2014-2015学年(宣城)第一学期《线性代数》试卷(A)

一、填空题（每小题4分，共20分）

1．设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\beta_1,\beta_2),\boldsymbol{B}=(\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_i(i=1,2),\beta_j(j=1,2)$ 均为3维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________ .

2.设 $\boldsymbol{E}[i+j(k)]$ 为 n 阶初等阵,则 $\boldsymbol{E}^{-1}[i+j(k)]=$________ .

3.已知 β_1,β_2,β_3 线性无关,若 $\beta_1+\beta_2,\beta_2+\beta_3,k\beta_3-\beta_1$ 线性相关,则 $k=$________ .

4.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB})=$ _______ .

5.已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,-1,2$,相应的特征向量依次是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,-2\boldsymbol{x}_2)$，则 $\boldsymbol{AP}=$ ________ .

二、选择题（每小题4分，共20分）

1.已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则必有(　　).

(A)行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$，或 $|\boldsymbol{B}|=0$，

(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，

(C) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，

(D) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$.

2.已知 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则下列关系式正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　(B) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$　(C) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$　(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$.

3.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则下列关系式正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，　(B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，　(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，　(D) $\boldsymbol{A}^{2014}=\boldsymbol{A}$.

4.设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵,则方程组 $\boldsymbol{Bx}=0$ 与 $\boldsymbol{ABx}=0$ 同解的一个充分条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=m$，　(B) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=s$，　(C) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=s$，　(D) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=n$.

5.若向量组 $\boldsymbol{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$　(B) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$　(C) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$　(D) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

三、（10分）计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&n\\-1&-2&\cdots&-n&0\end{vmatrix}$.

四、（10分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、（10分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为4维列向量，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，又 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，试求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\beta$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

六、（12分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1+a\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\3+a\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5+a\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}7\\7\\7\\7+a\end{pmatrix}$，

(1)问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？

(2)当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

七、（12分）求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形,并指出此二次型的正、负惯性指数 p 、q 各是多少？

八、（6分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵 ,证明 :$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零 .

2014-2015 学年(宣城)第一学期《线性代数》试卷(A)参考答案

一、1. $\underline{4}$；2. $\underline{E[i+j(-k)]}$；3. $\underline{1}$；4. $\underline{3}$；5. $\underline{(-x_1,-x_3,-4x_2)}$.

二、1. A；2. C；3. D；4. B；5. B.

三、(10 分）解：$D_{n+1} \overset{c_{n+1}-(c_1\times1+\cdots+c_n\times n)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \cdots & -n & \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

四、(10 分）解：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，$\because \left|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以可逆，从

而 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{行}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right)$,

$\therefore \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

五、(10 分）解:此题为求解抽象的非齐次线性方程组.

$\because \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\therefore \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有一个特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\because \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\therefore r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3<4=n$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个非零解向量 $\boldsymbol{\xi}$．注意到

$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$，故可取 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 由解的结构定理可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$

的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (k \in \mathrm{R})$.

六、(12 分）解:(1)观察易知：这是四个 4 维向量，可以构成方阵，且富有规律，因此，可从行列式入手.

$\because |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix} -1+a & 3 & -5 & 7 \\ -1 & 3+a & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5+a & 7 \\ -1 & 3 & -5 & 7+a \end{vmatrix}$

$\underset{j=2,3,4}{\overset{c_1+c_j}{=}} (4+a)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 3+a & -5 & 7 \\ 1 & 3 & -5+a & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 7+a \end{vmatrix} \underset{j=2,3,4}{\overset{c_j-(-1)^j(2j-1)c_1}{=}} (4+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (4+a)a^3$，

$\therefore$ 当 $a=0$ 或 $a=-4$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

（2）当 $a=0$ 时，显然，$r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 就是一个最大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_j=(-1)^j(2j-1)\boldsymbol{\alpha}_1, j=2,3,4$；

当 $a=-4$ 时，注意到 $|\boldsymbol{A}|=0$，而代数余子式 $A_{44}=\begin{vmatrix} -1+a & 3 & -5 \\ -1 & 3+a & -5 \\ -1 & 3 & -5+a \end{vmatrix}=(-3+a)a^2 \neq 0$，故 $r(\boldsymbol{A})=3$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 就是一个最大无关组，又 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

七、(12 分）解：二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,由 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=5$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时,由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，正交化，令

$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=5$ 时,由 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,再令 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已正交，再单位化 $\boldsymbol{p}_i=\dfrac{\boldsymbol{p}_i}{\left\|\boldsymbol{p}_i\right\|}, \boldsymbol{i}=1,2,3$，得，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\sqrt{2}}, \boldsymbol{p}_2=\dfrac{2\boldsymbol{\alpha}_2}{\sqrt{6}}, \boldsymbol{p}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\sqrt{3}}$，

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$,

所以 $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$，$p=1, q=2$.

八、(6 分）证：$\because \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，$\therefore$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$，于是

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T)^T(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$.又

$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T$ 是可逆阵 ,从而 $\boldsymbol{AB}$ 相似于正定矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$,故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零 .