第三章　二维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其分布函数

第二节 边缘分布

第三节 条件概率分布

第四节 随机变量的独立性

独立性

第五节 二维随机变量函数的分布

§1 二维随机变量及其分布函数

一、二维随机变量的概念

定义1 设随机试验E的样本空间$\Omega=\{\omega\}, X=X(\omega), Y=Y(\omega)$分别为定义在$\Omega$上的随机变量，就称$(X,Y)$为二维随机变量.

例如，着弹点（X,Y）为二维随机变量.

二、二维随机变量的联合分布函数

定义2 设（X,Y）为二维随机变量，称

$$F(x,y)=P\{X\leq x, Y\leq y\},\quad -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$$

为（X,Y）的分布函数或称为X和Y的联合分布函数.

$F(x,y)$在点(x,y)处的取值为二维随机变量(X,Y)落入平面区域 $(-\infty, x]\times(-\infty, y]$ 上的概率（见图1）.

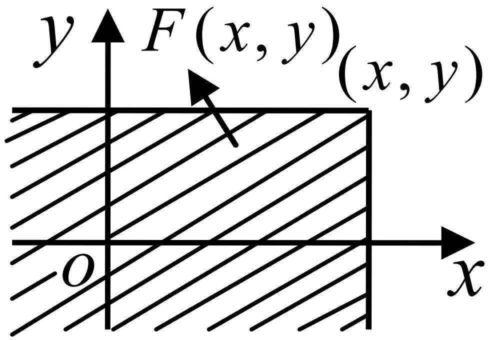


图1

左图称为$F(x,y)$的原理图

- 一般地，X与Y是同种类型(离散或者连续）。
- 但联合分布函数的上述公式也适合不同类型的。(了解)

二维随机变量的分布函数具有下列性质

性质1 设 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，则

（1）$0 \le F(x,y) \le 1$;　　•(可略)

（2）$F(x,y)$分别关于变量 x和y 为单调不减函数；

（3）$F(+\infty,+\infty)=1, F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0,$

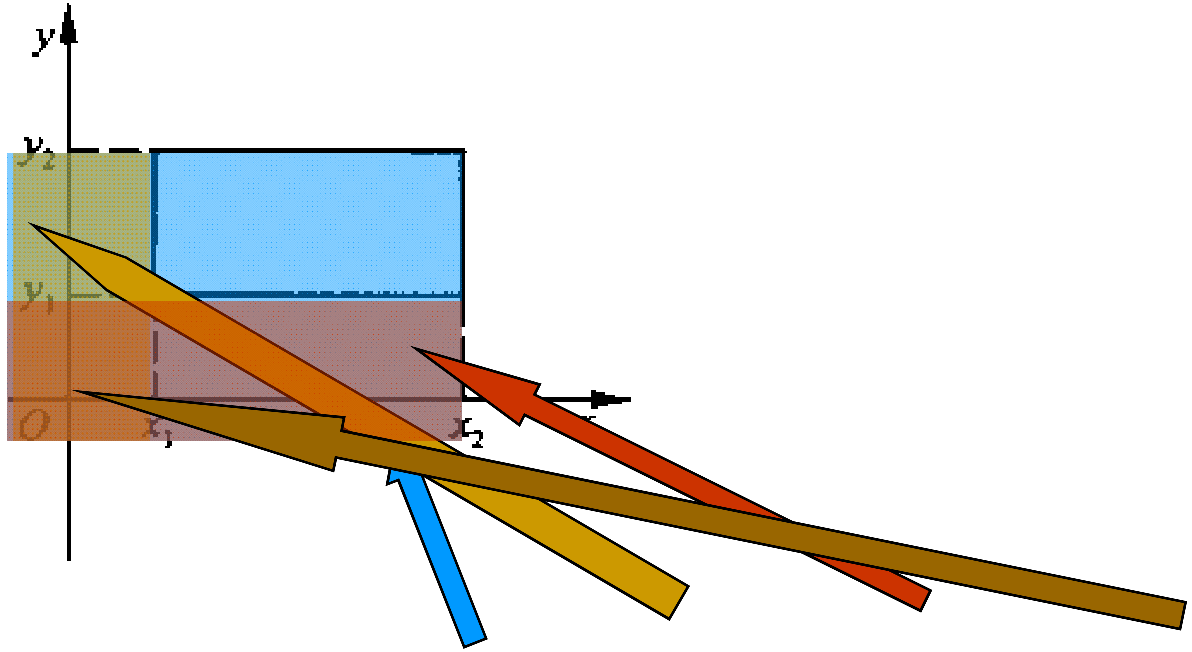
其中 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty;$

（4）$F(x,y)$分别关于变量 x和y 处处右连续；

（5）$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$

其中 $x_1 < x_2, y_1 < y_2.$



$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

例1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y),\ (x,y)\in R^2,$$

（1）求常数 a,b,c;

（2）分别计算概率 $P\{X\le 1, Y\le 1\}$ 和 $P\{X>1, Y>1\}$.

解（1）由 $F(+\infty,+\infty)=1$ 知 $a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1$, （#）

由 $F(x,-\infty)=0$ 知，对任意的 $x\in R$, 有

$$a(b+\arctan x)(c-\frac{\pi}{2})=0,\quad \text{故 } c=\frac{\pi}{2}.$$

同理， 对任意的 $y\in R$, 有 $a(b-\frac{\pi}{2})(c+\arctan y)=0$,

故 $b=\frac{\pi}{2}$，将 a,b 取值代入（#）式有 $a=\frac{1}{\pi^2}$.

续解 （2） 由（1）知

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y),$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

所以 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=F(1,1)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{9}{16}.$

$$P\{X>1,Y>1\}=P\{1<X<+\infty,1<Y<+\infty,\}$$

$$=F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,1)-F(1,+\infty)+F(1,1)$$

$$=1-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{1}{16}.$$

三、二维离散型随机变量及其分布律的概念

定义3 如果二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为有限对或可列对，就称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

定义4 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其所有可能的取值为 (x_i, y_j), 其中 $i=1,2,\cdots$, $j=1,2,\cdots$, 且

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots,$$

就称上式为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律或 X 和 Y 的联合分布律.

二维离散型随机变量的分布律也记列表为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

此时，分布律有哪些性质？分布函数怎么计算？

性质2 设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots,$$

则有（1）$p_{ij}\geq 0, i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots$；（2）$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

【注】 如果 $p_{ij}(i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots)$ 满足性质1中的（1）和（2），则 $p_{ij}(i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots)$ 必能构成某二维离散型随机变量（X,Y）的分布律.

设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,$$

则（X,Y）具有下列结论

结论1 （X,Y）的分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

结论2 $$P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij},$$

其中D为任一平面区域.

例2 设同一品种的5个产品中，有2个次品，每次从中取一个检验，连续两次. 设X表示第一次取到的次品个数；Y表示第二次取到的次品个数. 试分别就（1）不放回；（2）有放回两种情况，求出（X,Y）的概率分布.

解（1）不放回的情况：利用乘法公式可计算得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10};$$

同理可求得$P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{3}{10}$,

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{3}{10},P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{10},$$

所以（X,Y）的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

续解（2）有放回的情况：与(1)相仿,利用乘法公式可计算得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25};$$

同理可求得 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{6}{25}$, $P\{X=1,Y=0\}=\frac{6}{25}$,

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{25}$, 故在有放回情况下,（$X$,$Y$）的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

例3 已知二维随机变量（X,Y）的分布律如图，且 $F(0,1.5)=0.5$.

（1）求常数 a,b 的值；

（2）计算 $P\{X=Y\}$.

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0.2	a	0.3
1	0.1	0.1	b

解 （1）由 $F(0,1.5)=P\{X\le 0, Y\le 1.5\}=0.5$, 得 $0.4+a=0.5$,

故 $a=0.1$. 又由 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$ 知, $0.7+a+b=1$, 所以 $b=0.2$.

