第四章 随机变量的数字特征

第一节 数学期望

第二节 方差

第三节 协方差、相关系数与矩

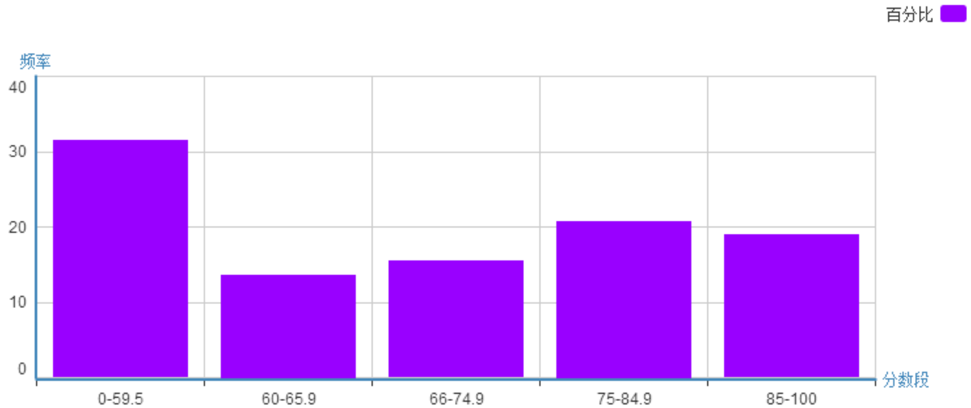
分布函数虽可完整地描述随机变量的统计规律性，但在很多实际问题中并不关心分布函数，而关心与随机变量有关的一些重要数值(特征）.

我们把这些与随机变量有关且能描述随机变量在某些方面重要特征的数值称为随机变量的数字特征.

甚至有一些重要分布还是由其数字特征所确定的.

期末考试	成绩
42	54
45	67
16	26
66	76
83	89
78	87
57	70
62	60
20	41
96	97
91	90
76	87
67	74
68	78
83	88
52	69
77	85
34	61
100	100
93	97
96	96
81	82
36	53
89	93
43	56
44	61

10.学生卷面成绩分布直方图



总评成绩统计	超过标准（>85）		符合标准（60-85）		未达标准（<60）		平均分	学生数
	优秀人数	百分比	合格人数	百分比	不合格人数	百分比		
	47	27.5%	104	60.8%	20	11.7%	75.7	171

课程目标实现情况评测表

§1　数学期望

一、数学期望的概念

随机变量的数学期望也称为随机变量的均值，它体现的是随机变量的一种平均取值.

1657年，惠更斯（Huygens,1629-1695）的名著《论赌博中的计算》一书出版，此书是概率论的第一部成型之作，书中提出了数学期望，概率的加法定理，概率的乘法定理等基本概念.

期望只有一维随机变量才有，二维随机变量没有这个概念。

例1 为衡量甲、乙两位射击选手的射击水平，将他们在近期的训练和比赛成绩进行统计和整理.设 X 表示甲选手每次射击时命中的环数，Y 表示乙选手每次射击命中的环数，分别得 X和Y 的分布律如下.

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

问甲、乙两位射击选手每次射击时的平均环数是多少？

解 为计算方便，分别让两位选手各射击10次，则按照上面的分布律，分别得出甲、乙两位选手的理论总环数为

甲选手：$10\times3+9\times5+8\times2=91$（环）

乙选手：$10\times6+9\times1+8\times3=93$（环）

因此，甲、乙两位选手每次射击时的平均环数分别为

甲选手: $\dfrac{10\times3+9\times5+8\times2}{10}=10\times0.3+9\times0.5+8\times0.2=9.1$（环）

乙选手: $\dfrac{10\times6+9\times1+8\times3}{10}=10\times0.6+9\times0.1+8\times0.3=9.3$（环）

由此可见，乙选手每次射击时的平均环数高于甲选手每次射击时的平均环数.

$$X\sim\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$$

甲选手平均环数:

$$10\times0.3+9\times0.5+8\times0.2=9.1$$

即 $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=EX$

1、离散型随机变量的数学期望

定义1　设随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots \quad \text{或} \quad X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

如果无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$ 绝对收敛，就称其级数和为 X 的数学期望或均值，记为EX或$E(X)$，即

expectation
mean

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$$

绝对收敛的级数具有可交换性.

例2 设随机变量X的分布律为$P\{X=(-1)^i\frac{2^i}{i}\}=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots,$ 讨论X的数学期望存在情况.

解 由于无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{2^i}{i}\times\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i}$

条件收敛，故 X 的数学期望不存在.

例3 设盒子有两个红球和一个白球，现分别采用（1）不放回;（2）有放回的方式从中取球，记X为首次取得红球时的取球次数，试分别计算EX.

解 （1）不放回 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $EX = 1\times\frac{2}{3} + 2\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$

（2）有放回 $P(X=k) = \frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{k-1},\ k=1,2,\cdots$

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} k\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{\infty}(x^k)'\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(\sum_{i=1}^{\infty}x^k)'\Big|_{x=\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

2015数学一、数学三

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测，直到第2个大于3的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（1）求 Y 的概率分布；

（2）求EY.

