

# Mind Tricks

Pavel & Pavel

14 сентября 2013 г.

# Оглавление

1	Задачи	2
2	Задачи на C++	7

# Глава 1

## Задачи

**Задача 1.** *Есть  $N$  чуваков, какие-то из них честные, какие-то нет. Известно, что среди них больше  $\frac{N}{2}$  честных. Все  $N$  чуваков знают друг о друге, кто честный, а кто нет. Между ними можно делать очные ставки. Берется 2 чувака, и каждый из них говорит, честный ли второй. При этом честные чуваки всегда говорят правду, а нечестные могут говорить как правду, так и неправду.*

*Требуется за  $\leq 2N$  очных ставок определить, кто честный, а кто нет (кто врет, а кто не врет).*

**Задача 2.** *Есть массив из  $2N + 1$  целых 32/64-битных чисел.  $N$  чисел встречаются ровно по 2 раза, а одно встречается только 1 раз.*

*Требуется за 1 проход по массиву определить это число.*

**Задача 3.** *Есть массив из  $2N + 2$  целых 32/64-битных чисел.  $N$  чисел встречаются ровно по 2 раза, а ДВА из них встречаются только 1 раз.*

*Требуется за  $O(N)$  определить эти 2 числа.*

**Задача 4.** *Есть массив из  $N$  чисел. Известно, что есть число, встречающееся в нём больше, чем  $\frac{N}{2}$  раз.*

*Требуется найти это число за 1 проход массива.*

**Задача 5.** *Есть массив из  $N$  чисел.*

*Придумать, как в нём найти все числа, встречающиеся больше, чем  $\frac{N}{K}$  раз, за линейное относительно  $N$  время.*

*Подсказка: сложность должна быть  $O(N \log K)$*

**Задача 6.** Есть массив чисел размером  $N$ . В нем записаны в произвольном порядке числа от 0 до  $N$ , причем каждое встречается только один раз. Т.е. есть число из данного промежутка, которое не будет представлено в массиве.

Требуется найти это отсутствующее число. При этом разрешается использовать только  $O(1)$  дополнительной памяти.

**Задача 7.** В одной стране есть деревня волшебников и деревня гномов. Раз в год волшебники приходят в деревню к гномам и проводят "зачистку".

Для этого они выстраивают гномов в одну колонну по росту. При этом каждый гном видит только гномов меньшего роста, т.е. стоящих перед ним.

На каждого гнома надевают либо белую, либо черную шляпу (предполагается, что и белых и черных шляп имеется бесконечно много).

Каждого гнома, начиная с самого высокого, спрашивают о том, какого цвета шляпа сейчас на нем.

Если гном ошибается, то его убивают (остальные гномы могут слышать ответ, но не знают, правильный он был или нет).

Какую стратегию нужно использовать гномам, чтобы минимизировать потери при "зачистке"? Сколько при оптимальной стратегии будет убито гномов?

**Задача 8.** Есть круглый стол неизвестного диаметра и бесконечное число одинаковых круглых монет. Двое играют в игру по следующим правилам: на каждом своем ходу, игрок должен положить монету на стол так, чтобы она лежала на нем полностью и не перекрывала другие монеты на столе.

Выигрывает тот, кто делает последний возможный ход (после него больше нельзя положить монету на стол).

Есть ли выигрышная стратегия для какого-нибудь из игроков? Если да, то какая и кто при ней выигрывает?

**Задача 9.** Есть строка длины  $N$ .

Требуется сделать циклический сдвиг строки на  $M$  символов за линейное (относительно  $N$ ) время, используя константное количество памяти.

**Задача 10.** *Есть строка длины  $N$ . В данной задаче будем считать словом любую последовательность символов, не содержащую пробела. В строке между словами может быть лишь один пробел.*

*Требуется инвертировать порядок слов в строке за линейное (относительно  $N$ ) время, используя константное количество памяти.*

**Задача 11.** *Есть прямоугольный торт с вырезанным из него прямоугольным куском произвольного размера и ориентации.*

*Как одним прямолинейным разрезом поделить торт на 2 равные по площади части?*

**Задача 12.** *Есть две веревки и коробок спичек. Каждая из веревок горит ровно час, но этот процесс может быть и не однородным, т.е. первая её половина может сгореть за 10 минут, а вторая - за оставшиеся 50 минут.*

