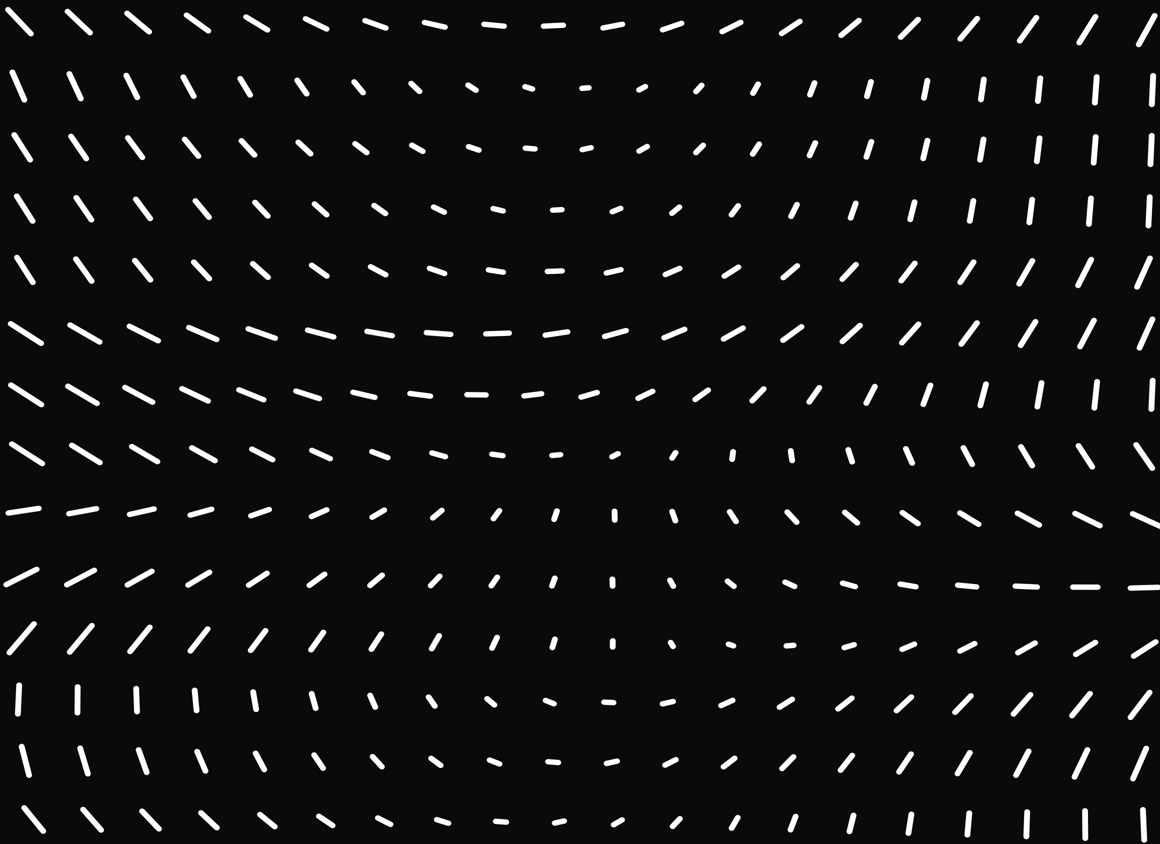


Teoría de la Probabilidad Relación 1 (Septiembre 2020)

1. Se tienen en una urna 25 fichas numeradas con los números 1, 2, ..., 25. Se toman simultáneamente 2 fichas de la urna.

Calcular la probabilidad de que los números de las dos fichas extraídas sean primos entre sí.

2. Sean A, B, C, D cuatro conjuntos cualesquiera. Demostrar que

a) $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$

b) $(A \cup B)\Delta(C \cup D) \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta D)$

donde Δ es la diferencia simétrica.

3. En la recta **R** se considera la familia de conjuntos

$$\mathscr{A} = \{C \subset \mathbf{R} : C \text{ o } C^c \text{ es un conjunto de medida de Lebesgue cero}\}$$

Averiguar si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en **R**.

Nota. Un conjunto C de **R** es de medida de Lebesgue cero si para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar una sucesión de intervalos $I_i = (a_i, b_i)$ tales que $\cup I_i \supset C$ y $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$.

4. Se tienen en una urna 20 bolas numeradas con los números 1, 2, ... , 20. Se toman simultáneamente 5 bolas de la urna. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) De que en las cinco bolas no haya dos que sean números consecutivos.

b) De que en las cinco bolas haya dos que sean números consecutivos y no haya más parejas de números consecutivos.

5. Se tienen n urnas U_i (i = 1, 2, ... , n). La urna U_i tiene i bolas blancas y n-i negras. Se elige una urna de modo que cada urna U_i tiene probabilidad $p_i = 1/n$ de ser elegida. Se saca una primera bola de la urna elegida, se devuelve a la urna y se saca una segunda bola, se devuelve a la urna y se saca una tercera bola.

1. Se tienen en una urna 25 fichas numeradas con los números 1, 2, ..., 25. Se toman simultáneamente 2 fichas de la urna.

Calcular la probabilidad de que los números de las dos fichas extraídas sean primos entre sí.

Casos totales: $\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!\,23!} = \frac{25\cdot 24}{2} = 25\cdot 12 = 5^2\cdot 3\cdot 2^2$

$A_2 = \{(i,j) : i = \dot{2}, j = \dot{2}\}$

$A_3 = \{(i,j) : i = \dot{3}, j = \dot{3}\}$

$A_5 = \{(i,j) : i = \dot{5}, j = \dot{5}\}$

$A_7 = \{(i,j) : i = \dot{7}, j = \dot{7}\}$

$A_{11} = \{(i,j) : i = \dot{11}, j = \dot{11}\}$

$P(A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11}) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$

$|A_2| = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$

$|A_3| = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

$|A_5| = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

$|A_7| = \binom{3}{2} = 3$

$|A_{11}| = 1$

$|A_2 \cap A_3| = \binom{4}{2} = 6$

$|A_2 \cap A_5| = \binom{2}{2} = 1$

$|A_2 \cap A_7| = 0$

... a partir de aquí todos 0.

$P(\cup A_i) = \frac{66+28+10+3+1}{300} - \frac{6+1}{300} = \frac{101}{300}$ ← Prob no copr.

$\rightarrow P(A) = 1 - \frac{101}{300} = \frac{199}{300}$

4. Se tienen en una urna 20 bolas numeradas con los números 1, 2, ... , 20. Se toman simultáneamente 5 bolas de la urna. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) De que en las cinco bolas no haya dos que sean números consecutivos.

b) De que en las cinco bolas haya dos que sean números consecutivos y no haya más parejas de números consecutivos.

a) Casos posibles: $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,15!} = \frac{\cancel{20}\cdot 19\cdot \overset{3}{\cancel{18}}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 19\cdot 17\cdot 3\cdot 2^4$

Supongamos que cogemos 5 bolas y las ordenamos

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $\quad x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

Definimos la tupla $(x_1, x_2-1, x_3-2, x_4-3, x_5-4)$

Entre las 5 bolas iniciales habrá dos consecutivas si al menos dos de estos valores son iguales.

No habrá dos consecutivos si todos son distintos, como $1 \leq \begin{matrix} x_1 \\ x_2-1 \\ x_3-2 \\ x_4-3 \\ x_5-4 \end{matrix} \leq 16$

en $\binom{16}{5} = \frac{16\cdot \overset{3}{\cancel{15}}\cdot \overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot \cancel{12}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 13\cdot 7\cdot 2^4$

Así, $P(A) = \frac{13\cdot 7\cdot \cancel{2^4}}{19\cdot 17\cdot 3\cdot \cancel{2^4}} = \frac{13\cdot 7}{19\cdot 17\cdot 3}$

b) Debe ser $(x_1, x_2-1, x_3-2, x_4-3, x_5-4) = (a, b, c, d, e)$

$\left.\begin{matrix} a=b \\ \text{ó} \\ b=c \\ \text{ó} \\ c=d \\ \text{ó} \\ d=e \end{matrix}\right\}$ (a,b,c,d) de 4 formas

$P(B) = \frac{4\binom{16}{4}}{19\cdot 17\cdot 3\cdot 2^4} = \frac{\cancel{2^4}\cdot 5\cdot 7\cdot 13}{\cancel{2^4}\cdot 3\cdot 17\cdot 19} = \frac{5\cdot 7\cdot 13}{3\cdot 17\cdot 19}$

$\binom{16}{4} = \frac{\overset{2}{\cancel{16}}\cdot \overset{5}{\cancel{15}}\cdot 14\cdot 13}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$

a) Calcular la probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean blancas.

b) Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea U_r si las dos primeras bolas resultaron blancas.

c) Calcular la probabilidad de que la tercera bola sea blanca si las dos primeras resultaron blancas.

