目 录

合肥工业大学《高等数学 A（下）》

高数 A 2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.设$z=e^{y-x}$，则$dz|_{(1,0)}=$ ________

2.曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,1,2)$处的切平面方程为 ________

3.交换二重积分次序$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 f(x,y)dy=$ ________

4.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则该幂级数的收敛区间为 ________

5.设L为半圆$x^2+y^2=r^2,x\geqslant 0$.则$\int_L(x^2+y^2)ds=$ ________

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.函数$f(x,y)=\arctan(x^2y)$在点$(1,1)$处的梯度等于（　　）

（A）$\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$　（B）$\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$　（C）$\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$　（D）$\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$

2.设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)偏导数存在，且取得极小值，则下列结论正确的是（　　）

（A）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于 0　（B）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数大于 0

（C）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数小于 0　（D）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数不存在

3.设α是常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$（　　）

（A）发散　（B）绝对收敛　（C）条件收敛　（D）敛散性不定

4.设$f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2-2x, \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x),-\infty<x<+\infty$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx$，则$S\left(-\frac{5}{2}\right)=$ ________

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）1

5.设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$上半部分，并取上侧，则下列结论不正确的是（　　）

（A）$\iint_\Sigma y^2 dydz=0$　　（B）$\iint_\Sigma ydydz=0$

（C）$\iint_\Sigma x^2 dydz=0$　　（D）$\iint_\Sigma xdydz=0$

三、（本题共12分）设$f(x,y)$具有连续二阶偏导数，且$z=f\left(xy,\frac{x^2}{y}\right)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

四、（本题共10分）求函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值

五、（本题共12分）计算三重积分$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dV$，$\Omega$是由旋转抛物面$2z=x^2+y^2$以及平面$z=2$所包围的立体部分

六、（本题共12分）计算曲面积分$I=\oiint_\Sigma \sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的内侧

七、（本题共12分）已知$f(0)=-\frac{1}{2}$，求可微函数$f(x)$，使得曲线积分$\int_L [e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$与路径无关，并计算积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$

八、（本题共12分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$的收敛域及和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$

高数A 2019-2020学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题（本题满分15分，每小题3分）

1.【正解】$-\frac{1}{e}dx+\frac{1}{e}dy$

【学解】$z_x(1,0)=-e^{y-x}\big|_{(1,0)}=-\frac{1}{e},z_y(1,0)=e^{y-x}\big|_{(1,0)}=\frac{1}{e}$

所以$dz\big|_{(1,0)}=z_x(1,0)dx+z_y(1,0)dy=-\frac{1}{e}dx+\frac{1}{e}dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第三部分　3.1 全微分的定义

2.【正解】$2x+2y-z=2$

【学解】由于$z_x(1,1)=2x\big|_{(1,1)}=2,z_y(1,1)=2y\big|_{(1,1)}=2$，所以在点$(1,1,2)$处的切平面的法向量为$\vec{n}=(z_x(1,1),z_y(1,1),-1)=(2,2,-1)$，于是切平面方程为$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$

化简得$2x+2y-z=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第五部分　5.2 曲面的切平面与法线

3.【正解】$\int_0^2 dy\int_1^{y+1}f(x,y)dx$

【学解】积分区域$D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 3,x-1\leqslant y\leqslant 2\}=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 1+y\}$

所以$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 f(x,y)dy=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}f(x,y)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题九　第二部分　2.1 利用直角坐标系计算二重积分

4.【正解】$(-1,3)$

【学解】因为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，依据Abel第一定理可知此幂级数的收敛半径为$|-1-1|=2$，于是收敛区间为$(-1,3)$

值得一提的是：收敛区间与收敛域是不同的两个概念

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第三部分　3.2 幂级数及其敛散性

5.【正解】πr^3

【学解】$\int_L (x^2+y^2)ds = r^2\int_L ds = r^2\cdot\frac{2\pi r}{2} = \pi r^3$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第一部分【易错考点】【1-1】第一型曲线积分的计算方法

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.【正解】B

【学解】$\boldsymbol{grad}f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=\left(\frac{2xy}{1+x^4y^2},\frac{x^2}{1+x^4y^2}\right)\Big|_{(1,1)}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，故选 B

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第六部分　6.2 梯度

2.【正解】A

【学解】由于$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得极小值，所以存在$\delta>0$，当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，恒有$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$，那么当$|y-y_0|<\delta$时，有$f(x_0,y)\geq f(x_0,y_0)$，所以$f(x_0,y)$在点$(x_0,y_0)$处取得极小值，又因为$f(x_0,y)$在$y=y_0$处可导（这是因为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$偏导数存在），所以根据费马引理知$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于 0

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第七部分　7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

3.【正解】A

【学解】首先有$\left|\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}\right|\leq\frac{1}{n^3}$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}$绝对收敛

又因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$是发散的，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$发散

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第二部分　2.2 绝对收敛与条件收敛

4.【正解】C

【学解】因为将$f(x)$展开成了余弦级数，从$S(x)$的形式可知$S(x)$以 2 为周期，是偶函数

于是根据狄利克雷收敛定理知：$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^+\right)+f\left(\frac{1}{2}^-\right)}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第六部分　6.1 周期为$2l$的周期函数的傅里叶级数

5.【正解】D

【学解】补平面$S:x^2+y^2\leq 1,z=0$，取其下侧

那么根据高斯公式有：$\iint_{\Sigma+S}xdydz=\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 1\\ z\geq 0}}dV=\frac{2}{3}\pi$

又因为$\iint_S xdydz=0$，所以$\iint_\Sigma xdydz=\frac{2}{3}\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第五部分　5.1 对坐标的曲面积分

三、（本题共 12 分）

【学解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\frac{2x}{y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]-\frac{2x}{y^2}f_2'+\frac{2x}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]$$

$$=f_1'-\frac{2x}{y^2}f_2'+xyf_{11}''+f_{12}''\frac{x^2}{y}-\frac{2x^3}{y^3}f_{22}''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第二部分　2.2 高阶偏导数

四、（本题共 10 分）

【学解】令$\begin{cases}f_x=4-2x=0\\ f_y=-4-2y=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$，解得唯一驻点$(2,-2)$

接下来考虑 Hessian 矩阵$\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\ 0&-2\end{bmatrix}=-2E_2$，显然它恒为负定矩阵

于是点$(2,-2)$为极大值点，即此函数的极大值为$f(2,-2)=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第七部分　7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

五、（本题共 12 分）

【学解】首先联立旋转抛物面$2z=x^2+y^2$以及平面$z=2$，可得到该立体在xOy平面的投影为：

$D_{xy}:x^2+y^2\leq 4$，于是$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2)dV=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}dz=2\pi\int_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)dr=\frac{16\pi}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九　第三部分【易错考点】3-1 三重积分的计算方法

六、（本题共 12 分）

【学解】$I=\oiint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)=\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$

根据高斯公式有：$\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=-\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}3dV=-4\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第五部分　5.1 对坐标的曲面积分

七、（本题共 12 分）

【学解】令$P=[e^x+f(x)]y, Q=-f(x)$

因为曲线积分$\int_L [e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$与路径无关，故有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$

