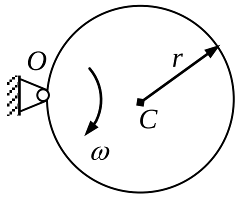
十一、动量矩定理

11.1　试求下列刚体或系统对水平轴 O 的动量矩。

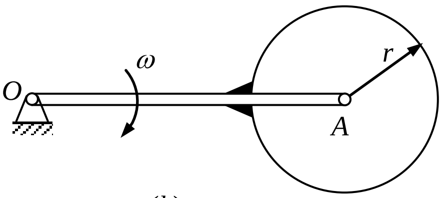
（a）质量为 m，半径为 r 的均质圆盘绕水平轴 O 作定轴转动，角速度为ω。



(a)

解：$L_O = J_O\omega = \left(\dfrac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\omega = \dfrac{3}{2}mr^2\omega$

（b）质量为 m，长为 l 的均质杆杆端与质量为 m 、半径为 r 的均质圆盘中心固结，绕水平轴 O 的作定轴转动，角速度为ω 。

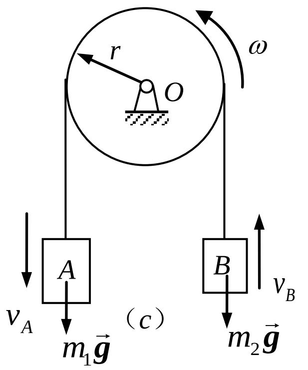


(b)

解：$L_O = J_O\omega = \left(\dfrac{1}{3}ml^2 + \dfrac{1}{2}mr^2 + ml^2\right)\omega$

$$= \frac{1}{6}(8l^2 + 3r^2)m\omega$$

（c）图示滑轮组，重物 A 和 B 质量分别为 m_1 和 m_2；滑轮 O 的质量为 m_3，半径为 r，可视为均质圆盘。滑轮绕水平轴 O 的作定轴转动，角速度为ω。（绳子不计质量和弹性。）



解：重物 A 和 B 速度 $v_A = v_B = r\omega$，

$$L_O = m_1 v_A \cdot r + m_2 v_B \cdot r + J_O\omega$$

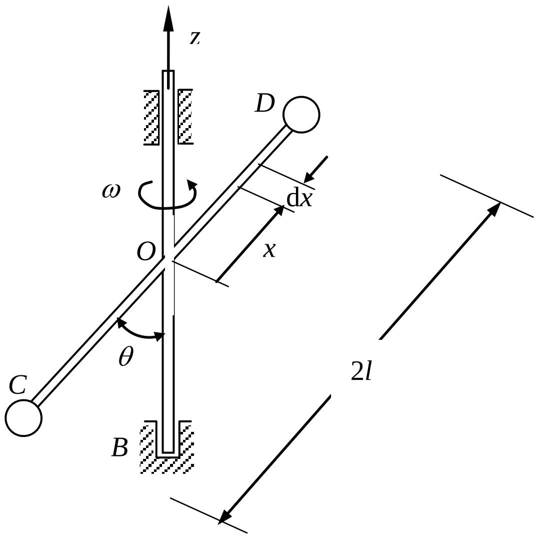
$$= m_1 r\omega \cdot r + m_2 r\omega \cdot r + \left(\frac{1}{2}m_3 r^2\right)\omega$$

$$= \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)r^2\omega$$

11.2 如图图示，杆 CD 与 z 轴的夹角为θ，杆长 $CO = OD = l$，杆端固结的小球 C、D 质量均为 m，大小不计；系统绕铅直轴 z 转动的角速度为ω，求

⑴ 杆 CD 不计质量时，系统对 z 轴的动量矩 ；

⑵ 均质杆 CD 质量为 $2m$ 时，系统对 z 轴的动量矩。



[解] ⑴由动量矩的定义，可得

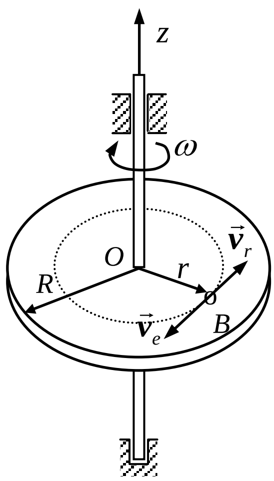
$$L_{AB} = 2ml\omega\sin\theta\cdot l\sin\theta = 2m\omega l^2\sin^2\theta$$

