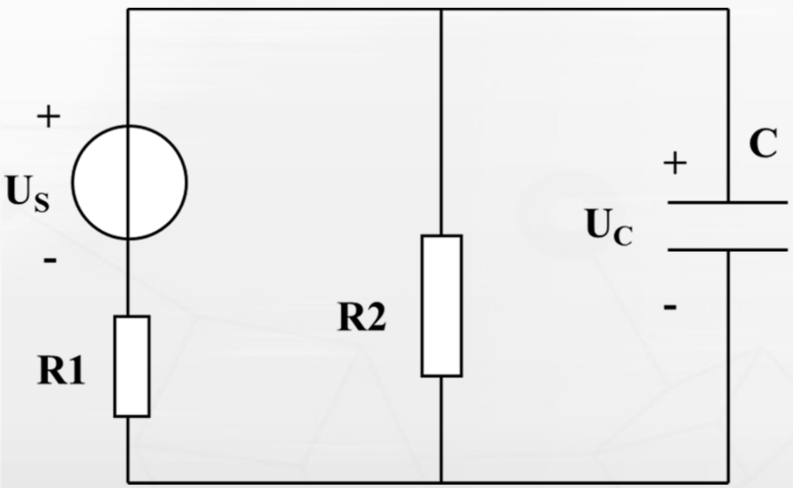
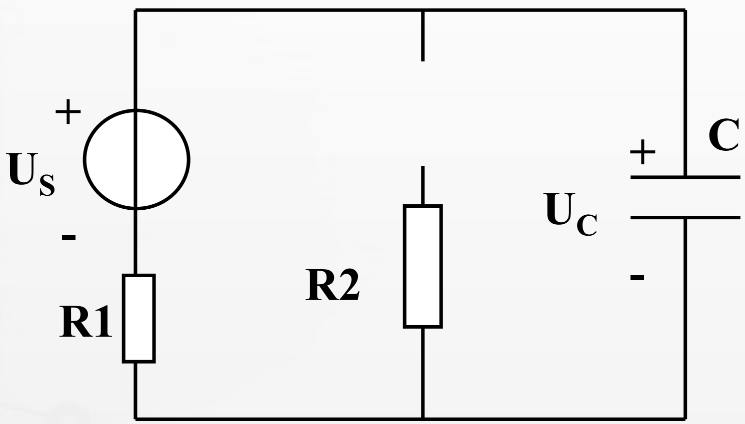
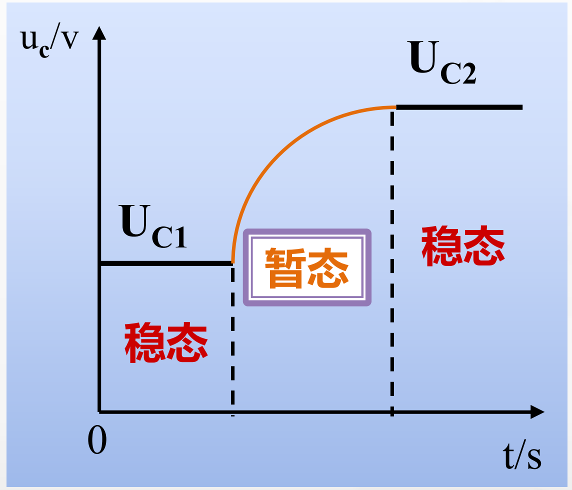
1.12 电路的暂态分析

什么是暂态（瞬态）？







R2支路断开前

$$U_{C1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_S$$

R2支路断开后

$$U_{C2} = U_S$$

1.12 电路的暂态分析

1.基本概念

(一) 稳态和暂态

换路： 电路在接通、断开、改接以及参数和电源发生突变等等。

稳态 → 暂态 → 新的稳态

电路工作状态稳定，u 和 i 没有突变。

电路在过渡过程中所处的状态。

出现**暂态**的原因：

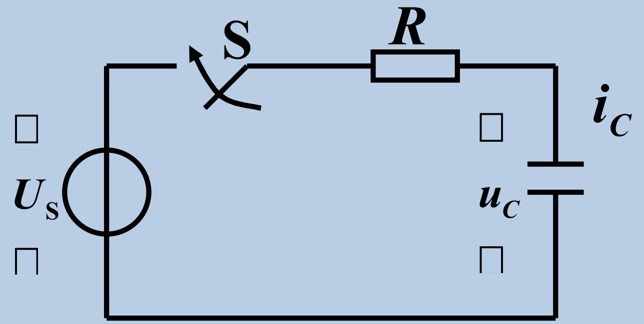
内因： 电路中有储能元件——电容 C 或电感 L

外因： 换路

1.基本概念

(一) 稳态和暂态

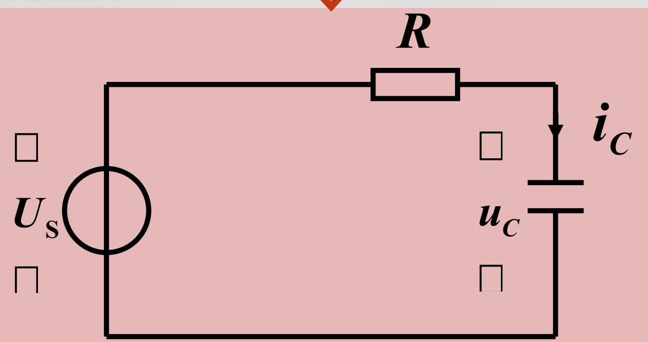
旧稳态



$W = 0$

开关S闭合

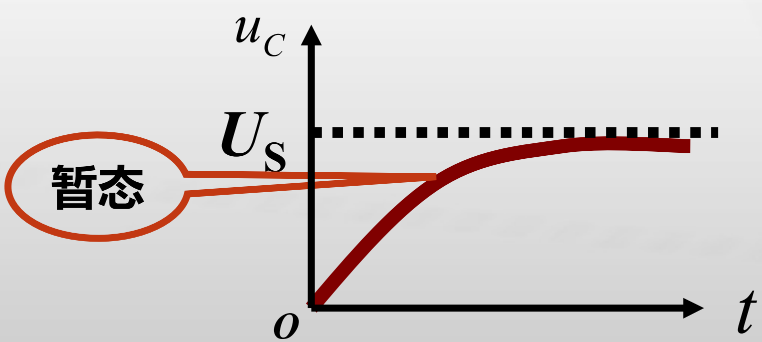
新稳态



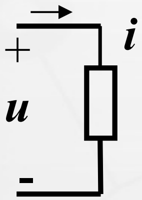
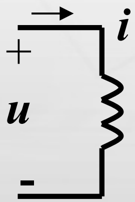
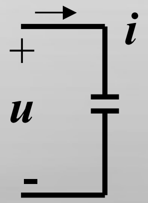
$$W = \frac{1}{2} C U_C^2$$

