quad f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0}$

Usando el lema he probado yo mismo:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0 : \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta$

$$\Rightarrow \|K_N * f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} |K_N * f(x) - f(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{como antes}}{\leq} \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{(-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| |K_N(y)| dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(y)| |K_N(y)| dy \right| dx$$

Fub.

$$\leq \int_{(-\delta, \delta)} |K_N(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)| dx \right) dy + \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| \cdot 2 \|f\|_{L^1} dy$$

$$\leq \varepsilon \cdot A + 2 \|f\|_{L^1} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N|}_{\exists N_0 = N_0(\delta, \varepsilon, \|f\|_{L^1})} \quad :$$

$$\leq (A + 2) \cdot \varepsilon.$$

$$\int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_N| < \frac{\varepsilon}{\delta \|f\|_{L^1}}$$

$\forall N \geq N_0(\varepsilon, f)$.



Notas

① La misma prueba vale si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

② Se puede adaptar a $\|K_N * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^p$.

usando la "desigualdad integral de Minkowski" (ver Folio 1, Tarea 15)

§2.3. NÚCLEO DE DIRICHLET

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Martes, 27 abril 2021

§2.3. EL NÚCLEO DE DIRICHLET

Recordar

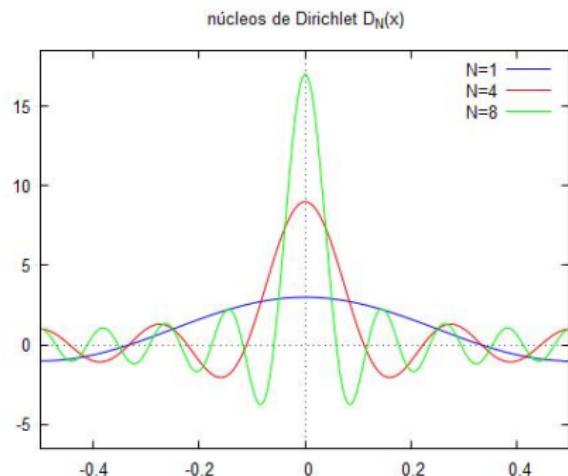
$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Dem: usando suma progr geom con $z = e^{2\pi i x}$

$$D_N(x) = \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} = \frac{z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-N-\frac{1}{2}}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = \frac{2i \sin((N + \frac{1}{2})2\pi x)}{2i \sin(\pi x)}$$

Propiedades:

- ① $\int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx = 1$
- ② $D_N(x) = D_N(-x)$
- ③ $D_N(0) = 2N + 1$
- ④ $D_N(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pm 1}{2N+1}, \dots, \frac{\pm N}{2N+1} \right\}$
- ⑤ $\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| dx \approx \log(N+1) \rightarrow \infty$



LEMA 1

$$L_N := \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(N+1)$$

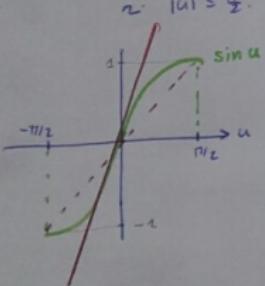
$$\boxed{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(N+1)}$$

①

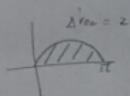
Dem

Usaremos

$$\left[\frac{|u|}{\pi/2} \leq |\operatorname{sen} u| \leq |u| \right]$$



$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^{1/2} |D_N(x)| dx \geq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} \frac{|\operatorname{sen}(2N+1)\pi x|}{|\operatorname{sen}(\pi x)|} dx \geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\frac{\pi(j+1)}{2N+1}} \cdot \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} |\operatorname{sen}(2N+1)\pi x| dx \right. \\ & \quad \left. \text{y } |\operatorname{sen}(2N+1)\pi x| \leq \pi |x| \right\} \\ & \quad = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \cdot \int_{\pi j}^{\pi(j+1)} |\operatorname{sen} u| du \\ & \quad = \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \geq \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} = \ln(N+1). \end{aligned}$$



□

[De modo similar se prueba:

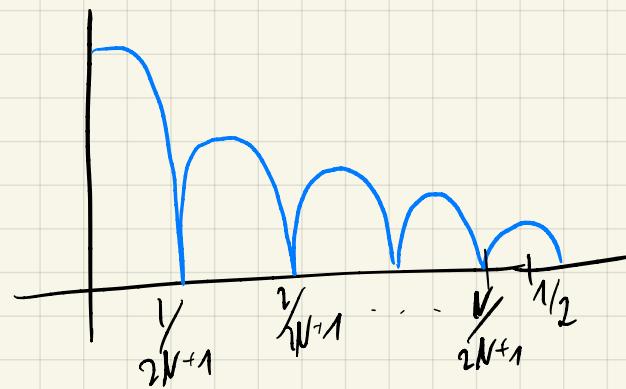
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N| \leq C \ln(N+1) + O(1).$$

ejercicio: fácil con $C = \frac{2}{\pi}$
(avanzado, con $C = \frac{4}{\pi^2}$)

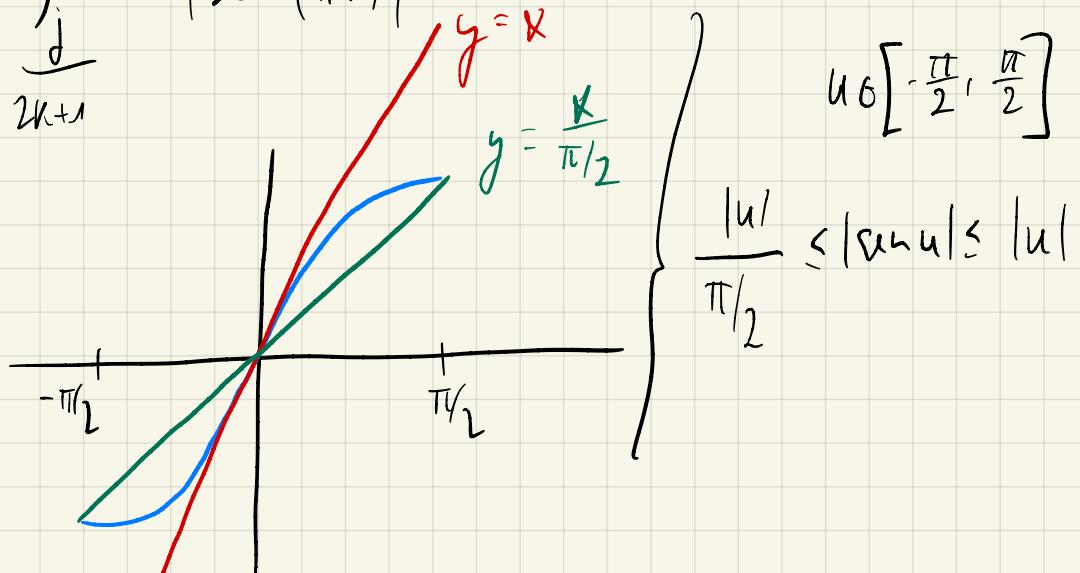
Lema 1

Queremos calcular

$$\int_0^1 |D_N(x)| dx$$



$$\int_0^1 |D_N(x)| dx \geq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} \frac{|\cos((2N+1)\pi x)|}{|\sin(\pi x)|} dx \geq \textcircled{*}$$



$$\textcircled{*} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \frac{(j+1)}{2N+1}} \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} |\cos((2N+1)\pi x)| dx = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\pi(j+1)} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\cos(u)| du =$$

$(2N+1)\pi x = u$

$$dx = \frac{du}{(2N+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} \right) \cdot 2 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^N \frac{1}{l} \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^N \int_l^{l+1} \frac{dx}{x} =$$

$l \leq x$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi^2} \log(N+1)$$

Nota: $f(x) = (\sin x)/x$ es el prototipo de función

① $f \notin L^1(0, \infty)$, pues $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}| dx = \infty$

② ... sin embargo $f \in \mathcal{R}(0, \infty)$, en el sentido

$$\exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ejercicio!})$$

- De hecho, $D_N(x)$ y $f(x)$ están relacionados por

LEMA 2

$$\int_0^a D_N(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi a} \frac{\sin x}{x} dx + O(1/N), \quad \text{unif en } |a| \leq 1/2$$

En particular, se tiene

$$\sup_{N \geq 1} \sup_{|a|, |b| \leq 1/2} \left| \int_a^b D_N(x) dx \right| < \infty \quad (\star)$$

DEM LEMA 2:

Dem Lema 2 ver ejercicio 5

$$\text{Sea } I_R(x) = \int_0^x \frac{\sin(Rt)}{\sin t} dt, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\text{Nota que } \int_0^\pi \cos t dt = \frac{1}{R} I_{2R+1}(\pi^2) \right]$$

$$\Rightarrow I_R(x) = \int_0^x \frac{\sin(Rt)}{t} dt + \int_0^x \sin(Rt) \underbrace{\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right)}_{g(t)} dt$$

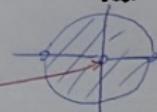
Veamos que $g(t) \in C^\infty(-\pi, \pi) \rightarrow$ basta comprobar en $t=0 \dots$

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t \cdot \sin t} = \frac{t - (t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5))}{t \cdot \sin t} = \frac{\frac{t^2}{2!} + O(t^4)}{t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5)} = \frac{\frac{t}{2!} + O(t^3)}{1 - \frac{t^2}{3!} + O(t^4)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \quad y \quad g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \frac{1}{2!} \Rightarrow g \in \mathcal{D}(-\pi, \pi)$$

derivable

De hecho, $g(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ es holomorfa en $\{|z| < \pi\}$
con singulalre en $z=0$!!



Aplicando integración por partes,

$$\begin{aligned} E_R(x) &= \left| \int_0^x \sin(Rt) g(t) dt \right| = \left| -\frac{\cos(Rt)}{R} g(t) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{\cos(Rt)}{R} g'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2 \|g\|_\infty}{R} + \frac{\|g'\|_1}{R} = O\left(\frac{1}{R}\right), \text{ UNIF } |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5:

- Completar la prueba de (\star)
- Deducir del Lema 2 que $\exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
- *Avanzado:* adaptar las pruebas anteriores para obtener

$$L_N = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| dx \leq \frac{4}{\pi^2} \log(N+1) + O(1).$$

TEOREMA 1: CRITERIO DE DIRICHLET-JORDAN

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.

- ① Si f es creciente (o decreciente) en un entorno de $x = a$, entonces

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}$$

- ② Si f es creciente (o decrece) en un entorno de $[a, b]$, y $C[a, b]$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x) \text{ uniformemente en } \forall x \in [a, b]$$

Nota: Se dice que $f \in BV(I)$ si $f = g - h$ con g, h crecientes en $I = [a, b]$

- Si $f \in L^1(I)$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ está en BV
- Si f tiene un número finito de max y min, entonces $f \in BV$

- Se puede probar que $f \in BV$ si $\sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_N = b} \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \infty$

DEM TEOREMA

Dem critero Dirichlet-Jordan (esquema)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad S_N f(a) - \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} &= D_N * f(a) - f(a) \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(x) dx - f(a^+) \int_{\frac{1}{2}}^0 D_N(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(a-x) - f(a^+)) D_N(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 (f(a-x) - f(a^+)) D_N(x) dx = A + B \end{aligned}$$

② Por simetria, basta controlar

$$|B| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (f(a+x) - f(a^+)) D_N(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_0^{\frac{1}{2}} (\delta(f(a+x) - f(a^+)) D_N(x)) dx \right|}_{\substack{B_1 \\ \text{No puedo pasar!}}} + \underbrace{\left| \int_{\frac{1}{2}}^0 (\delta(f(a-x) - f(a^+)) D_N(x)) dx \right|}_{\substack{B_2 \\ \dots \\ \text{usar lema R-L}}}.$$

... no se puede usar

Props 2^{da} TVM del Calculo Integral \Rightarrow i buscan referencia!

Si f aciciente en $[0, b]$ con $f(0^+) = 0$, y $g \in L^1[0, b]$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \int_0^b f(x) g(x) dx = f(b^-) \int_n^b g(x) dx$$

③ Usando lo anterior f acic en $(a-\delta, a+\delta) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$B_1 = |f(a+\delta) - f(a^+)| \cdot \left| \int_n^\delta D_N(x) dx \right| \stackrel{(*)}{\leq} C \cdot |f(a+\delta) - f(a^+)| < \varepsilon$$

si $f \in S_\delta(\varepsilon, a)$

DEM TEOREMA (CONTINUACIÓN)

NOTA Si $f \in C([a, b]) \rightarrow$ UNIF CONT $\rightarrow \delta_0 = \delta_0(E, [a, b])$, ¡ f indep de $x_0 \in [a, b]!$

④ El término B_2 se controla con Lema R-L (o su demostr.)

$$B_2 = \left| \int_a^{x_0} \underbrace{\frac{f(x_0+x) - f(x_0)}{\sin \pi x}}_{g(x) \in L^1(a, x_0)} \cdot \sin(2N+1)\pi x \, dx \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

¿Puede ser $\lim_{N \rightarrow \infty} \dots = 0$
UNIFORM. en x_0 ?

⑤ Cota uniforme para B_2 :
• Por densidad $\exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$: $\|f - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon \cdot \sin(\pi \delta)$ ← φ depende de E, f ,
pero NO de $x_0 \in [a, b]$

$$\Rightarrow |B_2| \leq \left| \int_a^{x_0} \underbrace{\frac{f(x_0+x) - \varphi(x_0+x)}{\sin \pi x} \cdot \sin(2N+1)\pi x \, dx}_{B_3} \right| + \underbrace{\left| \frac{1}{\sin \pi \delta} \cdot \left| \int_a^{x_0} \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x} \, dx \right| \right|}_{\leq \frac{\max|f|}{\sin \pi \delta}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{¡indep de } x_0!$$

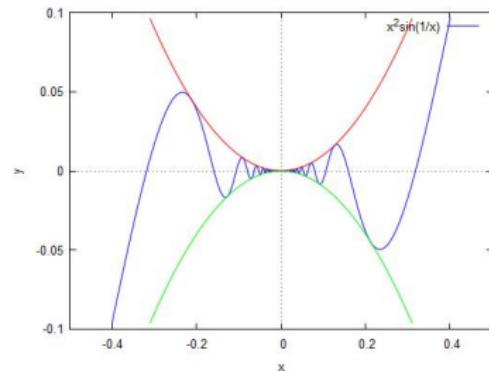
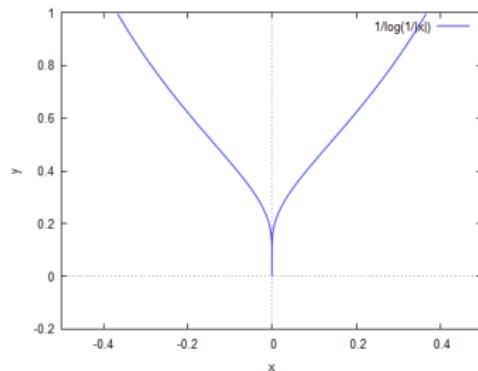
$$|B_3| \leq \left| \int_a^{x_0} \underbrace{\frac{\varphi(x_0+x)}{\sin \pi x} \cdot \sin(2N+1)\pi x \, dx}_{B_4} \right| + \underbrace{\int_a^{x_0} \left| \frac{f(x_0+x) - \varphi(x_0+x)}{\sin \pi x} \right| \, dx}_{\leq \frac{\|f - \varphi\|_{L^1}}{\sin \pi \delta}} \leq \frac{\|f - \varphi\|_{L^1}}{\sin \pi \delta} < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |B_4| &\stackrel{\text{partes}}{=} \left| \left[\frac{(\varphi(x_0+x))' - \cos(2N+1)\pi x}{(2N+1)\pi} \right]_a^{x_0} + \int_a^{x_0} \frac{\cos(2N+1)\pi x}{(2N+1)\pi} \cdot \frac{(\varphi(x_0+x))'}{\sin \pi x} \, dx \right| \\ &\leq \frac{\|\varphi'\|_\infty / \sin \pi \delta}{2N+1} + \frac{(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty) / (\sin \pi \delta)^2}{2N+1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{¡indep de } x_0! \end{aligned}$$

ALGUNAS NOTAS...

Notas:

- Fechas: Tma Dirichlet (1829), Tma Jordan (1881)
- Aplicable a funciones en BV del tipo $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$
- ... y también a funciones poco suaves $f(x) = 1/\log(1/|x|)$



- En general, los Criterios de Dini y Dirichlet-Jordan son independientes... pero existen criterios más generales que contienen a ambos...

§2.4. EL FENÓMENO DE GIBBS

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Jueves, 29 abril 2021

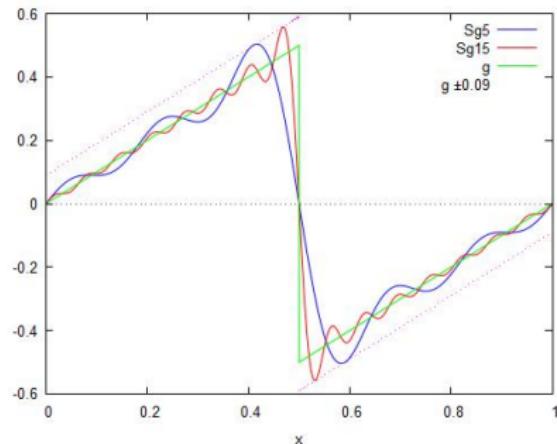
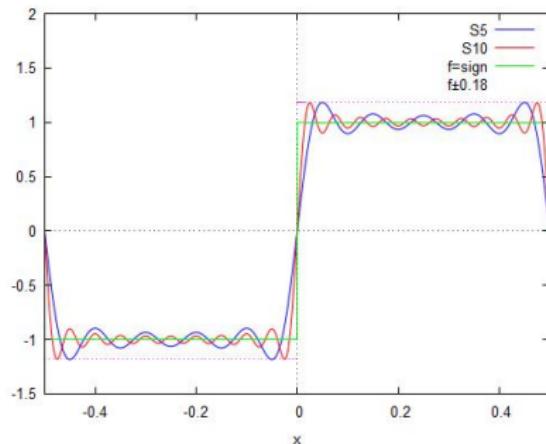
§2.4. EL FENÓMENO DE GIBBS

HIST

Recordar, si f tiene discontinuidad de salto en $x = a$ entonces

$$S_N f(a) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n a} \longrightarrow \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}$$

... pero en las gráficas se observa un fenómeno curioso (ver Maxima)...



$$f(x) = \text{sign}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2n-1)x)}{2n-1},$$

$$g(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin(2\pi nx)$$

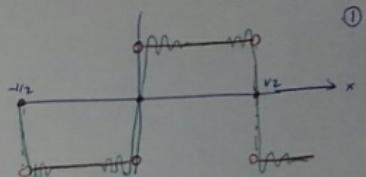
EJEMPLO DETALLADO ...