⑵杆和球对 AB 轴的转动惯量为

$$J_{AB} = 2\int_0^l \frac{m}{l}(x\sin\theta)^2\mathrm{d}x + 2m(l\sin\theta)^2 = \frac{8}{3}ml^2\sin^2\theta$$

此系统对 AB 轴的动量矩为 $L_{AB} = J_{AB}\omega = \frac{8}{3}m\omega l^2\sin^2\theta$

11.3 已知半径为 R，重量为 P 的均质圆盘，可绕 z 轴无摩擦地转动。一重量为 Q 的人在盘上由 B 点按规律 $s = \frac{1}{2}at^2$ 沿半径为 r 的圆周行走。开始时，圆盘和人静止。求圆盘的角速度和角加速度。



[解] 研究整体，由于$\sum M_z(\vec{F}) = 0$，且系统初始静止，

所以系统对 z 轴的动量矩 $L_z=0$，即圆盘和人对 z 轴的动量矩之和为零。

圆盘定轴转动，$L_{z1}=J_z\omega=\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega$

选人为动点，圆盘为动系，人相对圆盘的运动 $s=\frac{1}{2}at^2$，相对速度 $v_r=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=at$，

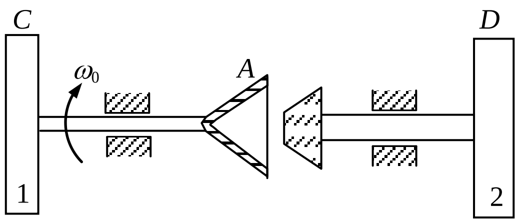
由 $\vec{\boldsymbol{v}}_a=\vec{\boldsymbol{v}}_e+\vec{\boldsymbol{v}}_r$　式中 $v_e=r\omega$，$\therefore v_a=v_e-v_r=r\omega-at$

人对 z 轴的动量矩 $L_{z2}=\frac{Q}{g}(r\omega-at)r$，

$$\therefore L_z=L_{z1}+L_{z2}=0, \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega+\frac{Q}{g}(r\omega-at)r=0$$

解得 $\omega=\frac{2Qart}{PR^2+2Qr^2}$　　$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{2Qar}{PR^2+2Qr^2}$

11.4 图示离合器，轮 1 和 2 的转动惯量分别为 J_1 和 J_2，初始时，轮 2 静止，轮 1 具有角速度ω_0。求⑴当离合器接合后，两轮共同转动的角速度；⑵若经过 t 秒后两轮的转速才相同，离合器应有的摩擦力矩。



[**解**]

⑴ 该系统 $\sum M_z(\vec{\boldsymbol{F}})=0$，所以 $L_z=L_{z0}=$常量，即 $(J_1+J_2)\omega=J_1\omega_0$ ，

解得离合器接合后，两轮共同转动的角速度 $\omega=\frac{J_1\omega_0}{J_1+J_2}$

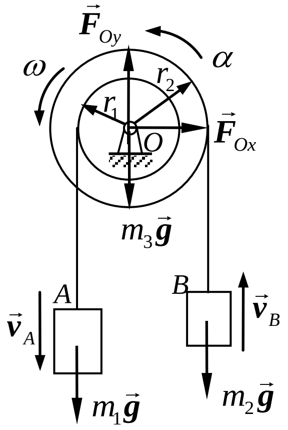
⑵ 分别取 1、2 轮为研究对象，有

$$J_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}=-M_f,\quad J_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}=M_f,$$

积分 $\int_{\omega_0}^{\omega}J_1\mathrm{d}\omega=\int_0^t -M_f\mathrm{d}t,\quad \int_0^{\omega}J_2\mathrm{d}\omega=\int_0^t M_f\mathrm{d}t$

解得 $M_f=\frac{J_1J_2\omega_0}{(J_1+J_2)t}$

11.5 重物 A 和 B 质量分别为 m_1 和 m_2;塔轮的质量为 m_3,对水平轴 O 的回转半径为ρ ，且质心位于转轴 O 处。求塔轮的角加速度 α 。（绳子不计质量和弹性。）



