基 本 力 系

Fundamental Force System

3. 力偶系的合成

先看两个力偶的合成

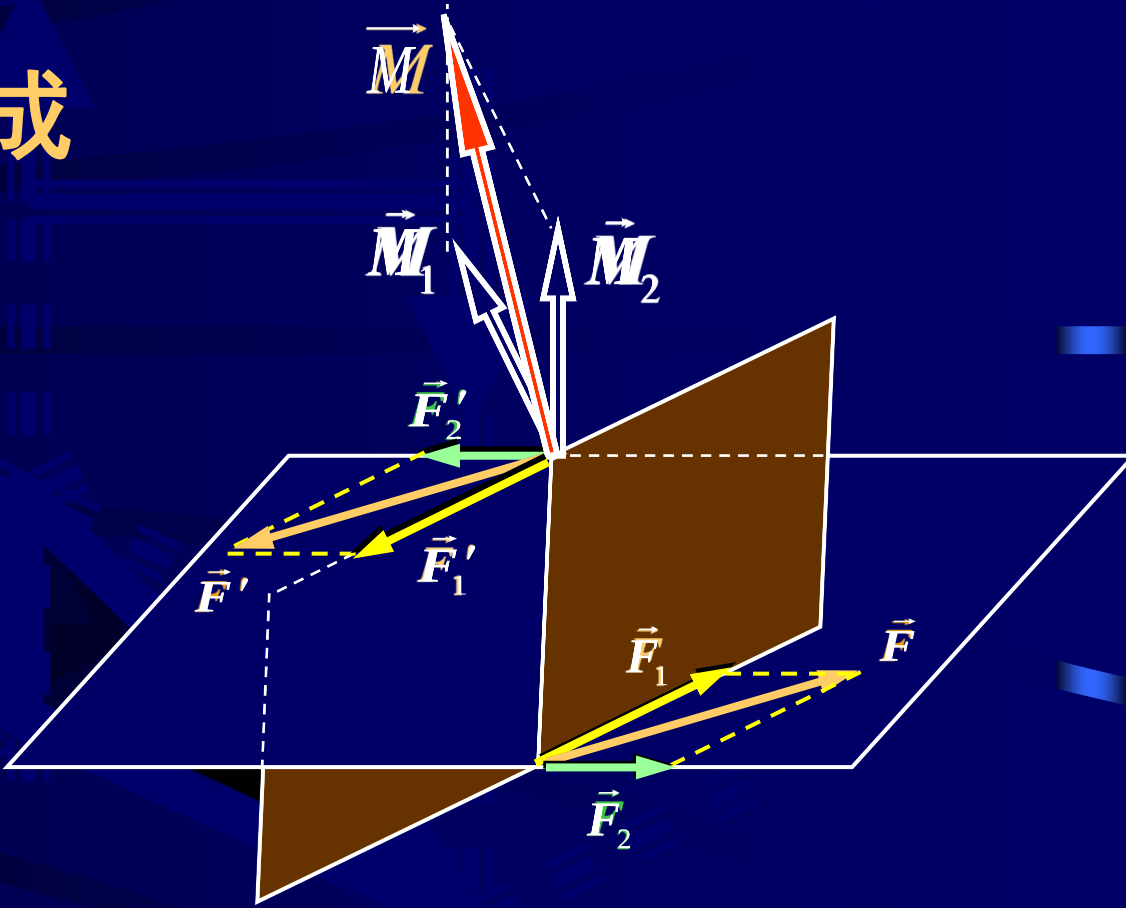
$$\vec{M}_1 = (\vec{F}_1, \vec{F}_1')$$

$$\vec{M}_2 = (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$$

$$\vec{M} = (\vec{F}, \vec{F}') \qquad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



- 结论：两个力偶可以合成为一个合力偶，

  其力偶矩矢等于两个力偶矩的矢量和。

NEXT

3. 力偶系的合成(Reduction of System of Couples)

- 任意个力偶可以合成为一个合力偶，其合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。

Vect

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum_i^n \vec{M}_i$$

如果已知各分力偶矩，采用解析法，由合矢量投影

$$M_x = \sum M_x\,, M_y = \sum M_y\,, M_z = \sum M_z$$

合力偶矩矢的大小

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

合力偶矩矢的方向（方向余弦）

$$\cos\alpha = \frac{\sum M_x}{M} \qquad \cos\beta = \frac{\sum M_y}{M} \qquad \cos\gamma =$$

α β γ 为合力矩矢M与x, y, z轴的正向夹角

作用点可以为刚体上任意位置。

- 在平面力偶系中合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

Algebraic Summation

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum M_i$$

4． 力偶系的平衡条件（Equilibrium condition of System of couples）

- 由合成结果可知：

力偶系平衡的充分必要条件是力偶系的合力偶矩等于零，即所有力偶矩矢的矢量和等于零。

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

一个空间力偶系如同空间汇交力系一样，能列三个独立的平衡方程，求解三个独立的未知量。

- 平面力偶系平衡条件：

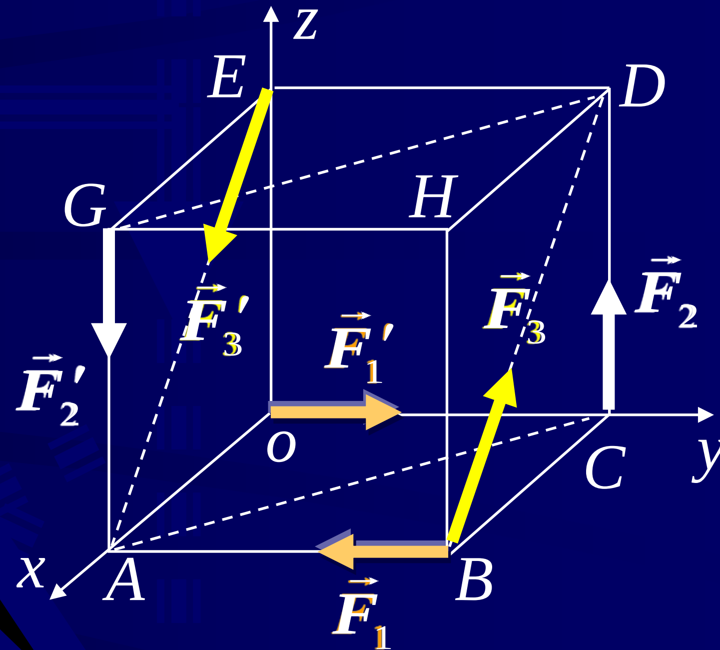
$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