6. a) Demostrar la igualdad entre números combinatorios

$$\binom{n+r+1}{n+1} = \binom{n+r}{n+1} + \binom{n+r}{n}$$

b) Dado el entero positivo *n* se define la función $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por

$$p(r) = \binom{n+r}{n}\frac{1}{2^{n+r}} \quad \text{para } r = 0, 1, 2, 3, \ldots n$$

$$p(r) = 0 \qquad \text{para el resto}$$

Demostrar que *p* es una función puntual de probabilidad de una distribución en **R.**

5. Se tienen n urnas U_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. La urna U_i tiene i bolas blancas y n-i negras. Se elige una urna de modo que cada urna U_i tiene probabilidad $p_i = 1/n$ de ser elegida. Se saca una primera bola de la urna elegida, se devuelve a la urna y se saca una segunda bola, se devuelve a la urna y se saca una tercera bola.

a) Calcular la probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean blancas.

$$P(U_i) = \frac{1}{n} \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \qquad \bigcup_i U_i = \Omega$$

$$P(2B \mid U_i) = \frac{i}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{i^2}{n^2}$$

$$P(2B) = \sum P(U_i) \cdot P(2B \mid U_i) = \sum \frac{1}{n} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

b) Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea U_r si las dos primeras bolas resultaron blancas.

$$P(U_r \mid 2B) = \frac{P(U_r) \cdot P(2B \mid U_r)}{P(2B)} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{r^2}{\cancel{n^2}}}{\frac{(n+1)(2n+1)}{6\cancel{n^2}}} = \frac{6r^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

c) Calcular la probabilidad de que la tercera bola sea blanca si las dos primeras resultaron blancas.

$$P(3B \mid 2B) = \frac{\sum P(U_i) P(2B \mid U_i) P(3B \mid 2B \cap U_i)}{P(2B)} = \frac{\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{i}{n}}{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^{\cancel{4}2}} \sum i^3}{\frac{(n+1)(2n+1)}{6\cancel{n^2}}} = \frac{\frac{6}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{4n^2} \cdot \frac{n^2 (n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(2n+1)} = \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$$

Teoría de la Probabilidad Relación 2 (Octubre 2020)

1. A Ángel, Beatriz y Carlos les gusta el cine y suelen ir todas las semanas a ver una película. Cuando van, Carlos siempre lleva un caramelo para cada uno.

a) La semana pasada Carlos cogió dos caramelos de menta y uno de fresa y cuando empezó la película, a oscuras, sacó de su bolsillo un caramelo para Ángel, después otro para Beatriz y él se quedó con el tercero.

a1) Calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

a2) Sabiendo que el caramelo que Carlos le dio a Beatriz era de menta, calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

b) Esta semana Carlos ha vuelto a coger dos caramelos de menta y uno de fresa. Sin mirar, coge un caramelo para Ángel y cuando le va a dar otro a Beatriz, ésta le pide que por favor se lo dé de menta porque tiene la garganta un poco irritada, Carlos enciende su móvil, mira los dos caramelos, coge uno de menta y se lo da a Beatriz y el otro se lo queda él. Calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

2. Se lanza sucesivamente una moneda imperfecta. Se sabe que en cada lanzamiento la probabilidad de que resulte cara es p $(0<p<1)$ y la de cruz $q=1-p$. Una racha de caras de longitud *m* ocurre si en *m* lugares consecutivos resulta cara.

(a) Calcular la probabilidad de que en una sucesión de lanzamientos haya infinitas rachas de longitud *m*

(b) Calcular la probabilidad de que en una sucesión de lanzamientos haya infinitas rachas de cualquier longitud, es decir, infinitas de longitud 2, infinitas de longitud 3, infinitas de longitud 4, etc.

3. (a) Se colocan al azar *n* bolas en *n* urnas. Se pide la probabilidad de que las *n* urnas queden ocupadas.

(b) Se colocan al azar *n*+1 bolas en *n* urnas. Se pide la probabilidad de que las *n* urnas queden ocupadas.

(c) Se colocan al azar $n > 3$ bolas en 3 urnas. Se pide la probabilidad de que las 3 urnas queden ocupadas.

1. A Ángel, Beatriz y Carlos les gusta el cine y suelen ir todas las semanas a ver una película. Cuando van, Carlos siempre lleva un caramelo para cada uno.

a) La semana pasada Carlos cogió dos caramelos de menta y uno de fresa y cuando empezó la película, a oscuras, sacó de su bolsillo un caramelo para Ángel, después otro para Beatriz y él se quedó con el tercero.

a1) Calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

a2) Sabiendo que el caramelo que Carlos le dio a Beatriz era de menta, calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

1) $P(A, fr) = \frac{1}{3}$

$P(C, fr) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

2) $P(A, fr | B, m) = \frac{P(A, fr \cap B, m)}{P(B, m)} = \frac{1/3}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$

$P(C, fr | B, m) = \frac{P(C, fr \cap B, m)}{P(B, m)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2/3} = 1/2$

b) Esta semana Carlos ha vuelto a coger dos caramelos de menta y uno de fresa. Sin mirar, coge un caramelo para Ángel y cuando le va a dar otro a Beatriz, ésta le pide que por favor se lo dé de menta porque tiene la garganta un poco irritada, Carlos enciende su móvil, mira los dos caramelos, coge uno de menta y se lo da a Beatriz y el otro se lo queda él. Calcular la probabilidad de que el caramelo de Ángel fuese de fresa, y la probabilidad de que el caramelo de Carlos fuese de fresa.

$P(A, fr) = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(C, fr) = \frac{2}{3}$

2. Se lanza sucesivamente una moneda imperfecta. Se sabe que en cada lanzamiento la probabilidad de que resulte cara es p $(0 < p < 1)$ y la de cruz $q = 1 - p$. Una racha de caras de longitud m ocurre si en m lugares consecutivos resulta cara.

(a) Calcular la probabilidad de que en una sucesión de lanzamientos haya infinitas rachas de longitud m

(b) Calcular la probabilidad de que en una sucesión de lanzamientos haya infinitas rachas de cualquier longitud, es decir, infinitas de longitud 2, infinitas de longitud 3, infinitas de longitud 4, etc.

a) $A_i = \{$racha de m caras desde el lugar i al $m+i\}$

$$P(A_i) = p^m$$

Nos piden $P(\limsup A_n)$

Borel-Cantelli

a) $\sum P(A_n)$ converge $\rightarrow P(\limsup A_n) = 0$

b) $\left.\begin{array}{l}\sum P(A_n) \text{ diverge} \\ A_n \text{ indep}\end{array}\right\} \rightarrow P(\limsup A_n) = 1$

$\sum P(A_n) = \sum p^m$ divergente

¿A_n indep? No, $P(A_n | A_{n-1}) = p \neq p^m$

$$\underbrace{[1 \;\; 2 \;\; \ldots \;\; m]}_{A_1}\underbrace{[m+1 \;\; m+2 \;\; \ldots \;\; 2m]}_{A_{m+1}}\underbrace{[2m+1 \;\; \ldots \;\; 3m]}_{A_{2m+1}}$$

$$\boxed{B_i = A_{1+m\cdot(i-1)}} \longrightarrow P(B_i) = p^m$$

$\sum P(B_i)$ diverge

y los B_i sí son independientes!!

$\longrightarrow P(\limsup B_i) = 1$

y $1 = P(\limsup B_i) \leq P(\limsup A_i) \leq 1$

$\longrightarrow P(\limsup A_i) = 1$

infinitas rachas de longitud m.

(b) Calcular la probabilidad de que en una sucesión de lanzamientos haya infinitas rachas de cualquier longitud, es decir, infinitas de longitud 2, infinitas de longitud 3, infinitas de longitud 4, etc.