解：设塔轮的角速度为ω，则 A 块速度为 $v_A = r_1\omega$，B 块速度为 $v_B = r_2\omega$，

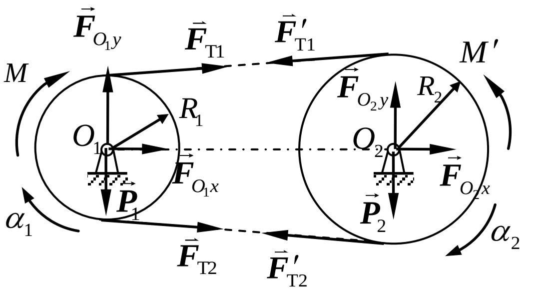
系统对水平轴 O 的动量矩 $L_O = m_1v_Ar_1 + m_2v_Br_2 + J\omega = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3\rho^2)\omega$

由动量矩定理，$\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\vec{F})$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3\rho^2)\omega\right] = m_1gr_1 - m_2gr_2$$

注意到$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，则塔轮的角加速度$\alpha = \dfrac{(m_1r_1 - m_2r_2)g}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3\rho^2}$

11.6 图示两均质带轮的半径各为 R_1 和 R_2，其重量分别为 P_1 和 P_2，分别受矩为 M 的主动力偶和矩为 M' 的阻力偶作用，胶带与轮之间无滑动，胶带质量略去不计。求第一个带轮的角加速度。



[**解**]　　分别研究两轮，受力如图。应用定轴转动微分方程：

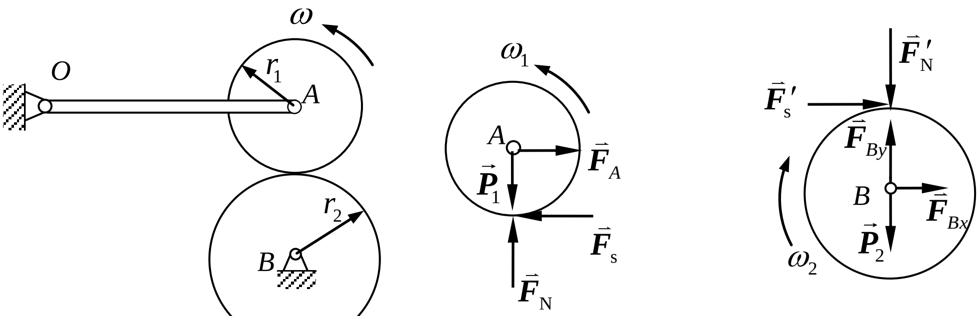
$$J_{O_1}\alpha_1=\sum M_{O_1}(\vec{\boldsymbol{F}}),\ \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1^2\alpha_1=M+F_{T1}R_1-F_{T2}R_1$$

$$J_{O_2}\alpha_2=\sum M_{O_2}(\vec{\boldsymbol{F}}),\ \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2\alpha_2=-M'-F'_{T1}R_2+F'_{T2}R_2$$

式中 $F_{T1}=F'_{T1}$， $F_{T2}=F'_{T2}$ ， $\alpha_2=\dfrac{R_1}{R_2}\alpha_1$ ，　解得 $\alpha_1=\dfrac{2(R_2M-R_1M')}{(P_1+P_2)R_1^2R_2}g$

即第一个带轮的角加速度 $\alpha_1=\dfrac{2(R_2M-R_1M')}{(P_1+P_2)R_1^2R_2}g$

11.7 均质圆轮 A 重量为 P_1，半径为 r_1，以角速度 ω 绕杆 OA 的 A 端转动，此时将轮放置在均质轮 B 上；杆 OA 重量不计；均质轮 B 重量为 P_2、半径为 r_2，初始静止，但可绕其中心自由转动。放置后轮 A 的重量由轮 B 支持。设两轮间的摩擦系数为 f'；求自轮 A 放在轮 B 上到两轮间没有相对滑动时的时间。



(1)　　　　(2)　　　　(3)

[**解**]　　分别研究两轮，受力如图⑵、(3)。因为 AB 为二力杆，

所以它对轮 A 的作用力为 $\boldsymbol{F}_A$，沿杆轴线方向。

对轮 A（图⑵），由

$$\sum F_y=0,\ F_N-P_1=0，得\ \ F_N=P_1$$

分别列出 A、B 两轮的定轴转动微分方程为

$$J_A \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = \sum M_A(\vec{\boldsymbol{F}}), \quad \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}r_1^2\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -F_\mathrm{s}\cdot r_1$$

$$J_B \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \sum M_B(\vec{\boldsymbol{F}}), \quad \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = F_\mathrm{s}'\cdot r_2$$