例2-4 图示边长为a=1m的立方体上作用有三个力偶。已知

$$F_1 = F_1' = 10\text{N}, F_2 = F_2' = 20\text{N},$$

$$F_3 = F_3' = 30\sqrt{2}\text{N}$$

试求这三力偶的合成结果。



解：这三力偶的模分别为

$$M_1 = F_1 a = 10\text{Nm},$$

$$M_2 = F_2\sqrt{2}a = 20\sqrt{2}\text{Nm}$$

$$M_3 = F_3 a = 30\sqrt{2}\text{Nm}$$

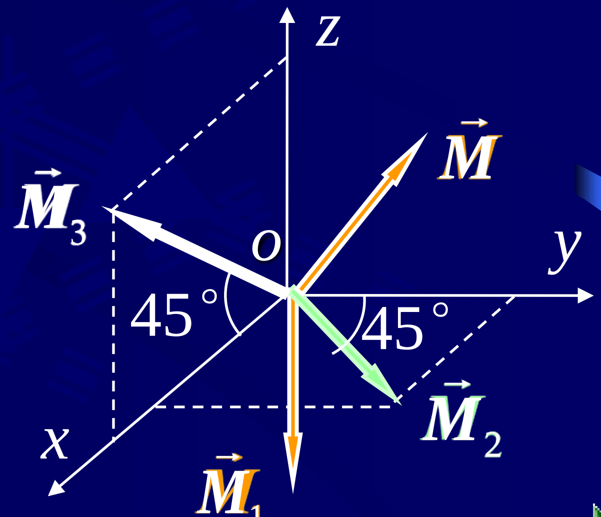
三力偶的合力偶为

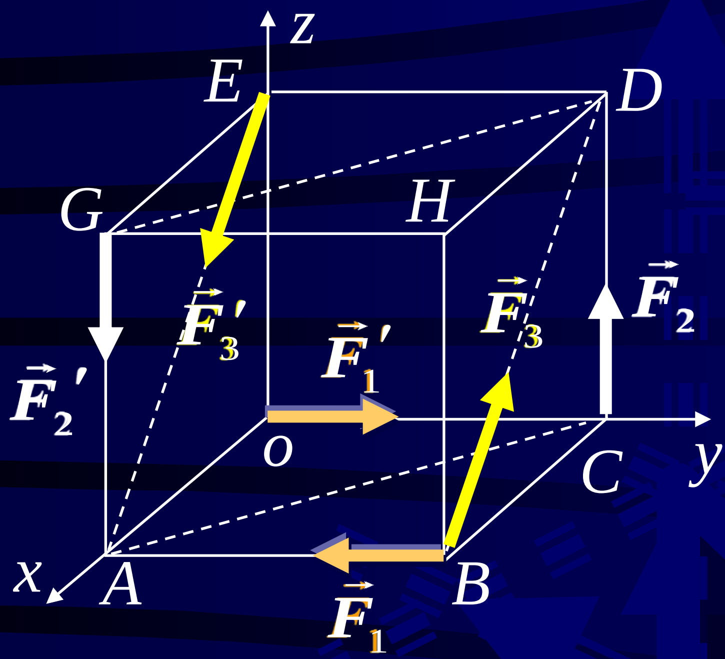
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

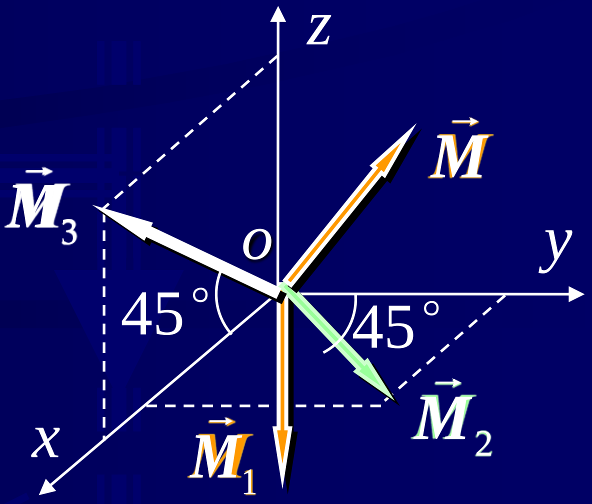
$$M_x = M_2\cos 45° + M_3\cos 45° = 50\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = M_2\cos 45° = 20\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -M_1 + M_3\sin 45° = 20\text{N}\cdot\text{m}$$







$$M_x = M_2 \cos 45° + M_3 \cos 45° = 50\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = M_2 \cos 45° = 20\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -M_1 + M_3 \sin 45° = 20\text{N}\cdot\text{m}$$

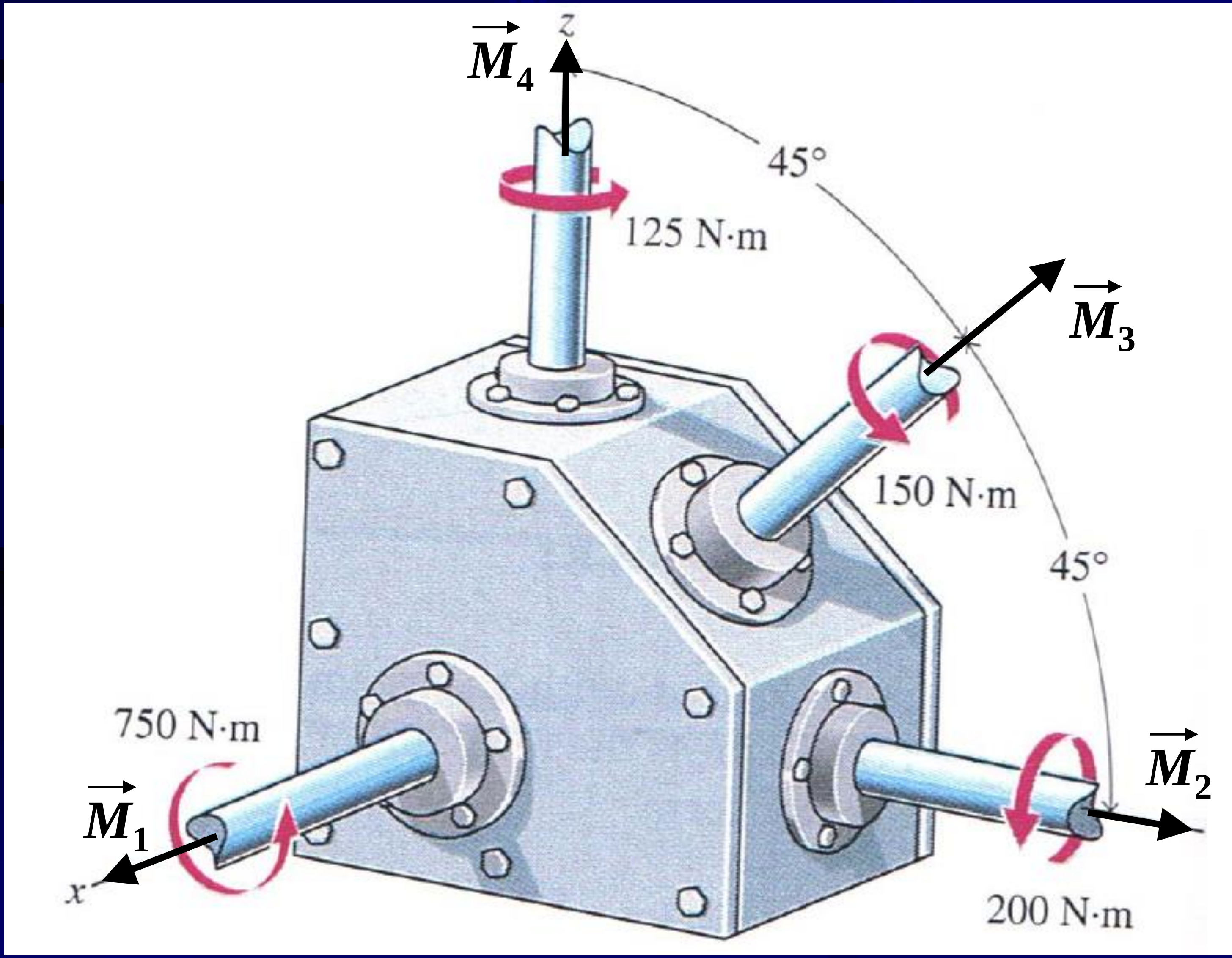
合力偶的模(the magnitude of the resultant moment)