即得到$-f'(x)=e^x+f(x)$，得微分方程$f(x)+f'(x)=-e^x$

于是有$e^x[f(x)+f'(x)]=-e^{2x}\Longrightarrow(e^xf(x))'=-e^{2x}\Longrightarrow e^xf(x)-e^0f(0)=-\int_0^x e^{2t}dt$

$\Longrightarrow e^xf(x)=-\dfrac{e^{2x}}{2}\Longrightarrow f(x)=-\dfrac{e^x}{2}$

进而有$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]ydx-f(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\dfrac{e^x}{2}ydx+\dfrac{e^x}{2}dy=\left[\dfrac{e^x}{2}y\right]\Bigg|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{e}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第三部分　3.1 格林公式

八、（本题共 12 分）

【学解】令$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，有收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$

当$x=1$时，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}$，是发散的；

当$x=-1$时，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}$，也是发散的；

所以收敛域为$(-1,1)$，下面在$(-1,1)$的意义下求解和函数：

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}, -1<x<1$

于是$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}t^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2}x^n\overset{def}{=\!=}g(x)$

$\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2}t^ndt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{2}=\dfrac{x^2}{2(1-x)}$

于是$s(x)=\left(\dfrac{x^2}{2(1-x)}\right)''=\left(\dfrac{2x-x^2}{2(1-x)^2}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^3}, -1<x<1$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第三部分　3.3 幂级数的运算

高数 A 2018-2019 学年第二学期期末考试试卷

一、填空题

1. 若曲线 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=2t \\ z=t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线与平面 $x+ay-2z=1$ 平行，则常数 a 等于______

2. 函数 $z=x^2y+2xy$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数为______

3. .设空间区域 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$ 等于______

4. 设曲面 Σ 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdS=$______

5. $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内关于 x 的幂级数展开式为______

二、选择题

1. 设 $f(0,0)=1, f'_x(0,0)=2, f'_y(0,0)=3$，$\vec{l}$ 对 x 轴正向的逆时针方向转角为 $\frac{\pi}{4}$，则下列说法一定正确的是(　　)

(A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，且 $df(x,y)\big|_{(0,0)}=2dx+3dy$

(C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不取极值

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr=$ (　　).

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

3. 设 $L: y=x, x\in[0,1]$，第一类曲线积分 $I_1=\int_L k(y-x)ds$，$I_2=\int_L (y-x^2)ds$，其中 k 为常数，则 I_1, I_2 的大小关系为(　　).

(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法比较

4. 设常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{\sin n+(-1)^n\lambda}{n^2}$ 是(　　).

(A)条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与常数 λ 有关

5. 设 $f(x)$ 是周期 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases} x+1, -\pi\leqslant x<0 \\ x^2, 0\leqslant x<\pi \end{cases}$ $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数展开，则 $s(5)=$ (　　).

(A) $(5-2\pi)^2$　　(B) $6-2\pi$　　(C) 6　　(D) 25

三、（本题满分 10 分）设函数 $u=x^2+y+z^2$，其中 $y=y(x), z=z(x)$ 由隐函数方程组 $\begin{cases} x^2+x-ye^y=0 \\ xz+\ln z=1 \end{cases}$ 确定，求 $du\big|_{x=0}$

四、（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值

五、（本题满分 10 分）计算二重积分$I=\iint\limits_{D}|y-x^2|d\sigma$，其中区域$D$为$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$

六、（本题满分 10 分）设在全平面内，曲线积分$\int_{L}(y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$与路径无关，其中$\varphi(x)$为连续函数.

(1)求$\varphi(x)$的表达式;

(2)求$(y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$的一个原函数$u(x,y)$;

(3)计算曲线积分$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$

七、（本题满分 12 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2ydydz+y^2\sin xdzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=1(0\leqslant z\leqslant 1)$的一部分，并取外侧

八、（本题 12 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{2}{n}\right)x^n$的收敛域和和函数

九、（本题满分 6 分）设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

高数 A 2018-2019 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、填空题

1.【正解】2

【学解】切向量为$\vec{s}=\{2t,2,3t^2\}\big|_{t=1}=\{2,2,3\}$，平面的法向量为$\vec{n}=\{1,a,-2\}$

因为切线与平面平行，所以切向量与法向量垂直，则$\vec{s}\cdot\vec{n}=\vec{0}$，即$2+2a-6=0$，

所以$a=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 5.1 空间曲线的切线与法平面

2.【正解】5

【学解】$gradz|_{(1,1)}=\{2xy+2y,x^2+2x\}|_{(1,1)}=\{4,3\}$，$\max\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,1)}=\left|gradz|_{(1,1)}\right|=5$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1 方向导数 6.2 梯度

3.【正解】$\dfrac{4\pi}{5}$

【学解】$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^4\sin\varphi d\rho=\dfrac{4\pi}{5}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 第三部分【易错考点】3-1 三重积分的计算方法

4.【正解】π

【学解】$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}dxdy=\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第四部分【易错考点】【4-1】第一型曲面积分的计算方法

5.【正解】$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$

【学解】因为$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}$，从而$f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 4.1 函数展开成幂级数

二、选择题

1.【正解】(D)

【学解】偏导数存在未必连续，未必可微，未必方向导数存在，所以选项(A)，(B)，(C)均不正确，由二元函数极值存在的必要条件可知，如果$f(x,y)$在$(0,0)$点取极值，并且一阶偏导数都存在，则

$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，与已知矛盾，所以(D)选项正确

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

2.【正解】(D)

【学解】由二重积分极坐标与一般形式的互化可知，(D）正确

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1 利用直角坐标系计算二重积分；2.2 利用极坐标计算二重积分

3.【正解】(A)

【学解】**解法一**：L上$y-x=0$，所以$I_1=0$，L上$y-x^2=x-x^2\geqslant 0$且不恒为0，所以$I_2>0$，故选(A)

解法二：$I_1=\int_0^1 k(x-x)\sqrt{2}\,dx=0, I_2=\int_0^1(x-x^2)\sqrt{2}\,dx=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，所以选(A)

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第一部分【易错考点】【1-1】第一型曲线积分的计算方法

4.【正解】(B)

【学解】因为$\left|\dfrac{\sin n+(-1)^n\lambda}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{\lambda+1}{n^2}$，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda+1}{n^2}$收敛，故选(B)

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛

5.【正解】(B)

【学解】因为$s(x)$是周期2π的函数，所以$s(5)=s(5-2\pi)$，$5-2\pi\in(-\pi,0)$是$f(x)$的连续点，

从而$s(5)=s(5-2\pi)=f(5-2\pi)=6-2\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.2 函数展开成傅里叶级数

三、【**学解**】由题意可知，$x=0$时，$y=0$，$z=e$.