$B_m = \{$hay infinitas rachas de longitud $m\}$

$P(B_m) = 1$

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right) = 1$$

intersec. de sucesos casi seguros es suceso casi seguro

3. (a) Se colocan al azar n bolas en n urnas. Se pide la probabilidad de que las n urnas queden ocupadas.
(b) Se colocan al azar n+1 bolas en n urnas. Se pide la probabilidad de que las n urnas queden ocupadas.
(c) Se colocan al azar $n > 3$ bolas en 3 urnas. Se pide la probabilidad de que las 3 urnas queden ocupadas.

a)

Nº de formas distintas de situar las n bolas en las n urnas

$$\left.\begin{array}{l} 1 \longrightarrow x_1 \\ 2 \longrightarrow x_2 \\ \vdots \\ n \longrightarrow x_n \end{array}\right\} (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \underline{\underline{n^n}}$$

Favorables

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{1, \dots, n\} \longrightarrow n!$$

$$\boxed{P(A) = \frac{n!}{n^n}}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{l} (1) \longrightarrow X_1 \\ \quad\vdots \\ (n+1) \longrightarrow X_{n+1} \end{array}\right\} \overset{\text{total}}{n^{n+1}}$$

favorables

$$\boxed{P(B) = \frac{n!\binom{n+1}{2}}{n^{n+1}}}$$

$$\underbrace{n\binom{n+1}{2}}_{\text{formas de que caigan 2 bolas en la misma urna}}\ \underbrace{(n-1)!}_{\text{resto de bolas en el resto de urnas}} = n!\binom{n+1}{2}$$

(c) B_1, B_2, B_3 = la urna i queda vacía

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \sum P(B_i) - \sum P(B_i \cap B_j) = 3\cdot\frac{2^n}{3^n} - 3\frac{1}{3^n} = \frac{2^n-1}{3^{n-1}}$$

$$P(B_i) = \frac{2^n}{3^n} \qquad i=1,2,3$$

$$P(B_i \cap B_j) = \frac{1}{3^n} \qquad i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2,3\}\setminus\{i\}$$

$$\boxed{P(C) = 1 - \frac{2^n-1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1}-2^n-1}{3^{n-1}}}$$

4. El Sr. M juega un número de una lotería de 1000 números. Pasado el sorteo le preguntamos si le ha tocado dicha lotería y nos dice que sí. Pero sabemos que el Sr. M tiene la inveterada costumbre de mentir el 10 % de las veces. ¿Cual es la probabilidad de que verdaderamente le haya tocado la lotería?

5. Se tiene una sucesión de urnas U_1, U_2, U_3, . . . Para cada n la urna U_n tiene fichas en las que están escritos los enteros

$$10^{n-1},\ 10^{n-1} + 1,\ 10^{n-1} + 2, \ldots, 10^n - 1, \quad (n \geq 1)$$

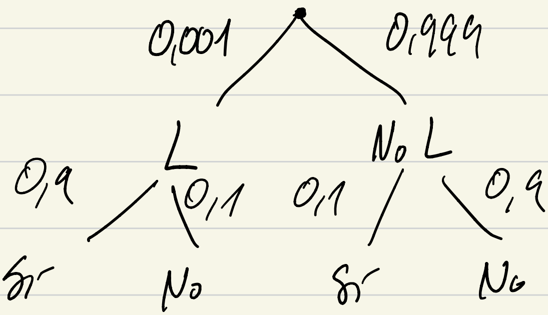
una ficha con cada número. Se entiende que los números están escritos en base diez. Se extrae una ficha de U_1, otra de U_2, y así sucesivamente, extrayéndose una ficha de cada urna. Se piden las probabilidades siguientes:

(a) Probabilidad de que el número extraído de la urna U_n contenga la cifra 8

(b) Probabilidad de que en las fichas extraídas haya infinitas con la cifra 8.

(c) Probabilidad de que desde una en adelante todas las fichas extraídas tengan al menos una de las cifras 7 y 8.

4. El Sr. M juega un número de una lotería de 1000 números. Pasado el sorteo le preguntamos si le ha tocado dicha lotería y nos dice que sí. Pero sabemos que el Sr. M tiene la inveterada costumbre de mentir el 10 % de las veces. ¿Cual es la probabilidad de que verdaderamente le haya tocado la lotería?



$$P(L|Sí) = \frac{P(L \cap Sí)}{P(Sí)} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}9}{0{,}001 \cdot 0{,}9 + 0{,}999 \cdot 0{,}1} =$$

$$= \frac{0{,}0009}{9 \cdot 10^{-4} + 0{,}0999} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-4} + 9{,}99 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^{-4}}{0{,}09 \cdot 10^{-2} + 9{,}99 \cdot 10^{-2}} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{10{,}08 \cdot 10^{-2}} = \frac{9 \cdot 10^{-2}}{10{,}08} =$$

$$= \frac{9}{1008} = \frac{3}{336} = \frac{1}{112}$$

5. Se tiene una sucesión de urnas $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Para cada n la urna U_n tiene fichas en las que están escritos los enteros

$$10^{n-1},\ 10^{n-1}+1,\ 10^{n-1}+2, \ldots, 10^n - 1, \quad (n \geq 1)$$

una ficha con cada número. Se entiende que los números están escritos en base diez. Se extrae una ficha de U_1, otra de U_2, y así sucesivamente, extrayéndose una ficha de cada urna. Se piden las probabilidades siguientes:

(a) Probabilidad de que el número extraído de la urna U_n contenga la cifra 8

(b) Probabilidad de que en las fichas extraídas haya infinitas con la cifra 8.

(c) Probabilidad de que desde una en adelante todas las fichas extraídas tengan al menos una de las cifras 7 y 8.

a) $U_n \rightarrow$ las bolas tienen n cifras

$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$

$9 \geq x_1 \geq 1$

$9 \geq x_i \geq 0$

Casos totales $\quad 9 \cdot 10^{n-1}$

Casos desfavorables $\quad 8 \cdot 9^{n-1}$

$$P(\bar{A}) = \frac{8 \cdot 9^{n-1}}{9 \cdot 10^{n-1}} = \frac{8 \cdot 9^{n-2}}{10^{n-1}}$$

$$P(A) = \frac{10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-2}}{10^{n-1}}$$

(b) Probabilidad de que en las fichas extraídas haya infinitas con la cifra 8.

$A_n =$ bola con 8 en urna n

$$P(A_n) = \frac{10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-2}}{10^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge, pues $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 1 \neq 0$

Los A_n son independientes, así por Borel-Cantelli

$$P(\limsup A_n) = 1 \,//$$

(c) Probabilidad de que desde una en adelante todas las fichas extraídas tengan al menos una de las cifras 7 y 8.

$B_n = \{7 \cup 8$ en la urna $n\}$

$$P(\liminf B_n) = 1 - P(\liminf {}^c B_n) = 1 - P(\limsup B_n^c)$$

$$P(B_n^c) = \frac{7 \cdot 8^{n-1}}{9 \cdot 10^{n-1}} \qquad \sum_n P(B_n^c) = \sum_n \frac{7}{9} \left(\frac{8}{10}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{7}{9} \sum_n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$ geométrica $r<1 \longrightarrow$ convergente

$\longrightarrow P(\limsup B_n^c) = 0 \longrightarrow P(\liminf B_n) = 1$

Teoría de la Probabilidad Relación 3 (Octubre 2020)

1. En el espacio de probabilidad $\mathbb{R}$ con la sigma álgebra de Borel $\mathscr{B}_1$ está definida la distribución de probabilidad P

$$P(\{n\}) = p(n) = 1/2^n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \; P(\{x\}) = 0 \text{ para el resto de valores.}$$

a) Calcular la función de distribución de la distribución de probabilidad P.
b) Calcular la probabilidad del conjunto de los números pares.
c) Calcular la probabilidad del conjunto de los números pares no múltiplos de cuatro.

2. Sea P la distribución de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que $P(\{b\}) = 1/3$ y el resto de la probabilidad está repartida de manera uniforme en el conjunto

$$C = (a,b) \cup (c,d), \quad a < b < c < d$$

Obtener la descomposición de Lebesgue de dicha distribución de probabilidad. Calcular la función puntual de probabilidad de su componente discreta, la función de densidad $f(x)$ de su componente continua y las funciones de distribución de P y de sus componentes.

3. Una distribución de probabilidad $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_2, P)$ tiene la probabilidad concentrada en el perímetro del triángulo de vértices (1, 0), (0, 1), (0, 0), de modo que la probabilidad de un segmento s de dicho perímetro es proporcional a la longitud del segmento. Calcular la función de distribución de esta distribución.

4. Sea F la función de distribución definida por

$$F(x) = \frac{1}{24}\left(5x\, I_{[0,1)}(x) + (5x+3)\, I_{[1,2)}(x) + (5x+6)\, I_{[2,3)}(x) + 24 I_{[3,+\infty)}(x)\right).$$

Encontrar las funciones de distribución F_d y F_c discreta y continua respectivamente tales que $F = \alpha F_d + \beta F_c$. Estudiar si F_c posee función de densidad y en caso afirmativo calcularla.