EJEMPLO 2

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & x=0 \\ -1, & -1/2 < x < 0 \end{cases}$$

Ya vimos que

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n(2n-1)x)}{2n-1} \quad \left(\stackrel{=} {\sim} |x| \leq 1/2, \text{ por Div II} \right)$$



Llamo

$$f_N(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n(2n-1)x)}{2n-1} \quad \left[= S_{2N-1} f(x) = S_{2N} f(x) \right]$$

Notan que

$$f_N'(x) = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n(2n-1)x) \stackrel{?}{=} 4 \cdot \frac{\sin(4\pi nx)}{\sin(2\pi x)}$$

$$f_N(x) = 4 \int_0^x \frac{\sin(4\pi ns)}{\sin(2\pi s)} ds$$

En particular, $f_N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{j}{4N}, j = \pm 1, \dots, \pm (2N-1)$

$\underbrace{f_N(x)}$ alcanza MAX $\rightarrow x = \frac{1}{4N}$
 " MIN $\rightarrow x = -\frac{1}{4N}$

Su valor máximo es

$$f_N\left(\frac{1}{4N}\right) = 4 \int_0^{\frac{1}{4N}} \frac{\sin(4\pi ns)}{\sin(2\pi s)} ds \approx 4 \int_0^{\frac{1}{4N}} \frac{\sin(4\pi ns)}{2\pi s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{u} du \approx 1.17898\dots$$

(Maxima o
aprox en Taylor)

$$\Rightarrow \max_{0 < x < \frac{1}{2}} |f_N(x) - f(x)| \geq 0.18 = 9\% \text{ daeto !!}$$

UN TEOREMA GENERAL

TEOREMA

Si $f \in C^1(\mathbb{T} \setminus \{a\})$, con discontinuidad de salto en $x = a$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(a \pm \frac{1}{2N+1}\right) = f(a^\pm) \pm 0,09 \cdot [f(a^+) - f(a^-)]$$

Nota:

- Interpretación: en las discontinuidades **siempre** se produce un “overshoot” de aprox 9 % del tamaño del salto
- ... que es un problema serio en las aplicaciones a Ingeniería (procesamiento de señales, sonido, imágenes,...)
- Como veremos, se puede atenuar utilizando “filtros” (convoluciones) adecuadas...

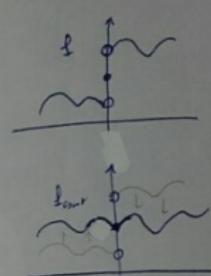
DEM TEOREMA

Dem Supongamos SPDG $a = 0$.

Descomponemos $f(x) = f_{\text{cont}}(x) + \text{sign}(x) \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}$,

es decir,

$$f_{\text{cont}}(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}, & x < 0 \\ \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}, & x = 0 \\ f(x) - \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}, & x > 0. \end{cases}$$



Es fácil comprobar que f_{cont} es continua en $x=0$, y $\exists f'_{\text{cont}}(0^\pm) = f'(0^\pm)$.

Por Dini I, $\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f_{\text{cont}}(x) = f_{\text{cont}}(x)$ UNIF en $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$! (por $f \in Lip(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$)

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f_{\text{cont}}(x) + \boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\text{sign})(x) \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}}, \quad \text{para } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

ENTONCES, si $x_N \rightarrow 0$, se debe cumplir

$$(*) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) = f_{\text{cont}}(0) + \boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\text{sign})(x_N) \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}}$$

EJERCICIO: Demuestra (*) usando la conv. uniforme y $f_{\text{cont}} \in C(0)$.

DEM TEOREMA (CONTINUACIÓN)

③

Por tanto, el Thm quedaría demostrado si probamos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\sin(\pm \frac{1}{2N+1})) = \pm \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du \approx 1'18.$$

Pero esto ya lo vimos en el EJEMPLO 1.

NOTA: En Ejemplo 1 vimos que

$$S_{2N} f\left(\frac{1}{2N}\right) = f_N\left(\frac{1}{2N}\right) \approx 1'18$$

Podemos usarlo $f_N\left(\frac{1}{2N+1}\right) \approx f_N\left(\frac{1}{2N}\right) + O(\frac{1}{2})$,
y se prueba que $\frac{1}{2}$.

$$S_{2N} f\left(\frac{1}{2N+1}\right) + S_{2N-1} f\left(\frac{1}{2N-1}\right) \approx 1'17$$

Por tanto, deducimos

$$\begin{aligned} \lim_N S_N f\left(\pm \frac{1}{2N+1}\right) &= f_{\text{cont}}(0) \pm 1'18 \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \\ &= f(0^\pm) \pm 0'09 \cdot (f(0^+) - f(0^-)) \end{aligned}$$

□

EJERCICIO: Usar Taylor para estimar

$$Y = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\text{Ideas: } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x) \quad (\text{an } |R_{2n-1}(x)| = \left| \frac{\sin^{(2n)}(0) x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!})$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{R_{2n-1}(x)}{x} \right) dx$$

$$= 2 \left(1 - \frac{\pi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5 \cdot 5!} + \dots + \frac{\pi^{2n-2}}{(2n-2)(2n-1)!} \right) + E_n, \quad \text{an } |E_n| \leq \frac{\pi^{2n-1}}{n \cdot (2n)!}$$

$$\approx 1'178979744472\dots$$

Si $n=20$ entonces $E_n \approx 1.14 \cdot 10^{-10}$ ⇒ 10 decimales exactos.



¿CÓMO EVITAR EL FENÓMENO DE GIBBS?

EJERCICIO

Suponer que $\{K_n\}_{n \geq 1}$ es una AI con núcleos $K_n(x) \geq 0$. Entonces

$$-M_1 \leq f(x) \leq M_2 \implies -M_1 \leq K_n * f(x) \leq M_2$$

- En particular, los núcleos positivos no producen “overshooting” ...
- En la §2.5 veremos que los núcleos de Féjer tienen esta propiedad...

- Observado por A. Michelson (Nature, 1898) para $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$, pensó que la serie no convergía en todo $x \in (-\pi, \pi)$...
- ... sin embargo ya sabemos que $S_N f(x) \rightarrow f(x)$, $\forall |x| < \pi$...
- ... el problema es que la convergencia ¡no es uniforme para $x \in (-\pi, \pi)$!
- ... tras varios cruces de cartas en Nature entre Michelson, Love, Gibbs, Poincare...
- ... J.W. Gibbs explica el fenómeno correcto y el papel de $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ en (Nature, 1899)
- ... y M. Bôcher (Annals Math, 1906) lo denomina *fenómeno de Gibbs*...
- ... sin embargo había sido observado mucho antes por H. Wilbraham (Cambridge, 1848)

Torema

Si $f \in C^1(\mathbb{T} \setminus \{a\})$ con discontinuidad de salto en $x = a$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(a \pm \frac{1}{2N+1}) = f(a^\pm) \pm \text{dis.} [f(a^+) - f(a^-)]$$

Demo

Supongamos $a = 0$. Descomponemos

$$f(x) = f_{\text{cont}}(x) + \text{sign}(x) \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}$$



es decir

$$f_{\text{cont}}(x) := \begin{cases} f(x) - \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \\ \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\ f(x) + \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$f_{\text{cont}} \in C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

A demás, como $\exists f'(0^\pm) \Rightarrow \exists f'_{\text{cont}}(0^\pm) \Rightarrow f_{\text{cont}} \in \text{Lip}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Por Dini I,

$$(1) \quad \exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f_{\text{cont}}(x) = f_{\text{cont}}(x), \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

A demás, se puede probar (revisando Dini I) que de hecho la convergencia en (1) es UNIFORME $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Entonces si $x_N \rightarrow 0$ se tendrá

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f_{\text{cont}}(x_N) = f_{\text{cont}}(0).$$

[Demos (2) : Dada $\epsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\epsilon)$ / $|S_N f_{\text{cont}}(x) - f_{\text{cont}}(x)| < \epsilon$
 $\forall N \geq N_0, \forall x \in \mathbb{R}$]

Además, $\exists N_1$ / $|f_{\text{cont}}(x_N) - f_{\text{cont}}(0)| < \epsilon$
 $\forall N \geq N_1$

Entonces si $N \geq N_0 \vee N_1$,

$$|S_N f_{\text{cont}}(x_N) - f_{\text{cont}}(0)| \leq$$

$$|S_N f_{\text{cont}}(x_N) - f_{\text{cont}}(x_N)| + |f_{\text{cont}}(x_N) - f_{\text{cont}}(0)| < 2\epsilon$$

Por tanto

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) = f_{\text{cont}}(0) + \lim_{N \rightarrow \infty} S_N (\text{sign})(x_N) \cdot \left[\frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{(si el límite de la segunda existe)} \\ \text{(nótese que } x_N = \pm \frac{1}{2N+1} \text{)} \end{array} \right)$$

Veamos que si $x_N = \pm \frac{1}{2N+1}$ entonces

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N (\text{sign}) \left(\frac{\pm 1}{2N+1} \right) = \pm \frac{\pi}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du \simeq \pm 1'18.$$

En efecto, esto sigue del ejemplo $f(x) = \text{sign}(x)$, pues allí vimos

$$f_M \left(\frac{1}{q_M} \right) = S_{2M} f \left(\frac{1}{q_M} \right) = \gamma + O \left(\frac{1}{M} \right)$$

$$y de modo similar \quad f_n\left(\frac{1}{4n+1}\right) = f_n\left(\frac{1}{4n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Por tanto, tb se tiene.

$$\bullet \quad N=2M \Rightarrow S_N f\left(\frac{1}{2N+1}\right) = S_{2M} f\left(\frac{1}{4M+1}\right) = f_M\left(\frac{1}{4M+1}\right) = x + O\left(\frac{1}{M}\right)$$

$$\bullet \quad N=2M-1$$

$$\Rightarrow S_N f\left(\frac{1}{2N+1}\right) = S_{2M-1} f\left(\frac{1}{4M-1}\right) = f_{M-1}\left(\frac{1}{4M-1}\right) = x + O\left(\frac{1}{M}\right).$$

Asi en un tercer caso

$$S_N (\text{sign})\left(\frac{1}{2N+1}\right) = x + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Por ultimo, juntando (3) + (4) se concluye el Teorema

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{\pm 1}{2N+1}\right) &= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \pm 1'18 \cdot \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \\ &= f(0^\pm) \pm 0'09 \cdot (f(0^+) - f(0^-)) \end{aligned}$$

■

§2.5. SUMABILIDAD DE CESÀRO Y NÚCLEO DE FEJÉR

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Lunes, 3 mayo 2021

MÉTODO DE SUMACIÓN DE CESÁRO

Recordar, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es CONVERGENTE si existe $\lim_{N \rightarrow \infty}$ de $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$. ①

Sea $\sum a_n$ una SERIE DIVERGENTE:

¿es posible asignar a $\sum a_n$ un "valor natural" s , con algún método de sumación?

Ejemplo ① Serie de Grandi: $\sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

a) si $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \rightarrow$ ¿cuál de los tres? 1

b) 2 $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) + \dots = 1 \rightarrow$

c) 3 $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - s \Rightarrow s = 1/2$

Definición 1 (E. Cesáro, 1890)

Decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s en media, o en el sentido de Cesáro (C.I),

$$\text{si } \bar{S}_N := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1}}{N} \rightarrow s =: C - \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ejemplo: $a_n = (-1)^n \rightarrow S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{S}_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \\ \bar{S}_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{S}_N = \frac{1}{2}}$

Por tanto $C - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$.

SUMACIÓN DE CESÀRO (CONTINUACIÓN)

LEMMA 1 $\boxed{\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Rightarrow C - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s}$

②

Demo Por el criterio de Stolz, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \dots + s_N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_N}{2} > s.$

Ejercicio: tratar de dar una prueba directa con (E, N)

□

NOTAS

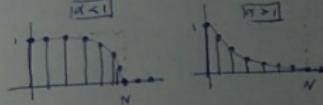
$$\textcircled{1} \quad \sigma_N = \frac{s_0 + \dots + s_{N-1}}{N} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{N-n}{N} a_n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)_+ a_n$$

factor multiplicador

2 Hay más métodos prácticos de sumación:

• Cesàro (C, K) : $\sigma_N^{(K)} := \frac{\sigma_1^{(K-1)} + \dots + \sigma_N^{(K-1)}}{N} \Rightarrow C_K - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^{(K)}$.

• Riesz (R, α) : $R_\alpha - \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{N}\right)_+^\alpha a_n$



• Abel: $A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n$

Ejemplo 2: Hallar $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

• No es $(C, 1)$ -summable, pero $(A, 2) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1/4$. ← (ejercicio)

• $A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-r)^n \Rightarrow A_r = - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n+1}}\right)' = \left(\frac{1}{1+r}\right)' = \frac{1}{(1+r)^2} \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{} \frac{1}{4}$.

Q.C

EL NÚCLEO DE FEJÉR

En 1900, L. Féjer aplicó la C-sumación a las series de Fourier...

Def 1: Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ se define

$$\sigma_N f(x) := \frac{S_0 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)}{N}$$

Como $S_n f = D_n * f$, se tiene

$$\sigma_N f = \left(\frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N} \right) * f = F_N * f$$

Def 2: Se define el *N-simo núcleo de Féjer*, $F_N(x)$, como

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_{N-1}(x)}{N}$$

LEMA

① $F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$

② $\{F_N(x)\}_{N \geq 1}$ es una aproximación de la identidad en $L^1(\mathbb{T})$

DEM LEMA

LEMMA 1
$$\boxed{F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2}$$

Dem Si $z = e^{2\pi i x}$,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left(\sum_{|k| \leq n} e^{2\pi i kx} \right)}_{D_n(x)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^n z^k \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z - 1} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{z - 1} \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-1} z^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{N(z-1)} \left(\frac{z^{N+1} - z}{z - 1} - \frac{z^{-N} - 1}{z^{-1} - 1} \right) = \frac{z^{N+1} - z + z(z^{-N}-1)}{N(z-1)^2} = \frac{z(z^N - 2 + z^{-N})}{N(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{(z^{\frac{N}{2}} - z^{-\frac{N}{2}})^2}{(z^{\frac{N}{2}} - z^{-\frac{N}{2}})^2} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2. \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA 2: $\left\{ F_N(x) \right\}_{N \geq 1}$ es una APROXIMACIÓN de la IDENTIDAD en $L^1(\Pi)$.

Dem: $\int_{\Pi} F_N = \int_{\Pi} |F_N| = \int_{\Pi} \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Pi} D_n}{N} = \frac{N}{N} = 1.$

• Si $\delta \rightarrow \infty$, cuando $|F_N(x)| \geq \sin \pi x$,

$$\int_{-\delta \leq x \leq \frac{1}{2}} |F_N(x)| dx \stackrel{\text{LI}}{\leq} \int_{-\delta \leq x \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{(\sin \pi x)^2} \leq \frac{1/N}{(\sin \pi \delta)^2} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0. \quad \square$$

NÚCLEO DE FEJÉR: RESUMEN DE PROPIEDADES

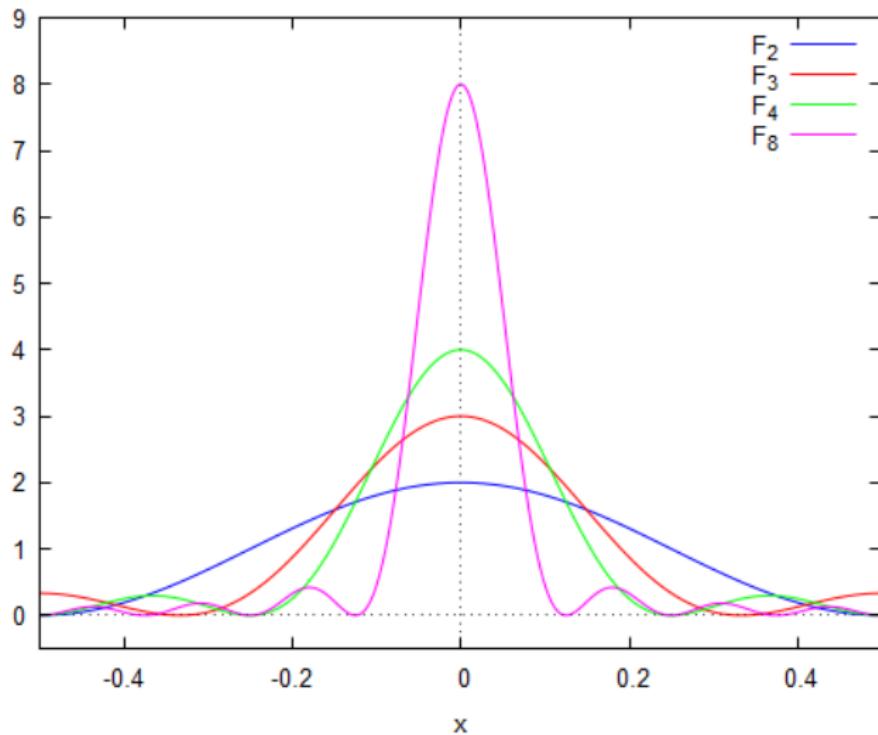
Propiedades

- ① $F_N \geq 0$ y $F_N(x) = F_N(-x)$
- ② $\int_{\mathbb{T}} F_N(x) dx = \int_{\mathbb{T}} |F_N(x)| dx = 1$
- ③ $F_N(0) = N$
- ④ $F_N(x) = 0 \iff x = \pm j/N, j = 1, \dots, N/2$
- ⑤ Decaimento:
$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2 \leq \min \left\{ N, \frac{1}{N|x|^2} \right\}$$
 por una de

- ⑥ Coeficientes de Fourier: $\widehat{F_N}(n) = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)_+, n \in \mathbb{Z};$ de hecho

$$\sigma_N f(x) = \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)_+ \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

GRÁFICAS



TEOREMA DE FEJÉR (1900)

- ① Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(a^\pm)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}$$

- ② Si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = f(x)$ **uniformemente** $\forall x \in \mathbb{T}$

- ③ Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N f - f\|_{L^1} = 0$

Dem: consecuencia del Teorema de Aprox de la Identidad...