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 57.4\text{N}\cdot\text{m}$$

合力偶的方向余弦为(Directional cosines of the resultant moment)

$$\begin{cases} \cos\left(\vec{M},\vec{i}\right) = \dfrac{M_x}{M} = 0.87 \\ \cos\left(\vec{M},\vec{j}\right) = \dfrac{M_y}{M} = 0.35 \\ \cos\left(\vec{M},\vec{k}\right) = \dfrac{M_z}{M} = 0.35 \end{cases}$$

思考题：求合力偶。 Find the resultant moment and its directional cosines



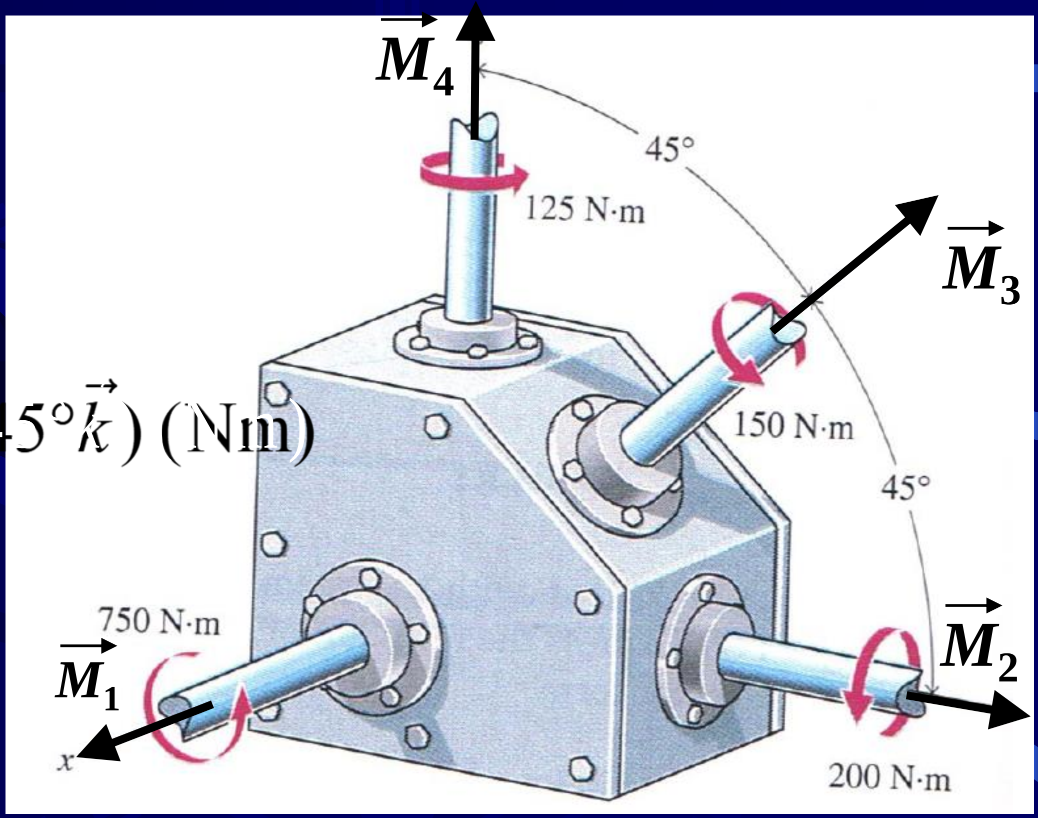
$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4$$

$$\vec{M}_1 = 750(\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\ (\mathrm{Nm})$$

$$\vec{M}_2 = 200(0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k})\ (\mathrm{Nm})$$

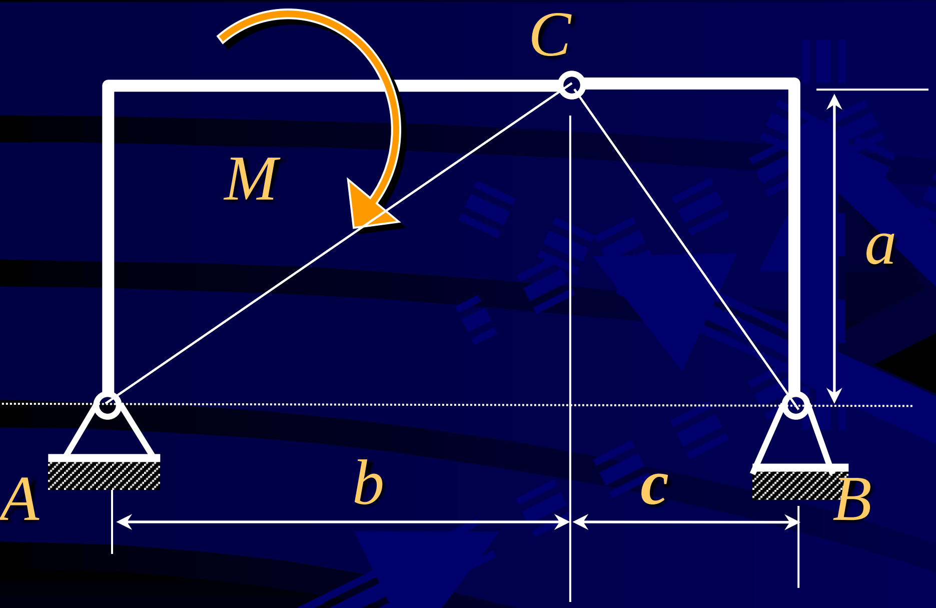
$$\vec{M}_3 = 150(0\vec{i} + \cos 45^\circ \vec{j} + \cos 45^\circ \vec{k})\ (\mathrm{Nm})$$