5. La función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x < 1, \quad y \ge 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \le y < 1, \quad x \ge 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1, \; y \ge 1 \\ \sqrt{x+y-1} & \text{si } x < 1, \quad y < 1, \quad x + y \ge 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Averiguar:

1. En el espacio de probabilidad $\mathbb{R}$ con la sigma álgebra de Borel $\mathscr{B}_1$ está definida la distribución de probabilidad P

$$P(\{n\}) = \mathrm{p}(n) = 1/2^n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \; P(\{x\}) = 0 \text{ para el resto de valores.}$$

a) Calcular la función de distribución de la distribución de probabilidad P.
b) Calcular la probabilidad del conjunto de los números pares.
c) Calcular la probabilidad del conjunto de los números pares no múltiplos de cuatro.

a)

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{n \leq x} p(n) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^n} & x \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$P(\{Par\}) = \sum_{n \text{ par}} p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} p(2m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} =$$

$$= \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

c)

$$P(\{\text{Par, no múltiplo de } 4\}) = P(\{Par\}) - P(\{\text{Mult. } 4\})$$

$$P(\{\text{Mult } 4\}) = \sum \frac{1}{2^{4n}} = \frac{1/2^4}{1 - 1/2^4} = \frac{1/16}{15/16} = \frac{1}{15}$$

$$P(C) = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{5-1}{15} = \frac{4}{15}$$ //

2. Sea P la distribución de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que $P(\{b\}) = 1/3$ y el resto de la probabilidad está repartida de manera uniforme en el conjunto

$$C = (a,b) \cup (c,d), \quad a < b < c < d$$

Obtener la descomposición de Lebesgue de dicha distribución de probabilidad. Calcular la función puntual de probabilidad de su componente discreta, la función de densidad $f(x)$ de su componente continua y las funciones de distribución de P y de sus componentes.

$$\left.\begin{aligned} &P(C \cup \{b\}) = 1 \\ &\qquad \shortparallel \\ &P(C) + P(\{b\}) = P(C) + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \; P(C) = \frac{2}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{\mu} & x \in (a,b) \\ 2/3 & x \in [b,c] \\ \frac{2}{3} + \frac{x-c}{\mu} & x \in (c,d) \\ 1 & x \geq d \end{cases}$$

$\mu = d-c+b-a$

En C la probabilidad es uniforme

$\rightarrow f(x) = k$ en C

$$F(x) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + P(\{b\}) + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = (b-a)\cdot k + \frac{1}{3} + (d-c)k$$

$$= k(d-c+b-a) + \frac{1}{3} = 1$$

$$\rightarrow k = \frac{2}{3(d-c+b-a)}$$

Puntual discreta

$$\boxed{p(\{x\}) = \begin{cases} 0 & x \neq b \\ 1 & x = b \end{cases}}$$

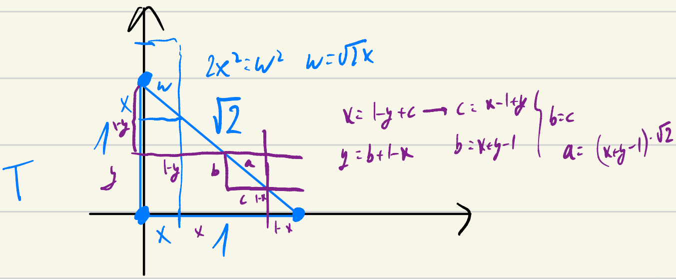
Densidad continua

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{d-c+b-a}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\cdot P_d + \frac{2}{3}\cdot P_s \qquad P_d(B) = \begin{cases} 0 & b \notin B \\ 1 & b \in B \end{cases} \qquad P_s(B) = \frac{\mu(B \cap C)}{d-c+b-a}}$$

Descomposición de Lebesgue

3. Una distribución de probabilidad $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}_2, P\right)$ tiene la probabilidad concentrada en el perímetro del triángulo de vértices (1, 0), (0, 1), (0, 0), de modo que la probabilidad de un segmento *s* de dicho perímetro es proporcional a la longitud del segmento. Calcular la función de distribución de esta distribución.



$$P(T) = 1$$

$$P(l_1) + P(l_2) + P(h) = K + K + \sqrt{2}K = K(2+\sqrt{2}) \Big\} K = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

$$P(l_1) = P(l_2) = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \qquad P(h) = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \qquad x \in T$$

$$\int_T f(\alpha)\,d\alpha = \int_T \frac{1}{2+\sqrt{2}}\,d\alpha = \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 1 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ \dfrac{x+y}{2+\sqrt{2}} & x,y \in (0,1),\ x+y < 1 \\ \dfrac{1+x+\sqrt{2}x}{2+\sqrt{2}} & x \in (0,1)\ y \geq 1 \\ \dfrac{1+y+\sqrt{2}y}{2+\sqrt{2}} & y \in (0,1)\ x \geq 1 \\ \dfrac{x+y+\sqrt{2}\cdot(x+y-1)}{2+\sqrt{2}} & x+y > 1\ \ x,y \in (0,1) \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

4. Sea F la función de distribución definida por

$$F(x)=\frac{1}{24}\left(5x\,I_{[0,1)}(x)+(5x+3)\,I_{[1,2)}(x)+(5x+6)\,I_{[2,3)}(x)+24I_{[3,+\infty)}(x)\right).$$

Encontrar las funciones de distribución F_d y F_c discreta y continua respectivamente tales que $F=\alpha F_d+\beta F_c$. Estudiar si F_c posee función de densidad y en caso afirmativo calcularla.

$$F(x)=\frac{1}{24}\left(5x\,I_{[0,1)}(x)+5x\,I_{[1,2)}(x)+5x\,I_{[2,3)}(x)\right)+$$

$$+\frac{1}{24}\left(3\,I_{[1,2)}(x)+6\,I_{[2,3)}(x)+24\,I_{[3,\infty)}(x)\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{5x}{24}I_{[0,3)}(x)}_{\text{cont.}}+\underbrace{\frac{1}{24}\left(3I_{[1,2)}(x)+6I_{[2,3)}(x)+24I_{[3,\infty)}(x)\right)}_{\text{discr}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\{1\})=F(1)-F(1^-)=\dfrac{8}{24}-\dfrac{5}{24}=\dfrac{3}{24} \\ P(\{2\})=F(2)-F(2^-)=\dfrac{3}{24} \\ P(\{3\})=\dfrac{3}{24} \end{array}\right\} P(D)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\alpha$$

$$F=\frac{3}{8}F_d+\frac{5}{8}F_c \qquad F_d=\frac{1}{3}I_{[1,2)}(x)+\frac{2}{3}I_{[2,3)}(x)+I_{[3,\infty)}(x)$$

$$F_c=\frac{x}{3}I_{[0,3)}(x)$$

$$f(x)=F_c'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/3 & x\in[0,3)\\ 0 & x\geq 3\end{cases}$$

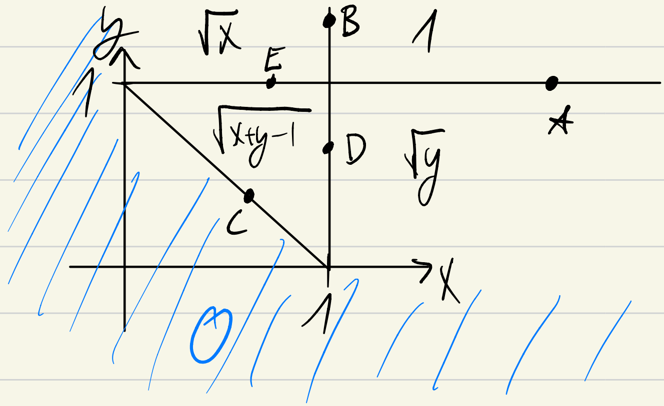
a) si $F(x, y)$ es una función continua,
b) si $F(x, y)$ es una función monótona creciente en cada una de sus variables (separadamente),
c) si $F(x, y)$ es una función de distribución.

5. La función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está definida por:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } 0\le x<1,\quad y\ge 1\\ \sqrt{y} & \text{si } 0\le y<1,\quad x\ge 1\\ 1 & \text{si } x\ge 1,\ y\ge 1\\ \sqrt{x+y-1} & \text{si } x<1,\quad y<1,\quad x+y\ge 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Averiguar:

a) si $F(x,y)$ es una función continua,



Es continua en cada región, debemos ver las fronteras.

- A $\quad \sqrt{y}\xrightarrow[y\to 1]{} 1$ ok
- B $\quad \sqrt{x}\xrightarrow[x\to 1]{} 1$ ok
- E $\quad \sqrt{x}\xrightarrow[y\to 1]{}\sqrt{x}$

  $\sqrt{x+y-1}\xrightarrow[y\to 1]{}\sqrt{x}$ ok

- D $\quad \sqrt{y}\xrightarrow[x\to 1]{}\sqrt{y}$

  $\sqrt{x+y-1}\xrightarrow[x\to 1]{}\sqrt{y}$ OK

- C $\quad \sqrt{x+y-1}\xrightarrow[x+y\to 1]{} 0$ ok

b) si $F(x,y)$ es una función monótona creciente en cada una de sus variables (separadamente),

5. La función $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$F(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0\le x<1, \quad y\ge 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0\le y<1, \quad x\ge 1 \\ 1 & \text{si } x\ge 1, \ y\ge 1 \\ \sqrt{x+y-1} & \text{si } x<1, \quad y<1, \quad x+y\ge 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Averiguar:

x

$x_1 < x_2 \longrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} < 1$

$\sqrt{y} = \sqrt{y}$

$1 = 1$

$\sqrt{x_1+y-1} < \sqrt{x_2+y-1} < \sqrt{y}$

$0 = 0$

sí

y Igual, sí

c) si $F(x,y)$ es una función de distribución.

