Tarea 1

Jose Antonio Lorencio Abril

a)

Por un lado, tenemos que

$$(JV)'(t) = (N(t) \wedge V(t))' = N'(t) \wedge V(t) + N(t) \wedge V'(t)$$

Por otro, sabemos que la derivada covariante es

$$\frac{D(JV)}{dt}(t) = (JV)'(t) - \left\langle (JV)'(t), N(t) \right\rangle N(t) =$$

$$= N'(t) \wedge V(t) + N(t) \wedge V'(t) - \left\langle N'(t) \wedge V(t) + N(t) \wedge V'(t), N(t) \right\rangle N(t) =$$

$$= N'(t) \wedge V(t) + N(t) \wedge V'(t) - \left\langle N'(t) \wedge V(t), N(t) \right\rangle N(t) - \left\langle N(t) \wedge V'(t), N(t) \right\rangle N(t)$$

Ahora bien, dado que $N(t) \wedge V'(t) \perp N(t)$, entonces $\langle N(t) \wedge V'(t), N(t) \rangle = 0$. Por tanto

$$\frac{D(JV)}{dt}(t) = N'(t) \wedge V(t) + N(t) \wedge V'(t) - \left\langle N'(t) \wedge V(t), N(t) \right\rangle N(t)$$

Como $\|N(t)\| = 1 \iff \langle N(t), N(t) \rangle = 1 \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} 2\langle N'(t), N(t) \rangle = 0 \implies N'(t) \perp N(t)$. También sabemos que $V(t) \perp N(t)$, ya que $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Esto quiere decir que

$$N'(t) \wedge V(t) \parallel N(t)$$

O sea, que

$$N'(t) \wedge V(t) = \lambda N(t)$$

Por tanto

$$\frac{D(JV)}{dt}(t) = \lambda N(t) + N(t) \wedge V'(t) - \langle \lambda N(t), N(t) \rangle N(t) = N(t) \wedge V'(t) + \lambda N(t) - \lambda N(t) = N(t) \wedge V'(t)$$

Y, desde el otro lado

$$J\frac{DV}{dt}(t) = N(t) \wedge \left[V'(t) - \left\langle V'(t), N(t) \right\rangle N(t)\right] \overset{*}{=} N(t) \wedge V'(t) = \frac{D(JV)}{dt}(t)$$

Donde $*$ se debe a la distributividad del producto vectorial y a que $N(t) \wedge N(t) = 0$. Y tenemos el resultado buscado.

b)

V es paralelo a lo largo de $\alpha \iff \frac{DV}{dt} = \overrightarrow{0} \iff J\frac{DV}{dt} = 0 \overset{a)}{\iff} \frac{D(JV)}{dt} = 0 \iff JV$ es paralelo a lo largo de α

c)

[$\Longleftarrow$] Si tenemos $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo a lo largo de α $\left(\frac{DV}{dt} = 0\right)$, entonces, por b), también JV es paralelo a lo largo de α $\left(\frac{D(JV)}{dt} = 0\right)$. Así, si tenemos un campo $W = aV + bJV$, claramente se tiene $W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, puesto que, en cada punto, es combinación lineal de vectores pertenecientes al plano tangente. Además

$$\frac{DW}{dt} = a\frac{DV}{dt} + b\frac{D(JV)}{dt} = 0$$

Y W es paralelo a lo largo de α.

[$\Longrightarrow$] Supongamos ahora que W es paralelo a lo largo de α, entonces verifica la EDO

$$(*) \qquad \begin{cases} W' + \langle W, N' \rangle N = 0 \\ W(t_0) = \overrightarrow{w_0} \end{cases}$$

para cierto $t_0 \in I$.

De igual forma, dado que V es paralelo a lo largo de α, también lo es JV (apartado b)) y estos campos verifican las respectivas EDOs

$$\begin{cases} V' + \langle V, N' \rangle N = 0 \\ V(t_0) = \overrightarrow{v_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} JV' + \langle JV, N' \rangle N = 0 \\ JV(t_0) = \overrightarrow{jv_0} \end{cases}$$

Ahora bien, en $T_{\alpha(t_0)}S$, $\overrightarrow{v_0}$ y $\overrightarrow{jv_0}$ son vectores linealmente independientes (ya que suponemos que $V \neq 0$) y podemos escribir

$$\overrightarrow{w_0} = a\overrightarrow{v_0} + b\overrightarrow{jv_0}$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

Vamos a ver que $aV + bJV$ verifica $(*)$ y por la unicidad de soluciones dada una condición inicial, tendremos el resultado.

$$(aV + bJV)' + \left\langle aV + bJV, N' \right\rangle N =$$

$$= aV' + b(JV)' + a\left\langle V, N' \right\rangle N + b\left\langle JV, N' \right\rangle N =$$

$$= a\left(V' + \left\langle V, N' \right\rangle N\right) + b\left((JV)' + \left\langle JV, N' \right\rangle N\right) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

Y, respecto a la condición inicial

$$(aV + bJV)(t_0) = aV(t_0) + bJV(t_0) = a\overrightarrow{v_0} + b\overrightarrow{jv_0} = \overrightarrow{w_0}$$

Por lo que W y $aV + bJV$ verifican la EDO con la misma condición inicial, y la unicidad de soluciones nos permite asegurar que

$$W = aV + bJV$$