由$u=x^2+y+z^2$，可知$du=2xdx+dy+2zdz$，

由$x^2+x-ye^y=0$，可得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+2x}{(1+y)e^y}$，从而$dy|_{x=0}=dx$，

【或者$2xdx+dx-(1+y)e^ydy=0$，得$dy|_{x=0}=dx$】

由$xz+\ln z=1$，可得$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{z^2}{xz+1}$，从而$dz|_{x=0}=-e^2dx$，

【或者$xdz+zdx+\dfrac{1}{z}dz=0$，得$dz|_{x=0}=-e^2dx$】

所以$du|_{x=0}=(1-2e^3)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 4.1 一元函数与多元函数复合的情形

四、【学解】令$\begin{cases}f'_x=3x^2-8x+2y=0\\ f'_y=2x-2y=0\end{cases}$，解得驻点为(0,0)，(2,2).

又$f''_{xx}=6x-8$，$f''_{xy}=2$，$f''_{yy}=-2$，依次代入驻点，有

驻点	A	B	C	$\Delta=B^2-AC$	极值情况
(0,0)	-8	2	-2	<0	取极大值
(2,2)	4	2	-2	>0	不取极值

所以$f(x,y)$在点(0,0)处取极大值，且极大值为$f(0,0)=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

五、【学解】$D=D_1\cup D_2$，其中$D_1:0\leqslant x\leqslant 1.x^2\leqslant y\leqslant 1;D_2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2$

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4\right)dx+\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1 利用直角坐标系计算二重积分

六、【**学解**】(1). 令$P(x,y)=y\varphi(x)+ye^{xy}, Q(x,y)=x^2+xe^{xy}$

因为曲线积分与路径无关，所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即$\varphi(x)+e^{xy}+xye^{xy}=2x+e^{xy}+xye^{xy}$，

所以$\varphi(x)=2x$

(2). **解法一**： 取(0,0)，有$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$

$$=\int_0^y(x^2+xe^{xy})dy=x^2y+e^{xy}\big|_0^y=x^2y+e^{xy}-1.$$

解法二：$u(x,y)=\int P(x,y)dx=\int(2xy+ye^{xy})dx=x^2y+e^{xy}+c(y)$，

从而$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+xe^{xy}+c'(y)=Q(x,y)$，所以$c'(y)=0$，取$c(y)=0$，则得到一个原函数为

$u(x,y)=x^2y+e^{xy}$.

(3).**解法一**：取路径$L:y=x,x:0\to 1$，可得$I=\int_0^1(3x^2+2xe^{x^2})dx=(x^3+e^{x^2})\big|_0^1=e$.

解法二：由原函数为$u(x,y)=x^2y+e^{xy}-1$，则$I=(x^2y+e^{xy}-1)\big|_{(0,0)}^{(1,1)}=e$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第二部分 对坐标的曲线积分

七、【学解】

解法一：补充曲面Σ_1：$z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，取上侧；$\Sigma_2:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，取外侧，它们所围区域记为$\Omega$.

由高斯公式可得，$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}(2xy+2y\sin x+2z)dV$，

根据奇偶对称性可知$\displaystyle\iiint_{\Omega}2xydV=\iiint_{\Omega}2y\sin xdV=0$，所以

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=2\iiint_{\Omega}zdV=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}dxdy\int_0^1 zdz=\pi$$

而$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}1^2dxdy=\pi,\iint_{\Sigma_2}=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}0^2dxdy=0$

所以$\displaystyle I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=\pi-\pi-0=0$

解法二：由于$\displaystyle\iint_{\Sigma}z^2dxdy=0$，所以$\displaystyle I=\iint_{\Sigma}x^2ydydz+\iint_{\Sigma}y^2\sin xdzdx$.

补充曲面Σ_1：$z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，取上侧；$\Sigma_2:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，所围区域为$\Omega$，取外侧.

由高斯公式可得，$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}(2xy+2y\sin x)dV$，

根据奇偶对称性可知$\displaystyle\iiint_{\Omega}2xydV=\iiint_{\Omega}2y\sin xdV=0$，所以$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=0$.

而$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}x^2ydydz+\iint_{\Sigma_1}y^2\sin xdzdx=\iint_{\Sigma_2}x^2ydydz+\iint_{\Sigma_2}y^2\sin xdzdx=0$，所以$I=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1 对坐标的曲面积分

八、【学解】

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)+\frac{2}{n+1}\Big/n+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n^2+2}\right)=1,$$

当$x=\pm1$时，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+\frac{2}{n})=\infty,\lim_{n\to\infty}(n+\frac{2}{n})(-1)^n=\infty$，级数发散，所以收敛域为$(-1,1)$.

设级数的和函数为$s(x)$，则$\displaystyle s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{2}{n})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\overset{记}{=}f(x)+g(x)$，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'-\frac{x}{1-x}$$

$$=(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'-\frac{x}{1-x}=(\frac{x^2}{1-x})'-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

【或$\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$】

$\displaystyle g(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，则$\displaystyle g'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{2}{1-x}$，

从而$\displaystyle g(x)-g(0)=\int_0^x\frac{2}{1-t}\mathrm{d}t=-2\ln(1-x)$，$g(0)=0$，所以$g(x)=-2\ln(1-x)$.

【或$\displaystyle g(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=2\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt=2\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-2\ln(1-x)$】

综合所述，$\displaystyle s(x)=\frac{x}{(1-x)^2}-2\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3 幂级数的运算

九、【学解】证明：设$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=s$

由于其前n项部分和$s_n=b_2-b_1+b_3-b_2+\cdots+b_{n+1}-b_n=b_{n+1}-b_1$，

所以$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=s$，得$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=s+b_1$，从而数列$\{b_n\}$有界.

不妨令$|b_n|\leqslant M$，则$0\leqslant|a_nb_n|\leqslant Ma_n$.因为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}Ma_n$收敛，所以由正项级数的比较判别法可知

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛，即$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛

高数A 2017-2018学年第二学期期末考试A卷

一、填空题(3分，共15分)

1、设$z=f(\ln x+\dfrac{1}{y})$，其中函数$f(u)$可微，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________

2、设L为圆周$x^2+y^2=a^2$，则曲线积分$\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$________.

3、设Σ为$x+y+z=1$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$，则$\iint_\Sigma dS=$________.

4、求过点$(1,1,1)$且平行于直线$\begin{cases}x-4z=3,\\2x-y-5z=1\end{cases}$的直线方程为________.

5、设函数$f(x)=x^2, 0\leq x<1$，而$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad -\infty<x<+\infty$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots$，则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$________.

三、选择题(3分，共15分)

1、曲面$x^2+\cos(xy)+yz+x=0$在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为(　　).

(A) $x-y+z=-2$　(B) $x+y+z=0$　(C) $x-2y+z=-3$　(D) $x-y-z=0$

2、已知$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则(　　).

(A) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都存在　　(B) $f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在

(C) $f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在　　(D) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都不存在

3、设$f(x,y)$为连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$等于(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

4、函数$f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$在点$(0,1)$处的梯度等于(　　)

(A) $\vec{i}$　(B) $-\vec{i}$　(C) $\vec{j}$　(D) $-\vec{j}$

5、设$u=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛

三、(本题满分10分)设二元函数$z=z(x,y)$是由方程$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$所确定的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、(本题满分10分)设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq x\}$，计算$\iint_D\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、**(本题满分 12 分)**求 $f(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1$ 在圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

六、**（本题满分 12 分）**设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续倒数，且 $\varphi(0)=0$. 求 $\varphi(x)$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}\,y$ 的值.