解　（1）每次观测中，观测值大于3的概率为

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}.$$

巴斯卡分布或负二项分布

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}, k=2,3,\cdots$$

（2）$EY=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\sum_{k=2}^{+\infty}(x^k)''=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=16.$$

2. 连续型随机变量的数学期望

定义2 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛, 就称之为 X 的数学期望或均值，记为 EX 或 $E(X)$, 即

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

同理，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 不绝对收敛（发散或条件收敛），就称 X 的数学期望不存在.

例4 设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & x\in other.\end{cases}$ 求EX.

解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\dfrac{2}{3}.$

例5 设随机变量X的密度函数为$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty.$

讨论 X 的数学期望存在情况.

$\boxed{\text{柯西分布}}$

解 广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$=\dfrac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}\dfrac{x}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx]$, 由于 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{x}{1+x^2}dx$ 和

$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$ 均发散，所以$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 发散，故 X 的

数学期望不存在.

【注】

1.引入数学期望的目的是用来表示随机变量的“平均取值”;

2. 数学期望有个存在性问题，此时转而考虑中位数（median）.

中位数可能不唯一.

其定义为使 $P\{X \geq x_{med}\} = P\{X \leq x_{med}\}$ 成立的点.

比如：柯西分布，由于密度函数为偶函数，所以 $x_{med} = 0.$

如: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$

$x_{med} = 0.$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

x_{med} 可取 $(-1,1)$ 内任何数.

例6 随机变量X的密度函数$f(x)$满足$f(c+x)=f(c-x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 其中c为常数, 且EX存在, 证明$EX=c$.

证 由条件知，$f(x)=f(2c-x), -\infty<x<+\infty$,

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(2c-x)dx$$

$$\overset{t=2c-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}(2c-t)f(t)dt$$

$$=2c\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=2c-EX$$

所以 $EX=c$.

二、随机变量函数的数学期望

1.一维随机变量函数$Y=g(X)$ 的数学期望

定理1（1）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$,

$Y=g(X)$，且无穷级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$EY=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

（2）设随机变量X的密度函数为 $f(x), Y=g(X)$，且广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$EY=E(g(Y))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

例7 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，试分别计算 $E(X^2)$ 和 $E(\min\{X,1\})$.

解法一 经计算有 $X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，$\min\{X,1\} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

由定义得：$E(X^2) = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{7}{12} + 4\times\frac{1}{6} = \frac{5}{4}$.

$$E(\min\{X,1\}) = -1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

直接法

解法二　由于 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, **由定理1得**

间接法

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$= (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{4}.$$

$$E(\min\{X, 1\}) = \sum_{i=1}^{4} \min\{x_i, 1\} \cdot P(X = x_i)$$

$$= \min\{-1,1\} \times \frac{1}{4} + \min\{0,1\} \times \frac{1}{4} + \min\{1,1\} \times \frac{1}{3} + \min\{2,1\} \times \frac{1}{6}$$

$$= -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

例8 设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & x\in other.\end{cases}$

试分别计算$E(X^2)$和$E\left(\left|X-\dfrac{1}{2}\right|\right)$.

解 由定理1得 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\dfrac{1}{2}.$

$$E\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot f(x)dx=\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot 2xdx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)\cdot 2xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})\cdot 2xdx$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{4}.$$

例9 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$,分布函数为$F(x)$,且 $f(x)$ 连续,计算$E(F(X))$.

解 $E(F(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)F'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)d(F(x))$$

$$=\frac{1}{2}F^{2}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{F(X)\sim U[0,1]}$$

•第二章例题9

2.二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

定理2 （1）设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2\cdots,Z=g(X,Y)$, 且无穷级数

$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$EZ=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

（2）设二维连续型随机变量（X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$,

且广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 绝对收敛，则

$$EZ=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

推论3 （1）设二维离散型随机变量（X,Y）的分布律为

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2\cdots,$ 且无穷级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i)p_{ij}$

或$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i)p_{ij},\quad E(g(Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(y_j)p_{ij}$$

（2）设二维连续型随机变量（X,Y) 的密度函数为$f(x,y)$,

且广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x,y)dxdy$ 或$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\cdot f(x,y)dxdy$

绝对收敛，则 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x,y)dxdy,$

•特别地：计算边缘分布的期望。

例10 设二维随机变量（X,Y）的分布律如图，试分别计算

$$EX,\ E(XY),\ E(\max\{X,Y\}).$$

$Y \backslash X$	0	1
0		
1		0.3

解法一 经计算有 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, $XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$

$\max\{X,Y\} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$, 由定义得

$$EX = 0\times 0.3 + 1\times 0.7 = 0.7;$$

$$E(XY) = 0\times 0.7 + 1\times 0.3 = 0.3;$$

$$E(\max\{X,Y\}) = 0\times 0.2 + 1\times 0.8 = 0.8.$$

解法二

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3

由推论3得:

$$EX = 0\times 0.2 + 0\times 0.1 + 1\times 0.4 + 1\times 0.3 = 0.7.$$

$$E(XY) = 0\times 0\times 0.2 + 0\times 1\times 0.1 + 1\times 0\times 0.4 + 1\times 1\times 0.3$$

$$= 0.3$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \max\{0,0\}\times 0.2 + \max\{0,1\}\times 0.1 + \max\{1,0\}\times 0.4 + \max\{1,1\}\times 0.3$$

$$= 0.8.$$

例11 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$$

试分别计算 $E(Y^2),E(XY).$

解 $$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}y^2\cdot\frac{1}{\pi}dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta)^2\cdot rdr=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^2d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1}{4}.$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

