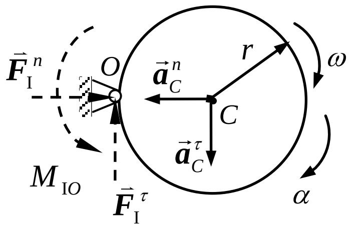
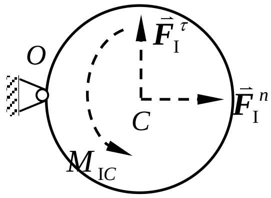
十三、达朗贝尔原理

13.1 求下列刚体惯性力系简化结果。

（*a*）质量为 m，半径为 r 的均质圆盘绕水平轴 O 作定轴转动，角速度为ω，角加速度为α，试求圆盘的惯性力系向转轴 O 简化的结果。（在图中画出主矢主矩的方向）



(a)



(a1)

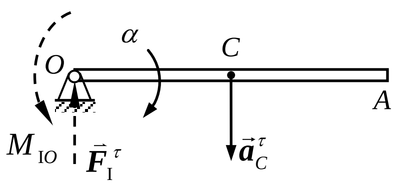
解：1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=mr\omega^2$, $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=mr\alpha$,

主矩 $M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha=\dfrac{3}{2}mr^2\alpha$，方向如图(a)；

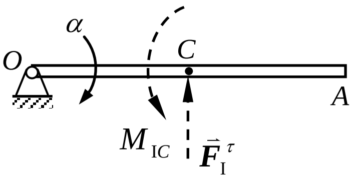
2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=mr\omega^2$, $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=mr\alpha$,

主矩 $M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\dfrac{1}{2}mr^2\alpha$，方向如图(a1)。

(*b*)均质杆 OA 质量为 m，长为 l，可绕 O 轴转动。图示瞬时，角速度为零，角加速度为α，试分别求该瞬时杆的惯性力系简化的结果（1）向转轴 O 简化；（2）向质心 C 简化。（在图中画出主矢主矩的方向）



(b)



(b1)

解：1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{1}{2}ml\alpha$,

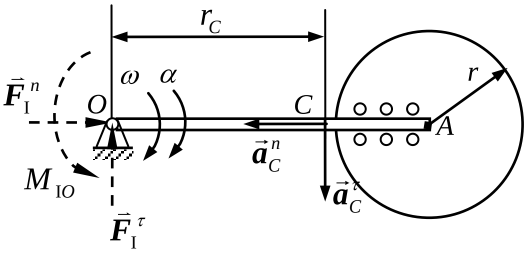
主矩 $M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha=\dfrac{1}{3}ml^2\alpha$，方向如图(b)；

2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{1}{2}ml\alpha$,

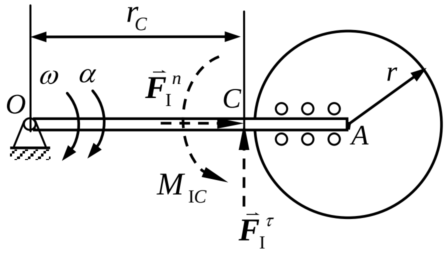
主矩 $M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha$，方向如图(b1)；

（*c*）质量为 m，长为 l 的均质杆杆端与质量为 m 、半径为 r 的均质圆盘中心固结，绕水平轴 O 的作定轴转动，角速度为ω ，角加速度为α，试求系统惯性力系简化的结果（在图

中画出主矢主矩的方向）



(c)



(c1)

解：系统质心位置 $r_C=\dfrac{m\dfrac{l}{2}+ml}{2m}=\dfrac{3}{4}l$，加速度为 $a_C^n=\dfrac{3}{4}l\omega^2, a_C^\tau=\dfrac{3}{4}l\alpha,$

1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_\mathrm{I}^\tau=ma_C^\tau=\dfrac{3}{4}ml\alpha$，$F_\mathrm{I}^n=ma_C^n=\dfrac{3}{4}ml\omega^2$，