① Continua $\Rightarrow$ Continua por la derecha

③ $F(-\infty, y) = 0$ $\quad F(x, -\infty) = 0$ $\quad F(-\infty, -\infty) = 0$

$F(\infty, \infty) = 1$

② $\Delta_a^b F(x,y) = \Delta_{(a_1,a_2)}^{(b_1,b_2)} F(x,y) = \Delta_{a_2}^{b_2} F(b_1,y) - F(a_1,y) =$

$= F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2) = F(1,1) - F(1,\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2},1) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$a_1 = a_2 = 1/2$ $\qquad = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} < 0$ $\quad$ NO

$b_1 = b_2 = 1$

Teoría de la Probabilidad Relación 4 (Noviembre 2020)

1. La variable aleatoria X tiene la función de densidad

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

Calcular la función de densidad de las variables aleatorias

a) $Y = aX - b$, b) $Z = 3X^2 - X$

2. La variable aleatoria (X, Y) tiene la función de densidad

$$f(x,y) = \frac{2}{(2-x-y)^3} \quad \text{en el dominio E,}$$

$$f(x,y) = 0 \quad \text{en el resto del plano.}$$

El dominio E es el cuadrilátero de vértices (0, 0), (1, 0), (2/3, 2/3), (0, 1).

Obtener la función de densidad de la nueva variable aleatoria (U, V) definida por

$$U = \frac{X}{2-X-Y}\ ,\ V = \frac{Y}{2-X-Y}\ .$$

3. La variable aleatoria (X, Y) tiene una distribución discreta con la probabilidad concentrada en el conjunto

$$C = \{(i,j) \in \mathbf{R}^2 : i,j \text{ enteros}, i \geq 1, j \geq 1, i+j \leq n\}$$

y con la función puntual de probabilidad

$$p(i,j) = P(X = i, Y = j) = k(i+j)$$

donde k es una constante. Calcular

a) el valor de k

b) la función puntual de probabilidad de X, $p_1(i)$

c) la función puntual de la distribución de Y condicionada por $X = i$.

4. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x-y) & \text{si } (x,y) \in T \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin T \end{cases}$$

donde $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, calcular:

a) El valor de k.
b) Las funciones de densidad marginales de X e Y.
c) La función de densidad de Y condicionada por $X = x$.
d) La función de distribución de X.
e) La función de distribución de Y condicionada por $X = x$.

1. La variable aleatoria X tiene la función de densidad

$$f_X(x) = 2(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

Calcular la función de densidad de las variables aleatorias

a) $Y = aX - b$, b) $Z = 3X^2 - X$

ⓐ $f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|$

$g(x) = ax - b \longrightarrow h(y) = \frac{y+b}{a} \longrightarrow h'(y) = \frac{1}{a}$

$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+b}{a}\right)\left|\frac{1}{a}\right| = \circledast$

$0 = \frac{y+b}{a} \longrightarrow y = -b$

$1 = \frac{y+b}{a} \longrightarrow y = a-b$

$$\circledast = \begin{cases} 2\left(1-\frac{y+b}{a}\right) I_{(-b,a-b)}(y)\cdot\frac{1}{a} & a>0 \\ 2\left(1-\frac{y+b}{a}\right) I_{(a-b,-b)}(y)\cdot\frac{-1}{a} & a<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-y+b)\, I_{(-b,a-b)}(y), & a>0 \\ \frac{-2}{a^2}(a-y+b)\, I_{(a-b,-b)}(y), & a<0 \end{cases}$$

$$z = 3x^2 - x$$

$$y = g(x) = 3x^2 - x \longrightarrow 3x^2 - x - y = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12y}}{6}$$ pf xD

2. La variable aleatoria (X, Y) tiene la función de densidad

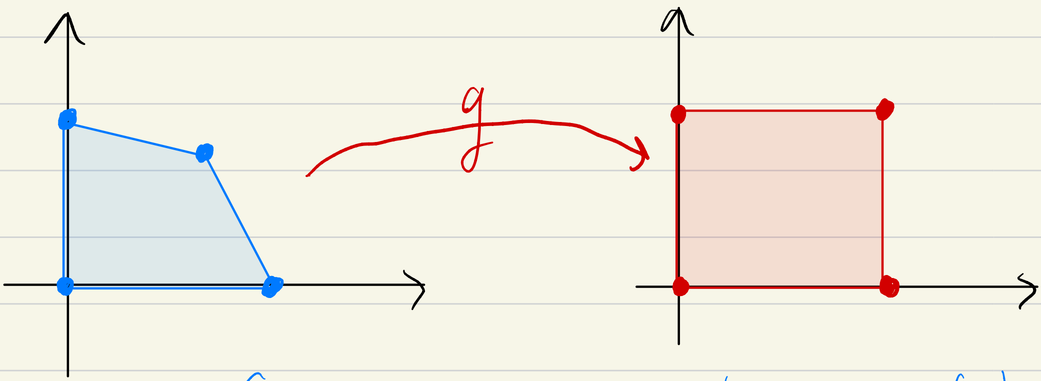
$$f(x,y) = \frac{2}{(2-x-y)^3} \quad \text{en el dominio E,}$$

$$f(x,y) = 0 \quad \text{en el resto del plano.}$$

El dominio E es el cuadrilátero de vértices (0, 0), (1, 0), (2/3, 2/3), (0, 1).

Obtener la función de densidad de la nueva variable aleatoria (U, V) definida por

$$U = \frac{X}{2-X-Y}\ ,\ V = \frac{Y}{2-X-Y}\ .$$



$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} f_{(X,Y)}(h(u,v)) \cdot |J(h(u,v))| & \text{en } g(E) \\ 0 & \text{fuera de } E \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 2-x-y &= \frac{x}{u} \\ 2-x-y &= \frac{y}{v} \end{aligned}\right\} \quad \frac{x}{u} = \frac{y}{v} \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v}$$

$$2-x = \frac{y}{v} + y = y\left(\frac{1}{v}+1\right) = y\left(\frac{1+v}{v}\right)$$

$$y = \frac{(2-x)v}{1+v}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \qquad y = \frac{(2-x)v}{1+v}$$

$$\frac{x(1+v)}{(2-x)\cdot \cancel{v}} = \frac{u}{\cancel{v}} \longrightarrow x(1+v) = u(2-x)$$

$$x(1+v) + ux = 2u \longrightarrow x(1+v+u) = 2u$$

$$x = \frac{2u}{1+v+u}$$

$$y = \frac{\left(2 - \frac{2u}{1+v+u}\right)v}{1+v} = \frac{\frac{2+2v+\cancel{2u}-\cancel{2u}}{1+v+u}\,v}{1+v} = \frac{2v\,\cancel{(1+v)}}{(1+v+u)\,\cancel{(1+v)}} = \frac{2v}{1+v+u}$$

$$h(u,v) = \left(\frac{2u}{1+v+u}, \frac{2v}{1+v+u} \right)$$

$$|J(h)| = \begin{vmatrix} \frac{2(1+v+u)-2u}{(1+v+u)^2} & \frac{-2u}{(1+v+u)^2} \\ \frac{-2v}{(1+v+u)^2} & \frac{2(1+v+u)-2v}{(1+v+u)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2(1+v)}{(1+v+u)^2} & \frac{-2u}{(1+v+u)^2} \\ \frac{-2v}{(1+v+u)^2} & \frac{2(1+u)}{(1+v+u)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4(1+v)(1+u)}{(1+v+u)^4} - \frac{4uv}{(1+v+u)^4} = \frac{4(1+u+v+\cancel{uv}) - \cancel{4uv}}{(1+u+v)^4} = \frac{4}{(1+u+v)^3}$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{2}{\left(2 - \frac{2u}{1+u+v} - \frac{2v}{1+u+v}\right)^3} \cdot \frac{4}{(1+u+v)^3} = \frac{8}{\left(\frac{2+2u+2v-2u-2v}{1+u+v}\right)^3} \cdot \frac{1}{(1+u+v)^3}$$

$$= 1 \quad //$$

3. La variable aleatoria (X, Y) tiene una distribución discreta con la probabilidad concentrada en el conjunto

$$C = \{(i,j) \in \mathbf{R}^2 : i, j \text{ enteros}, i \geq 1, j \geq 1, i+j \leq n\}$$

y con la función puntual de probabilidad

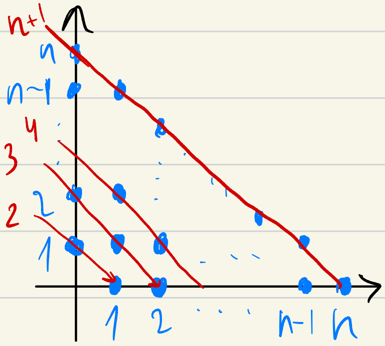
$$p(i,j) = P(X = i, Y = j) = k(i+j)$$

donde k es una constante. Calcular

a) el valor de k

b) la función puntual de probabilidad de X, $p_1(i)$

c) la función puntual de la distribución de Y condicionada por $X = i$.



