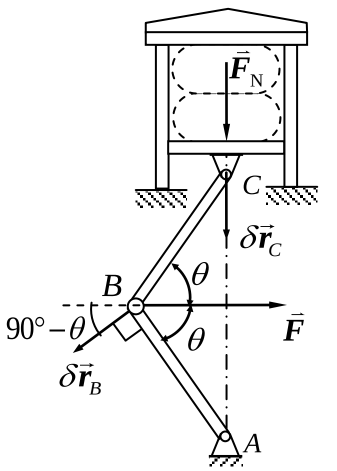
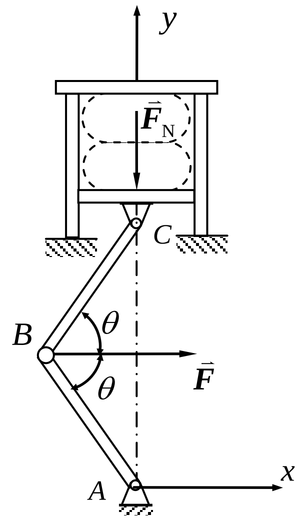
十四、虚位移原理

14.1 图示曲柄压榨机的销钉 B 上作用水平力 $\boldsymbol{F}$，此力位于 ABC 平面内，作用线平分 $\angle ABC$，$AB=BC$，$\angle ABC=2\theta$，各处摩擦及杆重不计，求压榨机对物体的压力。



(*a*)



(*b*)

[**解 1**] 几何法：研究系统，如图(*a*)，给虚位移 $\delta\vec{r}_B$、$\delta\vec{r}_C$，$\delta\vec{r}_B \perp AB$，$\delta\vec{r}_C$ 沿铅直方向，

由 $\left[\delta\vec{r}_B\right]_{BC}=\left[\delta\vec{r}_C\right]_{BC}$ 得 $\delta r_B\cos(2\theta-90°)=\delta r_C\cos(90°-\theta)$，

即 $\delta r_B\sin 2\theta=\delta r_C\sin\theta$

设物体对压板的压力为 $F_{\rm N}$，由虚功方程 $\sum\delta W_F=0$，$F_{\rm N}\delta r_C-F\delta r_B\sin\theta=0$

解得 $F_{\rm N}=\dfrac{1}{2}F\tan\theta$ 物体受的压力与 $F_{\rm N}$ 大小相等，方向相反。

[**解 2**] 解析法：设 $AB=BC=l$，取直角坐标系如图(*b*)，选 θ 为广义坐标，则

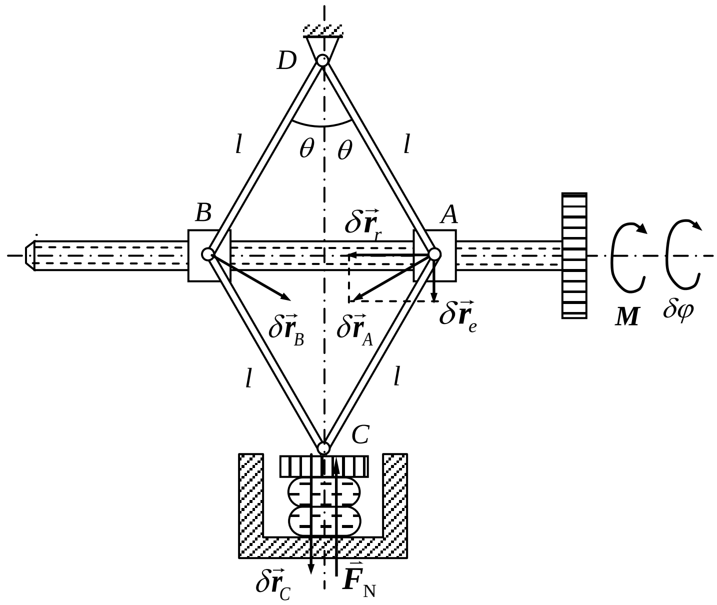
$x_B=-l\cos\theta$，$y_C=2l\sin\theta$，则 $\delta x_B=l\sin\theta\delta\theta$，$\delta y_C=2l\cos\theta\delta\theta$ 由

虚功方程 $\sum\delta W_F=\sum(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i)=0$ 有

$F\delta x_B+F_{\rm N}\delta y_C=0$ 即 $F(l\sin\theta\delta\theta)-F_{\rm N}(2l\cos\theta\delta\theta)=0$

解得 $F_{\rm N}=\dfrac{1}{2}F\tan\theta$ 物体受的压力与 $F_{\rm N}$ 大小相等，方向相反。

14.2 $\boxed{\textbf{14－2}}$　在压榨机的手轮上作用一力偶，其矩为 M。手轮轴的两端各有螺距同为 h，但方向相反的螺纹。螺纹上各有一个螺母 A 和 B，这两螺母各与长度相同的四杆相铰接，形成菱形框，其中 D 点不动，而 C 点连接在压榨机的水平压板上。求当菱形框的顶角为 2θ 瞬时，压缩机对被压物体的压力。



[**解**]设物体对压板的压力为 F_{N}，螺杆及 A、B、C 各点的虚位移如图，由对称性，有

$$\delta r_A = \delta r_B$$

取螺杆为动系，有 $\delta \vec{\mathbf{r}}_A = \delta \vec{\mathbf{r}}_e + \delta \vec{\mathbf{r}}_r$