主矩 $M_\mathrm{IO}=J_O\alpha=\left(\dfrac{1}{3}ml^2+\dfrac{1}{2}mr^2+ml^2\right)\alpha=\dfrac{1}{6}(8l^2+3r^2)\alpha$，方向如图(c)；

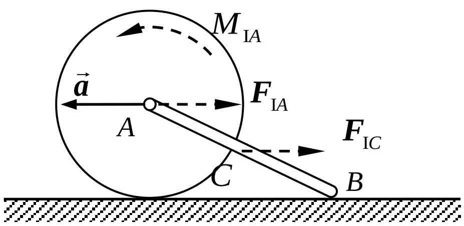
2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_\mathrm{I}^\tau=ma_C^\tau=\dfrac{3}{4}ml\alpha$，$F_\mathrm{I}^n=ma_C^n=\dfrac{3}{4}ml\omega^2$，

主矩

$$M_\mathrm{IC}=J_C\alpha=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{1}{4}l\right)^2+\frac{1}{2}mr^2+m\left(\frac{1}{4}l\right)^2\right]\alpha=\frac{1}{24}m(5l^2+12r^2)\alpha,$$

方向如图(c1)。

（d）图示均质圆轮质量为 m_1，半径为 r,；均质细长杆长 $l=2r$，质量为 m_2，杆端 A 与轮心光滑铰接，沿水平面作纯滚动，带动杆 AB 作平移。若已知轮心 A 的加速度为 a，试求系统惯性力系简化的结果，并画出惯性力系主矢和主矩的方向。



解：圆轮作平面运动，惯性力系向质心 A 简化，

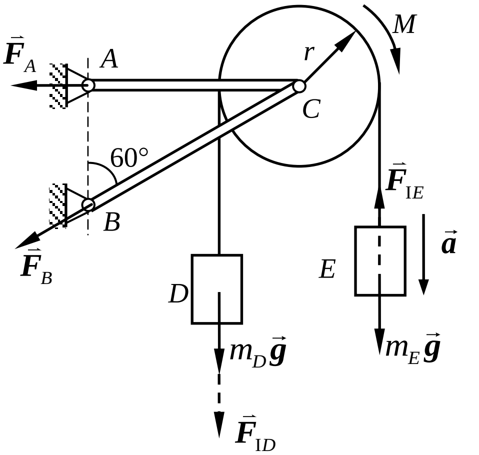
主矢 $F_\mathrm{IA}=ma$，主矩 $M_\mathrm{IA}=J_A\alpha=\dfrac{1}{2}mr^2\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{1}{2}mra$；

杆 AB 作平移，惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_\mathrm{I}=ma_C=ma$。

方向如图。

13.2 已知重物 D 和 E 质量分别为 $m_D=250\mathrm{kg}$，$m_E=60\mathrm{kg}$；力偶矩 M＝400Nm。滑轮

半径 $r = 20\text{cm}$，不计滑轮、杆 AC、杆 BC 以及钢丝绳的质量且钢丝绳不可伸长；求重物的加速度和支座 A 和 B 的约束反力。



[**解**] 分析可知 AC、BC 杆均为二力杆，所以支座 A 和 B 的约束反力分别沿杆的轴线方向。画系统的受力图，并虚加惯性力，设物块的加速度为 $\boldsymbol{a}$，则 $F_{\mathrm{IE}} = m_E a,\ F_{\mathrm{ID}} = m_D a$，由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_C(\vec{F}) = 0\text{，}\quad F_{\mathrm{ID}} r + m_D g r + F_{\mathrm{IE}} r - m_E g r - M = 0$$

即 $$(m_E + m_D)a + (m_D - m_E)g = \frac{M}{r}\text{，}\quad (250+60)a + (250-60)\times 9.8 = \frac{400}{0.2}$$

