Tarea 8: Superficie Reglada

Jose Antonio Lorencio Abril

a)

Para calcular N, debemos obtener X_s y X_t. Voy a llamar $k = k_\beta,\ n = N_\beta$ y $T = T_\beta$ por simplificar la notación.

$$X_s = \beta'(s) + t\left(cos\varphi \cdot n' + sen\varphi\left[T' \wedge n + T \wedge n'\right]\right) = \beta'(s) + t\left(-kTcos\varphi + sen\varphi\left[kn \wedge n - kT \wedge T\right]\right) =$$

$$= \beta'(s) - tkTcos\varphi = T - tkTcos\varphi = T(1 - tkcos\varphi)$$

$$X_t = cos\varphi \cdot n + sen\varphi \cdot u$$

Y se tiene que

$$X_s \wedge X_t = (1 - tkcos\varphi)\left[T \wedge cos\varphi n + T \wedge sen\varphi u\right] = (1 - tkcos\varphi)(cos\varphi u - sen\varphi n)$$

esta última igualdad se debe a que

$$T \wedge cos\varphi n = cos\varphi T \wedge n = cos\varphi u$$

$$T \wedge sen\varphi u = sen\varphi T \wedge u = sen\varphi T \wedge (T \wedge n) = sen\varphi(-n) = -sen\varphi n$$

Calculamos su módulo:

$$\|X_s \wedge X_t\| \overset{*}{=} |1 - tkcos\varphi| \sqrt{cos^2\varphi\, \|u\|^2 + sen^2\, \|n\|^2} \overset{**}{=} |1 - tkcos\varphi|$$

$*$: porque $u \perp n$

$**$: porque $\|u\| = \|n\| = 1$

Ahora bien,

$$1 - tkcos\varphi > 0 \iff tkcos\varphi < 1$$

$$1 - tkcos\varphi < 0 \iff tkcos\varphi > 1$$

Entonces

$$N = \frac{X_s \wedge X_t}{\|X_s \wedge X_t\|} = \frac{(1 - tkcos\varphi)}{|1 - tkcos\varphi|}(cos\varphi \cdot u - sen\varphi \cdot n) = \begin{cases} cos\varphi \cdot u - sen\varphi \cdot n & si\ t \cdot k(s) \cdot cos\varphi < 1 \\ -cos\varphi \cdot u + sen\varphi \cdot n & si\ t \cdot k(s) \cdot cos\varphi > 1 \end{cases}$$

En el caso que falta, se tiene

$$t \cdot k(s) \cdot cos\varphi = 1 \implies X_s = 0$$

luego X no es una parametrización en ese caso.

b)

$E = \|X_s\|^2 = (1 - tkcos\varphi)^2$

$F = 0$, porque $\langle T, n\rangle = 0$ y $\langle T, u\rangle = 0$

$G = cos^2\varphi \|n\|^2 + sen^2\varphi \|u\|^2 = 1$

Y

$$\sqrt{EG - F^2} = |1 - tkcos\varphi|$$

Por otro lado,

$$X_{ss} = kn\,(1 - tkcos\varphi) - T\left(tk'cos\varphi\right)$$

$$X_{st} = -Tkcos\varphi$$

$$X_{tt} = 0$$

de modo que

$$e = \langle N, X_{ss}\rangle = \left\langle cos\varphi \cdot u - sen\varphi \cdot n, kn\,(1 - tkcos\varphi) - T\left(tk'cos\varphi\right)\right\rangle \overset{*}{=}$$

$$= -sen\varphi \cdot k\,(1 - tkcos\varphi)\,\langle n, n\rangle + sen\varphi \cdot t \cdot cos\varphi \cdot k'\,\langle n, T\rangle = -k \cdot sen\varphi\,(1 - tkcos\varphi)$$

donde $*$ se debe a que $\langle u, n\rangle = \langle u, T\rangle = 0$.

$$f = \langle n, X_{st}\rangle = \langle cos\varphi \cdot u - sen\varphi \cdot n, -Tkcos\varphi\rangle = 0$$

$$g = \langle n, X_{tt}\rangle = \langle n, 0\rangle = 0$$

De modo que, para ver la curvatura de Gauss

$$eg - f^2 = 0 \implies K = 0$$

Y para la curvatura media

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{e}{2\,(EG - F^2)} = \frac{-k \cdot sen\varphi\,(1 - tkcos\varphi)}{2\,(1 - tkcos\varphi)^2} = \frac{-ksen\varphi}{2\,|1 - tkcos\varphi|}$$

Por lo tanto, tenemos que un punto $X\,(s, t)$ será:

$$\begin{cases} parabólico & si\ \varphi \neq 0\ y\ k\,(s) \neq 0 \\ plano & si\ \varphi = 0\ ó\ k\,(s) = 0 \end{cases}$$

valores obtenidos al igualar H a 0, para ver cuándo se anulan ambas curvaturas principales (puntos planos) y cuando una de las dos no se anula (puntos parabólicos).

c)

Cuando los puntos no son umbilicales ($H \neq 0$) y como β es la curva coordenada

$$\beta\,(s) = X\,(s, 0)$$

entonces β será línea de curvatura si, y solo si, $F = f \equiv 0$ (ejercicio 3.13). Como, efectivamente, $F = f \equiv 0$, β es línea de curvatura.

Ahora bien, en los puntos umbilicales, o sea, cuando $H = K = 0$, tenemos en este caso que las curvaturas principales son $k_1 = k_2 = 0$, luego

$$\frac{d}{ds} N_{\beta(s)} = \frac{d}{ds} \left(cos\varphi \cdot u - sen\varphi \cdot n \right) = \frac{d}{ds} \left(cos\varphi \cdot (T \wedge n) - sen\varphi \cdot n \right) = cos\varphi \left(T' \wedge n + T \wedge n' \right) - sen\varphi n' =$$

$$= cos\varphi \left(kn \wedge n + T \wedge Tk \right) + ksen\varphi T = ksen\varphi T = \lambda \beta' (s) , \qquad \lambda \; cte$$

Luego, en este caso, también es línea de curvatura.

Para ver si es una curva asintótica, tenemos en cuenta que $\beta(s) = X(s, 0) \implies \beta'(s) = X_s(s, 0)$, y hacemos

$$\mathrm{II}_{\beta(s)} \left(\beta'(s) \right) = \mathrm{II}_{\beta(s)} \left(X_s(x, 0) \right) = e(s, 0) = -k(s) \, sen\varphi$$

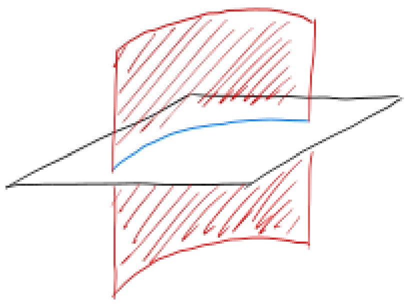
Por lo que será asintótica si $k(s) \equiv 0$, es decir, β es una recta, o si $\varphi = 0$.

d)

Cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$, obtenemos la superficie

$$X(s, t) = \beta(s) + tu(s)$$

Que es una superficie isométrica a un plano, porque $E = 1 = G, \; F = 0$, que son los coeficientes de la primera forma fundamental de un plano. Y es algo así:



Y cuando $\varphi = 0$, obtenemos

$$X(s, t) = \beta(s) + tn(s)$$

con curvatura $K = 0$ y curvatura media $H = 0$, está contenida en el plano de la curva. Con una forma similar a la siguiente figura: