Hoja 3: La ecuación de Laplace

1. (i) Demuestra que $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

   (ii) Demuestra que $u(x) = |x|^{-a}$, $a \neq 0$, es armónica en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, si y sólo si $a = d - 2$.

   (iii) Encuentra todos los polinomios homogéneos armónicos de grado 2 en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué dimensión tiene el correspondiente espacio vectorial? ¿Te atreves con los de grado 3?

2. Encuentra una solución general (en forma de serie trigonométrica) para el problema de Neumann en el disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{D}, \quad \text{con } \nabla u \cdot \mathbf{n}_{|\partial\mathbb{D}} \equiv \varphi$$
   Demuestra en particular, que para que exista solución es necesario que $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi = 0$.

3. Considera la ecuación $\Delta u(x,y) = 0$ en el rectángulo $[0,1] \times [0,L]$, cuando las condiciones de contorno son: lados aislados cuando $x \in \{0,1\}$, temperatura nula si $y = 0$, y temperatura fija $f(x)$ en el lado restante $y = L$.

   a) Escribe las condiciones de contorno en términos de la función $u(x,y)$

   b) Encuentra la solución general de la EDP, dando una fórmula para los coeficientes

   c) Encuentra una solución explícita cuando $f(x) = \mathtt{T}_0 + \mathtt{T}_1 \sin^2(\pi x)$

   d) Esboza con *Maxima* la gráfica de c) cuando $L = 1$, $\mathtt{T}_0 = 20$, $\mathtt{T}_1 = 15$. ¿Sabrías describir qué le ocurre al calor que entra por el lado superior?

4. Considera la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ en un rectángulo infinito $R = [0,1] \times [0,\infty)$, con condiciones de contorno nulas en los lados verticales $u(0,y) = u(1,y) \equiv 0$, con $u(x,0) = f(x)$ y **acotada** cuando $y \to \infty$.

   a) Encuentra una solución general para esta ecuación, y una fórmula para los coeficientes.

   b) Escribe la solución en forma de serie cuando $f(x) = \mathtt{T}_0$.

5. Escribe la EDP y las condiciones de contorno para la temperatura en el equilibrio $u(x,y)$ en una placa rectangular $[0,L] \times [0,M]$ con las siguientes hipótesis: los lados superior e inferior están aislados; por el lado vertical izquierdo entra un flujo constante de calor Φ_0, y por el lado vertical derecho sale un flujo de calor proporcional a la diferencia entre la temperatura interior y exterior, siendo esta última $0^o C$.

   Sugerencia: Ver Churchill-Brown; Ejemplo 24.1.

6. Demuestra que si u es armónica en un anillo $D(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ R_1 < |z| < R_2\} \subset \mathbb{C}$, entonces también son armónicas las rotaciones $R_\psi u$, $\psi \in \mathbb{R}$, definidas por $(R_\psi u)(z) = u(e^{i\psi} z)$.

   Sugerencia: Escribe el laplaciano en coordenadas polares.

7. *Contraejemplo de Zaremba:* Demuestra que el problema de Dirichlet en $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$
$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \quad \text{con } u_{|\partial\mathbb{D}} \equiv 0 \text{ y } u(0) = 1, \tag{Z}$$
   no tiene ninguna solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para ello procede como sigue:

   (i) Demuestra que a lo sumo puede existir una solución, y que es necesariamente radial.

   (ii) Calcula todas las soluciones de la ODE $\quad v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = 0$ si $r \in (0,1)$

   (iii) Utiliza (i) y (ii) para probar que la solución de (Z) no puede ser continua en el origen.

   Sugerencia: En (i) puedes utilizar el ejercicio 6 y el teorema de unicidad

1. (i) Demuestra que $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$u_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \cdot(-1)$$

$$\text{y} \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

(ya el $\log(0)$ no está definido)

(ii) Demuestra que $u(x) = |x|^{-a}$, $a \neq 0$, es armónica en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, si y sólo si $a = d - 2$.