cantidad $\longrightarrow$ $\text{cant}(m) = m+1$

a)

$$\sum_{(i,j)} p(i,j) = \sum_{(i,j)} k(i+j) \longrightarrow m = (i+j)$$

$$\sum_{m=1}^{n} k \cdot m \cdot \text{cant}(m) = \sum_{m=1}^{n} k \cdot m \cdot (m+1) = k \sum m^2 + m =$$

$$= k \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] = k\, n(n+1) \cdot \frac{2n+1+3}{6} = k\, \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = 1$$

$$\longrightarrow k = \frac{6}{n(n+1)(2n+4)}$$

$n=5 \longrightarrow k = \frac{6}{420} = \frac{1}{70}$ ok

(b)

$$p_1(i) = P(X=i) = \sum_{j=0}^{n-i} p(i,j) = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{6}{n(n+1)(2n+4)}(i+j) =$$

$$= \frac{6}{n(n+1)(2n+4)} \sum_{j=0}^{n-i} i+j = \frac{6}{n(n+1)(2n+4)} \left[n\cdot i + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right] =$$

$$= \frac{3\,\cancel{6}}{n(n+1)(2n+4)} \cdot \frac{\cancel{2ni} + n^2 - \cancel{ni} + n - \cancel{in} + i^2 - i}{\cancel{2}} = \frac{3(n^2+n+i^2-i)}{n(n+1)(2n+4)}$$

(c) Fijado $i \leq n$, entonces

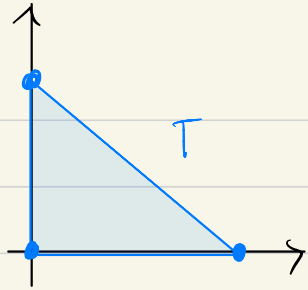
$$p_{2|1}(j|i) = \frac{p(i,j)}{p(i)} = \frac{\frac{6}{\cancel{n(n+1)(2n+4)}}(i+j)}{\frac{3(n^2+n+i^2-i)}{\cancel{n(n+1)(2n+4)}}} = \frac{6(i+j)}{3(n^2+n+i^2-i)}$$

4. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x,y)=\begin{cases} k(1-x-y) & \text{si } (x,y)\in T \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin T \end{cases}$$

donde $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$, calcular:

a) El valor de k.
b) Las funciones de densidad marginales de X e Y.
c) La función de densidad de Y condicionada por $X = x$.
d) La función de distribución de X.
e) La función de distribución de Y condicionada por $X = x$.



a)

$$\int_T f(x,y)\,dx\,dy = 1 \longleftrightarrow \int_0^1\int_0^{1-x} k(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= k\int_0^1\int_0^{1-x} 1-x-y\,dy\,dx = k\int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = k\int_0^1 1-x-x+x^2-\frac{1-2x+x^2}{2}\,dx$$

$$= k\int_0^1 \frac{2-4x+2x^2-1+2x-x^2}{2}\,dx = k\int_0^1 \frac{1-2x+x^2}{2}\,dx = \frac{k}{2}\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{k}{6} = 1 \longrightarrow \boxed{k=6}$$

b)

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} 6(1-x-y)\,dy = 6\cdot\frac{(1-x)^2}{2} = 3(1-x)^2 & x\in[0,1) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

c)

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-x)^2} = \frac{2(1-x-y)}{(1-x)^2}$$

d

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x 3(1-t)^2\,dt = 3\int_0^x 1-2t+t^2\,dt =$$

$$= 3\left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^x = 3\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) = 3x - 3x^2 + x^3 \qquad 0 \le x < 1$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x - 3x^2 + x^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

e

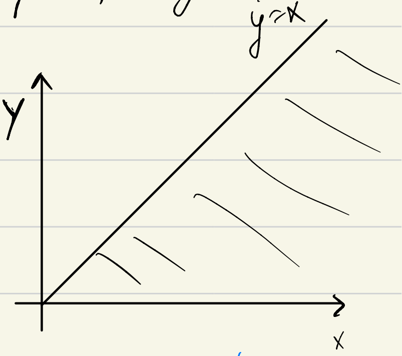
$$F_{2|1}(y|x) = \int_0^y f_{2|1}(t|x)\,dt = \int_0^y \frac{2(1-x-t)}{(1-x)^2}\,dt = \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^y 1-x-t\,dt =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}\left(t - xt - \frac{t^2}{2}\right)_0^y = \frac{2}{(1-x)^2}\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{\cancel{2}}{(1-x)^2} \cdot \frac{2y - 2xy - y^2}{\cancel{2}} = \frac{y(2-2x-y)}{(1-x)^2}$$

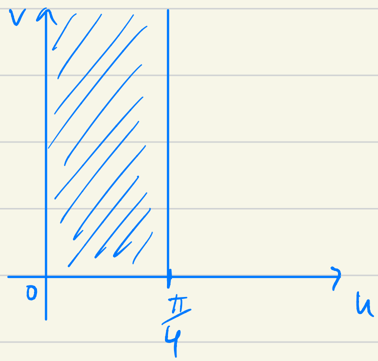
$$0 \le y < 1-x$$

$$F_{2|1}(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y(2-2x-y)}{(1-x)^2} & 0 \le y < 1-x \\ 1 & y \geq 1-x \end{cases}$$

(X,Y) $\quad f(x,y) = k\cdot e^{-x^2-y^2}\cdot I_E(x,y)$ $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x\}$



$$\underbrace{u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad v=\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{polares}}$$



$$\operatorname{tg} u = \frac{y}{x} \longrightarrow \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{y}{x}$$

$$v^2 = x^2+y^2$$

Así,

$$\left.\begin{array}{l} x = v\cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \end{array}\right\}$$

$$|J(h)| = v$$

$$f_{(u,v)}(u,v) = \begin{cases} k\cdot e^{-v^2}\, v & \text{si } (u,v)\in F \\ 0 & (u,v)\notin F \end{cases}$$

$$\boxed{k = \frac{8}{\pi}}$$

$$1 = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\infty} k\, e^{-v^2}\, v \, dv\, du = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{-k}{2}\cdot e^{-v^2}\right]_0^{\infty} du = \int_0^{\pi/4} \frac{k}{2}\, du = \frac{k\cdot\pi}{8}$$

1. 1ª *parte*. En la recta **R** se tiene una distribución de probabilidad que tiene la probabilidad concentrada en el conjunto

$$D = \{i/3^n \in (0,1): \ i \text{ entero}, \ i/3^n \text{ es irreducible}\}$$

(en esta 1ª parte n es un número dado) y la probabilidad P cumple

$$P(\{i/3^n\}) = k \quad \text{para} \quad i/3^n \in D \quad \text{(distribución uniforme en } D)$$

a) Calcular la constante k

b) Calcular el valor de la función de distribución F para $x = 1/3$

2ª *parte* Cambiar D por

$$D = \{i/3^n \in (0,1): \ i \text{ entero}, \ i/3^n \text{ irreducible}, \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

y P por

$P(\{i/3^n\}) = k/6^n$ para $i/3^n \in D$ (la distribución no es uniforme en D)

Contestar a los apartados a) y b) anteriores.

2. Sea (X,Y,Z) una variable aleatoria de dimensión tres con función de densidad dada por $f(x,y,z) = k\, I_C(x,y,z)$ donde

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1, x + y < 1\right\},$$

calcular:

a) el valor de k,
b) las funciones de densidad de las distribuciones marginales,
c) el valor de la función de distribución de la variable (X,Y) en los puntos (1/3, 1/2) y (4/3,1/3),
d) la distribución de X condicionada por $Y = y$.

3. Se tiene en el plano una distribución uniforme en el cuadrado $I = (0,1)\times(0,1)$. Calcular las funciones de distribución y de densidad de la variable aleatoria $X(x,y) = x + y$.

4. Las variables aleatorias X e Y son independientes. La variable X tiene una distribución uniforme en (0,1) y la variable Y tiene una distribución discreta con probabilidades $P(Y=0) = P(Y=1) = 1/2$.
Calcular la función de distribución de $Z = X + Y$.