故　$\delta r_A \cos\theta = \delta r_r = \dfrac{h}{2\pi}\delta\varphi$

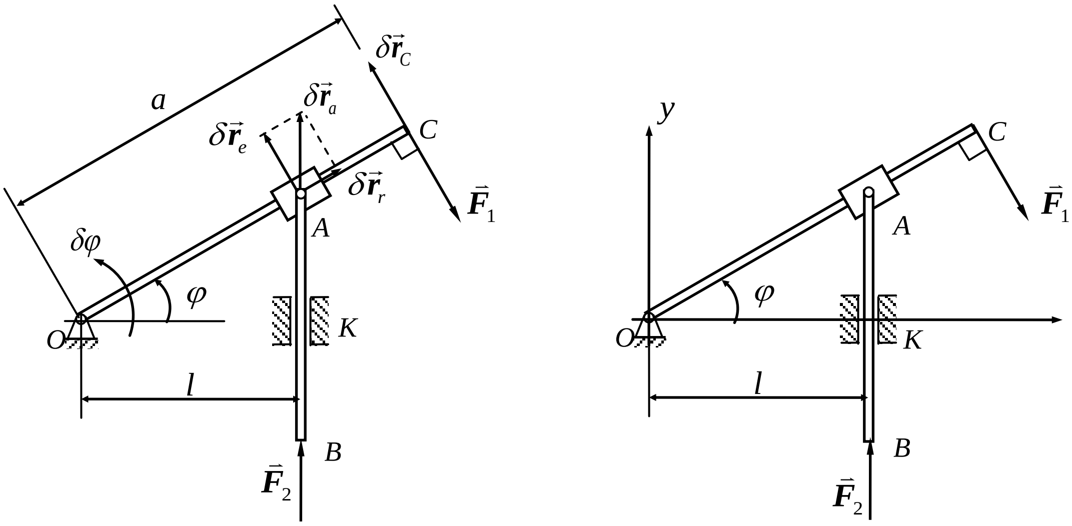
又 A、C 两点虚位移关系

$$\delta r_C \cos\theta = \delta r_A \sin 2\theta$$

由虚功方程　$M\delta\varphi - F_{\mathrm{N}}\delta r_C = 0$　与上式联立可解出

$F_{\mathrm{N}} = \dfrac{\pi M}{h}\cot\theta$　　物体受的压力与 F_{N} 大小相等，方向相反。

14.3 图示机构中，当曲柄 *OC* 绕 *O* 轴摆动时，滑块 *A* 沿曲柄滑动，从而带动杆 *AB* 在铅直槽 *K* 内移动。已知 *OC* = *a*，*OK* = *l*，力 $\vec{\boldsymbol{F}}_1 \perp OC$；力 $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ 沿铅直方向。求机构平衡时 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的关系。



(*a*) (*b*)

[**解 1**] 几何法：研究系统，如图(*a*)，*OC* 杆作定轴转动，给 *OC* 杆转角虚位移$\delta\varphi$，则 *C* 点虚位移为 $\delta r_C = a\delta\varphi$，

以 *A* 为动点，*OC* 杆为动系，如图，$\delta\vec{\boldsymbol{r}}_a = \delta\vec{\boldsymbol{r}}_e + \delta\vec{\boldsymbol{r}}_r$

式中 $\delta r_e = OA\cdot\delta\varphi = \dfrac{l}{\cos\varphi}\delta\varphi$ 则 $\delta r_a = \dfrac{\delta r_e}{\cos\varphi} = \dfrac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$

AB 杆作平动，*A*、*B* 两点的绝对虚位移相等，$\delta r_B = \delta r_a = \dfrac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$

由虚功方程$\sum\delta W_F = 0$，有 $F_2\delta r_B - F_1\delta r_C = 0$ $\quad F_2\cdot\dfrac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi - F_1\cdot a\delta\varphi = 0$

解得 $F_1 = \dfrac{F_2 l}{a\cos^2\varphi}$

[**解 2**] 解析法：取坐标系如图(*b*)，选φ为广义坐标，设 *AB* = *b*，则

$x_C = a\cos\varphi$， $y_C = a\sin\varphi$， $y_B = y_A - b = l\tan\varphi - b$ 则 $\delta x_C = -a\sin\varphi\delta\varphi$，

$\delta y_C = a\cos\varphi\delta\varphi$， $\delta y_B = \delta y_A = \dfrac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$

各主动力的投影为 $F_{1x} = F_1\sin\varphi, F_{1y} = -F_1\cos\varphi, F_{2y} = F_2$

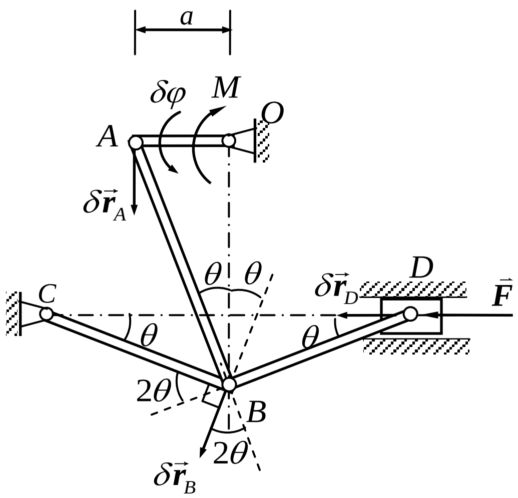
由虚功方程 $\sum\delta W_F = \sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i) = 0$ 有

$$F_{1x}\delta x_C + F_{1y}\delta y_C + F_{2y}\delta y_B = 0,$$

$$F_1\sin\varphi(-a\sin\varphi\delta\varphi) + (-F_1\cos\varphi)(a\cos\varphi\delta\varphi) + F_2\left(\frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi\right) = 0$$

解得 $\underline{F_1 = \dfrac{F_2 l}{a\cos^2\varphi}}$

14.4 图示机构中，曲柄 *OA* 上作用一力偶，其矩为 *M*，滑块 *D* 上作用水平力 *F*。已知 *OA*=*a*，*BC*=*BD*=*l*。求当机构在图示位置平衡时，力 *F* 与力偶矩 *M* 的关系。