二重积分的对称性

三、数学期望的性质

性质1　$Ec = c.$

性质2　$E(kX) = kEX.$

性质3　$E(kX + c) = kEX + c.$

性质4　$E(X \pm Y) = EX \pm EY.$

性质5　$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1EX_1 + \cdots + a_nEX_n.$

数学期望的线性性质

性质6　如果随机变量 $X \geq a$(或$X \leq a$), 则$EX \geq a$(或$EX \leq a$).

★性质7　如果随机变量X和Y相互独立，则有$E(XY) = EX \cdot EY.$

性质8　如果随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则有

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = EX_1 \cdot EX_2 \cdots EX_n.$$

★ 性质9　$[E(XY)]^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2).$　柯西-许瓦兹不等式

$$< X, Y > \overset{\Delta}{=} E(XY),$$

例12 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$，$Y$的密度函数为 $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$，$-\infty < y < +\infty$，且$X$和$Y$相互独立，求 $E(XY^2 - 2X^2Y + 1)$.

解

由于X和Y相互独立，所以X^2和 Y 独立，Y和 X^2独立，

$$EX = 0\times 0.6 + 10\times 0.4 = 4,\quad EX^2 = 0^2\times 0.6 + 10^2\times 0.4 = 40;$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}dy = 0,$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}dy = \int_0^{+\infty} y^2\cdot e^{-|y|}dy = 2;\qquad \Gamma(3)$$

故 $E(XY^2 - 2X^2Y + 1) = EX\cdot E(Y^2) - 2E(X^2)\cdot EY + 1$

$$= 4\times 2 - 2\times 40 + 1 = 9$$

• 拉普拉斯配对问题

n个绅士每人抛出各自的帽子，欢呼一项胜利. 假设欢呼之后帽子经充分混合之后，绅士们还是想要顶帽子，遂随机取一顶帽子戴到头上，问至少有一人取到自己帽子的概率p_n，当n趋于无穷时，这个概率会趋于0吗？

• 类似问题：作业配对，信件配对问题

例3 将编号为$1\sim n(n>1)$的n只球随机地放入编号为$1\sim n$的n只盒子中，一只盒子放一只球. 如果一只球放入与其同号的盒子，就称为一个配对，求平均总配对数.

解 记X为总配对数，X_i为第i只盒子的配对数，即

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{只球放入第}i\text{只盒子}\\ 0, & \text{第}i\text{只球未放入第}i\text{只盒子}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 同分布，不独立.

由于$P\{X_i=1\}=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n}$.

$$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n.$$

$\boxed{\text{Po'lya 模型}}$

所以平均总配对数为$EX=nEX_1=n[1\times\dfrac{1}{n}+0\times(1-\dfrac{1}{n})]=1.$

疾病普查中血液检测效率问题

问题 **某地进行某种疾病普查，要进行血液检查，如果有N个人，逐个要N次，问有办法减少工作量吗？**

分组化验模型背景：

设需化验的血样总份数为 N(N 充分大)，把这 N 份血样分为若干组，每组 m 份.

将每一组中的 m 份血样各取出一部分混合在一起进行化验。

•若混合液呈阴性，则说明这 m 份血样都呈阴性，这时这 m份血样就只需化验一次；

若混合液呈阳性，则说明这 m份血样中至少有一份呈阳性，

这时再对这个组的 m份血样逐份化验，这种情况下需化验 $m+1$ 次 。

(这里假定该化验是定性检验，并且血液混合起来没有交互作用).

分组化验模型中，最佳分组 k涉及到解超越方程，而超越方程一般无解析解，致使目前对这个问题研究尚未准确得出最佳分组 k 值计算公式.

解法

设 X 表示N个人总的血液检测次数，

将N个人平均分成 k 组，每组的人数为 $\left[\dfrac{N}{k}\right] \triangleq m,$

假定每人患该疾病的概率为 p,且相互独立.

X_i 表示第 i 组中血液检测的次数， $i = 1, 2, \cdots, k.$

则 $$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ (1-p)^m & 1-(1-p)^m \end{pmatrix},$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots X_k$， $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 独立同分布，

其中 $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ (1-p)^m & 1-(1-p)^m \end{pmatrix}$， $EX_i = m - m(1-p)^m + 1$，

平均总检测次数为

$$EX = kEX_i = k\left[m - m(1-p)^m + 1\right],$$

① 最优分组 k 的选择:与p和N有关

②分组/不分组=$EX/N = 1-(1-p)^m + \dfrac{1}{m}$.

比如

$$\boxed{N = 100, k = 10, m = 10, p = 0.1, \quad EX = 75}$$

2014数学一、数学三

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$.

