《线性代数》期末报告

行列式的等价定义

姓名: 洛莉莉

学号: 202021XXXX

专业: 机械工程

教师: 汪永杰

《线性代数》期末报告[1]

行列式的等价定义

洛莉莉

简介

线性代数作为一门基础课程,是机械工程专业必修的工具性专业基础课,很高兴可以在汪永杰老师的指导下完成本课程的学习.本文主要从三个篇章入手,首先探讨线性代数诞生的原因和在当今学术研究中的使用;其次从行列式的发展入手,通过查询文献给出行列式的几个等价定义;最后回到自己本身,简要书写一下自己的学习心得——包括但不限于线性代数、LaTeX .

1 线性代数和行列式的研究历史

行列式出现于线性方程组的求解,它最早是一种速记的表达式,现在已经是数学中一种非常有用的工具.历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题,而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展,这些内容已成为我们线性代数教材的主要部分.

1.1 线性代数简史

线性代数是在 18 世纪产生发展起来的一门重要学科, 它的发展历史大致可分为以下三个阶段[2]:

18 世纪莱布尼兹与克莱姆等人给出了行列式概念及其基本理论,线性方程组的克莱姆公式及行列式的拉普拉斯展开式就是这一阶段的重要成就.

19 世纪,贾柯勃逊将行列式用于数学分析,给出 Jacobi 函数行列式(雅可比行列式)这一重要工具,使行列式的应用更为广泛.矩阵理论两大始祖 J · Sylvester 与 A · Cayley 于 19 世纪上手叶均做出了重大贡献.若当于下半叶给出了 Jordan 标准更理论,J · Sylvester 于 1851 年还建立了初等因子理论,使 Jordan 标准型理论史趋完善.次年他又给出了二次型惯性律.后半叶,哈密特建立了 Hermite 型(埃尔米特形式)与 Hermiet 矩阵(埃尔米特矩阵)的有关理论,把实二次型和实对称矩阵的研究推广到复数城范围.[3]

---

[1] 这篇文章不是使用 LaTeX 而是 WordTeX 完成.

[2] 姚克澜.线性代数刍议[J].九江师专学报,1989(06):69-72.

[3] 徐克龙.行列式的历史及在教学中的应用[J].科技创新与应用,2012(29):291.S

19 世纪末到 20 世纪,线性代数沿从有限维向无限维、由单线性到多重线性、基域方面的拓广,向更高更深的层次继续发展.

1.2 线性代数的基本应用

线性代数作为一门基础学科,是整个工程科学领域的基础.没有矩阵和行列式,现代科学理论可能有很大一部分无法实现工程应用.比如说信号压缩,工程优化,线性规划,甚至是现在非常火的人工智能,深度学习及大数据分析技术,无一例外都要用到矩阵和行列式.这里只简要讨论几个线性代数概念在几何上的含义,然后从我喜欢的几个领域来探讨线性代数在现代行业中广泛的运用.

1.2.1 线性变换（矩阵）

定义 1.2.1 由$m \times n$个数a_{ij}排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵,简称$m \times n$矩阵. 记作;

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

矩阵的实质是操作空间的一种手段,具有原点固定、直线在变换后保持直线、网格保持平行且等距分布这样三个特点.换句话说:变换是!函数!的一种花哨的说法,它接收输入内容,并输出对应结果.特别地,在线性代数的情况下,我们考虑的是接收一个向量并且输出一个向量的变换.

1.2.2 特征向量与特征值

定义 1.2.2 设 A 是 n 阶方阵,如果存在常数及非零 n 向量 $\boldsymbol{x}$,使得 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,则称$\lambda$是矩阵 A 的特征值,$\boldsymbol{x}$ 是 A 属于特征值的特征向量.
给定 n 阶矩阵 A,行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

的结果是关于 λ 的一个多项式,成为矩阵 A 的特征多项式,该特征多项式构成的方程$|\lambda E - A| = 0$称为矩阵 A 的特征方程.

特征向量几何意义是向量在线性变换前后向量的张成空间不变且与所选坐标系无关.特征值的几何意义是特征值 $= \frac{\text{特征向量线性变换后的长度}}{\text{特征向量线性变换前的长度}}$,向量翻转时特征值为负.特别的:部分旋转的线性变换没有特征值和特征向量,属于单个特征值的特征向量可能不止在一条线上.

1.2.3 线性代数在游戏中的运用

游戏场景的构建需要使用线性代数,我们首先来看一个最简单的游戏[4]启动场景:

我们很容易就可以发现,上面的游戏场景与人眼看到的真实世界几乎一致,远处的柱子显得比近处的要小,而小道在远处消失于一点,也就是符合我们眼睛中真实的世界——近大远小.真实世界中眼睛的这种透视效果表达体现了线性代数的强大作用.