COROLARIO 1: UNICIDAD DE LAS SF

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f \equiv 0$.

Dem: Usar ③ y $\sigma_N f(x) = \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \equiv 0$

MÁS COROLARIOS...

COROLARIO 2: ELIMINACIÓN DEL FENÓMENO DE GIBBS

Si $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ entonces $M_1 \leq \sigma_N f(x) \leq M_2$

Dem: ver clase anterior...

(¡dibujar gráficas con Maxima!)

COROLARIO 3

El conjunto $\mathcal{T} = \text{span} \{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es denso en $C(\mathbb{T})$

Dem: si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $\sigma_N f(x) \in \mathcal{T}$ y converge uniformemente a $f(x)$

COROLARIO 4: EL TEOREMA DE WEIERSTRASS (1885)

El conjunto $\mathcal{P} = \text{span} \{x^n\}_{n \geq 0}$ de los polinomios es denso en $C([a, b])$. Es decir, si $f \in C([a, b])$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio $P(x)$ tal que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

DEM TEOREMA WEIERSTRASS (A PARTIR DEL TEOREMA FEJÉR)

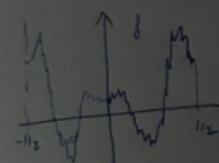
Dem del Tma Weierstrass, a partir del Tma Fejér.

SPDG impone $[a, b] = [0, \frac{1}{2}]$.

Sea $f \in C([0, \frac{1}{2}])$ y sea $g(x) = f(x_1) \in C_{per}([\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

$\rightarrow g \in C(\mathbb{T})$. Por Corol 3, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, f)$ lg y $\exists n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} |g(x) - \sum_{m \leq N_0} a_m e^{2\pi i mx}| < \varepsilon$$



Escribo $e^u \stackrel{(T=2\pi)}{=} P_L(u) + R_L(u)$, donde $|R_L(u)| \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} 0$ (ya que en compacto $L \geq L_0$) ($u \in [-\pi N_0, \pi N_0]$)

S. esijo $L_0 = L_0(\varepsilon, N_0, f)$ tq $|R_L(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$) $\forall L \geq L_0$
 $\forall u \in [-\pi N_0, \pi N_0]$

$$\Rightarrow |e^u - P_{L_0}(u)| = |R_{L_0}(u)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall u \in [-\pi N_0, \pi N_0]$$

Por tanto,

$$|g(x) - \sum_{m \leq N_0} a_m P_{L_0}(mx)| \leq |g(x) - \sum_{m \leq N_0} a_m e^{2\pi i mx}| + \sum_{m \leq N_0} |a_m| |e^{2\pi i mx} - P_{L_0}(mx)|$$

$$< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

B

§2.6. APPLICACIONES DE LA TEORÍA DE SERIES DE FOURIER

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Lunes, 4 mayo 2020

TRES APLICACIONES CLÁSICAS

Tres aplicaciones clásicas

- ① La desigualdad isoperimétrica
- ② Funciones continuas no derivables en ningún punto
- ③ El teorema de equidistribución de Weyl

Nota: Están detalladas en el libro de Stein-Sharkarchi (Cap 4)...

LA DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA EN \mathbb{R}^2

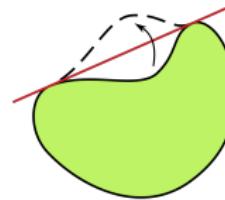
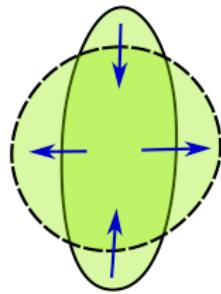
Problema: De entre todas las curvas cerradas $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, ¿cuál es la que encierra la mayor área?

TEOREMA

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple “regular” con $\text{Long}(\Gamma)=L$. Entonces, el área que encierra cumple

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Además, la igualdad se da si y sólo si Γ es una circunferencia.



Dem

Tomemos la parametrización por la longitud de arco:

$$\vec{\sigma}: [0, L] \rightarrow \Gamma \quad (\|\vec{\sigma}'(s)\| = 1) \\ s \mapsto (x(s), y(s))$$

Si perdemos la generalidad, podemos suponer

$$\int_0^L x(s) ds = \int_0^L y(s) ds = 0$$

porque las trayectorias no caen en L en A .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left| \int_0^L (x dy - y dx) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^L (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^L \operatorname{Im} \left[\overline{(x(s) + iy(s))} (x'(s) + iy'(s)) \right] ds \right| = \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left[\int_0^L \overline{(x+iy)} (x'+iy') ds \right] \right| \stackrel{\text{↑}}{\leq} \frac{1}{2} \left| \int_0^L \overline{\vec{\sigma}(s)} \vec{\sigma}'(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^L |\vec{\sigma}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^L |\vec{\sigma}'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \stackrel{\text{↑}}{\leq} \frac{1}{2} \frac{L}{2\pi} \underbrace{\int_0^L |\vec{\sigma}'(s)|^2 ds}_{\text{Wirtinger}}^{1/2} \leq \frac{L}{4\pi} \end{aligned}$$

Finalizado

$$\text{Supongamos } A = \frac{1}{4\pi} L^2 \quad \text{Recordar } |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \quad \text{con } "=\text{" si } \vec{u} = d\vec{v} \quad \text{de C}$$

$$\rightarrow \vec{\sigma}' = d\vec{\sigma}'$$

$$x(s) + iy(s) = \lambda(x'(s) + iy'(s)) \quad \forall s \in (0, l)$$

$$x(s) + iy(s) = a \cdot e^{\frac{2\pi i s}{l}} + b e^{-\frac{2\pi i s}{l}}$$

||
gründete die
Wirtinger

$$\lambda(x'(s) + iy'(s)) = a \cdot \lambda \frac{2\pi i}{l} e^{\frac{2\pi i s}{l}} + b \lambda \frac{2\pi i}{l} e^{-\frac{2\pi i s}{l}}$$

$$a=0 \rightarrow \bar{y}(s) = b e^{-\frac{2\pi i s}{l}}$$

L.I.

$$\begin{cases} a = a \frac{2\pi i}{l} \\ b = -b \frac{2\pi i}{l} \end{cases}$$

DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA: HERRAMIENTAS

- Definición correcta de curva cerrada simple “regular”, a través de una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$, de modo que

$$\text{Long}(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (\text{independ de param})$$

- Parametrización de Γ con la longitud de arco: $|\sigma'(s)| \equiv 1$
- Fórmula de Green en \mathbb{R}^2

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \left| \int_{\partial\Omega} (-y dx + x dy) \right|$$

- Demostrar el teorema usando la desig de Wirtinger (Ej 11, hoja 4): si $f \in C^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(0) = 0$ entonces

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \neq 0} n^2 |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$

DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA EN \mathbb{R}^d

Se salen del ámbito de este curso, pero quizá las veáis en Geometría...

- si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ entonces $\text{Vol } (\Omega)^2 \leq \frac{1}{36\pi} \text{Área}(\partial\Omega)^3$, ["=" \iff $\Omega = B_R(a)$]
- si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es “regular” entonces

$$\left[\text{Vol}_{\mathbb{R}^d}(\Omega) \right]^{d-1} \leq \alpha_d \left[H_{d-1}(\partial\Omega) \right]^d$$

- Esta desigualdad geométrica tiene una versión analítica

TEOREMA (SOBOLEV, 1939)

Si $f \in W^1(L^1(\mathbb{R}^d))$, entonces

$$\|f\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|$$

donde puede tomarse $C_d = (\alpha_d)^{1/d}$.

LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS

TEOREMA: WEIERSTRASS, 1872

Sea $\alpha \in (0, 1)$ y sea

$$W_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\alpha}}, \quad x \in \mathbb{T}.$$

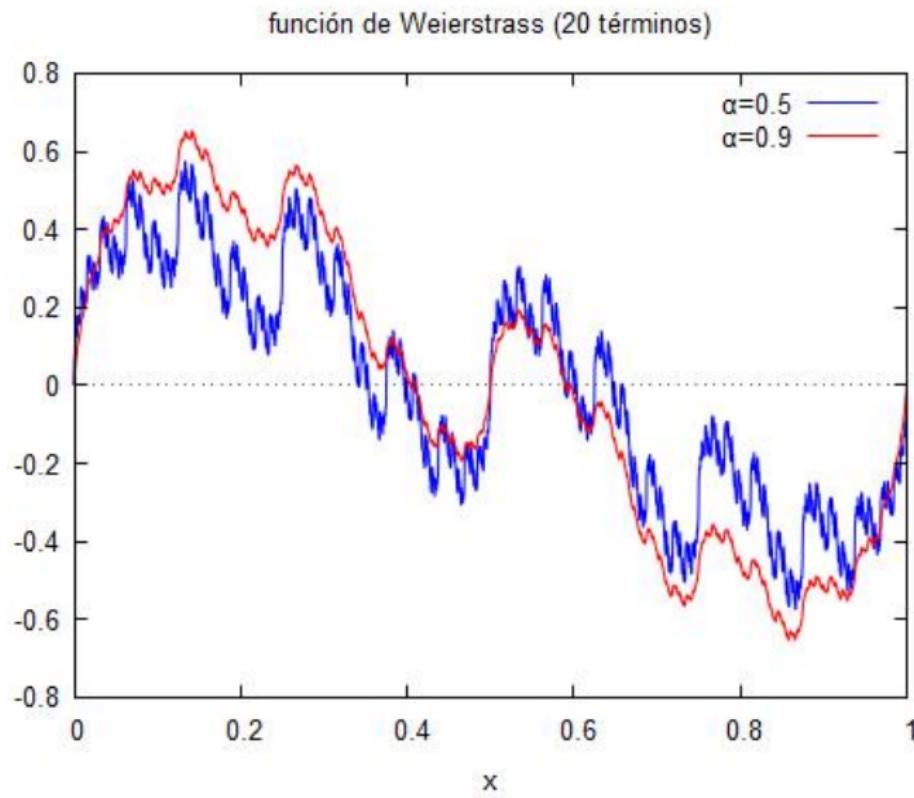
Entonces $W_\alpha \in C(\mathbb{T})$, pero no es derivable en ningún $x_0 \in \mathbb{R}$.

Es más, $W_\alpha \in C^\alpha(\mathbb{T})$, pero $W_\alpha \notin C^{\alpha+\varepsilon}(x_0)$, $\forall \varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nota:

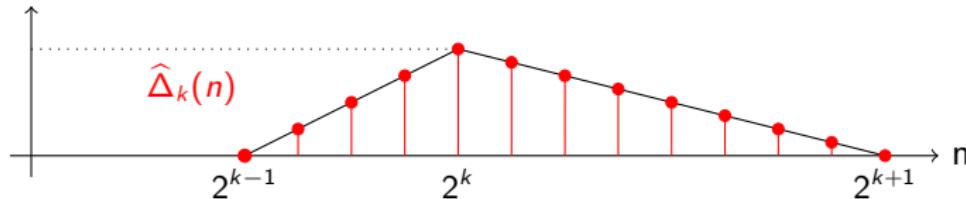
- $W_\alpha \in C(\mathbb{T})$ sigue del M-test
- $W_\alpha \in C^\alpha(\mathbb{T})$ es algo más elaborado, ver Ejerc 12.iii de Hoja 5...

GRÁFICA CON MAXIMA...



IDEA DE DEM DE NO DERIVABILIDAD...

- Conviene utilizar los *núcleos de Littlewood-Paley* Δ_k



- Notar que $\text{Supp } \hat{\Delta}_k \subset \pm(2^{k-1}, 2^{k+1})$ → ¡bloques diádicos!
- Explícitamente, $\Delta_k = 2F_{2^{k+1}} - 3F_{2^k} + F_{2^{k-1}}$

LEMA

Si g acotada cumple $g \in \text{Lip}_\beta(x_0)$, con $\beta \in (0, 1)$, entonces

$$|\Delta_k * g(x_0)| \leq C_g 2^{-k\beta}. \quad (1)$$

- Como $\Delta_k * W_\alpha(x) = 2^{-k\alpha} e^{2\pi i 2^k x}$, no se puede cumplir (1) si $\beta > \alpha$.
- Podéis seguir los pasos en [Stein-Shakarchi, Cap 4.3] o pedirme ayuda con el lema (idea similar a Ejerc 11)...

TEOREMA DE EQUIDISTRIBUCIÓN DE WEYL

- Un conocido Teorema de Kronecker (1884) dice que, si $\gamma \notin \mathbb{Q}$, entonces la sucesión $\xi_n = \langle n\gamma \rangle = n\gamma \pmod{\mathbb{Z}}$ es densa en $[0, 1]$
- Un resultado más fuerte es el siguiente

TEOREMA DE EQUIDISTRIBUCIÓN DE WEYL (1916)

Si $\gamma \notin \mathbb{Q}$ y si $J = (a, b) \subset \mathbb{T}$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card } \{n = 1, \dots, N : \langle n\gamma \rangle \in J\}}{N} = |J|$$

- ... si genero 1000 puntos $\langle n\gamma \rangle$, entonces aprox 100 estarán en $[0, 0'1]$, otros 100 en $[0'1, 0'2]$, etc...

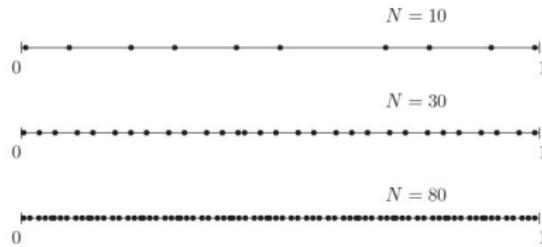


Figure 2. The sequence $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots, \langle N\gamma \rangle$ when $\gamma = \sqrt{2}$

VERSIÓN EN \mathbb{T}^d

El resultado también es cierto en \mathbb{T}^d (con la misma prueba)

TEOREMA 2

Si $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^d$ es tal que $\{1, \gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ es \mathbb{Q} -lin indep, y si $J = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{T}^d$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card } \{n = 1, \dots, N : \langle n\vec{\gamma} \rangle \in J\}}{N} = |J|$$

Aplicaciones:

- ① Densidad uniforme de la luz...
- ② Alineamiento de d -planetas cuyas velocidades angulares γ_j son \mathbb{Q} -independ

$$x_j(t) = r_j e^{2\pi i \gamma_j t}$$

As a last remark, we mention a nice geometric interpretation of the distribution properties of $\langle n\vec{\gamma} \rangle$. Suppose that the sides of a square are reflecting mirrors and that a ray of light leaves a point inside the square. What kind of path will the light trace out?

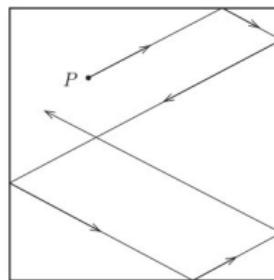


Figure 4. Reflection of a ray of light in a square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

El Teorema equivale a demostrar que, para $f = \chi_{(a,b)} \in L^1(\mathbb{T})$, se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \int_{\mathbb{T}} f \quad (*)$$

- Primero se prueba (*) para $f(x) = e^{2\pi i kx}$, $k \in \mathbb{Z}$
- ... por linealidad se extiende a $f \in \mathcal{T}$
- ... y por densidad se extiende a $f \in C(\mathbb{T})$
- Por último, un argumento de aproximación por trapecios permite obtener (*) para $f = \chi_J$; ver [Stein-Shakarchi, pág 110]
- El libro incluye algunas extensiones y ejercicios
 - si $\gamma \notin \mathbb{Q}$ entonces $\langle \gamma n^2 \rangle$ es equidistribuida
 - si $\sigma \notin \mathbb{N}$ entonces $\langle \gamma n^\sigma \rangle$ es equidistribuida $\forall \gamma \neq 0!!$
 - $\langle (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \rangle$ ó $\langle \gamma \ln n \rangle$ no son equidistribuidas

BLOQUE III : MÁS SOBRE EDPs.

Pase, Cap 3.2

1. - EDDs de Sturm-Liouville

A medida, al resolver EDPs por "nuevas variables" llegamos a EDDs de orden 2, del tipo

$$(P_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(t) \cdot x''(t) + b(t) \cdot x'(t) + c(t) \cdot x(t) = -\lambda x(t), \quad t \in [a,b] \\ + \text{Cond. Contorno} \end{array} \right.$$

En cada EDP, debemos determinar

① ¿Para qué valores de λ existen soluciones $x(t) \not\equiv 0$?

↳ típicamente $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \nearrow \infty$

② encontrar "autofunciones": dado λ_n

$$\text{hallar } \phi_n(t) / \quad \left\{ \begin{array}{l} L\phi_n(t) = -\lambda_n \phi_n(t) \\ + CC \end{array} \right.$$

③ Probar ORTOGONALIDAD, es

$$\int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

④ Determinar si TODA función $f(t)$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \phi_n(t), \quad t \in [a,b]$$

para coeficientes a_n adecuados.

↳ Usando (1)-(4) se encuentra un candidato a Solución de la EDP.

Q1: ¿Es necesario hacer (1)-(4) en CBA EPP,
o existe una técnica general?

Ejemplos



① $\begin{cases} x''(t) = -\lambda x(t), & 0 < t < L \\ x(0) = x(L) = 0 \end{cases}$

→ Ya vimos que sólo tiene solución ($\neq 0$) cuando

$$\left\{ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \phi_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

→ se cumple (1)+(2)+(3)

Además, la Técnica de Series de Fourier justifica (4):

(*) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad t \in [0, L]$

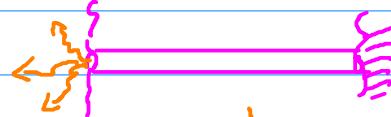
donde $a_n(f) = \langle f, \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|^2} \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad n=1, 2, \dots$

y donde (*) converge UNIF en $f \in C^1[0, L]$.