在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量Y服从均匀分布

$U(0,i),\ (i=1,2)$.

（1）求Y的分布函数$F_Y(y)$;

（2）求EY.

解（1）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$　　全概率公式

$$=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$;　当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\dfrac{3y}{4}$;

当$1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}$;　当 $y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$.

所以Y的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\le y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$

（2）随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}3/4, & 0<y<1,\\ 1/4, & 1\le y<2,\\ 0, & other.\end{cases}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\int_0^1\frac{3}{4}ydy+\int_1^2\frac{1}{4}ydy=\frac{3}{4}.$$

§2 方差

随机变量的方差刻画的是随机变量取值的离散程度

比如 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$ 数学期望（平均值）

$EX = 1.2$

随机变量X的每个取值与EX的离散程度 X-EX 分布如下

$X - EX \quad \to p$

$-1 - 1.2 = -2.2 \to 0.1$

$0 - 1.2 = -1.2 \to 0.2$

$1 - 1.2 = -0.2 \to 0.1$

$2 - 1.2 = \ \ 0.8 \to 0.6$

① $E(X - EX) = 0$ 正负离散程度会抵消 ×

② $E|X - EX|$ 计算时处理麻烦----绝对误差

③ $E(X - EX)^2$ ----均方误差 √

一、方差的概念

定义1 设X为随机变量，如果$E[(X-EX)^2]$存在，就称之为X的方差，记为 DX 或 $D(X)$，即

$$DX = E[(X-EX)^2]$$

法一

并称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差.

【评价】方差反映了随机变量与其均值的偏离程度,当X取值较为集中时,方差$D(X)$较小,当X取值较分散时,方差较大.

利用数学期望的性质，可得到方差的简化计算公式.

$$DX = E[(X-EX)^2] = E[X^2 - 2X\cdot EX + (EX)^2]$$

$$= E(X^2) - 2EX\cdot EX + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2.$$

法二

即 $DX = E(X^2) - (EX)^2.$

$$Df(X) = E([f(X)]^2) - [E(f(X))]^2$$

推广：

$$Df(X,Y) = E([f(X,Y)]^2) - [E(f(X,Y))]^2$$

法一

如果X为离散型随机变量,，其分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

则 $$D(X) = E[X - \mu_X]^2 = \sum (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

如果X为连续型随机变量, 其密度函数为 $f(x)$，则

$$D(X) = E[X - \mu_X]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx.$$

法二

如果X为离散型随机变量,，其分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

则 $DX = E(X^2) - (EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i)^2$

如果X为连续型随机变量, 其密度函数为$f(x)$，则

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx)^2.$$

★ 问题：如何选择法一，法二？

注意公式变形： $EX^2 = D(X) + (EX)^2$

例1 在上节例1中，已知甲、乙两位射击选手每次射击时命中环数 X和Y 的分布律如下，分别计算DX和DY.

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

解 由于已经计算出$EX=9.1, EY=9.3,$ 且

$$E(X^2)=10^2\times0.3+9^2\times0.5+8^2\times0.2=83.3;$$

$$E(Y^2)=10^2\times0.6+9^2\times0.1+8^2\times0.3=87.3;$$

所以 $DX=83.3-9.1^2=0.49,\ \ DY=87.3-9.3^2=0.81.$

虽然乙选手的平均环数高于甲选手的平均环数,但甲选手的稳定性好于乙选手的稳定性,由此可见两位选手各有所长.

例2 设随机变量X密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & x\in other.\end{cases}$ 求DX.

解 在上节例4中，已计算得 $EX=\dfrac{2}{3}$，又

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2},$$

所以 $DX=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{18}.$

例3 设随机变量X的方差DX存在, 证明当 $t=EX$ 时, 函数

$g(t)=E[(X-t)^2]$取得最小值, 且最小值为DX.

理解

证 $g(t)=E[(X-t)^2]=E[X^2-2tX+X^2]=E(X^2)-2t\cdot EX+t^2$

$$=(t-EX)^2+E(X^2)-(EX)^2=(t-EX)^2+DX$$

所以当 $t=EX$ 时, $g(t)$取得最小值DX.

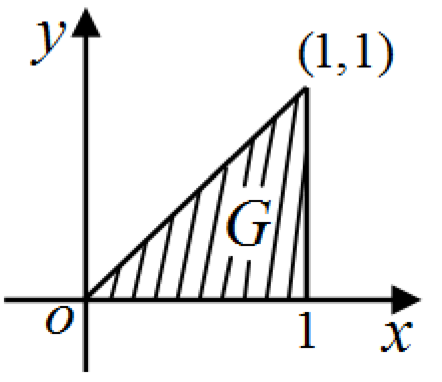
例4 设二维随机变量（X,Y）在三角形区域$G:0\le x\le 1, 0\le y\le x$, 上服从均匀分布，求$D(XY)$.