（2）由（1）得（X,Y）的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.1	0.2

故 $P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+$

$P\{X=1,Y=1\}=0.1+0.2=0.3.$

思考：$\mathrm{P}(X\le Y)=?$

四、二维连续型随机变量及其密度函数的概念

定义5 设二维随机变量（X,Y）的分布函数为 $F(x,y)$, 如果存在二元非负可积函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y，均有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

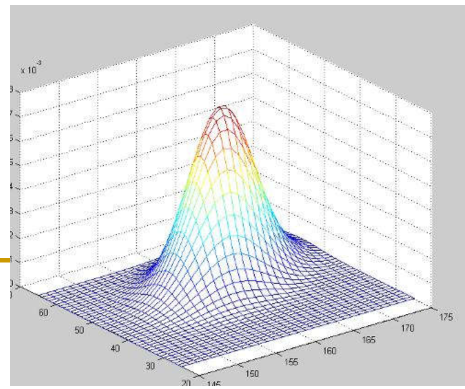
就称（X,Y）为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为（X,Y）的密度函数或 X和Y 的联合密度函数.

性质3 （二维连续型随机变量密度函数的性质）

设二维连续型随机变量（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)$，则

（1）$f(x,y)\geq 0, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty;$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$



结论1 设二维连续型随机变量（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)$, 则

（1）在 $f(x,y)$ 的连续点（x,y）处，$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$;

（2）对平面上任一区域 D,有 $P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

★★ •记忆：哪里求概率，哪里去积分。

【注】 概率 $P\{(X,Y)\in D\}$ 的数值等于以 D 为底，曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

结论2 如果 L 为平面上任一曲线，则 $P\{(X,Y)\in L\} = 0.$

典型题

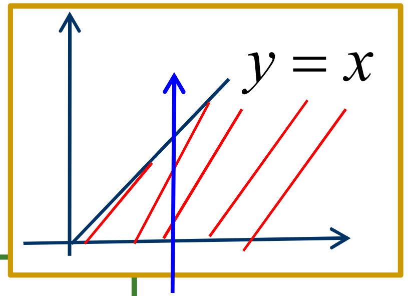
例4 设（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$

（1）求常数 k； （2）计算概率 $P\{X+Y<2\}$；

（3）求（X,Y）的分布函数 $F(x,y)$.

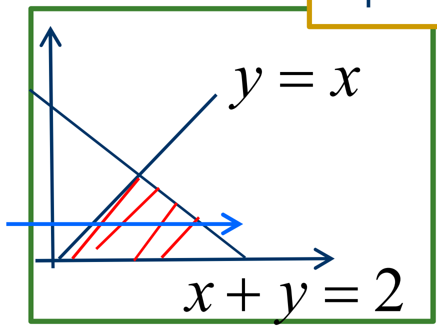
解 （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 知，$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x} ke^{-x}dy=1$，

经计算得 $k=1$. 从而 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$



（2）$P\{X+Y<2\}=\iint\limits_{x+y<2} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} e^{-x}dx=(1-e^{-1})^2.$$

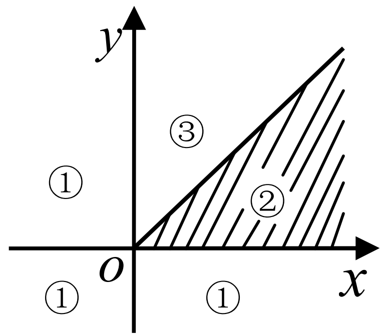


续解（3）分布函数 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,(x,y)\in R^2$，且

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$$

所以整个平面划分为三块分别计算.

(a)



① 当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时（图（a））：

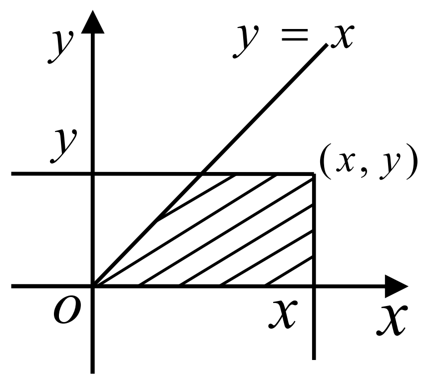
由于 $f(x,y)=0$, 所以 $F(x,y)=0$.

② 当 $0<y<x$ 时（图（$\boldsymbol{b}$））：

$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_v^x e^{-u}du$$

$$=\int_0^y (e^{-v}-e^{-x})dv=1-e^{-y}-ye^{-x}.$$

(b)

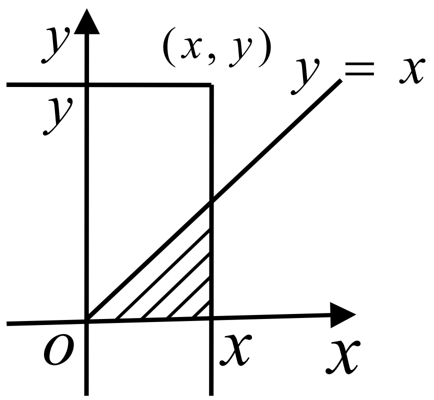


续解 ③当 $0 < x \le y$ 时（图（c））：

$$F(x,y)=\int_0^x dv\int_v^x e^{-u}du$$

$$=\int_0^x (e^{-v}-e^{-x})dv = 1-(1+x)e^{-x}.$$

（c）

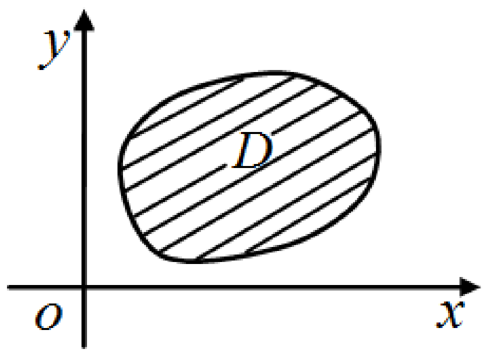


故（X,Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \ or \ y<0,\\ 1-e^{-y}-ye^{-x}, & 0<y<x,\\ 1-(1+x)e^{-x}, & 0<x\le y.\end{cases}$$

- 注：1.积分变量u,v。
- 2. 对(x,y), 即x,y讨论范围,确定积分区域。
- 3. 等号放在哪？

求（X,Y）的分布函数 $F(x,y)$ 的过程较为复杂. 一般地，如果（X,Y）的密度函数 $f(x,y)$ 在平面某区域 D 上（内）为正，而其余处均为零（见下图），即
$$f(x,y)=\begin{cases}\text{正值}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$



不妨称左图为密度函数 $f(x,y)$ 的特征图，因此计算（X,Y）的分布函数 $F(x,y)$ 时，应将 $F(x,y)$ 的原理图和 $f(x,y)$ 的特征图结合起来，综合考察，以解决分块计算问题（参见例4）.

五、几种常见的二维连续型随机变量的概率分布

1. 二维均匀分布

定义6 设平面有界区域 D 的面积为 S_D，如果二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

就称（X,Y）服从区域 D 上（内）的均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

【1】（X,Y）落入某平面区域 G 内（上）的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=P\{(X,Y)\in G\cap D\}=\frac{S_{G\cap D}}{S_D}$$

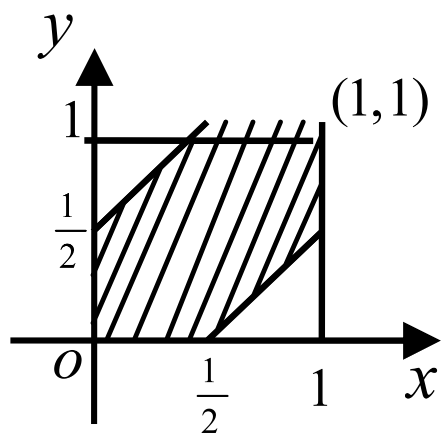
几何概型

【2】$(X,Y)\in U(D)$, 区域 G 为 D 的任意子区域，则 $P\{(X,Y)\in G\}$ 与 G 的面积成正比，比例系数为 $\dfrac{1}{S_D}$, 而与 G 的位置和形状无关.