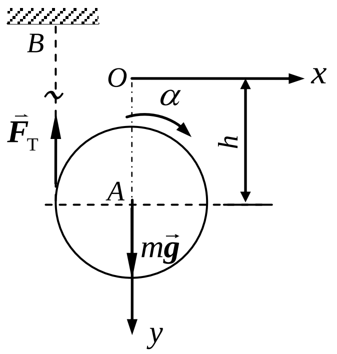
式中 $F_\mathrm{s}' = F_\mathrm{s} = fF_\mathrm{N} = fP_1$

分别积分，得 $r_1\omega_1 = r_1\omega - 2fgt, \quad P_2r_2\omega_2 = 2fP_1gt$

A、B 两轮间无相对滑动时，应有 $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$

所以得 $$t = \frac{r_1\omega}{2fg\left(1+\dfrac{P_1}{P_2}\right)}$$

11.8 均质圆柱体 A 的质量为 m，在外圆上绕以细绳，绳的一端 B 固定不动，如图所示。圆柱体因解开绳子而下降，其初速为零。求当圆柱体的轴心降落了高度 h 时轴心的速度和绳子的张力。



[**解**]圆柱体作平面运动，受力如图，由平面运动微分方程

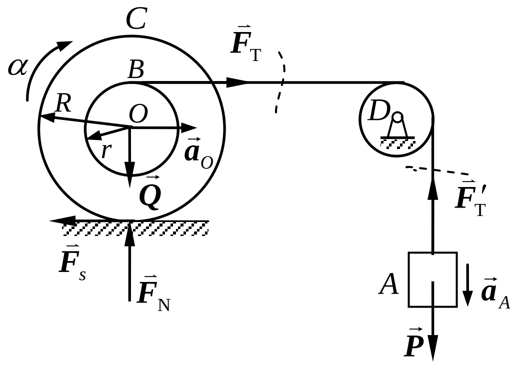
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_x, \quad ma_{Ax} = 0, \\ ma_{Cy} = \sum F_y, \quad ma_{Ay} = mg - F_\mathrm{T}, \\ J_C\alpha = \sum M_C(\vec{\boldsymbol{F}}), \ \dfrac{1}{2}mR^2\alpha = F_\mathrm{T}R \end{cases}$$

$$a_A = a_{Ay}, R\alpha = a_A$$

解得 $a_A = \dfrac{2}{3}g, \quad F_\mathrm{T} = \dfrac{1}{3}mg$ 即绳子的张力为 $F_\mathrm{T} = \dfrac{1}{3}mg$

a_A 为常数，点 A 降落了高度 h 时的速度为 $v = \sqrt{2a_Ah} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3gh}$

11.9 重物 A 重 P，系在跨过固定滑轮 D 并绕在鼓轮 B 上的绳子上，鼓轮 B 半径为 r，轮 C 的半径为 R，两者固连在一起，沿水平面纯滚动。两者总重为 Q，关于水平轴 O 的回转半径为 ρ，不计 D 轮质量。求重物 A 的加速度。



[**解**]分别研究物体 A 和鼓轮，受力分析与加速度分析如图所示。

因为不计 D 轮质量，所以 D 轮两端绳子张力相等：$F_{\mathrm{T}} = F'_{\mathrm{T}}$。

物 A：$ma_A = \sum F$，$\dfrac{P}{g}a_A = P - F'_{\mathrm{T}}$

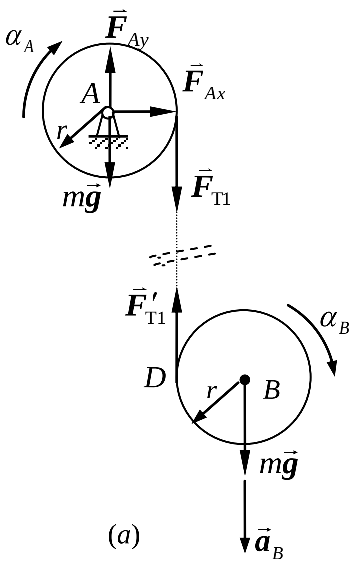
鼓轮：
$$\begin{cases} ma_O = \sum F_x, \quad \dfrac{Q}{g}a_O = F_{\mathrm{T}} - F_s \\ J_O\alpha = \sum M_O(\vec{F}), \quad \dfrac{Q}{g}\rho^2\alpha = F_{\mathrm{T}}r + F_sR \end{cases}$$

