Teorema de Stone-Weierstrass

Jose Antonio Lorencio Abril

Vamos a ver el teorema de Stone-Weierstrass, un resultado que generaliza el teorema de Weierstrass de aproximación polinómica de aplicaciones continuas definidas en un intervalo cerrado. Necesitamos la siguiente definición y algunos resultados previos:

Definition 1. $C(X)$ será el álgebra de las funciones reales con dominio en el espacio topológico X, con la subálgebra de las funciones acotadas en $C(X)$ denotada por $C^*(X)$.
La topología con la que trabajaremos en $C^*(X)$ es la inducida por la métrica $d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$, que se denomina la **métrica uniforme**, porque induce en $C^*(X)$ la topología de la convergencia uniforme.

Esta última frase quiere decir que si X es compacto, entonces $C^*(X) = C(X)$ es completo en esta métrica.
Antes de poder probar el teorema de Stone-Weierstrass, necesitamos una versión débil del teorema clásico de Weierstrass:

Lemma 2. *Para cada $\varepsilon > 0$, hay un polinomio $P_\varepsilon(x)$ tal que*

$$||x| - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

para cada $x \in [-1,1]$

Proof. Por inducción:
Definimos en $x \in [0,1]$, $P_0(x) = 0$ y $P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{x - P_k^2(x)}{2}$.
Veamos que $\forall k \geq 0$, se tiene $0 \leq P_k(x) \leq \sqrt{x}$ y $P_k \leq P_{k+1}$.
[$k = 0$] Obvio
[$k+1$] Si es cierto para k, entonces $0 \leq P_k(x)^2 \leq x \implies x - P_k(x)^2 \geq 0$ y $P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{x-P_k(x)^2}{2} \geq P_k(x) \geq 0$.

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right)\left(\sqrt{x} - P_k(x)\right) \overset{*}{\leq} P_k(x) + \left(\sqrt{x} - P_k(x)\right) = \sqrt{x}$$

Donde la desigualdad $*$ es cierta porque $0 \leq P_k(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$, por lo que $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right) \leq 1$.
Por tanto, para $x \in [0,1]$, $(P_k(x))_k$ es monótona creciente y acotada por 1, $(P_k)_k$ converge puntualmente a cierta función $P \leq \sqrt{x}$.
Tomando límites en la ecuación recursiva, se tiene que

$$P(x) = P(x) + \frac{x - P(x)^2}{2} \implies P(x)^2 = x$$

Como $P(x) \geq 0$, es $P(x) = \sqrt{x}$, continua y la convergencia es uniforme por el teorema de Dini.
Dado ahora $\varepsilon > 0$, tomamos k tal qeu $|P_k(x) - \sqrt{x}| < \varepsilon, \ \forall x \in [0,1]$.

Definimos $q(y) = P_k(y^2)$ para $y \in [-1,1]$, como P_k es un polinomio, también lo es q, y para todo $y \in [-1,1]$ se verifica

$$|q(y) - |y|| = \left|P_k(y^2) - \sqrt{y^2}\right| < \varepsilon$$

□

Este lema solo lo necesitamos para establecer el siguiente lema, crítico para la prueba del teorema general.

Lemma 3. *Cualquier subálgebra uniformemente cerrada $\mathcal{A}$ de $C^*(X)$ es un retículo. O sea, si $f, g \in \mathcal{A} \implies \min(f,g), \max(f,g) \in \mathcal{A}$*

Proof. Se tiene que

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$$
$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$$

y entonces basta ver que, siempre que $f \in \mathcal{A}$, se tiene $|f| \in \mathcal{A}$.
Supongamos, primero, que $|f| \leq 1$ en X. Entonces, por el Lemma 2, para cada $\varepsilon > 0$,existe un polinomio P_ε tal que

$$|P_\varepsilon(f) - |f|| < \varepsilon$$

y entonces $|f|$ puede aproximarse uniformemente por las funciones $P_\varepsilon(f)$, que todas están en $\mathcal{A}$ por ser polinomios en $f \in \mathcal{A}$.
Si no es $|f| \leq 1$ en X, no importa, ya que sabemos que es acotada porque $\mathcal{A} \subset C^*(X)$, por lo que $|f| \leq A$. Podemos aplicar el razonamiento anterior a $\left|\frac{f}{A}\right| \in \mathcal{A}$.
Por tanto, $|f| \in \mathcal{A}$. □

Definition 4. Si $\mathcal{D}$ es una subcolección de $C^*(X)$, **la subálgebra $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ generada por D** es la menor subálgebra de $C^*(X)$ que contiene a $\mathcal{D}$. Siempre existe, pues la intersección de subálgebras conteniendo a $\mathcal{D}$ es una subálgebra. Además, la clausura uniforme $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ es una subálgebra, llamada la **subálgebra uniformemente cerrada generada por $\mathcal{D}$**.