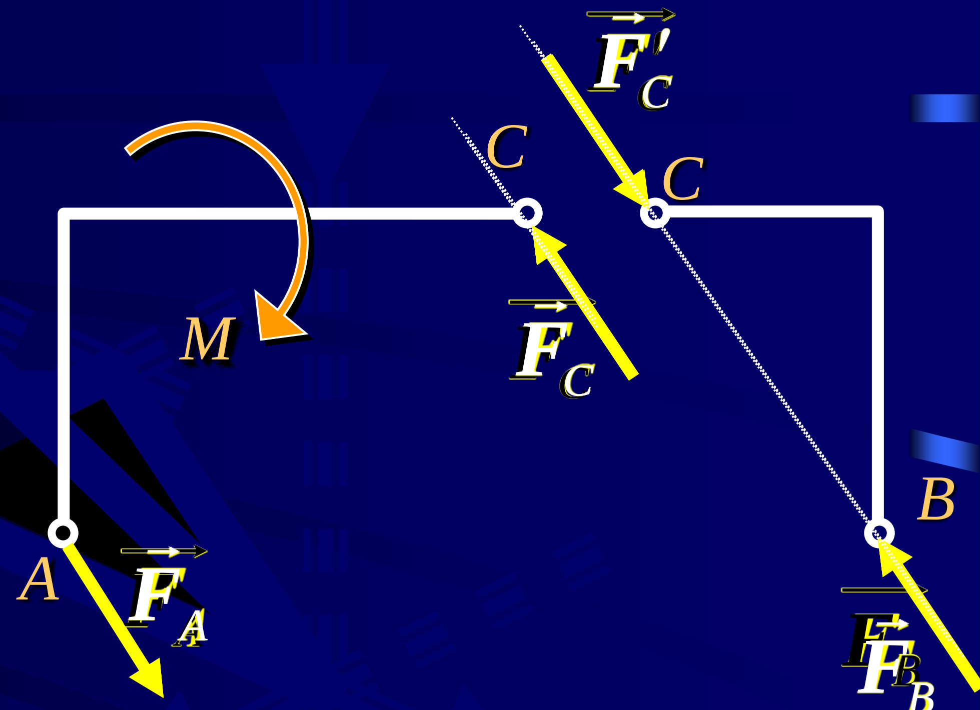
$$\vec{M}_4 = 125(0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k})\ (\mathrm{Nm})$$



$$\vec{M}_R = 750\vec{i} + (200 + 75\sqrt{2})\vec{j} + (125 + 75\sqrt{2})\vec{k})\ (\mathrm{Nm})$$

例4　　三铰刚架由两直角刚架组成，AC 部分上作用一力偶，其力偶矩为 M，自重不计，且 $a : c = b : a$，求A、B支座的反力。





解：由 $a : c = b : a$ 知：$AC \perp CB$，CB为二力构件，

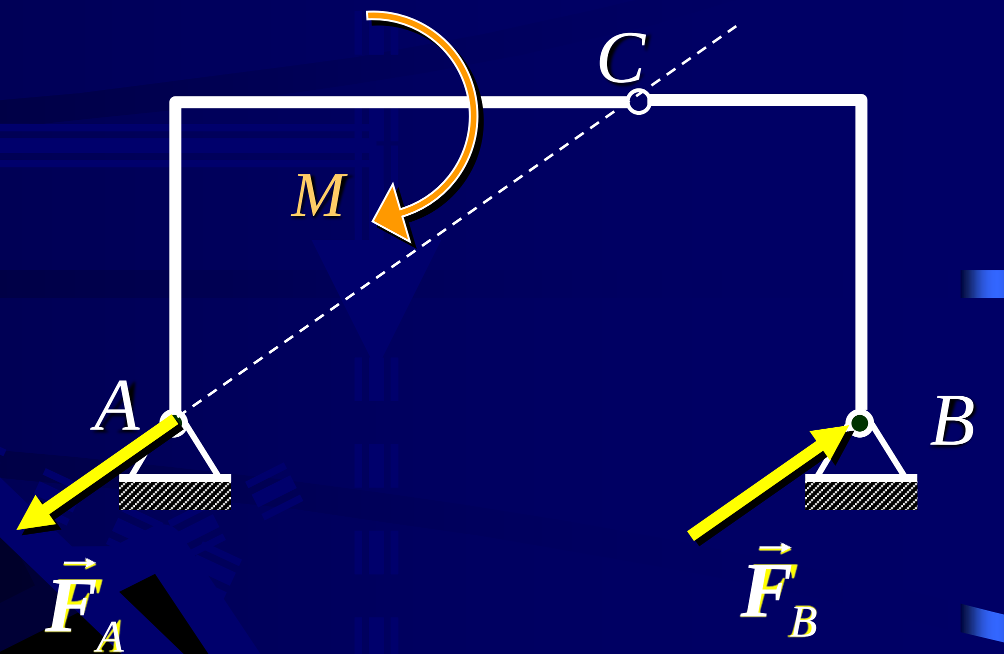
研

力偶只能与力偶相平衡

得：$F_B = F'_C = F_C = F_A$　即：

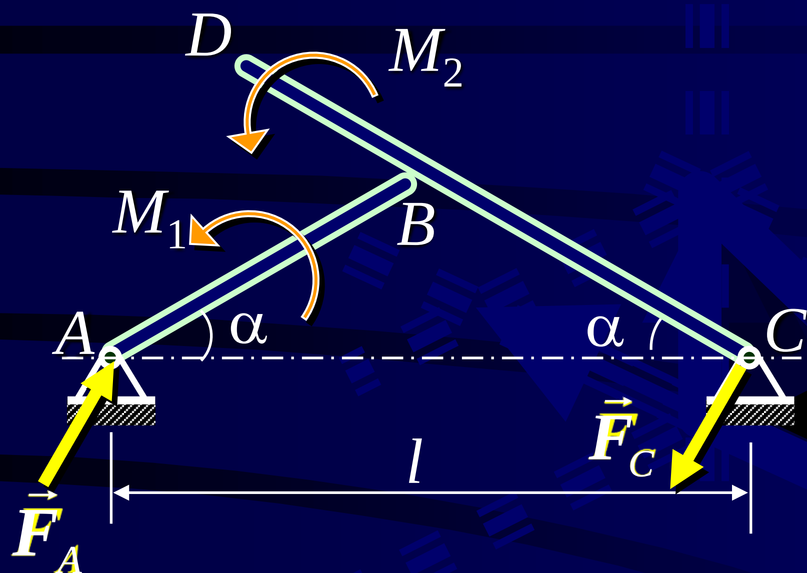
$$F_A = F_B = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

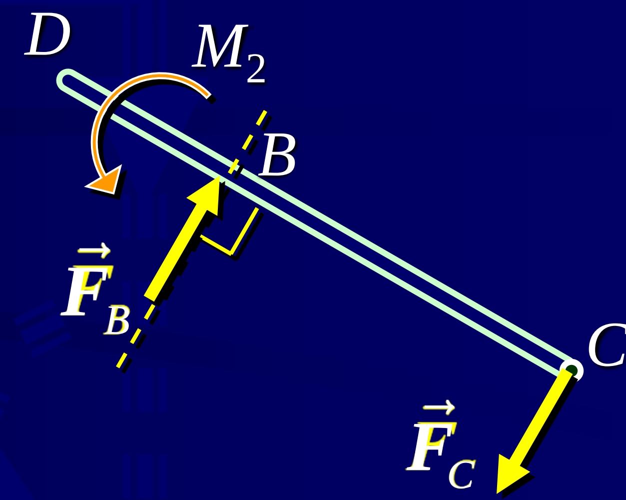
思考题：将力偶从AC移到BC上，A、B支座的反力有无变化？为什么？这与力偶的性质有无矛盾？