解 由题意知（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$

$$E(XY)=\iint_G xy\cdot 2dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x xydy=\frac{1}{4};$$

$$E(XY)^2=\iint_G (xy)^2\cdot 2dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x x^2y^2dy$$

所以 $D(XY)=\frac{1}{9}-(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{144}.$



2、方差的性质

性质1 $Dc=0.$

性质2 $DX \geq 0.$ 且$DX=0$的充分必要条件为$P\{X=\mu_X\}=1,$

即：$X=\mu_X, a.s.$

性质3 $D(kX)=k^2DX$

推论1 $D(kX+c)=k^2DX$

性质4 $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)];$

当X和Y相互独立时，$D(X\pm Y)=DX+DY.$

推论2 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=a_1^2DX_1+\cdots+a_n^2DX_n.$$

当X和Y相互独立时，$D(XY)=DX\cdot DY+(EX)^2\cdot DY+(EY)^2\cdot DX.$

原课本P143第26题

例5 设随机变量X和Y相互独立, 且EX=0, EY=1, DX=2, DY=4，求 $E(X-Y)^2$.

解 考虑： $E(X-Y)^2=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2$

由于X和Y相互独立，故 $D(X-Y)=DX+DY$,

所以

$$E(X-Y)^2=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2$$

$$=DX+DY+[EX-EY]^2=(2+4)+(0-1)^2=7.$$

例6 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且$EX_i = \mu$,

$DX_i = \sigma^2, i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 求$E\bar{X}$ 和 $D\bar{X}$.

解

$$E\bar{X} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.$$

$$D(\bar{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}(\sum_{1}^{n} DX_i) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

意义：用n次测量的平均值作为 μ(真实值）

的测量值(估计值),其方差降低了

n倍。

统计中：无偏估计，有偏估计。

熟记该结论，重要！

例7 如果随机变量X的数学期望EX和方差DX均存在，且$DX>0$，就称 $X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 为X的**标准化随机变量**，求 EX^* 和 DX^*.

解

$$EX^*=E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)=\frac{E(X-EX)}{\sqrt{DX}}=\frac{EX-EX}{\sqrt{DX}}=0;$$

$$DX^*=D\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)=\frac{D(X-EX)}{DX}=\frac{DX}{DX}=1.$$

标准化使得一些问题简单化，
后面给出例题理解。

二、常见随机变量的数学期望和方差

（主要自学）

计算工具：高等数学中的积分计算和幂级数求和

注意EX^2的计算技巧

(1) $\sum_k k^2 \frac{1}{k!}$,$\sum_k k^2 q^k$, $\rightarrow EX^2 = E[X(X-1)] + EX;$

(2) $EX^2 = \int x^2 e^{-ax} dx,$ $\rightarrow$ 令$t = ax$, 化积分为Γ函数$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

(3) $D(X) = E[x-\mu_x]^2$ $\longrightarrow$(连续型时)，作线性变换：$t = \frac{x-\mu_X}{\sigma}$

要求：熟记常见8种分布的结论。

分　布	分布函数或概率密度	EX	DX
0-1分布 $X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布 $X\sim U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

习题：**1.求几何分布的期望和方差。**

$$E(X)=\frac{1}{p}.\quad D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

2.求Gama分布的期望和方差。

$$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}.\quad D(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}.$$

例8 设随机变量 $X \sim U[0,6], Y \sim e(0.5)$, 计算 $\begin{vmatrix} EX & DX \\ EY & DY \end{vmatrix}$.

解 $EX = \dfrac{0+6}{3} = 3,\ DX = \dfrac{(6-0)^2}{12} = 3,$

$EY = \dfrac{1}{0.5} = 2, DY = \dfrac{1}{0.5^2} = 4,$ 所以 $\begin{vmatrix} EX & DX \\ EY & DY \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$

例9 设随机变量 $X \sim P(1)$, 求 $P\{X = E(X^2)\}$.

解 因为 $X \sim P(1)$, 所以 $EX = 1, DX = 1,$

$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 2,$

故 $P\{X = E(X^2)\} = P\{X = 2\} = \dfrac{1^2}{2!} e^{-1} = \dfrac{1}{2e}.$

例10 设随机变量X与Y独立, 且 $X \sim N(1,2), Y \sim N(0,1)$.

试求 $Z = 2X - Y + 3$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 由于Z为独立正态随机变量X与Y的非零线性组合，由正态分布的性质, Z服从正态分布, 且

$$EZ = 2EX - EY + 3 = 2\times1 - 0 + 3 = 5,$$

$$DZ = 2^2 DX + DY = 4\times(\sqrt{2})^2 + 1 = 9$$

故 $Z \sim N(5,3^2)$, 因此 Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times3} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\times3^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}.$$

§4 协方差和相关系数

原命题

当X和Y相互独立时，则 $\begin{cases} E(XY)=EX\cdot EY, \\ D(X\pm Y)=DX+DY \end{cases}$ √

$$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_X)];$$

逆否命题

若 $\begin{cases} E(XY)-EX\cdot EY\neq 0, \\ E[(X-EX)(Y-EY)]\neq 0 \end{cases}$，则$X$和$Y$不独立. √

逆命题

若 $\begin{cases} E(XY)-EX\cdot EY=0, \\ E[(X-EX)(Y-EY)]=0 \end{cases}$，则$X$和$Y$独立. ×

一、协方差 (刻画两个随机变量之间是否有线性关系)

定义1 设（X,Y）为二维随机变量, 如果$E[(X-EX)(Y-EY)]$存在, 就称之为X与Y的协方差，记为$Cov(X,Y)$, 即

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

若$Cov(X,Y)=0$, 称X,Y不相关。

利用数学期望的性质，有

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E[(X-EX)(Y-EY)]\\&=E[XY-X\cdot EY-Y\cdot EX+EX\cdot EY]\\&=E(XY)-EX\cdot EY-EY\cdot EX+EX\cdot EY\\&=E(XY)-EX\cdot EY\end{aligned}$$

所以得协方差的简化计算公式

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

例1 设二维随机变量（X,Y）的分布律为

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3

试求$Cov(X,Y)$.