七、**（本题满分 11 分）**设有界区域 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma (x^2+1)dydz-2ydzdx+(2z+x^3)dxdy$

八、**（本题满分 10 分）**求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

九、(**本题满分 5 分**) 设正数u_n满足方程$x^n+nx-1=0$，(n为整数)，证明：当$a>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^a$收敛.

补 1.（**03-1,12 分**）将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

补 2. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的和函数

高数 A 2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(3 分，共 15 分)

1、【正解】0

【学解】函数$f(u)$可微，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)\times\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)\times\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$

$$故x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)-f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)=0$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

2、【正解】$2\pi a\cos a$

【学解】$\cos\sqrt{x^2+y^2}=\cos a$，$\oint_L\cos\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\cos a\oint_L ds=2\pi a\cos a$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念和性质

3、【正解】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【学解】依题意可知，该空间图形为一等边三角形，$\iint_\Sigma dS$为该图形的面积，

而该三角形的边长为$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故$\iint_\Sigma dS=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——曲面的表面积

4、【正解】$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$

【学解】已知直线为两平面相交的交线，所求直线平行于已知直线，则所求直线的方向向量与平面的方向向量垂直，即$\vec{l}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-4\\2&-1&-5\end{vmatrix}=-(4,3,1)$

而所求直线过点(1，1，1)，故直线方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.3——两个直线的夹角

5、【正解】$-\dfrac{1}{4}$

【学解】依题意，$S(x)$为函数$f(x)$的奇延拓，则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-S\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一易错考点 6-1——将区间上的函数展开为正（余）弦函数

二、选择题(3分，共15分)

1、【正解】A

【学解】曲面在该点处的法向量即为该方程对x，y，z这三个未知数的偏导在点$(0,1,\ -1)$处的数值，计算得，法向量为$(1,\ -1,\ 1)$，故该点的切平面方程为$x-y+z=-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 3.2——平面的一般方程

2、【正解】B

【学解】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$，故$f_x'(0,0)$不存在

同理，可求得$f_y'(0,0)$存在，故选B

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

3、【正解】C

【学解】依题意，积分的图像为在第一象限内的一个$\dfrac{1}{8}$大的单位圆，四个选项中可看出C合题意

【考点延伸】《考试宝典》专题十易错考点 4-1——第一型曲面积分 的计算方法

4、【正解】A

【学解】梯度为$gradf(0,\ 1)=f_x'(0,1)\vec{i}+f_y'(0,1)\vec{j}=\vec{i}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2——梯度

5、【正解】C

【学解】$n>1,\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{\pi}{2},\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$在$(1,\ +\infty)$上单调递减，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

由莱布尼茨定理可知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$收敛，

而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$均为正项级数，故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散

即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u^2(n)$发散

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

三、【学解】解一：$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$，两端同时对$x$求导（注意：$z=z(x,y)$）

$$\frac{1\cdot z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(x+z)-z\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3}$$

解二：令$F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y},F_x'=\dfrac{1}{z},F_z'=-\dfrac{x+z}{z^2}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{z}{x+z},\ldots\ldots$

解三：利用微分形式不变性对$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$两边求导，

$$\frac{zdx-xdz}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{ydz-zdy}{y^2}=0\Rightarrow dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\ldots$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

四、【学解】解一：$D=\left\{(x,y)|0\leq x\leq 1,-\sqrt{x-x^2}\leq y\leq\sqrt{x-x^2}\right\}$

所以$\iint\limits_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\sqrt{1-x}=t}4\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}$$

解二：$\iint\limits_D\sqrt{x}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\,rdr=\dfrac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\dfrac{8}{15}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

五、【学解】

由题设知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-y$，令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，得$f(x,y)$在$D$内的驻点$(0,0)$，且$f(0,0)=1$.

再考虑$f(x,y)$在D的边界曲线$x^2+y^2=1$上的情形.

解一：设拉格朗日函数为$F(x,y,\lambda)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1+\lambda(x^2+y^2-1)$

解方程组$\begin{cases}F_x'=2(1+\lambda)x=0,\\F_y'=-y+2\lambda y=0,\\F_\lambda'=x^2+y^2-1=0,\end{cases}$得4个驻点$(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$，并计算其函数值为

$f(0,1)=f(0,-1)=\dfrac{1}{2}$，$f(1,0)=f(-1,0)=2$.

可见$z=f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$内的最大值为2，最小值为$\dfrac{1}{2}$.

解二：$x^2=1-y^2, h(y)=2-\dfrac{3y^2}{2}, -1\le y\le 1, h'(y)=-3y\overset{\triangle}{=}0\Rightarrow y=0$,

$h(0)=f(\pm 1,0)=2$, $h(\pm 1)=f(0,\pm 1)=\dfrac{1}{2}$，故 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 内的最

为 2，最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及最大值、最小值

六、【学解】

由 $P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=y\varphi(x)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得 $2xy=y\varphi'(x)$, $\varphi(x)=x^2+C$，再由 $\varphi(0)=0$

得 $C=0$，故 $\varphi(x)=x^2$，所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,dx+yx^2\,dy=\dfrac{x^2y^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分的概念与性质

七、【学解】$\Sigma: x+y+z=1$，

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\,dy\,dz-2y\,dz\,dx+(2z+x^3)\,dx\,dy=\iiint_{\Omega}(2x-2+2)\,dv=\iiint_{\Omega}2x\,dv$$

$$=\int_0^1 2x\,dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 2x\,dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

八、【学解】先求收敛域.由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ 得收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，该级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$，该级数发散.故幂级数的收敛域为 $(-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$，$(-1,1)$．显然 $s(0)=0$，

对 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$ 的两边求导,得 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{1}{1+x}$.

对上式从 0 到 x 积分，得 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$.

由和函数在收敛域上的连续性，$s(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}s(x)=\ln 2$.

所以 $s(x)=\ln(1+x)$．$(-1,1]$：故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=s(1)=\ln 2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

九、【学解】

证明 由已知 $u_n=\dfrac{1-u_n{}^n}{n}$，因为 u_n 为正数，故有 $u_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow u_n{}^\alpha<\dfrac{1}{n^\alpha}$，

当 $\alpha>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^\alpha$ 收敛.

解二：

令 $f(x)=x^n+nx-1$，对任意正整数 n，当 $x\ge 0$ 时，$f(0)=-1<0$，$f'(x)=nx^{n-1}+n>0$，所以方程有唯一正根 u_n，又因为 $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{n^n}>0$，所以 $0<u_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow 0<u_n{}^\alpha<\dfrac{1}{n^\alpha}$，$\alpha>1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^\alpha$ 收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

补 1、【学解】

【分析】幂级数展开有直接法与间接法，一般考查间接法展开，即通过适当的恒等变形、求导或积分等，转化为可利用已知幂级数展开的情形.本题可先求导，再利用函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 的幂级数展开

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 即可，然后取 x 为某特殊值，得所求级数的和.