例5 设（X,Y）服从区域 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上的均匀分布，求 $P\{|X-Y|\le \frac{1}{2}\}$.

解 由题意知，区域 D 的面积 $A=1$. 由不等式 $|x-y|\le\frac{1}{2}$ 确定的平面区域 G 如下图的阴影部分，G 的面积为

$1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$，所以所求的概率为



$$P\{|X-Y|\le\frac{1}{2}\}=\frac{S_G}{S_D}=\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}.$$

2. 二维正态分布

定义7　如果二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

（#）

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且满足：

$$-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$$

就称（X,Y）服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，

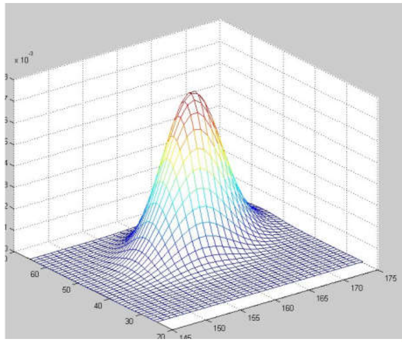
记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

例6 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=ke^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<x<+\infty.$$

指出（X,Y）所服从的分布，并求出常数 k .

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$



解

$$f(x,y)=ke^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}y^2}=ke^{-\frac{1}{2}[x^2+\frac{y^2}{2^2}]}$$

对比（**#**）不难发现，

$$\mu_1=0,\mu_2=0,\rho=0,\qquad \sigma_1=1,\sigma_2=2,$$

所以 $(X,Y)\sim N(0,0,1,4,0)$, 且 $k=\frac{1}{4\pi}.$

§3.2 边缘分布

一、边缘分布函数

定义1 设（X,Y）为二维随机变量，分别称 X 和 Y 的分布函数为（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数，记为$F_X(x)$和 $F_Y(y)$.

定理1 设二维随机变量（X,Y）的分布函数为 $F(x,y)$，则有

$$F_X(x)=F(x,+\infty),-\infty<x<+\infty;$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y),-\infty<y<+\infty;$$

记忆：联合分布求单个变量极限得到边缘分布

证： 由于$\{Y<+\infty\}=\Omega$, 故

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y\le+\infty\}=F(x,+\infty),-\infty<x<+\infty;$$

同理可证 $F_Y(y)=F(+\infty,y),-\infty<y<+\infty.$

例1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),\ -\infty<x,y<+\infty,$$

试求出 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 并问是否有 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$?

解 $$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),\ -\infty<x<+\infty;$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),\ -\infty<y<+\infty.$$

并易得, $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

二、边缘分布律（离散型）

定义2 设（X,Y）为二维离散型随机变量，分别称 X 和 Y 的的分布律为（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

定理1 设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\ i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,$$

则（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\cdot},\ i=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \triangleq p_{\cdot j},\ j=1,2,\cdots.$$

$$仅证\ P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}=p_{i\cdot},i=1,2,\cdots$$

证 $P\{X=x_i\}=P\{X=x_i,\bigcup_j Y=y_j\}=\sum_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$

$$=\sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\cdot},\ i=1,2,\cdots.$$

同理可证 $P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \triangleq p_{\cdot j},\ j=1,2,\cdots.$

（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为

即 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_{1\cdot} & p_{2\cdot} & \cdots & p_{i\cdot} & \cdots \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots \\ p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \cdots & p_{\cdot j} & \cdots \end{pmatrix}.$

将 X 和 Y 的边缘分布律添加到（X,Y）分布律的列表得

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

X 的边缘分布律可对表中的p_{ij} 进行行和即得；

Y 的边缘分布律可对表中的p_{ij} 进行列和即得；

或者： X 和 Y 的边缘分布律添到（X,Y）分布律的列表：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\bullet 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\bullet 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{i\bullet}$	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}$	$\cdots$	1

【注】

X 的边缘分布律可对表中的p_{ij} 进行纵向求和即得；

Y 的边缘分布律可对表中的p_{ij} 进行横向求和即得；

例3(1)

已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布为 $X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,

$X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 且 $P\{X_1X_2=0\}=1$, 求 X_1 和 X_2 的联合分布律.

即

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
0				$\frac{1}{2}$
1				$\frac{1}{2}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

解 由 $P\{X_1X_2=0\}=1$ 知，$P\{X_1X_2\neq 0\}=0$, 所以

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0,$$

根据 X_1 的分布律得

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{1}{4}.$$

根据 X_2 的分布律得

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=0,\ P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{1}{4}.$$

续解　综上，X_1和 X_2的联合分布律为

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

例3(2) **6个球，1红球，2个黑球，3个白球，取两次(每次一个，放回）**

. 设X表示两次取到的红球个数；Y表示两次取到的黑球个数. 求出（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

三、边缘密度函数（连续型）

如果（X,Y）为二维连续型随机变量，则可证明X和Y也均为连续型随机变量. 此时X或Y的概率分布可用密度函数来描述.

定义3 设（X,Y）为二维连续型随机变量，分别称X和Y的密度函数为（X,Y）关于X和关于Y的边缘密度函数，记为$f_X(x)$和$f_Y(y)$.

定理3 设二维连续型随机变量（X,Y）的密度函数为$f(x,y)$，则X和Y也均为连续型随机变量，且

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, -\infty < x,y < +\infty.$$

★ 记忆：求x干掉y，求y干掉x。

证明 由于$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right]du,\quad -\infty<x<+\infty,$$

所以X为连续型随机变量，其密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,-\infty<x<+\infty.$$

同理可证，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx,-\infty<y<+\infty.$

•注： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,-\infty<x<+\infty.$

•通常先要对x讨论范围，再对y积分。

例4 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

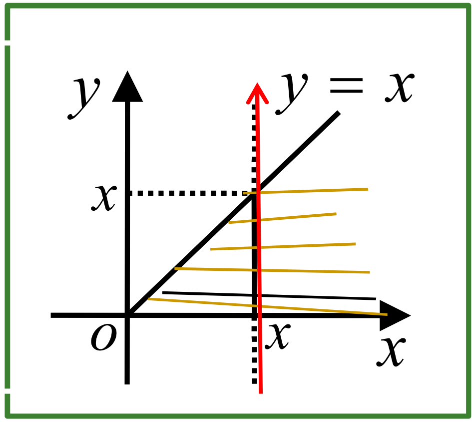
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$$

基本题型

试分别计算 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

解 先求 $f_X(x)$. 当 $x\le 0$ 时，对任意的 $y\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x,y)=0$,

进而 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$. （见右图）



当 $x>0$ 时，对任意的 $y\in(-\infty,0]\cup[x,+\infty)$,

有 $f(x,y)=0$,故 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

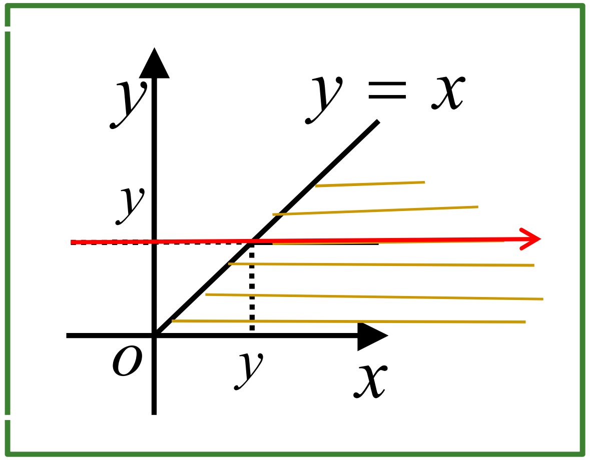
$$=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x},\text{ 所以 } f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

续解 同理，当 $y \le 0$ 时，对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $f(x, y) = 0$，

得 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = 0.$ （见右图）

当 $y > 0$ 时，对任意的 $x \in (-\infty, y]$，有 $f(x, y) = 0$，得

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_{y}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-y}$$



所以 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

【注1】$f_X(x)$可通过在给定点 x 处，$f(x,y)$的对 y 从$-\infty$到$+\infty$（纵向）积分求得；$f_Y(y)$可通过在给定点 y 处，$f(x,y)$的对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$（横向）积分求得.