因为 $p = \dfrac{dW}{dt}$，若W突变，则$p \Rightarrow \infty$

所以：电容C 的电压不能突变



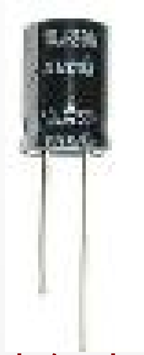
（二）电阻元件、电感元件、电容元件

参数	电路图	时域关系	瞬时功率 $p \square ui$	储能
R		$u \square iR$	$p \square 0$ 耗能	0
L		$u \square L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$p \square 0$ 电能转化为磁能 $p \square 0$ 磁能转化为电能	$\dfrac{1}{2}Li^2$
C		$i \square C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$p \square 0$ 电能转化为电场能 $p \square 0$ 电场能转化为电能	$\dfrac{1}{2}Cu^2$

1.12 电路的暂态分析

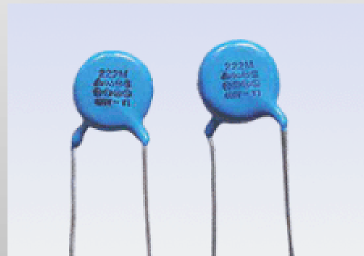
- **电容图片**

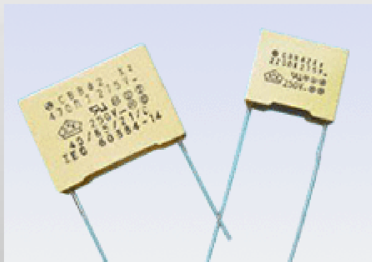

钽电解电容


铝电解电容


真空电容


复合介质电容


陶瓷电容


薄膜电容

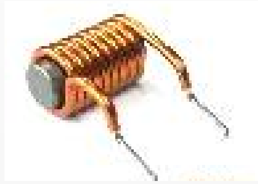

云母电容

1.12 电路的暂态分析

- **电感图片**

多层空心电感线圈

双层空心电感线圈

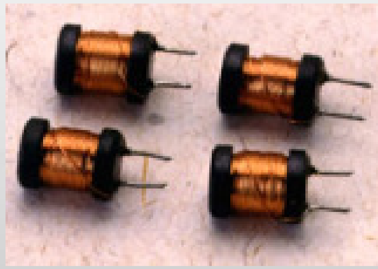


磁棒电感线圈

磁珠电感

贴片电感

铁心电感线圈



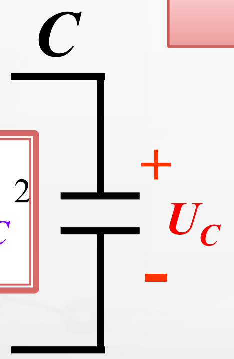
工字形电感线圈

2 储能元件与换路定律

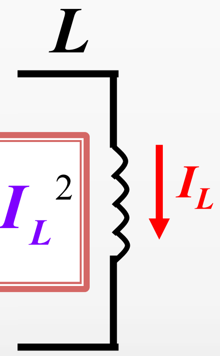
（一）储能元件

储能W

$\frac{1}{2}CU_C^{2}$



$\frac{1}{2}LI_L^{2}$



直流电路中

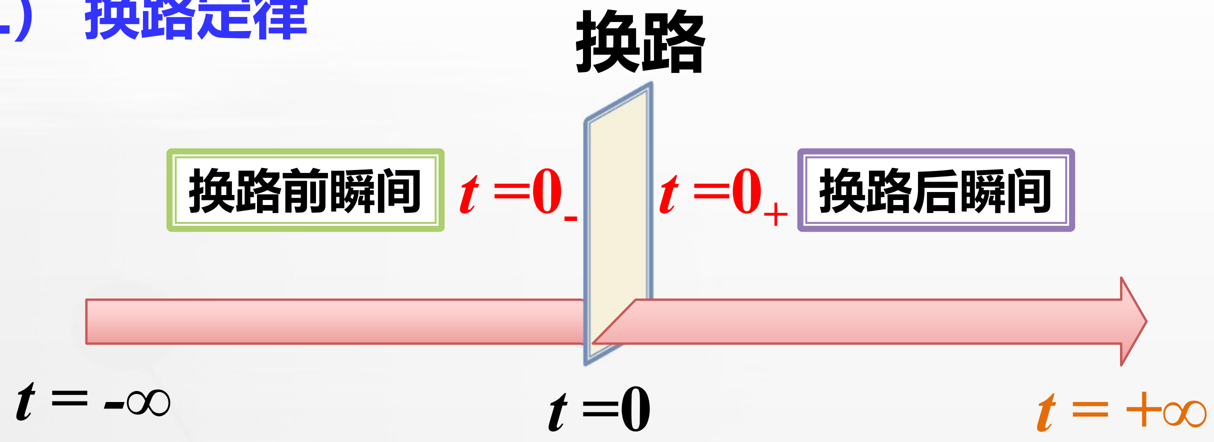
C **相当于开路**

L **相当于短路**

注意： *W* 不能突变 ⟹

- **电容C 的电压不能突变**
- **电感L 的电流不能突变**

（二） 换路定律

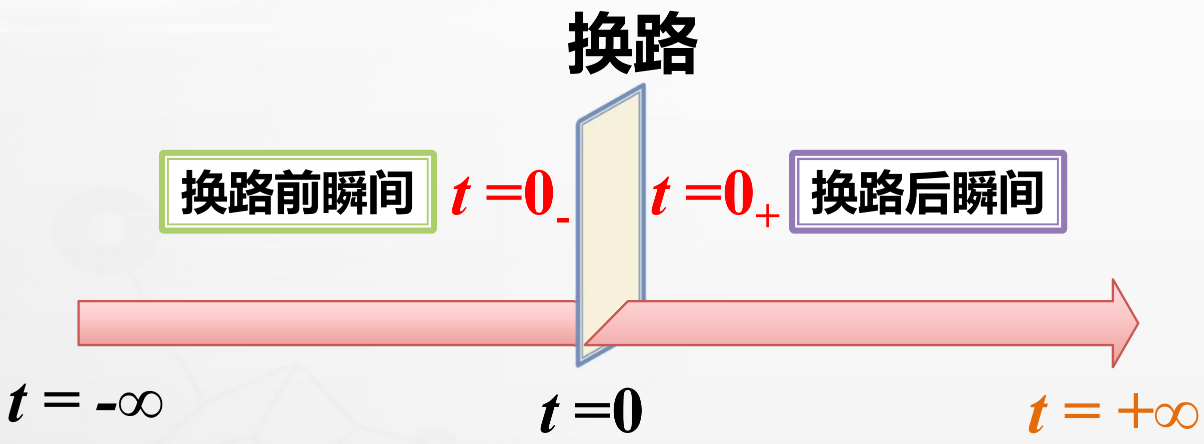


- $t=+\infty$时刻的值称为稳态值，如：$u(\infty)$ $i(\infty)$；
- $t=0+$时刻的值称为初始值，如：$u(0+)$、$i(0+)$；
- 不同元件的值可用不同下标区分，如：$u_C(0_+)$、$u_R(0_+)$。