5. Una distribución en el plano $\mathbf{R}^2$ asigna probabilidad 1/3 al punto $(0,0)$. El resto de la probabilidad está concentrada en el segmento I de extremos $(0,0)$ y

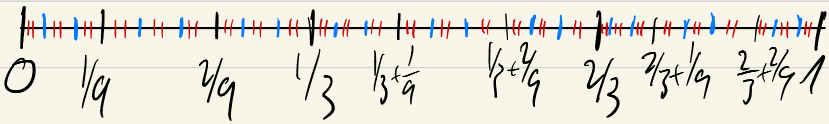
1. 1ª *parte*. En la recta **R** se tiene una distribución de probabilidad que tiene la probabilidad concentrada en el conjunto

$$D = \{i/3^n \in (0,1):\ i \text{ entero},\ i/3^n \text{ es irreducible}\}$$

(en esta 1ª parte n es un número dado) y la probabilidad P cumple

$$P(\{i/3^n\}) = k \quad \text{para} \quad i/3^n \in D \qquad \text{(distribución uniforme en } D\text{)}$$

a) Calcular la constante k



$n=1 \longrightarrow 2$ puntos $\rightarrow 2\cdot 3^0$

$n=2 \longrightarrow 6$ puntos $\rightarrow 2\cdot 3^1$

$n=3 \longrightarrow 18$ puntos $\rightarrow 2\cdot 3^2$

$n=4 \longrightarrow 54$ puntos $\rightarrow 2\cdot 3^3$

$\vdots$

$n \longrightarrow 2\cdot 3^{n-1}$ puntos

$$\sum_{n=1}^{2\cdot 3^{n-1}} k = k\,(2\cdot 3^{n-1}) = 1 \leftrightarrow k = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

a) Calcular la constante k

b) Calcular el valor de la función de distribución F para $x = 1/3$

Entre 0 y 1/3 hay $2\cdot 3^{n-2}$ puntos $n \geq 2$

$\boxed{n=1}$ $F(1/3) = \frac{1}{2}$

$\boxed{n=2}$ $F(1/3) = k\cdot 2\cdot 3^{n-2} = \dfrac{2\cdot 3^{n-2}}{2\cdot 3^{n-1}} = \dfrac{1}{3}$

2ª *parte* Cambiar D por

$$D = \{i/3^n \in (0,1) : \ i \text{ entero}, \ i/3^n \text{ irreducible}, \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

y P por

$P(\{i/3^n\}) = k/6^n$ para $i/3^n \in D$ (la distribución no es uniforme en D)

Contestar a los apartados a) y b) anteriores.

Ahora es

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\frac{i}{3^n}\right\}\right) \cdot \text{cantidad} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{6^n} \cdot 2 \cdot 3^{n-1} =$$

$$= \sum \frac{2K}{2^n \cdot 3^n} 3^{n-1} = \sum \frac{K}{2^{n-1} 3} = \frac{K}{3} \sum \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{K}{3} \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} K = 1 \Leftrightarrow \boxed{K = 3/2}$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3/\cancel{2}}{6^n} \cdot \cancel{2} \cdot 3^{n-2} + P\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{6^n} + \frac{1}{4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n 3^n} + \frac{1}{4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 3} + \frac{1}{4}$$

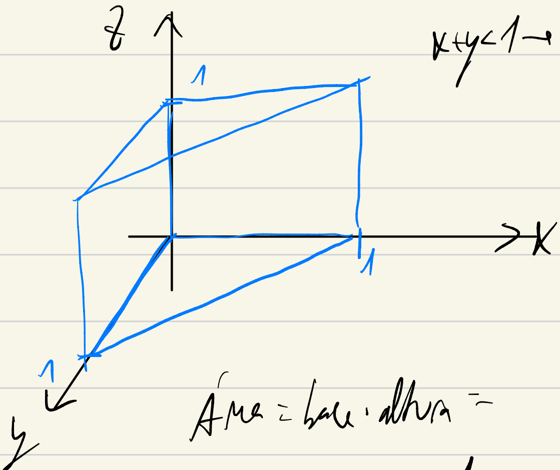
$$= \frac{1}{3} \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

2. Sea (X,Y,Z) una variable aleatoria de dimensión tres con función de densidad dada por $f(x,y,z)=k\, I_C(x,y,z)$ donde

$$C=\left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : 0<x<1, 0<y<1, 0<z<1, x+y<1\right\},$$

calcular:

a) el valor de k,
b) las funciones de densidad de las distribuciones marginales,
c) el valor de la función de distribución de la variable (X,Y) en los puntos (1/3, 1/2) y (4/3,1/3),
d) la distribución de X condicionada por $Y=y$.



$x+y<1 \to x<1-y$

Área = base · altura =

$= \frac{1\cdot 1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

1

$$\int_C k \, dx\,dy\,dz = 1 \to \frac{k}{2}=1 \leftrightarrow \boxed{k=2}$$

2

$$f(x,y,z)=\begin{cases} k & (x,y,z)\in C \\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

$$f_{2,3}(y,z)=\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dx=\begin{cases}\int_0^{1-y} k\,dx = k(1-y)=2(1-y), & y,z\in(0,1)\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

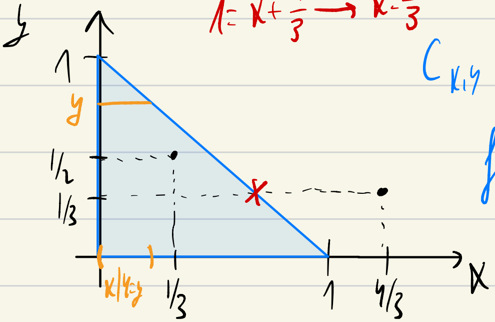
$$\boxed{\int_0^1\int_0^1 2-2y\,dy\,dz = \int_0^1 1\,dz = 1 \quad \text{ok}}$$

$$f_{1,2}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz = \begin{cases} \int_0^1 k\,dz = 2 & \text{si } \begin{matrix} x,y\in(0,1) \\ x+y<1 \end{matrix} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¡Y así con todas!

c)

$1 = x + \frac{1}{3} \longrightarrow x = \frac{2}{3}$



$C_{X,Y} = \{(x,y) : x,y\in(0,1),\ x+y<1\}$

$f(x,y) = 2$

$$F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$F\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{18}\right) = 2\left(\frac{5}{18}\right) = \frac{5}{9}$$

d)

Si $y\notin(0,1) \longrightarrow f_{1|2}(x|Y=y) = 0$

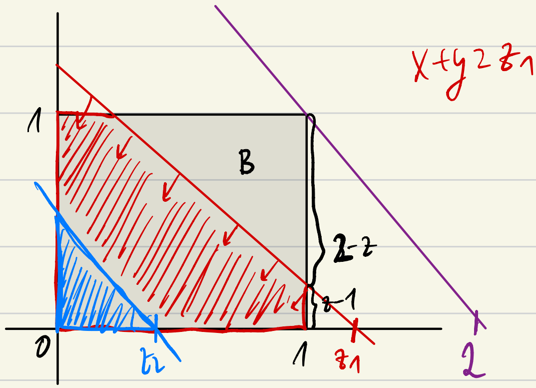
Si $y\in(0,1) \longrightarrow f_{1|2}(x|Y=y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y} & x\in(0,1-y) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$$f_2(y) = \int_0^{1-y} k\,dx = k(1-y) = 2(1-y),\quad y\in(0,1)$$

$$y\in(0,1) \longrightarrow F_{1|2}(x|Y=y) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{1-y} & x\in(0,1-y) \\ 1 & x\geq 1-y \end{cases}$$

3. Se tiene en el plano una distribución uniforme en el cuadrado $I = (0,1)\times(0,1)$. Calcular las funciones de distribución y de densidad de la variable aleatoria $X(x,y) = x + y$.

$F(z) = P(X \leq z) = P(X(x,y) \leq z) = P(x+y \leq z)$



Así, $0<z<1$

$F(z) = \dfrac{z^2}{2}$

$1<z<2$ Área de B

$F(z) = 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2}$

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ \dfrac{z^2}{2} & \text{si } 0\leq z\leq 1 \\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2} & \text{si } 1\leq z\leq 2 \\ 1 & \text{si } z\geq 2 \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \text{ o } z\geq 2 \\ z & \text{si } 0\leq z\leq 1 \\ 2-z & \text{si } 1\leq z\leq 2 \end{cases}$$

4. Las variables aleatorias X e Y son independientes. La variable X tiene una distribución uniforme en $(0,1)$ y la variable Y tiene una distribución discreta con probabilidades $P(Y=0)=P(Y=1)=1/2$.