得重物的加速度 $a = 0.445(\mathrm{m/s^2})$

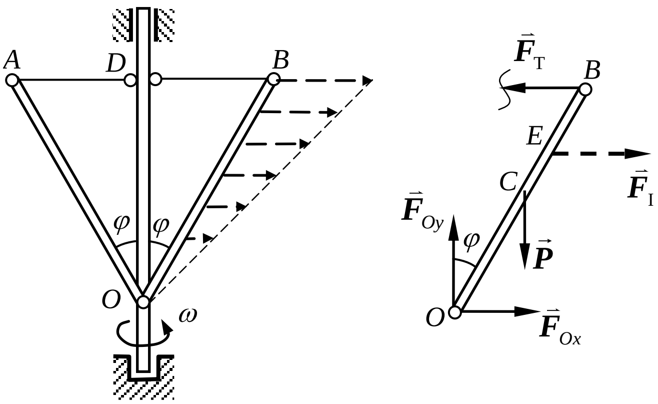
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_B\cos 60° + F_{\mathrm{ID}} - F_{\mathrm{IE}} + m_D g + m_E g = 0$$

$$F_B = -2(m_D - m_E)a - 2(m_D + m_E)g$$

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F_A - F_B \sin 60° = 0$$

代入数据得 A、B 的约束反力 $F_A = 5412(\mathrm{N})$ $F_B = -6249(\mathrm{N})$

13.3 已知均质杆 OA 与 OB 各长为 l，重均为 P，一端用铰链固定在铅垂轴上的 O 点，另一端用水平绳连在轴上的 D 处，杆与轴的夹角为 φ，令△AOB 随轴 OD 以匀角速度 ω 转动。求绳的拉力及铰链 O 对杆 OB 的约束反力。



[**解**]　OB 杆作定轴转动，其惯性力为沿杆方向线性分布，受力如图。线性分布的惯性力系的合力过 E 点，且 $BE=\dfrac{1}{3}OB=\dfrac{l}{3}$，$F_{\mathrm{I}}=ma_C=\dfrac{P}{g}\dfrac{l}{2}\sin\varphi\cdot\omega^2$ 。

$$\sum M_O(\vec{F})=0,\quad F_{\mathrm{T}}\cdot l\cos\varphi-F_{\mathrm{I}}\cdot\frac{2l}{3}\cos\varphi-P\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi=0$$

$$F_{\mathrm{T}}=(\frac{l\omega^2}{3g}\sin\varphi+\frac{1}{2}\tan\varphi)P$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}+F_{\mathrm{I}}-F_{\mathrm{T}}=0$$

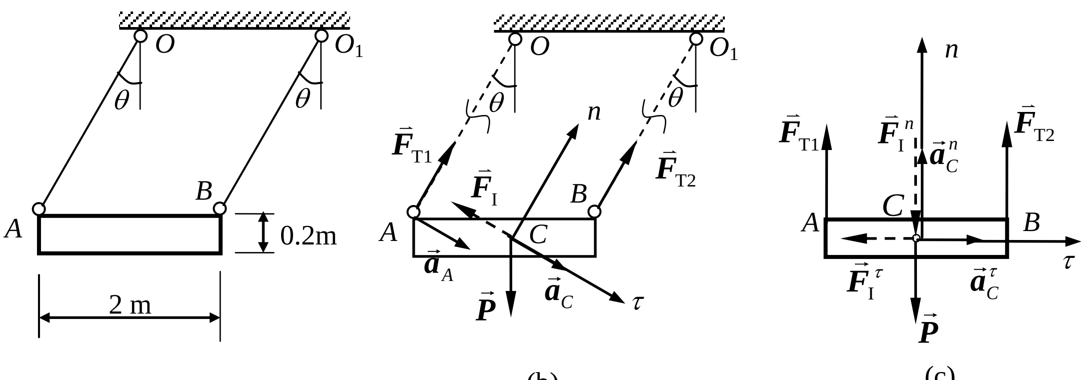
$$F_{Ox}=F_{\mathrm{T}}-F_{\mathrm{I}}=(\frac{1}{2}\tan\varphi-\frac{l\omega^2}{6g}\sin\varphi)P$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}-P=0$$

$$F_{Oy}=P$$

13.4　均质长方体浪木重为 P，悬挂在两根等长的软绳上，$OO_1=AB$，从 $\theta=30°$的位置无初速释放开始摆动；求在下面两个瞬时浪木的加速度和两绳的拉力：