注意：

1. **换路定律仅适用于换路瞬间。**
2. **式中0+、0-均为0时刻，但电路结构不同；**
3. **换路瞬间，u_C、i_L不能突变，其它电量均可能突变；**

（二） 换路定律



换路定律

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

即：**电容电压**、**电感电流**在换路瞬间不能突变。

（三） 初始值的求解

初始值：电路中各 u、i 在 $t=0_+$ 时的数值。

求解步骤：

1) 作出 $t=0_-$ 的电路，求出 $u_C(0_-)$、$i_L(0_-)$；

2) 根据换路定则知： $u_C(0_+)=u_C(0_-)$、$i_L(0_+)=i_L(0_-)$。

3) 作出 $t=0_+$ 的电路，此时，电容用电压等于 $u_C(0_+)$ 的恒压源代替，电感用电流等于 $i_L(0_+)$ 的恒流源代替，求其它电量的初始值；

（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → 再计算其它可能突变的量

例1：图示电路换路前电路处于稳态， C、L 均未储能。试求各个电压/电流的初始值。

t=0_时刻

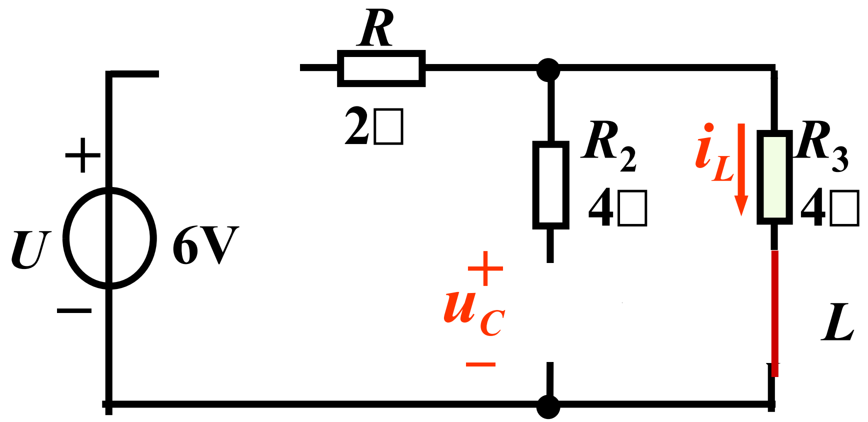
解：

(1) $t = 0_$时刻电路

$u_C(0\_)=0$、$i_L(0\_)=0$

电容元件视为开路；

电感元件视为短路。



（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → **再**计算其它可能突变的量

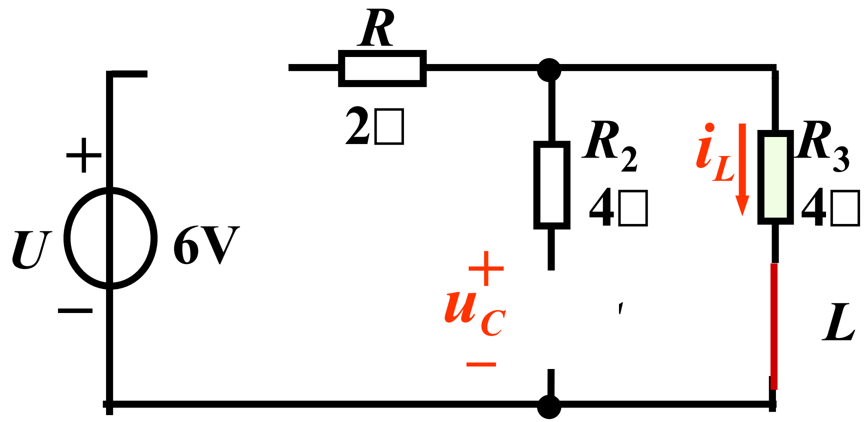
例1：图示电路换路前电路处于稳态， C、L 均未储能。试求各个电压/电流的初始值。

解：

(1) t = 0_ 时刻电路

$u_C(0_-)=0$、$i_L(0_-)=0$

(2) 由换路定则：



$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\text{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0\text{A}$$

（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → **再**计算其它可能突变的量

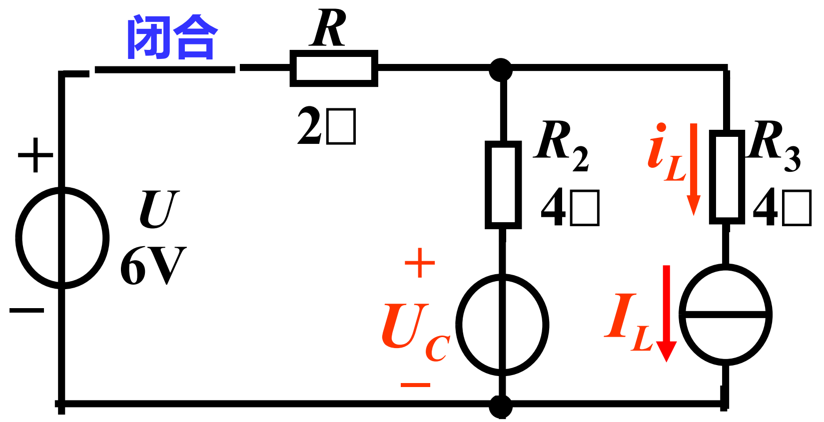
(3) t = 0+时刻电路

元件无初始储能

电容视为**短路**，电感视为**开路**；

元件有初始储能?

电容视为输出为U_C的恒压源，
电感视为输出为I_L的恒流源。



$t=0_+$时刻电路

（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → **再**计算其它可能突变的量

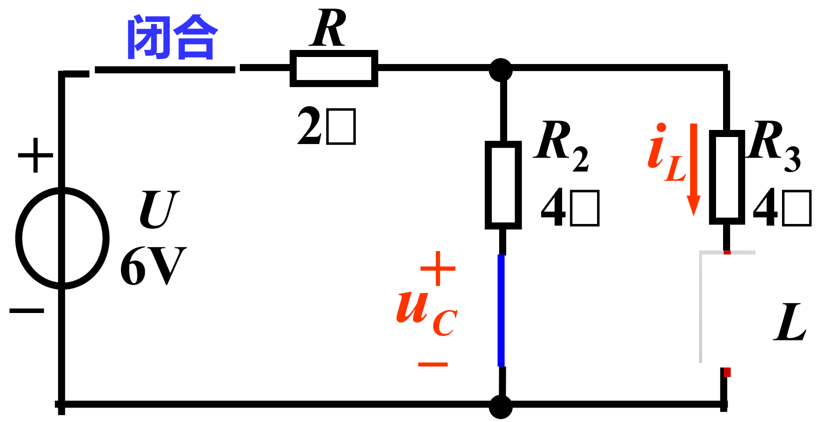
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$ U_C

