1. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme sobre el conjunto

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbf{R^2} : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < (1-x)^2\right\}.$$

Calcular:

a) la función de densidad de (X, Y) y las funciones de densidad de X y de Y,

b) las esperanzas $E(X^n(1-X)^m)$, los momentos de orden n res- pecto del origen de la variable aleatoria X, la esperanza de X y la varianza de X,

c) la función de densidad de Y condicionada por $X = x$, y en particular la función de densidad de Y condicionada por $X = 1/2$,

d) el valor de la función de distribución en los puntos $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right)$,

e) la recta de regresión de Y respecto de X,

f) la curva de regresión de Y sobre X.

2. La variable aleatoria X es simétrica respecto de su media y tiene de media 2 y varianza 3. Calcular el momento de tercer orden respecto del origen, $\alpha_3 = E(X^3)$.

3. Una urna contiene N_1 bolas blancas, N_2 negras y N_3 rojas, $N_1 + N_2 + N_3 = N$. Se extraen n bolas de la urna y se definen las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 como los números de bolas blancas, negras y rojas respectivamenten que figuran en las bolas extraidas.

a) Calcular $P(X_1 = r_1,\ X_2 = r_2,\ X_3 = r_3)$. Demostrar que

$$\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} = \binom{N}{n}$$

b) Calcular el momento factorial de tercer orden de la variable aleatoria X_1, $\alpha_{(3)} = E(X_1(X_1 - 1)(X_1 - 2))$.

c) Calcular $E(X_1 X_2 X_3)$.

4. Calcular las rectas de regresión y las varianzas residuales de Y sobre X y de X sobre Y de las variables aleatorias(X, Y) de tipo discreto cuyas distribuciones vienen dadas por:

a) $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 3) = \dfrac{1}{3}$.

b) La siguiente tabla

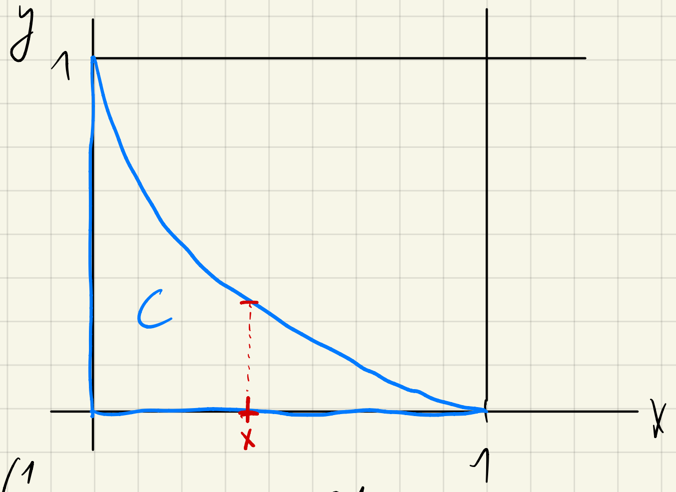
$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/3	1/6	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/9	0	0

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme sobre el conjunto

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbf{R^2} : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < (1-x)^2\right\}.$$

Calcular:

a) la función de densidad de (X, Y) y las funciones de densidad de X y de Y,



$$A(C) = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 1-2x+x^2 dx = x - x^2 + \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow P(C) = 1 = k \cdot \frac{1}{3} \Big\} \boxed{k = 3}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 3 & (x,y) \in C \\ 0 & \sim \end{cases}$$

• si $x \in (0,1)$

$$f(x) = \int_0^{(1-x)^2} 3\, dy = 3(1-x)^2$$

• si $x \notin (0,1) \rightarrow f(x) = 0$

• si $y \in (0,1)$

$$y < (1-x)^2 \rightarrow \sqrt{y} < 1-x \rightarrow x < 1-\sqrt{y}$$

$$f(y) = 3(1-\sqrt{y})$$

b) las esperanzas $E(X^n(1-X)^m)$, los momentos de orden n res- pecto del origen de la variable aleatoria X, la esperanza de X y la varianza de X,

$$E(X^n(1-X)^m) = \int_0^1 x^n(1-x)^m f(x)\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m 3(1-x)^2\,dx = 3\int_0^1 x^n(1-x)^{m+2}\,dx$$

$$= 3B(n+1, m+3) = 3\,\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+3)}{\Gamma(n+m+4)} = 3\cdot\frac{n!\cdot(m+2)!}{(n+m+3)!}$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$E(X^n) = E(X^n(1-X)^0) = 3\cdot\frac{n!\,2}{(n+3)!} = \frac{3!\,n!}{(n+3)!} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$E(X) = E(X^1) = \frac{6}{2\cdot3\cdot4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{3\cdot4\cdot5} - \frac{1}{16} = \frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{16-10}{160} = \frac{3}{80}$$

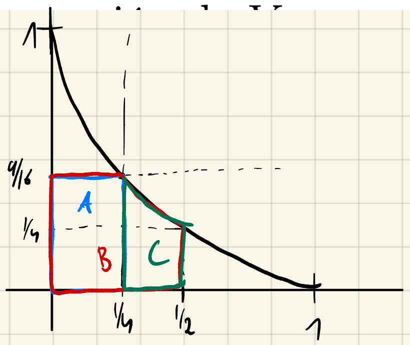
c) la función de densidad de Y condicionada por $X = x$, y en particular la función de densidad de Y condicionada por $X = 1/2$,

$$x \in (0,1) \rightarrow f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$\begin{cases} f_{2|1}(y|x) = \dfrac{3}{3(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } y \in (0,(1-x)^2) \\ f_{2|1}(y|x) = 0 & y \notin (0,(1-x)^2) \end{cases}$$

$$x = \tfrac{1}{2} \rightarrow f_{2|1}(y|\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 4 & y \in (0, 1/4) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

d) el valor de la función de distribución en los puntos $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right)$,



$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = \frac{27}{64} + 3 \cdot \frac{19}{192} = \frac{27}{64} + \frac{19}{64} = \frac{46}{64} = \frac{23}{32}$$

$$A(C) = \int_{1/4}^{1/2} (1-x)^2\,dx = \int_{1/4}^{1/2} 1 - 2x + x^2\,dx = x - x^2 + \frac{x^3}{3}\Big]_{1/4}^{1/2} = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{16} - \frac{1}{192} = \frac{8+12-1}{192} = \frac{19}{192}$$

e) la recta de regresión de Y respecto de X,

Recta de regresión de Y sobre X:

$$\boxed{y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X) + \mu_Y}$$

$$\mu_X = E(X) = 1/4 \qquad \mu_Y = E(Y) = \int_0^1 y f(y)\,dy = 3\int_0^1 y - y^{3/2}\,dy = 3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = 3\left(\frac{5-4}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = \alpha_{11} - \mu_X\mu_Y = \frac{1}{20} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{20} - \frac{3}{40} = -\frac{1}{40}$$

$$\alpha_{11} = E(XY) = \int_C x\cdot y\cdot f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^{(1-x)^2} x\cdot y\cdot 3\,dy\,dx = 3\int_0^1 x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(1-x)^2} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx = \frac{3}{2}B(2,5) = \frac{3}{2}\,\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)}$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{1!\,4!}{6!} = \frac{3}{5\cdot 6} = \frac{1}{20}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{3}{80}$$

$$\rightarrow y = -\frac{1/40}{3/80}(x - 1/4) + \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{12} + \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}x + \frac{10+18}{60} = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{30} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}$$

f) la curva de regresión de Y sobre X.

Curva de regresión de Y sobre X

$$\boxed{y = m_{2|1}(x) \quad \text{con} \quad m_{2|1}(x) = E(Y \mid X = x) = \int y \, dF_{2|1}(y|x)}$$

$$m_{2|1}(x) = \int_0^{(1-x)^2} y \frac{1}{(1-x)^2} \, dy = \frac{1}{(1-x)^2} \left. \frac{y^2}{2} \right]_0^{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{(1-x)^2}{2}}$$

2. La variable aleatoria X es simétrica respecto de su media y tiene de media 2 y varianza 3. Calcular el momento de tercer orden respecto del origen, $\alpha_3 = E(X^3)$.

$$\alpha_3 = E(X^3) = E((X-\mu+\mu)^3) = E((X-\mu)^3 + \mu^3 + 3(X-\mu)\mu + 3(X-\mu)\mu^2)$$

$$= \cancel{E((X-\mu)^3)} + \mu^3 + 3\mu E((X-\mu)^2) + 3\mu^2 \cancel{E(X-\mu)} =$$

0 — 0

simétrica y momento de orden impar

$$= \mu^3 + 3\mu E((X-\mu)^2) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 = 8 + 18 = 26$$

3. Una urna contiene N_1 bolas blancas, N_2 negras y N_3 rojas, $N_1 + N_2 + N_3 = N$. Se extraen n bolas de la urna y se definen las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 como los números de bolas blancas, negras y rojas respectivamenten que figuran en las bolas extraidas.

a) Calcular $P(X_1 = r_1,\ X_2 = r_2,\ X_3 = r_3)$. Demostrar que

$$\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} = \binom{N}{n}$$

b) Calcular el momento factorial de tercer orden de la variable aleatoria X_1, $\alpha_{(3)} = E(X_1(X_1 - 1)(X_1 - 2))$.

c) Calcular $E(X_1X_2X_3)$.