$$u(x) = |x|^{-a} = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}\right)^{-a} = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{-a/2}$$

$$u_{x_i} = -\frac{a}{\cancel{2}}\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-a/2-1} \cdot \cancel{2}x_i = -a x_i \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\frac{-a-2}{2}}$$

$$u_{x_ix_i} = -a\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\frac{-a-2}{2}} + \frac{a(a+2)}{\cancel{2}} x_i \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{\frac{-a-2}{2}-1} \cancel{2}x_i = -a|x|^{-a-2} + a(a+2)x_i^2|x|^{-a-4}$$

$$\Delta u = 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^d u_{x_ix_i} = 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^d -a|x|^{-a-2} + a(a+2)x_i^2|x|^{-a-4} = 0$$

$$\leftrightarrow \sum_1^d a(a+2)x_i^2|x|^{-a-4} = \sum_1^d a|x|^{-a-2} \leftrightarrow \cancel{a}(a+2)\underbrace{|x|^{-a-4}}_{= \cancel{|x|^{-a-2}} \cdot |x|^{-2}} \sum x_i^2 = \cancel{a} \cdot d\, \cancel{|x|^{-a-2}}$$

$$\leftrightarrow (a+2)|x|^{-2}\underbrace{\sum x_i^2}_{= |x|^2} = d \leftrightarrow a+2 = d \leftrightarrow \boxed{a = d-2}$$

(iii) Encuentra todos los polinomios homogéneos armónicos de grado 2 en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué dimensión tiene el correspondiente espacio vectorial? ¿Te atreves con los de grado 3?

$$P(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

$P_x = 2ax + dy + ez \qquad P_{xx} = 2a$

$P_y = 2by + dx + fz \qquad P_{yy} = 2b \qquad \Delta P = 2(a+b+c) = 0 \leftrightarrow a+b+c=0$

$P_z = 2cz + ex + fy \qquad P_{zz} = 2c$

$$\longrightarrow \quad P_A(x,y,z) = ax^2 + by^2 - (a+b)z^2 + dxy + exz + fyz \qquad \text{dim } 5$$

$$Q(x,y,z) = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + fy^2x + gy^2z + hz^2x + iz^2y + jxyz$$

$Q_x = 3ax^2 + 2dxy + 2exz + fy^2 + hz^2 + jyz$

$Q_{xx} = 6ax + 2dy + 2ez$

$Q_y = 3by^2 + dx^2 + 2fyx + 2gyz + iz^2 + jxz$

$Q_{yy} = 6by + 2fx + 2gz$

$Q_z = 3cz^2 + ex^2 + gy^2 + 2hxz + 2izy + jxy$

$Q_{zz} = 6cz + 2hx + 2iy$

$$\Delta Q = 6ax + 2dy + 2ez + 6by + 2fx + 2gz + 6cz + 2hx + 2iy = x(\underbrace{6a+2f+2h}_{0}) + y(\underbrace{6b+2d+2i}_{0}) + z(\underbrace{6c+2e+2g}_{0}) = 0$$

dim 7

2. Encuentra una solución general (en forma de serie trigonométrica) para el problema de Neumann en el disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{D}, \quad \text{con } \nabla u \cdot \mathbf{n}_{|\partial\mathbb{D}} \equiv \varphi$$

Demuestra en particular, que para que exista solución es necesario que $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi = 0$.

$\Delta u(x,y) = 0$

$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \qquad r \in (0,1] \quad \theta \in (0, 2\pi)$

$v_r = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta \longrightarrow v_{rr} = u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\operatorname{sen}^2\theta$

$v_\theta = u_x(-r\operatorname{sen}\theta) + u_y r\cos\theta \longrightarrow v_{\theta\theta} = -r u_x \cos\theta + u_{xx} r^2 \operatorname{sen}^2\theta - r u_y \operatorname{sen}\theta + u_{yy} r^2 \cos^2\theta$

$\frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{rr} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r}(u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta) = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r}(v_r)$

$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0}$

$v(r,\theta) = R(r) \cdot G(\theta)$

$\longrightarrow \frac{1}{r^2} \cdot G'' \cdot R + R'' \cdot G + \frac{1}{r} \cdot R' G = 0 \xrightarrow[\cdot \frac{r^2}{RG}]{} \frac{G''}{G} + \frac{R'' r^2}{R} + \frac{rR'}{R} = 0 \longrightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{G''}{G} = \underset{\rho}{\overset{\shortparallel}{cte}}$

$\longrightarrow r^2 R'' + r R' = \rho R$

$G'' = -\rho G$

$\nabla u \cdot n_{|\partial D} = \varphi$

$\nabla v = (v_r, v_\theta) = (u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta, -r u_x \operatorname{sen}\theta + r u_y \cos\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$

$= Jh \cdot \nabla u$

$\nabla u \cdot n_{|\partial D} = \langle (u_x, u_y), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \rangle = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta = v_r$