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\,\text{A}$$ I_L

(3) t = 0+时刻电路

元件无初始储能

电容视为**短路**，电感视为**开路**；



t=0+时刻电路

（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → **再**计算其它可能突变的量

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$

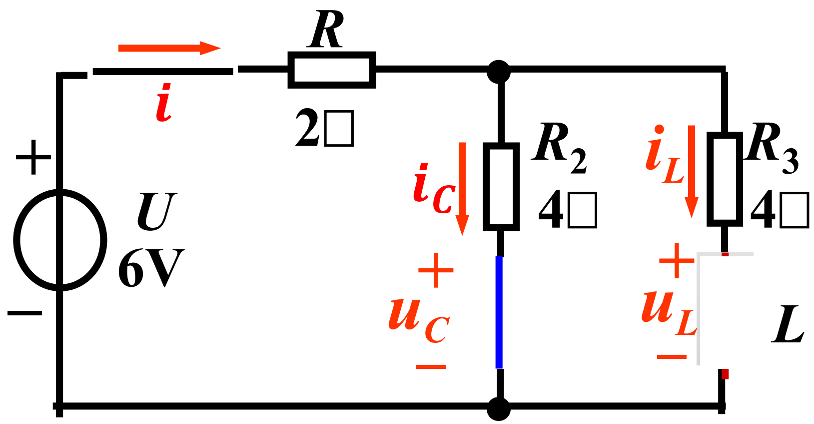
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\text{ A}$$

(3) t = 0+时刻电路

$$i(0_+) = i_C(0_+) = \frac{U}{R + R_2} = \frac{6}{2+4} = 1\text{ A}$$

$$U_L(0_+) = R_2 \cdot i_C(0_+) = 4 \times 1 = 4\text{ V}$$

t=0₊时刻电路



i_C 及 u_L可以突变

还可以求出 $U_R(0_+) = 2$ V, $U_{R3}(0+) = 0$ V

（三） 初始值的求解

先求取不能突变的量，即$u_c(0+)$、$i_l(0+)$ → **再**计算其它可能突变的量

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$

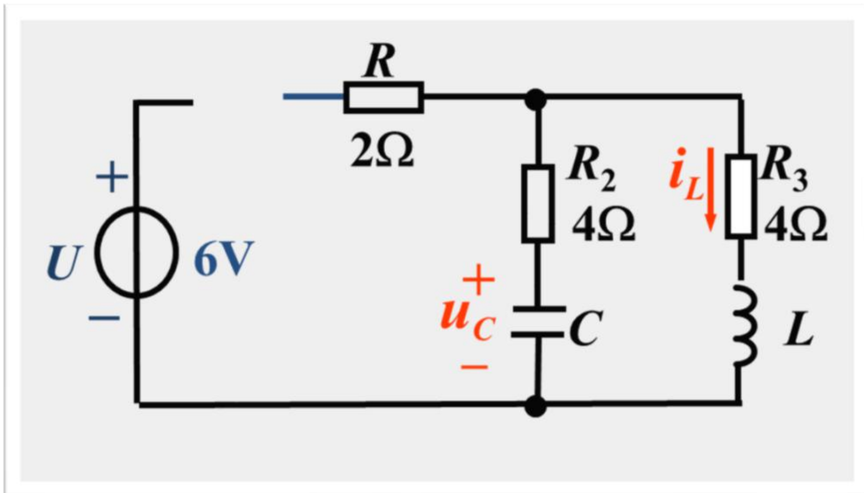
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\text{ A}$$

(3) t = 0+时刻电路

$$i(0_+) = i_C(0_+) = \frac{U}{R + R_2} = \frac{6}{2+4} = 1\text{ A}$$

$$U_L(0_+) = R_2 \times i_C(0_+) = 4 \times 1 = 4\text{ V}$$

t=0_时刻电路



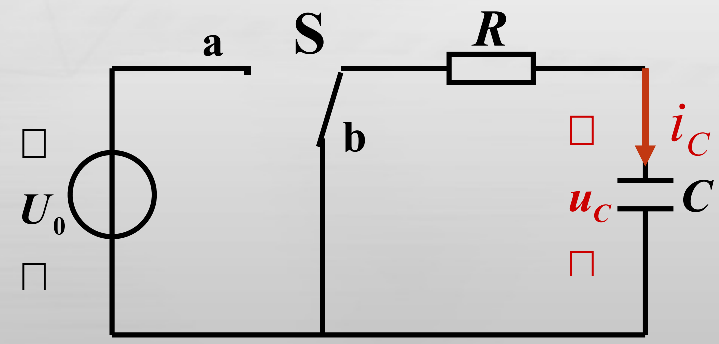
i_C 及 u_L可以突变

3.RC电路的暂态分析

暂态响应分类

产生原因

- 零输入响应：　内部储能作用
- 零状态响应：　外部激励作用
- 全响应　= 零输入响应 + 零状态响应



电容C上无电荷，S打在a时

——U_0为电容充电 - 零状态响应

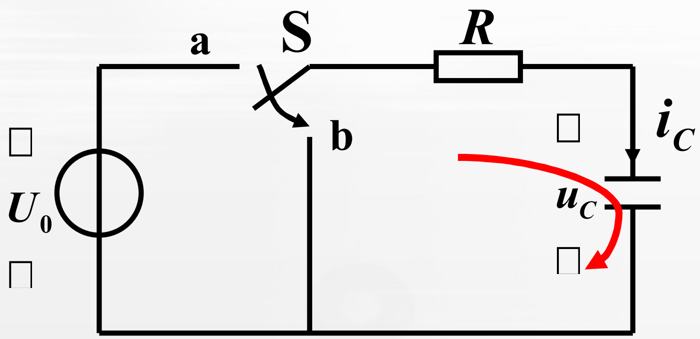
外部激励

电容C上电压为U_0，S打在b时：

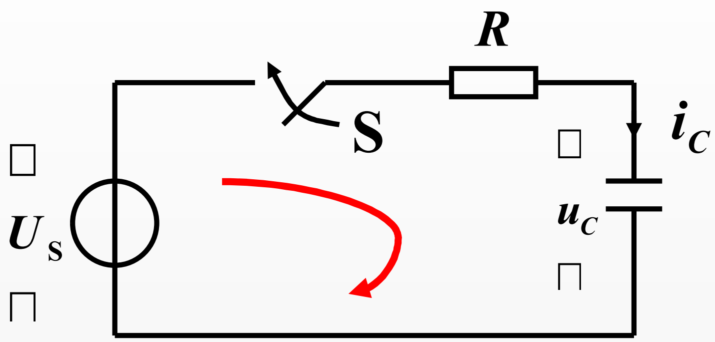
——电容放电 - 零输入响应

储能元件

3.RC电路的暂态分析



RC 电路的零输入响应



RC 电路的零状态响应

放电过程

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

充电过程

$$Ri_C + u_C = 0$$

$$Ri_C + u_C = U_S$$

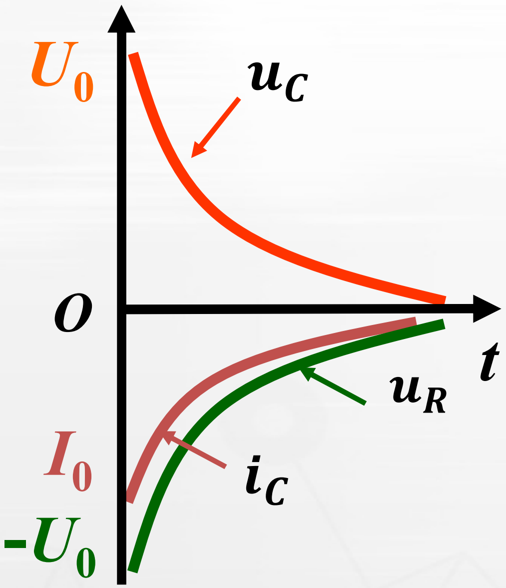
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S$$

