Teoremas de Ascoli

Jose Antonio Lorencio Abril

Necesitamos bastantes definiciones previas:

Definition 0.1. Si X es un conjunto, denotamos por Δ la diagonal $\{(x,x)\,|x\in X\}\subset X\times X$.
Si $U,V\subset X\times X$, entonces $U\circ V=\{(x,y)\,|\exists z:(x,z)\in V,(z,y)\in U\}$
Una **uniformidad diagonal** en un conjunto X es una colección $\mathcal{D}(X)$ de subconjuntos de $X\times X$, llamados **alrededores**, que satisfacen:

1. $D\in\mathcal{D}\implies\Delta\subset D$
2. $D_1,D_2\in\mathcal{D}\implies D_1\cap D_2\in\mathcal{D}$
3. $D\in\mathcal{D}\implies\exists E\in\mathcal{D}:E\circ E\subset D$
4. $D\in\mathcal{D}\implies\exists E\in\mathcal{D}:E^{-1}\subset D$
5. $D\in\mathcal{D},D\subset E\implies E\in\mathcal{D}$

Cuando X tiene una estructura como esta, se dice que es un **espacio uniforme**.
La uniformidad $\mathcal{D}$ se llama **separadora** y X está **separado** si, y solo si $\bigcap\{D|D\in\mathcal{D}\}=\Delta$.
Una **base para la uniformidad $\mathcal{D}$** es cualquier subcolección $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}$ a partir de la cual podemos recuperar D aplicando la condición 5. Por tanto, $\mathcal{E}$ es una base para $\mathcal{D}$ si, y solo si, $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$ y $\forall D\in\mathcal{D},\exists E\in\mathcal{E}|E\subset D$.
También, una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de $X\times X$ es una base para alguna uniformidad si, y solo si, sus conjuntos satisfacen 1., 3., 4. y la siguiente forma modificada de 2.: $D_1,D_2\in\mathcal{E}\implies\exists D_3\in\mathcal{D}:D_3\subset D_1\cap D_2$
Una **subbase para $\mathcal{D}$** es una subcolección $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}$ tal que todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{E}$ forman una base para $\mathcal{D}$.

Definition 0.2. Para $x\in X$ y $D\in\mathcal{D}$, definimos

$$D[x]=\{y\in Y|\,(x,y)\in D\}$$

Esto se extiende a subconjuntos $A\subset X$:

$$D[A]=\bigcup_{x\in A}D[x]$$

Definition 0.3. Y^X es el conjunto de todas las aplicaciones de X en Y.
Una subcolección $\mathcal{F}\subset Y^X$ tiene la **topología de la convergencia puntual** (o **convergencia puntual**) si, y solo si, viene dada por la topología de subespacio inducida por le topología producto de Tychonoff en Y^X.

Esta topología en $\mathcal{F}$ está determinada por la topología de Y, la estructura de X no afecta en nada. Nótese también que la proyección de $\mathcal{F}$ toma la forma de la evaluación en un punto. Es decir, para cada $x \in X$, la aplicación proyección $\pi_x : \mathcal{F} \to Y$ se define por $\pi_x (f) = f (x)$.

Definition 0.4. Si Y es un espacio uniforme, la uniformidad producto $\mathcal{D}_p$ en Y^X se denomina la **uniformidad de la convergencia puntual**. La topología asociada con esta uniformidad es la topología puntual.

Theorem 0.5. *Sea Y Hausdorff. Un espaci de funciones $\mathcal{F} \subset Y^X$ con la topología puntual, es compacto si, y solo si:*

1. *$\mathcal{F}$ es puntualmente cerrado en Y^X*
2. *para cada $x \in X, \pi_x (\mathcal{F}) = \{f (x) \,|\, f \in \mathcal{F}\}$ tiene clausura compacta en Y^X*

Definition 0.6. Si Y tiene una uniformidad $\mathcal{D}$, a familia de conjuntos de la forma

$$E_D = \{(f, g) \,|\, (f (x) , g (x)) \in D, \forall x \in X\}$$

para $D \in \mathcal{D}$, forma una base para la uniformidad $\mathcal{D}_u$ en Y^X denominada la **uniformidad de la convergencia uniforme**.
Su topología, τ_u, es la **topología de la convergencia uniforme**.
Si (f_λ) converge a f en esta topología, decimos que (f_λ) **converge uniformemente** a f.
Las redes de Cauchy en la uniformidad de la convergencia uniforme se dice que son **uniformemente de Cauchy**.