因为 $f'(x)=-\dfrac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\dfrac{\pi}{4}-2\int_0^x[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}]dt$

$=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\dfrac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{2^{2n+1}}]=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$,

再由 $f(\dfrac{1}{2})=0$，得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

补 2、【学解】

解一：易求出级数的收敛域为 $(-\infty,\infty)$

$$原式=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})'=\frac{1}{2}(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1})'$$

$$=\frac{1}{2}(x\sin x)'=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

解二：先求出收敛域区间$(-\infty,\infty)$，设和函数为$S(x)$

$$则\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sin x$$

$$\therefore\ S(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

高数A 2016-2017学年第二学期期末考试A卷

一、填空题（每题3分，共15分）

1. 曲线$\begin{cases}y=ax,\\ z=x^2\end{cases}$在点$(1,a,1)$处的切线和直线$x=y=-z$垂直，则$a=$__________.

2. 已知$z=u^2v,u=x^2+y,v=x-y$，且在xOy面上有点$P_0(1,0)$和向量$\vec{l}=\{3,4\}$，则方向导数$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=$__________.

3. 设L为$y=\frac{1}{2}x^2$上介于$(-1,\frac{1}{2})$和$(1,\frac{1}{2})$的一段曲线，则$\int_L(x+3\sqrt{1+2y})ds=$__________.

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则$\iint\limits_{\Sigma}3x^2dS=$__________.

5. 设$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$为函数$f(x)=|x+1|,x\in(-\pi,\pi)$的傅里叶级数，则$s(-3)=$__________.

二、选择题（每题3分，共15分）

1. 已知$f(0,0)=0$，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处（　　）.

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在
（C）连续，偏导数存在，但是不可微　　（D）连续、偏导数存在，且可微

2. 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y'(x,y)\neq0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，如果$f_y'(x_0,y_0)=0$，则必有（　　）.

（A）$\varphi_x'(x_0,y_0)=0$　　（B）$\varphi_x'(x_0,y_0)\neq0$　　（C）$f_x'(x_0,y_0)=0$　　（D）$f_x'(x_0,y_0)\neq0$

3. 设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$，$I_1=\iint\limits_D x|y|dxdy$，$I_2=\iint\limits_D|xy|dxdy$，$I_3=\iint\limits_D\ln(1-|xy|)dxdy$，则$I_1,I_2$和$I_3$满足（　　）.

（A）$I_2<I_3<I_1$　　（B）$I_3<I_1<I_2$　　（C）$I_3<I_2<I_1$　　（D）$I_3<I_2<I_1$

4. 设$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le1,0\le y\le1,0\le z\le2\}$，则三重积分$\iiint_\Omega xydv=$（　　）.

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{1}{6}$

5.已知$|a_n| \le b_n, n=1,2,\cdots$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（　　）.

(A)　绝对收敛　　(B)　条件收敛　　(C)　发散　　(D)　敛散性不定

三、**（本题满分10分）** 设$z=z(x,y)$是由方程$x+y-z=e^z$所确定隐函数，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}$.

四、**（本题满分12分）** 求函数$f(x,y)=y^3-x^2+6x+12y+5$的极值.

五、**（本题满分12分）** 设函数$f(x,y)=\begin{cases} x^2 y, & 1 \le x \le 2, 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$计算二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$，其中$D=\{(x,y) | x^2+y^2 \ge 2x\}$.

六、**（本题满分12分）** 求曲面积分$I=\iint_\Sigma 4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中$\Sigma$为圆抛物面$z=(x^2+y^2)/2$（$0 \le z \le 2$），取下侧.

七、**（本题满分12分）** 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$的收敛域及和函数$s(x)$.

高数A 2016-2017学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题（每题3分，共15分）

1、【正解】1

【学解】曲线在点$(1，a，1)$处的切线的方向向量为$(1，a，2)$，

依题意$(1,1，-1)\cdot(1，a，2)=1+a-2=0，a=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 1.2——向量的线性运算

2、【正解】$\frac{19}{5}$

【学解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2uv\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial x}，\frac{\partial z}{\partial y}=2uv\frac{\partial u}{\partial y}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}，\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=5，\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=1$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=5\times\frac{3}{5}+1\times\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

3、【正解】8

【学解】$\int_L(x+3\sqrt{1+2y})ds=\int_{-1}^{1}(x+3\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+(x)^2}dx=\int_{-1}^{1}3(1+x^2)dx=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念与性质

4、【正解】4π

【学解】$\iint_\Sigma 3x^2dS=\iint_\Sigma 3y^2dS=\iint_\Sigma 3z^2dS=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_\Sigma dS=4\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——第一型曲面积分的计算方法

5、【正解】2

【学解】$s(-3)=f(-3)=|-3+1|=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.2——函数展开成傅里叶级数

二、选择题（每题3分，共15分）

1、【正解】D

【学解】$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x，y)-x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x，y)-f(0,0)}{x}-1\right)=f'_x(0,0)-1=0，f'_x(0,0)=1$

同理可得$f'_y(0,0)=1$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x，y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x，y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

所以可得$f(x，y)$可微，故$f(x，y)$可导且偏导数存在

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.3——可导、可微与连续的关系

2、【正解】C

【学解】构造关于$f(x，y)$的拉格朗日函数$L(x，y)=f(x，y)+\lambda\varphi(x，y)$

由于$\varphi'_y(x，y)\neq0$，而$(x_0，y_0)$为函数的一个极值点，故$\lambda=0$

所以有$f'_x(x_0，y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0，y_0)=f'_x(x_0，y_0)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.2——条件极值 拉格朗日乘数法

3、【正解】B

【学解】依题意D的图像关于x、y轴对称，故$I_1=0$，而$\ln(1-|xy|)<0，|xy|>0$

故$I_2>0,I_3<0，I_3<I_1<I_2$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 1.2——定积分的基础性质

4、【正解】A

【学解】原式$=\int_0^2dz\int_0^1xdx\int_0^1ydy=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 2.3——定积分的积分法则

5、【正解】A

【学解】依题意，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

三、（本题满分10分）

【学解】在方程两边关于x求偏导数得$1-\partial z/\partial x=e^z\partial z/\partial x$，(1)

当$(x,y)=(1,0)$时，$z=0$，代入上式，得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{2}$. 类似可得$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{2}$

在(1)式两边关于y求偏导数得$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，代入$x=1,y=0,z=0$，

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{2}$及$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{2}$，解得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\frac{1}{8}$.

或者：计算得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+e^z}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^z}{(1+e^z)^3}$，同理可得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\frac{1}{8}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

四、（本题满分 12 分）

【学解】令$\begin{cases} f_x'(x,y)=-2x+6=0, \\ f_y'(x,y)=3y^2-12=0, \end{cases}$得驻点$(3,2)$，$(3,-2)$．又

$$f''_{xx}(x,y)=-2,\quad f''_{xy}(x,y)=0,\quad f''_{yy}(x,y)=6y$$

在驻点$(3,2)$处，$A=f''_{xx}(3,2)=-2$，$B=f''_{xy}(3,2)=0$，$C=f''_{yy}(3,2)=12$，

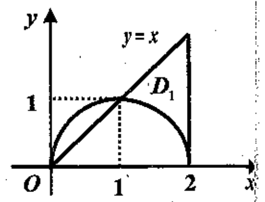
$AC-B^2=-24<0$，故$(3,2)$不是极值点；

在驻点$(3,-2)$处，$A=f''_{xx}(3,-2)=-2$，$B=f''_{xy}(3,-2)=0$，$C=f''_{yy}(3,-2)=-12$，

$AC-B^2=24>0$，且$A<0$，故$(3,-2)$是极大值点，且极大值为$f(3,-2)=-18$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及最大值、最小值

五、（本题满分 12 分）



【学解】记$D_1=\{(x,y)|1\le x\le 2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le x\}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}x^2ydxdy=\int_1^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}x^2ydy=\int_1^2(x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分的概念和性质

六、（本题满分 12 分）

【学解】补充曲面$\sum_1$：$z=2\ (x^2+y^2\le 4)$，取上侧.