[**解**] 研究整个系统，给 *OA* 杆的虚位移为 $\delta\varphi$ ，则 $\delta\vec{r}_A \perp OA, \delta\vec{r}_B \perp CB, \delta\vec{r}_D$ 沿水平方向，

且 $\delta r_A = a\delta\varphi$，

将 *A*、*B* 两点的虚位移向 *AB* 连线投影，有 $\delta r_B\cos 2\theta = \delta r_A\cos\theta$，

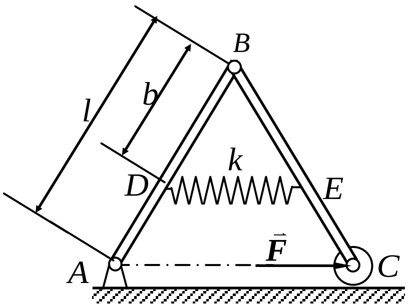
将 *D*、*B* 两点的虚位移向 *DB* 连线投影，有 $\delta r_B\sin 2\theta = \delta r_D\cos\theta$

得 $\delta r_D = a\tan 2\theta\delta\varphi$

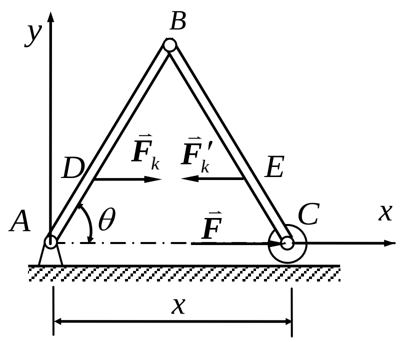
由虚功方程 $\sum\delta W_F = 0$，有 $-M\delta\varphi + F\delta r_D = 0$

所以 $\underline{M = Fa\tan 2\theta}$

14.5 如图所示，两等长杆 *AB* 与 *BC* 用铰链连接，且在 *D*、*E* 两点连一弹簧。弹簧刚性系数为 *k*，当 *AC* = *a* 时，弹簧拉力为零；设 *BC*=*BA*=l，*BE*=*BD*=*b*，系统在 **F** 作用下平衡，杆重不计；求平衡时，*AC* 长 x =?



(*a*)



(*b*)

[**解**] 解除弹簧约束,用弹性力代替,并建立直角坐标系如图。计算弹性力,设弹簧原长为 L_0，

当 $AC = a$ 时，有 $\dfrac{L_0}{a} = \dfrac{b}{l}$， $L_0 = \dfrac{b}{l}a$

同理可得变形后的弹簧长度为 $L = \dfrac{b}{l}x$，弹簧的变形量为 $L - L_0 = \dfrac{b}{l}(x-a)$，

则弹性力大小为 $F_k = F_k' = k(L - L_0) = k\dfrac{b}{l}\left(x-a\right)$

选 θ 角为广义坐标，并建立直角坐标系，各力作用点横向坐标及其变分为

$$x_D = \left(l-b\right)\cos\theta, \delta x_D = -\left(l-b\right)\sin\theta\delta\theta$$

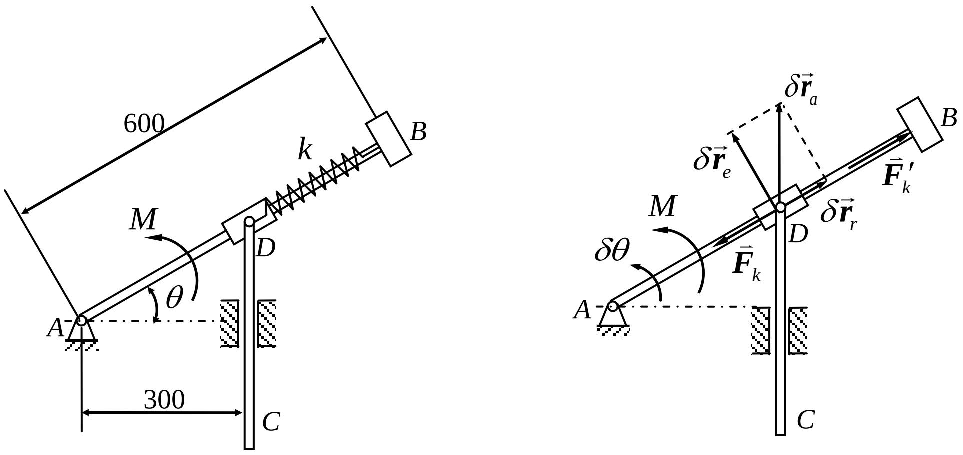
$$x_E = \left(l+b\right)\cos\theta, \delta x_E = -\left(l+b\right)\sin\theta\delta\theta$$

$$x_C = 2l\cos\theta, \delta x_C = -2l\sin\theta\delta\theta$$

由虚功方程 $\sum \delta W_F = \sum (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i) = 0$ 有 $F_k\delta x_D - F_k'\ \delta x_E + F\delta x_C = 0$

解得 $\underline{x = a + \dfrac{Fl^2}{kb^2}}$

14.6 $\boxed{\textbf{14 – 6}}$ 图示滑套 *D* 套在直杆 *AB* 上，并带动杆 *CD* 在铅直滑道上滑动。已知弹簧刚度系数 *k*=5kN/m，$\theta = 0°$ 时，弹簧为原长 300 mm；杆重不计，系统在图示位置平衡；求平衡时，力偶矩 M 。



(a) (b)