式中 $\alpha = \dfrac{a_A}{R+r}$，$a_O = R\alpha = \dfrac{R}{R+r}a_A$

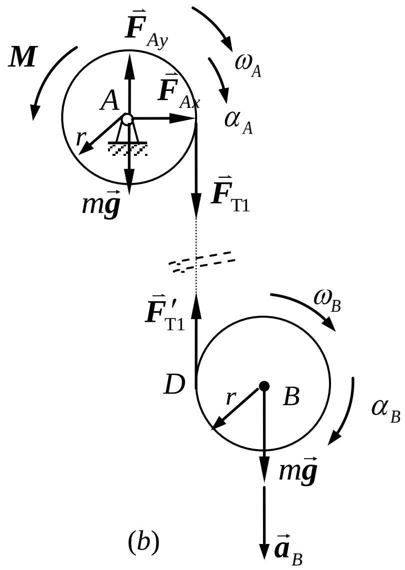
解得 $$a_A = \frac{Pg(R+r)^2}{P(R+r)^2 + Q(R^2+\rho^2)}$$

11.10 均质圆柱 A 和 B 的重量均为 P，半径均为 r，一绳缠绕在绕固定轴 A 转动的圆柱 A 上，绳的另一端绕在圆柱 B 上，如图所示。摩擦不计。求

⑴圆柱体 B 下落时质心的加速度；



(*a*)



(*b*)

[**解**]

⑴两轮的受力与运动分析分别如图(*a*)，

对 *A* 轮，有 $$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_A = rF_{T1}$$ ……..①

对 *B* 轮，有 $$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_B = rF'_{T1}$$ ……..②

$$\frac{P}{g}a_B = P - F'_{T1}$$ ……..③

$$F_{T1} = F'_{T1}$$ ……..④

再以轮与绳相切点 *D* 为基点，则轮心 *B* 的加速度

$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{BD}$，式中 $v_D = r\omega_A$， $v_{BD} = r\omega_B$

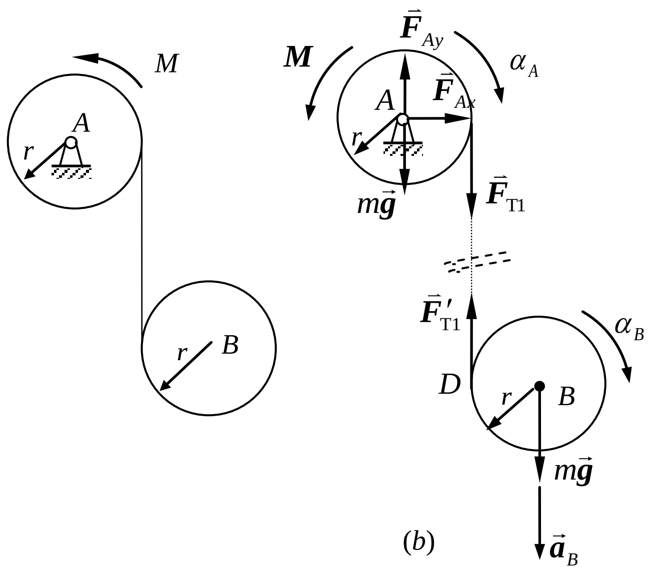
$\therefore v_B = r\omega_A + r\omega_B$ ，

对上式求导得轮心 *B* 的加速度为

$$a_B = r\alpha_A + r\alpha_B$$ ……..⑤

联立以上 5 式，解得 $$a_B = \frac{4}{5}g$$

⑵若在圆柱体 *A* 上作用一矩为 *M* 的逆时针转向的力偶，试问在什么条件下圆柱体 *B* 的质心将上升。



(b)

解：⑵　再分别对两轮进行受力与运动分析，如图(b)，

对 A 轮，有　　$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_A = -M + rF_{T2}$