(1 bis) Otros sistemas salvan de variar CC ($x(0)=x'(L)=0$, etc...)

② $\begin{cases} x''(t) = -\lambda x(t), & 0 < t < L \\ x'(0) = \gamma \cdot x(0), \quad x'(L) = 0 \end{cases}$

[con radiación en $t=0$ (Ver ej. 2.6)
y extremo aislado $t=L$]



→ aquí vemos que

$$\tan(\lambda L) = \frac{\gamma}{\lambda}$$

→ $\lambda_n \in (n\frac{\pi}{L}, (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L})$ *¡¡NO son explícitos!!*

→ $\phi_n(x) = \cos(\lambda_n(x-L))$



¿Se cumpliría ahora (3) + (4)?

$$\textcircled{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = \partial_x (K(x) \cdot u_x) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ec. calor vanilla } \underline{\text{NO}} \text{ homogénea.}$$

L: busco $u(t,x) = T(t) \cdot X(x) \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{(K(x)X'(x))'}{X(x)} = \lambda = -1$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (K(x)X'(x))' = -\lambda X(x), \quad 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array} \right.$$

→ ¿hay soluc explícitas? cumplen (1)-(4)?

④ EDPs en coord polares

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = -\lambda u \text{ en 1D} \\ u|_{\partial D} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{busco } u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\longrightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) = -\lambda R(r) \\ \exists R(\text{cot}) \text{ y } R(1) = 0. \end{array} \right.$$

¿Tiene sol explícito? → ecuación de Bessel

$$\Rightarrow R(r) = A J_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r)$$

$$\stackrel{<<}{\Rightarrow} R(1) = 0 \Rightarrow \left\{ \lambda_n = \lambda(J_0), \quad \phi_n(r) = J_0(\lambda_n r) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

→ ¿re cumple (3) + (4)?

Def 1 Un operador de Sturm-Liouville REGULAR (L, cc) está formado por:

a) un operador difuncional L de orden 2:

$$L x(t) = - [a(t) \cdot x''(t) + b(t) \cdot x'(t) + c(t) \cdot x(t)], \quad t \in [a, b]$$

donde $a(t), b(t), c(t) \in C_{\text{ac}}[a, b]$ con $\boxed{a(t) > 0}$

b) unas condiciones de contorno CC fijas

o bien $a_1 \cdot x(a) + a_2 \cdot x'(a) = 0$ y $b_1 \cdot x(b) + b_2 \cdot x'(b) = 0 \quad (C_S)$

o bien $x(a) = x(b)$ y $x'(a) = x'(b) \quad (C_P) \leftarrow (\text{CC periódicas})$

Dad 2 Decimos que

$$\lambda \in \sigma(L, CC) \Leftrightarrow$$

$$\exists \phi \neq 0 \text{ t.q. } \begin{cases} L\phi(t) = \lambda \phi(t) \\ \phi \in CC \end{cases}$$

En ese caso, λ = autovalor de (L, CC) , $\phi(t)$ = autofunción asociada

- El teorema que resume las propiedades (que NO demostraremos) es:

Teorema general (H. Sturm, J. Liouville, 1836-1838)

Sea (L, CC) un operador de SL REGULAR.

Entonces se cumple



$$\textcircled{1} \quad \sigma(L, CC) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ donde}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n \nearrow +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \Sigma. CC = C_S \Rightarrow \text{todos los autovalores } \lambda_n \text{ son simples, es}$$

$$\dim \left\{ \phi_n \in C_{\mathbb{R}}^2[a, b] / L\phi_n = \lambda_n \cdot \phi_n, \phi_n \in CC \right\} = 1$$

$$[\Sigma. CC = C_P \Rightarrow \dim \ker(L - \lambda_n I) < \infty, \forall n]$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Existe un peso } w(t) > 0 / \left\{ \phi_n \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ es BON en } L^2([a, b], w(t) dt), \text{ en particular}$$

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_w = \int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) w(t) dt = 0, \forall n \neq m.$$

$$[\text{donde } w(t) \text{ es explícito} \rightarrow w(t) = \frac{1}{\alpha(t)} e^{\int_a^t \frac{b(s)}{\alpha(s)} ds}]$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Toda } f(t) \in C^2([a, b]) \cap CC \text{ no puede escribirse como}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_w \phi_n(t), \quad t \in [a, b]$$

con convergencia uniforme $\forall t \in [a, b]$.

NOTAS

① Se cumplen algunas propiedades que arremesan $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistema trigon.

(5) $\phi_n(t)$ tiene exactamente $(n-1)$ -ceros en (a, b)

(6) Tma equiconvergencia: Si $f \in L^1[a, b]$, entonces

$$\tilde{\sum}_n f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_w \phi_n(t)$$

cumple las mismas tmas de convergencia que las SF normales (Dirichlet, Dirichlet-Jordan, Fejér, contrajugadas, etc...)

(7) Fórmula variacional de Rayleigh

$$\lambda_n = \min \left\{ \langle L\phi, \phi \rangle_w \mid \phi \in C^2 \cap C_c, \|\phi\|_{L_w^2} = 1, \phi \perp \{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\} \right\}$$

↪ permite aproximar λ_n numéricamente

② En algunos problemas de EDPs aparecen operadores SL SINGULARES, esd, puede ocurrir

- $a(t_0) = 0$ o bien $b(t), c(t) \rightarrow \infty$ si $t = t_0 \in [a, b]$
- $[a, b]$ no es compacto $\rightarrow [0, \infty) \cup (-\infty, 0)$

↪ en muchos de estos casos el Tma es cierto con modificaciones menores

Ejemplo ec de Bessel

$$-Lx(t) = x''(t) + \frac{1}{t} \cdot x'(t) - \frac{v^2}{t^2} x(t) , \quad t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow b(t) = \frac{1}{t}, \quad c(t) = -\frac{v^2}{t^2} \quad \text{tienen un polo en } t=0.$$

Para el operador de Bessel, veremos por el problema de autovalores

$$\begin{cases} Lx(t) = \lambda x(t), & t \in [0, 1] \\ \exists x(0^+), \quad x(1) = 0 \end{cases}$$

Tiene como solución

$$\phi_n(t) = J_\nu(\lambda_n t) \quad \text{on } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \frac{1}{J_\nu}$$

Nota: Ademáis, para tener $\langle \phi_n, \phi_m \rangle_w = 0$, se debe usar el peso

$$w(t) = \frac{1}{a(t)} e^{\int \frac{b(s)}{a(s)} ds} = e^{bt} = t$$

③ Sobre la demostración del Tmc General

a) para probar $\sigma(L, CC) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ se usa

Análisis Funcional (Teoría de operadores COMPACTOS)

Vea asignatura
de 4º año

b) $\langle \phi_n, \phi_m \rangle_w = \delta_{n,m} \rightarrow$ es más sencillo (integrar por partes)

c) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base y convergencia de la serie

→ Análisis Func y funciones de Green

Vea [Pual, Cap 3.2] o [Strauss, Cap 1].

§3.2 ECUACIÓN DE LA MEMBRANA VIBRANTE: MEMBRANA RECTANGULAR

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Lunes, 10 mayo 2021

§3.2. ECUACIÓN DE LA MEMBRANA VIBRANTE

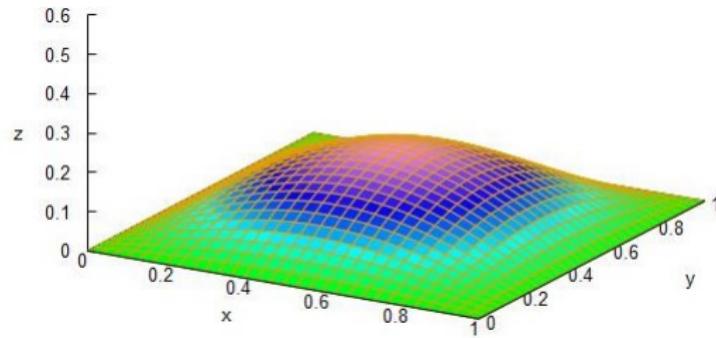
Hipótesis:

- Membrana horizontal tensa, situada en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y **fija** en la $\partial\Omega$
- Sólo pequeñas vibraciones verticales
- Densidad ρ y tensión $\tau = |\vec{\tau}|$ constantes $\rightarrow c^2 := \tau/\rho$

Buscamos $u(t, x, y) =$ altura del pto $(x, y) \in \Omega$ en tiempo t . Entonces

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), & t > 0, (x, y) \in \Omega \\ u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{cases}$$

sujeto a las **condiciones iniciales**: $u(0, \cdot) = f$ y $u_t(0, \cdot) = g$



EJEMPLO 1: MEMBRANA RECTANGULAR

Membrana rectangular

$$B_{\text{BMO}} \text{ solenaires} \quad u(t, x, y) = T(t) V(x, y)$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad T'' = c^2 \mu T \quad \leftarrow \boxed{\text{EPO sencilla}}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \Delta V = \mu V \\ V|_{\partial B} = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Problema de} \\ \text{autovalores del} \\ \text{Laplaciano.} \end{array}$$

Resolvemos ② por SV: basta $V(x_1 y_2) = X(x_1) Y(y_2)$

Resolvemos @ por SV: basta

$$X'' \cdot Y + X Y'' = \mu X Y \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \mu \Rightarrow \frac{X''}{X} = \mu - \frac{Y''}{Y} \equiv \text{cte} = \sigma$$

$$\boxed{X} \quad \boxed{(x_0 = 5 > 0)} \quad \begin{cases} X'' = \sigma X \\ X(0) = x_0, X'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow X(x) = A \cdot \text{ch}(\sqrt{\sigma}x) + B \cdot \text{s}\text{h}(\sqrt{\sigma}x) \xrightarrow{\text{cc}} A = B = 0 \quad \text{L.}$$

AUTOVALORES DE Δ EN $R = [0, L_1] \times [0, L_2]$

$$\boxed{\text{caso } \sigma = -\lambda^2 < 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' = -\lambda^2 X \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{array} \right. \rightarrow X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \xrightarrow{\text{CC}} \begin{cases} A=0 \\ B \cdot \sin(\lambda L_1) = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{L_1}, \quad n=1, 2, \dots, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)}$$

\boxed{Y}

$$\boxed{\mu - \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y'' = (\mu + \lambda^2) Y \\ Y(0) = Y(L_2) = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{caso } \mu + \lambda^2 \geq 0 \rightarrow Y=0 \quad \text{E.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{caso } \mu + \lambda^2 = -\tau^2 < 0} \rightarrow Y(\gamma) = A \cos(\tau y) + B \sin(\tau y) \xrightarrow{\text{CC}} A=0, \quad \tau = \frac{m\pi}{L_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_m = \frac{m\pi}{L_2}, \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad m=1, 2, \dots}$$

Uniendo ambas expresiones obtengo el "candidato" a solución del problema de autovalores de Δ en R

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = \mu V \\ V|_{\partial R} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\mu = -\lambda_n^2 - \tau_m^2 = -\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right], \quad m, n=1, 2, \dots}$$

← autovalores

$$\boxed{V_{n,m}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)}$$

← autofunciones.

SOLUCIÓN GENERAL

Por último, resuelvo la EDO de T:

$$T'' = c^2 \mu T = -c^2 g_{n,m}^2 T \rightarrow T(t) = A \cos(c g_{n,m} t) + B \sin(c g_{n,m} t).$$

Así, la solución general queda:

$$U(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos(c g_{n,m} t) + B_{n,m} \sin(c g_{n,m} t)] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

Los coeficientes se calculan con cond. iniciales:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{t=0} f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \quad \text{--- si se le da } f \text{ !} \\ & \dots \text{ por OG tendremos } A_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= u_t(0, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c g_{n,m} B_{n,m} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right). \\ &\Rightarrow B_{n,m} = \frac{1}{c g_{n,m}} \cdot \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy. \end{aligned}$$

[NOTA]:

$$c \cdot g_{n,m} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2} = \text{FRECUENCIAS FUNDAMENTALES de VIBRACIÓN (temporal).}$$

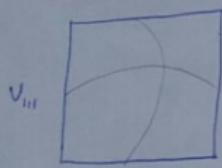
... asociada a cada "modo" de vibración espacial
 $v_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$

VISUALIZACIÓN DE MODOS DE VIBRACIÓN

Visualización de los modos de vibración

Vibración PRAL

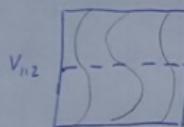
$$\varphi_{1,1} = \sqrt{2} \cdot \pi$$



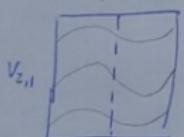
$V_{1,1}$

Vibración secundaria

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = \sqrt{5} \cdot \pi$$



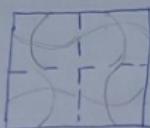
$V_{1,2}$



$V_{2,1}$

↑ autoválor doble!

$$\varphi_{2,2} = \sqrt{8} \cdot \pi$$



$V_{2,2}$

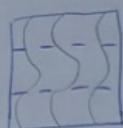
Suponer $L_1 = L_2 = 1$, $c = 1$.

(4)

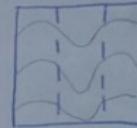
$$\varphi_{n,m} = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \pi, V_{n,m} = 2\pi \sin(n\pi x) \cos(m\pi y)$$

$$\varphi_{1,3} = \varphi_{3,1} = \sqrt{10} \cdot \pi$$

etc...



$V_{1,3}$

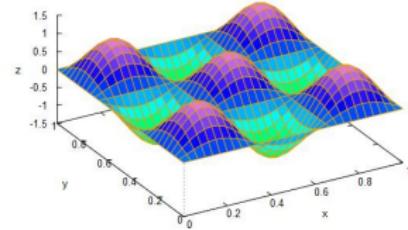
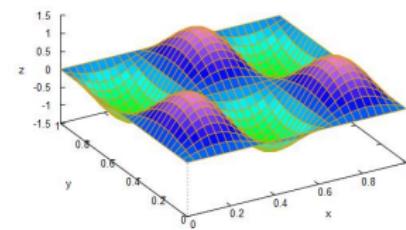
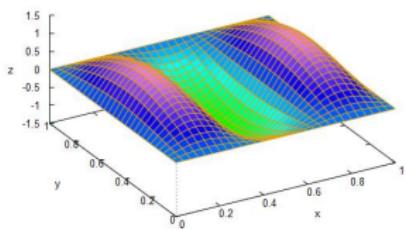
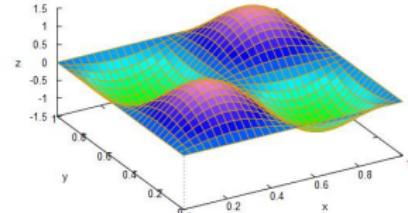
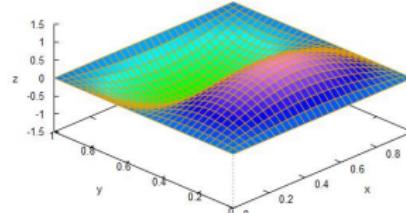
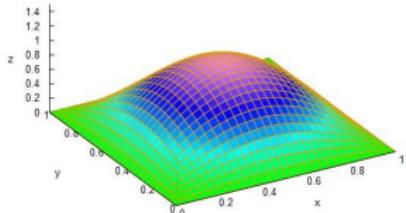


$V_{3,1}$

↑ autoválor doble!

NOTA: Las líneas nodales se mantienen en reposo durante la vibración...

MODOS DE VIBRACIÓN (CON MAXIMA)



EJEMPLO EXPLÍCITO

EJEMPLO: Resolver el caso:

Membrana: $4\text{m} \times 2\text{ m}$. \rightarrow

$$\begin{cases} \tau = 12'5 \text{ N/m} \\ f = 2'5 \text{ kg/m}^2 \\ g(x,y) = 0'1 \cdot (4x - x^2) \cdot (2y - y^2) \end{cases} \rightarrow c^2 = \frac{\tau}{f} = 6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$A_{n,m} = \frac{c_1}{4 \cdot 2} \int_0^4 d_1 \cdot (4x - x^2) \sin \frac{n\pi x}{4} dx \int_0^1 (2y - y^2) \sin \frac{m\pi y}{2} dy = \frac{1}{20} \cdot \frac{256}{n^3 m^3} \cdot \frac{32}{m^3 n^3} = \frac{2^{11}}{n^6 m^6},$$

$n, m = \text{IMPAR}$

$$c \cdot f_{n,m} = \sqrt{5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{n^2 + 4m^2}$$

[y $A_{m,m=0}$, resto]

$$\Rightarrow u(t, x, y) = \frac{2^{11}}{5\pi^6} \sum_{n,m=1}^{\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{4} \cdot \sqrt{(2m-1)^2 + 4(2n-1)^2} \cdot t\right)}_{\sim 0.42} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{2}\right)}{(2n-1)^3 (2m-1)^3}$$

$$= 0'42 \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}_{\text{j+termino principal!}} + \underbrace{\frac{1}{27} \dots + \frac{1}{27} \dots + \dots}_{\text{pequeños}} + \dots \right)$$

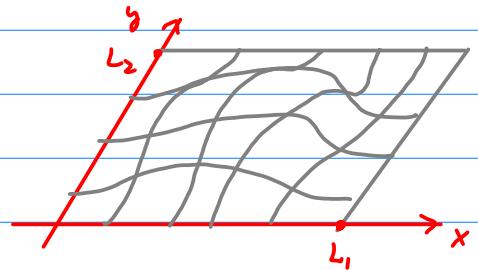
$\approx 4\% \text{ t}^2 \text{ para}$

\rightarrow ver gráfica en Maxima.