[**解**] 研究系统，解除弹簧约束，用弹性力$\vec{F}_k$、$\vec{F}_k'$代替，弹性力大小

$$F_k = F_k' = k\left[0.3 - \left(0.6 - \frac{0.3}{\cos\theta}\right)\right]$$

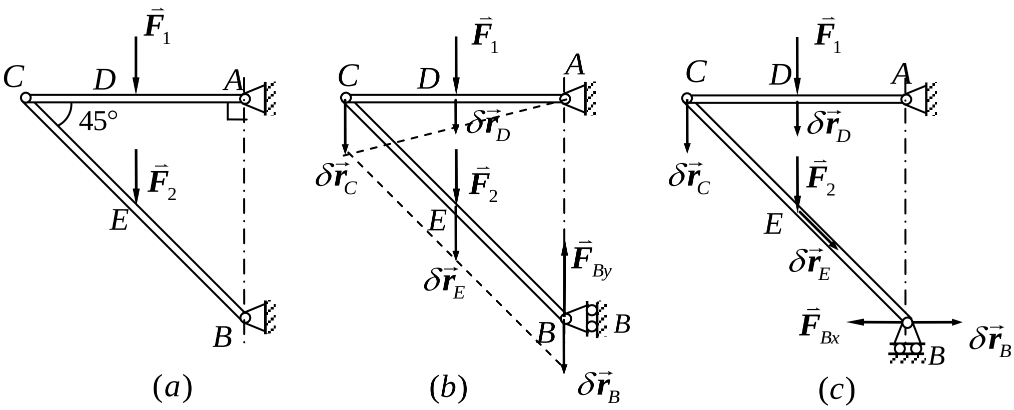
给 AB 杆转角虚位移$\delta\theta$，选 CD 杆的 D 点为动点，AB 杆为动系，虚位移如图（b），

由$\delta\vec{\mathbf{r}}_a = \delta\vec{\mathbf{r}}_e + \delta\vec{\mathbf{r}}_r$， 式中$\delta r_e = AD\cdot\delta\theta$，则$\delta r_r = \delta r_e \tan\theta = \dfrac{0.3}{\cos\theta}\cdot\tan\theta\delta\theta$，

由虚功方程$\sum\delta W_F = 0$，有$M\delta\theta - F_k\delta r_r = 0$，

解得平衡时，力偶矩 $\underline{M = 450\dfrac{1-\cos\theta}{\cos^3\theta}\sin\theta\ \ \mathrm{N\,m}}$

14.7 **14 – 7** 图示构架由均质杆 AC 和 BC 在 C 处铰接而成。已知杆重 $F_1 = 2\mathrm{kN}, F_2 = 4\mathrm{kN}$, 杆 AC=2m；用虚位移原理求支座 B 处的约束反力。



(a) (b) (c)

[**解**]（1）求支座 B 的铅垂方向反力$\vec{\boldsymbol{F}}_{By}$，如图（b）

解除支座 B 的铅垂方向约束，代之以反力$\vec{\boldsymbol{F}}_{By}$，

给虚位移 δr_B,则 BC 作平动，AC 作绕 A 的定轴转动，

各点的虚位移之间的关系为

$$\delta r_B = \delta r_E = \delta r_C = 2\delta r_D$$

由虚功方程：$F_1\delta r_D + F_2\delta r_E - F_{By}\delta r_B = 0$

代入数据及虚位移之间的关系，解得： $\underline{F_{By} = 5\ (\text{kN})}$

（2）求支座 B 的水平方向约束反力$\vec{\boldsymbol{F}}_{Bx}$，如图（c）

解除支座 B 的水平方向约束，代之以反力$\vec{\boldsymbol{F}}_{Bx}$，

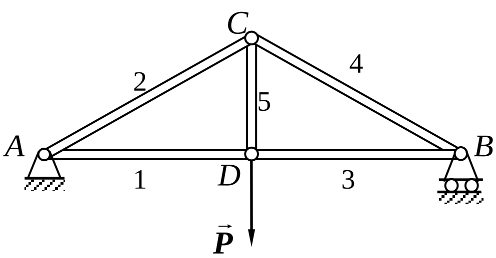
给虚位移δr_B,则 BC 作平面运动，瞬心为 A 点；AC 作绕 A 的定轴转动，
各点的虚位移之间的关系为

$$\delta r_B = \sqrt{2}\delta r_E = \delta r_C = 2\delta r_D$$

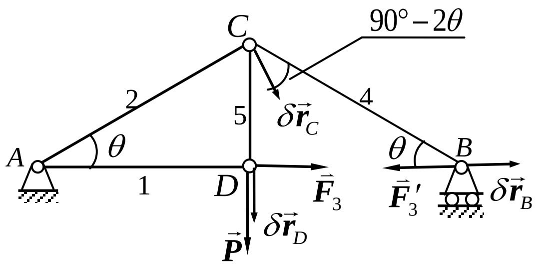
由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有 $F_1\delta r_D + F_2\cos 45°\delta r_E - F_{Bx}\delta r_B = 0$

代入数据及虚位移之间的关系，解得： $\underline{F_{Bx} = 3\,(\text{kN})}$

14.8 平面桁架如图，AD=DB=6m，CD=3m，节点 D 处作用载荷 $\boldsymbol{P}$。试用虚位移原理求图示桁架中杆 3 的内力。



(a)



(b)

[**解**] 研究整个桁架，解除杆 3 约束，代之以在节点 B、D 两处的拉力$\vec{\boldsymbol{F}}_3$ 和$\vec{\boldsymbol{F}}_3'$'。