对 B 轮，有　　$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_B = rF'_{T2}$

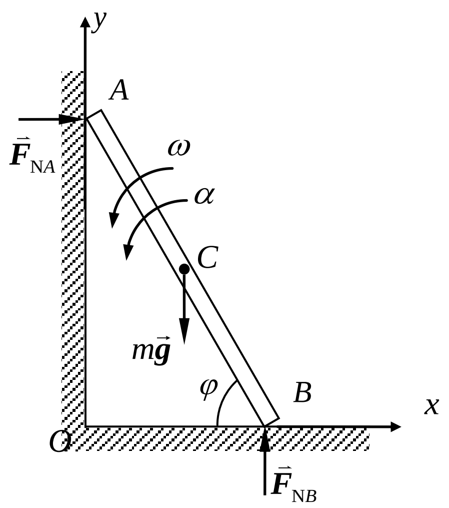
$$\frac{P}{g}a_B = P - F'_{T2}$$

$$F_{T2} = F'_{T2}$$

同上，有运动学关系 $a_B = r\alpha_A + r\alpha_B$ ，（但 $\alpha_A \neq \alpha_B$ ）

令 a_B ＜ 0，可解得圆柱体 B 的质心加速度向上的条件：　$M > 2Pr$

11.11　质量为 m、长为 l 的均质杆 AB 放在铅直平面内，在 $\varphi = \varphi_0$ 角时由静止状态倒下，墙与地面均光滑。求（1）杆在任意位置时的角速度和角加速度；（2）杆脱离墙时与水平面所夹的角。



[解] 取坐标系如图，则质心 C 的坐标为 $x_C=\dfrac{l}{2}\cos\varphi,\ y_C=\dfrac{l}{2}\sin\varphi$，

质心 C 的加速度为 $a_{Cx}=\ddot{x}_C, a_{Cy}=\ddot{y}_C$，

注意到 $\dot{\varphi}=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega$， $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}$

得 $a_{Cx}=\dfrac{l}{2}(\alpha\sin\varphi-\omega^2\cos\varphi),\quad a_{Cy}=-\dfrac{l}{2}(\alpha\cos\varphi-\omega^2\sin\varphi);$

列出杆的平面运动微分方程

$$\begin{cases}\sum F_x=ma_{Cx}, \quad F_{NA}=ma_{Cx},\\ \sum F_y=ma_{Cy}, \quad F_{NB}-mg=ma_{Cy},\\ \sum M_C(\vec{F})=J_C\alpha,\ F_{NB}\dfrac{l}{2}\cos\varphi-F_{NA}\dfrac{l}{2}\sin\varphi=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{NA}=\dfrac{l}{2}(\alpha\sin\varphi-\omega^2\cos\varphi)m,\\ F_{NB}-mg=-\dfrac{l}{2}(\alpha\cos\varphi-\omega^2\sin\varphi)m,\\ F_{NB}\dfrac{l}{2}\cos\varphi-F_{NA}\dfrac{l}{2}\sin\varphi=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha\end{cases}$$

联立解得杆在任意位置时的角加速度 $\alpha=\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$ 或 $\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$

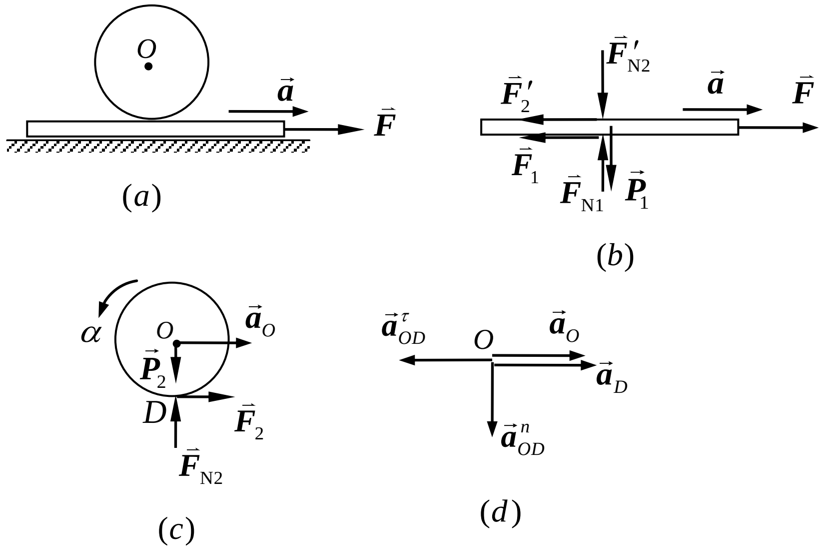
得杆在任意位置时的角速度 $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}$

$$F_{NA} = ma_{Cx} = \frac{3}{2}mg\cos\varphi(\frac{3}{2}\sin\varphi - \sin\varphi_0)$$