2. Membrana vibrante rectangular

[Haberman, §7.3]

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \cdot \Delta u, t > 0, (x, y) \in R \\ u(t, \cdot) \equiv 0 \text{ en } \partial R \quad \leftarrow \text{cond. out} \\ u(0, \cdot) = f, \quad u_t(0, \cdot) = g \quad \leftarrow \text{pos./veloc. inicial} \end{cases}$$



Busco soluciones $u(t, x, y) = T(t) \cdot V(x, y)$

$$\rightarrow T'' \cdot V = c^2 \cdot (T \cdot V_{xx} + T \cdot V_{yy}) = c^2 \cdot T \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} = \text{cte} = \mu \quad \rightarrow \text{separamos en 2 EDS}$$

$$\rightarrow \textcircled{1} \quad T'' = c^2 \cdot \mu \cdot T$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \Delta V = \mu V \\ V|_{\partial R} \equiv 0 \end{cases}$$

Problema de
autovalores del
laplaciano en R

Resolvemos $\textcircled{2}$ por separación de variables: busco $V(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\rightarrow X'' \cdot Y + X \cdot Y'' = \mu \cdot X \cdot Y \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \mu$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \mu - \frac{Y''}{Y} = \text{cte} = \sigma$$

Resuelvo la X

$$\boxed{\text{caso } \sigma > 0} \quad \begin{cases} X'' = \sigma X \rightarrow X(x) = A \sin(\sqrt{\sigma} x) + B \cos(\sqrt{\sigma} x) \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{cc}} \dots \Rightarrow X(x) \equiv 0. \quad \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{caso } \sigma = 0} \quad \begin{cases} X'' = 0 \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{cases} \rightarrow X(x) = A + Bx \xrightarrow{\text{cc}} \dots \rightarrow X(x) \equiv 0. \quad \mathcal{E}$$

$$\text{Así } \sigma = -\lambda^2 \omega$$

$$\begin{cases} X'' = -\lambda^2 X \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{cases} \rightarrow X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$\xrightarrow{\text{cc}} \dots \rightarrow A = 0, B \sin(\lambda L_1) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{L_1}, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \quad n=1,2,3,\dots}$$

Resolvemos la Y

$$\mu - \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \xrightarrow{\sim} \Rightarrow \begin{cases} Y'' = (\mu + \lambda^2) Y \\ Y(0) = Y(L_2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{cosos}} \mu + \lambda^2 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{cc}} \dots \rightarrow Y = 0$

$$\text{Así } \mu + \lambda^2 = -\tau^2 \leq 0$$

$$\rightarrow Y(y) = A \cos(\tau y) + B \sin(\tau y)$$

$\xrightarrow{\text{cc}} \dots \rightarrow A = 0, B \sin(\tau L_2) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_m = \frac{m\pi}{L_2}, \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad m=1,2,3,\dots}$$

Uniendo ambos casos, se obtiene la solución de ②

$$\begin{cases} \Delta V = \mu V \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\mu = \mu_{n,m} = -\lambda_n^2 - \tau_m^2 = -\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]$$

$$V_{n,m}(x,y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Por último, resolvemos ①

$$T'' = c^2 \rho_{n,m} T \Rightarrow T(t) = A \cos(c f_{n,m} t) + B \cdot \sin(c f_{n,m} t)$$

$$\text{donde } f_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}$$

Así, la solución general queda

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos(c \cdot \varphi_{n,m} t) + B_{n,m} \sin(c \cdot \varphi_{n,m} t)] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

Los coeficientes se calculan con los Coef. Four

$$\stackrel{t=0}{\rightarrow} f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \quad \begin{matrix} \text{series de Fourier} \\ \text{valle en } R \end{matrix}$$

cuando $t \rightarrow 0$ tendremos

$$A_{n,m} = \frac{4}{L_1 \cdot L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy$$

Análogamente

$$g(x, y) = u_t(0, x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} c \cdot \varphi_{n,m} \cdot B_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

$$\stackrel{\text{OG}}{\Rightarrow} B_{n,m} = \frac{1}{c \cdot \varphi_{n,m}} \frac{4}{L_1 \cdot L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} g(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy$$

Interpretación

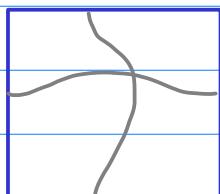
- Modos de vibración espacial $\rightarrow V_{n,m}(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$
- Frecuencias de vibración temporal $\rightarrow \frac{c}{2\pi} \cdot \varphi_{n,m} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2} = [Hz]$
- Visualización de los modos de vibración \uparrow
 n° vueltas / seg

Por simplicidad supone $L_1 = L_2 = 1$, $c = 1$.

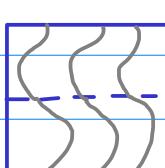
$$\Rightarrow f_{n,m} = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \pi, \quad V_{n,m}(x, y) = \operatorname{sen}(n\pi x) \cdot \operatorname{sen}(m\pi y)$$

$n, m = 1, 2, 3, \dots$

$$f_{1,1} = \sqrt{2} \cdot \pi$$

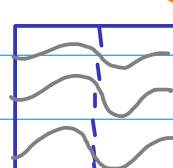


$$f_{1,2} = f_{2,1} = \sqrt{5} \cdot \pi$$

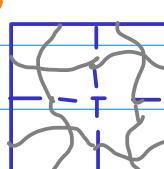


Vibración
reundante

$$f_{2,2} = \sqrt{18} \cdot \pi$$



lunas
nodos



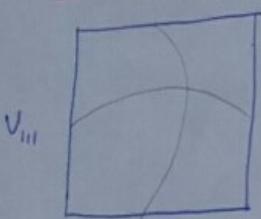
etc...

Visualización de los modos de vibración

Supongamos $L_1 = L_2 = 1$, $c = 1$. ⑨

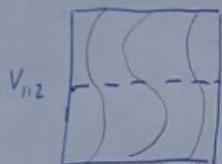
Vibración PRAL

$$\omega_{1,1} = \sqrt{2} \cdot \pi$$

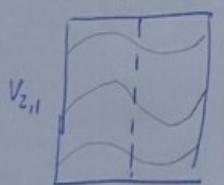
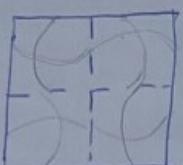


Vibración secundaria

$$\omega_{1,2} = \omega_{2,1} = \sqrt{5} \cdot \pi$$



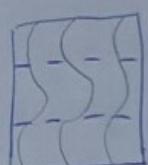
$$\omega_{2,2} = \sqrt{8} \cdot \pi$$



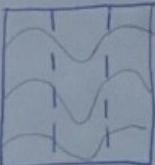
$$V_{2,1}$$

¡autovibración
doble!

$$\omega_{1,3} = \omega_{3,1} = \sqrt{10} \cdot \pi$$



$$V_{1,3}$$

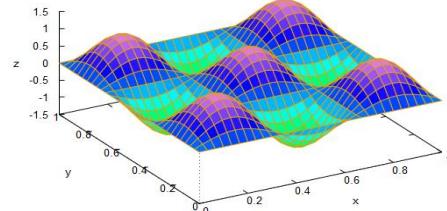
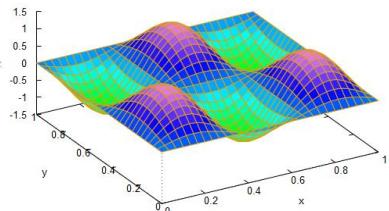
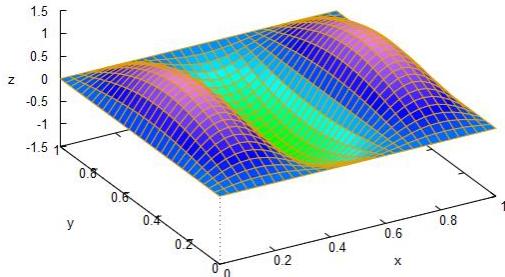
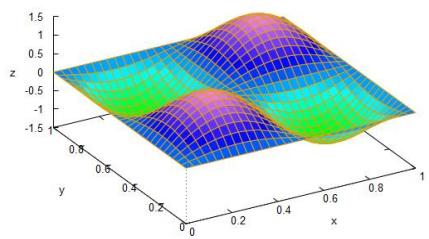
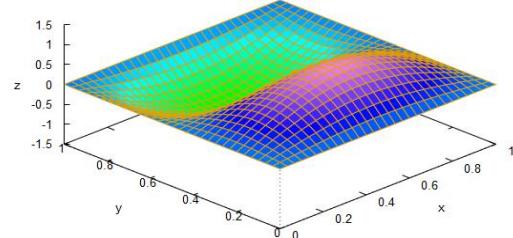
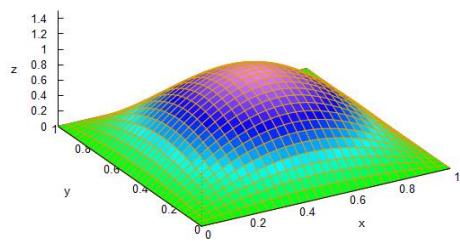


$$V_{3,1}$$

¡autovibración
doble!

NOTA: Las líneas nodales se mantienen en reposo durante la vibración...

Dibujos en Máximo



- Ver simulaciones en Internet, o dibujar sliders con Maxima...

EJEMPLO Resolver el caso de membrana $4m \times 2m$ cm

$$\tau = 12'5 \frac{N}{m}, \quad f = 2'5 \text{ kg/m}^2, \quad f(x,y) = 0'1 \cdot (4x - x^2) \cdot (2y - y^2)$$

$$\Rightarrow A_{n,m} = \frac{4}{4 \cdot 2} \cdot \int_0^1 0'1 \cdot (4x - x^2) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \cdot \int_0^1 (2y - y^2) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right) dy$$

$$\text{Círculo } n, m = \text{odd} \Rightarrow = \frac{1}{20} \cdot \frac{256}{\pi^3 \cdot n^3} \cdot \frac{32}{m^3 \cdot \pi^3} = \frac{2''/5}{\pi^6 \cdot n^3 \cdot m^3} \quad \because n = m = \text{impares}$$

$$[\text{y } A_{n,m} = 0 \quad \because n \neq m = \text{par}]$$

$$\rightarrow c \cdot f_{n,m} = \sqrt{5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{n^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow u(t, x, y) = \frac{2''}{5 \cdot \pi^6} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{4} \sqrt{(2n-1)^2 + (2m-1)^2} \cdot 2\pi t\right)}{(2n-1)^3 \cdot (2m-1)^3} \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{2}\right)$$

$$= 0'42 \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{5}{8}2\pi t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}_{\text{Termino principal}} + \frac{1}{27} \dots + \frac{1}{27} \dots + \frac{1}{125} \dots + \dots \right)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\sim 4\% \text{ del termino}$
 princ muy pequeño

→ Ver gráfica gif en Maxima.

§3.3 FUNCIONES DE BESEL

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Martes, 11 mayo 2021

§3.3. FUNCIONES DE BESSEL

- Ecuación de Bessel: para $\nu \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + (z^2 - \nu^2) f(z) = 0, \quad z \in (0, \infty)$$

- ... tiene como soluciones

$$f(z) = A J_\nu(z) + B Y_\nu(z)$$

- donde J_ν = función de Bessel (de 1^a especie) viene dada por

$$J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\nu + j)!} (z/2)^{\nu+2j} \quad \rightarrow \quad J_\nu \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) !!$$

- ... y en particular, $J_0(0) = 1$, y $J_\nu(z) \approx z^\nu \rightarrow 0$ si $z \rightarrow 0$ ($\nu > 0$)
- ... y donde $Y_\nu(z) \rightarrow \infty$ si $z \rightarrow 0^+$ (función Bessel de 2^a especie)
- Sólo usaremos $\nu \in \mathbb{N}$, pero las def valen para todo $\nu \in \mathbb{R}$ tomando

$$(\nu + j)! = \Gamma(\nu + j + 1), \quad \text{donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du, \alpha > 0$$

(salvo que $J_\nu \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ si $\nu \notin \mathbb{N}$)

TRES FÓRMULAS ELEMENTALES...

LEMA 1: RELACIÓN ENTRE J_ν , J'_ν Y $J_{\nu+1}$

$$z J'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - z J_{\nu+1}(z)$$

LEMA 2: CÁLCULO DE $\|J_\nu(\lambda \cdot)\|_r^2$

$$2 \int_0^1 J_\nu(\lambda r)^2 r dr = (1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}) J_\nu(\lambda)^2 + J'_\nu(\lambda)^2$$

En particular, si $J_\nu(\lambda) = 0$ se tiene

$$\int_0^1 J_\nu(\lambda r)^2 r dr = \frac{1}{2} J_{\nu+1}(\lambda)^2$$

LEMA 3: FÓRMULA DE SONINE (CÁLCULO DE $\langle f, J_\nu(\lambda \cdot) \rangle_r$...)

$$\int_0^1 (1 - r^2)^\mu J_\nu(\lambda r) r^{\nu+1} dr = \frac{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}{\lambda^{\mu+1}} J_{\nu+\mu+1}(\lambda), \quad \text{si } \mu, \nu > -1$$

DEM LEMA 2

Dem Lema 2

Sea $u(r) = J_\nu(\lambda r)$. Notar que

$$\Rightarrow \begin{cases} (pu')' + qu = 0 & (*) \\ y (pq)' = 2\lambda^2 r. \end{cases}$$

$$\underbrace{ru''(r)}_{(ru')'} + u'(r) + \underbrace{(r\lambda^2 - \frac{v^2}{r})u(r)}_{q(r)} = 0$$
$$\Rightarrow p(r) = r$$

$$u_q = -(pu')'$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 \int_0^1 u^2 \cdot r dr &= \int_0^1 u^2 (pq)' dr \stackrel{\text{par } (*)}{=} \left[pq u^2 \right]_0^1 - \int_0^1 2u \cdot u' \cdot pq dr \\ &\stackrel{(*)}{=} \left[pq u^2 \right]_0^1 + \int_0^1 2pu' \cdot (pu')' dr \stackrel{\text{TFC}}{=} \left[(pu')^2 \right]_0^1 \\ &= \left[pq u^2 \right]_0^1 + \left[(pu')^2 \right]_0^1 \\ &\stackrel{(pu)=0}{=} (\lambda^2 - v^2) u(1)^2 + (u'(1))^2 = (\lambda^2 - v^2) J_\nu(\lambda)^2 + \lambda^2 J'_\nu(\lambda)^2. \end{aligned}$$

□

(ejercicio)

Dem Lemas 1 y 3 : Directamente de la Def de $J_\nu(z)$...

LEMÁ 1: RELACIÓN ENTRE J_ν , J'_ν Y $J_{\nu+1}$

$$z J''_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - z J_{\nu+1}(z)$$

$$J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (2+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2+j}$$

Si la serie converge uniformemente en todos:

$$J_\nu'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (2+j)!} (2+2j) \left(\frac{z}{2}\right)^{2+2j-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$z J_\nu'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (2+j)!} [2+2j] \left(\frac{z}{2}\right)^{2+2j} =$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (2j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2+2j} + z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (2j)!} \cdot j \left(\frac{z}{2}\right)^{2+2j-1} = \hookrightarrow$$

$$= 2 J_\nu(z) + z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j-1)! (k+1+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2j} =$$

$$= 2 J_\nu(z) + z \sum_{t=0}^{j-1} \frac{(-1)^{t+1}}{t! (k+t)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2t+2}$$

$$= 2 J_\nu(z) - z \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t! (k+t)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2t} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^2 =$$

$$= 2 J_\nu(z) - \frac{z^3}{4} J_K(z) = 2 J_\nu(z) - \frac{z^3}{4} J_{\nu-1}(z) \dots$$

$$\begin{aligned}
 z J_{\nu}'(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left[\nu + 2j \right] \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2j} = \\
 &= \nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2j} + z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} j \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2j-1} = \\
 \text{K=}\nu+1 &= \nu J_{\nu}(z) + z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j-1)!(\nu-1+j)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2j-2} = \\
 t=j-1 &= \nu J_{\nu}(z) + z \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1}}{t!(\nu+t)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2t} = \\
 &= \nu J_{\nu}(z) - z \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!(\nu+t)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2t} = \\
 &= \nu J_{\nu}(z) - z \cdot J_{\nu}(z) = \nu J_{\nu}(z) - z \cdot J_{\nu+1}(z) \quad \cancel{\qquad}
 \end{aligned}$$

⊕ (Prueba en Watson: a treatise on the Theory of Bessel functions)

Si $|\nu| \leq N$ y $|z| \leq K$, entonces

$$\left| \frac{J_{\nu}(z)}{J_{\nu}(z)_j} \right| = \left| \frac{-z^2/4}{j!(\nu+j)} \right| \leq \frac{1}{4} \frac{K^2}{j(j-N)} < 1$$

A partir de $j > N$

A partir de $j \geq 0$, pues

$$\frac{K^2}{j(j-N)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$(K \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N})$

Ahora bien $a_j = \frac{1}{4} \frac{k^2}{j(j-N)}$ no depende de σ_i , ni de los otros

que $b(\vartheta, t) \in [-N, N] \times [-k, k]$, $t_j > j_0$, con j_0 independiente de ϑ, t

el

$$\left| \frac{J_2(t)_{j+1}}{J_2(t)_j} \right| \leq a_j < 1$$

Y lorno $a_j \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \exists r \in (0,1), n \in \mathbb{N}$ independentes

de \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 em $m > j_0$, tal que, $\theta_j \geq m$:

$$\left| \frac{J_0(t)}{J_0(t)|_j} \right| \leq r$$

Eustonles

$$\left| \frac{J_\nu(t)_j}{J_\nu(t)_m} \right| = \left| \frac{J_\nu(t)_j}{J_\nu(t)_{j-1}} \right| \cdot \left| \frac{J_\nu(t)_{j-1}}{J_\nu(t)_{j-2}} \right| \cdots \cdot \left| \frac{J_\nu(t)_{m+1}}{J_\nu(t)_m} \right| \leq r^{j-m}$$

$$\Rightarrow |J_V(z)|_j \leq \frac{|J_V(z)|_m}{r^m} \cdot r^m < (r^m)^{\text{geometrica}} \xrightarrow{\text{M-test}} J_V(z) \text{ con uniforme}$$

aristoteles pures extrema
 in $[-N, N] \times [-K, K]$
 compacto

LEMA 3: FÓRMULA DE SONINE (CÁLCULO DE $\langle f, J_\nu(\lambda \cdot) \rangle_r \dots$)

$$\int_0^1 (1-r^2)^\mu J_\nu(\lambda r) r^{\nu+1} dr = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} J_{\nu+\mu+1}(\lambda), \quad \text{si } \mu, \nu > -1$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (1-r^2)^\mu J_\nu(\lambda r) r^{\nu+1} dr = \\
 &= \int_0^1 \left[(1-r^2)^\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{dr}{2} \right)^{j+2} r^{\nu+1} \right] dr \\
 &= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \int_0^1 \left[(1-r^2)^\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{j+\mu+1+2j} r^{\nu+1+j+1} \cdot 2 \right] dr \\
 &= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{j+\mu+1+2j} \int_0^1 2 (1-r^2)^\mu r^{\nu+1+j+1} dr \right] = \\
 &\quad \stackrel{\substack{r^2=t \\ 2r dr = dt}}{=} \\
 &= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{j+\mu+1+2j} \int_0^1 (1-t)^\mu t^{j+1} dt \right] \\
 &= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{j+\mu+1+2j} B(j+1, \mu+1) \right] = \\
 &= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{j+\mu+1+2j} \frac{\Gamma(j+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1+\mu+2)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j! (\lambda+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda+j+\mu+1+2j} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+j+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+j+\mu+2)} \right] =$$

$$= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\lambda+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda+j+\mu+1+2j} \cdot \frac{(\lambda+j)! \Gamma(\mu+1)}{(\lambda+j+\mu+1)!} =$$

$$= \frac{2^\mu \cdot \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (\lambda+\mu+1+j)!} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda+\mu+1+2j} =$$

$$= \frac{2^\mu \cdot \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} J_{\lambda+\mu+1}(\lambda) \quad (\text{Si } \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{>0})$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{>0}$, entonces

$$\int_0^1 (1-r^2)^\mu J_\lambda(\lambda r) r^{\lambda+\mu} dr =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-r^2)^\mu \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\lambda+j+1)} \left(\frac{dr}{2} \right)^{\lambda+2j} r^{\lambda+\mu} \right] dr = \dots$$

como antes

$$= \frac{2^\mu}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\lambda+j+1)} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda+\mu+1+2j} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+j+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+j+\mu+2)} \right] =$$

$$= \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\lambda+j+\mu+2)} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\lambda+\mu+1+2j} = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} J_{\lambda+\mu+1}(\lambda)$$

FÓRMULA ASINTÓTICA

- $J_\nu(x)$ no tiene expresión explícita... salvo los casos especiales $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad \dots$$

- Pero para $x \rightarrow \infty$ se sabe...

