合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2020～2021 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）______ 考试日期 2020 年 5 月 19 日 10:20-12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名______

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, 则行列式 $|A^{-1}+A^*|=$ ______.

2. A、B 均为 2 阶~~非零实方阵~~, 如果 $AB=O$, 则 $R(A)=$ ______.

3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 的秩为______.

4. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&a\end{pmatrix}$, 若 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的一个特征向量，则 $a=$ ______.

5. $A=\begin{pmatrix}t&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&t-1\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 t 的取值范围是______.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1. A 是一个 3 阶实方阵，$|A|=0$, 则下述说法正确的是( )

(A) 0 必是 A 的一个特征值 (B) A 必有一行全为 0

(C) A 必有两行成比例 (D) 必有 $A^*=O$

2. A 是 3 阶实方阵，则 $R(A^*)$ 不可能取到的值为( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. P、A、B 均为 3 阶实方阵，若 $PA=B$, 则下述说法正确的是( )

(A) 必有 $R(A)=R(B)$ (B) A 与 B 的行向量组必等价

(C) A 必可通过初等行变换变为 B (D) B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表示

4. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个不同的解, 则下述是 $Ax=0$ 的一个解的是( )

(A) $\alpha_1+\alpha_2$ (B) $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

(C) $3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$ (D) $\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

5. 若 $A=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&2&b\\0&0&2\end{pmatrix}$ 可对角化, 则关于 a、b, 有( )

(A) a 与 b 只能全为 0 (B) b=0, a 可取任意值

(C) a=0, b 可取任意值 (D) a, b 均可取任意值

三、(12分) 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$, 求 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

其中 M_{ij} 为 D 的(i,j) 位置元素的余子式.

四、(12分) n 阶实方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$.

(1) 证明 $A+2E$ 可逆，并求其逆.

(2) 当 $A\neq E$ 时，判断 $A+3E$ 是否可逆，并给出理由.

五、(10分) 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、(10分) 解线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=-1\end{cases}$.

七、(12分) 已知二次型 $x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 变为 $y_1^2+4y_2^2$. 求 a 的值以及正交矩阵 P.

八、(4分) A 是一个 2×3 的实矩阵，$R(A)=2$, A^T 的列向量组记为 α_1, α_2. 记实向量 β 为 $Ax=0$ 的一个非零解, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性无关.