杆脱离墙的条件为 $F_{NA} = 0$，代入上式，

解得杆脱离墙时与水平面所夹的角 $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_0\right)$

11.12 板重 P_1，受水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用，沿水平面运动，板与平面间的动摩擦系数为 f'。在板上放一重为 P_2 的实心圆柱，如图所示，圆柱对板只滚不滑。求板的加速度。



[**解**] 板与圆柱的受力图分别如图(*a*)、(*b*)；对板由质心运动定理，有

$$\begin{cases} ma = \sum F_x, & \dfrac{P_1}{g}a = F - F_1 - F_2' \\ 0 = \sum F_y, & 0 = F_{N1} - F_{N2}' - P_1 \end{cases}$$

式中摩擦力 $F_1 = f'F_{N1}$

对圆柱由刚体平面运动微分方程，有 $\begin{cases} ma_O = \sum F_x, & \dfrac{P_2}{g}a_O = F_2 \\ J_O\alpha = \sum M_O, & \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}R^2\alpha = F_2R \end{cases}$

以圆柱与板的接触点 D 为基点，设圆柱的角加速度为 α，则圆心 O 的加速度为

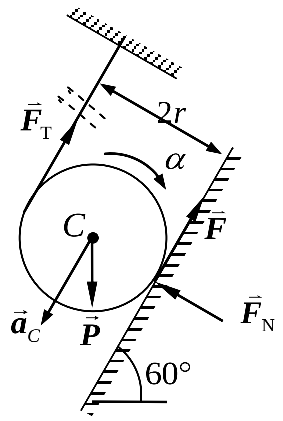
$\vec{a}_O = \vec{a}_D + \vec{a}_{OD}^n + \vec{a}_{OD}^\tau$，式中 $a_D = a, a_{OD}^\tau = R\alpha,$ 加速度矢量图如图(d)。

将矢量方程投影至水平方向得：$a_O = a - R\alpha$

联立解得 $a = \dfrac{F - f'(P_1 + P_2)}{P_1 + \dfrac{P_2}{3}}g$

11.13 已知： 均质圆柱体重 P，半径 r，斜面倾角为 60°。细绳缠绕在圆柱体上，此绳与 A 相连部分与斜面平行。圆柱体与斜面间的摩擦系数为 f=1/3。

求圆柱沿斜面落下的加速度 a_C 。



[**解**] 圆柱受力与运动分析如图，平面运动方程为

$$\begin{cases} ma_C = \sum F_x, \quad \dfrac{P}{g}a_C = P\sin 60° - F - F_{\mathrm{T}} \\ 0 = \sum F_y, \quad 0 = F_{\mathrm{N}} - P\cos 60^{\circ} \\ J_C\alpha = \sum M_C, \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g}r^2\alpha = F_{\mathrm{T}}r - Fr \end{cases}$$

式中 $F = fF_{\mathrm{N}}$， $a_C = r\alpha$

联立解得圆柱沿斜面落下的加速度为 $a_C = 0.356g$

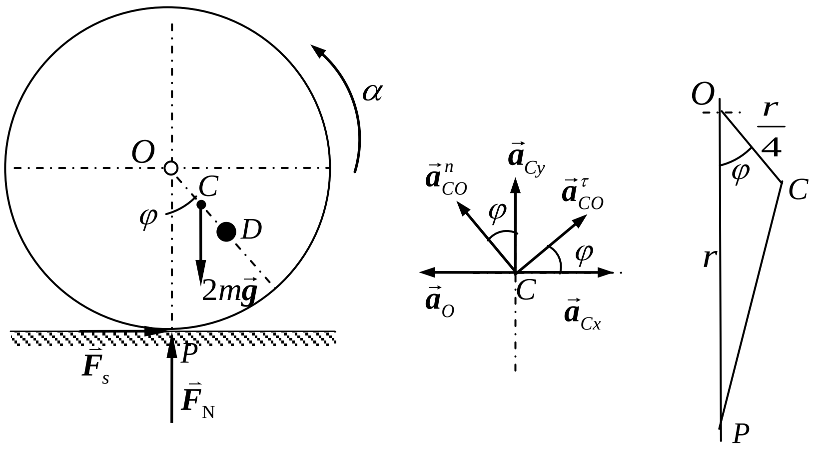
11.14 质量为 m、半径为 r 的均质圆盘，在距盘心 $\dfrac{r}{2}$ 处焊接一个质量为 m 的质点。圆盘经干扰后可在水平面上往复纯滚动，试求：