(1)开始运动瞬时；(2)浪木通过最低位置瞬时。



(a)　(b)　(c)

[**解**]（1）初瞬时浪木受力如图(b)，

∵浪木平动且初瞬时各点速度 $v=0$，∴ $\vec{a}_C=\vec{a}_A\perp\overline{AO}$， $F_{\mathrm{I}}=\dfrac{P}{g}a_C$

$$\sum F_\tau=0,\quad P\sin\theta-F_{\mathrm{I}}=0,\quad a_C=\frac{1}{2}g$$

$$\sum F_n=0,\quad F_{\mathrm{T1}}+F_{\mathrm{T2}}-P\cos\theta=0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T1}}(1\cos30^\circ+0.1\sin30^\circ)+F_{\mathrm{T2}}(0.1\sin30^\circ-1\cos30^\circ)=0$$

联立求解得初瞬时浪木的加速度 $a_C=\dfrac{1}{2}g$；

两绳的拉力 $F_{\mathrm{T1}}=0.408P$； $F_{\mathrm{T2}}=0.458P$

（2）浪木于初始位置平移至最低位置过程，由动能定理得

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_C^2-0=Pl(1-\cos\theta)，得\quad v_C^2=2gl(1-\cos\theta)$$

最低位置处，受力如图(c)，

$$\sum F_\tau=0,\quad F_{\mathrm{I}}^\tau=0\quad 即\ \frac{P}{g}a_C^\tau=0\quad 得\quad a_C=a_C^n=\frac{v_C^2}{l}=2g(1-\cos\theta)$$

或 $a_C=(2-\sqrt{3})g$

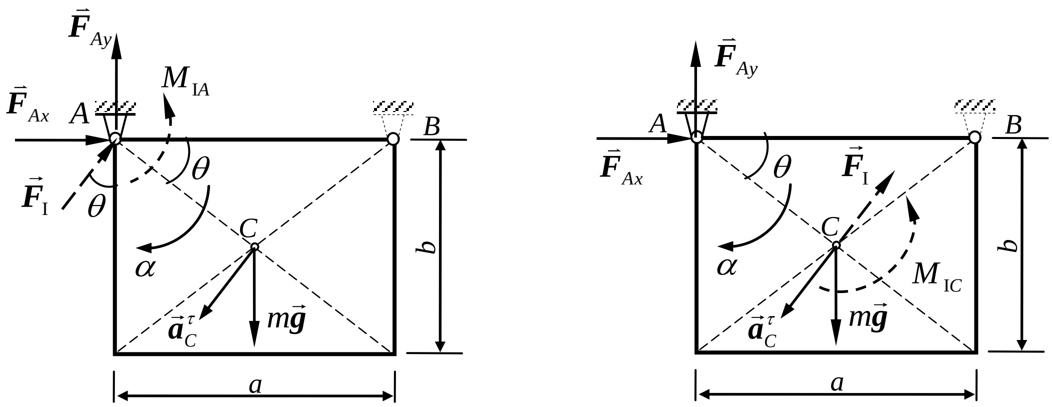
$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T1}}\cdot1-F_{\mathrm{T2}}\cdot1=0$$

$$\sum F_n=0,\quad F_{\mathrm{T1}}+F_{\mathrm{T2}}-F_{\mathrm{I}}^n-P=0$$

$$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=\frac{1}{2}(F_{\mathrm{I}}^n+P)=\frac{1}{2}(\frac{P}{g}a_C^n+P)$$

$$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=0.628P$$

13.5 图示长 a =20cm，宽 b =15cm 的均质矩形板质量为 27kg，由销 A、销 B 悬挂，如果突然撤去销 B，求该瞬时矩形板的角加速度和销 A 的约束反力。



(a) (b)

