

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{AB})=$ _____.

2. 已知随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=a(2/3)^k, k=1,2,\cdots$, 则 $a=$ _____.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim U(0,2)$, Y 的分布律为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, 则 $D(X-3Y+4)=$ ____.

4. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为取自总体 $X \sim N(0,4)$ 的样本, 已知 $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布, 则 $a=$ _____, $b=$ _____, χ^2 的自由度为 _____.

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, X_1, X_2, \cdots, X_n 为其样本, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}-a\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+a\frac{S}{\sqrt{n}})$, 其中 \bar{X}, S^2 为样本均值和方差, 则 $a=$ _____.

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有（ ）

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$; (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$;

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$; (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 则下列函数必为概率密度函数的是（ ）

(A) $f(a-x)$ (a 为常数) (B) $\frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$; (C) $af(ax)$ (a 为常数); (D) $2xf(x^2)$.

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

	Y	0	1
X	0	0.4	a
	1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 则（ ）

(A) $a=0.2, b=0.3$; (B) $a=0.4, b=0.1$; (C) $a=0.3, b=0.2$; (D) $a=0.1, b=0.4$.

4. 设随机变量 X, Y 不相关, 则下述选项不正确的是（ ）

(A) $E(X+Y)=EX+EY$; (B) $D(X+Y)=DX+DY$;

(C) $E(XY)=EX \cdot EY$; (D) $D(XY)=DX \cdot DY$.

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差, 则（ ）

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$; (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$; (C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$; (D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1,n)$.

三. (本题满分 12 分) 设 10 件产品中有 2 件次品, 8 件正品, 现从中任取两件, 每次一件, 取后不放回, 试求下列事件的概率: (1) 两次均取得正品; (2) 第二次取得次品; (3) 两次中恰有一次取得正品.

四. (本题满分 12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 令 $Y=X^2, F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求: (1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$; (2) $F(\frac{1}{2}, 4)$; (3) $Cov(X,Y)$.

五. (本题满分 14 分) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求: (1) 常数 c ; (2) X, Y 边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$; (3) $P(X+Y \leq 1)$;

(4) $Z=X-Y$ 的概率密度函数.

六. (本题满分 12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 定义随机变量 Y_1, Y_2 为 $Y_k = \begin{cases} 2, & X \leq k, \\ 3, & X > k, \end{cases} (k=1,2)$, 求: (1) Y_1, Y_2 的联合分布律, (2) 判断 Y_1, Y_2 的相关性.

七. (本题满分 12 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x;\alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$,

其中参数 $\alpha > 0$, 设 X_1, X_2, \cdots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 求未知参数 α 的矩估计量和极大似然估计量.

八. (本题满分 8 分) 设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分标准差为 15 分, 在显著性水平 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分? 并给出检验过程.

$(u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(35) = 2.0301, t_{0.025}(36) = 2.0281, t_{0.05}(35) = 1.6896)$.