Tarea 4: Una superficie

Demuestre que el conjunto

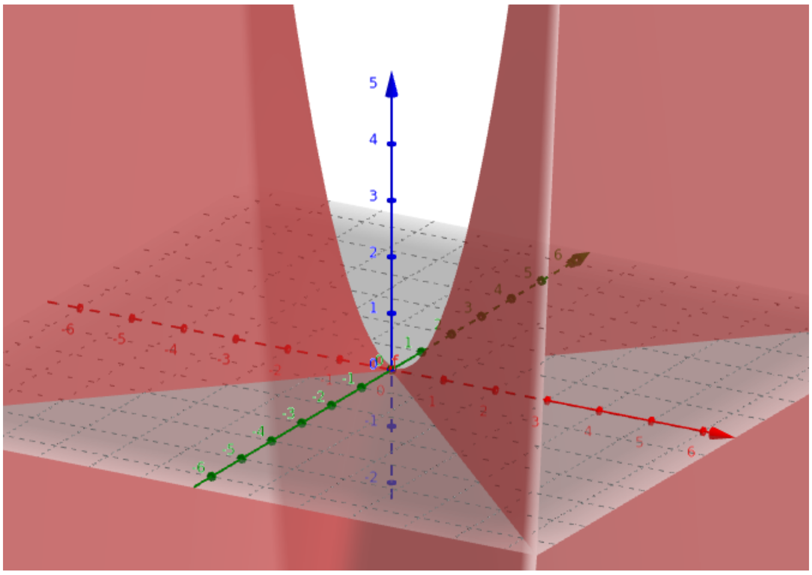
$$\boldsymbol{S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\right\}}$$

es una superficie regular y compruebe que las siguientes aplicaciones son parametrizaciones para $\boldsymbol{S}$:

- $\boldsymbol{X\left(u, v\right) = \left(u + v, u - v, 4uv\right), \ (u, v) \in \mathbb{R}^2}$
- $\boldsymbol{Y\left(u, v\right) = \left(u \cdot cosh\ v, u \cdot senh\ v, u^2\right), \ (u, v) \in R^2, \ u \neq 0}$

¿Qué parte de la superficie $\boldsymbol{S}$ recubren estas parametrizaciones?

La superficie es la siguiente:



Para ver que es una superficie regular, definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f\left(x, y\right) = x^2 - y^2$.

Entonces, tenemos que

$$S = G\left(f\right) = \left\{(x, y, f\left(x, y\right)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

si vemos que f es diferenciable, entonces S será una superficie regular, por la proposición 2.1.2.

Efectivamente, f es diferenciable pues es una función polinómica.

- Para ver que X es una parametrización de S, debemos comprobar que verifica las tres condiciones de las parametrizaciones:

- S1: Los puntos generados por X son de la forma $(u+v, u-v, 4uv)$, y serán puntos de S si

$$4uv = (u+v)^2 - (u-v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2 = 4uv\checkmark$$

  además, X es diferenciable, trivialmente.
- S2: Vamos a tratar de determinar la inversa directamente. Tenemos

$$\begin{cases} x = u+v \implies & u = x - v \\ y = u - v & \end{cases} \implies \begin{cases} u = x - v & \\ y = x - 2v \implies & v = \frac{x-y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

  Por lo que tenemos que $X^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ que es continua. Luego X es un homeomorfismo.
- S3: Por último, debemos ver que $dX(u,v)$ es inyectiva. Se tiene que

$$dX(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4v & 4u \end{pmatrix}$$

  que es inyectiva, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
- Vamos a ver, también, qué parte de S cubre X. Como X^{-1} está definida $\forall p \in \mathbb{R}^2$, entonces lo está $\forall p \in S$. Así, dado $p \in S, X^{-1}(p)$ es un punto de $\mathbb{R}^2$ cuya imagen por X es p. Es decir $X\left(\mathbb{R}^2\right) = S$.