[**解 1**] 撤去销子的瞬时，$\omega=0$，矩形板将作定轴转动，$a_C^\tau=\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，惯性力系向转轴 A 简化 $\boldsymbol{F}_\mathrm{I}=\boldsymbol{F}_\mathrm{I}^\tau$ 即 $F_\mathrm{I}=ma_C^\tau=m\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$；

$$M_{\mathrm{I}A}=J_A\alpha=\left[\frac{1}{12}m(a^2+b^2)+m\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2\right]\alpha=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\alpha$$

矩形板受力如图(a)，图中 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_A(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\quad M_{\mathrm{I}A}-mg\cdot\frac{a}{2}=0,\quad mg\frac{a}{2}-\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\alpha=0$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_\mathrm{I}\sin\theta=0,\quad F_{Ax}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_\mathrm{I}\cos\theta-mg=0,\quad F_{Ay}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-mg=0$$

解得　$\alpha=\dfrac{3ga}{2(a^2+b^2)}$，　$F_{Ax}=-m\alpha\dfrac{b}{2}$，$F_{Ay}=mg-m\alpha\dfrac{a}{2}$

代入数据得矩形板的角加速度 $\alpha=47.07\mathrm{rad/s^2}$

销 A 的约束反力 $F_{Ax}=-95.32\mathrm{N}$　$F_{Ay}=137.67\mathrm{N}$

[**解 2**] 撤去销子的瞬时，$\omega=0$，矩形板将作定轴转动，$a_C^\tau=\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，惯性力系向质心简化 $\boldsymbol{F}_\mathrm{I}=\boldsymbol{F}_\mathrm{I}^\tau$ 即　$F_\mathrm{I}=ma_C^\tau=m\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$；　$M_{\mathrm{I}C}=J_C\alpha=\dfrac{1}{12}m(a^2+b^2)\alpha$

矩形板受力如图(b)，图中 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_A(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\quad -mg\frac{a}{2}+M_{\mathrm{I}C}+F_\mathrm{I}\cdot AC=0,$$

$$mg\frac{a}{2}-\frac{1}{12}m(a^2+b^2)\alpha-m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=0$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_\mathrm{I}\sin\theta=0\quad,\quad F_{Ax}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

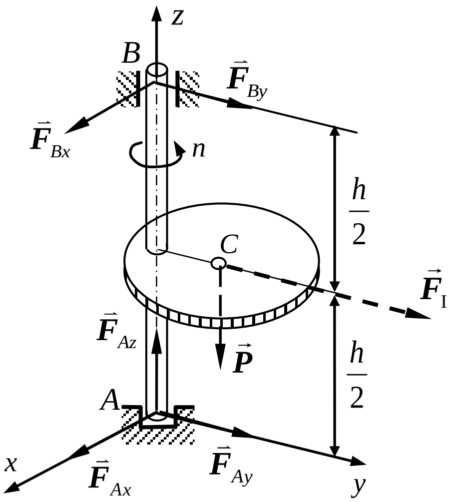
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_{Ay} + F_{\mathrm{I}}\cos\theta - mg = 0\text{，}\quad F_{Ay} + m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - mg = 0$$

解得 $\alpha = \dfrac{3ga}{2(a^2+b^2)}$， $F_{Ax} = -m\alpha\dfrac{b}{2}$， $F_{Ay} = mg - m\alpha\dfrac{a}{2}$

代入数据得矩形板的角加速度 $\alpha = 47.07\,\mathrm{rad/s}^2$

销 A 的约束反力 $F_{Ax} = -95.32\,\mathrm{N}$　$F_{Ay} = 137.67\,\mathrm{N}$

13.6　图示涡轮机的转盘重 P＝2kN，重心 C 到转轴 z 的距离 e＝0.5mm（图中已夸大），转轴 z 垂直于转盘的对称面，盘匀速转动，转速 n＝6000 rpm，AB＝h＝1000mm；求当转盘转到重心 C 位于 yz 平面的瞬时，止推轴承 A 和向心轴承 B 的静反力和附加动反力。



