Geometría de curvas y superficies – Tarea 08

Sea $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ una curva plana, parametrizada por el arco, con curvatura κ_β y diedro de Frenet $\{T_\beta, N_\beta\}$. Denotamos por $\mathbf{u}$ el vector unitario ortogonal al plano que contiene β, es decir, $\mathbf{u} = (T_\beta \wedge N_\beta)(s)$. Fijado un ángulo $\varphi \in [0, \pi/2]$, la superficie hélice S_φ construida sobre β es la superficie reglada parametrizada como sigue:

$$X(s,t) = \beta(s) + t\big(\cos\varphi\, N_\beta(s) + \operatorname{sen}\varphi\, \mathbf{u}\big).$$

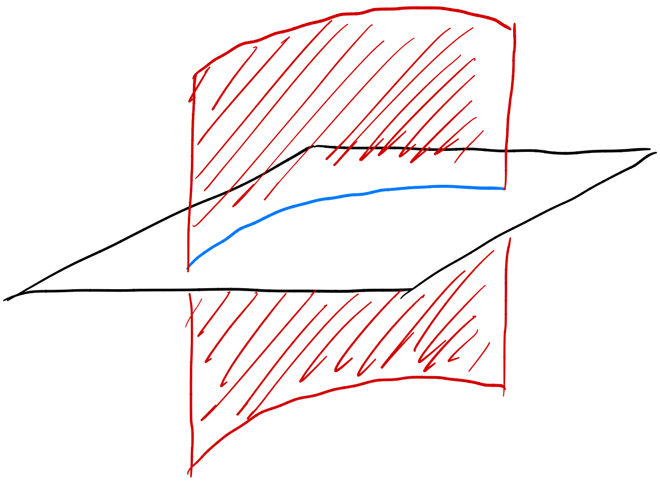
a) Determina el campo de vectores $N(s,t)$ unitario y normal a la superficie hélice.

b) Calcula la curvatura de Gauss y la curvatura media. Clasifica sus puntos.

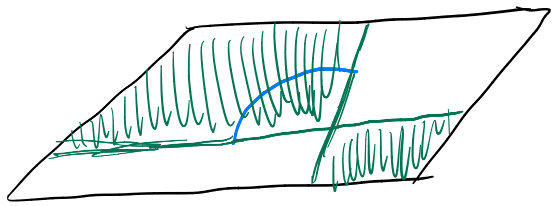
c) La curva β, como curva que es de S_φ, a) ¿es línea de curvatura?, b) ¿es curva asintótica?

d) ¿Qué tipo de superficie se obtiene cuando $\varphi = \pi/2$? ¿Y cuando $\varphi = 0$?

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\varphi = 0$



Departamento de Matemáticas, Facultad de Matemáticas

Campus Universitario de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia

T. 86888 4173 – F. 86888 4182 – plucas@um.es – www.um.es/matematicas/

$$X(s,t) = \beta(s) + t\big(\cos\varphi\, N_\beta(s) + \operatorname{sen}\varphi\, \mathbf{u}\big).$$

a) Determina el campo de vectores $N(s,t)$ unitario y normal a la superficie hélice.

$$N(s,t) = \frac{X_s \wedge X_t}{\| X_s \wedge X_t \|}$$

$$X_s = \beta'(s) + t\left(\cos\varphi\, N_\beta'(s) + \operatorname{sen}\varphi\left[T_\beta' \wedge N_\beta + T_\beta \wedge N_\beta'\right]\right)$$

$$= \beta'(s) + t\left(-\cos\varphi\, \beta'(s)\kappa_\beta + \operatorname{sen}\varphi\left[\kappa_\beta \underbrace{N_\beta \wedge N_\beta}_{0} - \underbrace{T_\beta \wedge \kappa_\beta T_\beta}_{0}\right]\right)$$

$$= \beta'(s)\left(1 - t\cos\varphi\, \kappa_\beta\right) = T_\beta(s)\left(1 - t\cos\varphi\, \kappa_\beta\right)$$

$$X_t = \cos\varphi\, N_\beta(s) + \operatorname{sen}\varphi \cdot u$$

$$X_s \wedge X_t = \left(1 - t\cos\varphi\, \kappa_\beta\right)\Big[\underbrace{T_\beta \wedge \cos\varphi\, N_\beta(s)}_{\cos\varphi \cdot u} + \underbrace{T_\beta \wedge \operatorname{sen}\varphi \cdot u}_{-\operatorname{sen}\varphi \cdot N_\beta}\Big]$$

$$= \left(1 - t\cos\varphi \cdot \kappa_\beta\right)\left(\cos\varphi\, u - \operatorname{sen}\varphi \cdot N_\beta\right)$$

$$\| X_s \wedge X_t \| \underset{u \perp N_\beta}{=} \left|1 - t\cos\varphi \cdot \kappa_\beta\right| \sqrt{\underbrace{\cos^2\varphi \underset{1}{\|u\|^2} + \operatorname{sen}^2\varphi \underset{1}{\|N_\beta\|^2}}_{=1}} = \left|1 - t\cos\varphi \cdot \kappa_\beta\right|$$