Calcular la función de distribución de $Z = X + Y$.

$$F_Z(z) = \int F_1(z-x)\, d F_2(x)$$

$$F_Z(z) = \int F_2(z-x)\, d F_1(x)$$

$$f_Z(z) = \int f_1(z-x)\, dF_2(z) = \int I_{(0,1)}(z-x)\, dF_2(z) =$$

$$= I_{(0,1)}(z) \cdot \frac{1}{2} + I_{(0,1)}(z-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(I_{(0,1)}(z) + I_{(0,1)}(z-1)\right) =$$

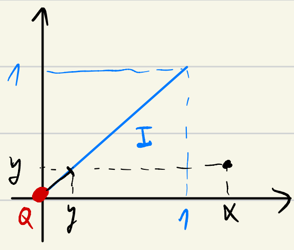
$$0 \le z-1 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le z \le 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_{(0,1)}(z) + I_{(1,2)}(z)\right) = \frac{1}{2} I_{(0,2)}(z)$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } z \in (0,2) \\ 0 & \text{si } z \notin (0,2) \end{cases}$$

5. Una distribución en el plano $\mathbf{R}^2$ asigna probabilidad 1/3 al punto $(0,0)$. El resto de la probabilidad está concentrada en el segmento I de extremos $(0,0)$ y $(1,1)$ de modo que la probabilidad de un subsegmento s de I es proporcional a la longitud de s.

Calcular la función de distribución de esta distribución de probabilidad.



$P(Q) = 1/3$

$P(I) = 2/3$

$\| \quad$

$\left.\begin{matrix} k \cdot \ell(I) = \frac{2}{3} \\ \| \\ k \cdot \sqrt{2} \end{matrix}\right\} k = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \text{ ó } y<0 \\ \frac{1}{3} + \sqrt{2}y\,\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1+2\sqrt{y}}{3} & y \in [0,1],\ x > y \\ \frac{1+2\sqrt{x}}{3} & x \in [0,1],\ y > x \\ 1 & x,y > 1 \end{cases}$$

(1,1) de modo que la probabilidad de un subsegmento s de I es proporcional a la longitud de s.

Calcular la función de distribución de esta distribución de probabilidad.

6. La variable aleatoria X tiene la probabilidad concentrada en el conjunto

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

con las probabilidades

$$P(X = i) = Ci, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Calcular E(X).

7. La variable aleatoria (X, Y) tiene una distribución continua en $\mathbf{R}^2$ con función de densidad

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ke^{-x^2 - y^2}\, I_E(x, y) \quad (k \text{ constante})$$

donde $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x\}$.

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria (U, V) definida por

$$U = arc\,tg\,(Y / X), \qquad V = \sqrt{X^2 + Y^2}\,.$$

Calcular el valor de la constante k.

8. Se tienen 4 cajones numerados con 1, 2, 3, 4 y n objetos a_1, a_2, a_3, . . . , a_n. Se introducen sucesivamente al azar cada uno de los objetos en los cajones. Se pide

I) la probabilidad de que tres cajones queden vacíos (se sobreentiende "tres cajones indeterminados")

II) la probabilidad de que exactamente dos cajones queden vacíos

III) la probabilidad de que exactamente un cajón quede vacío

IV) la probabilidad de que ningún cajón quede vacío

V) el número esperado de cajones que quedan vacíos.

Nota. Se utiliza la abreviatura "el número esperado de . . . " con el significado de "la esperanza matemática del número de . . . "

6. La variable aleatoria X tiene la probabilidad concentrada en el conjunto

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

con las probabilidades

$$P(X = i) = Ci, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Calcular $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i) \cdot i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot C i = C \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= C \cdot \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

7. La variable aleatoria (X, Y) tiene una distribución continua en $\mathbf{R}^2$ con función de densidad

$$f_{(X,Y)}(x,y) = ke^{-x^2-y^2}\, I_E(x,y) \quad (k \ \text{constante})$$

donde $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x\}$.

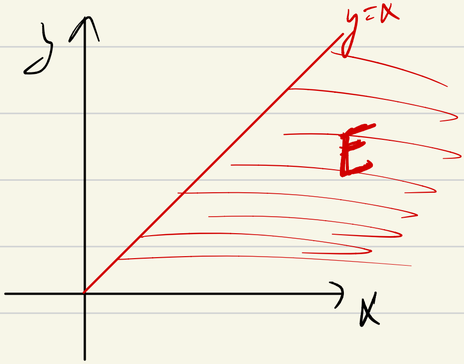
Calcular la función de densidad de la variable aleatoria (U, V) definida por

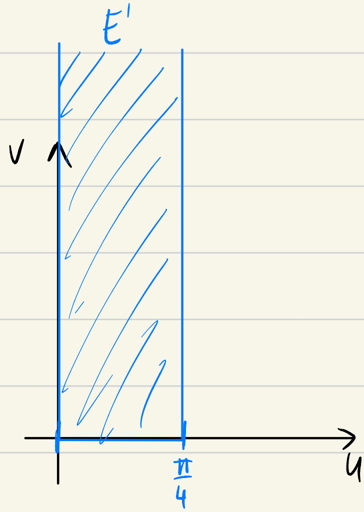
$$U = arctg\,(Y/X), \qquad V = \sqrt{X^2+Y^2}.$$

Calcular el valor de la constante k.

$$tg\, u = \frac{y}{x} \longrightarrow \frac{sen\, u}{cos\, u} = \frac{y}{x} \longrightarrow \left.\begin{matrix} c\, sen\, u = y \\ c\, cos\, u = x \end{matrix}\right\}$$

$$\longrightarrow V = C$$





$$\left.\begin{matrix} x = v\, cos\, u \\ y = v\, sen\, u \end{matrix}\right\}$$

$$|Jh| = \begin{vmatrix} -v\, sen\, u & v\, cos\, u \\ cos\, u & sen\, u \end{vmatrix} = -v$$

$$f_{(u,v)}(u,v) = f_{(x,y)}(h)\,|Jh| = ke^{-v^2}(-v) \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\infty} -kve^{-v^2}\,dv\,du = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} du = k\frac{\pi}{8} = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{k = \frac{8}{\pi}}$$

8. Se tienen 4 cajones numerados con 1, 2, 3, 4 y n objetos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Se introducen sucesivamente al azar cada uno de los objetos en los cajones. Se pide

I) la probabilidad de que tres cajones queden vacíos (se sobreentiende "tres cajones indeterminados")

II) la probabilidad de que exactamente dos cajones queden vacíos

III) la probabilidad de que exactamente un cajón quede vacío

IV) la probabilidad de que ningún cajón quede vacío

V) el número esperado de cajones que quedan vacíos.

Nota. Se utiliza la abreviatura "el número esperado de . . . " con el significado de "la esperanza matemática del número de . . . "

I $\quad P(I) = 4\cdot\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^{n-1}} = P(3)$

II $\quad n \geq 2$

$$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n = \frac{4\cdot 3\cdot 2^n}{2\cdot 4^n} = \frac{3\cdot 2^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{2n-2}} = \frac{3}{2^{n-1}}$$

al menos 2 vacíos

$$P(II) = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{3\cdot 2^{n-1}-1}{4^{n-1}} = P(2)$$

2^{2n-2}

$n \geq 3$

III $\quad \dbinom{4}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3^n}{4^{n-1}} = \dfrac{3^n}{2^{2n-2}}$ al menos 1 vacío

$$P(III) = \frac{3^n}{2^{2n-2}} - \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3^n - 3\cdot 2^{n-1}}{2^{2n-2}} = P(1)$$

IV

Al mns $1 \longrightarrow \dfrac{3^n}{4^{n-1}}$

$$P(IV) = 1 - \frac{3^n}{4^{n-1}} = \frac{4^{n-1} - 3^n}{4^{n-1}} = P(0)$$

V (n≥3)

$$E = \underbrace{0 \cdot P(0)}_{=0} + 1 \cdot P(1) + 2P(2) + 3P(3) + \underbrace{4 \cdot P(4)}_{=0} =$$

$$= \frac{3^n - 3 \cdot 2^{n-1}}{4^{n-1}} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{4^{n-1}} + 3 \cdot \frac{1}{4^{n-1}} =$$

$$= \frac{3^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 2 + 3}{4^{n-1}} =$$

$$= \frac{3^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 1}{4^{n-1}}$$

$n=0 \longrightarrow E = 4$

$n=1 \longrightarrow E = 3$

$n=2 \longrightarrow E = 3 \cdot P(3) + 2 \cdot P(2) =$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4^{n-1}} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{4^{n-1}} =$$

$$= \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2 - 1}{4} =$$

$$= \frac{3 + 10}{4} = \frac{13}{4}$$

$f(x,y,z) = k\, I_C(x,y,z)$

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$