(a)

$$P(X_1 = r_1,\ X_2 = r_2,\ X_3 = r_3) = \frac{\binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} \qquad r_1 + r_2 + r_3 = n$$

$$\underbrace{\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}}}_{\text{la suma de las probabilidades de todas las posibilidades}} = 1 \Rightarrow \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} = \binom{N}{n} \quad //$$

(b)

$$\alpha_{(3)} = E(X_1(X_1-1)(X_1-2)) =$$

$$= \sum_{r_1} r_1(r_1-1)(r_1-2) \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} = \sum_{r_1}\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \underbrace{r_1(r_1-1)(r_1-2)\frac{N_1!}{r_1!(N_1-r_1)!}} \binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \cdot \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

$$\cancel{r_1(r_1-1)(r_1-2)} \frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)\cdot\ldots\cdot(N_1-r_1+1)}{\cancel{r_1(r_1-1)(r_1-2)}\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

$$\parallel$$

$$N_1(N_1-1)(N_1-2)\cdot\binom{N_1-3}{r_1-3}$$

$$= \sum_{r_1}\sum_{r_1+r_2+r_3=n} N_1(N_1-1)(N_1-2)\binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \cdot \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)}{\binom{N}{n}} \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1-3}{r_1-3}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)}{\binom{N}{n}} \binom{N-3}{n-3} = \frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)}{\frac{N(N-1)(N-2)\cancel{(N-3)!}}{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}\cancel{(N-n)!}}} \cdot \frac{\cancel{(N-3)!}}{\cancel{(n-3)!}\cancel{(N-n)!}} = \frac{N_1(N_1-1)(N_1-2)}{N(N-1)(N-2)}\, n(n-1)(n-2) = \frac{N_1^{(3)}\, n^{(3)}}{N^{(3)}}$$

(c)

$$E(X_1X_2X_3) = \sum_{r_1,r_2,r_3} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \; P(X_1=r_1, X_2=r_2, X_3=r_3) = \sum_{r_1,r_2,r_3} r_1 r_2 r_3 \frac{\binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \cancel{r_1}\cancel{r_2}\cancel{r_3} \frac{\frac{N_1 \cdot (N_1-1)!}{\cancel{r_1} \cdot (r_1-1)!\,(N_1-r_1)!} \cdot \frac{N_2 \cdot (N_2-1)!}{\cancel{r_2} \cdot (r_2-1)!\,(N_2-r_2)!} \cdot \frac{N_3 (N_3-1)!}{\cancel{r_3} \cdot (r_3-1)!\,(N_3-r_3)!}}{\binom{N}{n}}$$

$$= N_1N_2N_3 \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \frac{\binom{N_1-1}{r_1-1}\binom{N_2-1}{r_2-1}\binom{N_3-1}{r_3-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{N_1N_2N_3}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-3}{n-3} = \frac{N_1N_2N_3}{\frac{N!}{n!\,\cancel{(N-n)!}}} \cdot \frac{(N-3)!}{(n-3)!\,\cancel{(N-n)!}} = \frac{N_1N_2N_3 \cdot n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

Tarea

Jose Antonio Lorenzo Abril

$$\bullet\ E(X_1) = \sum_{r_1} r_1 \cdot P(X_1 = r_1) = \sum_{r_1} r_1 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \frac{1}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \sum_{r_1}\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \cancel{r_1} \frac{N_1 (N_1-1)\cdot\ldots\cdot(N_1-r_1+1)}{\cancel{r_1}\cdot (r_1-1)!} \binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{N_1}{\binom{N}{n}} \sum_{r_1}\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1-1}{r_1-1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} =$$

$$= \frac{N_1}{\binom{N}{n}} \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1-1}{r_1-1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \underset{@}{=} N_1 \cdot \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = N_1 \cdot \frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,\cancel{(N-n)!}}}{\frac{N!}{n!\,\cancel{(N-n)!}}} = N_1 \cdot \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}\cdot\cancel{(N-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot N\cdot\cancel{(N-1)!}} = \frac{n\cdot N_1}{N}$$

@ $N_1 - 1 + N_2 + N_3 = N - 1$

$r_1 - 1 + r_2 + r_3 = n - 1$

$$\bullet\ E(X_1 X_2) = \sum_{r_1, r_2} r_1 \cdot r_2 \cdot P(X_1 = r_1, X_2 = r_2) = \sum_{r_1, r_2} r_1 r_2 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1}{r_1}\binom{N_2}{r_2}\binom{N_3}{r_3} \cdot \frac{1}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \sum_{r_1, r_2}\sum_{r_1+r_2+r_3=n} \cancel{r_1}\cdot\cancel{r_2} \frac{N_1\cdot(N_1-1)\cdot\ldots\cdot(N_1-r_1+1)}{\cancel{r_1}\cdot(r_1-1)!} \cdot \frac{N_2\cdot(N_2-1)\cdot\ldots\cdot(N_2-r_2+1)}{\cancel{r_2}\cdot(r_2-1)!} \binom{N_3}{r_3} \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{N_1\cdot N_2}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3=n} \binom{N_1-1}{r_1-1}\binom{N_2-1}{r_2-1}\binom{N_3}{r_3} \underset{@}{=} \frac{N_1 N_2}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} = N_1 N_2 \frac{\frac{(N-2)!}{(n-2)!\,\cancel{(N-n)!}}}{\frac{N!}{n!\,\cancel{(N-n)!}}} =$$

@ $N_1 - 1 + N_2 - 2 + N_3 = N - 2$

$r_1 - 1 + r_2 - 1 + r_3 = n - 2$

$$= N_1 N_2 \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}\cdot\cancel{(N-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot N\cdot(N-1)\cdot\cancel{(N-2)!}} = \frac{n(n-1)N_1 N_2}{N\cdot(N-1)}$$

4. Calcular las rectas de regresión y las varianzas residuales de Y sobre X y de X sobre Y de las variables aleatorias(X, Y) de tipo discreto cuyas distribuciones vienen dadas por:

a) $P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=2) = P(X=2, Y=3) = \frac{1}{3}$.

ⓐ $P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=2) = P(X=2, Y=3) = 1/3$

Rectas de regresión varianzas residuales de Y sobre X y de X sobre Y

$$y - \mu_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \mu_x)$$

$$x - \mu_x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \mu_y)$$

$P(X=0) = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{1}{3}$

$P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$ //

X^2 $\quad P(X^2=0) = \frac{1}{3} \quad P(X^2=1) = \frac{1}{3} \quad P(X^2=4) = \frac{1}{3} \rightarrow E(X^2) = 5/3$

Y^2 $\quad P(Y^2=1) = \frac{1}{3} \quad P(Y^2=4) = 1/3 \quad P(Y^2=9) = \frac{1}{3} \rightarrow E(Y^2) = \frac{14}{3}$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{XY} = \alpha_{11} - \mu_X \mu_Y = E(XY) - 1 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

Recta reg. Y sobre X: $y - 2 = \frac{2/3}{2/3}(x-1) = x-1 \rightarrow y = x+1$

" " X sobre Y: $x - 1 = \frac{2/3}{2/3}(y-2) = y-2 \rightarrow x = y-1$

b) La siguiente tabla

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/3	1/6	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/9	0	0

$$P(X=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{6+3+2}{18} = \frac{11}{18}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{9}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{11}{18} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5+4}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{11}{18}$$

$$P(X^2=1) = \frac{5}{18}$$

$$P(X^2=4) = \frac{1}{9}$$

$$E(X^2) = \frac{5}{18} + \frac{4}{9} = \frac{5+8}{18} = \frac{13}{18}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4} = \frac{26-9}{36} = \frac{17}{36} = \frac{5}{12}$$

$Y \sim X \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{2},\ E(Y^2) = \frac{13}{8},\ \sigma_Y^2 = \frac{5}{12}$

$$E(XY) = 0 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2(0+0) + 4(0) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sigma_{XY} = \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{4-9}{36} = \frac{-5}{36}$$

r.r. Y sobre X: $y - \frac{1}{2} = \frac{-5/36}{17/36}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{17}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{17}x + \frac{5}{34} \rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{17}x + \frac{11}{17}}$

r.r. X sobre Y: $x - \frac{1}{2} = \frac{-5/36}{17/36}\left(y - \frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{x = -\frac{5}{17}y + \frac{11}{17}}$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 2 (Marzo 2021)

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad $f(x,y)=1/y$ para $0<x<y<1$, $f(x,y)=0$ en el resto.