(1) 系统对速度瞬心的绝对动量矩。
(2) 系统的运动微分方程。
(3) 若系统的运动微分方程具有以下形式：

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} + B(\varphi)\dot{\varphi}^2 + C(\varphi) = 0$$

试说明改变均质圆盘的质量，对 $A(\varphi)$ 、 $B(\varphi)$ 和 $C(\varphi)$ 分别有何影响？

（提示：余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$ ）



解：（1）由已知条件得，刚体质心位置$OC=\dfrac{1}{4}r$，对质心的转动惯量为

$$J_C=\frac{1}{2}mr^2+m\cdot OC^2+m\cdot CD^2=\frac{1}{2}mr^2+m\left(\frac{r}{4}\right)^2+m\left(\frac{r}{4}\right)^2=\frac{5}{8}mr^2$$

对速度瞬心 P 的转动惯量

$$J_P=J_C+2m\cdot CP^2=\frac{5}{8}mr^2+2m\left[r^2+\left(\frac{r}{4}\right)^2-2r\cdot\frac{r}{4}\cos\varphi\right]=\left(\frac{11}{4}-\cos\varphi\right)mr^2$$

系统对速度瞬心的绝对动量矩

$$L_P=J_P\omega=\left(\frac{11}{4}-\cos\varphi\right)mr^2\omega$$

（2）圆盘作纯滚动，$\boldsymbol{a}_O=r\alpha=r\ddot{\varphi}$

质心的加速度，$\vec{\boldsymbol{a}}_C=\vec{\boldsymbol{a}}_O+\vec{\boldsymbol{a}}_{CO}^n+\vec{\boldsymbol{a}}_{CO}^\tau$，$\boldsymbol{a}_{CO}^n=\dfrac{r}{4}\dot{\varphi}^2,\boldsymbol{a}_{CO}^\tau=\dfrac{r}{4}\ddot{\varphi}$

$$a_{Cx}=-a_O-a_{CO}^n\sin\varphi+a_{CO}^\tau\cos\varphi=-r\ddot{\varphi}-\frac{r}{4}\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\frac{r}{4}\ddot{\varphi}\cos\varphi$$

$$a_{Cy}=a_{CO}^n\cos\varphi+a_{CO}^\tau\sin\varphi=\frac{r}{4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\frac{r}{4}\ddot{\varphi}\sin\varphi$$

由刚体平面运动微分方程

$$\begin{cases}\sum F_x=ma_{Cx},\quad F_s=2m\left(-r\ddot{\varphi}-\dfrac{r}{4}\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\dfrac{r}{4}\ddot{\varphi}\cos\varphi\right), & (1)\\[2ex] \sum F_y=ma_{Cy},\quad F_\mathrm{N}-2mg=2m\left(\dfrac{r}{4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\dfrac{r}{4}\ddot{\varphi}\sin\varphi\right), & (2)\\[2ex] \sum M_C(\vec{\boldsymbol{F}})=J_C\alpha,\ F_s\left(r-\dfrac{r}{4}\cos\varphi\right)-F_\mathrm{N}\left(\dfrac{r}{4}\sin\varphi\right)=\dfrac{5}{8}mr^2\ddot{\varphi} & (3)\end{cases}$$

由式(1)、(2)解出 F_N、F_s 代入式(3)得

$$2m\left(-r\ddot{\varphi}-\frac{r}{4}\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\frac{r}{4}\ddot{\varphi}\cos\varphi\right)\left(r-\frac{r}{4}\cos\varphi\right)$$
$$-\left[2mg+2m\left(\frac{r}{4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\frac{r}{4}\ddot{\varphi}\sin\varphi\right)\right]\left(\frac{r}{4}\sin\varphi\right)=\frac{5}{8}mr^2\ddot{\varphi}$$

化简得 $(11-4\cos\varphi)r\ddot{\varphi}+2r\sin\varphi\dot{\varphi}^2+2g\sin\varphi=0$

（3）设改变后均质圆盘的质量为 m_1，类似上述解法可得

$$\left[\frac{6m_1}{m}+(5-4\cos\varphi)\right]r\ddot{\varphi}+2r\sin\varphi\dot{\varphi}^2+2g\sin\varphi=0$$

所以，改变圆盘的质量仅对 $A(\varphi)$ 有影响，对 $B(\varphi)$ 和 $C(\varphi)$ 无影响。