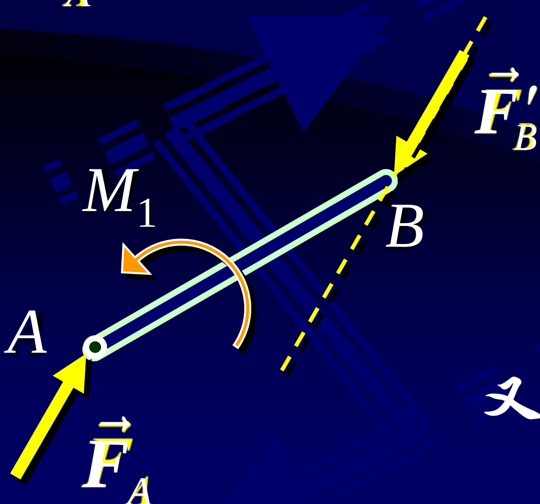


- 从静力平衡的观点看，主动力偶可在其受力体构件——AC上转移至任何位置，不会影响它的平衡及导致F_A、F_B的变化，但改变了AC构件内部的受力。又从整体平衡看，主动力偶可在结构构架上任意转移，不会影响整体平衡，但改变了各构件的受力。因此，考虑力的内效应（即变形效应），在分析中，不可转移力偶。

自重不计的二杆 AB、CD 在 B 处光滑接触。若作用在 AB 上的力偶的矩为 M_1，为使系统在图示位置平衡，求作用在 CD 上的力偶的矩 M_2。







解：研究 CD，有

$$M_2 - F_C \cdot BC = 0$$

研究系统，有

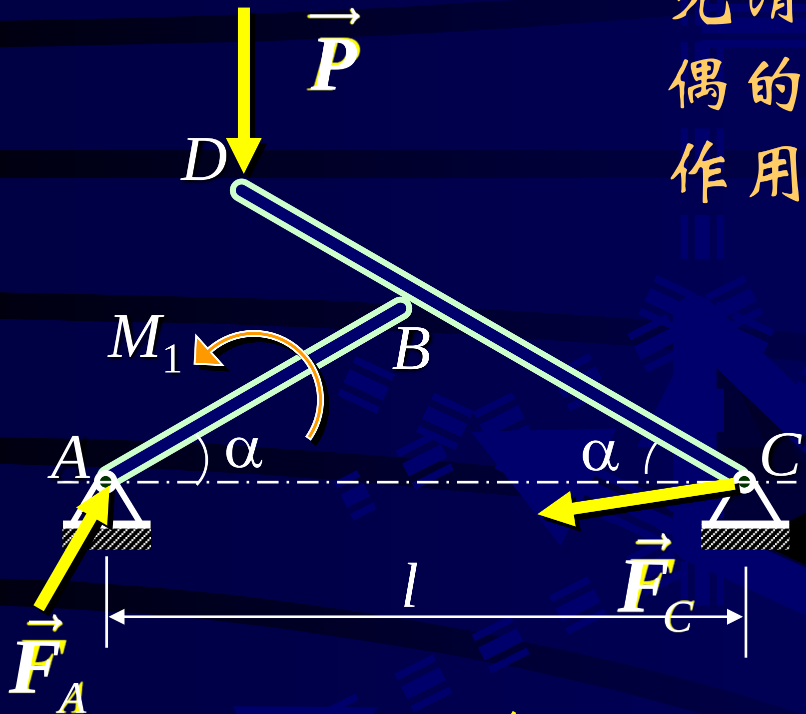
$$M_1 + M_2 - F_C \cdot AC\cos\alpha = 0$$

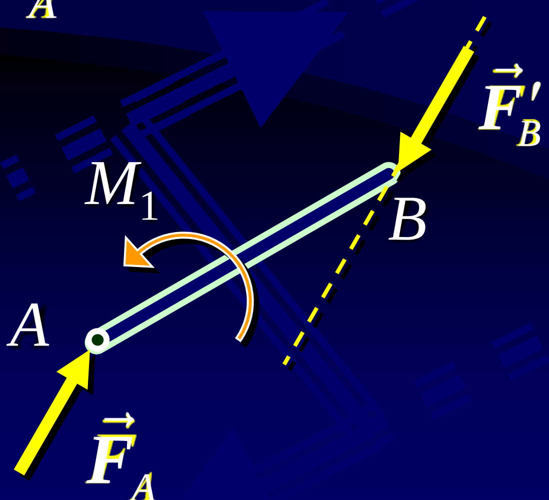
又 $AC = l,\ BC = \dfrac{l}{2\cos\alpha}$　得

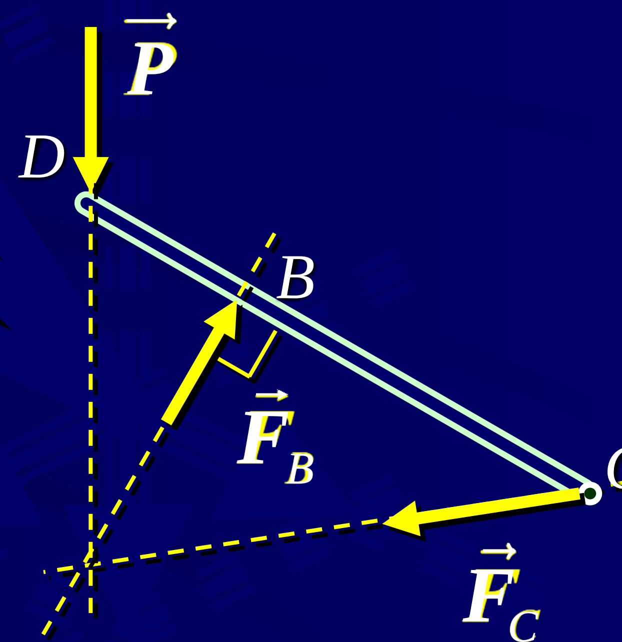
$$\boxed{M_2 = \frac{M_1}{\cos 2\alpha}}$$