Calcular

a) los momentos $\alpha_{n,m}$,

b) $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E(XY)$, $E(X)$,

c) ecuación de la recta de regresión de X sobre Y en la forma $x = \alpha + \beta y$

d) curva de regresión de X respecto de Y, o sea, la curva de ecuación

$$x = m_{2|1}(x \mid y)$$

2. La variable aleatoria (X_1, X_2, X_3) tiene la función generatriz de probabilidad

$$f(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3)$$

Averiguar:

a) si las variables X_1, X_2, X_3 son independientes,

b) si son independientes por parejas,

c) calcular las medias, varianzas y covarianzas de X_1, X_2 y X_3.

3. Las variables X, Y, Z son independientes y tienen una distribución uniforme en el intervalo (0, 1) y se define $U = aX + bY + cZ$ donde a, b y c son tres números reales.

Calcular para la variable U

a) la media, la varianza,

b) los momentos de orden 3 y 4 respecto de a media,

c) la función característica. ¿Es simétrica la distribución de U?

4. Las variables aleatorias de tipo discreto X e Y son independientes, X solo toma valores pares con probabilidades

$$P(X = 2r) = A/(2r)! \quad \text{para } r = 0, 1, 2, ...$$

e Y solo toma valores impares con probabilidades

$$P(Y = 2r+1) = B/(2r+1)! \quad \text{para } r = 0, 1, 2, ...$$

Calcular:

a) las constantes A y B,

b) las funciones generatrices de probabilidad de X y de Y,

c) la probabilidad de que $Z = n$ donde $Z = X + Y$,

d) $E(Z)$, $Var(Z)$.

5. Averiguar si alguna de las funciones siguientes es una función característica.

a) $(1 + \cos t + \cos 2t)/3$, b) $1/(1 + t^3)$, c) $1/(1 + t^4)$

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad $f(x,y)=1/y$ para $0<x<y<1$, $f(x,y)=0$ en el resto.

Calcular

a) los momentos $\alpha_{n,m}$,

$$\alpha_{n,m} = E(X^n Y^m) = \int_{\mathbb{R}^2} x^n y^m f(x,y)\, d(x,y) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^y x^n \cdot y^m \cdot \frac{1}{y}\, dx\, dy = \int_0^1 y^{m-1} \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^y dy = \int_0^1 y^{m-1} \frac{y^{n+1}}{n+1}\, dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{n+m}}{n+1}\, dy = \frac{1}{n+1} \cdot \left.\frac{y^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+m+1)}$$

b) $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E(XY)$, $E(X)$,

$$E(Y) = \alpha_{0,1} = \frac{1}{2} \qquad E(XY) = \alpha_{1,1} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$E(Y^2) = \alpha_{0,2} = \frac{1}{3} \qquad E(X) = \alpha_{1,0} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

c) ecuación de la recta de regresión de X sobre Y en la forma $x = \alpha + \beta y$

$$X - E(X) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - E(y)) = \frac{\alpha_{11} - E(X)E(Y)}{E(Y^2) - E(Y)^2}(y - E(y)) = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{12}}\left(y - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow x - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}y - \cancel{\frac{1}{4}} \rightarrow x = \frac{1}{2}y$$

d) curva de regresión de X respecto de Y, o sea, la curva de ecuación

$$x = m_{2|1}(x \mid y)$$

$$m_{1|2}(x|y) = E(X|Y=y)$$

$$f_{1|2}(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/y}{\int_0^y \frac{1}{y}\,dx} = \frac{1/y}{1} = \frac{1}{y}$$

$$\to m_{1|2}(y) = E(X|Y=y) = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}\,dx = \frac{1}{y} \cdot \frac{x^2}{2}\Big]_0^y = \frac{y}{2}$$

$$\to \boxed{x = \frac{y}{2}}$$

$$m_{2|1}(y|x) = E(Y|X=x)$$

$$f_{2|1}(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1/y}{\int_x^1 \frac{1}{y}\,dy} = \frac{1/y}{\log y\Big]_x^1} = \frac{1/y}{-\log x} = \frac{1}{y\log x}$$

$$m_{2|1}(x) = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{y\log x}\,dy = \int_x^1 \frac{1}{\log x}\,dy = \frac{y}{\log x}\Big]_x^1 = \frac{1-x}{\log x}$$

$$\boxed{y = \frac{1-x}{\log x}}$$

2. La variable aleatoria (X_1, X_2, X_3) tiene la función generatriz de probabilidad

$$f(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3)$$

Averiguar:

a) si las variables X_1, X_2, X_3 son independientes,

b) si son independientes por parejas

$$f(t_1,t_2,t_3) = E(t_1^{X_1} t_2^{X_2} t_3^{X_3})$$

Si vemos que $f_{ij}(t_i,t_j) = f_i(t_i) \cdot f_j(t_j) \quad \forall i,j$, lo tendremos.

$$f_1(t_1) = E(t_1^{X_1}) = E(t_1^{X_1} \cdot 1 \cdot 1) = f(t_1,1,1) = \frac{1}{4}(t_1+2+t_1) = \frac{t_1+1}{2}$$

$$f_2(t_2) = \frac{1}{4}(1+t_2+1+t_2) = \frac{t_2+1}{2}$$

$$f_3(t_3) = \frac{1}{4}(1+1+t_3+t_3) = \frac{t_3+1}{2}$$

$$f_{1,2}(t_1,t_2) = E(t_1^{X_1}t_2^{X_2}) = E(t_1^{X_1}t_2^{X_2} \cdot 1) = f(t_1,t_2,1) = \frac{1}{4}(t_1+t_2+1+t_1t_2)$$

$$f_{1,3}(t_1,t_3) = \frac{1}{4}(t_1+1+t_3+t_1t_3)$$

$$f_{2,3}(t_2,t_3) = \frac{1}{4}(1+t_2+t_3+t_2t_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t_1)f_2(t_2) = \dfrac{t_1t_2+t_1+t_2+1}{4} = f_{1,2}(t_1,t_2) \\ f_1f_3 = f_{1,3} \quad \text{y} \quad f_{2,3} = f_2f_3 \end{array}\right\} X_1, X_2, X_3 \text{ indep por parejas}$$

a) $¿f = f_1 \cdot f_{2,3}$?

$$\frac{t_1+1}{2} \cdot \frac{t_2t_3+t_2+t_3+1}{4} = \frac{t_1t_2t_3+t_1t_2+t_1t_3+t_1+t_2t_3+t_2+t_3+1}{8} \neq f \quad \text{No son indeps}$$

c) calcular las medias, varianzas y covarianzas de X_1, X_2 y X_3.

$E(X_1) = f_1'(1) = \frac{1}{2}$

$E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{2}$

$Var(X_1) = f_1''(1) = 0$

$Var(X_2) = Var(X_3) = 0$

$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \underset{X_1 X_2 \text{ indep}}{=} E(X_1)E(X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0$

$Cov(X_2, X_3) = Cov(X_1, X_3) = 0$ //

3. Las variables X, Y, Z son independientes y tienen una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$ y se define $U = aX + bY + cZ$ donde a, b y c son tres números reales.

Calcular para la variable U

a) la media, la varianza,

$$E(U) = E(aX+bY+cZ) = aE(X)+bE(Y)+cE(Z)$$

$$Var(U) = E(U^2) - E(U)^2 = E(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2+2abXY+2acXZ+2bcYZ)$$

$$- a^2E(X)^2 - b^2E(Y)^2 - c^2E(Z)^2 - 2abE(X)E(Y) - 2acE(X)E(Z) - 2bcE(Y)E(Z)$$

$$= a^2E(X^2)+b^2E(Y^2)+c^2E(Z^2) + \cancel{2abE(XY)} + \cancel{2acE(XZ)} + \cancel{2bcE(YZ)}$$

$$- a^2E(X)^2 - b^2E(Y)^2 - c^2E(Z)^2 - \cancel{2abE(X)E(Y)} - \cancel{2acE(X)E(Z)} - \cancel{2bcE(Y)E(Z)}$$

X, Y, Z indep

$$= a^2Var(X) + b^2Var(Y) + c^2Var(Z)$$

Por ser uniformes en $(0,1)$, es $f_X = f_Y = f_Z = 1 \to E(X) = E(Y) = E(Z) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2dx - \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\to E(U) = \frac{1}{2}(a+b+c) \qquad Var(U) = \frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2)$$

b) los momentos de orden 3 y 4 respecto de a media,

X, Y, Z indep

$$E((U-\mu)^3) = E\left(\left(aX+bY+cZ - \frac{1}{2}(a+b+c)\right)^3\right) = E\left(\left(a(X-\tfrac{1}{2})+b(Y-\tfrac{1}{2})+c(Z-\tfrac{1}{2})\right)^3\right) = a^3E((X-\tfrac{1}{2})^3)+b^3E((Y-\tfrac{1}{2})^3)+c^3E((Z-\tfrac{1}{2})^3)$$

$$= (a^3+b^3+c^3)E((X-\tfrac{1}{2})^3) = 0$$

$X \sim Y \sim Z$

$$E((X-\tfrac{1}{2})^3) = \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^3dx = \left.\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4}\right]_0^1 = \frac{(\frac{1}{2})^4}{4} - \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4} = 0$$

c) la función característica. ¿Es simétrica la distribución de U?