$\longrightarrow \boxed{v_r(1,\theta) = \varphi}$

0 sea:

$$① \begin{cases} r^2R''+rR'=\rho R \\ \exists\, R(0^+) \end{cases} \qquad ② \begin{cases} G''=-\rho G \\ G(0)=G(2\pi) \\ G'(0)=G'(2\pi) \end{cases} \qquad ; \quad R'G(1,\theta)=\varphi(\theta)$$

② Vimos que debe ser $\rho=\lambda^2\geq 0$:

$$G''=-\lambda^2 G \longrightarrow G(\theta)=A\cos(\lambda\theta)+B\,\mathrm{sen}(\lambda\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(0)=G(2\pi)\longrightarrow A=A\cos(2\pi\lambda)+B\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda) \\ G'(0)=G'(2\pi)\longrightarrow \cancel{\lambda}B=-\cancel{\lambda}A\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda)+\cancel{\lambda}B\cos(2\pi\lambda) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} (1-\cos(2\pi\lambda))A+B\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda)=0 \\ (1-\cos(2\pi\lambda))B-A\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda)=0 \end{array}\right.$$

$$G'=-\lambda A\,s(\lambda\theta)+\lambda B\,c(\lambda\theta)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\cos(2\pi\lambda) & \mathrm{sen}(2\pi\lambda) \\ -\mathrm{sen}(2\pi\lambda) & 1-\cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det=(1-\cos(2\pi\lambda))^2+\mathrm{sen}^2(2\pi\lambda)=1+\cos^2(2\pi\lambda)-2\cos(2\pi\lambda)+\mathrm{sen}^2(2\pi\lambda)=2-2\cos 2\pi\lambda=2(1-\cos 2\pi\lambda)$$

$$=0 \longleftrightarrow 1-\cos 2\pi\lambda=0 \longleftrightarrow \cos(2\pi\lambda)=0 \longleftrightarrow \lambda\in\mathbb{Z}\longrightarrow \rho=\lambda^2\in\mathbb{N}$$

Y es $G_n(\theta)=A_n\cos(n\theta)+B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)$ $\quad n=0,1,2,\dots$

① $\rho=n^2\longrightarrow r^2R''+rR'=n^2R$

$\boxed{n=0}$ $r^2R''+rR'=0\longrightarrow rR''+R'=0\longrightarrow (r\cdot R')'=0\longrightarrow r\cdot R'=K\longrightarrow R'=\frac{K}{r}\longrightarrow R=\cancel{K\cdot\log r}+B$ $\quad \exists\, R(0^+)$

$\boxed{n>0}$ $r^2R''+rR'=n^2R$ $\qquad$ Soluciones r^γ

$$r^2\cdot\gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2}+r\gamma r^{\gamma-1}=n^2r^\gamma\longleftrightarrow \gamma(\gamma-1)\cancel{r^\gamma}+\gamma\cancel{r^\gamma}=n^2\cancel{r^\gamma}\longrightarrow \gamma(\gamma-1)+\gamma=n^2\longrightarrow\gamma(\gamma-1+1)=n^2\longrightarrow\gamma^2=n^2\longrightarrow\gamma=\pm n$$

$$\longrightarrow R(r)=Ar^n+B\,\cancel{r^{-n}}\longrightarrow R_n(r)=B_n\cdot r^n$$
$\exists\, R(0^+)$

0 sea:

$$v(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(A_n\cos(n\theta)+B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\right)$$

$$v_r=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}(\dots)\longrightarrow \varphi(\theta)=v_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(A_n\cos(n\theta)+B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\right)$$

Rebe ur $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ $\varphi(\theta) = v_r(1,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\right)$

$$\int_{\partial D} \varphi = \int_{\partial D} v_r(1,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\right) d\theta = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} n\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\right) d\theta =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot 0 = 0$$

$$n\int_0^{2\pi} A\cos(n\theta) + B\operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta = \cancel{n}\cdot\left[A\cdot\cancel{\tfrac{1}{n}}\operatorname{sen}(n\theta) - B\cdot\cancel{\tfrac{1}{n}}\cos(n\theta)\right]_0^{2\pi} = A\operatorname{sen}(2\pi n) - B\cos(2\pi n) - A\operatorname{sen}(0) + B\cos(0)$$

$$= 0 - B - 0 + B = 0$$

4. Considera la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ en un rectángulo infinito $R = [0,1] \times [0,\infty)$, con condiciones de contorno nulas en los lados verticales $u(0,y) = u(1,y) \equiv 0$, con $u(x,0) = f(x)$ y **acotada** cuando $y \to \infty$.