这里本质上对应了一种线性变换,将视椎体框出的区域转换成一个标准立方体,经过这种变换,近平面的物体相对远平面就会变大.这里就涉及到了透视变换.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textit{其中}: n = near(\textit{近平面}), f = far(\textit{远平面}), l = left(\textit{左平面}),$$
$$r = right(\textit{右平面}), t = top(\textit{顶平面}), b = bottom(\textit{底平面})$$

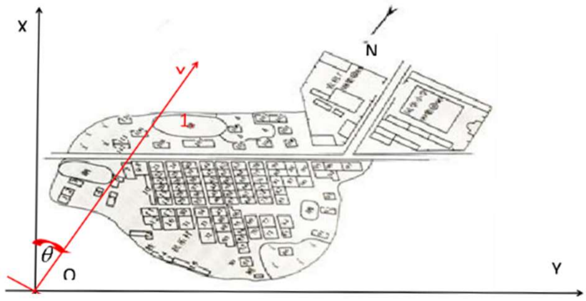
1.2.4 线性代数在工程测量中的应用研究[5]

在测量中,根据测区地理位置和平均高程的具体情况可以选择不同的坐标系进行表示,如建立独立平面直角坐标系、任意投影带独立坐标系,还有城市坐标系和国家统一坐标系.运用线性代数可以很好的计算新地点相对原坐标系的的转换.

[4] 原神 Project.上海 miHoYo 工作室.

[5] 方媛琳. 线性代数在工程测量中的应用研究[D].广州大学,2019.

例题 1.2.4 如图是某村的村貌建设图.该村村民在绘制建设图时为了方便建立了独立的平面直角坐标系,Y 轴是以横穿全村的主干道为参照的.现在因新农村建设需要,将对周边几个村庄做统一建设规划管理,要求使用统一坐标系,X 轴正方向为正北方向,因此各村庄建设图需要进行坐标系间的转换.



以上平面坐标系中点 1 的坐标转换可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

空间坐标系中点 1 的坐标可以表示为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

同理,若是保持 Y 轴不动,顺时针旋转 X、Z 轴所在坐标平面 β 角,此时点 1 的新 坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = A(\beta) \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix}$$

若是保持 X 轴不动,顺时针旋转 Y、Z 轴所在坐标平面 γ 角,得此时点 1 的新坐标 为

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{pmatrix} = A(\gamma) \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{pmatrix}$$

由此可以得出线性代数在工程测绘上具有很强的使用价值,具有其他数学工具不可替代的独特性,可以大大加快工程问题的解题速度.

1.3 行列式的发展历史

数学的发展从数字运算的加减乘除开端,进而诞生了乘方与开放,从而渐渐的形成了代数方程的体系.有时一个关系不只有一个未知数,就用多个字母分别表示,这样就有了二元及多元方程组成的方程组.

解这些一元的方程比较简单,解那些多元的方程就十分复杂,就有人把它们的系数列成方阵,这就是行列式的产生,用这些系数很容易得到未知数的解,并且不需把所有的未知数都解出来,因此解行列式的方法得到推广,在解行列式的基础上矩阵也就进一步发展出来.

在行列式的发展史上,第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述,即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人,是法国数学家范德蒙(A-T.Vandermonde,1735～1796).他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则.就对行列式本身这一点来说,他是这门理论的奠基人.

1.4 行列式的几何意义及其应用

1.4.1 低纬行列式的几何意义

二维表示;二维行列式中两个二维向量构成的面积.符号取决于区域是否发生了翻转变换(反转为负)行列式的值与所选坐标系无关.

三维表示;三维行列式中三个三维向量构成的体积.符号取决于构成矩阵的这三个向量是否满足右手定则(不满足为负)

特别的: 当线性变化后区域面积为 0 时(点,线).说明发生了由高维到低维的线性变换. 当线性变化后比例为负数时,平面翻转.

1.4.2 行列式在微积分中的应用

维基百科中提到行列式的特性可以被简要概括为一个交替多线性形式,这个本质使得行列式在欧几里德空间中可以成为描述“体积”的函数[6].

在计算!体积!的多重积分中,雅可比行列式应用于换元积分的时候.积分的思想是将空间割成许多个微小的体积元,称为积分元素,再将每个体积元上的函数值乘以体积元的体积后相加.将一个积分元素换为另一个积分元素时,实际上作了一次对空间中体积的度量方式的改变;分划体积元的方式不同了.譬如在二维空间中,将直角坐标积分换为极坐标积分时,面积元素由方块区域变成扇形区域.因此,要测量这种体积度量方式的改变,可以将这种变换看成一个非线性的变换函数:$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.而它在每一点的影响可以通过雅可比行列式来体现.