【注2】 由于$f(x,y)$通常以分块函数的形式给出，因此经常需要对 x 或 y 进行分段讨论，以计算 $f_X(x)$ 或 $f_Y(y)$.

定理4 设二维随机变量$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

定理4表明二维正态分布的边缘分布为一维正态分布，且其边缘分布只分别依赖于μ_1,σ_1和μ_2,σ_2, 而不依赖于参数$\rho(-1<\rho<1)$. 因此对于给定的$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$, 不同的$\rho$对应了不同的二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 所以边缘密度函数不能惟一地确定联合密度函数.

2011数三

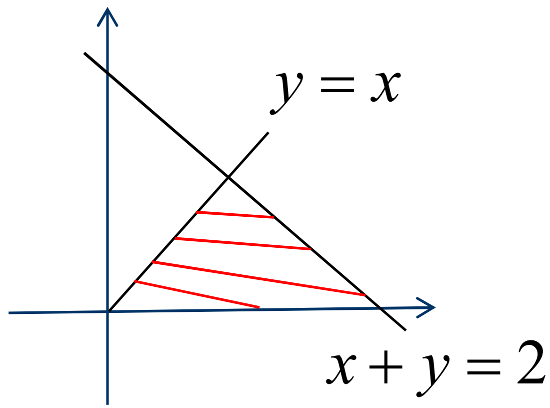
设二维随机变量（X,Y）服从区域G上的均匀分布，其中G是有 $x-y=0, x+y=2, y=0$ 所围成的三角形区域.

（1）求X的概率密度 $f_X(x)$,

（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$. （下节后练习）

解 （X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & other.\end{cases}$$



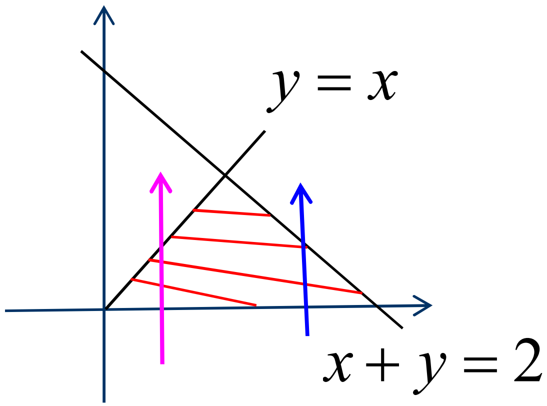
X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

当 $x<0 \text{ or } x>2$ 时 $f_X(x)=0;$

当 $0\le x\le 1$ 时, $f_X(x)=\int_0^x 1dy = x;$

当 $1<x\le 2$ 时, $f_X(x)=\int_0^{2-x} 1dy = 2-x;$



综上所述，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & other. \end{cases}$$

§3 条件分布

一、条件分布函数

条件分布刻画了两个随机变量之间的依赖关系.

定义1 设（X,Y）为二维随机变量，已知随机变量 Y 的取值为 $Y=y$，且对于任意给定的正数 $\varepsilon, P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 如果对于任意给定的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\le x \mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$$

均存在，就称此极限所得函数为在条件$Y=y$下，X的条件分布函数, 记为$F_{X|Y}(x|y)$ 或 $P\{X\le x|Y=y\}$. （了解）

同理可定义在条件 $X=x$下，Y 的条件分布函数$F_{Y|X}(y|x)$

或$P\{Y \le= y|X=x\}$.因此

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X \le x|Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}$$

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y \le y|X=x\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{Y \le y, x-\varepsilon < X \le x+\varepsilon\}}{P\{x-\varepsilon < X \le x+\varepsilon\}}$$

$$-\infty < y < +\infty.$$

•为了更方便表示条件分布，

条件分布：

- 离散情况，用联合分布律与边缘分布律商表示条件分布律；
- 连续情况，用联合概率密度与边缘概率密度商表示条件分布密度函数。

二、条件分布律

定义2 设（X,Y）为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\ i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,$$

如果已知 Y 的取值为 $Y=y_j$,且 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$, 就称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i=1,2,\cdots$$

为在条件 $Y=y_j$ 下，X 的条件分布律.

如果已知 X 的取值为 $X=x_i$,且 $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}>0$, 就称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j=1,2,\cdots$$

为在条件 $X=x_i$ 下，Y 的条件分布律.

条件分布律可从下表得到：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j = 1, 2, \cdots$$

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i = 1, 2, \cdots$$

非负性　　　　规范性

当 $Y=y_j$ 时，$\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \geq 0, i=1,2,\cdots; \sum_i \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \dfrac{\sum_i p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \dfrac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1.$

当 $X=x_i$ 时，$\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \geq 0, j=1,2,\cdots; \sum_j \dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \dfrac{\sum_j p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \dfrac{p_{i\cdot}}{p_{i\cdot}} = 1.$

条件分布律均满足分布律的性质.

条件分布律的表格形式

$$(Y \mid X=x_i) \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots \\ \dfrac{p_{i1}}{p_{i\cdot}} & \dfrac{p_{i2}}{p_{i\cdot}} & \cdots & \dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$(X \mid Y=y_j) \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ \dfrac{p_{1j}}{p_{\cdot j}} & \dfrac{p_{2j}}{p_{\cdot j}} & \cdots & \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} & \cdots \end{pmatrix}$$

例1 设同一品种的5个产品中，有2个次品，每次从中取一个检验，连续两次. 设X表示第一次取到的次品个数；Y表示第二次取到的次品个数. 试分别就（1）不放回；（2）有放回两种情况，求出在条件 $Y=1$下，X 的条件分布律.

解（X,Y）的联合分布律和边缘分布律如下 （前一节的例题）

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

不放回

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$P\{X=0|Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$$

$$=\frac{3/10}{2/5}=\frac{3}{4},$$

同理$P\{X=1|Y=1\}=1/4.$

当$Y=1$时, X的条件分布律为

$$(X|Y=1)\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

同理, 在有放回的情况下, 可求得当$Y=1$时, X的条件分布律为

$$(X|Y=1)\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

三、条件密度函数

•（必考）★

定义3 设（X,Y）为二维连续型随机变量，其密度函数为 $f(x,y)$，如果已知 Y 的取值为Y=y，且 $f_Y(y)>0$，就称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad -\infty<x<+\infty$$

注意y范围

为在条件 $Y=y$下，X 的条件密度函数.

如果已知 X 的取值为 $X=x$，且 $f_X(x)>0$，就称

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad -\infty<y<+\infty$$

注意x范围

为在条件 $X=x$下，Y 的条件密度函数.

•注意：条件密度函数也是一种密度函数，即满足:非负性和规范性。

定理1 设二维随机变量（X,Y）的其密度函数为$f(x,y)$, 如果

$f_Y(y_0)>0$, 则 $P\{a \le X \le b \big| Y=y_0\} = \int_a^b f_{X|Y}(x\big|y_0)dx.$

如果$f_X(x_0)>0$, 则 $P\{c \le Y \le d \big| X=x_0\} = \int_c^d f_{Y|X}(y\big|x_0)dy.$

- 根据（条件）密度函数易得条件分布函数公式:

$$F_{X|Y}(x\mid y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u\mid y)du; \qquad F_{Y|X}(y\mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(x\mid v)dv$$

- 条件密度对x积分　　　　•条件密度对y积分

【注】$P\{c \le Y \le d \big| a < X \le b\} = \dfrac{P\{c < Y \le d, a < X \le b\}}{P\{a < X \le b\}}$

例2 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$$

（1）试求 $f_{Y|X}(y|x)$；（2）计算 $P\{Y>1|X=2\}$.