Theorem 0.7. *Una red (f_λ) converge uniformemente a f si, y solo si, (f_λ) es uniformemente de Cauchy y converge puntualmente a f.*

Definition 0.8. La **topología compacto-abierta** o ***k*-topología** en $\mathcal{F} \subset Y^X$ es la topología que tiene como base los conjuntos

$$(K, U) = \{f \in \mathcal{F} | f (K) \subset U\}$$

para K compacto en X y U abierto en Y. Esta topología se denota por τ_C.

Definition 0.9. Un espacio topológico X es un ***k*-espacio** o **espacio compactamente generado** si, y solo si, se verifica la condición:

1. $A \subset X$ es abierto $\iff$ $A \cap K$ es abierto en K para cada conjunto compacto K en X

Definition 0.10. Sean X un espacio topológico e Y un espacio uniforme.
Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas de X en Y es **equicontinua en $\boldsymbol{x \in X}$** si, y solo si, para cada $D \in \mathcal{D} (Y)$, hay un entorno U de x tal que $f (U) \subset D [f (x)] , \forall f \in \mathcal{F}$.

Y ya podemos establecer algunos resultados previos:

Lemma 0.11. *Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones, entonces también lo es su clausura puntual $\overline{\mathcal{F}}$.*

Theorem 0.12. *En una familia equicontinua $\mathcal{F}$, la topología compacto-abierta es la topología puntual.*

Y finalmente llegamos al teorema de Ascoli:

Theorem 0.13. ***Teorema de Ascoli***
Sea X un k-espacio Hausdorff o regular, Y un espacio uniforme Hausdorff y $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en Y. Entonces $\mathcal{F}$ es compacto en la topología compacto-abierta si, y solo si:

1. *$\mathcal{F}$ es cerrado puntualmente*
2. *$\forall x \in X, \pi_x(\mathcal{F})$ tiene clausura compacta*
3. *$\mathcal{F}$ es equicontinua en cada subconjunto compacto de X*

Proof. [$\Longrightarrow$] Si $\mathcal{F}$ es compacto en la topología compacto-abierta, entonces $\mathcal{F}$ es compacto en la topología puntual, por tanto las dos primeras condiciones las da el teorema 0.5.
Sea K un subconjunto compacto de X, $\mathcal{F}_K$ la familia de restricciones a K de los miembros de $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}_K$ es compacto en la topología compacto-abierta en $C(K, Y)$, que se reduce a la topología de la convergencia uniforme porque K es compacto. Vamos a ver que esto implica la equicontinuidad de $\mathcal{F}_K$:
Sea $x \in K, E \in \mathcal{D}(Y)$. Sea D un elemento simétrico de $\mathcal{D}(Y)$ tal que $D \circ D \subset E$. Como X es Hausdorff o regular y K es compacto, entonces K es regular. Por tanto, existe un entorno U_f de x tal que $f\left(\overline{U_f}\right) \subset D[f(x)]$. Pero $\left(\overline{U_f}, F[f(x)]\right)$ es entonces un entorno de f en la topología compacto-abierta, y el cubrimiento resultante de $\mathcal{F}_K$ tiene un subcubrimiento finito, digamos $\left(\overline{U_{f_1}}, D[f_1(x)]\right), ..., \left(\overline{U_{f_n}}, D[f_n(x)]\right)$. Sea $U = \bigcup_i U_{f_i}$.
Ahora para $f \in \mathcal{F}, f \in \left(\overline{U_{f_i}}, D[f_i(x)]\right)$ para algún i y entonces $f(U) \subset f\left(\overline{U_{f_i}}\right) \subset D[f_i(x)]$, y entonces se tiene que $f(U) \subset (D \circ D)[f(x)] \subset E[f(x)]$, por lo que $\mathcal{F}_K$ es equicontinuo en x.
[$\Longleftarrow$] Basta ver que la condición 3. fuerza a que la topología compacto-abierta se reduzca a la topología puntual. Por el teorema 0.12, 3. fuerza que la topología compacto-abierta se reduzca a la puntual, para cada compacto $K \subset X$. Sea ahora (K, U) cualquier conjunto subbásico en la topología compacto-abierta en X, se tiene que $(K, U)_{|\mathcal{F}_K} = \left\{f_{|K} | f \in (K, U)\right\}$ es puntualmente abierto en $\mathcal{F}_K$. Pero la aplicación $f \to f_{|K}$ es puntualmente continua, pues la convergencia puntual se conserva ante la restricción a un subespacio, y la inversa mediante esta aplicación del conjunto $(K, U)_{|\mathcal{F}_K}$ es el conjunto (K, U). Por tanto (K, U) es puntualmente abierto. □