设Ω为$\sum+\sum_1$所围成的立体区域，则Ω：$\frac{r^2}{2}\le z\le 2$，$0\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi$，由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(4z-2z)dv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2zdz=2\pi\int_0^2r(4-\frac{r^4}{4})dr=\frac{32\pi}{3};$$

$$\iint_{\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 4}(-3)dxdy=-12\pi$$

所以有：$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{32\pi}{3}-(-12\pi)=\frac{68}{3}\pi.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

七、（本题满分 12 分）

【学解】$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=1$，所以收敛半径为$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)x^n\ne 0$，所以原级数均发散，故收敛域为$(-1,1)$.

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$3\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n+1)}\right)'-\frac{21}{1-x}=3\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{2}{1-x}=\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}=\frac{1+2x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

高数A 2015-2016学年第二学期期末考试A卷

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 设函数$z=z(x,y)$由方程$x-e^{y}+\ln z=0$确定，则$dz\big|_{(1,0)}=$________.

2. 曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在$(1,1,1)$处的切线方程为________________.

3.设曲线L为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$,则曲线积分$\oint_L(3x^2+4xy+2y^2)ds=$____________.

4. 设Σ为半圆柱面$x^2+y^2=R^2(0\le z\le 1,x\ge 0)$，则曲面积$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=$______________.

5. 由曲线$\begin{cases}x^2+2y^2=3\\z=0\end{cases}$，绕$x$轴旋转一周得到的旋转曲面在点$(1,0,-1)$处的指向外侧的单位法向量为________________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1、设$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$则在原点$(0,0)$处$f(x,y)$（　　）.

A、不连续　　B、偏导数不存在

C、偏导数存在且连续　　D、偏导数不连续但可微

2、设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(1)=$（　　）.

A、0　　B、$f(1)$　　C、$-f(1)$　　D、$2f(1)$

3、设曲线L是圆周$(x-1)^2+y^2=R^2$沿逆时针方向一周，则曲线积分$\int_L\dfrac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=$（　　）.

A、0　　B、π　　C、2π　　D、-2π

4、若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数（　　）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛　　C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

5、设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0,\\ x-\pi, & 0\le x<\pi.\end{cases}$的傅立叶级数在$x=\pi$和$x=2\pi$处分别收敛于$a$和$b$，则(　　).

A、$a=\dfrac{\pi}{2},b=-\dfrac{\pi}{2}$　　B、$a=\dfrac{\pi^2}{2},b=2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}$

C、$a=-\dfrac{\pi}{2},b=\dfrac{\pi}{2}$　　D、$a=\dfrac{\pi^2}{2},b=-\dfrac{\pi}{2}$

三、（10分）设$z=f(x^2-y^2,xy)+g(x+2y)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$g(t)$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（10分）已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线$C:x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数.

五、（10分）计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

六、（11分）试确定可导函数$f(x)$，使在整个平面上，$yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$为某函数$u(x,y)$的全微分,其中$f(0)=0$，并求一个$u(x,y)$.

七、（12分）计算曲面积分$I=\iint\limits_\Sigma(x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

八、（12分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数$s(x)$，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$的和.

九、（5分）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)$（$k$为常数）绝对收敛.

高数 A 2015-2016 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、【正解】$dy-dx$

【学解】由原方程得$z\big|_{(1,0)}=1$，对x求导得$1+\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}=0\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}\Big|_{(1,0)}=-1$

对y求导得$-e^{y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dy}=0\Longrightarrow\dfrac{dz}{dy}\Big|_{(1,0)}=1$，因此$dz=dy-dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

2、【正解】$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

【学解】设$\begin{cases}F_1=x^2+y^2+z^2-3x\\F_2=2x-3y+5z-4\end{cases}$，根据隐函数曲面的切向量的方程可得

$$\begin{cases}(2x-3)+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0\\2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}，将x=y=z=1代入得$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9}{16},\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{16}$，因此切线方程为$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.1——空间直线的一般方程

3、【正解】$6a$

【学解】由$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1\Rightarrow3x^2+2y^2=6$，因此$\oint_L(3x^2+4xy+2y^2)ds=\oint_L6ds+\oint_L4xy\,ds$

由椭圆曲线的对称性可知$\oint_L4xy\,ds=0$，因此原式$=\oint_L6ds=6a$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念与性质

4、【正解】$2R^2$

【学解】因为$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dS=\iint\limits_{\Sigma}xdS+\iint\limits_{\Sigma}ydS$，由对称性知$\iint\limits_{\Sigma}ydS=0$，

$\Sigma:x=\sqrt{R^2-y^2},(y,z)\in D_{yz}:-R\le y\le R,0\le z\le1$，

并有$\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}},\dfrac{\partial x}{\partial z}=0$，所以$dS=\sqrt{1+(\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}})^2+0^2}dydz=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$

$\iint\limits_{\Sigma}xdS=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=R\iint\limits_{D_{yz}}dydz=2R^2$，所以$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dS=2R^2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

5、【正解】$\left\{\dfrac{1}{\sqrt5},0,-\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$

【学解】设曲面上的任意一点$M(x,y,z)$，易知是由曲线上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$绕x轴旋转得的，

因此有$y^2+z^2=y_0^2+z_0^2$，因为有$\begin{cases}x^2+2y_0^2=3\\z_0=0\end{cases}$，因此有$2(y^2+z^2)=3-x^2$

即$x^2+2y^2+2z^2=3$，令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2-3$

有$\vec{n}=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{(1,0,-1)}=(2x,4y,4z)\big|_{(1,0,-1)}=(2,0,-4)$

因此单位法向量为$\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt5},0,-\dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 5.2——旋转曲面

二、选择题

1、【正解】D

【学解】$f_x(0,0)=\lim\limits_{\triangle x\to0}\dfrac{(0+\triangle x)\cdot0\cdot\sin\dfrac{1}{\triangle x^2+0}-0}{\triangle x}=0$，同理$f_y(0,0)=0$

当$(x,y)\ne(0,0)$时，$f_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$

$f_y(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$

当(x,y)沿着直线$y=0$趋向$(0,0)$时

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\left(-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$不存在

同理$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f_y(x,y)$不存在，因此偏导数不连续

而因$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=0$，故$f(x,y)$在原点处可微

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.2——在一点连续，偏导数存在以及可微的相互关系

2、【正解】A

【学解】$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx$

因此$F'(1)=F'(t)\big|_{t=1}=(t-1)f(t)\big|_{t=1}=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——利用直角坐标系计算二重积分