解 在上节例4中，已经求得（X,Y）关于 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时，

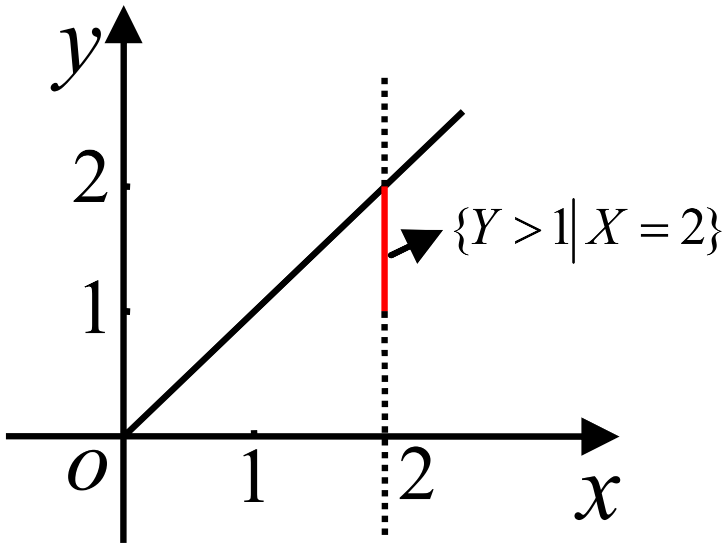
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$$

在条件X=x下，Y的条件分布为均匀分布.

续解（2） 由（1）知，在条件 $X=2$ 下

$$f_{Y|X}(y|2)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & other.\end{cases}$$

利用定理1得 $P\{Y>1|X=2\}=\int_1^{+\infty} f_{Y|X}(y|2)dy=\int_1^2 \frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}.$



2011数三

设二维随机变量（X,Y）服从区域G上的均匀分布，其中G是有 $x-y=0, x+y=2, y=0$ 所围成的三角形区域.

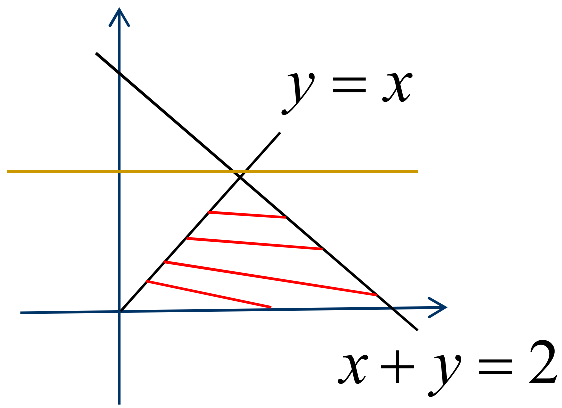
（1）求X的概率密度 $f_X(x)$,

（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.　　（下节后练习）

解　（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & other.\end{cases}$$

细节决定成败



类似（1）求Y 的边缘概率密度函数, $f_Y(y)$

从而求出条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

$G=\{(x,y)\,|\,y\le x\le 2-y,\ 0\le y\le 1\}$（$Y$型区域）

例3 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & other.\end{cases}$

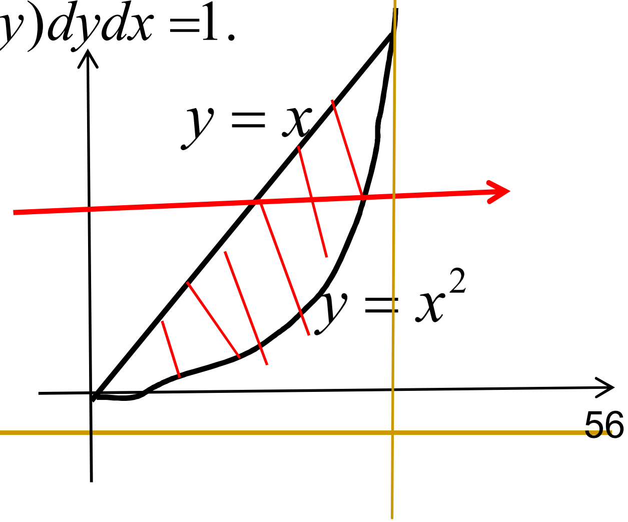
且当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(1-x)}, & x^2<y<x,\\ 0, & other.\end{cases}$ （1）求 X 和 Y 的联合密度函数 $f(x,y)$；（2）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 （1）$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}6, & 0<x<1, x^2<y<x.\\ 0, & other.\end{cases}$

•注意：验证：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{x^2}^{x}f(x,y)dydx=1.$

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & other.\end{cases}$$



2013数一

设随机变量Y服从参数为1的指数分布，a为常数且大于零，

则 $P\{Y \le a+1 | Y > a\} =$ ________.

解 $P\{Y > a\} = \int_a^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-a}$ (或$=1-F(a)$)

$$P\{a < Y \le 1+a\} = \int_a^{a+1} e^{-y} dy = e^{-a} - e^{-a-1} \text{(或}=F(a+1)-F(a)\text{)}$$

$$P\{Y \le a+1 | Y > a\} = \frac{P\{a < Y \le a+1\}}{P\{Y > a\}} = 1 - e^{-1}.$$

或由指数分布的"无记忆性"得

$$P\{Y \le a+1 | Y > a\} = P\{Y \le 1\} = F(1) = 1 - e^{-1}.$$

§4 随机变量的独立性

一、随机变量相互独立的概念

【回顾】随机事件A和B相互独立是指A和B各自发生与否没有任何关系.($P(AB)=P(A)\cdot P(B)$)

通俗地讲，随机变量 X 和 Y 相互独立是指 X 和 Y 的各自取值情况没有任何关系.

一般地，将随机变量 X 和 Y 的各种取值情况通过随机事事 $\{X\le x\}$ 和 $\{Y\le y\}$ 来实现, 其中 x,y 均为任意实数.

即对于任意的实数 x,y, 随机事件$\{X\le x\}$和 $\{Y\le y\}$相互独立，从而有$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$, 即

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

定义1 设（X,Y）为二维随机变量，其分布函数为$F(x,y)$,（X,Y）关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$. 如果对于任意的实数 x, y，均有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

就称**随机变量 X 与 Y 相互独立**.

•为了更方便表示独立性，

两个随机变量独立性：

$$\begin{cases}\text{离散情况，用联合分布律等于两种边缘分布律乘积表示；}\\ \text{连续情况，用联合概率密度等于两种边缘概率密度乘积表示。}\end{cases}$$

例1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),\ -\infty<x,y<+\infty,$$

问 X 与 Y 是否相互独立?

解 $$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),-\infty<x<+\infty;$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),-\infty<y<+\infty.$$

且对于任意的实数 x,y, 满足 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$,

所以 X 与 Y 相互独立.

二、离散型随机变量的独立性

定理1 设（X,Y）为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots,$$

则 X 和 Y 相互独立的充要条件为

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j},\quad i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots.$$

【注】 由定理1知，如果存在一对 i,j，使得 $p_{ij}\neq p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，

则 X 和 Y 不相互独立.

例2 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 且 X 和 Y 相互独立.（1）求 X 和 Y 的联合分布律；（2）计算 $P\{X=Y\}$.