a) Encuentra una solución general para esta ecuación, y una fórmula para los coeficientes.

b) Escribe la solución en forma de serie cuando $f(x) = T_0$.

a)
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in [0,1] \times [0,\infty) \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \lim\limits_{y\to\infty} |u(x,y)| \le M < \infty \end{cases}$$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\Delta u = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \longrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = cte \equiv \rho$$

1 $\begin{cases} X'' = \rho X \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$

2 $Y'' = -\rho Y$

$\lim\limits_{y\to\infty} |Y(y)| \le M$

- caso $\rho = \alpha^2 > 0 \rightarrow \equiv 0$ #
- caso $\rho = 0 \rightarrow \equiv 0$ #
- caso $\rho = -\alpha^2 < 0 \rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

$X(0) = A = 0$

$X(1) = B\sin(\alpha) = 0 \underset{B\neq 0}{\longleftrightarrow} \alpha = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \alpha_n = n\pi \rightarrow \rho_n = -n^2\pi^2$

$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x) \qquad n = 1, 2, \ldots$

② $\begin{cases} Y'' = n^2\pi^2 Y \\ \lim_{y\to\infty} |Y(y)| \leq M \end{cases}$

$Y(y) = Ae^{-n\pi y} + Be^{n\pi y}$

$\lim_{y\to\infty} |Y(y)| \leq M \to \underline{B=0}$

Así, la solución general es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi y} \cdot \operatorname{sen}(n\pi x)$$

A por los coeficientes:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}(n\pi x)$$

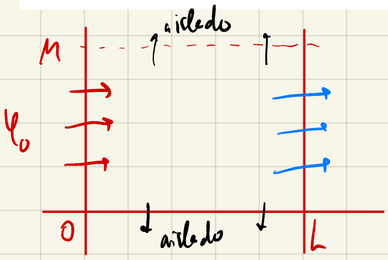
$$\to b_n = 2\int_0^1 f(x) \cdot \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx \qquad \forall n \geq 1$$

ⓑ $f(x) = T_0$

$$b_n = 2\int_0^1 T_0 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = 2T_0 \cdot \frac{-1}{n\pi} \cdot \cos(n\pi x)\Big]_0^1 = \frac{-2T_0}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4T_0}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4T_0}{(2m-1)\pi} e^{-(2m-1)\pi y} \cdot \operatorname{sen}((2m-1)\pi x)}$$

5. Escribe la EDP y las condiciones de contorno para la temperatura en el equilibrio $u(x, y)$ en una placa rectangular $[0, L] \times [0, M]$ con las siguientes hipótesis: los lados superior e inferior están aislados; por el lado vertical izquierdo entra un flujo constante de calor Φ_0, y por el lado vertical derecho sale un flujo de calor proporcional a la diferencia entre la temperatura interior y exterior, siendo esta última $0^{o}C$.



$\nabla u \cdot \vec{n} = (u_x(x,M), u_y(x,M))(0,1) = u_y(x,M) = 0$

$\nabla u \cdot \vec{n} = (u_x(x,0), u_y(x,0))(0,-1) = -u_y(x,0) = 0$

$-K \nabla u \cdot \vec{n} = -\varphi_0 \Rightarrow -K(u_x(0,y), u_y(0,y))(-1,0) = -\varphi_0$

$u_x(0,y) = \frac{-\varphi_0}{K}$

$-K \nabla u \cdot \vec{n} = \gamma(u-0) \rightarrow -K(u_x(L,y), u_y(L,y)) \cdot (1,0) = \gamma u \rightarrow u_x(L,y) = -\frac{\gamma}{K} u(L,y)$

6. Demuestra que si u es armónica en un anillo $D(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\} \subset \mathbb{C}$, entonces también son armónicas las rotaciones $R_\psi u$, $\psi \in \mathbb{R}$, definidas por $(R_\psi u)(z) = u(e^{i\psi} z)$.

$z = re^{i\theta}$

$v(r,\theta) = u(r \cdot e^{i\theta}) \longrightarrow R_\psi v(r,\theta) = u(e^{i\psi} \cdot re^{i\theta}) = u(re^{i(\psi+\theta)}) = v(r, \psi+\theta)$

$u \in Har(D) \longrightarrow v \in Har(D) \longrightarrow v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r = 0$

$(R_\psi v)_r = v_r \qquad (R_\psi v)_{rr} = v_{rr} \qquad (R_\psi v)_\theta = v_\theta \qquad (R_\psi v)_{\theta\theta} = v_{\theta\theta}$ $\qquad$ ok

7. *Contraejemplo de Zaremba:* Demuestra que el problema de Dirichlet en $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \qquad \text{con } u_{|\partial\mathbb{D}} \equiv 0 \text{ y } u(0) = 1,$$

no tiene ninguna solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para ello procede como sigue:

(i) Demuestra que a lo sumo puede existir una solución, y que es necesariamente radial.