X, Y, Z indep $\longrightarrow$ $\varphi_U(t) = \varphi_{aX}(t)\,\varphi_{bY}(t)\,\varphi_{cZ}(t) = E(e^{itaX})\,E(e^{itbY})\,E(e^{itcZ})$

$$E(e^{itX}) = \int_0^1 e^{itx}\,dx = \left.\frac{e^{itx}}{it}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}$$

$$\varphi_U(t) = \left(\frac{e^{iat}-1}{iat}\right)\left(\frac{e^{ibt}-1}{ibt}\right)\left(\frac{e^{ict}-1}{ict}\right) = \frac{(e^{iat}-1)(e^{ibt}-1)(e^{ict}-1)}{i^3\,abct} = i\,\frac{(e^{iat}-1)(e^{ibt}-1)(e^{ict}-1)}{i^4\,abct} =$$

$$= i\,\frac{(e^{iat}-1)(e^{ibt}-1)(e^{ict}-1)}{abct}$$

f. característica real

¿U simétrica? $\longleftrightarrow$ $\varphi_U(t) = e^{ikt}\,\psi(t)$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$$

$$e^{i\frac{t}{2}}\,\frac{\operatorname{sen}(t/2)}{t/2} = \left(\cos\frac{t}{2} + i\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{t/2} = \frac{\cos\frac{t}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2} + i\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}{t/2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}t + i\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}{t/2} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\operatorname{sen}t + i\,\frac{1-\cos t}{\cancel{2}}}{t/\cancel{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}t + i - i\cos t}{t} = \frac{i\operatorname{sen}t - 1 + \cos t}{it} = \frac{e^{it}-1}{it} = \varphi_X(t)$$

Para U igual //

4. Las variables aleatorias de tipo discreto X e Y son independientes, X solo toma valores pares con probabilidades

$$P(X = 2r) = A/(2r)! \quad \text{para } r = 0, 1, 2, \ldots$$

e Y solo toma valores impares con probabilidades

$$P(Y = 2r+1) = B/(2r+1)! \quad \text{para } r = 0, 1, 2, \ldots$$

Calcular:

a) las constantes A y B,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{A}{(2r)!} = 1 \leftrightarrow A \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} = 1 \leftrightarrow A = \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \right]^{-1}$$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 3 (Marzo 2021)

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes con la misma distribución geométrica de parámetro *p*, es decir $P(X=r)=pq^r$, $r=0,1,2,...$ y sea la variable aleatoria $Z=X-Y$.
   a) Calcular la función generatriz de probabilidad y la función característica de *X*.
   b) Calcular la función puntual de probabilidad de *Z*.
   c) Calcular la función característica de *Z*.

2. Obtener las distribuciones de las variables aleatorias S_n y T_n que tienen las funciones características

$$\varphi_n(t)=E(e^{itS_n})=\frac{\text{sen }t}{n\,\text{sen}(t/n)}\ ,\quad \psi_n(t)=E(e^{itT_n})=e^{it(n-1)/n}\frac{\text{sen }t}{n\ \text{sen}(t/n)}$$

El número n se supone entero positivo. Las distribuciones se determinarán dando sus funciones de densidad o sus funciones puntuales de probabilidad.

3. Demostrar que

$$\varphi(t)=\frac{\text{sen }t}{a\ \text{sen}(t/a)}\quad ,\quad a>0$$

solo es función característica si el número real "a" es entero.

4. Calcular la distribución con función característica

$$\varphi_n(t)=\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cos\frac{t}{2^3}\dots\cos\frac{t}{2^n}=\prod_{r=1}^{n}\cos\frac{t}{2^r}$$

5. Calcular la distribución con función característica

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{3^n}(1+2\cos\frac{t}{3})(1+2\cos\frac{t}{3^2})(1+2\cos\frac{t}{3^3})\dots(1+2\cos\frac{t}{3^n})=$$

$$\frac{1}{3^n}\prod_{r=1}^{n}(1+2\cos\frac{t}{3^r})$$

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes con la misma distribución geométrica de parámetro p, es decir $P(X=r)=pq^r$, $r=0,1,2,\ldots$ y sea la variable aleatoria $Z=X-Y$.

a) Calcular la función generatriz de probabilidad y la función característica de X.

$$f_X(t) = E(t^X) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r p\cdot q^r = p\sum_{r=0}^{\infty}(tq)^r \underset{t\in\left(-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right)}{=} p\cdot\frac{1}{1-tq}$$

b) Calcular la función puntual de probabilidad de Z.

X, Y indep $\Rightarrow$ $X, -Y$ indep $\Rightarrow$

$$f_Z = f_X f_{-Y} = \frac{p}{1-tq}\,\frac{p}{1-\frac{q}{t}} = p^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{t}-tq+q^2} = \frac{p^2}{1-\left(\frac{q}{t}+tq-q^2\right)}$$

$$f_Z = \sum_{r=0}^{\infty} t^r\cdot P(Z=r)$$

$$\frac{p^2}{1-\left(\frac{q}{t}+tq-q^2\right)} = p^2\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{q}{t}+tq-q^2\right)^r$$

$$f_{-Y}(t) = E(t^{-Y}) = \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r}pq^r = p\cdot\sum\left(\frac{q}{t}\right)^r = p\cdot\frac{1}{1-\frac{q}{t}}$$

$$f_X f_{-Y} = \left(\sum_{a=0}^{\infty} t^a p q^a\right)\left(\sum_{b=0}^{\infty} t^{-b} p q^b\right) = \sum_{a=0}^{\infty}\left(\sum_{b=0}^{\infty} t^{a-b} p^2 q^{a+b}\right)$$

$$\underset{r\geq 0}{P(Z=r)} = P(X-Y=r) = \sum_{s=r}^{\infty} P(X=s,\, Y=s-r) = \sum_{s=r}^{\infty} pq^s pq^{s-r} = \sum_{s=r}^{\infty} p^2 q^{2s-r} = \frac{p^2}{q^r}\sum_{s=r}^{\infty}(q^2)^s =$$

$$= \frac{p^2}{\cancel{q^r}}\cdot\frac{q^{\cancel{2}r}}{1-q^2} = \frac{p^2q^r}{1-q^2} = \frac{(1-q)^{\cancel{2}}q^r}{(1+q)\cancel{(1-q)}} = \frac{(1-q)q^r}{1+q} = \frac{pq^r}{1+q}$$

$$r\in\mathbb{Z} \to \boxed{P(Z=r) = \frac{pq^{|r|}}{1+q}}$$

c) Calcular la función característica de Z.

$$\varphi_Z(t) = E\left(e^{itZ}\right) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{itr}\cdot\frac{pq^{|r|}}{1+q} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr}\frac{pq^r}{1+q} + \sum_{r=1}^{\infty} e^{-itr}\frac{pq^r}{1+q} =$$

$$= \underbrace{\frac{p}{1+q}}_{r=0} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{p^2q^{2r}}{(1+q)^2} = \frac{p}{1+q} + \frac{p^2}{(1+q)^2}\sum_{1}^{\infty} q^{2r} = \frac{p}{1+q} + \frac{p^2}{(1+q)^2}\cdot\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} + \frac{(1-q)^{\cancel{2}}q^2}{(1+q)^2(1+q)\cancel{(1-q)}}$$

$$= \frac{p(1+q)^2+pq^2}{(1+q)^3}$$

2. Obtener las distribuciones de las variables aleatorias S_n y T_n que tienen las funciones características

$$\varphi_n(t) = E(e^{itS_n}) = \frac{\operatorname{sen} t}{n \operatorname{sen}(t/n)}, \quad \psi_n(t) = E(e^{itT_n}) = e^{it(n-1)/n} \frac{\operatorname{sen} t}{n \operatorname{sen}(t/n)}$$

El número n se supone entero positivo. Las distribuciones se determinarán dando sus funciones de densidad o sus funciones puntuales de probabilidad.

$$\varphi_n(t) = E(e^{itS_n}) = \frac{\operatorname{sen} t}{n \cdot \operatorname{sen}(t/n)} = \frac{(e^{it}-e^{-it})\cancel{/2i}}{n\cdot(e^{it/n}-e^{-it/n})\cancel{/2i}} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{n(e^{\frac{it}{n}}-e^{-\frac{it}{n}})}$$