NEXT

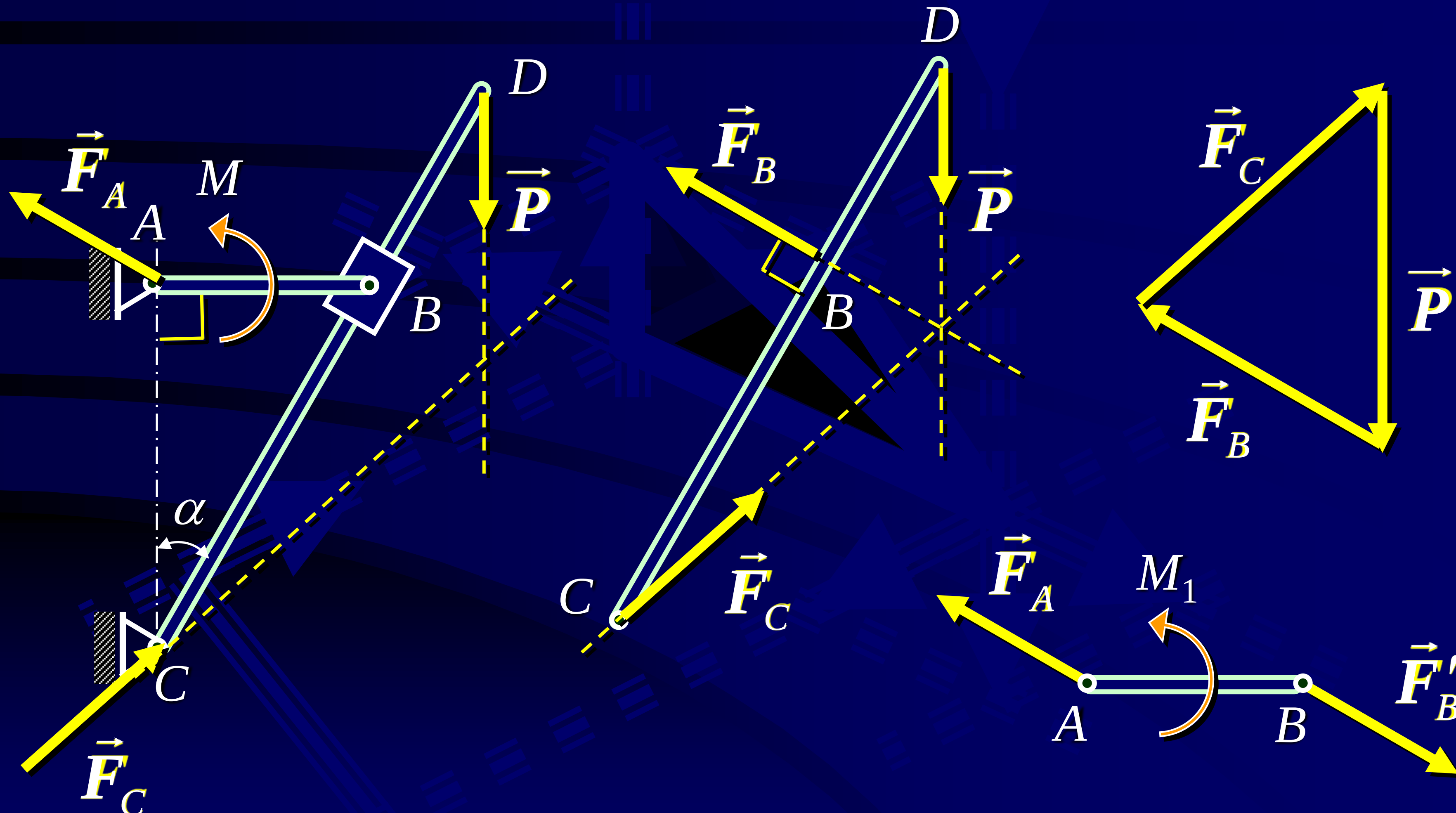
自重不计的二杆 AB、CD 在 B 处光滑接触。若作用在 AB 上的力偶的矩为 M_1，为使系统平衡，求作用在 CD 上的力 P。



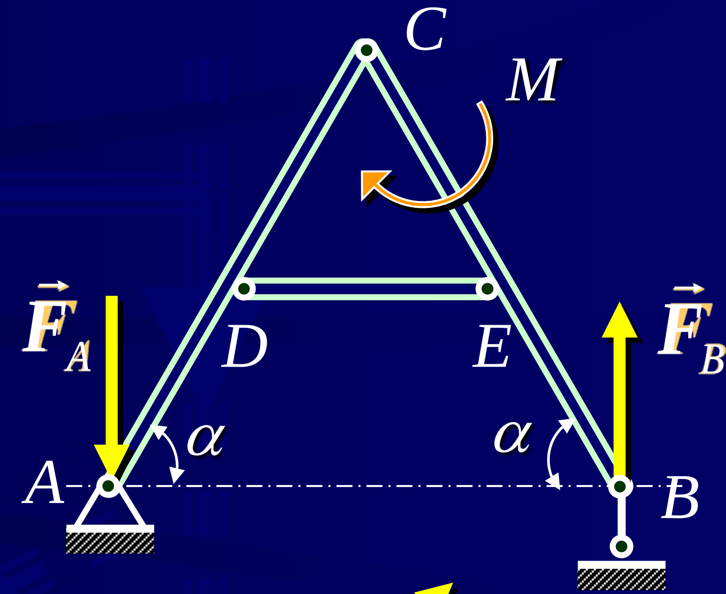




图示机构在力偶M及集中力P作用下处于平衡。各构件重量及各处摩擦不计，已知$AB=a$，$AB \perp AC$，$\alpha=30°$，试求支座A、C的约束反力。