3、【正解】C

【学解】记$P=\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},Q=\dfrac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-((x-1)^2+y^2)+2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{((x-1)^2+y^2)-2(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，在点$(1,0)$处$P,Q$不连续，因此选适当小的$r>0$作为积分区域内的圆周

得$\displaystyle\oint_L\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\oint_l\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1——格林公式

4、【正解】D

【学解】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——收敛级数的基本性质

5、【正解】D

【学解】因为$f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2,\lim\limits_{x\to\pi^-}=0$，因此$f(x)$在$x=\pi$处不连续

因此傅里叶级数

$$s(\pi)=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi^2+0}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$f(2\pi)=f(0),f(0^+)=-\pi,f(0^-)=0$

$s(2\pi)=\dfrac{f(2\pi+0)+f(2\pi-0)}{2}=\dfrac{-\pi}{2}$，因此选项$D$正确

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 6.1——周期为$2l$的傅里叶级数

三、【学解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'+g'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(-2yf_{21}''+xf_{22}'')+2g''$

$$=f_2'-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+2g''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

四、【学解】$f(x,y)$在任意一点处的最大方向导数为

$$|gradf|=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x+2y+x^2+y^2}.$$

下求$|gradf|^2=2+2x+2y+x^2+y^2$在曲线$C$上的条件最大值．构造拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=2+2x+2y+x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$.

令$\begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=2+2x+2\lambda x+\lambda y=0,\\ L_y'(x,y,\lambda)=2+2y+2\lambda y+\lambda x=0,\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+y^2+xy-3=0,\end{cases}$，解得驻点为$(1,1),(-1,-1),(-1,2),(2,-1)$.

计算得$|gradf|\big|_{(1,1)}=2\sqrt{2}$, $|gradf|\big|_{(-1,-1)}=0$, $|gradf|\big|_{(-1,2)}=|gradf|\big|_{(2,-1)}=3$，

故$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数为3.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

五、【学解】将D分成D_1,D_2两部分，其中

$D_1:0\le y\le x,0\le x\le 1$；　$D_2:0\le x\le y,0\le y\le 1$，

且D_1与D_2关于直线$y=x$对称.

在D_1上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{x^2}$；在$D_2$上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{y^2}$，因此，

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2} e^{y^2}dxdy\text{，}$$

又由轮换对称性可知 $\iint_{D_1} e^{x^2}dxdy=\iint_{D_2} e^{y^2}dxdy$，所以

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=2\iint_{D_1} e^{x^2}dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e-1\text{.}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 1.2——二重积分的性质

六、【学解】（Ⅰ）$P(x,y)=yf(x)$，$Q(x,y)=f(x)-x^2$，

因为 $yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，所以有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

即 $f'(x)-f(x)=2x$，

解得 $f(x)=e^{\int dx}[\int 2xe^{-\int dx}dx+C]=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2$，

又 $f(0)=0$，得 $C=2$，所以 $f(x)=2(e^x-x-1)$，

（Ⅱ）在平面上取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=\int_0^y(2e^x-2x-2-x^2)dy=(2e^x-x^2-2x-2)y\text{.}$$

或用凑微分法求 $u(x,y)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

七、【学解】添加平面：$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，则 Σ_1 与 Σ 构成封闭曲面，

设其所围成的区域为 Ω，$\Omega=\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\}$.

且 $\Sigma+\Sigma_1$ 取外侧，故由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)dzdx+(z^3+xy+1)dxdy=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4 d\rho=\frac{6}{5}\pi,$$

又 $\iint_{\Sigma_1}(x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)dzdx+(z^3+xy+1)dxdy$

$$=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(xy+1)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$$

所以 $I=(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})(x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)dzdx+(z^3+xy+1)dxdy=\dfrac{6}{5}\pi+\pi=\dfrac{11}{5}\pi$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

八、【学解】此级数为缺项幂级数，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+1)x^{2(n+1)}}{(2n+3)x^{2n}}\right|=x^2$，

由正项级数的比值审敛法知，当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，该幂级数绝对收敛；

当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}\ne 0$，该幂级数发散.所以该幂级数的收敛半径 $R=1$.

又 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$，发散，所以原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$，则 $x\ne 0$ 时，$(xs(x))'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$，

因此 $xs(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t^2}dt=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，

又 $x=0$ 时，$s(0)=1$，故 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, |x|<1, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$，此时级数即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^n}$，

而 $s(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$，

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.2——幂级数及其收敛性

九、【学解】考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$，$\because S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$ 收敛，

又 $\left|(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，故原级数绝对收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——正项级数及其审敛法

高数A 2015-2016学年第二学期期末考试B卷

1. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xy-z=2$ 确定，则 $dz=$ ________.

2. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上平行于平面 $2x+4y-z=10$ 的切平面方程为________.

3. 设 L 是上半圆周 $x^2+y^2=a^2\ (y\geq 0)$，则曲线积分 $\int_L \frac{x^3y^2+y}{x^2+y^2}ds=$________.

4. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在 $M(1,2,3)$ 点沿该点向径 $(\overrightarrow{OM})$ 方向的方向导数为________.

5. 若 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 为 $f(x)=x\ (x\in[0,\pi])$ 展开的余弦级数,则 $a_3=$________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1、设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，则下列结论正确的是（　　）.

A、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

B、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，且偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

C、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数都连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

D、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数连续

2、设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy=$（　　）.

A、$\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$　　B、$\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$

C、$\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$　　D、$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$

3、设 Ω 为上半球 $x^2+y^2+z^2\leq a^2,z\geq 0$，则三重积分 $\iiint_\Omega zdV=$（　　）.

A、0　　B、$\frac{1}{2}\pi a^4$　　C、πa^4　　D、$\frac{1}{4}\pi a^4$

4、设 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\leq z\leq 1)$ 的外侧，D_{xy} 是 xoy 平面上圆域 $x^2+y^2\leq 1$，则 $\iint_\Sigma zdydz$ 可化为二重积分（　　）

A、$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2xdxdy$　　B、$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-2x)dxdy$

C、$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2ydxdy$　　D、$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

5、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$（　　）.

A、绝对收敛　　B、条件收敛　　C、发散　　D、无法确定

三、（10分）设 $z=f((x-y)^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（10分）求 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在闭区域 D：$\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1$ 上的最大值和最小值

五、（10分）计算二重积分$\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$，其中$D$是由两个圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

六、（10分）计算曲线积分$\int_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$为$y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$上从$A(2,0)$到点$B(-2,0)$的一段曲线.

七、（12分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx-dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

八、（12分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及和函数，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$的和.

九、（6分）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}+1)$发散.

