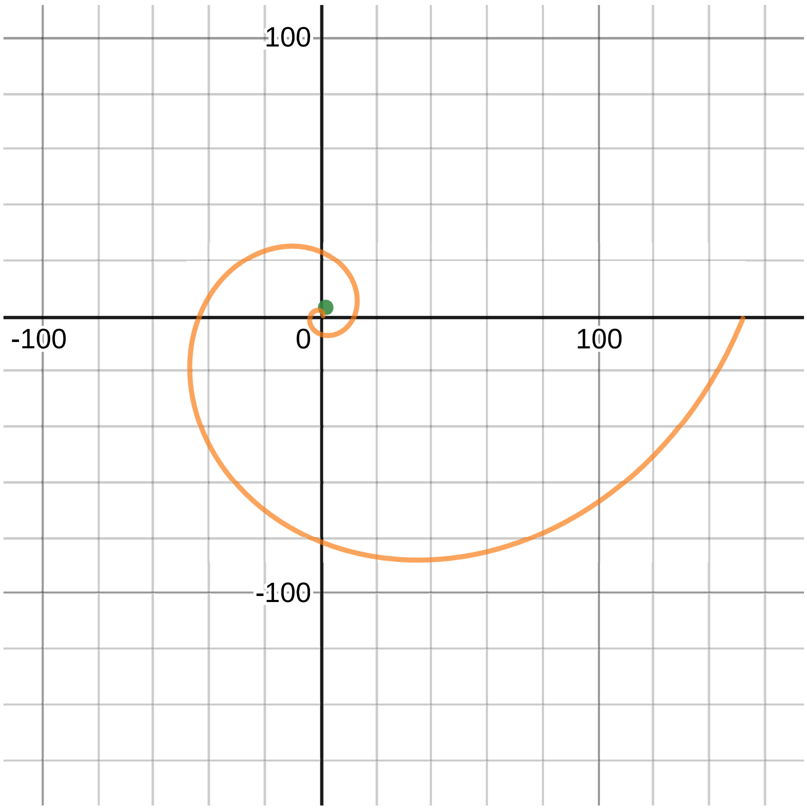
Tarea 1: La espiral logarítmica

Jose Antonio Lorencio Abril

Sea $\boldsymbol{\alpha}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por $\boldsymbol{\alpha(t) = ae^{bt}(cost, sent)}$, $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{b < 1}$. Esta curva recibe el nombre de espiral logarítmica. Calcule la función longitud de arco de la curva y encuentre su reparametrización por el arco.

La curva tiene la siguiente forma, para ciertos valores de a, b y t recorriendo cierto intervalo:



Vamos, primero, a calcular la longitud de la curva entre t_0 y t_1. O sea

$$L_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left|\alpha'(s)\right| ds$$

Ahora bien

$$\alpha'(t) = a \cdot e^{bt}\left(bcos(t) - sen(t), bsen(t) + cos(t)\right)$$

por lo que

$$\left|\alpha'(t)\right| = \sqrt{a^2 \cdot e^{2bt}\left(b^2cos^2t + sen^2t - 2b \cdot cost \cdot sent + b^2sen^2t + cos^2t + 2b \cdot cost \cdot sent\right)} =$$

$$= a \cdot e^{bt}\sqrt{b^2+1}$$

es decir

$$L_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} a \cdot e^{bt}\sqrt{b^2+1}dt = \left[\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2+1}e^{bt}\right]_{t_0}^{t_1} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\left(e^{bt_1}-e^{bt_0}\right)$$

Por el teorema 1.1.7, sabemos que existe una reparametrización por la longitud de arco, y que viene dado por la inversa de

$$s = g(t) = \int_0^t \left|\alpha'(u)\right| du = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\left(e^{bt}-1\right)$$

Así, despejamos t:

$$\frac{s\cdot b}{a\sqrt{b^2+1}} = e^{bt}-1 \implies \frac{s\cdot b}{a\sqrt{b^2+1}}+1 = e^{bt} \implies log\left(\frac{s\cdot b}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right) = bt \implies$$

$$\implies t = h(s) = \frac{1}{b}log\left(\frac{s\cdot b}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)$$

De esta manera, la reparametrización buscada es:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = ae^{log\left(\frac{s}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}\left(cos\left(\frac{1}{b}log\left(\frac{sb}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)\right), sen\left(\frac{1}{b}log\left(\frac{sb}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)\right)\right) =$$

$$= a\left(\frac{sb}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)\left(cos\left(\frac{1}{b}log\left(\frac{sb}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)\right), sen\left(\frac{1}{b}log\left(\frac{sb}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)\right)\right)$$

Para ver que, efectivamente, esto es la reparametrización correcta, debemos comprobar que $|\beta'(s)| = 1,\ \forall s$.

Siendo

$$\beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\left(\beta'_x, \beta'_y\right)$$

$$\beta'_x = b\cdot cos\left(\frac{log\left(\frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}{b}\right) - sen\left(\frac{log\left(\frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}{b}\right)$$

$$\beta'_y = b\cdot sen\left(\frac{log\left(\frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}{b}\right) + cos\left(\frac{log\left(\frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}{b}\right)$$

Y su norma, llamando $z := \frac{log\left(\frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}+1\right)}{b}$

$$\left|\beta'(s)\right| = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\sqrt{b^2cos^2z + sen^2z - 2b\cdot cosz\cdot senz + b^2sen^2z + cos^2z + 2b\cdot senz\cdot cosz} = \frac{\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{b^2+1}} = 1$$

Nótese que hemos supuesto $b \neq 0$, de no ser así, obtendríamos la curva

$$\alpha(t) = a(cost, sent)$$

que no es más que la circunferencia de radio a, cuya reparametrización vemos en el ejemplo 1.5 del libro de teoría:

$$\beta(s) = a\left(cos\frac{s}{a}, sen\frac{s}{a}\right)$$