TEOREMA 1

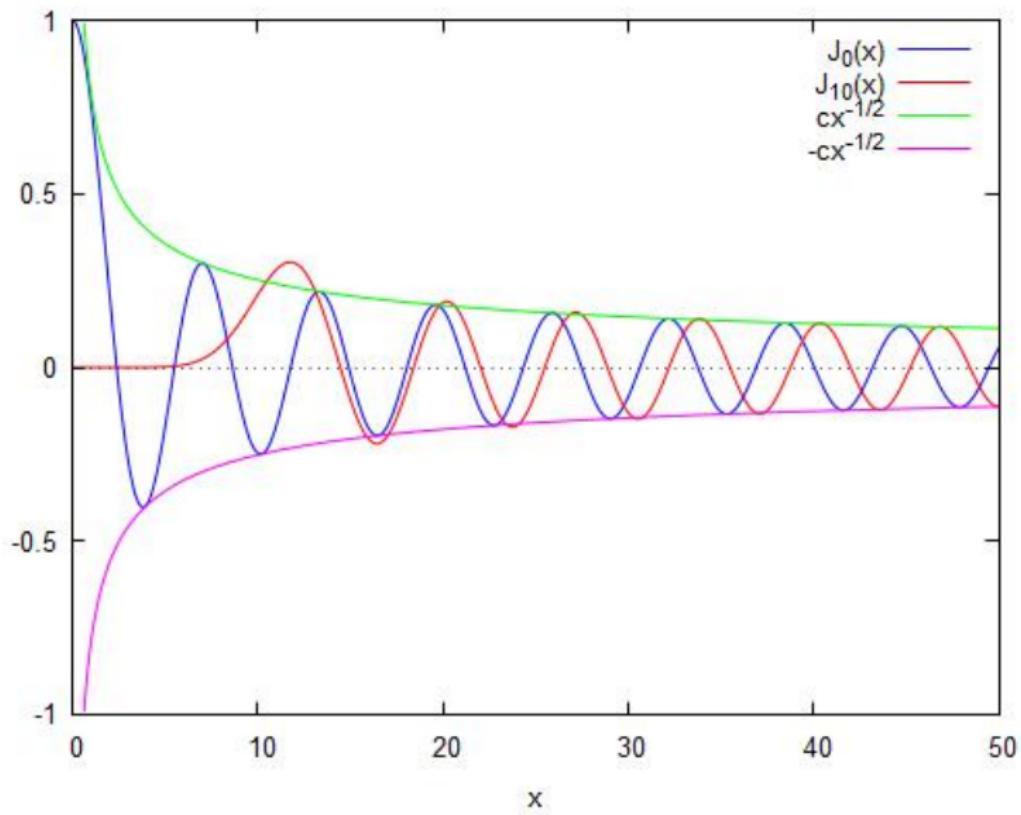
$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^{3/2}}), \quad \text{si } x \rightarrow +\infty$$

- La prueba se basa en reescribir J_n como (ver [Stein-Shakarchi, Ch 6.4])

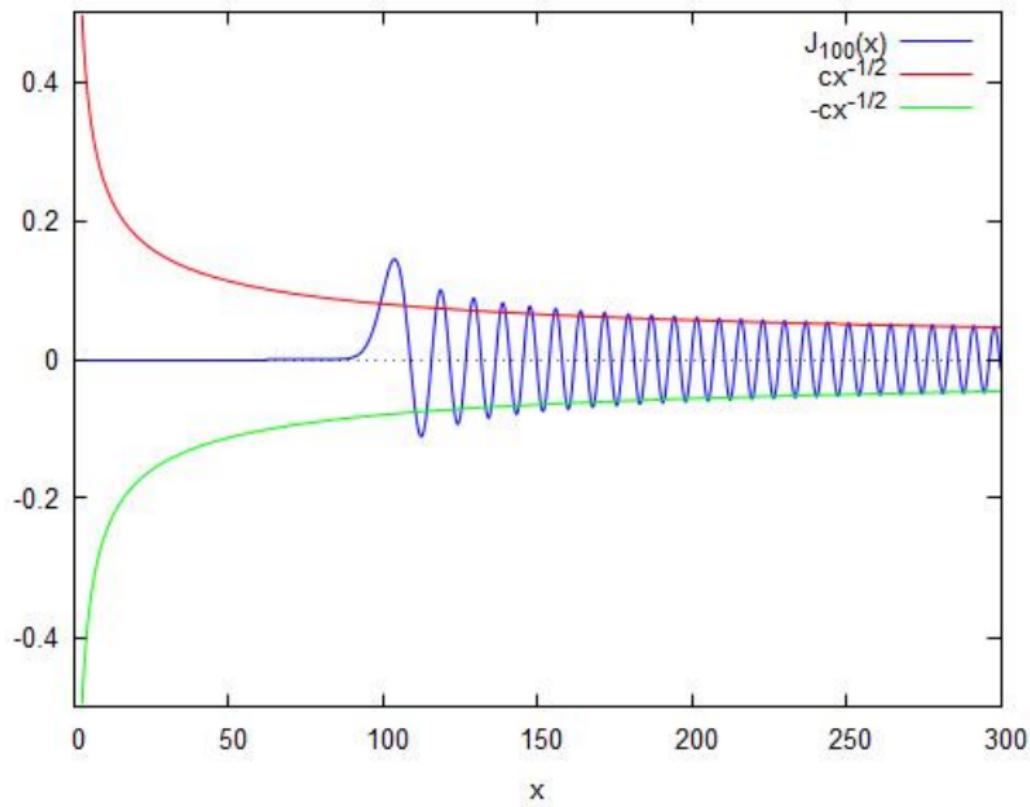
$$J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{ix \sin t} e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y después analizar las “integrales oscilatorias” cuando $x \rightarrow +\infty$...
(ver [Stein, Harmonic Analysis, p 338])

GRÁFICAS CON MAXIMA...



GRÁFICAS DE $J_{100}(x)$...



CEROS DE FUNCIONES DE BESSSEL

Corolario

$$\boxed{\exists_{+}(J_n) = \{ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \} \text{ con } \lambda_m \nearrow \infty}$$

(9)

Dem sec $G_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{x} \cdot J_n(x) \stackrel{\text{th}}{=} \sin(x - \theta_n) + O\left(\frac{1}{x}\right)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists M_0 = M_0(n, \varepsilon) / |\theta\left(\frac{1}{x}\right)| \leq \varepsilon, \forall x \geq M_0$.

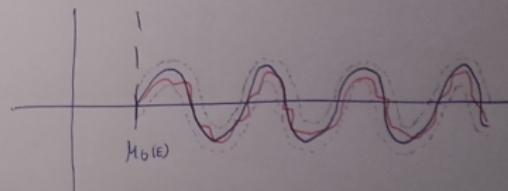
$$\Rightarrow \sin(x - \theta_n) - \varepsilon \leq G_n(x) \leq \sin(x - \theta_n) + \varepsilon$$

$$-\underline{G_n(x)}$$

$$-\underline{\sin(x - \theta_n)}$$

$\rightarrow \exists$ raíz de $G_n(x)$ en cada intervalo

$$m\pi + \theta_n + (-2\varepsilon, 2\varepsilon), \quad m \geq M_0$$



$\Rightarrow J_n$ tiene infinitos ceros, y pueden aparecer de forma creciente

NOTA: Denotaremos $\boxed{\exists_{+}(J_n) = \{ S_m^{(n)} \}_{m=1}^{\infty}}$

Pueden pensarse que

$$\boxed{S_m^{(n)} = (m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4})\pi + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \text{as } m \rightarrow \infty.}$$

(un único cero
en cada intervalo)

(Watson, ch 18)
7.5.06

SISTEMA DE FOURIER-BESSEL

Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideramos el problema de SL (singular)

$$\begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = -\lambda^2 R(r), & r \in (0, 1) \\ (\text{CC}) \quad R(1) = 0 \text{ y } \exists R(0^+) \end{cases}$$

- Sol gral: $R(r) = A J_n(\lambda r) + B Y_n(\lambda r)$
- CC $\implies B = 0$ y $\lambda \in \{s_{n,1} < s_{n,2} < \dots\} = \mathcal{Z}_+(J_n)$
- Autofunciones: $\{\phi_m(r) := J_n(s_{n,m}r), : m = 1, 2, \dots\}$

TEOREMA 2

El sistema $\{\phi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ es una BOG de $L_r^2(0, 1)$, es decir,

$$f(r) = L_r^2 - \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) J_n(s_{n,m}r), \quad \text{con } a_m(f) = \frac{\int_0^1 f(r) J_n(s_{n,m}r) r dr}{J_{n+1}^2(s_{n,m})/2}$$

Además, si $f \in C^2[0, 1]$ con $f(1) = 0$ (y $f(0) = 0$ si $n \neq 0$), entonces la convergencia es uniforme $\forall r \in [0, 1]$.

§3.2. (CONTINUACIÓN)

LA MEMBRANA CIRCULAR

Gustavo Garrigós

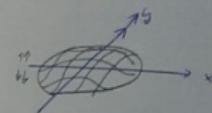
University of Murcia, Spain

Jueves, 13 mayo 2021

EJEMPLO 2: MEMBRANA VIBRANTE CIRCULAR

Membrana circular

$$\begin{cases} u_{ttt} = c^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ u(t, \cdot) \equiv 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad \leftarrow \text{CC (condiciones fijas)} \\ u(0, \cdot) = \varphi, \quad u_t(0, \cdot) = g \quad \leftarrow \text{pos + velo inicial} \end{cases}$$



Buscamos soluciones $u(t, x, y) = T(t)V(x, y)$ $\rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} \equiv \text{cte} = -\lambda^2$
 {desarrollo de λ^2 }

$$\Rightarrow \quad \textcircled{1} \quad T'' = -c^2 \lambda^2 T \quad \leftarrow \text{fácil zonella}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \Delta V = -\lambda^2 V \\ V|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{Problema de autovalores del } \Delta$$

$$V(r \cos \theta, r \sin \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

Pasamos $\textcircled{2}$ a coord. polares

¡Recordar!

$$\Delta = 2\pi r \cdot \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}$$

$$\Rightarrow R'' \cdot \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \cdot \Theta'' = -\lambda^2 \cdot R V \Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{d\theta^2}$$

$$\frac{r^2 R'' + r R' + \lambda^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \equiv \text{cte} = \nu^2$$

desarrollo de ν

Obtengo 2 EDO's

$$\textcircled{2a} \quad \begin{cases} \Theta'' = -\nu^2 \Theta \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

(P)

$$\Theta(\theta) = A \cdot \cos(\nu\theta) + B \cdot \sin(\nu\theta)$$

$$\textcircled{2b} \quad \nu = n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \nu = n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

SOLUCIÓN GENERAL

(2)

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - v^2) R = 0 \\ R(1) = 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \exists R(r) \quad \text{y} \quad \text{Bessel!}$$

$v = n \in \mathbb{N}$

Sol. gen. $R(r) = A \cdot J_n(\lambda r) + B \cdot Y_n(\lambda r)$

$\xrightarrow{\text{CC}}$ $B = 0$ (pues $Y_n(10^r) = \infty$)

$\xrightarrow{R(1)=0}$ $J_n(1) = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Z}_{(B_n)} = \{S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}, \dots\}$

Condensación: $\boxed{(-\Delta, D, \nabla V_D = 0)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_{n,m} \}$ ← autovalores del Laplaciano en D

espectro ↗

Además, $\lambda = \lambda_{n,m} = S_{n,m}$, entonces

$$R_{n,m}(r) = J_n(\lambda_{n,m} r)$$

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cdot \cos(n\theta) + B_n \cdot \sin(n\theta)$$

$$T_{n,m}(t) = a_{n,m} \cos(c \lambda_{n,m} t) + b_{n,m} \sin(c \lambda_{n,m} t).$$

Por simplicidad, resolvemos la ecuación $u_r(0, \cdot) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_m = R_{n,m}(r) \cdot \Theta_n(\theta) \\ \text{autofunciones de } \Delta \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} V_m = R_{n,m}(r) \cdot \Theta_n(\theta) \\ \text{autofunciones de } \Delta \end{array} \right]$$

$$T'(0) = 0$$

ISOLUCIÓN GENERAL!

$$\Rightarrow u(t, r e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(c \lambda_{n,m} t) \cdot J_n(\lambda_{n,m} r) [A_{n,m} \cos(n\theta) + B_{n,m} \sin(n\theta)]$$

CASO f RADIAL

CASO RADIAL

$$u(0, r) = f(r) \rightarrow \text{la sol. sólo tiene } n=0$$

③

$$u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \cos(C \cdot S_m t) \cdot J_0(S_m r)$$

↓
aprox. TC espaciales!

$$\text{donde } Z_+(J_0) = \{S_1 = 2'41 < S_2 = 5'52 < S_3 = 8'65 < \dots\}$$

$$\xrightarrow{t=0} f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot J_0(S_m r) \Rightarrow \boxed{a_m = \frac{\langle f, J_0(S_m r) \rangle_r}{\|J_0(S_m r)\|_r^2} = \frac{2}{J_1(S_m)^2} \cdot \int_0^1 f(r) J_0(S_m r) \cdot r dr}$$

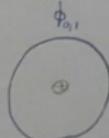
Aspecto de vibraciones fundamentales

$$u_{0,m}(t, r) = \cos(C \cdot S_m t) \cdot J_0(S_m r)$$

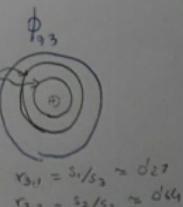
• freq. temporal = $C \cdot S_m^{(1)} \approx C m \pi + \text{cte} \rightarrow$ vibración aumenta con $m \dots$

• freq. espacial: $\phi_{0,m}(r) = J_0(S_m r), 0 < r < 1$

Período fundamental
 $\frac{C \cdot S_1}{2\pi} \approx 0.386 \text{ Hz}$



$$T_{2,1} = S_1/S_2 \approx 0.44$$



$$\begin{aligned} r_{3,1} &= S_1/S_3 \approx 0.27 \\ r_{3,2} &= S_2/S_3 \approx 0.66 \end{aligned}$$

etc. . .

CASO f GENERAL

(4)

CASO GENERAL

$$u(0, \theta) = f(r e^{i\theta})$$

$$u(t, r e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(c \lambda_{nm} t) \cdot J_n(\lambda_{nm} r) \cdot [A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)].$$

Usando ortogonalidad,

$$\underbrace{f(re^{i\theta})}_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) [A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)]$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_{nm})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot \cos(n\theta) \frac{d\theta}{\pi} \cdot J_n(\lambda_{nm} r) \cdot r dr \quad \left. \right\} \quad n, m \geq 1$$

$$B_{n,m} = \text{idem con } \sin(n\theta)$$

$$\left[\text{idem} \rightarrow B_{0,m} = 0 \quad y \quad A_{0,m} = \text{idem con } \frac{d\theta}{2\pi} \right].$$

Ahora

$$Z_+(J_0) = \left\{ S_1^{(0)} = \cancel{241}^1 < S_2^{(0)} = \cancel{552}^4 < S_3^{(0)} = 865 < \dots \right\}$$

$$Z_+(J_1) = \left\{ S_1^{(1)} = \cancel{383}^5 < S_2^{(1)} = \cancel{101}^1 < S_3^{(1)} = 1017 < \dots \right\}$$

$$Z_+(J_2) = \left\{ S_1^{(2)} = \cancel{513}^5 < S_2^{(2)} = 842 < S_3^{(2)} = 1162 < \dots \right\}$$

$$Z_+(J_3) = \left\{ S_1^{(3)} = \cancel{637}^5 < S_2^{(3)} = 976 < \dots \right\}$$

frecuencias temporales



MODOS DE VIBRACIÓN

Frecuencias espaciales

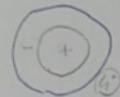
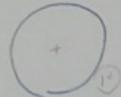
$$u_{n,m}(t, r, \theta) = \cos(c_n t) \cdot J_n(d_n m r) \cdot \cos(m\theta)$$

$$\phi_{n,m}(r, \theta)$$

Importante $B_{n,m} \equiv 0$

(5)

$n=0$

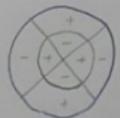
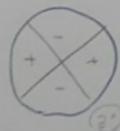


→ Ver animaciones
en Internet...