解 经计算有$EX=0.7$，$EY=0.4$，$E(XY)=0.3$

所以 $Cov(X,Y)=0.3-0.7\times0.4=0.02.$

【注】 $Cov(X,Y)\neq 0 \Longrightarrow$ X和Y不独立

协方差的取值大小不能反映它们相关程度的强弱

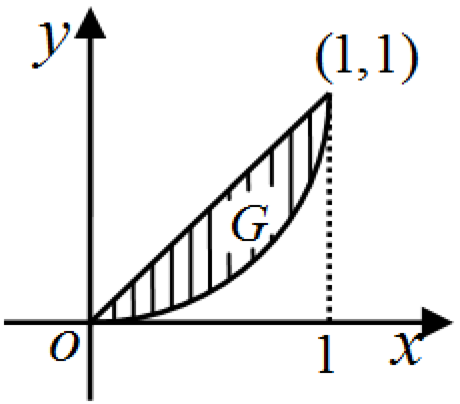
例2 设二维随机变量（X,Y）在区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$ 上服从均匀分布，求 $Cov(X,Y)$.

解 由题意知（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$

$$EX=\iint\limits_G x\cdot 6dxdy=6\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xdy=\frac{1}{2},$$

$$EY=\iint\limits_G y\cdot 6dxdy=6\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} ydy=\frac{2}{5},$$

$$E(XY)=\iint\limits_G (xy)\cdot 6dxdy=6\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xydy=\frac{1}{4},$$



所以 $Cov(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{20}.$

2.协方差的性质

性质1 $Cov(X,X)=DX.$

性质3 $Cov(X,c)=0.$

性质2 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X).$

性质4 $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y).$

$$Cov(aX+c,bY+d)=abCov(X,Y).$$

说明X,Y的协方差与量纲有关

性质5 $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y).$

$$Cov(\sum_{i=1}^{m}a_iX_i,\sum_{j=1}^{n}b_jY_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_jCov(X_i,Y_j)$$

性质6 $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

$$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}Cov(X_i,X_j)$$

$$D(X+Y+Z)=DX+DY+DZ+2Cov(X,Y)+2Cov(X,Z)+2Cov(YZ)$$

性质7 $[Cov(X,Y)]^2\leq DX\cdot DY$

例3 设随机变量X与Y的方差均为正，求

$$Cov\left(\frac{X}{\sqrt{DX}}+\frac{Y}{\sqrt{DY}},\frac{X}{\sqrt{DX}}-\frac{Y}{\sqrt{DY}}\right)$$

解

$$Cov\left(\frac{X}{\sqrt{DX}}+\frac{Y}{\sqrt{DY}},\frac{X}{\sqrt{DX}}-\frac{Y}{\sqrt{DY}}\right)=Cov\left(\frac{X}{\sqrt{DX}},\frac{X}{\sqrt{DX}}\right)-$$

$$Cov\left(\frac{X}{\sqrt{DX}},\frac{Y}{\sqrt{DY}}\right)+Cov\left(\frac{Y}{\sqrt{DY}},\frac{X}{\sqrt{DX}}\right)-Cov\left(\frac{Y}{\sqrt{DY}},\frac{Y}{\sqrt{DY}}\right)$$

$$=\frac{1}{DX}Cov(X,X)-\cancel{\frac{1}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}Cov(X,Y)}+$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DX}}Cov(Y,X)}-\frac{1}{DY}Cov(Y,Y)=\frac{DX}{DX}-\frac{DY}{DY}=0$$

【注】$Cov(X,Y)=0 \not\Longrightarrow$ X和Y独立（见p136页例4）

二、相关系数

希望

①无量纲化,

②不相关与 相关系数=0 等价,

③ ρ 的大小能反映相关程度的强弱.

定义2 设（X,Y）二维随机变量, 如果 $DX>0, DY>0$, 就称 $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$ 为随机变量X与Y的相关系数, 记为 $\rho_{X,Y}$ 或 ρ, 即

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=Cov(X^*,Y^*)$$

【注】 计算相关系数 $\rho_{X,Y}$, 需要事先计算五个数学期望

$$EX,\ EY,\ E(X^2),\ E(Y^2),\ E(XY)$$

其中：$DX=E(X^2)-(EX)^2,\ DY=E(Y^2)-(EY)^2$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY.$$

例4 设随机变量 $X \sim B(2,\frac{1}{3}), Y = |X-1|$，求 $\rho_{X,Y}$.