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$
$$- \quad e^{-it} = \cos t - i\operatorname{sen} t$$
$$e^{it}-e^{-it} = 2i\operatorname{sen} t$$

$$= \frac{e^{-it}}{n\cdot e^{-it/n}} \cdot \frac{e^{2it}-1}{e^{2it/n}-1} = \frac{e^{-it}}{n\cdot e^{-it/n}} \cdot \frac{1-e^{2it}}{1-e^{\frac{2it}{n}}} = \frac{e^{-it}}{n e^{-it/n}} \sum_{r=0}^{n-1} e^{r\frac{2it}{n}} = e^{it(\frac{1}{n}-1)} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2itr}{n}}$$

$$1 = e^{0\cdot\frac{2it}{n}},\ e^{1\cdot\frac{2it}{n}},\ e^{2\cdot\frac{2it}{n}},\ \dots,\ e^{(n-1)\frac{2it}{n}}$$
$$1 \quad 2 \quad 3, \dots, n$$

la razón es $e^{\frac{2it}{n}}$

Si nos fijamos, $\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} e^{r\frac{2it}{n}}$ es la función característica de una v.a. X, $E(e^{itX})$ cuya distribución es:

$$P\left(X = \frac{2r}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad r = 0, 1, \dots, n$$

Ahora para $\Psi_n(t)$:

$$\Psi_n(t) = e^{it\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t}{n}\right)} = e^{it\frac{n-1}{n}} \varphi_n(t) = \cancel{e^{it\frac{n-1}{n}}} \cdot \cancel{e^{it\frac{1-n}{n}}} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2itr}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2itr}{n}}$$

Por lo visto antes, si $\Psi_n(t)$ es la función característica de T_n, $E(e^{itT_n})$ entonces, la distribución de T_n es

$$P_{T_n}(r) = \begin{cases} P\left(T_n = \frac{2r}{n}\right) = \frac{1}{n} & \text{si } r = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Volvamos a φ_n:

$$\varphi_n(t) = e^{it\frac{1-n}{n}} \cdot \Psi_n(t) \longrightarrow E(e^{itS_n}) = e^{it\frac{1-n}{n}} E(e^{itT_n})$$

entonces

$$S_n = \frac{1-n}{n} + T_n$$

como la función puntual de prob. de T_n la hemos visto, entonces la de S_n es:

$$P_{S_n}\left(\frac{1-n+2r}{n}\right) = P\left(S_n = \frac{1-n+2r}{n}\right) = \begin{cases} P_{T_n}\left(\frac{2r}{n}\right) = \frac{1}{n} & \text{si } r = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

ó

$$P_{S_n}\left(\frac{h}{n}\right) = P\left(S_n = \frac{h}{n}\right) = \begin{cases} 1/n & \text{si } h = 1-n, 1-n+2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

3. Demostrar que

$$\varphi(t) = \frac{\text{sen } t}{a \text{ sen}(t/a)} \quad , \quad a > 0$$

solo es función característica si el número real "a" es entero.

- $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\text{sen } t}{a\,\text{sen}\left(\frac{t}{a}\right)} \overset{l'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\cos t} = 1$

- $a\,\text{sen}\left(\frac{t}{a}\right) = 0 \underset{a>0}{\leftrightarrow} \text{sen}\left(\frac{t}{a}\right) = 0 \leftrightarrow \frac{t}{a} = k\cdot\pi \leftrightarrow t = ak\pi$

y entonces, numerador y denominador se anulan simultáneamente si

$$\text{sen}(ak\pi) = 0 \leftrightarrow a \in \mathbb{Z}^{+}.$$

4. Calcular la distribución con función característica

$$\varphi_n(t) = \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cos\frac{t}{2^3}\dots\cos\frac{t}{2^n} = \prod_{r=1}^{n}\cos\frac{t}{2^r}$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Si $\varphi = \frac{t}{2^r} \rightarrow \cos\frac{t}{2^r} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^{r-1}}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^r}\right)}$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^2}\right)}}\cdot\ \cancel{\cdots}\ \cdot\frac{1}{2}\frac{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

Ejercicio 2 $\Rightarrow n = 2^m$, entonces

$$\varphi_{2^m}(t) = \frac{1}{2^m}\frac{\operatorname{sen}(t)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^m}\right)}$$

y es $\quad P\left(S_{2^m} = \frac{h}{2^m}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & \text{si } h = 1-2^m,\ 1-2^m+2, \dots, 2^m-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

5. Calcular la distribución con función característica

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{3^n}(1+2\cos\frac{t}{3})(1+2\cos\frac{t}{3^2})(1+2\cos\frac{t}{3^3})\ldots(1+2\cos\frac{t}{3^n})=\frac{1}{3^n}\prod_{r=1}^{n}(1+2\cos\frac{t}{3^r})$$

$$e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$$

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{3^n}\prod_{r=1}^{n}\left(1+e^{i\frac{t}{3^r}}+e^{-i\frac{t}{3^r}}\right)=\frac{1}{3^n}\prod_{r=1}^{n}e^{-i\frac{t}{3^r}}\left(e^{i\frac{t}{3^r}}+e^{i\frac{2t}{3^r}}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{3^n}e^{-\sum_{r=1}^{n}i\frac{t}{3^r}}\cdot\prod_{r=1}^{n}\left[e^{i\frac{t}{3^r}}+e^{i\frac{2t}{3^r}}+1\right]=\frac{1}{3^n}e^{-it\cdot\frac{1-1/3^n}{2}}\cdot\prod_{r=1}^{n}\left(1+e^{i\frac{t}{3^r}}+e^{i\frac{2t}{3^r}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3^n}e^{-it\cdot\frac{1-1/3^n}{2}}\cdot\prod_{r=1}^{n}\frac{1-e^{i\frac{3t}{3^r}}}{1-e^{i\frac{t}{3^r}}}=\frac{1}{3^n}e^{-it\cdot\frac{1-1/3^n}{2}}\cdot\underbrace{\prod_{r=1}^{n}\frac{1-e^{i\frac{t}{3^{r-1}}}}{1-e^{i\frac{t}{3^r}}}}_{\text{se van todos menos el primero y el último}}=\frac{1}{3^n}e^{-it\cdot\frac{1-1/3^n}{2}}\cdot\frac{1-e^{it}}{1-e^{i\frac{t}{3^n}}}=$$

$$1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$$

$$=\frac{1}{3^n}e^{-it(1-3^{-n})}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{it}}{1-e^{it/3^n}}=\frac{1}{3^n}e^{-it(1-3^{-n})/2}\,\frac{e^{it/2}}{e^{it/2\cdot3^n}}\cdot\frac{e^{-it/2}-e^{it/2}}{e^{-it/2\cdot3^n}-e^{it/2\cdot3^n}}=$$

$$=\frac{1}{3^n}e^{-it(1-3^{-n})/2}\cdot e^{it(1-\frac{1}{3^n})/2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2\cdot3^n}}=$$

$$=\frac{1}{3^n}\cdot e^0\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2\cdot3^n}}=\frac{\operatorname{sen}t/2}{3^n\cdot\operatorname{sen}t/2\cdot3^n}$$

$\psi_n(t)=\varphi_n(\frac{t}{2})\to\psi_n$ es la f. caract. de $X/2$ la distrib. en 2

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 4 (Marzo 2021)

1. Dos equipos de fútbol, A y B, (o de cualquier otro deporte) tienen sus fuerzas equilibradas por lo que si juegan un partido supondremos que tiene cada uno la probabilidad 1/2 de ganar (se excluye la posibilidad de empate). Los dos equipos van a realizar una competición jugando una serie de partidos. El que gana un partido se adjudica un punto para sumar a los que haya conseguido en los partidos anteriores y el que pierde no aumenta su número de puntos. La serie de partidos termina cuando un equipo consigue superar al otro en dos puntos, es decir, después de un partido, si ambos han conseguido los mismos puntos o uno supera al otro en un solo punto se realiza otro partido, en caso contrario la competición (o juego) ha terminado.

Llamaremos X a la variable aleatoria que representa el número de partidos realizados hasta el momento en que termina la competición. Las variables aleatorias, Y_1 e Y_2 serán el número de puntos conseguidos respectivamente por los equipos A y B al terminar la competición. La variable aleatoria Z será el número de puntos conseguido por el equipo vencedor.

Obtener:

a) la distribución de X,
b) la distribución de (Y_1, Y_2) y la marginal de Y_1,
c) la distribución de Z,
d) la función generatriz de probabilidad de X,
e) $E(X)$, $E(X(X-1))$ y $Var(X)$,
f) la función generatriz de probabilidad de (Y_1, Y_2),
g) $E(Y_1)$, $E(Y_1(Y_1-1))$, $Var(Y_1)$, $E(Y_1 Y_2)$, $Cov(Y_1, Y_2)$,
h) ecuación de la recta de regresión de Y_2 respecto de Y_1.

2. La variable (X,Y) tiene una distribución con función de densidad

$$f(x,y) = e^{y-x} \quad \text{si} \quad x \in (a,+\infty), y \in (-\infty,a)$$
$$f(x,y) = 0 \qquad \text{en el resto}$$

donde a es una constante. Llamamos $Z = X + Y$.