$n=1$



$n=2$



etc...

$n=3$



EJEMPLO EXPLÍCITO

EJEMPLO EXPLÍCITO

Resolver ec. Membrana en 1D con $\begin{cases} f(r) = 1-r^2 \\ g(r) \geq 0 \end{cases}$ (c=2)

⑥

Como estamos en el radio radial

$$u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(cs_m t) \cdot J_0(cs_m r)$$

Son las

$$\text{an } a_m = \frac{2}{J_1(cs_m)^2} \cdot \int_0^1 (1-r^2) \cdot J_0(cs_m r) \cdot r dr = \frac{2}{J_1(cs_m)^2} \cdot \frac{2\pi i c}{s_m^2} \cdot J_2(cs_m).$$

$$\Rightarrow u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 J_2(cs_m)}{[s_m J_1(cs_m)]^2} \cdot \cos(cs_m t) \cdot J_0(cs_m r). \quad \boxed{= (1/108, -0/140, 0/045, -0/021, 0/012, \dots)}$$

Maxima

La gráfica aproximada de la membrana radial se puede dibujar con Maxima...

MÁS EJERCICIOS...

Más ejercicios

① | ¿Cómo cambia la frecuencia ω ? duplicar ω
duplicar el diámetro?

Nota

$$\cos(\omega t) \approx \cos\left(\frac{\omega}{2\pi} 2\pi t\right) \xrightarrow{\text{freq. } [t/2]} \cos\left(\frac{\omega}{2\pi} t\right)$$

Ser $\omega_{n,m} = \text{freg del modo } (n,m) \rightarrow \omega_{n,m} = C \cdot S_{n,m} = \frac{\sqrt{C}}{R} \cdot S_{n,m}$

$$\begin{aligned} \therefore \omega \tau_1 = 2\tau_0 &\rightarrow \omega^{(1)}_{n,m} = \sqrt{2} \omega^{(2)}_{n,m} \Rightarrow \text{aumento } \approx 61\% \quad \text{← modo angular!} \\ \text{y } A_1 = 2A_0 &\Rightarrow \pi R_1^2 = 2\pi R_0^2 \Rightarrow R_1 = \sqrt{2} R_0 \end{aligned}$$

Lema

$$V_{ttt} = c^2 \Delta V \text{ en } D_R(0) \Leftrightarrow u(t,x) := v(t, Rx) \text{ es sol de } u_{ttt} = \frac{c^2}{R^2} \Delta u \text{ en } D$$

Demostrar ...

$$\text{Por tanto } v(t,x) = u(t, \frac{x}{R}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\omega}{R} S_m t\right) \cdot J_0\left(S_m \frac{x}{R}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{← (para radicar por simplicidad)} \\ \text{en la sol general} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \omega^{(1)}_{n,m} = \frac{c}{R} S_{n,m} = \frac{1}{R} \cdot \omega^{(2)}_{n,m} \Rightarrow \omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^{(2)} \approx 0.70 \omega^{(2)} \rightarrow \text{disminuye un 30%}\! \quad \text{← más grave!}$$

② | ¿Qué tensión resulta en un tambor con $\rho = 0.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, \sim quinto $\text{fug } 150 \text{ Hz?}$

Frec fundamental

$$150 = \frac{\omega_{0,1}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} C \cdot S_{0,1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{0.5}} \cdot 241 \rightarrow \omega = \left(\frac{300 \cdot \pi}{241}\right)^2 / 2 \approx 7632 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

EJERCICIOS HOJA 6

(CLASE PROBLEMAS)

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

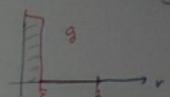
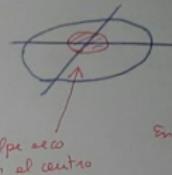
Martes, 17 mayo 2021

EJERCICIO 2: VIBRACIÓN DE UN TAMBOR

EJERCICIOS HOJA 6

2) Vibración de un tambor

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 (U_{rr} + \frac{1}{r} U_r) \text{ en 1D} \\ U_{t=0} = 0 \\ U(r, 0) = 0 \leftarrow \text{pos inicial: reposo} \\ U_t(r, 0) = g(r) \leftarrow \text{vel inicial } g(r) = \frac{1}{\pi r^2} \cdot D_0(r) \end{cases}$$



en polígonos $g(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & r < r_c \\ 0, & r > r_c \end{cases}$

Resuelvo por sep variables (como en ejerc 1): bueno $U(t, r) = T(z) \cdot R(r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} \right) \equiv \mu_c = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \quad T'' = -(\lambda^2) T \\ \textcircled{2} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0 \\ \exists R(0), \quad R(1) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(r) = A \cdot J_0(\lambda r) + B \cdot Y_0(\lambda r)$$

$$\xrightarrow{\text{CC}} B = 0 \quad \therefore Y_0(\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \in \{ S_m \}_{m=1}^{\infty} = \mathbb{Z} \cdot J_0}$$

$$\Rightarrow R_m(r) = J_0(S_m r)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow T(z) = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z) \quad \Rightarrow T_m(z) = B_m \cdot \sin(S_m z)$$

$$\text{Como } T(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin(S_m t) \cdot J_0(S_m r)}$$

SOLUCIÓN GENERAL

Calculamos los coeficientes

$$g(r) = u_t(0, r) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot S_m c(\text{exp}) \cdot J_0(S_m r) \Rightarrow B_m S_m c = \frac{2}{J_1(S_m)^2} \int_0^1 J_0(S_m r) r dr$$

Volviendo al ejercicio 2,

$$B_m = \frac{1}{c \cdot S_m} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} J_0(S_m r) r dr \left(\frac{2}{J_1(S_m)^2} \right) = \frac{2}{c \cdot S_m J_1(S_m)^2} \int_0^1 J_0(S_m \varepsilon p) \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon p \cdot d\varepsilon p}{\pi \varepsilon^2}}_{\text{Sonido}}$$

$$= \frac{2}{\pi c S_m J_1(S_m)^2} \cdot \frac{J_1(\varepsilon S_m)}{\varepsilon \cdot S_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t, r) = \frac{2}{\pi c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\varepsilon S_m)}{\varepsilon (S_m J_1(S_m))^2} \cdot \operatorname{sen}(S_m t) \cdot J_0(S_m r)}$$

b) ¿Qué ocurre si $\varepsilon \rightarrow 0$?

$$\text{Usando } J_1(z) = \frac{z}{2} + O(z^3) \Rightarrow \frac{J_1(\varepsilon S_m)}{\varepsilon S_m} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t, r) = \frac{2}{\pi c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{S_m J_1(S_m)^2} \cdot \operatorname{sen}(C_s m t) \cdot J_0(S_m r)}$$

EJERCICIO 4: PD EN CILINDRO DE \mathbb{R}^3

EJERC

Problema de Dirichlet en cilindro de \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad \text{donde } \Omega = 10 \times (0, L) \\ = \text{cilindro vertical}$$

Suponer $\varphi = 0$ en topo inferior + lateral

$$u(r, \theta, z) = f(r, \theta) \quad \begin{array}{l} \text{Temperatura en} \\ \text{la topo superior} \end{array}$$

leso coordenadas cilíndricas $u(r, \theta, z) = u(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < z < L$.

$$\Rightarrow \Delta u = u_{rrr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zzz} = 0.$$

$$\begin{cases} u(1, 0, 0) = 0 & \leftarrow \text{topo inf} \\ u(1, 0, z) = 0 & \leftarrow \text{rotacion} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Busco } u(r, 0, z) = V(r, 0) Z(z)$$

$$\Rightarrow (V_{rrr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{00}) Z + V Z'' = 0 \Rightarrow \frac{Z''}{Z} = - \frac{V_{rrr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{00}}{V} = \text{cte} = \mu$$

\rightarrow Obtengo 2 ecuaciones

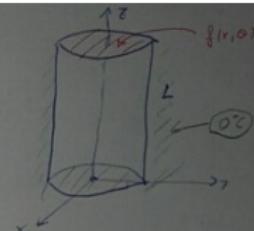
$$\begin{cases} Z'' = \mu Z \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\parallel \quad \begin{cases} -(V_{rrr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{00}) = \mu V \\ V(1, 0) = 0 \end{cases}$$

NOTA: Resolvemos el caso general, aunque Atto a sólo pide

$$u(r, 0, z) = f(r)$$

\uparrow
caso radial
(única solución)



CASO f RADIAL

② coincide con $\begin{cases} -\Delta V = \mu r \\ V|_{r=0} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{i ya resuelto en clase!}$

④

Vemos que $\mu = \lambda^2 > 0$ con $\lambda \in \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{Z} \setminus \{J_m\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{J_m\}_{m \geq n}$.

y $\mu = s_{n,m}^2 \Rightarrow V_{n,m}(r, \theta) = J_n(s_m r) \cdot (A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta))$.

\hookrightarrow en el caso radial, solo $n=0!!$

CASO RADIAL: $\boxed{\mu = s_{0,m}^2 = s_m^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z'' = \mu Z \\ Z(0) = 0 \end{cases} \rightarrow Z(z) = A \operatorname{ch}(s_m z) + B \operatorname{sh}(s_m z) \xrightarrow{z=0} A=0 \Rightarrow Z_m(z) = \operatorname{sh}(s_m z).$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r, z) := \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sh}(s_m z) J_0(s_m r)} \quad \text{Apdo a}$$

(Apdo b)

$$\xrightarrow{z=L} f(r) = U(r, L) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sh}(s_m L) J_0(s_m r) \Rightarrow \boxed{A_m = \frac{1}{\operatorname{sh}(s_m L)} \cdot \int_0^L \operatorname{sh}(s_m z) J_0(s_m r) dz}$$

③ Caso $f(r) = J_0(s_3 r)$.

en este caso $\Rightarrow A_1 = A_2 = 0 = A_4 = A_5 = \dots$

$$A_3 \cdot \operatorname{sh}(s_3 L) = 1 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{\operatorname{sh}(s_3 L)}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r, z) = \frac{\operatorname{sh}(s_3 z)}{\operatorname{sh}(s_3 L)} \cdot J_0(s_3 r)}$$

CASO f GENERAL

d) (caso $f(r, \theta)$ general): Por simplicidad, tomó reales F complejos

⑤

$$V_{n,m}(r, \theta) = J_{nm}(S_{nm}r) \cdot e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \{S_{nm}\}_{nm} = \{J_{nm}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z''(z) = \mu z = S_{nm}^2 z \\ Z(0) = 0 \end{cases} \rightarrow [Z_{nm}(z) = \text{sh}(S_{nm}z)]$$

Entonces ambas expresiones, la SOL GRAL queda

$$U(r, \theta, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \text{sh}(S_{nm}z) \cdot J_{nm}(S_{nm}r) \cdot e^{inx}$$

$$z=L \Rightarrow f(r, \theta) = U(r, \theta, L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \text{sh}(S_{nm}L) J_{nm}(S_{nm}r) e^{inx}$$

Usando la orthonormalidad de $\{J_{nm}\}$ en $L^2(r dr d\theta)$

$$A_{nm} = \frac{1}{\text{sh}(S_{nm}L)} \cdot \frac{2}{J_{nm}(S_{nm})^2} \cdot \int_0^L \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-inx} r dr d\theta$$

$J_{nm}(S_{nm}r)$



¿AUTOVALORES POSITIVOS?

NOTA: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Por qd} \\ -\Delta V = \mu V \\ V|_{\partial D} = 0 \end{array} \right.$ sólo tiene sol (no nulas) para $\mu > 0$ ②

Suponer $\mu = -\lambda^2 \leq 0$. Busco $V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$

$$\rightarrow -r^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R \right) = \frac{\Theta''}{\Theta} \equiv \text{cte} = \sigma$$

Por un lado

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta'' = \sigma \Theta \\ [\Theta(0) = \Theta(2\pi)] \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{array} \right. \rightarrow \text{soluciones qd} \quad \sigma = -n^2 \quad \text{y} \quad \Theta_n(\theta) = e^{in\theta}$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda^2 r^2 + n^2) R(r) = 0 \\ R(1) = 0 \quad \text{y} \quad 3 R(0^+) \end{array} \right. \quad \text{Si } \text{llamamos } R(r) = u(r) \rightarrow \boxed{r^2 u''(r) + r u'(r) + (r^2 + n^2) u(r) = 0}$$

E. Bessel modificada !!

Las soluciones son $u(r) = A \cdot I_n(r) + B \cdot K_n(r)$ donde $K_n(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0^+] \infty$

$$\text{y} \quad I_n(r) := \frac{J_n(1r)}{1r} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1r/2)^{n+2j}}{J_j((n+j)!)}$$

\rightarrow no puede ocurrir $R(1) = 0$ $\cancel{\text{y}}$.

MÁS EJERCICIOS...

Hoja 6: Intentar ejercicios 1, 3 + opcionales...

§3.4. AUTOVALORES DE $-\Delta$

Gustavo Garrigós

University of Murcia, Spain

Martes, 18 mayo 2021

PROBLEMA DE AUTOVALORES DE $-\Delta$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ **acotado** con $\partial\Omega$ "regular": determinar $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ (a_1 u + a_2 \nabla u \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

tenga una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \setminus \{0\}$. Es decir, $\lambda \in \sigma(-\Delta, \Omega, \text{CC})$.

Típicamente se consideran las (CC)

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{ó} \quad (\nabla u \cdot \vec{n} + \gamma u)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \gamma > 0 \quad (\dagger)$$

Ejemplos:

- ① $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ con (C_d). Entonces

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} \right), \quad \phi_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad n, m \geq 1$$

- ② $\Omega = \mathbb{D}$ con (C_d). Si $\mathcal{Z}(J_{|n|}) = \{s_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$, entonces

$$\lambda_{n,m} = s_{n,m}^2, \quad \phi_{n,m}(r, \theta) = J_{|n|}(s_{n,m} r) e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 1$$

- **Q:** ¿Existe un teorema general para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$?

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ acotado con $\partial\Omega \in C^\infty$. Consideramos

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } \Omega, \quad \text{con (CC) como en (†)}$$

- ① Existen infinitos autovalores $\sigma(-\Delta, CC) = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ y se cumple

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow +\infty$$

Además, $0 \in \sigma(-\Delta, CC) \iff CC=C_n$

- ② Multiplicidad: $\dim E_\lambda := \dim \{\phi : -\Delta\phi = \lambda\phi\} < \infty, \quad \forall \lambda \in \sigma(-\Delta, CC)$
 ③ Ortogonalidad: $E_\lambda \perp E_\mu$, si $\lambda \neq \mu$
 ④ $\exists \{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ que forman BON de autovectores en $L^2(\Omega)$, ed

$$f = L^2\text{-} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \forall f \in L^2(\Omega) \tag{*}$$

Además, si $f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap CC$ la convergencia es uniforme en todo $x \in \Omega$

- ⑤ Fórmula Rayleigh (en el caso C_d):

$$\lambda_n = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 : \phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \|\phi\| = 1, \phi|_{\partial\Omega} \equiv 0, \phi \perp \{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\} \right\}$$

DEM DE OG...

Recordar la Fórmula de Green 1 (partes en \mathbb{R}^d)

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} \cdot v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Como consecuencia se obtiene: Green 2

$$\boxed{\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v - \int_{\Omega} u (\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) v - u (\nabla v \cdot \vec{n})} = 0!!$$

- $u, v|_{\partial\Omega} \equiv 0$ (C)
- $\nabla u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} \equiv 0$ (C)
- $\nabla u \cdot \vec{n} = -\gamma u$ (C)

Por tanto $\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$ ← AUTOADJUNTO!

Dem ORTOGONALIDAD: Si $\varphi \in E_\lambda$, $\psi \in E_\mu$, con $\lambda \neq \mu$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda) \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \Delta \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \Delta \psi \rangle = 0 \quad \text{por Green 2.}$$

Dem $\lambda \geq 0$

$$\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle -\Delta \varphi, \varphi \rangle \stackrel{(61)}{=} - \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot \vec{n} \varphi + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \delta(\varphi) + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

A demás $\lambda = 0 \in \sigma(-\Delta) \Leftrightarrow \delta(\varphi) = 0$ y $\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = 0 \Rightarrow \varphi \equiv cte$

• $c \in C_0 \cap C_c$
• $\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = C_0$
 $C_0 \subset \mathbb{Z}$
 $C_c \subset \mathbb{N}$
 $C_0 \subset \mathbb{Z}$

DEM DE FÓRMULA DE RAYLEIGH

Dem fórmula de Rayleigh : caso Cd e n=1

(2)

$$\text{Sei } A = \{ \varphi \in C^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid \varphi|_{\mathbb{R}^+} \equiv 0 \}$$

Lema

En general, que EXISTE $m := \min \{ \|D\varphi\| : \varphi \in \mathcal{S}, \|\varphi\| = 1 \}$

$$Enhances \quad m = \lambda_1.$$

Dem: $\forall \lambda \in \sigma(-A)$.