- Ahora hacemos lo mismo para Y:
  - S1:

$$u^2cosh^2v - u^2senh^2v = u^2\left(cosh^2v - senh^2v\right) = u^2\checkmark$$

    e Y es diferenciable, pues es es C^1 en cada componente.
  - S2:

$$\begin{cases} x = ucoshv \implies u = \frac{x}{coshv} \\ y = usenhv \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} u = \frac{x}{coshv} \\ y = xtanhv \implies tanhv = \frac{y}{x} \implies v = argtanh\frac{y}{x} = log\left(\sqrt{\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}}\right) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} u = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}} = x\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = signo(x)\sqrt{x^2-y^2} \\ v = log\left(\sqrt{\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}}\right) = \frac{1}{2}log\left(\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{2}log\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \end{cases}$$

    vamos a ver si presenta problemas en algún punto. Los posibles puntos problemáticos son aquellos en que $x=0$ (porque dividimos por x), aquellos en los que $\frac{y}{x} = 1$ (porque dividimos por $1-\frac{y}{x}$) y aquellos en los que $\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \leq 0$ (porque en tal caso calcularíamos el logaritmo de un número no positivo).

$$x = 0 \iff ucoshv = 0 \iff u = 0$$

pero u es distinto de 0.

$$\frac{y}{x}=1 \iff \frac{usenhv}{ucoshv}=1 \iff senhv=coshv \iff \frac{e^v-e^{-v}}{2}=\frac{e^v+e^{-v}}{2} \iff -e^{-v}=e^{-v}$$

$$\iff 2e^{-v}=0\#$$

y esto no ocurre para ningún $v \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}=\frac{x+y}{x-y}>0 \iff \begin{cases} x+y>0,\ x-y>0 & (1) \\ x+y<0,\ x-y<0 & (2) \end{cases}$$

Para ver el caso (1), tenemos que
$x+y>0 \iff ucoshv+usenhv>0 \iff u\left(coshv+senhv\right)>0$. Ahora bien,

$$coshv+senhv=\frac{e^v+e^{-v}}{2}+\frac{e^v-e^{-v}}{2}=e^v>0$$

Por tanto, debe ser $u>0$. Pero si esto sucede, entonces

$$x-y>0 \iff u\left(coshv-senhv\right)>0 \overset{a>0}{\iff} coshv-senhv>0 \iff \frac{e^v+e^{-v}}{2}-\frac{e^v-e^{-v}}{2}=e^{-v}>0\checkmark$$

Para ver el caso (2), de igual forma se tiene que $x+y<0 \iff u<0$, y en este caso

$$x-y<0 \iff u\left(coshv-senhv\right)<0 \overset{a<0}{\iff} coshv-senhv>0\checkmark$$

Además, como hemos visto que $x \neq y$, debemos ver que $x+y \neq 0$, para no calcular el logaritmo de 0:

$$x+y=0 \iff x=-y \iff ucoshv=-usenhv \iff \frac{e^v+e^{-v}}{2}=\frac{-e^v+e^{-v}}{2} \iff e^v=-e^v$$

$$\iff 2e^v=0\#$$

Esto no se puede dar, por lo que todo funciona como nos gustaría y tenemos
$Y^{-1}\left(x,y,z\right)=\left(\sqrt{x^2-y^2},\frac{1}{2}log\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right)$, que es continua, ya que hemos visto que no puede darse $x=y$. Así, Y es un homeomorfismo.

- S3:

$$dY\left(u,v\right)=\begin{pmatrix} coshv & usenhv \\ senhv & ucoshv \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} coshv & usenhv \\ senhv & ucoshv \end{vmatrix}=ucosh^2v-usenh^2v=u\left(cosh^2v-senh^2v\right)=u\neq 0$, y tenemos la inyectividad de dY es inyectiva, como queríamos ver.

- Según lo visto en S2, tenemos que Y cubre todo S excepto los puntos de la forma $\left(\left|x\right|,\left|x\right|,0\right),\ x\in\mathbb{R}$, pues estos no están en el dominio de Y^{-1}. Pero, además, debemos descartar los puntos que no están en la imagen de Y, que son aquellos puntos de S tales que $z<0$, porque $z=u^2$, es decir, aquellos tales que $|y|>|x|$. Por lo tanto, $Y\left(U\right)=\{(x,y,z)\in S: z>0\}$, donde U es el dominio de Y.