令 $\tau = RC$

$$u_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = U_S(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$



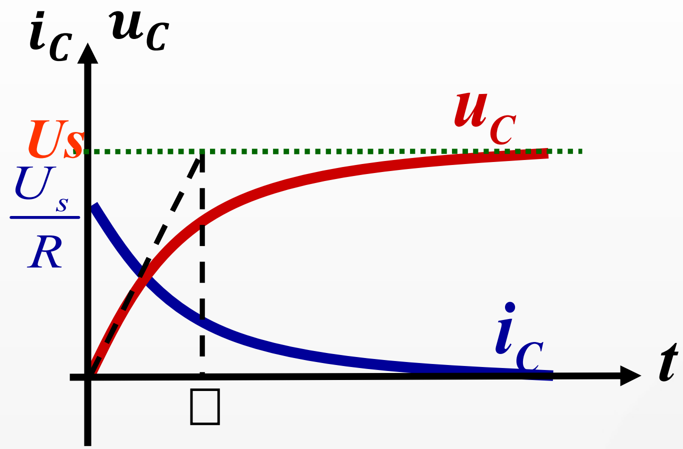
RC 电路的零输入响应(放电)

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R}U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = i_C R = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

令$\tau = RC$



RC 电路的零状态响应（充电）

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = i_C R = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

时间常数 τ

τ决定电路暂态过程变化的快慢

$\tau = RC$

(1) 单位 $\Omega \cdot \dfrac{A \cdot s}{V} = s$

(2) 物理意义

零输入响应: $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

零状态响应: $u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

当 t = τ 时

$u_C = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$

$u_C = U_S(1 - e^{-1}) = 0.632 U_S$

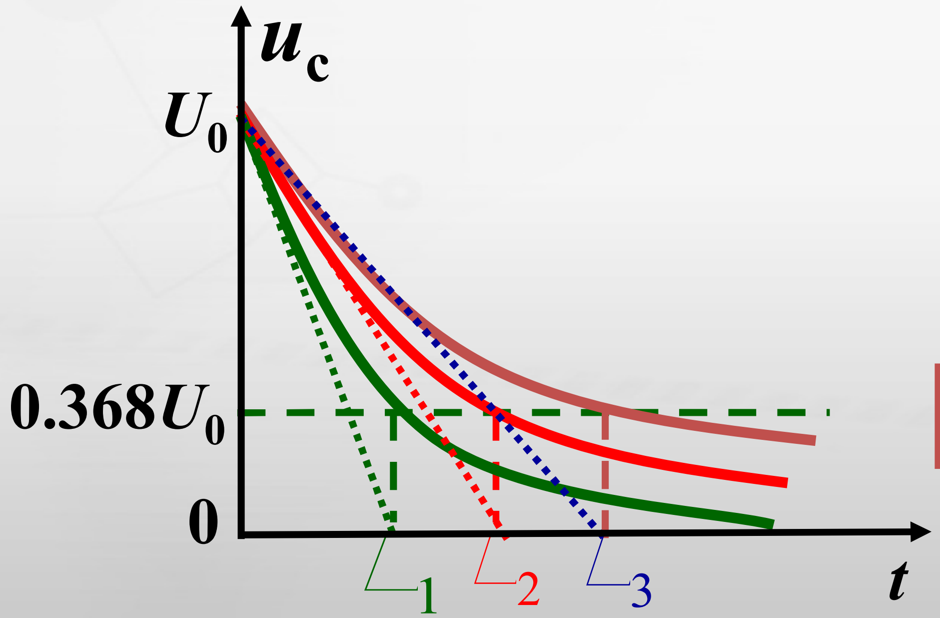
所以：时间常数τ等于电压衰减到初始值U_0的36.8%或者电压从初始值上升到稳态值63.2%所需的时间。

时间常数 τ

零输入响应

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau\uparrow$ □ $RC\uparrow$



τ_1 □ τ_2 □ τ_3

τ越大，曲线变化越慢，u_C达到稳态所需要的时间越长。

时间常数 τ

零输入响应

(3) 暂态时间

理论上认为 $t \to \infty$、 $u_C \to 0$ 电路达稳态

工程上认为 $t \approx (3\sim 5)\tau$、 $u_C \approx 0$ 电容放电基本结束。

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}
u_C	$0.368U$	$0.135U$	$0.050U$	$0.018U$	$0.007U$	$0.002U$

当 $t=5\tau$ 时，过渡过程基本结束，u_C 达到稳态值。

时间常数 τ

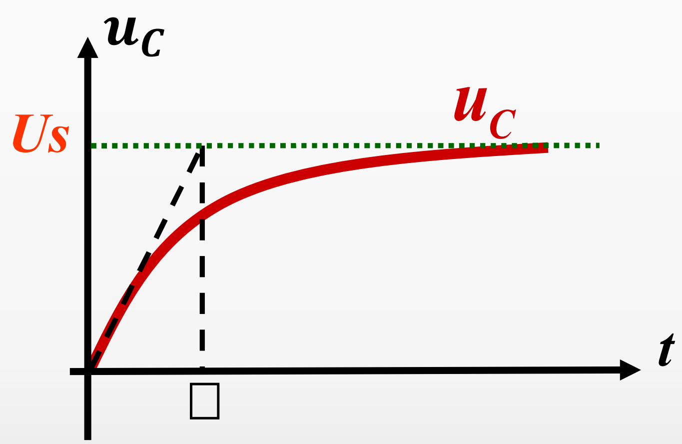
零状态响应

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

当 $t = $□时

$$u_C(\tau) = U_s(1 - e^{-1}) = 63.2\ \%U_s$$

u_C、 i_C 变化曲线

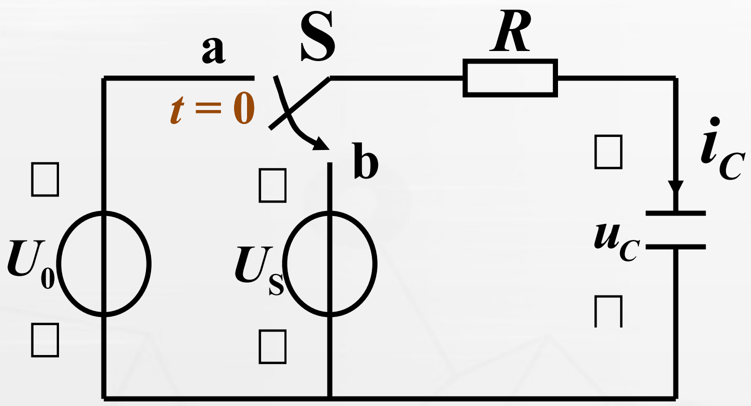


□表示电容电压 u_C 从初始值上升到 稳态值的63.2% 时所需的时间。

理论上 $t = $□ $U($□$) = U_S$**时完全达到稳态**

工程上 $t = (3\sim5)\tau$**可认为电路已稳定,充电已基本结束。**

RC 电路的全响应



求u_C(t)?