给虚位移δr_B,则 BC 作平面运动；△ACD 作绕 A 的定轴转动。
各点的虚位移之间的关系为

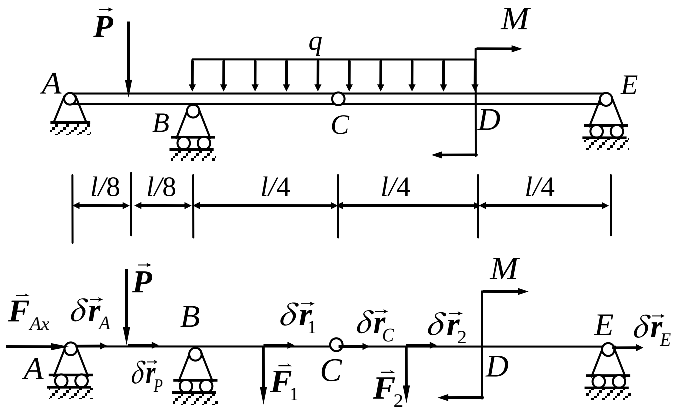
$$\delta r_B \cos\theta = \delta r_C \sin 2\theta \quad , \quad \delta r_C \cos\theta = \delta r_D$$

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有 $P\delta r_D - F_3'\delta r_B = 0$

解得：　　$\underline{F_3' = P}$

即：杆 3 的内力大小等于 P，为拉力。

14.9　　组合梁如图，已知$l = 8\mathrm{m}, P = 4900\mathrm{N}, q = 2450\mathrm{N/m}, M = 4900\mathrm{N\cdot m}$，试用虚位移原理求各支座反力。

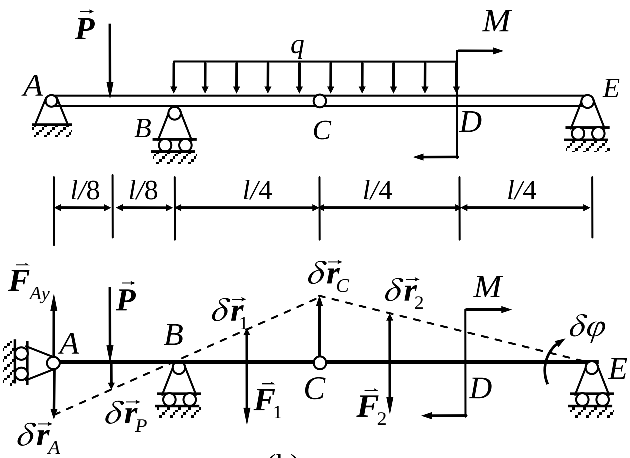


(a)

[**解**] 为求支座反力，依次解除相应约束，用约束力代替。图中 AC 段梁、CE 段梁上的均布载荷分别用合力$\vec{F}_1$用$\vec{F}_2$表示，且$F_1 = F_2 = \dfrac{1}{4}ql$

(1) 解除 A 支座 x 方向的约束，代之以$\vec{F}_{Ax}$ ，如图（a)，给 A 点虚位移δr_A，则根据约束特点，AC、CE 梁均作水平方向的平移，各点虚位移均相等。$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_P = \delta r_A$

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有 $F_{Ax}\delta r_A = 0$　解得　$\underline{F_{Ax} = 0}$



(b)

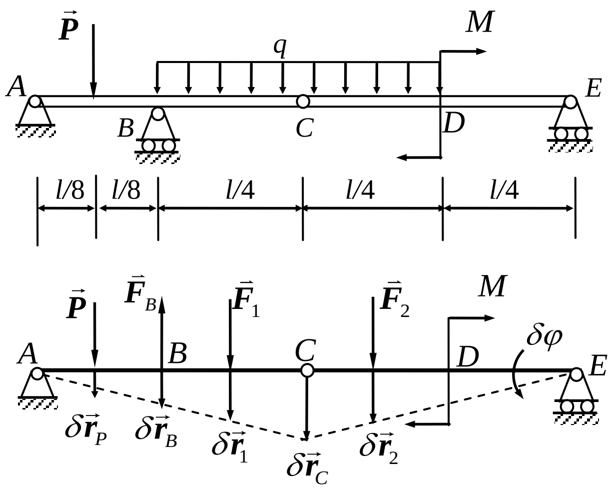
(2) 解除 A 支座 y 方向的约束，代之以$\vec{F}_{Ay}$ ，如图（b)，给 A 点虚位移δr_A，则根据几何关系得各点虚位移之间的关系

$$\delta r_P = \delta r_1 = \frac{1}{2}\delta r_A \ ,\ \delta r_C = \delta r_A,\ \delta\varphi = \frac{\delta r_C}{CE} = \frac{2\delta r_A}{l}\ \delta r_2 = \frac{3}{8} l\delta\varphi = \frac{3}{4}\delta r_A$$

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有 $-F_{Ay}\delta r_A + P\delta r_P - F_1\delta r_1 - F_2\delta r_2 + M\delta\varphi = 0$

$$-F_{Ay}\delta r_A + P\left(\frac{1}{2}\delta r_A\right) - \left(\frac{1}{4}ql\right)\left(\frac{1}{2}\delta r_A\right) - \left(\frac{1}{4}ql\right)\left(\frac{3}{4}\delta r_A\right) + M\left(\frac{2\delta r_A}{l}\right) = 0$$

代入数据解得　$F_{Ay} = -2450$ (



（c）

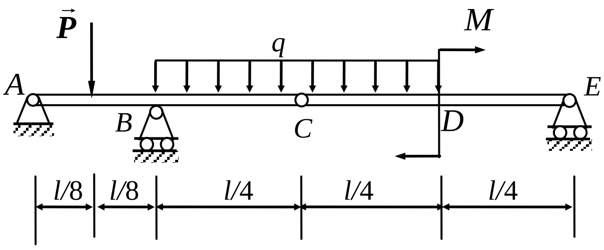
(3) 解除 B 支座，代之以$\vec{F}_B$，如图（c），则 AC 梁绕 A 作定轴转动，CE 梁绕 E 作定轴转动；给 CE 梁转角虚位移$\delta\varphi$，则各点虚位移之间的关系有