(ii) Calcula todas las soluciones de la ODE $\quad v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 0$ si $r \in (0, 1)$

(iii) Utiliza (i) y (ii) para probar que la solución de (Z) no puede ser continua en el origen.

- Por el teorema de unicidad de PD, hay, a lo sumo, una solución. Además, por el ejercicio 6, cualquier rotación de $\Omega = D(0,1)$ es también solución. Por tanto, en caso de existir, la solución debe ser invariante por rotaciones

- $v'' + \frac{1}{r}v' = 0 \to v'' = -\frac{1}{r}v' \to f' = -\frac{1}{r}f \to f(r) = r^{\alpha} \to f'(r) = \alpha \cdot r^{\alpha-1} = -\frac{1}{r}r^{\alpha} = -r^{\alpha-1}$

$\Updownarrow$

$\alpha = -1$

$\to v'(r) = \frac{1}{r} \to v(r) = \log(r) + K$

- Como u debe ser radial $\to u_\theta = u_{\theta\theta} = 0$

y u verifica $u(r,\theta) = u(r)$ y $\quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u'' + \frac{1}{r}u'$

Por tanto, $u(r) = \log(r) + K \quad$ y $\quad \lim_{r\to 0} u = -\infty$

8. Demuestra que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de la EDP indicada si y sólo si

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w),$$

donde el funcional de energía E aparece indicado, y debes determinar quién es la clase $\mathcal{A}$

a) *Ecuación de Poisson* $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu$

b) *Problema de Neumann* $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} \varphi u$

9. Sea $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y $\mathcal{A}_\varphi = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \ : \ u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$. Demuestra que $u \in \mathcal{A}_\varphi$ cumple

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}_\varphi} E(w), \quad \text{con} \quad E(w) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla w|^2},$$

si y sólo si $u(x)$ cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Sugerencia: para el recíproco, trata de probar, con la notación de clase, que $I(t)$ cumple $I'(0) = 0$ e $I''(t) \geq 0$, y por tanto que tiene un mínimo global en $t = 0$.

10. Sea $1 < p < \infty$ y sea $\mathcal{A}_\varphi$ como en el ejercicio anterior. Determina qué EDP corresponde a minimizar el funcional de energía

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p, \quad u \in \mathcal{A}.$$

11. Sea Ω un dominio de clase C^1. Si $u \in \mathcal{H}ar(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ demuestra que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

Sugerencia: utiliza la primera fórmula de Green con una función v adecuada.

Ejercicios opcionales:

12. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluciones respectivas de

$$\begin{cases} \Delta u_1 = F_1 & \text{en } \Omega \\ u_1|_{\partial\Omega} = \varphi_1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = F_2 & \text{en } \Omega \\ u_2|_{\partial\Omega} = \varphi_2 \end{cases}$$

Demuestra que se tiene la siguiente estimación de regularidad

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + c_\Omega \|F_1 - F_2\|_{L^\infty(\Omega)},$$

donde c_Ω es una constante positiva.

Sugerencia: aplica el principio del máximo a $v(x) := u_1(x) - u_2(x) + \frac{M|x|^2}{2n}$, donde $M = \|F_1 - F_2\|_\infty$.

8. Demuestra que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de la EDP indicada si y sólo si

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w),$$

donde el funcional de energía E aparece indicado, y debes determinar quién es la clase $\mathcal{A}$

a) *Ecuación de Poisson* $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $\quad E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu$

b) *Problema de Neumann* $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $\quad E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} \varphi u$

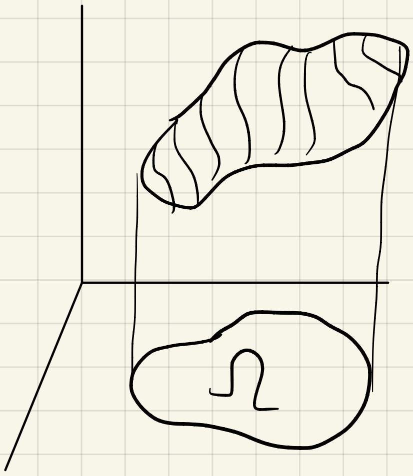
a)