图示结构受给定力偶M的作用，$AD=CD=CE=BE=l$。$\alpha=60°$。求支座A和铰C的约束力。



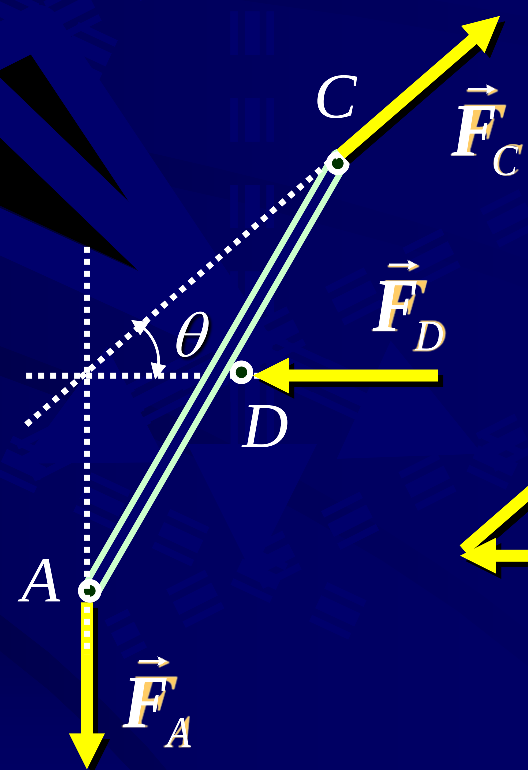
解：研究系统，受力如图。

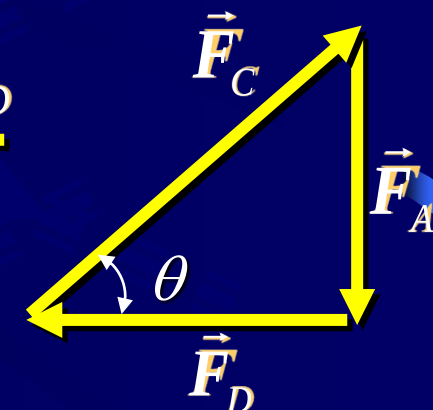
由力偶系平衡方程 $\sum M=0$

$$F_A\cdot AB-M=0$$

得 $\boxed{F_A=\dfrac{M}{2l}}$

再取AC为研究对象，受力如图。

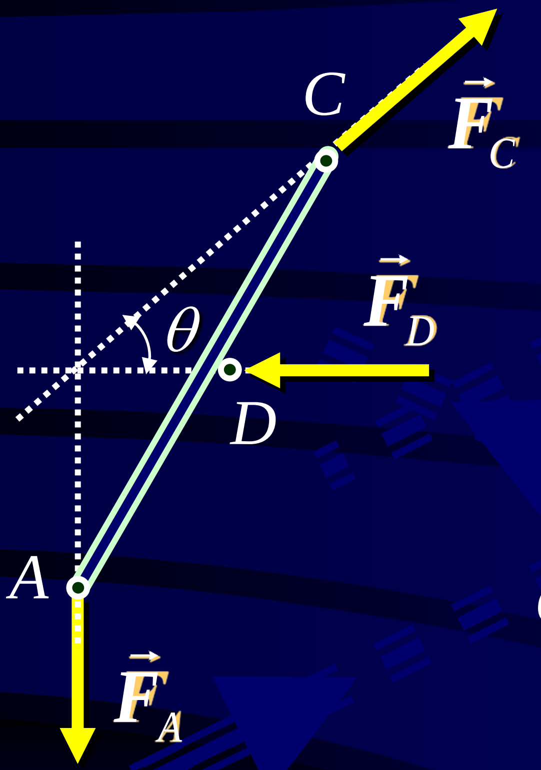


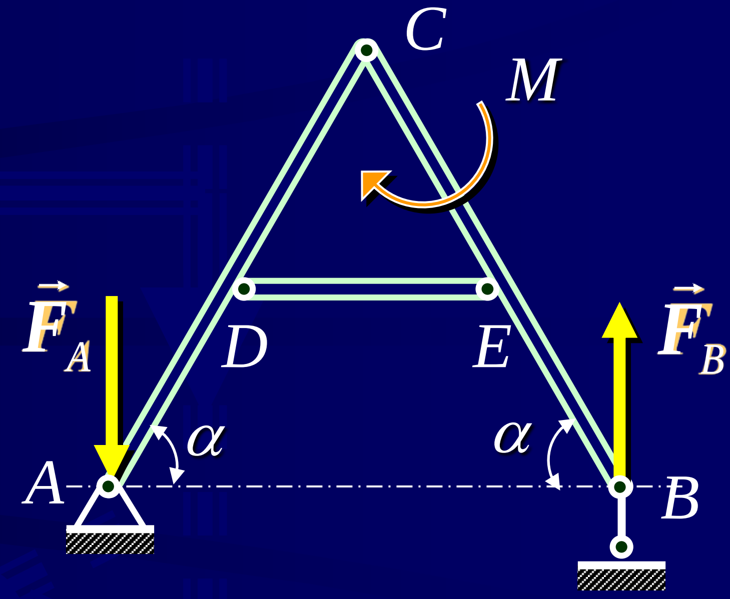


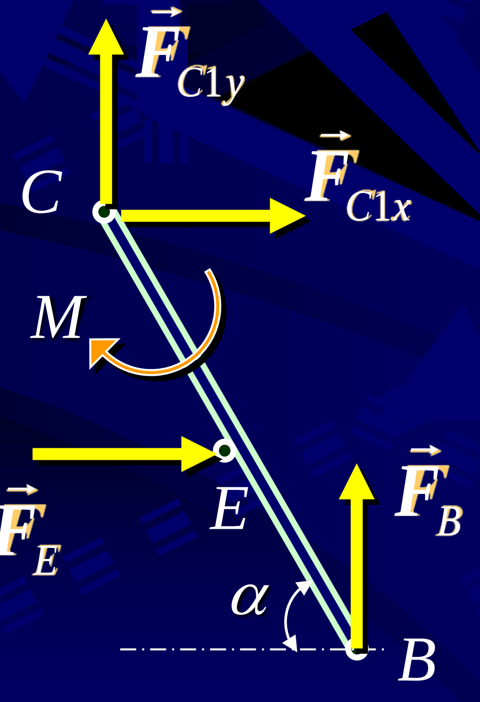
显然 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 画力三角形。