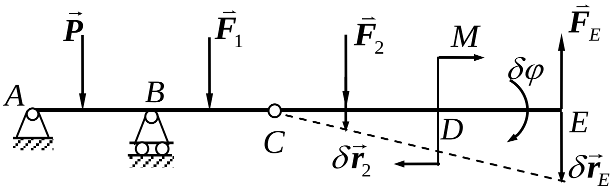
$$\delta r_2 = \frac{3}{8} l\delta\varphi,\ \delta r_C = \frac{1}{2} l\delta\varphi,\ \delta r_1 = \frac{3}{8} l\delta\varphi,\ \delta r_B = \frac{1}{4} l\delta\varphi,\ \delta r_P = \frac{1}{8} l\delta\varphi,$$

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有 $P\delta r_P - F_B\delta r_B + F_1\delta r_1 + F_2\delta r_2 - M\delta\varphi = 0$

$$P\left(\frac{1}{8}l\delta\varphi\right) - F_B\left(\frac{1}{4}l\delta\varphi\right) + \left(\frac{1}{4}ql\right)\left(\frac{3}{8}l\delta\varphi\right) + \left(\frac{1}{4}ql\right)\left(\frac{3}{8}l\delta\varphi\right) - M\delta\varphi = 0$$

代入数据解得　$F_B = 14700$ (





（d）

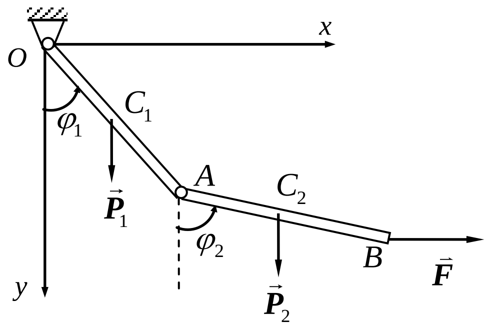
(4) 解除 E 支座，代之以 $\vec{F}_E$，如图（d），则 AC 梁被完全约束，不动，CE 梁绕 C 作定轴转动；给 CE 梁顺时针转角虚位移 $\delta\varphi$，则各点虚位移之间的关系有 $\delta r_2 = \frac{1}{8} l\delta\varphi, \delta r_E = \frac{1}{2} l\delta\varphi$

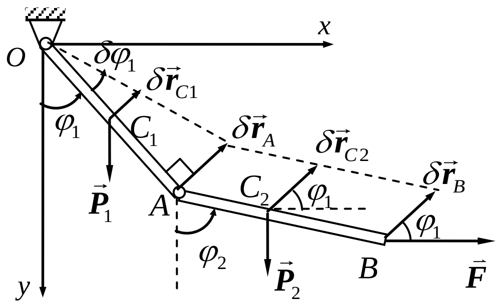
由虚功方程 $\sum \delta W_F = 0$，有 $F_2 \delta r_2 + M\delta\varphi - F_E \delta r_E = 0$,

$$\left(\frac{1}{4}ql\right)\left(\frac{1}{8}l\delta\varphi\right) + M\delta\varphi - F_E\left(\frac{1}{2}l\delta\varphi\right) = 0$$

代入数据解得 $\underline{F_E = 2450\ (}$

14.10 均质杆 $OA = 2l_1, AB = 2l_2$，OA 重 P_1，AB 重 P_2，两杆在 A 处铰接，OA 杆可绕水平轴 O 转动。在 B 端作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，系统平衡；求平衡时的角 φ_1, φ_2。





(a)

[**解 1**]几何法： 系统具有两个自由度，选 φ_1, φ_2 为广义坐标，

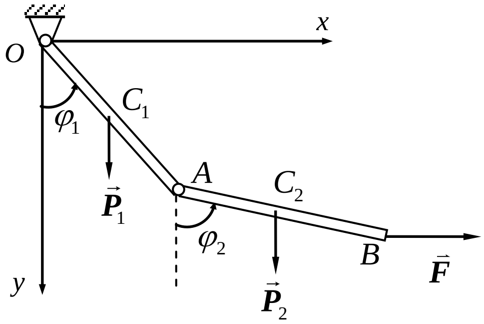
(1)如图（a），给 OA 杆转角虚位移 $\delta\varphi_1 \neq 0$，而令 AB 杆转角虚位移 $\delta\varphi_2 = 0$，即 AB 作平移，相应的虚位移 $\delta r_C = \frac{1}{2} l_1 \delta\varphi_1, \delta r_A = \delta r_{C2} = \delta r_B = 2\delta r_{C1} = l_1 \delta\varphi_1$

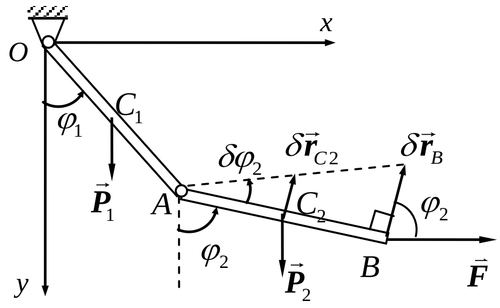
由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有

$$\vec{\boldsymbol{P}}_1 \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_{C_1} + \vec{\boldsymbol{P}}_2 \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_{C_2} + \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_B = 0$$

$$P_1\left(\frac{1}{2} l_1 \delta\varphi_1\right)\cos(90^\circ+\varphi_1) + P_2(l_1\delta\varphi_1)\cos(90^\circ+\varphi_1) + F(l_1\delta\varphi_1)\cos\varphi_1 = 0$$