Obtener:
a) las funciones de densidad marginales de las variables X e Y,
b) la función característica de la variable aleatoria Z,
c) un valor c (si este existe) tal que la variable aleatoria $U = Z-c$ sea simétrica respecto del origen,
d) los momentos centrales de Z.

3. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones gammas de parámetros $(1, p_1)$ y , $(1, p_2)$, respectivamente.
Obtener:

1. Dos equipos de fútbol, A y B, (o de cualquier otro deporte) tienen sus fuerzas equilibradas por lo que si juegan un partido supondremos que tiene cada uno la probabilidad 1/2 de ganar (se excluye la posibilidad de empate). Los dos equipos van a realizar una competición jugando una serie de partidos. El que gana un partido se adjudica un punto para sumar a los que haya conseguido en los partidos anteriores y el que pierde no aumenta su número de puntos. La serie de partidos termina cuando un equipo consigue superar al otro en dos puntos, es decir, después de un partido, si ambos han conseguido los mismos puntos o uno supera al otro en un solo punto se realiza otro partido, en caso contrario la competición (o juego) ha terminado.

Llamaremos X a la variable aleatoria que representa el número de partidos realizados hasta el momento en que termina la competición. Las variables aleatorias, Y_1 e Y_2 serán el número de puntos conseguidos respectivamente por los equipos A y B al terminar la competición. La variable aleatoria Z será el número de puntos conseguido por el equipo vencedor.

Obtener:

a) la distribución de X,

- $X \geq 2$
- Si en el partido K, están empate, un equipo debe ganar dos partidos seguidos para terminar.

Como en el momento 0 están empate:

- Si uno gana dos seguidos, fin.
- Ninguno puede terminar en el partido 1.
- Si gana uno cada uno, empatan en el partido 2.

Por tanto, no puede terminar en un partido impar:

$$X \in \{2, 4, 6, \dots\}$$

$P(X=2) = P(A \text{ gana}, A \text{ gana}) + P(B \text{ gana}, B \text{ gana}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(\text{empate en los dos primeros}) = \frac{1}{2}$

$P(X=4) = P(\text{empate 2 primeros y } AA \text{ o } BB) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$P(X=2m) = P(\text{empate } 2m-2 \text{ primeros y } AA \text{ o } BB) = \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^m}$

$$P(X=2m) = \frac{1}{2^m} \qquad m = 1, 2, \dots$$

b) la distribución de (Y_1, Y_2) y la marginal de Y_1,

(Y_1, Y_2) será $(n, n+2)$ ó $(n+2, n)$

$P(Y_1 = n, Y_2 = n+2) = P(\text{empate } 2n \text{ primeros partidos y } BB) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+2}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$P(Y_1 = n+2, Y_2 = n) = \frac{1}{2^{n+2}}$ $n = 0, 1, \ldots$

Marginal:

$P(Y_1 = 0) = P(BB) = \frac{1}{2^2}$

$P(Y_1 = 1) = P(ABBB \text{ ó } BABB) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3}$

$P(Y_1 = n) = P(Y_1 = n, Y_2 = n+2 \cup Y_1 = n, Y_2 = n-2) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1+2^2}{2^{n+2}} = \frac{5}{2^{n+2}}$

c) la distribución de Z,

Si $X = 2m$ $\quad 2m = k+2+k = 2k+2 \to k = m-1 \to k+2 = m+1$

$P(Z = n+1) = P(X = 2n)$

$\to P(Z = n) = P(X = 2(n-1))$ //

d) la función generatriz de probabilidad de X,

$$f_X = E(t^X) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n = \frac{t^2/2}{1-t^2/2} = \frac{t^2/\cancel{2}}{\frac{2-t^2}{\cancel{2}}} = \frac{t^2}{2-t^2} \qquad |t|<\sqrt{2}$$

e) E(X), E(X(X-1)) y Var(X),

$$f_X' = E(Xt^{X-1}) \xrightarrow{1<\sqrt{2}} f_X'(1) = E(X)$$

$$f_X' = \frac{2t(2-t^2)+2t^3}{(2-t^2)^2} = \frac{4t}{(2-t^2)^2} \rightarrow f_X'(1) = \frac{4}{1} = 4 = E(X)$$

$$f_X'' = E(X(X-1)t^{X-2}) \longrightarrow f_X''(1) = E(X(X-1))$$

$$f_X'' = \frac{4(2-t^2)^2 + 4t \cdot 2(2-t^2)2t}{(2-t^2)^2}$$

$$f_X''(1) = \frac{4+4\cdot 2\cdot 2}{1} = 20 = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - 4 \rightarrow E(X^2) = 24$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 24-16 = 8$$

f) la función generatriz de probabilidad de (Y_1 , Y_2),

$$f_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = E(t_1^{Y_1} t_2^{Y_2}) = \sum_{n,m} t_1^n t_2^m \, P(Y_1=n, P_2=m) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t_1^n t_2^{n+2} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} t_1^{n+1} t_2^n \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{t_2^2}{2^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t_1t_2}{2}} + \frac{t_1^2}{2^2} \frac{1}{1-\frac{t_1t_2}{2}} = \frac{1}{1-\frac{t_1t_2}{2}} \left(\frac{t_1^2}{2^2} + \frac{t_2^2}{2^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{2-t_1t_2}\left(\frac{t_1^2+t_2^2}{4}\right) = \frac{t_1^2+t_2^2}{4-2t_1t_2}$$

g) E(Y_1), E(Y_1 (Y_1 -1)), Var(Y_1), E(Y_1 Y_2), Cov(Y_1 , Y_2),

$$E(Y_1) = \frac{\partial f}{\partial t_1}(1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{2t_1(4-2t_1t_2) + 2t_2(t_1^2+t_2^2)}{(4-2t_1t_2)^2} \xrightarrow{(1,1)} \frac{2(4-2)+2\cdot(1+1)}{2^2} = \frac{4+4}{4} = 2$$

$\vdots$

2. La variable (X,Y) tiene una distribución con función de densidad

$$f(x,y)=e^{y-x} \quad \text{si} \quad x\in(a,+\infty), y\in(-\infty,a)$$
$$f(x,y)=0 \quad \text{en el resto}$$

donde a es una constante. Llamamos $Z = X + Y$.

Obtener:

a) las funciones de densidad marginales de las variables X e Y,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{a} e^{y-x}\,dy = e^{-x}\int_{-\infty}^{a} e^{y}\,dy = e^{-x}\,e^{y}\Big]_{-\infty}^{a} = e^{-x}\left[e^{a}-0\right] = e^{a-x} \quad x\in(a,\infty)$$

$$f_X(x)=0 \quad x\in(-\infty,a)$$

$$f_Y(y)=\int_{a}^{\infty} e^{y-x}\,dx = e^{y}\left[-e^{-x}\right]_{a}^{\infty} = e^{y}\left[-0+e^{-a}\right] = e^{y-a} \quad y\in(-\infty,a)$$

$$f_Y(y)=0 \quad y\in(a,\infty)$$

b) la función característica de la variable aleatoria Z,

$$f(x,y)=e^{y-x}=e^{y-a+a-x}=e^{y-a}e^{a-x}=f_Y(y)f_X(x)$$

$\rightarrow X,Y$ indep

$\rightarrow \varphi_Z=\varphi_Y\varphi_X$

$$\varphi_Y(t)=E(e^{itY})=\int_{-\infty}^{a} e^{ity}\cdot e^{y-a}\,dy=\int_{-\infty}^{a} e^{ity+y-a}\,dy=\int_{-\infty}^{a} e^{y(it+1)-a}\,dy=e^{-a}\int_{-\infty}^{a} e^{y(it+1)}\,dy$$

$$=e^{-a}\cdot\frac{e^{y(it+1)}}{it+1}\Big]_{-\infty}^{a}=e^{-a}\,\frac{e^{a(it+1)}}{it+1}=\frac{e^{ait+a-a}}{it+1}=\frac{e^{ait}}{it+1}$$

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{a}^{\infty} e^{itx}e^{a-x}\,dx=\int_{a}^{\infty} e^{a-x+itx}\,dx=\int_{a}^{\infty} e^{a+x(it-1)}\,dx=e^{a}\,\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\Big]_{a}^{\infty}=$$

$$=e^{a}\,\frac{e^{a(it-1)}}{it-1}=\frac{e^{ait-a+a}}{it-1}=\frac{e^{ait}}{it-1}$$

$$\varphi_Z(t)=\frac{e^{ait}\cdot e^{ait}}{(it+1)(it-1)}=\frac{e^{2ait}}{-t^2-1}=\frac{-e^{2ait}}{-t^2-1}=\frac{e^{2ait}}{t^2+1}$$

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_a^{\infty} e^{itx} \cdot e^{a-x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{it(z+a)} \cdot e^{-z}\, dz = e^{ita} \int_0^{\infty} e^{-z\underbrace{(1-it)}_{a}}\, dz =$$

$x = z+a$

$dx = dz$

$$= e^{ita} \cdot \frac{\Gamma(1)}{1-it}$$

c) un valor *c* (si este existe) tal que la variable aleatoria $U = Z\text{-}c$ sea simétrica respecto del origen,

$Z = X+Y$ $\quad x \in (a, \infty)$ $\quad y \in (-\infty, a)$

¿$c = 2a$?