高数 A 2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷参考答案

一、填空题

1、【正解】$\dfrac{y}{1-e^z}dx+\dfrac{x}{1-e^z}dy$

【学解】$e^z\dfrac{dz}{dx}+y-\dfrac{dz}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y}{1-e^z}$，$e^z\dfrac{dz}{dy}+x-\dfrac{dz}{dy}=0\Rightarrow\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{x}{1-e^z}$

因此$dz=\dfrac{y}{1-e^z}dx+\dfrac{x}{1-e^z}dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

2、【正解】$2x+4y-z=5$

【学解】$z=x^2+y^2$的法向量为$(2x,2y,-1)$，$2x+4y-z=10$的法向量为$(2,4,-1)$

故只需要$2x=2,2y=4$，即此时$x=1,y=2,z=5$，故所求平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即：$2x+4y-z=5$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 3.2——平面的一般方程

3、【正解】 2

【学解】L为上半圆，故$y=\sqrt{a^2-x^2},ds=\sqrt{1+(y')^2}dx$，因此有

$$原式=\oint_L\frac{x^3(a^2-x^2)+\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}ds=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(x^3(a^2-x^2)+\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(x^3\sqrt{a^2-x^2}+1\right)dx=2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分

4、【正解】$\dfrac{22}{\sqrt{14}}$

【学解】

$u_x(1,2,3)=y+z|_{(1,2,3)}=5$

$u_y(1,2,3)=x+z|_{(1,2,3)}=4$，$\overrightarrow{OM}=(1,2,3)$，单位化得

$u_z(1,2,3)=y+x|_{(1,2,3)}=3$

$\vec{l}=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$，故方向导数为$\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1\cdot5+4\cdot2+3\cdot3)=\dfrac{22}{\sqrt{14}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

5、【正解】$-\dfrac{4}{9\pi}$

【学解】作偶延拓，则 $b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$

$$a_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos3xdx=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi}xd\sin3x=\frac{2}{3\pi}[(x\sin3x)|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin3xdx]$$

$$=\frac{2}{3\pi}[\frac{1}{3}\cos3x|_0^{\pi}]=-\frac{4}{9\pi}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.1——三角级数

二、选择题

1、【正解】C

【学解】二元函数的有关概念推导如图

沿任意方向导数均存在

⇑

有极限 ⇐ 连续 ⇐ 可微 ⇐ 偏导数连续，因此C选项正确

⇓

偏导数存在

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.2——在一点连续，偏导数存在，以及可微的相互关系

2、【正解】C

【学解】根据原函数的积分区域进行画图，可以得出积分区域是$0<y<1,\sqrt{y}<x<\sqrt{2-y^2}$

因此C选项正确

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——利用直角坐标系计算二重积分

3、【正解】D

【学解】

$$\iiint_{\Omega} z dv=\iiint_{\Omega} \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3\sin\varphi\cos\varphi d\rho=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\pi a$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分的计算方法

4、【正解】A

【学解】$z=x^2+y^2\quad 0\leqslant z\leqslant 1$，则$\Sigma$在$xoy$面上的投影为$x^2+y^2=1$，正好是$D_{xy}$

而$dz=2xdx$，因此$\iint_{\Sigma} zdydz=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2xdxdy$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

5、【正解】B

【学解】由于$\frac{\cos n}{n^2}<\frac{1}{n^2}$，$\because\frac{1}{n^2}$收敛，$\therefore\frac{\cos n}{n^2}$收敛

当$n\to\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\to 0$，且$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$单调递减，所以$(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$收敛

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$

当n为偶数时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，

$\because\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散，又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$收敛

因此当n为偶数时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|$发散

又因为子数列发散数列必发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|$发散

综上$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$条件收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2——绝对收敛与条件收敛

三、【学解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-y)f_1'+yf_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2(x-y)f_1'+yf_2')=-2f_1'+2(x-y)[-2(x-y)f_{11}''+xf_{12}'']+f_2'+y[2(y-x)f_{21}''+xf_{22}'']$$

$$=-2f_1'-4(x-y)^2f_{11}''+2(x-y)^2f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

四、【学解】在 D 的内部，

$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=-2y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$为驻点，且$f(0,0)=0$

在 D 的边界上，由

$\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y^2=1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow z=x^2-y^2=\frac{5x^2}{4}-1\quad(-2\leq x\leq 2)$

$\frac{dz}{dx}=\frac{5x}{2}=0\Rightarrow x=0$，此时，$y=\pm1$,，则有$f(0,\pm1)=-1$，$f(\pm2,0)=4$

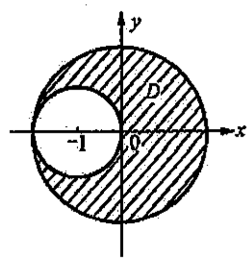
比较上述函数值知，函数$z=f(x,y)=x^2-y^2$在D上的最大值为 4,最小值为-1.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及其最大值，最小值

五、【学解】区域D关于x轴对称，如图$D_{大}:x^2+y^2\leq 4$，$D_{小}:(x+1)^2+y^2\leq 1$

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint_D yd\sigma=\iint_{D_{大}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint_{D_{小}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\cdot rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r\cdot rdr=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}$$



或 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_2+D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$

其中D_1 为D 在 x 轴上方部分，D_2，D_3分别为D_1在第一和第二象限部分

所以$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_2+D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2(\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma)$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r\cdot rdr+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r\cdot rdr=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}$$

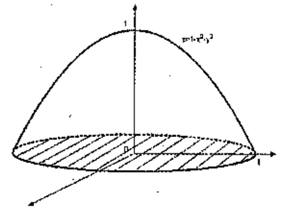
【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——利用极坐标计算二重积分

六、【学解】$P=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$，

曲线积分与路径无关，取路径 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的上半圆周 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$，$t$ 从 0 到 π，

$$\int_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{\pi}\frac{-4\sin^2 t-4\cos^2 t}{4}dt=-\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1——格林公式



七、【学解】用 Gauss 公式. 补平面 $\sum_1$: $z=0\ (x^2+y^2\le 1)$，取下侧

记 $V=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1,0\le z\le 1-r^2\right\}$，

$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$.

则 $I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)x^3dydz+y^3dzdx-dxdy=\iiint\limits_V(3x^2+3y^2)dV-\iint\limits_D dxdy$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}r^2\cdot rdz-\pi\ =6\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr-\pi=-\dfrac{\pi}{2}$.或用“合一投影法”计算.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 6.1——斯托克斯公式

八、【学解】级数的收敛域为 $(-1,1)$，设它的和函数为 $s(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

设 $s_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,x\in(-1,1)$，则有

$\int_0^x s_1(t)\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x},s_1(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，$x\in(-1,1)$,所以 $s(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$；

令 $x=\dfrac{1}{2}\in(-1,1)$ 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}=s(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{(1-\dfrac{1}{2})^2}=6$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 1.2——收敛级数的基本性质

九、【学解】因为 $\sin\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}+1=\sin\dfrac{1}{n}+2\sin^2\dfrac{1}{2n}$，

当 n 充分大时，有 $\sin\dfrac{1}{n}>0$，$\sin^2\dfrac{1}{2n}>0$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\dfrac{1}{2n}$ 为正项级数.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2\dfrac{1}{2n}}{(\dfrac{1}{2n})^2}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\dfrac{1}{2n}$ 收敛.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin^2\dfrac{1}{2n})$ 发散.从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}+1)$ 发散.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.1——三角级数