换路前，S 在a端

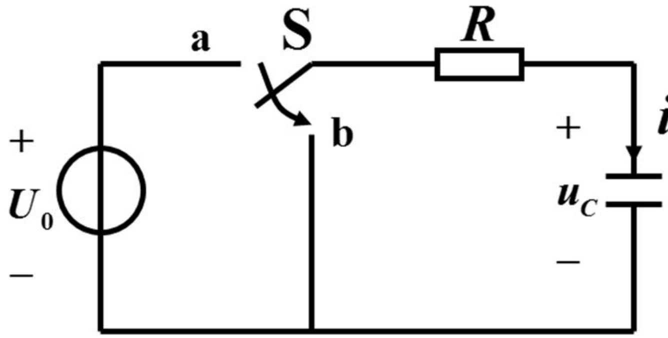
电容有储能 $u_C(0\text{-}) = U_0$

换路后，S 在b端

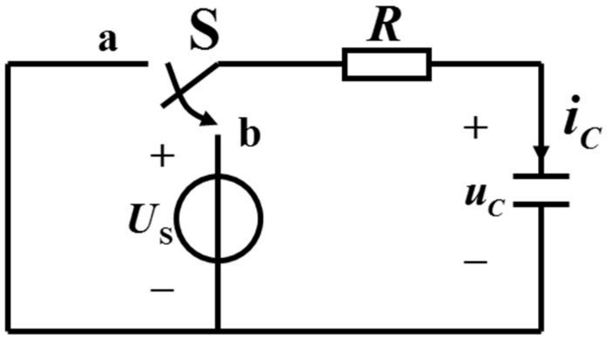
$u_C(\infty) = U_S$

$$RC\frac{du_c}{dt} \square u_c \square U_s$$

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S(1- e^{-\frac{t}{\tau}})$$



+



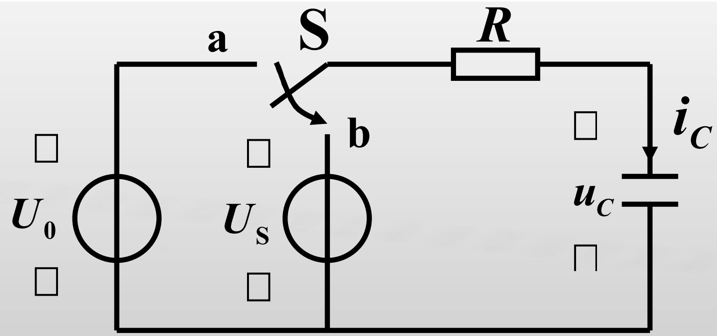
零输入响应

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

零状态响应

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

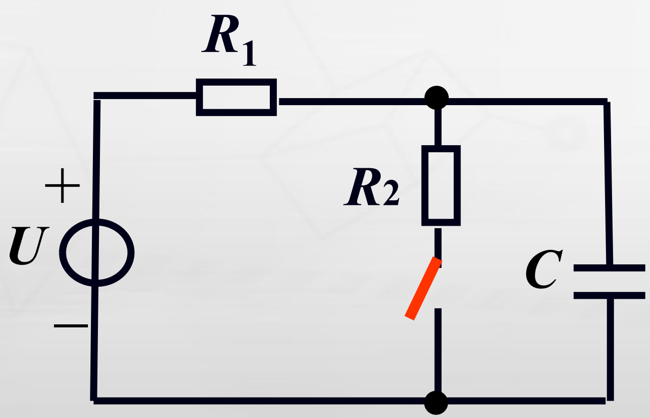


$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

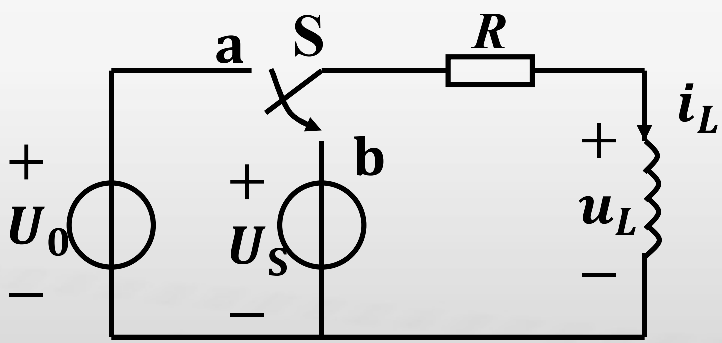
4 一阶线性电路暂态分析三要素法

一阶线性电路:

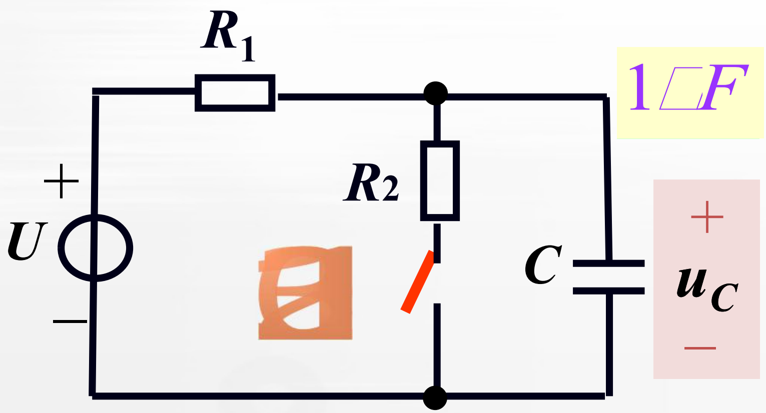
仅含一个储能元件或可等效为一个储能元件，且由一阶微分方程描述的线性电路。



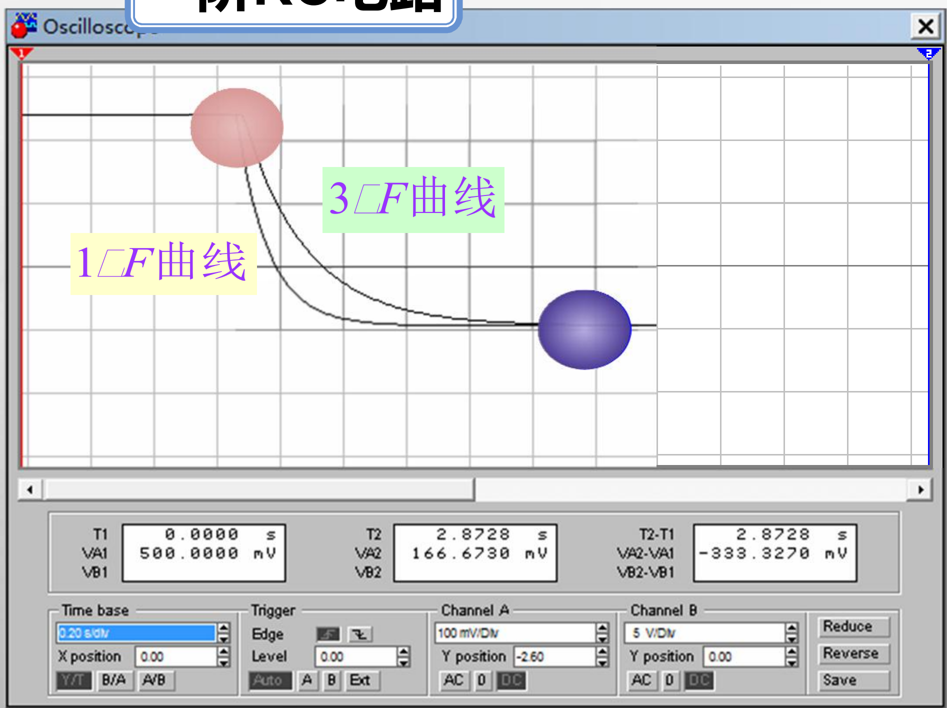
一阶RC电路



一阶RL电路



一阶RC电路



初始值

新的稳态值

$\square = R_0C$
决定变化快慢

以上，被称为一阶暂态的三要素

4 一阶线性电路暂态分析三要素法

4.1 一阶线性电路响应通式 （在直流电源激励下）

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

一阶电路中任一电压、电流函数

$$\begin{cases} f(0_+) \text{ -- 初始值} \\ f(\infty) \text{ -- 稳态值} \\ \tau \text{ -- 时间常数} \end{cases}$$

（三要素）

三要素法：在求得三要素的基础上，直接写出电路的响应(电压或电流)。

注：一阶电路都可以应用三要素法求解

4 一阶线性电路暂态分析三要素法

4.2 响应中“三要素”的确定

初始值 $f(0+)$的计算

1) 由t=0- 电路求 $u_C(0_{\square})$、$i_L(0_{\square})$

2) 根据换路定则求出
$$\begin{cases} u_C(0_{\square}) \square u_C(0_{\square}) \\ i_L(0_{\square}) \square i_L(0_{\square}) \end{cases}$$