解得 $\underline{\varphi_1 = \arctan\dfrac{2F}{P_1 + 2P_2}}$





(*b*)

(2)如图（*b*），令 *OA* 杆转角虚位移$\delta\varphi_1 = 0$，而令 *AB* 杆转角虚位移$\delta\varphi_2 \neq 0$，即 *OA* 杆不动，*AB* 绕 *A* 作定轴转动，相应的虚位移$\delta r_B = 2\delta r_{C2} = l_2\delta\varphi_2$,

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有$\vec{\boldsymbol{P}}_2 \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_{C2} + \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \delta \vec{\boldsymbol{r}}_B = 0$

$$P_2\left(\frac{1}{2} l_2 \delta\varphi_2\right)\cos(90^\circ+\varphi_2) + Fl_2\delta\varphi_2\cos\varphi_2 = 0$$

解得 $\underline{\varphi_2 = \arctan\dfrac{2F}{P_2}}$

[**解 2**]解析法： 系统具有两个自由度，选φ_1, φ_2为广义坐标，建立直角坐标系如图，则

$$y_{C1} = \frac{1}{2} l_1\cos\varphi_1,\ y_{C2} = l_1\cos\varphi_1 + \frac{1}{2} l_2\cos\varphi_2,\ x_B = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2,$$

求变分得$\delta y_{C1} = -\dfrac{1}{2} l_1 \sin\varphi_1\delta\varphi_1$，$\delta y_{C2} = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - \dfrac{1}{2} l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2$,

$$\delta x_B = l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2,$$

各主动力在坐标轴上的投影为$P_{1y} = P_1, P_{2y} = P_2$，$F_x = F$

由虚功方程$\sum\delta W_F=0$，有 $P_{1y}\delta y_{C1}+P_{2y}\delta y_{C2}+F_x\delta x_B=0$

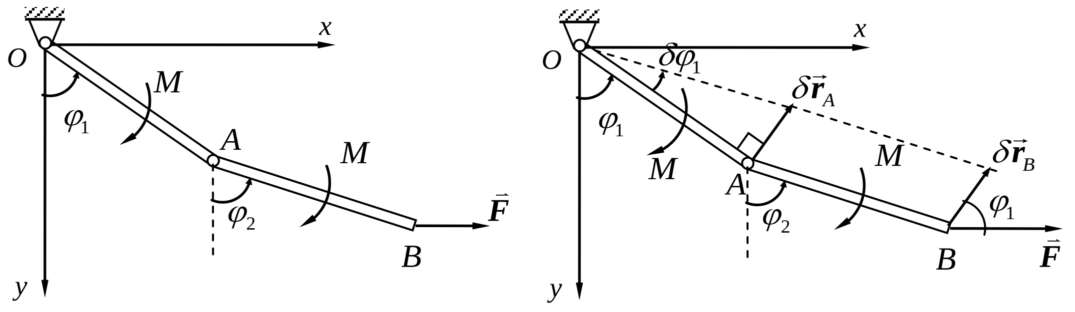
$$P_1\left(-\frac{1}{2}l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1\right)+P_2\left(-l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-\frac{1}{2}l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2\right)+F\left(l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2\right)=0$$

$$\left(Fl_1\cos\varphi_1-\frac{1}{2}P_1l_1\sin\varphi_1-P_2l_1\sin\varphi_1\right)\delta\varphi_1+\left(Fl_2\cos\varphi_2-\frac{1}{2}P_2l_2\sin\varphi_2\right)\delta\varphi_2=0$$

$$\because\delta\varphi_1\neq0,\delta\varphi_2\neq0,\therefore\begin{cases}Fl_1\cos\varphi_1-\dfrac{1}{2}P_1l_1\sin\varphi_1-P_2l_1\sin\varphi_1=0\\ Fl_2\cos\varphi_2-\dfrac{1}{2}P_2l_2\sin\varphi_2=0\end{cases}$$

解得 $\underline{\varphi_1=\arctan\dfrac{2F}{P_1+2P_2}}$ $\underline{\varphi_2=\arctan\dfrac{2F}{P_2}}$

14.11 图示二联杆机构中，$OA=AB=l$，自重不计，在杆件平面内作用有矩为 M 的力偶及水平力 ***F***；试确定机构平衡时φ_1、φ_2角。



(a)

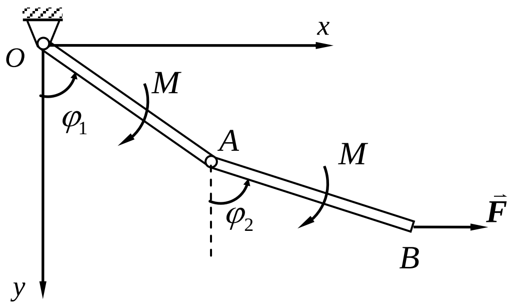
[**解 1**]几何法： 系统具有两个自由度，选φ_1,φ_2为广义坐标，

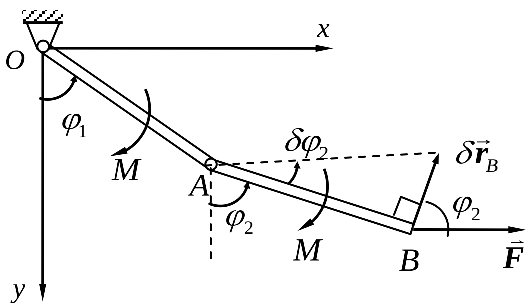
(1)如图（a），给 OA 杆转角虚位移$\delta\varphi_1\neq0$，而令 AB 杆转角虚位移$\delta\varphi_2=0$，即 AB 作平移，

