Tarea Opcional: Prueba de Von Neumann del Teorema de Radon-Nikodym

Jose Antonio Lorencio Abril

10/2021

John Von Neumann fue un gran matemático (además de físico, economista e incluso estratega militar) del siglo XX. A él le debemos la arquitectura básica de los procesadores con los que funcionan la mayoría de ordenadores del mundo, la teoría de juegos y otros muchos avances e investigaciones.
Von Neumann destacó por su habilidad matemática durante toda su vida, y ahora vamos a estudiar la prueba que propuso para el teorema de Radon-Nikodym.
Realmente, se apoya en el Teorema de Descomposición de Lebesgue, a partir del cual el teorema de Radon-Nikodym es casi trivial, y que reza así:

Theorem 1. ***Teorema de descomposición de Lebesgue***
Si μ y ν son dos medidas finitas en $(\Omega, \mathcal{F})$ entonces existe una función medible (respecto a ambas medidas) no negativa f y un conjunto μ-nulo B, tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu + \nu(A \cap B)$$

para cada $A \in \mathcal{F}$.

Proof. **Demostración de Von Neumann**
Sea $\pi = \mu + \nu$ y consideremos el siguiente operador

$$T(f) = \int f d\nu$$

que es obviamente lineal, pues lo es la integral. Más aún, para $f \in L^2(\pi)$, tenemos

$$|T(f)| = \left|\int f d\nu\right| = \sqrt{\left|\int f d\nu\right|^2} \leq \sqrt{\int |f|^2 d\nu} = \|f\|_{L^2}$$

por tanto, es un operador lineal en $L^2(\pi)$, que es de Hilbert.
Por el Teorema de Representación de Reisz para espacios de Hilbert (visto en la asignatura), existe $h \in L^2(\pi)$ tal que

$$T(f) = \int f d\nu = \int f h d\pi = \int f h (d\mu + d\nu) = \int f h d\mu + \int f h d\nu \qquad (*)$$

Ahora, consideramos los siguientes conjuntos:

$$N = \{h < 0\}$$

$$M = \{0 \leq h < 1\}$$

$$B = \{h \geq 1\}$$

Entonces, por $(*)$, se tiene

$$0 \geq \int_N h d\pi = \int h \mathcal{X}_N d\pi = \int_N h d\mu + \int_N h d\nu$$

y

$$\int h \mathcal{X}_N d\pi = T(\mathcal{X}_N) = \int \mathcal{X}_N d\nu = \nu(N)$$

Entonces $\nu(N) \leq 0 \implies \nu(N) = 0$, además esto hace que $\int_N h d\mu = 0$ y por tanto ha de ser $\mu(N) = 0$, pues en otro casi sería $\int_N h d\mu < 0$ y obtendríamos una contradicción.
Ahora, tenemos que

$$\nu(B) = T(\mathcal{X}_B) = \int_B h d\mu + \int_B h d\nu \geq \nu(B) + \mu(B) \implies \mu(B) = 0$$

Para el conjunto restanto, consideremos

$$M_n = \left\{0 \leq h \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$$

y entonces, por $(*)$ tenemos

$$\int f d\nu = \int f h d\nu + \int f h d\mu \implies \int (1-h) f d\nu = \int f h d\mu$$

y, en particular, es

$$\nu(M_n) = \int \mathcal{X}_{M_n} d\nu = \int \frac{\mathcal{X}_{M_n}}{(1-h)} (1-h) d\nu = \int \frac{\mathcal{X}_{M_n}}{(1-h)} h d\mu$$

Sea $f = \frac{h}{1-h}$, entonces, dado que $\mu(B) = \mu(N) = 0$ (entonces toda la masa de f está en M, y por tanto, si aporta algo a la integral es porque está en M) y por el teorema de la convergencia monótona ($\mathcal{X}_{M_n}$ es una sucesión creciente), se tiene que

$$\nu(M \cap A) = \int_A f d\mu$$

Por tanto

$$\nu(A) = \cancel{\nu(A \cap N)} + \nu(A \cap M) + \nu(A \cap B) = \int_A f d\mu + \nu(A \cap B)$$

□

Introducimos ahora una noción importante:

Definition 2. Una medida ν es **absolutamente continua** con respecto a μ, y se denota $\mu >> \nu$, si siempre que $\mu(A) = 0$, entonces $\nu(A) = 0$.

El teorema de Radon-Nikodym trata sobre esto, y fundamentalmente dice que ν tiene una densidad con respecto a μ.

Corollary 3. ***Teorema de Radon-Nikodym***
Una medida (sigma) finita ν es absolutamente continua con respecto a otra medida (sigma) finita μ si, y solo si, existe una función medible f tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proof. $[\Longleftarrow]$ $\mu(A) = 0 \implies \int_A g d\mu = 0, \forall g\ \mu - medible$, en particular $\nu(A) = \int_A f d\mu = 0$ y entonces $\mu >> \nu$.
$[\Longrightarrow]$ Por el teorema anterior

$$\nu(A) = \int_A f d\mu + \nu(A \cap B)$$

pero si seguimos la demostración dada anteriormente, vemos que $\mu(B) = 0$, y como suponemos que $\mu >> \nu$, entonces $\nu(B) = 0$ y se tiene $\nu(A \cap B) = 0$, por lo que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

y tenemos el resultado buscado. $\square$