[6] 维基百科:https://zh.wikipedia.org/wiki/行列式

2 行列式的等价定义

对于 n 阶行列式$A_{m\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$有以下几种定义等价.

a) $A=\sum_{j_1\cdots j_2}(-1)^{\pi(j\cdots j_4)}\quad ,a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

b) 归纳定义

当 $n=1$ 时 $\quad A=a_{11}$

当 $n=2$ 时 $\quad A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}$

假设对 $\mathrm{n}-1$ 阶行列式已有定义, 则 n 阶行列式定义为

$A=a_{11}\,A_{11}+a_{12}\,A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

式中 A_{11}, $A_{12}\cdots A_{1n}$ 是 A 的代数余子式.

c) 令 V=F^n $\quad \alpha_i=a_{11}e_1+\cdots+a_{n1}e_n\cdots_{a_2}=a_{ta}e_1+\cdots+a_{n_n}e_n$ [7]

$e_1=(1{,}0\cdots 0)\ \cdots\ e_n=(0,\cdots 0{,}1)$

A 是 F^n 上的一个反对称线性函数 $\varphi(\alpha_1\cdots\alpha_n)$,

且取 $\varphi(e_1\cdots e_n)=1$

d) 设 F 是一个数域, $F_{n\times n}$ 为 F 上全体 n 阶方阵作成的集合.如果f是 $F_{n\times n}$ 到 F 的一个函数,若 f 满足 $\forall A,B\in F^{n\times n}$均有:

$$f(AB)=f(A)f(B)$$
$$f(A)=f(A')$$
$$f(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

则称 f(A) 为 n 阶方阵 A 的行列式. [8]

e) 设M_n(F)是数域 F 上 n 阶方阵的集合

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{m} \end{bmatrix}\in M_n(F),\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

是 A 的列向量,为了方便,记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,

称 f: $M_n(F)\to F, A\to f(A)=|A|$ 的映射为行列式映射,且

---

[7] 周英芳.行列式的几个等价定义[J].运城高专学报,1990(03):39-43.
[8] 丛二勇,朱莉.再论行列式定义的等价性[J].黑龙江科技信息,2008(10):57.

(1) $f(E_n) = 1$, 这里 E_n 是 n 阶单位矩阵

(2) $f\big((\alpha_1, \cdots, k\alpha_4, \cdots, \alpha_n)\big) = kf\big((\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)\big),$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall k \in F.$$

(3)$f\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n)\right)$

$$= f\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_i + k\alpha, \cdots, \alpha_j \cdots, \alpha_n)\right),$$

$$\forall 1 \leqslant i \leq j \leqslant n, \forall k \in F.$$

3 总结和建议

3.1 个人总结

非常开心得到允许可以使用电子电子稿,虽然一开始说这要用 LaTeX 来书写这份期末报告,可惜自己的能力低下,所以使用了所见即所得的文本编辑器 Word 以及它的插件 WordTeX 来完成报告.好吧,确实写的有点长了,用的时间已经超过了六个小时,回过头来想想,手写板可能会更快.而且因为是电子版,引用的部分也非常多.

我关于学习线性代数是从寒假开始的,那时候兴趣满满的看了 3B1B 的《线性代数的本质》视频.从几何的角度先行对行列式进行了一次了解.这让我在后期的学习中很容易就能明白很多难以理解的抽象概念,但由于自己在日常的作业中使用 MATLAB 作弊极为严重,导致自己的运算能力非常的垃圾.这点我会好好的思考.希望自己在未来的日子里可以学的更好.

3.2 为什么要先学行列式?

一个矩阵的行列式就是一个平行多面体的(定向的)体积,这个多面体的每条边对应着对应矩阵的列.如果学生得知了这个秘密(在纯粹的代数式的教育中,这个秘密被仔细的隐藏了起来),那么行列式的整个理论都将成为多重线性形式理论的一部分.倘若用别的方式来定义行列式,任何敏感的人都将会永远痛恨诸如行列式,Jacobia 式,以及隐函数定理这些东西.[9]

目前来看,行列式主要的目的是用来推导的特征多项式,求解特征值.实际上,行列式应该是线性代数核心原理推导的结果,而不是用行列式来推导线性代数的核心.可惜我们使用的教材第一章却是行列式,在我的学习过程中,这屡次让我倍感困惑.常常会高呼?这玩意学了有什么用?

记得刚开始老师说过,你一开始教这本书不是从第一章开始的.

[9] 阿诺尔德.俄国. 论数学教育