$\varphi_{-2a} = E(e^{i2at}) = e^{-i2at}$

$\varphi_u = \varphi_z \cdot \varphi_{2a} = \dfrac{e^{2ait}}{t^2+1} \cdot e^{-i2at} = \dfrac{1}{1+t^2}$ real $\underline{\underline{\text{OK}}}$

d) los momentos centrales de *Z*.

U simétrica $\Rightarrow$ Z simétrica respecto de $2a$ $\Rightarrow$ $\mu_n = 0$ $\forall n$ impar

$g_u(t) = \varphi_u\left(\frac{t}{i}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{i}\right)^2} = \dfrac{1}{1-t^2} = (1-t^2)^{-1}$

$g_u(t) = \sum \frac{\alpha_n}{n!} t^n$

$g_u' = -(1-t^2)^{-2} \cdot (-2t) = 2t(1-t^2)^{-2} \longrightarrow g_u'(0) = 0$

$g_u'' =$

a) la distribución conjunta de las variables aleatorias: $Z_1 = X / (X + Y)$ y $Z_2 = X + Y$.
b) el momento $\alpha_{n,m}$ de la variable aleatoria (Z_1, Z_2), así como, su coeficiente de correlación,
c) la recta de regresión de Z_1 respecto de Z_2 y la curva de regresión de Z_2 respecto de Z_1.

3. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones gammas de parámetros $(1, p_1)$ y , $(1, p_2)$, respectivamente.
Obtener:

a) la distribución conjunta de las variables aleatorias: $Z_1 = X/(X+Y)$ y $Z_2 = X + Y$.

$$\Gamma_{a,p} \sim \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} e^{-ax}$$

$$z_1 = \frac{x}{x+y} \quad z_2 = x+y \quad \left\} \begin{array}{l} z_1 = \frac{x}{z_2} \longrightarrow x = z_1 z_2 \\ y = z_2(1-z_1) \end{array} \right.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p_1)} \cdot x^{p_1-1} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p_2)} \cancel{x} y^{p_2-1} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(z_1,z_2)} \right| = \begin{vmatrix} z_2 & z_1 \\ -z_2 & 1-z_1 \end{vmatrix} = z_2(1-z_1) + z_2 z_1 = z_2$$

entonces

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} x^{p_1-1} y^{p_2-1} e^{-(x+y)}$$

$$f_{(Z_1,Z_2)}(z_1,z_2) = \frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} z_1^{p_1-1} z_2^{p_1-1} z_2^{p_2-1} (1-z_1)^{p_2-1} e^{-z_2} \cdot z_2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}} \underbrace{z_1^{p_1-1}(1-z_1)^{p_2-1}}_{f_u} \underbrace{z_2^{p_1+p_2-1} e^{-z_2}}_{f_v}$$

$$z_2 \sim \Gamma(1, p_1+p_2)$$

$$z_1 \sim B(p_1, p_2)$$

b) el momento $\alpha_{n,m}$ de la variable aleatoria (Z_1, Z_2), así como, su coeficiente de correlación,

$$\alpha_{n,m} = E(z_1^n z_2^m) \underset{\text{indeps}}{=} E(z_1^n) E(z_2^m) = \text{¿?} \quad (p_1+p_2+m-1)^{(m)} \qquad n < p_2$$

Corr $= 0$, por ser indeps.

• B tiene $f(x) = \frac{1}{B(p,q)} \cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad x \in (0,1)$

$$\longrightarrow \alpha_n = E(B^n) = \int_0^1 \frac{x^n}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 x^{p+n-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{B(p+n,q)}{B(p,q)} = \text{¿?}$$

correlación;

c) la recta de regresión de Z_1 respecto de Z_2 y la curva de regresión de Z_2 respecto de Z_1.

$$z_1 = \frac{\cancel{\sigma_{z_1 z_2}}^{\,0}}{\sigma_{z_2}^2}(z_2-\mu_2)+\mu_1 = \mu_1 \qquad \alpha_{n,m} = \frac{B(p+n,q)}{B(p,q)} \cdot (p_1+p_2+m-1)^{(m)}$$

$$\mu_1 = \alpha_{1,0} = \frac{B(p_1+1,p_2)}{B(p_1,p_2)} = \frac{\Gamma(p_1+1)\cancel{\Gamma(p_2)}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} \cdot \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\cancel{\Gamma(p_2)}} = \frac{p_1 \cdot \cancel{\Gamma(p_1)}}{(p_1+p_2)\cancel{\Gamma(p_1+p_2)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(p_1+p_2)}}{\cancel{\Gamma(p_1)}} = \frac{p_1}{p_1+p_2}$$

$$\boxed{z_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2}}$$

$$z_2 = m_{2|1}(z_1) = E(z_2 / z_1 = z_1) \overset{\text{indep}}{=} E(z_2) = \mu_2$$

$$\mu_2 = \alpha_{0,1} = p_1+p_2$$

$$\boxed{z_1 = p_1+p_2}$$

Ampliación de Probabilidad y Procesos Relación 5 (Abril 2021)

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con distribución uniforme en el recinto C, donde $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 0, x + y > 1, x + 2y < 2 \}$.
Calcular
a) las funciones de densidad de X y de Y,
b) los momentos $\alpha_{n,m}$,
c) la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y.
d) la curva de regresión de Y respecto de X.
e) Estudiar si existe con valor finito la función generatriz de momentos de la variable Y. En caso afirmativo obtener a partir de dicha función los momentos de Y.

2. a) Sean $X_1, \ \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias. Demostrar que

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j X_j \right) = \sum_{i,j} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j \right).$$

b) Sea $\left(X_1, \ \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n\right)$ una variable aleatoria de dimensión $m+n$, tal que, $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \mathrm{Var}\left(Y_j\right) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = c_1$, $i \neq j$, $\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = c_2$, $i \neq j$ y $\mathrm{Cov}\left(X_i, Y_j\right) = c_3$. Sean las variables aleatorias $U = \sum_{i=1}^{m} X_i$ y $V = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Obtener la matriz de covarianzas de la variable aleatoria bidimensional (U, V) y el coeficiente de correlación entre U y V.

3. Sean a y b reales, $a < b$, X variable aleatoria con distribución definida por

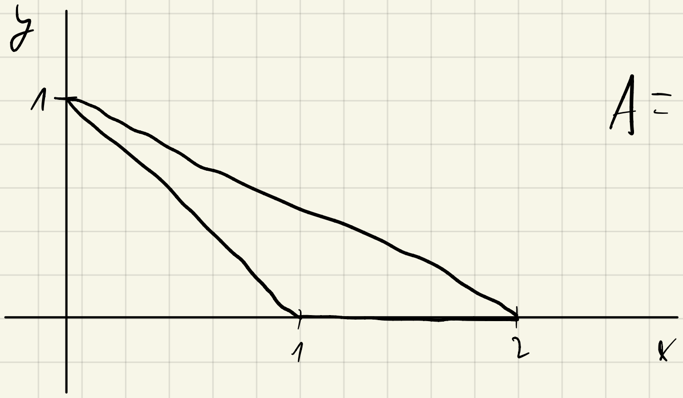
$$P\left(X = a\right) = P\left(X = b\right) = \frac{1}{2} \ .$$

a) Sean X e Y independientes, X con la distribución definida anteriormente e Y con distribución uniforme en el intervalo (a, b) y $V = X + Y$. Calcular la función característica de V.
b) Indicar qué distribución tiene la variable aleatoria V. Obtener el valor de la derivada n-ésima de la función característica de V en el origen sin derivar esta función.
c) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes todas ellas con la misma distribución que X y $U = X_1 + \ldots + X_n$. Calcular la función característica de la variable aleatoria U. Determinar un valor c tal que la variable aleatoria $U - c$ sea simétrica respecto del origen.

1. Sea (X, Y) una variable aleatoria con distribución uniforme en el recinto C, donde $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 0,\ x + y > 1,\ x + 2y < 2 \ \}$.