3) 由t=0+时的电路，求其它各量的$u(0_{\square})$或$i(0_{\square})$

4 一阶线性电路暂态分析三要素法

4.2 响应中“三要素”的确定

稳态值 $f(\square)$ 的计算

求换路后电路达到稳定后电路中的电压和电流：

若电路中有电源，则其中C ——**开路**, L——**短路**,

然后求解直流电阻性电路中的电压和电流。

注意：在一阶线性电路中通常都是先计算储能元件电容的电压、电感的电流，再根据电路图求其它量

4 一阶线性电路暂态分析三要素法

4.2 响应中“三要素”的确定

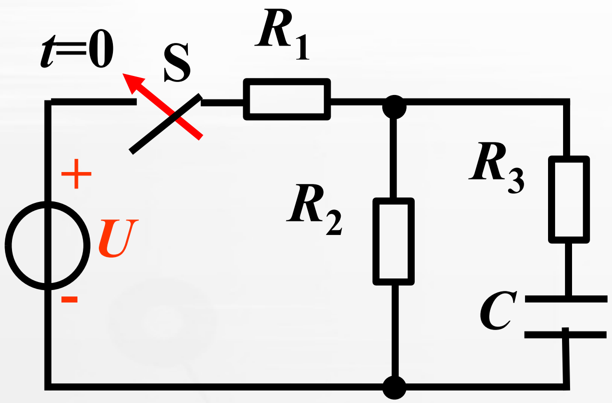
时间常数τ的计算

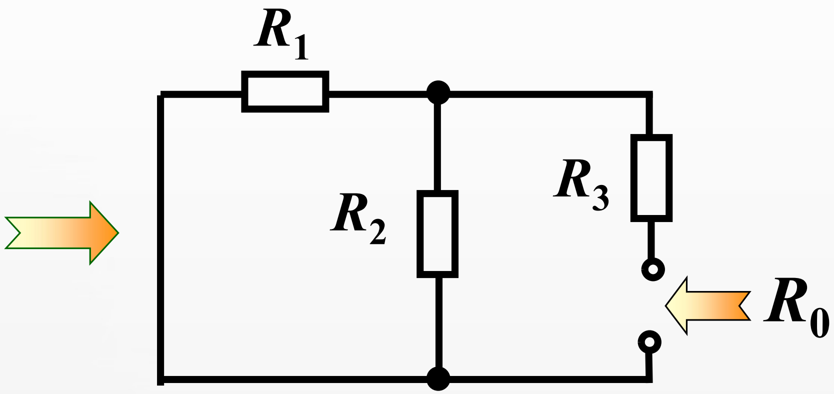
对于一阶*RC*电路 $\tau = R_0 C$

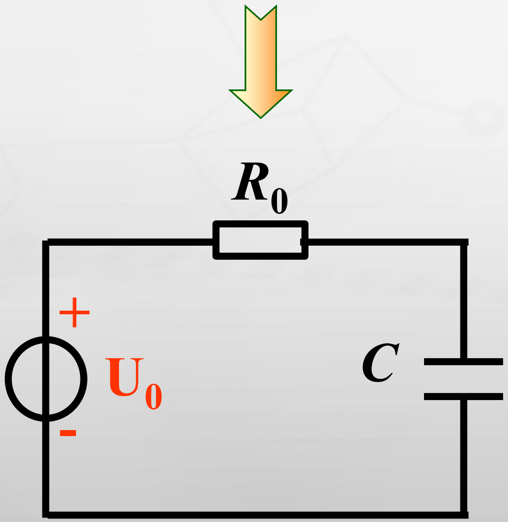
对于一阶*RL* 电路 $\tau = \dfrac{L}{R_0}$

1) 对于简单的一阶电路， $R_0=R$

2) 对于较复杂的一阶电路， R_0为换路后的电路除去电源和储能元件后，在储能元件两端所求得的无源二端网络的等效电阻。







$$R_0 = (R_1 // R_2) + R_3$$

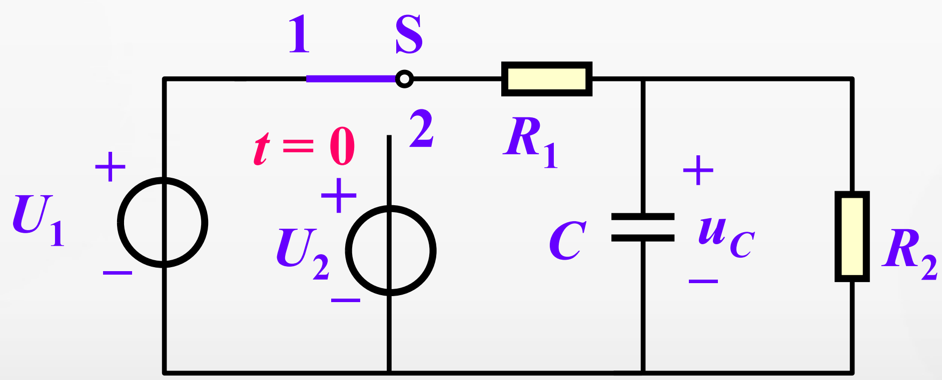
$$\tau = R_0 C$$

R_0的计算类似于应用戴维宁定理解题时计算电路等效电阻的方法。即从储能元件两端看进去的等效电阻，如图所示。

[例] 在下图中，已知 $U_1 = 3$ V， $U_2 = 6$ V，$R_1 = 1$ kΩ，$R_2 = 2$ kΩ，$C = 3$ μF，$t < 0$ 时电路已处于稳态，$t>0$把开关打到2的位置。用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出变化曲线。

[解] 先确定 $u_C(0_+)$

$u_C(\infty)$ 和时间常数 τ



t=0-电路

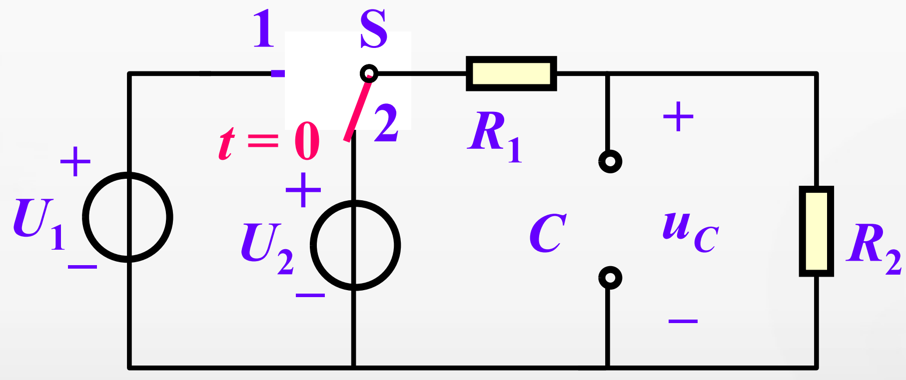
$t < 0$ 时电路已处于稳态，意味着电容相当于开路。

初始值$u_C(0_+)$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2 U_1}{R_1 + R_2} = 2\ \text{V}$$

[例] 在下图中，已知 $U_1 = 3$ V， $U_2 = 6$ V，R_1 =1 k□，$R_2 = 2$ k□， $C =$ 3 □F， $t < 0$ 时电路已处于稳态，t>0把开关打到2的位置。用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出变化曲线。

[解] 先确定 $u_C(0_+)$ $u_C(□)$ 和时间常数 □



t= □电路

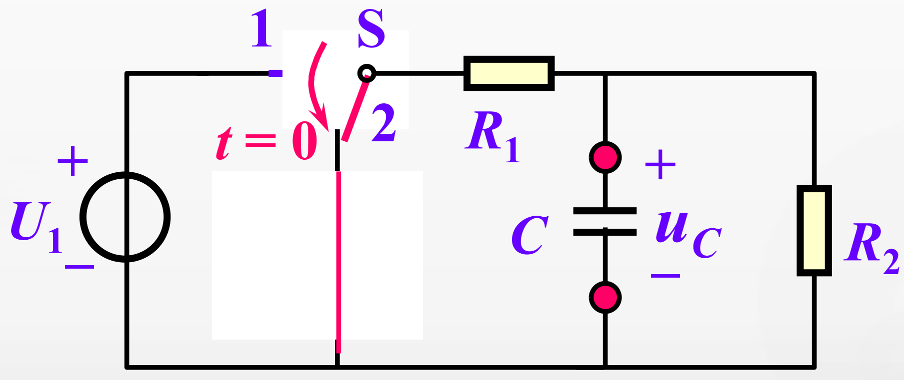
$t =$ □ 时电路也已处于**稳态**，意味着电容相当于**开路**。

稳态值u_C(□)

$$u_C(□) □ \frac{R_2 □ U_2}{R_1 □ R_2} □ 4\text{ V}$$

[例] 在下图中，已知 $U_1 = 3$ V， $U_2 = 6$ V，$R_1 = 1$ kΩ，$R_2 = 2$ kΩ，$C = 3$ μF，$t < 0$ 时电路已处于稳态，$t>0$把开关打到2的位置。用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出变化曲线。

[解] 先确定 $u_C(0_+)$ $u_C(\infty)$ 和时间常数 τ



求τ等效电路

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\ \text{V}$$

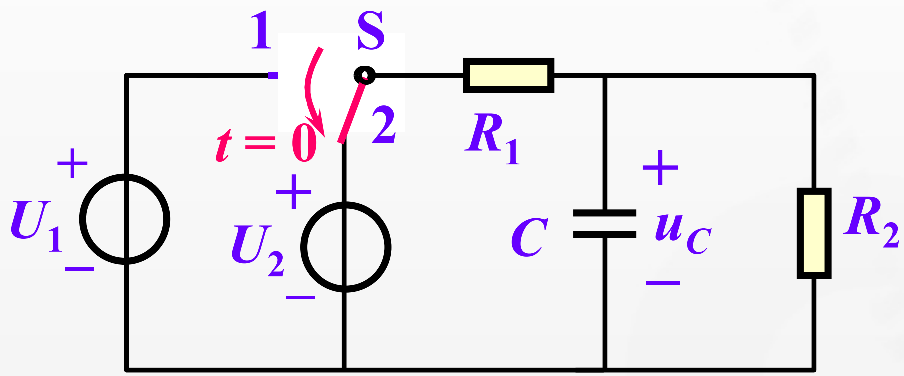
$$u_C(\infty) = 4\ \text{V}$$

$$\tau = (R_1 // R_2)C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{ms}$$

三要素法公式 $$u_C = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

所以 $$u_C(t) = 4 - 2\mathrm{e}^{-500t}\ \text{V}\ \ (t \geq 0)$$

[例] 在下图中，已知 $U_1 = 3$ V， $U_2 = 6$ V，$R_1 = 1$ kΩ，$R_2 = 2$ kΩ，$C = 3$ μF，$t < 0$ 时电路已处于稳态，$t>0$把开关打到2的位置。用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出变化曲线。



[解]

$$u_C(0_+) = 2\ \text{V}$$

$$u_C(\infty) = 4\ \text{V}$$

$$\tau = 2\ \text{ms}$$

$$u_C = 4 - 2\mathrm{e}^{-500t}\ \text{V}$$

$u_C(t)$ 变化曲线