得 $\boxed{F_C}=\dfrac{F_A}{\sin\theta}\boxed{=\dfrac{\sqrt{21}}{6}\dfrac{M}{l}}$

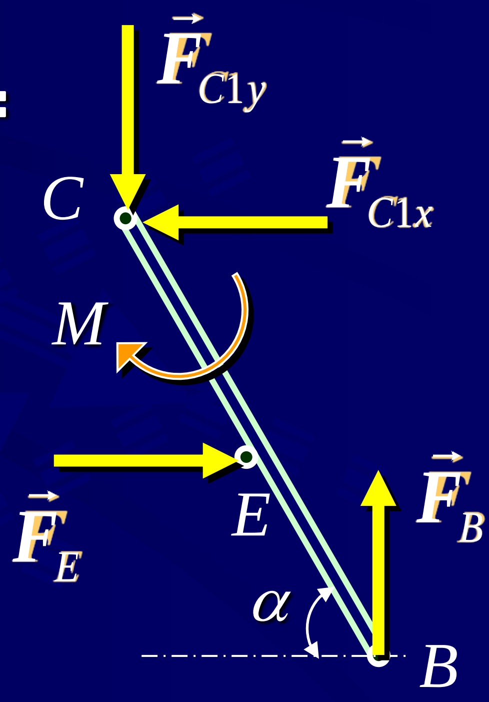
也可选BC为研究对象





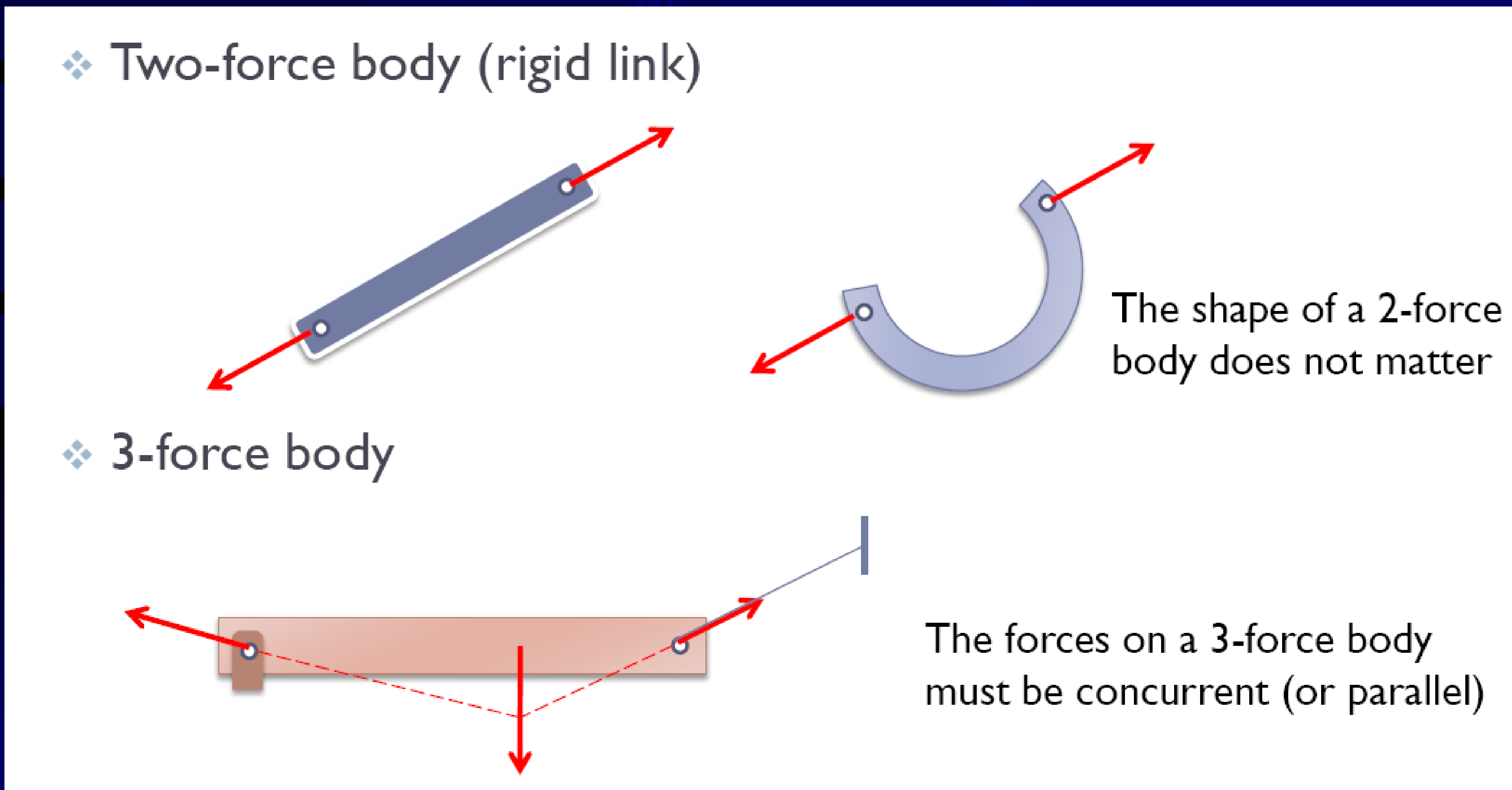


或：



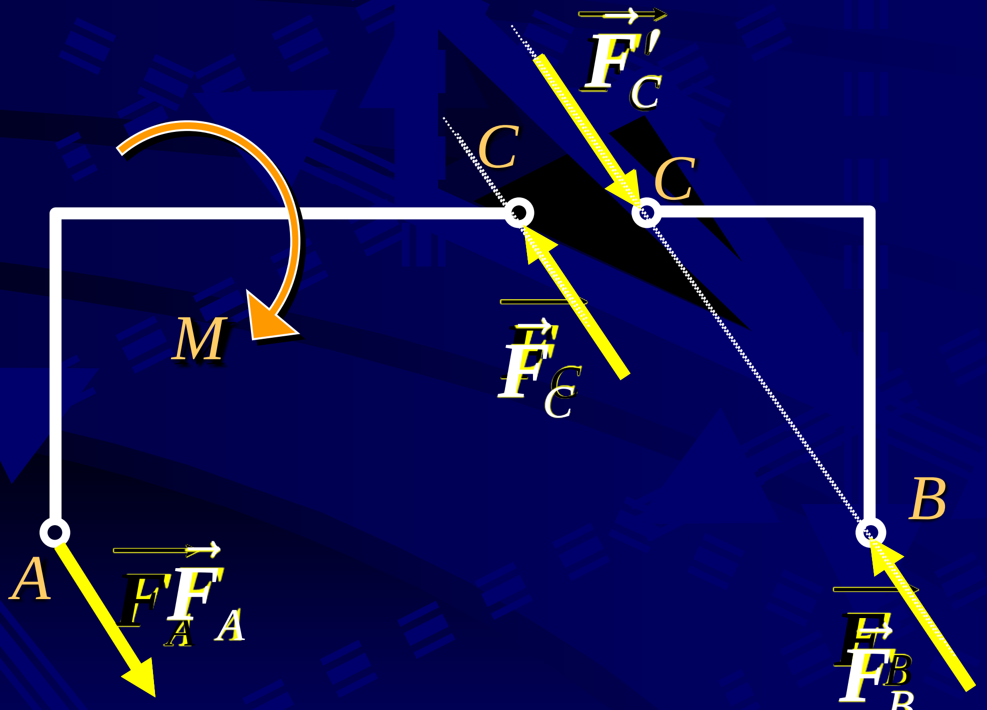
Tricks to play

- **Utilize the results of the simplest cases you won't even bother to calculate.**



Tricks to play

- 利用力偶的性质直接判断未知力的方向



小结：

- 通常力偶矩的计算与力偶平衡条件的应用比较简单。解题重点仍在受力分析上。如能判断结构中哪些构件是在力偶系作用下平衡，则可简化计算。
- 研究对象在平面力偶系作用下平衡时，只有一个独立的平衡方程，可解一个未知量。
- 整体平衡看，主动力偶可在结构构架上任意转移，不会影响整体平衡，但改变了各构件的受力。因此，考虑力的内效应（即变形效应），在分析中，不可转移力偶。

本章小结

1、汇交力系的合力

（1）几何法求合力

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{\mathrm{N}} = \sum \vec{F}_i$$

（2）解析法求合力

$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{\left(\sum F_{xi}\right)^2 + \left(\sum F_{yi}\right)^2 + \left(\sum F_{zi}\right)^2}$$

$$\cos\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{i}\right) = \frac{F_{\mathrm{R}x}}{F_{\mathrm{R}}}; \ \cos\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{j}\right) = \frac{F_{\mathrm{R}y}}{F_{\mathrm{R}}}; \ \cos\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{k}\right) = \frac{F_{\mathrm{R}z}}{F_{\mathrm{R}}}$$

2、汇交力系的合力

汇交力系平衡的充要条件：

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{\mathrm{N}} = 0 \qquad \text{即：} \sum \vec{F}_i = 0$$

汇交力系平衡的几何条件：

力多边形自行封闭。

汇交力系平衡的解析条件：

$$\Sigma F_{xi} = 0;\ \Sigma F_{yi} = 0\ ;\ \Sigma F_{zi} = 0$$

3、力对点的矩

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$ 是定位矢量

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = Fh = 2\Delta OAB$$

4、合力矩定理

汇交力系的合力对点的矩等于该力系所有分力对同一点的矩的矢量和。

$$\vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

5、力偶

力偶 —— 由两个等值、反向且不共线的平行力系组成。记作（ F，F'）

力偶对物体的作用效应决定于力偶矩的大小、方位和转向。

(1)力偶等效定理：作用于刚体上的两力偶，若它们的力偶矩矢相等，则此二力偶等效。

(2)力偶不能与一个力相平衡

(3)力偶没有合力。

6、力偶的合成与平衡

任意个力偶可以合成为一个合力偶，这个合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots\cdots+\vec{M}_n=\sum_{i}^{n}\vec{M}_i$$

力偶系平衡的充分必要条件是力偶系的合力偶矩等于零，即所有力偶矩矢的矢量和等于零。

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$$

本章结束