Paso 1: Veamos que $m \leq \lambda$, y $\lambda \in \text{V}(\varphi)$.
 + $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \in \lambda : -\Delta \varphi = \lambda \varphi \quad y \quad \|\varphi\| = 1.$

Si $\lambda \in \sigma(-\Delta) \Rightarrow$ Existe autofunción $\psi \in \mathcal{H}$.

$$\text{Entonces } \lambda = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle = \langle -\Delta \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \psi$$

$$m \in \sigma^{(-\Delta)}.$$

$$\text{Passo 2:} \quad \text{Basta provar que } m \in \mathbb{C}^n \quad m = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 =: E(\varphi)$$

Usamos la hipótesis de que

$$\text{Se } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\varphi + t\psi \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Admiral, 35 > 0,

$$\| \varphi + t\psi \|_2 \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \psi \in \mathcal{E}$$

(por continuidad y $|x| = 1$)

MARTES, 18 MAYO 2021

DEM FÓRMULA DE RAYLEIGH (CONT)

Considero la función de 1-variable

$$f(t) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla (\varphi + t \psi)|^2}{\|(\varphi + t \psi)\|^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + 2t \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi}{\|\varphi\|^2 + t^2 \|\psi\|^2 + 2t \varphi \cdot \psi} \in \mathbb{D}(-\delta, \delta)$$

A demas $f(t)$ tiene un mínimo en $t=0$, con $f(0) = m$

Nota: Ejercicio
Tratar de adaptar la prueba a Cr ó Cr

Ver [Strauss, ch 11.1]

ALGUNOS COROLARIOS...

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, y sean CC y $\{\lambda_n, \phi_n\}_{n=1}^\infty$ como en el Teorema.

COROLARIO 1: EC CALOR EN DOMINIO $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Sea $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces la EDP

$$\begin{cases} u_t = \kappa \Delta u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = f, & u(t, \cdot) \in \text{CC} \end{cases}$$

tiene como solución clásica

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \lambda_n t} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x), \quad t > 0, x \in \Omega$$

- **Nota:** $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ garantiza suficiente decaimiento de los coef's

$$|\langle f, \phi_n \rangle| = \left| \langle f, \frac{(-\Delta)^\ell \phi_n}{\lambda_n^\ell} \rangle \right| = \frac{|\langle (-\Delta)^\ell f, \phi_n \rangle|}{\lambda_n^\ell} \leq \frac{\|\Delta^\ell f\|_2 \|\phi_n\|_2}{\lambda_n^\ell}$$

y por tanto convergencia unif de las series...

OTRO COROLARIO...

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, y sean CC y $\{\lambda_n, \phi_n\}_{n=1}^\infty$ como en el Teorema.

COROLARIO 2: EC ONDAS EN DOMINIO $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Sea $f, g \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces la EDP

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u(0, \cdot) = f, \quad u_t(0, \cdot) = g, & u(t, \cdot) \in \text{CC} \end{cases}$$

tiene como solución clásica

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle \cos(ct\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\langle g, \phi_n \rangle}{c\sqrt{\lambda_n}} \sin(ct\sqrt{\lambda_n}) \right) \phi_n(x).$$

- **Nota:** sólo en dominios Ω sencillos se conoce **explícitamente** λ_n y $\phi_n(x)$...
- ... en general, hay que trabajar con estimaciones asintóticas...

EJEMPLO DE RESULTADO ASINTÓTICO...

Ordenamos $\sigma(-\Delta, \Omega, CC)$ de forma creciente

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow +\infty$$

TEOREMA DE WEYL

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entonces $\lambda_n \approx \frac{c_d n^{2/d}}{|\Omega|^{\frac{2}{d}}}$, si $n \rightarrow \infty$ $c_d = (2\pi)^2 / |B_1(0)|^{\frac{2}{d}}$

Ejemplos:

- $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ entonces $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}$
- $\Omega = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$ entonces $\sigma(-\Delta) = \left\{ \pi^2 \left(\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right\}_{\ell, m \geq 1}$, y

$$n = \#\left\{ \lambda \in \sigma(-\Delta) : \lambda \leq \lambda_n \right\} \approx \left| E\left(\frac{a\sqrt{\lambda_n}}{\pi}, \frac{b\sqrt{\lambda_n}}{\pi}\right) \right| = \frac{ab\lambda_n}{4\pi}$$

... por tanto $\lambda_n \approx 4\pi n / |\Omega| \dots$ (ver [Strauss, Ch 11.6])

UN PROBLEMA FAMOSO...

- M. Kac, 1966. ¿Podemos “oír” la forma de un tambor?
- ... si “escuchamos” todos los modos de vibración de una membrana $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\sigma(-\Delta, \Omega, C_d) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \leq \dots\}$$

- ... ¿podemos determinar la forma que tiene Ω (salvo isometrías)?

- ① el teorema de Weyl muestra que podemos determinar el área

$$\text{Área}(\Omega) = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\#\{\lambda_n \leq R\}}{R}$$

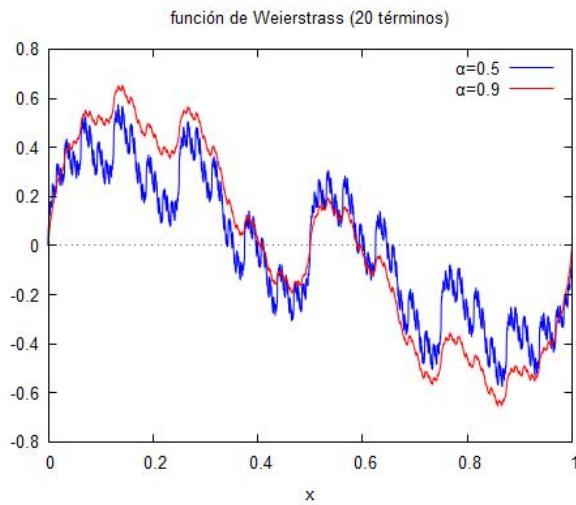
- ② ... incluso se sabe determinar $L = \text{Perímetro}(\Omega)$... [Ivrii, 1980]

- Propuesto por M. Kac (1966), fue resuelto por Carolyne Gordon et al en 1992...
- ... ver dibujos de Ω_1 y Ω_2 **poligonales** con el mismo espectro σ ...
- ... el problema sigue abierto para dominios Ω suaves no convexos...

Aplicación de la Teoría de SF : La función de Weierstrass .

En 1872, K. Weierstrass construyó una función

$$f \in C(\mathbb{R}) \quad t.g. \quad \nexists f'(x) \text{ en ningún pto } x \in \mathbb{R}$$



Teatrero

Dado $\alpha \in (0, 1)$ se define

$$W_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces $W_\alpha \in C(\mathbb{R})$ y no es derivable en ningún $x_0 \in \mathbb{R}$.
De hecho,

$W_\alpha \in C^\omega(\mathbb{R})$, pero $W_\alpha \notin C^{k+\epsilon}(x_0)$ para ningún $\epsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Notar que, por el M-test, $W_\alpha(x)$ es continua, ya que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\alpha}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vea Hoja 5, ejerc 12-c

Lema 1 Si $\lambda \in (0,1) \Rightarrow W_\lambda \in C^{<}(\pi)$

Demo : C. $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} |W_\lambda(x+h) - W_\lambda(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\lambda}} \cdot (e^{2\pi i 2^n h} - 1) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ 2^n \leq 1/|h|}} \frac{|e^{2\pi i 2^n h} - 1|}{2^{n\lambda}} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ 2^n > 1/|h|}} \frac{2}{2^{n\lambda}} \end{aligned}$$

Como $|e^{i\theta} - 1| = \left| \int_0^\theta e^{is} ids \right| \leq |\theta|, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{2^n \leq \frac{1}{|h|}} \frac{2\pi 2^n |h|}{2^{n\lambda}} + 2 \cdot \sum_{2^n > \frac{1}{|h|}} \frac{1}{2^{n\lambda}} \quad \text{serie geométrica} \\ &\leq 2\pi |h| \sum_{2^n \leq \frac{1}{|h|}} 2^{n(1-\lambda)} + d \cdot |h|^{\lambda} \quad \text{sime tercero} \\ &\stackrel{!}{\leq} c \cdot |h| \cdot \left(\frac{1}{|h|}\right)^{1-\lambda} + d \cdot |h|^{\lambda} = 2c \cdot |h|^{\lambda}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota Hemos usado, si $r \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n &= \frac{r^{n_0}}{1-r} = c_r \cdot \underbrace{\frac{r^{n_0}}{r}}_{\text{1º término}} \quad \text{1º término} \\ \sum_{n=-\infty}^{n_0} \frac{1}{r^n} &= \sum_{m=-n_0}^{\infty} r^m = \frac{r^{-n_0}}{1-r} = d_r \cdot \underbrace{\frac{1}{r^{n_0}}}_{\text{1º término}} \end{aligned}$$

Nota : Usando el ejerc 12 b se puede probar que

$W_\lambda \notin C^{k+\epsilon}(\pi)$, para ningún $\epsilon > 0$.

Hölder global

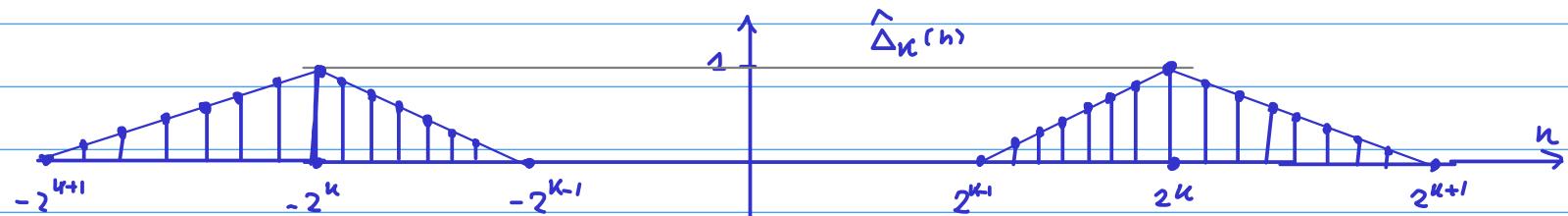
i Hölder local.

Estudiemos ω : $W_\omega \in C^\beta(x_0)$... Usaremos 2 herramientas

(1) $W_\omega(x)$ tiene una SF "laguerre" ← mides los Fourier nulos

(2) mides de Littlewood-Paley : $\Delta_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$

↳ busco funciones $\Delta_{n_k}(x)$ t.q. sus coef de Fourier sean



Después veamos cómo definir Δ_{n_k} o partir de las $F_N(\alpha)$...

↳ los mides Δ_n son "filtros" de frecuencia $\approx 2^n$.

Como $\widehat{W_\omega}(n) = 0$ si $n \notin \{2^k\}_{k=0}^\infty$, entonces

$$(\widehat{\Delta_n * W_\omega})(n) = \widehat{\Delta_n}(n) \cdot \widehat{W_\omega}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 2^k \\ \frac{1}{2^{nk}}, & \text{si } n = 2^k \end{cases}$$

y por tanto

$$(\Delta_n * W_\omega)(x) = \frac{e^{-2\pi i n x}}{2^{nk}} \quad (*)$$

Lema 2

Sea g acotada t.q. $g \in C^\beta(x_0)$, con $\beta \in (0, 1)$.

Entonces

$$|\Delta_n * g(x_0)| \leq C_g \cdot 2^{-nk\beta}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Nota : En particular, de (*) se que que $W_\omega \notin C^\beta(x_0)$ si $\beta > \alpha$.

Desarrollo 2

$$\Delta_K g(x_0) = \int_{\mathbb{T}} \Delta_K(x) g(x_0 - x) dx$$

$$\widehat{\Delta}_K(b) = \int_{\mathbb{T}} \Delta_K(x) [g(x_0 - x) - g(x_0)] dx$$

$$\Rightarrow |\Delta_K g(x_0)| \leq \int_{\mathbb{T}} |\Delta_K(x)| \cdot |g(x_0 - x) - g(x_0)| dx$$

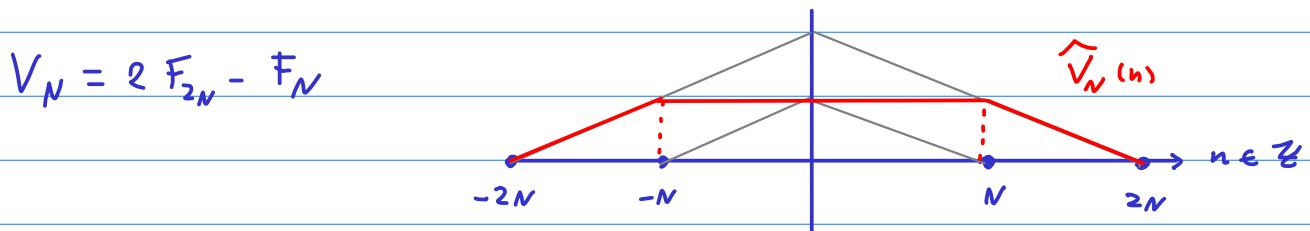
$$\leq C_g \cdot \int_{\mathbb{T}} |\Delta_K(x)| \cdot |x|^B dx$$

$\because |h| \leq \delta$

Ahora necesitamos el "desarrollo" de $\Delta_K(x)$...

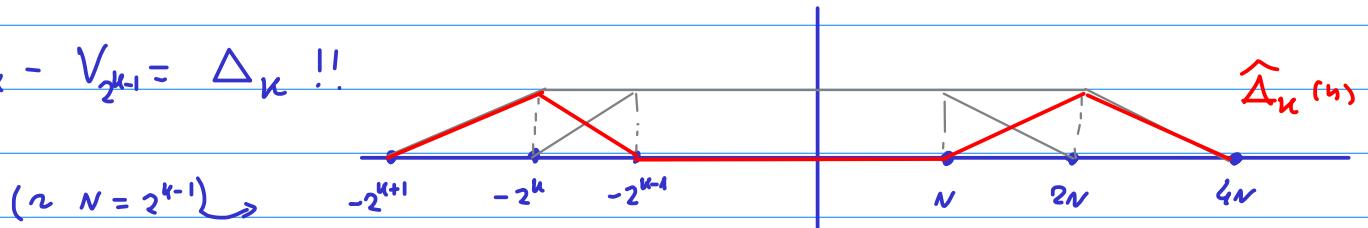
Veamos cómo es su fórmula explícita:

- Recordar los núcleos de la Vallée-Poussin ↓ descripción



- Restando dos de estos núcleos obtenemos

$$V_{2^k} - V_{2^{k-1}} = \Delta_k !!$$



$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \Delta_k &= V_{2^k} - V_{2^{k-1}} = (2F_{2^{k+1}} - F_{2^k}) - (2F_{2^k} - F_{2^{k-1}}) \\ &= 2F_{2^{k+1}} - 3F_{2^k} + F_{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Para terminar el lema 2, basta con probar

$$(20) \quad I_N := \int_{\mathbb{R}} |F_N(x)| \cdot |x|^\beta dx \leq \frac{C}{N^\beta}, \quad \text{si } \beta \in (0, 1).$$

(y luego reemplazar $N \in \{2^{k-1}, 2^k, 2^{k+1}\}$.)

Para probar (20) usaremos $F_N(x) \lesssim \min\{N, \frac{1}{N|x|^2}\}$

Entonces

$$\begin{aligned} I_N &\lesssim \int_{|x| \leq \frac{1}{N}} N \cdot |x|^\beta dx + \int_{\frac{1}{N} \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{N|x|^2} \cdot |x|^\beta dx \\ &\leq 2N \cdot \frac{(1/N)^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{2}{N} \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} |x|^{\beta-2} dx \\ &\quad \underbrace{\leq \frac{(1/N)^{\beta-1}}{1-\beta}}_{\because \beta \in (0, 1)} \\ &\leq C_\beta \cdot \frac{1}{N^\beta} + C_\beta \cdot \frac{1}{N^\beta}. \end{aligned}$$

□

NOTA: Si $g \in \text{Lip}_\beta(x_0)$ con $\boxed{\beta = 1} \Rightarrow |\Delta_N g(x_0)| \leq c_g \cdot \frac{\ln N}{N}$.

Combinando los lemas 1 y 2, hemos probado

$$W_2 \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}) \setminus \left[\bigcup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}}} \text{Lip}_{\alpha+\varepsilon}(x_0) \right].$$

Esto termina la prueba del Teorema

□

Notas:

① Si $\omega = 1$, ¿Cómo es $W(x) := W_1(x)$?

- El Lemma NO permite concluir $W \in \text{Lip}_1(\mathbb{T})$ (de hecho es falso), pero si se cumple

$$|W(x+h) - W(x)| \leq C|h| \cdot \log \frac{1}{|h|}$$

e incluso $|W(x+h) - 2W(x) + W(x-h)| \leq C|h|, \forall x, h \in \mathbb{R}.$
 $\hookrightarrow W \in \Delta_x^1(\mathbb{T}) = \text{espacio de Zygmund}$

- Se puede probar que $W(x)$ NO es derivable en ningún pto $x \in \mathbb{R}$.
 \hookrightarrow ver [Stein-Shakarchi, Ex 5.8, pg 174].

De hecho, usando una versión "renovada" ψ_u de los nudos Δ_n se tiene

Lema 3

E: $g \in C(\mathbb{T})$ y $\exists g'(x_0)$

$$\Rightarrow (\psi_u * g)'(x_0) \xrightarrow[u \rightarrow \infty]{} 0$$

$$p_{40} \quad \psi_u * W(x) = \frac{e^{2\pi i 2^u x}}{2^u} \Rightarrow |(\psi_u * W)'(x_0)| = \left| \frac{2\pi i 2^u \cdot e^{2\pi i 2^u x}}{2^u} \right| = 2\pi \neq 0$$

- También se puede probar que $W \notin \text{Lip}(x_0)$ en ctp $x_0 \in \mathbb{R}$

$\left(\text{y sin embargo } \{x_0 \in \mathbb{T} / W \in \text{Lip}(x_0)\} \text{ es denso en } \mathbb{T}, \right)$
 $\text{e incluso tiene dim de Hausdorff } 1 !!$

[Tunc Matanov, 1989]

② Función de Riemann (1851)

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Riemann conjeturó que $R \in C(\mathbb{T})$ y NO derivable en ningún punto...

Pero Hardy (1916) y Littlewood (1921) pusieron que

|| $R(x)$ es derivable en $\pi \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$!!

↳ hay cuestiones abiertas sobre la naturaleza
multiplicativa de este función ...

incluidos con fenómenos de turbulencia en EDPs...