Calcular

a) las funciones de densidad de X y de Y,



$$A = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow k = 2$$

$$f(x,y) = k$$

$$f(x) = \int f(x,y)\,dy$$

$x \in (0,1)$:
$$f_X(x) = \int_{1-x}^{1-\frac{x}{2}} k\,dy = k y \Big]_{1-x}^{1-\frac{x}{2}} = k\left(x - \frac{x}{2}\right) = k \cdot \frac{x}{2} = x$$

$x \in (1,2)$:
$$f_X(x) = \int_0^{1-\frac{x}{2}} k\,dy = k\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 2\,\frac{2-x}{2} = 2 - x$$

$y \in (0,1)$:
$$f_Y(y) = \int_{1-y}^{2-2y} k\,dx = k(2-2y-1+y) = k\,(1-y) = 2(1-y)$$

b) los momentos $\alpha_{n,m}$,

$$\alpha_{n,m} = E(X^n Y^m) = \int x^n \cdot y^m \cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 y^m \int_{1-y}^{2-2y} 2x^n\,dx\,dy = 2\int_0^1 y^m \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{1-y}^{2-2y} dy =$$

$$= 2\int_0^1 y^m \frac{2^{n+1}(1-y)^{n+1} - (1-y)^{n+1}}{n+1}\,dy = 2\int_0^1 y^m \frac{(2^{n+1}-1)(1-y)^{n+1}}{n+1}\,dy$$

$$= \frac{2^{n+2}-2}{n+1} B(m+1, n+2) = \frac{2^{n+2}-2}{n+1} \cdot \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+2)}{\Gamma(m+n+3)} = \frac{2^{n+2}-2}{n+1} \cdot \frac{m!\,(n+1)!}{(m+n+2)!} =$$

$$= (2^{n+2}-2)\,\frac{m!\,n!}{(m+n+2)!}$$

c) la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y.

$$\boxed{y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)+\mu_y}$$

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\mu_y)+\mu_x$$

$$(2^{n+2}-2)\,\frac{m!\,n!}{(m+n+2)!}$$

$$\mu_x = \alpha_{1,0} = (2^3-2)\cdot\frac{0!\,1!}{3!} = \frac{6}{3!} = 1$$

$$\mu_y = \alpha_{0,1} = (2^2-2)\cdot\frac{1!\,0!}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) = \alpha_{0,2} = (2^2-2)\cdot\frac{2!\,0!}{4!} = 2\cdot\frac{2}{4!} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{6}-\frac{1}{9} = \frac{9-6}{54} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma_{xy} = \alpha_{11} - E(X)E(Y) = (2^3-2)\,\frac{1!\,1!}{4!} - \frac{1}{3} = \frac{6}{4!}-\frac{1}{3} = \frac{1}{4}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$x = \frac{-1/12}{1/18}\left(y-\frac{1}{3}\right)+1 = -\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)+1 = -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}$$

d) la curva de regresión de Y respecto de X.

$$E(X^2) = \alpha_{20} = (2^4-2)\cdot\frac{2!\,0!}{4!} = \frac{4\cdot 7}{4!} = \frac{7}{6}$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2)-E(X)^2 = \frac{7}{6}-1 = \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{-1/12}{1/6}(x-1)+\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3} = -\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$$

e) Estudiar si existe con valor finito la función generatriz de momentos de la variable Y. En caso afirmativo obtener a partir de dicha función los momentos de Y.

$$g(t) = E(e^{tY}) = \int_0^1 e^{ty} \cdot 2(1-y)\,dy \overset{\text{conv. } \forall t}{=} 2\int_0^1 e^{ty}\,dy - 2\int_0^1 y e^{ty}\,dy = 2\left.\frac{e^{ty}}{t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 y e^{ty}\,dy =$$

$$= 2\cdot\frac{\cancel{e^t} - 1}{t} - 2\frac{\cancel{e^t}}{t} + 2\frac{e^t - 1}{t^2} = 2\,\frac{e^t - t - 1}{t^2}$$

$$\int_0^1 y e^{ty}\,dy = y\cdot\left.\frac{e^{ty}}{t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{ty}}{t}\,dy = \frac{e^t}{t} - \left.\frac{e^{ty}}{t^2}\right]_0^1 = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t - 1}{t^2}$$

$u = y,\ du = dy$

$dv = e^{ty}dy,\ v = \frac{e^{ty}}{t}$

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0$$

$$g(t) = \frac{2(e^t - t - 1)}{t^2} = \frac{2\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} - t - 1\right)}{t^2} = 2\cdot\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}}{t^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n!}t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}\cdot t^n$$

$$\longrightarrow \alpha_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

2. a) Sean $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ variables aleatorias. Demostrar que

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j X_j\right) = \sum_{i,j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j X_j\right) = E\left[\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)\left(\sum_j X_j - E\left(\sum_j X_j\right)\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_i X_i - \sum_i E(X_i)\right)\left(\sum_j X_j - \sum_j E(X_j)\right)\right] = E\left[\sum_i (X_i - E(X_i)) \sum_j (X_j - E(X_j))\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i,j} (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right] = \sum_{i,j} E\left[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right] =$$

$$= \sum_{i,j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \quad //$$

b) Sea $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ una variable aleatoria de dimensión $m+n$, tal que, $\operatorname{Var}(X_i) = \operatorname{Var}(Y_j) = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y para todo $j = 1, 2, \dots, n$, $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = c_1$, $i \neq j$, $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = c_2$, $i \neq j$ y $\operatorname{Cov}(X_i, Y_j) = c_3$. Sean las variables aleatorias $U = \sum_{i=1}^{m} X_i$ y $V = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Obtener la matriz de covarianzas de la variable aleatoria bidimensional (U, V) y el coeficiente de correlación entre U y V.

$$\operatorname{Var}(U) = \operatorname{Cov}(U,U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} c_1 + 1 \right) = \sum_{i=1}^{m} (m-1)c_1 + 1 = m + m(m-1)c_1$$

Análogamente, $\operatorname{Var}(V) = n + n(n-1)c_2$

$\operatorname{Cov}(U,V) = n \cdot m \cdot c_3$

Y es

$$M = \begin{pmatrix} m + m(m-1)c_1 & nmc_3 \\ nmc_3 & n + n(n-1)c_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(U)\operatorname{Var}(V) = mn + mn(n-1)c_2 + mn(m-1)c_1 + mn(m-1)(n-1)c_1c_2 = mn\left(1 + (n-1)c_2 + (m-1)c_1 + (m-1)(n-1)c_1c_2\right) \quad \circledast$$

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{n \cdot m \cdot c_3}{\sqrt{\circledast}}$$

3. Sean a y b reales, $a < b$, X variable aleatoria con distribución definida por

$$P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}.$$

a) Sean X e Y independientes, X con la distribución definida anteriormente e Y con distribución uniforme en el intervalo (a, b) y $V = X + Y$. Calcular la función característica de V.

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{ita}\cdot\frac{1}{2} + e^{itb}\cdot\frac{1}{2} = \frac{e^{ita} + e^{itb}}{2}$$

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = \int_a^b e^{ity}\cdot\frac{1}{b-a}\,dy = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{e^{ity}}{it}\right]_a^b = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\varphi_V = \varphi_X\varphi_Y = \frac{[e^{ita} + e^{itb}][e^{itb} - e^{ita}]}{2it(b-a)} = \frac{e^{2itb} - e^{2ita}}{2it(b-a)}$$

b) Indicar qué distribución tiene la variable aleatoria V. Obtener el valor de la derivada n-ésima de la función característica de V en el origen sin derivar esta función.

$$\varphi_V = \frac{1}{2(b-a)}\cdot\int_{2a}^{2b} e^{itv}\,dv = E(e^{itV}) \Rightarrow V \text{ uniforme en } [2a, 2b]$$

Sabemos que $\varphi^n(0) = \alpha_n$

$$\text{y}\quad \alpha_n = E(V^n) = \int_{2a}^{2b} v^n\cdot\frac{1}{2(b-a)}\,dv = \frac{1}{2(b-a)}\left.\frac{v^{n+1}}{n+1}\right]_{2a}^{2b} = \frac{2^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})}{2(b-a)(n+1)} = 2^n\,\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

c) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes todas ellas con la misma distribución que X y $U = X_1 + \ldots + X_n$. Calcular la función característica de la variable aleatoria U. Determinar un valor c tal que la variable aleatoria $U - c$ sea simétrica respecto del origen.

$$\varphi_U = \varphi_X^{\,n} = \left(\frac{e^{ita} + e^{itb}}{2}\right)^n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ita(n-k)} e^{itbk}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} e^{ita(n-k)} e^{itbk}$$

$$\rightarrow P(U = a(n-k) + bk) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

$c = \frac{n(b+a)}{2}$

$\Uparrow$

$$\varphi_U = \frac{1}{2^n}\left(e^{ita} + e^{itb}\right)^n = e^{itn\frac{b+a}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{-it\frac{b-a}{2}} + \frac{1}{2}e^{it\frac{b-a}{2}}\right)^n = e^{itn\frac{b+a}{2}}\cdot\cos^n\left(\frac{t(b-a)}{2}\right)$$

Sea Y una v.a. tal que $P\left(Y = -\frac{b-a}{2}\right) = P\left(Y = \frac{b-a}{2}\right) = \frac{1}{2}$, y sean $Y_1, \ldots, Y_n$ con dicha distr. y $\sum Y_i$ tiene distrib. que es real //