解 （1）

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

（2）
$$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}.$$

例3 设同一品种的5个产品中，有2个次品，每次从中取一个检验，连续两次．设X表示第一次取到的次品个数；Y表示第二次取到的次品个数．试分别就（1）不放回；（2）有放回两种情况判断 X 和 Y 的独立性？

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

【解】不放回：不独立　　　有放回：独立

三、连续型随机变量的独立性

定理2 设（X,Y）为二维连续型随机变量，其密度函数为 $f(x,y)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件为对平面上几乎所有的点 (x,y), 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

•记忆：联合密度等于边缘密度的乘积。

【注1】如果存在平面区域 D $(S_D\neq 0)$, 当 $(x,y)\in D$ 时，

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 则 X 与 Y 不相互独立.

【注2】本定理的条件为“对平面上几乎所有的点 (x,y), 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.”

证　为了证明方便，不妨设 $f(x,y)$ 在平面上连续.

必要性 设 X 和 Y 相互独立，则有定义1知，对任意的实数 $x,y,$ 均有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 又由于 $f(x,y)$ 在平面上连续，故对应的分布函数连续且可导，两边同时求混合偏导数得

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{dF_X(x)}{dx}\cdot\frac{dF_Y(y)}{dy},$$ 即有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

充分性　设对任意的实数 x,y，均有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 则将上式两边同时在平面区域 $(-\infty,x]\times(-\infty,y]$ 上进行二重积分，得 $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$, 即有对任意的实数 x,y, $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 所以 X 和 Y 相互独立.

例4 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases}$$

问 X 和 Y 是否相互独立?

解 在 § 3. 2例4中, 已得 $f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

可见

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-yx}, & 0<y<x, \\ 0, & other. \end{cases} \ne f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} xe^{-x-y}, & x>0, y>0, \\ 0, & other. \end{cases}$$

所以 X 和 Y 不相互独立.

例5 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kg(x)h(y), & a\le x\le b, c\le y\le d,\\ 0, & other.\end{cases}$$

其中 g, h 均为正值连续函数，$k>0$. 则 X 和 Y 相互独立.

证 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy = kI_1I_2 = 1,$$

其中 $I_1=\int_a^b g(x)dx,\ I_2=\int_c^d h(y)dy,\quad I_1>0, I_2>0,$

得 $k=\dfrac{1}{I_1I_2}$，所以

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{I_1I_2}g(x)h(y), & a\le x\le b, c\le y\le d,\\ 0, & other.\end{cases}$$

续解 进而可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{1}{I_1}g(x), & a\le x\le b,\\ 0, & other.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{I_2}h(y), & c\le y\le d,\\ 0, & other.\end{cases}$$

故对任意的实数 x, y，均有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,

所以 X 和 Y 相互独立.

例6 设随机变量 $X \sim U[0,1], Y \sim E(1)$, 且 X 和 Y 相互独立，求 $P\{X+Y \le 1\}$. ★（加上**特殊条件**边缘分布可确定联合分布）

解 由题意知，X 和 Y 的密度函数分别为

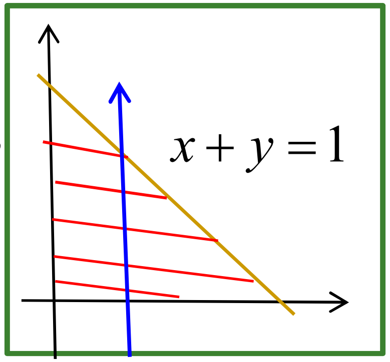
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & other.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & other.\end{cases}$$

又由于 X 和 Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y\ge 0,\\ 0, & other.\end{cases}$$

故 $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-y}dy$

$$=\int_0^1 (1-e^{x-1})dx=e^{-1}.$$



四、随机变量独立性的有关结论

定理3 设随机变量X与Y相互独立, 则对任意实数集合 L_1, L_2, 有 $P\{X \in L_1, Y \in L_2\} = P\{X \in L_1\}P\{Y \in L_2\}$.

例7 设随机变量X与Y相互独立, 且$X \sim B(1,\frac{1}{2}), Y \sim E(1)$, 求 $P\{Y - X > 1\}$.

解

$$P\{Y-X>1\} = P\{X=0, Y-X>1\} + P\{X=1, Y-X>1\}$$

$$= P\{X=0, Y>1\} + P\{X=1, Y>2\}$$

$$= P\{X=0\}P\{Y>1\} + P\{X=1\}P\{Y>2\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}(e^{-1}+e^{-2}).$$

X与Y的随机变量类型可以不同。

定理4 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$g(x),h(y)$ 是连续函数，则随机变量 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也相互独立.

【注】定理4的逆命题不成立， 即随机变量 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 相互独立，不能推得随机变量 X 与 Y 相互独立.

【反例如下见例8】

例8 设二维随机变量（X,Y）的分布律以及边缘分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-1	0.25	0	0	0.25
0	0	0.25	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
	0.25	0.5	0.25	1

可见 X 与 Y 不相互独立

可求得(X^2,Y^2)的分布律和边缘分布律为

$Y^2 \backslash X^2$	0	1	
0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
	0.5	0.5	1

易知 X^2 与 Y^2 相互独立.

此例表明，虽然 X^2 与 Y^2 相互独立，但X 与 Y 不相互独立.

定理5 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件为 $\rho=0$.

证 由定义知（X,Y）的密度函数为，对任意 $-\infty<x,y<+\infty$,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

又由§3.2定理4得，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 从而 X 和 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

和

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

续解　所以 $f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)},(x,y)\in R^2.$

不难发现, $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=$$

$=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$ 的充要条件为 $\rho=0$,

即 X 和 Y 相互独立的充要条件为 $\rho=0$.

定理5 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件为 $\rho=0$.

定理6 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$.

【注】 由§3.2定理4知，联合分布为正态分布可得边缘分布为正态分布；

★ 若随机变量 X 和 Y 分别均为正态分布，不能推断

★ (X,Y) 是否服从二维正态分布. 【反例见教材P109第25题】

此处例外的原因为：**X**与**Y**附加了条件。

例9 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$, 求 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$.

解 由于 X 和 Y 相互独立，由定理6知，(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},-\infty<x,y<+\infty,$$

所以 $$P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}r^2}\cdot rdr=1-e^{-\frac{1}{2}}.$$

注意：$P\{G(X,Y)\in$某范围$\}$，必须先求出X与Y的联合分布。

2015数一

设二维随机变量（X,Y）服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,

则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

解　由正态分布的性质知 $X \sim N(1,1), X \sim N(0,1), X, Y$ 相互独立，所以

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}$$

$$=P\{(X-1)<0, Y>0\}+P\{(X-1)>0, Y<0\}$$

$$=P\{X<1\}P\{Y>0\}+P\{X>1\}P\{Y<0\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

•本题也可直接计算。

§5 二维随机变量函数的分布 必考

1、二维离散型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$

2、二维连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$

做题常(针对1、2)讨论几种具体函数类型：

$$Z=X+Y \qquad Z=\frac{X}{Y}$$

$$Z=\max(X,Y), Z=\min(X,Y)$$ 的分布

3、二维混合型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$

注意：积累三种情况对应的处理方法。

- 分布函数法，卷积公式法。

一、二维离散型随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布

例1 设二维随机变量（X, Y）的分布律为

试分别求 $Z_1 = X+Y, Z_2 = XY,$

$Z_3 = \max\{X,Y\}$的分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.4
1	0.1	0.3

解

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3
Z_1	0	1	1	2
Z_2	0	0	0	1
Z_3	0	1	1	1

同一表格法

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

设（X,Y）为二维离散型随机变量，且其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

将（X, Y）的分布律写为

(X,Y)	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	$\cdots$	(x_i,y_j)	$\cdots$
P	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

则求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律的步骤为：

第一步：在(X,Y)的分布律中添加一行 $Z=g(X,Y)$，并将计算 $z_i=g(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$ 的值对应填入该行中.

第二步：对其中Z取值相同的项适当进行概率合并，即得Z的分布律.

结论1 设随机变量$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, 且$X$和$Y$相互独立，

则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

再生性或可加性

结论2 设随机变量 $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$,且$X$和$Y$相互独立，

则 $X+Y \sim B(n+m,p)$.