*Требуется отмерять ровно 45 минут, используя только эти две веревки.*

**Задача 13.** *Есть бесконечная клетчатая лента, шириной в одну клетку, и два робота, которые стартуют в различных клетках этой ленты.*

*Оба робота работают по одной и той же программе, написанной на специальном языке. В этом языке всего несколько команд:*

- ***move\_left  $n$***  - команда для перехода влево на  $n$  шагов ( $n$  задается при написании программы);
- ***move\_right  $n$***  - команда для перехода вправо на  $n$  шагов ( $n$  задается при написании программы);
- ***if <условие>*** - оператор условного перехода;
- ***while <условие>*** - цикл с условием;
- ***mark*** - команда для того, чтобы робот пометил текущую клетку;
- ***unmark*** - команда для того, чтобы робот убрал пометку из текущей клетки, если она там была;
- ***check\_mark*** - команда, проверяющая, не помечена ли текущая клетка. Может использоваться в качестве условия;

Требуется написать такую программу для этих роботов, чтобы работая по ней, они гарантированно встретились.

**Задача 14.** Имеется круговая трасса, на которой расположено  $N$  бензоколонок. Известны расстояния между соседними бензоколонками, а также количество топлива на каждой. Имеется машина с постоянным расходом топлива, известен её изначальный запас топлива. Нужно за  $O(N)$  определить бензоколонку, начиная с которой, можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет.

**Задача 15.** В темной комнате стоит прямоугольный стол, в углах которого лежат монеты. Вам нужно зажечь свет. Свет загорится, если все монетки будут лежать вверх одинаковой стороной (либо орлом, либо решкой).

За один ход можно перевернуть любое количество монеток, но при этом после каждого хода стол поворачивается произвольным образом.

Так как же зажечь свет?

**Задача 16.** Имеется 101 монета, из которых 50 фальшивых (монеты неотличимы по внешнему виду). Каждая фальшивая тяжелее настоящей на 1 грамм. Имеются также двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разность весов на чашках.

Вася Пупкин спрятал одну из монет.

Может ли Петя Васечкин за одно взвешивание оставшихся монет определить, фальшива ли спрятанная монета?

**Задача 17.** Найти сумму  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)}$

**Задача 18.** На хоккейном поле лежат три различные шайбы. Хоккеист бьёт по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз.

Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

**Задача 19.** В Стране Чудес на заколдованном озере семь островов, с каждого из них ведет один, три или пять мостов.

Правда ли, что хотя бы один из мостов идет на берег?

Может ли оказаться так, что на берег ведут ровно два моста?

**Задача 20.** Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий - чётное.

**Задача 21.** Некий лазутчик вознамерился проникнуть в стан неприятеля. Он искусно замаскировался в кустах и стал подслушивать какой пароль говорят охране лагеря.

*Вот кто-то подходит и часовой к нему обращаясь называет число:*

*- Двадцать два.*

*Несколько подумав посетитель отвечает:*

*- Одиннадцать.*

*Часовой его пропускает.*

*Вот еще кто-то появляется и часовой к нему:*

*- Двадцать шесть.*

*Немного подумав, посетитель отвечает:*

*- Тринадцать.*

*Часовой его пропускает.*

*«Ага» - осенило лазутчика, и он вылезает из кустов и уверенной походкой направляется к охране.*

*– Сто, - говорит часовой. – Пятьдесят, отвечает лазутчик.*

*И тут же попадает в цепкие объятия охраны:*

*- Неправильно, три. Попался голубчик.*

*Какой пароль был в этой части?*

**Задача 22.** Есть 2007 монет, одна из которых фальшивая, отличающаяся от остальных по весу.

*Выясните, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая, при помощи двух взвешиваний.*

**Задача 23.** Умный продавец получил для продажи несколько пачек конвертов, по сто конвертов в пачке. 10 конвертов он отсчитывает за 10с.

*За сколько секунд он отсчитает 60 конвертов?*

*А 180 конвертов?*

## Глава 2

### Задачи на C++

**Задача 1.** *Есть 32-битовое целое число.*

*Требуется подсчитать количество единиц в двоичном представлении этого числа.*

*Предложите алгоритм с линейной (относительно числа битов) временной сложностью. С константной временной сложностью.*

**Задача 2.** *Есть 32-битовое целое беззнаковое число.*

*Требуется написать однострочное C++/C выражение, которое будет проверять, является ли это число степенью двойки.*

**Задача 3.** *Есть односвязный список.*

*Требуется определить, содержит он цикл или нет.*