El teorema de Stone-Weierstrass proporciona un conjunto de condiciones para $\mathcal{D}$, bajo las cuales la subálgebra uniformemente cerrada generada por $\mathcal{D}$ es todo $C^*(X)$.
Recordemos que una colección de funciones **separa puntos** si, y solo si, siempre que $x \neq y$ en X, entonces existe alguna función f tal que $f(x) \neq f(y)$.

Theorem 5. ***Stone-Weierstrass***
Sea X un espacio Hausdorff compacto.
Si $\mathcal{D}$ es una colección de funciones en $C^*(X)$ que separa puntos en X y contiene la función constante 1, entonces la subálebra uniformemente cerrada generada por $\mathcal{D}$ es todo $C^*(X)$.

Proof. Vamos a ver que toda función $f \in C^*(X)$ puede ser aproximada uniformemente por funciones de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.
Para esto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\inf_{x \in X} f(x) < \sup_{x \in X} f(x)$$

(Si no, f es constante, y como $\mathcal{D}$ contiene a 1, entonces $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$). De esta forma, podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $\inf_{x\in X} f(x) = -1$ y $\sup_{x\in X} f(x) = 1$, de forma que $f : X \to [-1, 1]$. Sean $A_1 = \left\{x \in X | f(x) \leq -\frac{1}{3}\right\}$ y $B_1 = \left\{x \in X | f(x) \geq \frac{1}{3}\right\}$. Para cada $a \in A_1$ y $b \in B_1$ existe una función h_{ab} con $h_{ab}(a) \neq h_{ab}(b)$ porque $\mathcal{D}$ separa puntos. Definimos g_{ab} por

$$g_{ab}(x) = -\frac{4}{3}\frac{h_{ab}(x) - h_{ab}(b)}{h_{ab}(a) - h_{ab}(b)} + \frac{2}{3}$$

Entonces $g_{ab}(a) = -\frac{2}{3}$, $g_{ab}(b) = \frac{2}{3}$ y $g_{ab} \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.
Fijemos $a \in A_1$, para cada $y \in B_1$, $g_{ay}(y) = \frac{2}{3}$ por lo que $g_{ay}(z) \geq \frac{1}{3}$ para $z \in U_y \in \mathcal{E}(y)$. Una cantidad finita de estos entornos, digamos $U_{y_1}, ..., U_{y_n}$ cubre B_1, y una función g_a puede ahora ser definida para cada $x \in X$ mediante

$$g_a(x) = \min\{g_{ay_1}(x), ..., g_{ay_n}(x)\}$$

Notemos que $g_a(a) = -\frac{2}{3}$ y que $g_a \geq \frac{1}{3}$ en B_1, además $g_a \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$.
Repitiendo este procedimiento en A_1, podemos encontrar una función $g \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ de tal forma que $g \leq -\frac{1}{3}$ en A_1 y $g \geq \frac{1}{3}$ en B_1.
Se sigue que $|g(x) - g_a(x)| \leq \frac{2}{3}$ para $x \in A_1 \cup B_1$ y si definimos

$$h_0(x) = \min\left\{g(x), \frac{1}{3}\right\}$$

$$h_1(x) = \max\left\{h_0(x), -\frac{1}{3}\right\}$$

Entonces $h_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ y $|h_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ en $X \setminus (A_1 \cup B_1)$, mientras que $|f(x)| \leq \frac{1}{3}$ en $X \setminus (A_1 \cup B_1)$.
Esto, junto con el hecho de que $h_1(x) = g(x)$ en $A_1 \cup B_1$, nos proporciona la relación

$$\|f - h_1\| \leq \frac{2}{3}$$

Repitiendo el proceso a la función $f - h_1$ y el intervalo $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, podemos obtener una función $h_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ tal que

$$\|f - h_1 - h_2\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Y, en general, encontraremos funciones $h_1, ..., h_n \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ tales que

$$\|f - (h_1 + ... + h_n)\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

de donde $f \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$. $\square$

Y por último obtenemos el teorema clásico de Weierstrass como corolario de este teorema:

Corollary 6. ***Teorema de Weierstrass***
Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

Proof. La afirmación es que $C^*[a, b]$ es la clausura uniformemente cerrada del álgebra $\mathcal{A}$ de los polinomios en $[a, b]$. Pero $\mathcal{A}$ es el álgebra generada por el conjunto $\mathcal{D}$ consistente en las funciones x (la identidad) y 1, por lo que $\mathcal{D}$ satisface las condiciones del teorema de Stone-Weierstrass, y por lo tanto la clausura uniformemente cerrada de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ es, de hecho, todo $C^*[a, b]$, como queríamos ver. $\square$