相应的虚位移$\delta r_A=\delta r_B=l\delta\varphi_1$

由虚功方程$\sum\delta W_F=0$，有$-M\delta\varphi_1+F\delta\boldsymbol{r}_B\cos\varphi_1=0$

解得 $\underline{\varphi_1=\arccos\dfrac{M}{Fl}}$





(*b*)

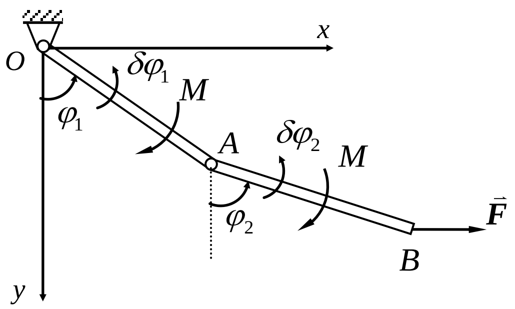
(2)如图（*b*），令 *OA* 杆转角虚位移$\delta\varphi_1 = 0$，而令 *AB* 杆转角虚位移$\delta\varphi_2 \neq 0$，即 *OA* 杆不动，*AB* 绕 *A* 作定轴转动，相应的虚位移$\delta r_B = l\delta\varphi_2$，

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有$-M\delta\varphi_2 + F\delta \boldsymbol{r}_B \cos\varphi_2 = 0$

$-M\delta\varphi_2 + Fl\delta\varphi_2 \cos\varphi_2 = 0$

解得 $\varphi_2 = \arccos\dfrac{M}{Fl}$

[**解 2**]解析法：系统具有两个自由度，选φ_1, φ_2为广义坐标，建立直角坐标系如图(*c*)，则



(*c*)

$x_B = l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$，$\delta x_B = l\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l\cos\varphi_2\delta\varphi_2$，

主动力在坐标轴上的投影为$F_x = F$

由虚功方程$\sum \delta W_F = 0$，有$F_x\delta x_B - M\delta\varphi_1 - M\delta\varphi_2 = 0$

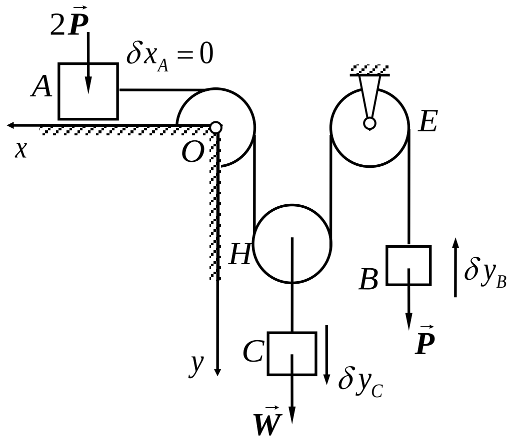
$$F(l\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l\cos\varphi_2\delta\varphi_2) - M\delta\varphi_1 - M\delta\varphi_2 = 0$$

$$(Fl\cos\varphi_1 - M)\delta\varphi_1 + (Fl\cos\varphi_2 - M)\delta\varphi_2 = 0$$

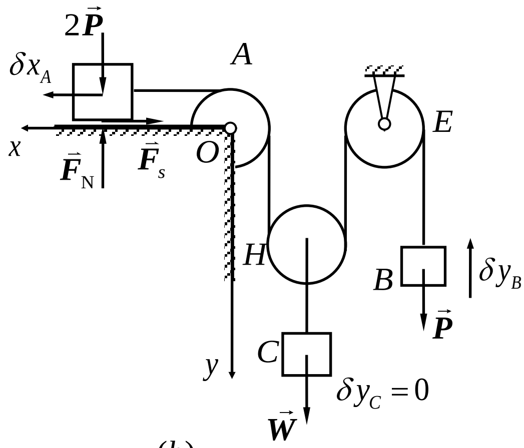
$$\because \delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_2 \neq 0, \therefore \begin{cases} Fl\cos\varphi_1 - M = 0 \\ Fl\cos\varphi_2 - M = 0 \end{cases}$$

解得 $\underline{\varphi_1 = \varphi_2 = \arccos\dfrac{M}{Fl}}$

14.12 重物 *A* 和重物 *B* 分别连接在细绳的两端，重物 *A* 放在粗糙的水平面上，重物 *B* 绕过滑轮 *E* 悬挂，动滑轮 *H* 中心挂重物 *C*。*A* 重 2*P*，*B* 重 *P*，滑轮重不计；试求图示机构平衡时，重物 *C* 的重量 *W*；物 *A* 与水平面的摩擦系数 *f*。



(*a*)



(*b*)

[**解**] 系统具有两个自由度，选 x_A, y_C 为广义坐标，

(1)令重物 *A* 的虚位移 $\delta x_A = 0$，而令重物 *C* 的虚位移 $\delta y_C \neq 0$，如图(*a*)，

即重物 *A* 不动，*B* 和 *C* 的虚位移有 $\delta y_B = 2\delta y_C$，

由虚功方程 $\sum \delta W_F = 0$，有 $W\delta y_C - P\delta y_B = 0$

解得 $\underline{W = 2P}$

(2) 令重物 *A* 的虚位移 $\delta x_A \neq 0$，而令重物 *C* 的虚位移 $\delta y_C = 0$，如图(*b*)，

即重物 *C* 不动，因绳长不变，所以 *A* 和 *B* 的虚位移有 $\delta x_A = \delta y_B$

摩擦力 $F_s = fF_N = 2fP$

由虚功方程 $\sum \delta W_F = 0$，有 $P \cdot \delta y_B - 2fP \cdot \delta x_A = 0$

解得 $\underline{f = 0.5}$