Así,

$$N(s,t) = \frac{\cancel{(1-t\cos\varphi\, k_\beta)}(\cos\varphi u - \operatorname{sen}\varphi N_\beta)}{\cancel{|1-t\cos\varphi\, k_\beta|}} = \pm(\cos\varphi\cdot u - \operatorname{sen}\varphi\cdot N_\beta)$$

b) Calcula la curvatura de Gauss y la curvatura media. Clasifica sus puntos.

$$X_s = T_\beta(1 - t\cos\varphi\cdot k_\beta)$$

$$X_t = \cos\varphi\cdot N_\beta + \operatorname{sen}\varphi\, u$$

$$X_{ss} = k_\beta N_\beta(1-t\cos\varphi\, k_\beta) - T_\beta(t\cos\varphi\cdot k'_\beta)$$

$$X_{st} = -T_\beta\cos\varphi\cdot k_\beta$$

$$X_{tt} = 0$$

$$E = \|X_s\|^2 = (1 - t\cos\varphi\cdot k_\beta)^2$$

$F = 0$ porque $T_\beta N_\beta = 0$ y $T_\beta u = 0$

$$G = \cos^2\varphi\|N_\beta\|^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\|u\|^2 = 1$$

$$\sqrt{EG-F^2} = |1-t\cos\varphi\, k_\beta|$$

$$e = \langle N, X_{ss}\rangle = \langle \cos\varphi u - \operatorname{sen}\varphi N_\beta,\ k_\beta N_\beta(1-t\cos\varphi\, k_\beta) - T_\beta(t\cos\varphi\, k')\rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ uN=0\\ uT=0}}{=} -\operatorname{sen}\varphi\, k_\beta(1-t\cos\varphi\, k_\beta)\underbrace{\langle N_\beta, N_\beta\rangle}_{1} + \operatorname{sen}\varphi\, t\cos\varphi\, k'\underbrace{\langle N_\beta, T_\beta\rangle}_{0} =$$

$$= -\operatorname{sen}\varphi\cdot k_\beta\cdot(1-t\cos\varphi\cdot k_\beta)$$

$$f = \langle N, X_{st} \rangle = \langle \cos\varphi\, u - \operatorname{sen}\varphi\, N_\beta, -T_\beta \cos\varphi\, k_\beta \rangle =$$

$$= 0$$

$$g = \langle N, X_{tt} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0$$

$$eg - f^2 = 0 \longrightarrow \boxed{K = 0}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{e}{2(EG - F^2)} = \frac{-\operatorname{sen}\varphi \cdot k_\beta \cdot \cancel{(1 - t\cos\varphi \cdot k_\beta)}}{2\,(1 - t\cos\varphi\, k_\beta)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{-\operatorname{sen}\varphi \cdot k_\beta}{2\,|1 - t\cos\varphi\, k_\beta|}}$$

Así, si $\operatorname{sen}\varphi \neq 0 \longleftrightarrow \varphi \neq 0$ y $k_\beta \neq 0$ $\Big] \longrightarrow$ todos los puntos son parabólicos

Si $\operatorname{sen}\varphi = 0$ ó $k_\beta = 0$ $\Big] \longrightarrow$ todos los puntos son planos

$\Updownarrow$

$\varphi = 0$

c) La curva β, como curva que es de S_φ, a) ¿es línea de curvatura?, b) ¿es curva asintótica?

a)

Los puntos no son umbilicales,
y β es la curva coordenada

$$\beta(s) = X(s,0)$$

entonces β será línea de curvatura sii $F = f \equiv 0$

y, efectivamente, $F = f = 0$ //

b)

$$\beta(s) = X(s,0) \longrightarrow \beta'(s) = X_s(s,0)$$

$$II_{\beta(s)}(\beta'(s)) = II_{\beta(s)}(X_s(s,0)) = e(s,0) = -\operatorname{sen}\varphi \cdot k_\beta$$

por lo que será asintótica si $k_\beta = 0$ (β es una recta)

o $\varphi = 0$