9. Sea $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y $\mathcal{A}_\varphi = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \ : \ u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$. Demuestra que $u \in \mathcal{A}_\varphi$ cumple

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}_\varphi} E(w), \quad \text{con} \quad E(w) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla w|^2},$$

si y sólo si $u(x)$ cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$



$\boxed{\Rightarrow}$

Tomo $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ y defino $I(t) = E(\underbrace{u+t\psi}_{\in \mathcal{A}_\varphi})$, $t \in \mathbb{R}$

Como $I(0) \le I(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow I'(0) = 0$

$$\to 0 = I'(0) = \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla(u+t\psi)|^2}\right]\Bigg|_{t=0} = \left[\int_\Omega \frac{\cancel{2}\cancel{|\nabla(u+t\psi)|}}{\cancel{2}\sqrt{1+|\nabla(u+t\psi)|^2}} \cdot \frac{\nabla(u+t\psi)}{\cancel{|\nabla(u+t\psi)|}} \cdot \nabla\psi\right]_{t=0}$$

$$= \int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \overset{\text{Green}}{=} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\nabla u \cdot \vec{n}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\psi}_{0 \text{ porque } \operatorname{sop}\psi \subseteq \Omega \text{ compacto}} - \int \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)\psi = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\to \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \text{ en } \Omega$$

Supongamos $u \in A_\varphi \ / \ \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0$

entonces

$$E(u)=\min_{w\in A_\varphi} E(w)$$

Cojo $w\in A_\varphi \ \overset{?}{\Rightarrow}$ ¿? $E(w)\geq E(u)$

Llamamos $\psi = w-u \in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega) \ / \ \psi|_{\partial\Omega}\equiv 0$

Llamamos $I(t)=E(u+t\psi)$ y veamos que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ I'(0)=0 \\ \bullet\ I''(t)\geq 0 \end{array}\right\} \ I(0)\leq I(t), \ \forall t\in\mathbb{R}$$

$$I'(t)=\int_\Omega \frac{\nabla(u+t\psi)\cdot\nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla(u+t\psi)|^2}}$$

$$I'(0)=\int_\Omega \frac{\nabla u\cdot\nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \int_{\partial\Omega} \overset{0}{\cancel{\frac{\nabla u\cdot n}{\sqrt{\cdots}}\psi}} - \int_\Omega \operatorname{div}\overset{0}{\cancel{\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)}}\psi = 0$$

$\psi\equiv 0$ en $\partial\Omega$

$$I''(t)=\int_\Omega \frac{\nabla\psi\cdot\nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla(u+t\psi)|^2}} - \frac{1}{2}\frac{\nabla(u+t\psi)\cdot\nabla\psi}{(1+|\nabla(u+t\psi)|^2)^{3/2}}\cdot 2\cancel{|\nabla(u+t\psi)|}\frac{\nabla(u+t\psi)}{\cancel{|\nabla(u+t\psi)|}}\cdot\nabla\psi$$

$$=\int_\Omega \frac{|\nabla\psi|^2+|\nabla\psi|^2|\nabla(u+t\psi)|^2-(\nabla(u+t\psi)\cdot\nabla\psi)^2}{\underbrace{(1+|\nabla(u+t\psi)|^2)^{3/2}}_{>0}}$$

Usando desigualdad de Cauchy-Schwartz : $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Entonces $(\nabla(u+t\psi)\cdot\nabla\psi)^2\leq|\nabla(u+t\psi)|^2|\nabla\psi|^2$ y $I''(t)\geq 0$

10. Sea $1 < p < \infty$ y sea $\mathcal{A}_\varphi$ como en el ejercicio anterior. Determina qué EDP corresponde a minimizar el funcional de energía

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p, \quad u \in \mathcal{A}.$$

Tomo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow I(t) = E(u+t\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow I(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^p$

Como $\underset{\underset{E(u)}{\shortparallel}}{I(0)} \leq I(t) \rightarrow I'(0) = 0$

$$0 = I'(0) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^p\right]_{t=0} = \left[\cancel{\frac{1}{p}}\int_\Omega \cancel{p}\, |\nabla(u+t\varphi)|^{p-1} \frac{\nabla(u+t\varphi)}{|\nabla(u+t\varphi)|}\cdot\nabla\varphi\right]_{t=0}$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\cdot\nabla\varphi = \cancel{\int_{\partial\Omega} \cdots} - \int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\,\varphi$$

$\Downarrow$

$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$ en Ω

¿Recíproco?