解法一 由于 $X \sim B(2,\frac{1}{3})$，故 $EX = \frac{2}{3}, DX = \frac{4}{9}$.

又 $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$， $XY = X\,|\,X-Y\,|$ 服从 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

得 $EY = \frac{5}{9}, DY = \frac{20}{81}, E(XY) = \frac{2}{9}$，所以

$$\rho_{X,Y} = \frac{\frac{2}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{9}}{\sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{\frac{20}{81}}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

解法二　不难知道, Y的取值为0和1, 进而可得

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\bullet j}$
0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

得

$$EX=\frac{2}{3}, DX=\frac{4}{9}.$$

$$EY=\frac{5}{9}, DY=\frac{20}{81},$$

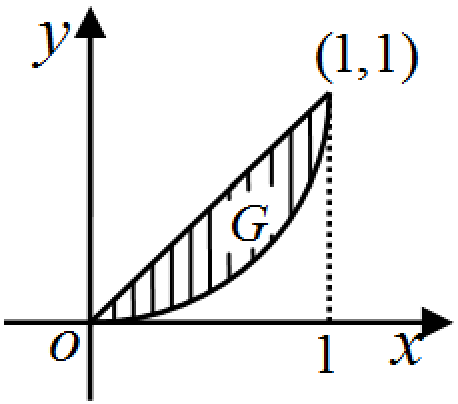
$$E(XY)=\frac{2}{9},$$

所以 $$\rho_{X,Y}=\frac{\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}}{\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{20}{81}}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例5 设二维随机变量（X,Y）在区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$ 上服从均匀分布，求 $\rho_{X,Y}$.

解 由题意知（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$

本节例2中已计算 $EX=\dfrac{1}{2},\ EY=\dfrac{2}{5}$,



$$E(XY)=\frac{1}{4}, Cov(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{20}.$$

又 $$E(X^2)=\iint_G x^2\cdot 6dxdy=6\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}x^2dy=\frac{3}{10},$$

$$E(Y^2)=\iint_G y^2\cdot 6dxdy=6\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}y^2dy=\frac{3}{14},$$

所以 $$DX=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20},\ DY=\frac{3}{14}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{19}{350},$$

故 $$\rho_{X,Y}=\frac{1/20}{\sqrt{1/20}\cdot\sqrt{19/350}}=\sqrt{35/38}.$$

例6 设随机变量X与Y的相关系数 $\rho_{X,Y}=\frac{1}{2}$，且 $DX=1, DY=4$，

求 $U=2X+Y$ 与 $V=X-Y$ 的相关系数 $\rho_{U,V}$.

解 $DU=D(2X+Y)=D(2X)+DY+2Cov(2X,Y)$

$$=4DX+DY+4\rho_{X,Y}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$$

$$=4\times1+4+4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=12,$$

$$DV=D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)$$

$$=DX+DY-2\rho_{X,Y}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=1+4-2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3,$$

$$Cov(X,Y)=Cov(2X+Y,X-Y)$$

$$=2DX-DY-Cov(X,Y)$$

$$=2\times1-4-\frac{1}{2}\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=-3,$$ 故 $\rho_{U,V}=\frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}=-\frac{1}{2}$.

2. 相关系数的性质

性质8 $\left|\rho_{X,Y}\right| \le 1.$

性质9 $\left|\rho_{X,Y}\right| = 1 \Longleftrightarrow$ 存在常数a,b $(a \neq 0)$, 使得

$$P\{Y = aX + b\} = 1. \text{ 且 } \rho_{X,Y} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

【注1】 $\boxed{\begin{array}{l} \left|\rho_{X,Y}\right| \text{越大，} X\text{与}Y\text{线性关系越强} \\ \left|\rho_{X,Y}\right| \text{越小，} X\text{与}Y\text{线性关系越弱} \end{array}}$ $\Rightarrow$ 目标3 √

性质10 对任意非零常数a,b,有 $\rho_{(aX),(bY)} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & ab > 0, \\ -\rho_{X,Y} & ab < 0. \end{cases}$

进而有$\left|\rho_{(aX),(bY)}\right| = \left|\rho_{X,Y}\right|.$ $\Longrightarrow$ 目标1：无量纲√

【说明】$\rho_{X,Y}$ 比 $Cov(X,Y)$ 更好地反映了X与Y线性关系的程度.

定义3 如果 $\rho_{X,Y}=0$, 就称随机变量X与Y不相关.

不具有线性关系倾向.

定理1 设随机变量X与Y的相关系数$\rho_{X,Y}$存在，

则下列结论是等价的

（1）X与Y不相关； （2）$\rho_{X,Y}=0$; （3）$Cov(X,Y)=0$;

（4）$E(XY)=EX\cdot EY$; （5）$D(X\pm Y)=DX+DY$

定理2 如果随机变量X与Y相互独立，且X与Y的相关系数$\rho_{X,Y}$存在, 则X与Y不相关.

独立 $\longrightarrow$ 不相关

【注3】如果X与Y不相关，则X与Y未必相互独立.