P93例2（自学）

分解为完备事件组

证 对任意的非负整数 k，有

$$P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

注意：结论1,2可以推广为n个相互独立的随机变量。

二、二维连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布

如果（X,Y）为二维连续型随机变量，且（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)$, 则二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 出现的情况比较复杂，此时$Z=g(X,\mathrm{Y})$可能为离散型随机变量，也可能为连续型随机变量，甚至为非离散型，也非连续型随机变量.

理解

例2 设二维随机变量$(X,Y) \sim U(D)$, 其中平面区域

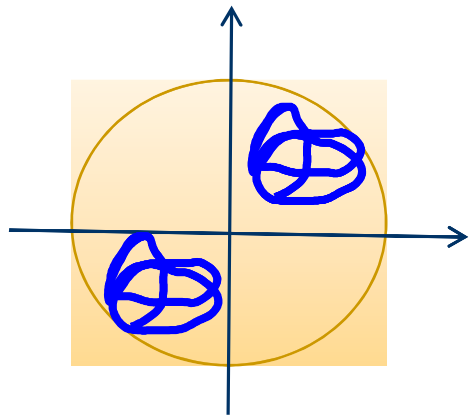
$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\},\ \text{令}\ Z=\begin{cases}0, & XY>0,\\ 1, & XY\le 0.\end{cases}$$ 求Z的概率分布.

解　由于Z的取值仅为0和1，所以Z为离散型随机变量，

$$P\{Z=0\}=P\{XY>0\}$$

$$=P\{X>0,Y>0\}+P\{X<0,Y<0\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{1}{2}.$$



故　$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

当 $Z=g(X,Y)$ 为连续型随机变量, (或部分既非离散型, 也非连续型随机变量), 通常用下列分布函数法, 求出Z的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$$

如果Z为连续型随机变量，则其分布函数为

$$=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy,\quad -\infty<z<+\infty.$$

其密度函数为 $\quad f_Z(z)=F_Z'(z),\ -\infty<z<+\infty.$

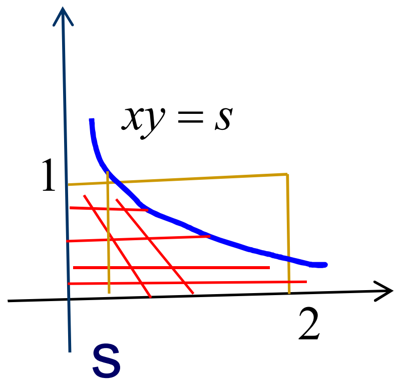
【注】 分布函数法的难点在于：在计算$F_Z(z)$的过程中，

经常需要对变量 z 进行分段讨论.

例3 设二维随机变量（X,Y）在矩形$G=\{(x,y)\big|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布, 试求 $S=XY$ 的概率密度$f_S(s)$.

解 由题意知，$S=XY$其分布函数为

$$F_S(s)=P(S\le s)=P(XY\le s)$$



当 $s\le 0$ 时, $F_S(s)=0$; 当 $s\ge 2$ 时, $F_S(s)=1$;

当 $0<s<2$ 时, 利用几何概型得

$$F_S(s)=1-P\{XY>s\}=1-\frac{\int_s^2(1-\frac{s}{x})dx}{2}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}s\ln\frac{2}{s}.$$

所以S的概率密度为

$$f_S(s)=F_S'(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{s}, & 0<s<2,\\ 0, & s\in other\end{cases}$$

定理1 设二维随机变量(X,Y) 的密度函数为$f(x,y)$，

则 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

如果 X和Y 相互独立，则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为X和Y的密度函数，此公式称为

关于Z=X+Y的卷积公式. 注意记忆解题方法以及结论。

注意定理1的适用范围：已知什么？求什么？

以及特别情况。

【只证 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$, 另一种形式同理可证】

证　$Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy,$$

令 $y=t-x$, 并交换积分次序，得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)dt\right]dx=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)dx\right]dt,$$

由此可知, $Z=X+Y$ 为连续型随机变量，且其密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

注：类似定理1，$Z=X-Y,\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx.$

$Z=aX+bY,\Rightarrow$ 类似求解：$f_Z(z)$。

例4　设随机变量X和Y相互独立，且 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$,

求 $Z=X+Y$ 的密度函数$f_Z(z)$.　　$X+Y \sim N(0,2)$

解　由定理1知，$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}[x^2+(z-x)^2]}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\times\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}\},-\infty<z<+\infty\}$$

一般地，对于正态分布，有下列结论

再生性或可加性

结论3（1）设随机变量X和Y相互独立，且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

$$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2), \text{则} Z = X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

即：独立正态分布之和仍为正态分布

（2）设二维随机变量$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,

$$\text{则} Z = X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2).$$

即：二维正态分布中两个随机变量之和仍为正态分布

注意：结论3(1)可以推广为n个相互独立的随机变量变量之和。 P113

【注】 如果随机变量 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

则未必有 $Z = X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

也未必有 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,

【反例】 令 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 取 $Y = -X \sim N(-\mu,\sigma^2)$,

则有 $X+Y=0$. 显然 $X+Y$ 不服从正态分布，

（X,Y）也不服从二维正态分布(反证法）.

结论4 设二维随机变量（X,Y）服从二维正态分布

$$\begin{cases} U = aX + bY, \\ V = cX + dY, \end{cases} \text{且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

则（U,V）也服从二维正态分布.

例5 设X,Y是两个相互独立的随机变量，$X \sim U[0,1], Y \sim e(1)$.
求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

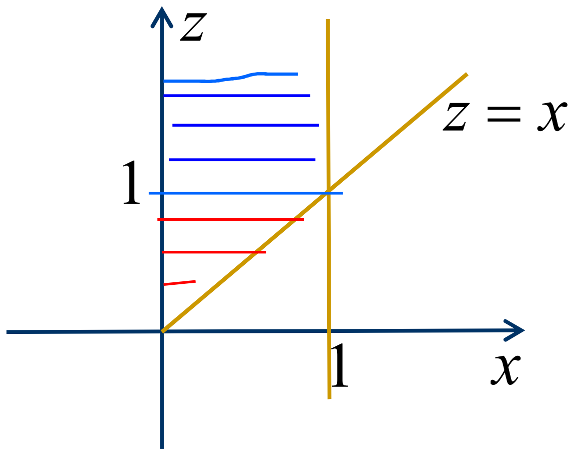
解 由于 $X \sim U[0,1], Y \sim e(1)$，其密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x\in other.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & y\in other.\end{cases}$$

由定理**1**，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}&0\le x\le 1,\\ &z-x\ge 0.\end{aligned}}$$

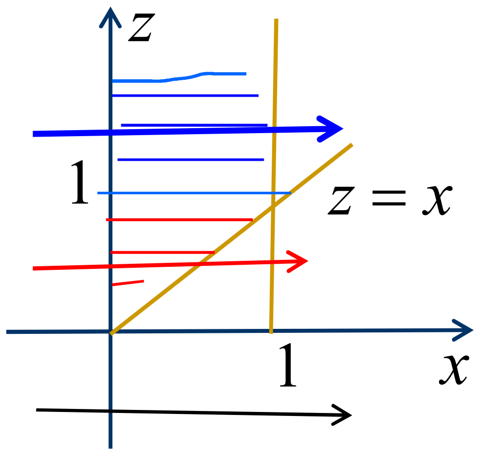


$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ z - x \ge 0. \end{array}}$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \int_0^z 1 \cdot e^{-(z-x)}dx, & 0 < z < 1, \\ \int_0^1 1 \cdot e^{-(z-x)}dx, & z \ge 1. \end{cases}$$



$$= \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ e^{-z}(e-1), & z \ge 1. \end{cases}$$

例6 设随机变量（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$$

求 $Z=X-Y$ 的概率密度函数.