不相关 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 独立

例7 设二维随机变量（X,Y）在区域 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，上服从均匀分布，　问$X$与$Y$是否相互独立？是否相关？

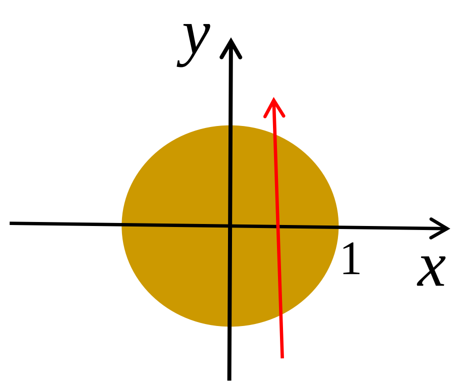
解

由题意知（X,Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\in other.\end{cases}$

得

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & x\in other.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1\\ 0, & y\in other.\end{cases}$$



由于 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，　所以$X$与$Y$不相互独立.

利用二重积分的对称性，有 $EX = \iint_G x \cdot \frac{1}{\pi} dxdy = 0,$

$$EY = \iint_G y \cdot \frac{1}{\pi} dxdy = 0,\ E(XY) = \iint_G (xy) \cdot \frac{1}{\pi} dxdy = 0,$$

故 $E(XY) = EX \cdot EY$，所以 X 与 Y 不相关.

X与Y不独立	→	X和Y有关系
X与Y不相关	→	X和Y没有线性倾向的关系

↓

X和Y具有非线性关系

例8 设二维随机变量（X,Y）的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	2/3
$p_{i\bullet}$	1/3	1/3	1/3	1

问X与Y是否相互独立？是否相关？

解 由于 $P\{X=-1,Y=0\}=0\neq P\{X=-1\}\cdot P\{Y=0\}\neq\dfrac{1}{9}$,

所以X与Y不相互独立.

又可计算得 $EX=0, EY=\dfrac{2}{3}, E(XY)=0,$

故有 $E(XY)=EX\cdot EY$，所以X与Y不相关.

定理3 如果二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

（1）X与Y的相关系数 $\rho_{X,Y}=\rho$;

（2）X与Y的相互独立的充要条件为X与Y不相关.

例10 已知随机变量（X,Y）服从二维正态分布，并且X和Y分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$，X与Y的相关系数$\rho_{X,Y}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

（1）求X与Z的相关系数$\rho_{X,Z}$.

（2）问X和Z是否相互独立？为什么？

解 （**1**）$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\rho_{X,Y}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=0.$$

故 $\rho_{X,Z}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0.$

【注】 如果随机变量 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

则未必有 $Z = X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

也未必有 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,

【反例】令 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 取 $Y = -X \sim N(-\mu,\sigma^2)$,

•回忆：第三章结论

则有 $X + Y = 0$. 显然 $X+Y$ 不服从正态分布，

（X,Y）也不服从二维正态分布(反证法）.

结论4 设二维随机变量（X,Y）服从二维正态分布

$$\begin{cases} U = aX + bY, \\ V = cX + dY, \end{cases} \text{且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

则（U,V）也服从二维正态分布.

(2) 由于 (X,Y) 服从二维正态分布，而 $\begin{cases} X = X, \\ Z = \dfrac{X}{3} + \dfrac{Y}{2}, \end{cases}$ 且系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \neq 0$，故 (X,Z) 也服从二维正态分布.

又由(1)知，X 与 Z 不相关，所以利用定理4.3(2)可得 X 和 Z 相互独立.

2015数学一

设随机变量X,Y不相关，且$EX=2$，$EY=1$，$DX=3$，则$E[X(X+Y-2)]=($　　$)$.

$(A)-3.$　　$(B)3.$　　$(C)-5.$　　$(D)5$

解
$$
\begin{aligned}
E[X(X+Y-2)] &= E(X^2+XY-2X) \\
&= E(X^2)+E(XY)-2EX \\
&= [DX+(EX)^2]+EX\cdot EY-2EX \\
&= (3+2^2)+2\cdot 1-2\cdot 2=5
\end{aligned}
$$

三、矩（了解）

定义4 设随机变量X, 如果对于正整数k, $E(X^k)$ 存在，

就称$E(X^k)$为X的k阶原点矩. 如果$E[(X-EX)^k]$存在，

就称$E[(X-EX)^k]$为X的k阶中心矩. $k=1,2,\cdots$.

定义5 设二维随机变量（X,Y），如果对于正整数k, l

$E(X^kY^l)$存在，就称$E(X^kY^l)$ 为X和Y的$k+l$阶混合原点矩.

如果$E[(X-EX)^k(Y-EY)^l]$存在，就称$E[(X-EX)^k(Y-EY)^l]$

为X和Y的$k+l$阶混合中心矩. $k=1,2,\cdots$. $l=1,2,\cdots$.

【注】

① X的一阶原点矩即为X的数学期望EX.

② X的一阶中心矩$E(X-EX)=0$.

③ X的二阶中心矩即为X的方差DX.

④ (X,Y) 的1+1阶混合中心矩即为 (X,Y) 的协方差 $Cov(X,Y)$.