解

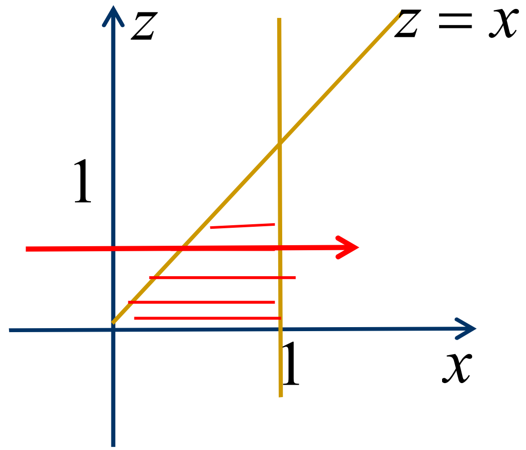
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)\cdot|-1|\,dx$$

$$\begin{aligned}&0<x<1,\\ &0<x-z<x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&0<x<1,\\ &0<z<x.\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}\int_z^1 3x\,dx, & 0<z<1,\\ 0, & z\in other.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1,\\ 0, & z\in other.\end{cases}$$



方法二：
分布函数法

Γ分布及其可加性

先介绍两类函数：

（1）Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0).$

(2) B函数：$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p,q>0).$

两者关系为$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

Γ分布：

X服从$Ga(\alpha,\lambda)$:概率密度为$f(x)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{\{x\ge 0\}}$;

则可以证明：Γ分布有可加性.

即：X服从$Ga(\alpha_1,\lambda)$，Y服从$Ga(\alpha_2,\lambda)$，X与Y独立，

则$Z=X+Y$服从$Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

注：$\lambda=\dfrac{1}{2},\alpha=\dfrac{n}{2}\Rightarrow\chi^2$分布.

定理2 设二维随机变量(X,Y) 的密度函数为$f(x,y)$,

则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)|y|dy.$

如果 X和Y 相互独立，则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)\cdot f_Y(y)\cdot|y|dy$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为X和Y的密度函数.

注：类似定理2，$Z=\dfrac{Y}{X}, \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,xz)\,|\,x\,|\,dx.$

例7 设X,Y是两个独立同分布的随机变量，其密度函数为

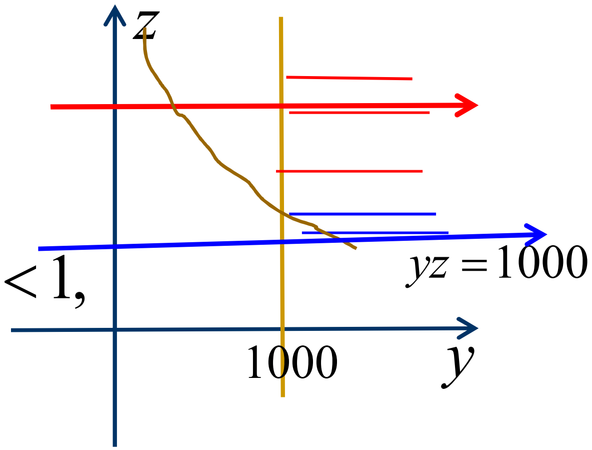
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\[2ex] 0, & x\in other.\end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.

解 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)\cdot f_Y(y)\cdot|y|dy$$

$$\boxed{\begin{aligned}&yz>1000,\\&y>1000.\end{aligned}}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\[1ex] 1000\displaystyle\int_{\frac{1000}{z}}^{+\infty}\frac{1}{y}\cdot\frac{1000}{y^2z^2}dy, & 0<z<1,\\[3ex] 1000\displaystyle\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{y}\cdot\frac{1000}{y^2z^2}dy, & z\ge 1\end{cases}$$



定理3 设随机变量 X和Y 相互独立，X 的分布函数为$F_X(x)$,

Y的分布函数为 $F_Y(y)$.

$M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$, 则 M和N 的分布函数分别为：

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z);$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)];$$

若随机变量 X和Y 独立同分布$F(x)$（**i.i.d.-Independent and identically distributed**）

$$F_M(z)=[F(z)]^2,$$
$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^2;$$

亦可推广到多个独立同分布的情形.

证 $F_M(x)=P\{M\le x\}=P\{\max\{X,Y\}\le x\}=P\{X\le x,Y\le x\}$

$$=P\{X\le x\}P\{Y\le x\}=F_X(x)F_Y(x);$$

$$F_N(x)=P\{N\le x\}=P\{\min\{X,Y\}\le x\}=1-P\{\min\{X,Y\}>x\}$$

$$=1-P\{X>x,Y>x\}=1-P\{X>x\}P\{Y>x\}$$

$$=1-[1-P\{X\le x\}][1-P\{Y\le x\}]=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)]$$

$$=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)]$$

例8 设 $F_1(x), F_2(x)$ 是两个分布函数,其相应的密度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 连续, 则必为密度函数的是（　　）

$(A)\, f_1(x)f_2(x)$　　$(B)\, 2f_1(x)F_2(x)$

$(C)\, F_1(x)f_2(x)$　　$(D)\, f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)$

例9 设随机变量 X,Y 独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（　）

$(A)\ F^2(x)$　　$(B)\ F(x)F(y)$

$(C)\ 1-[1-F(x)]^2$　　$(D)\ [1-F(x)][1-F(y)]$

例10 设随机变量 X和Y 相互独立，且 $X \sim e(\lambda_1), Y \sim e(\lambda_2)$,

求 $Z=\min\{X,Y\}$的密度函数 $f_Z(z)$.

解 由于 $X \sim e(\lambda_1), Y \sim e(\lambda_2)$, 有

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

由定理3，$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

$$Z=\min\{X,Y\}\sim e(\lambda_1+\lambda_2)$$

例11 设X与Y相互独立，X的密度函数为$f(x)$，$Y \sim \begin{pmatrix} a & b \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数为$f_Z(z)$.

解

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X+Y \le z\}$$

$$= P\{Y=a, X \le z-a\} + P\{Y=b, X \le z-b\}$$

$$= P\{Y=a\}P\{X \le z-a\} + P\{Y=b\}P\{X \le z-b\}$$

$$= p\int_{-\infty}^{z-a} f(t)dt + (1-p)\int_{-\infty}^{z-b} f(t)dt$$

求导可得Z的密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = pf(z-a) + (1-p)f(z-b).$$

2016数学一，三

设二维随机变量（X,Y）在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$

上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（1）写出（X,Y）的概率密度；

（2）问U与X是否相互独立？并说明理由；

（3）求$Z=U+X$的分布函数 $F_Z(z)$.

解　（1）　$S_D=\iint\limits_D dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\dfrac{1}{3}.$

故（X,Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & other.\end{cases}$

(2) 方法一（举反例）

$$P\{U=1\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{2};\ \ P\{X\le \frac{1}{4}\}=\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=\frac{15}{64};$$

$$P\{U=1,X\le \frac{1}{4}\}=P\{X\le Y,X\le \frac{1}{4}\}=\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_{x}^{\sqrt{x}}3dy=\frac{5}{32}.$$

因为 $P\{U=1,X\le \frac{1}{4}\}\ne P\{U=1\}\cdot P\{X\le \frac{1}{4}\}$

故X和U不独立.

方法二 $E(XU)\ne EX\cdot EU.$

（3）$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+U\le z\}$

当 $z<0$, $F_Z(z)=0$;　当 $z\ge 2$, $F_Z(z)=1$;

当 $0\le z<1$, $F_Z(z)=P\{U+X\le z\}$

$$=P\{U=1,U+X\le z\}+P\{U=0,U+X\le z\}$$

$$=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}$$

$$=0+\int_0^z dx\int_{x^2}^x 3dy=\frac{3}{2}z^2-z^3.$$

当 $1\le z<2$, $F_Z(z)=P\{U+X\le z\}$

$$=P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}$$

$$=\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy+\frac{1}{2}=2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}.$$