[**解**] 转盘作匀速定轴转动，角速度 $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{6000\pi}{30} = 628\,(\mathrm{rad/s})$，

惯性力系简化为合力 $F_{\mathrm{I}} = \dfrac{P}{g}e\omega^2 = \dfrac{2}{9.8}\times 0.0005\times 628^2 = 40.2\,(\mathrm{kN})$

转盘受力如图，由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_y(\vec{F}) = 0\text{，}\quad F_{Bx}h = 0 \qquad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}) = 0\text{，}\quad F_{By}h + Pe + F_{\mathrm{I}}\frac{h}{2} = 0\text{，}$$

$$F_{By} = \frac{-e}{h}P - \frac{1}{2}F_{\mathrm{I}}$$

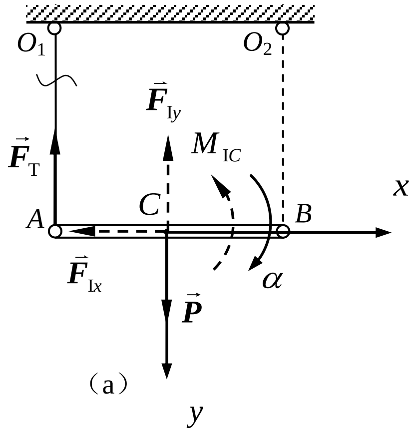
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_{Ay} + F_{By} = 0 \qquad F_{Ay} = \frac{e}{h}P + \frac{1}{2}F_{\mathrm{I}}$$

$$\sum F_z = 0\text{，}\quad F_{Az} - P = 0 \qquad F_{Az} = P$$

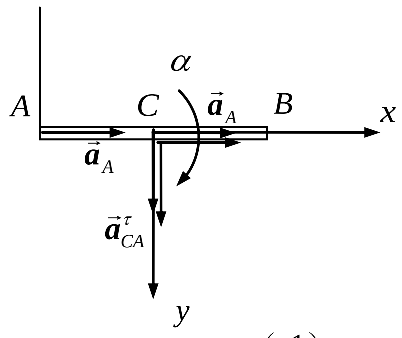
最后得 静反力 $F'_{Ay} = -F'_{By} = \frac{e}{g} P = 1\,(\mathrm{kN})$，$F'_{Az} = P = 2\,(\mathrm{kN})$

动反力 $F''_{Ay} = -F''_{By} = \frac{h}{2} F_{\mathrm{I}} = 20.1\,(\mathrm{kN})$

13.7 已知均质杆 AB 重为 P，以两根与之等长的绳子悬挂在水平位置；求 B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力。



（a）



（a1）

[**解**]（1）在 B 端绳子突然断开瞬时，杆的角速度及杆上各点的速度均为零，A 点轨迹为以 O_1 为圆心、绳长为半径的圆周，则 $\vec{\boldsymbol{a}}_A \perp O_1A$

杆将作平面运动，由基点法 $\vec{\boldsymbol{a}}_C = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{CA}^n + \vec{\boldsymbol{a}}_{CA}^\tau$ ，$\boldsymbol{a}_{CA}^n = 0, \boldsymbol{a}_{CA}^\tau = \dfrac{1}{2}l\alpha$ ，

$\boldsymbol{a}_{Cx} = \boldsymbol{a}_A$ ，$\boldsymbol{a}_{Cy} = \boldsymbol{a}_{CA}^\tau = \dfrac{l}{2}\alpha$

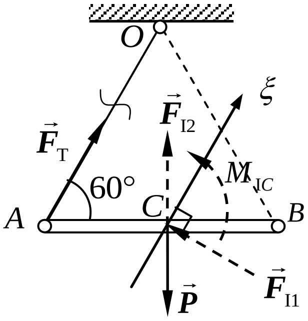
运动分析如图(a1)，受力分析如图(a)，（设杆长为 l，此瞬时杆的角加速度为α，）虚加惯性力系 $M_{\mathrm{IC}} = J_C\alpha = \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha$ ；$F_{\mathrm{I}x} = ma_{Cx} = \dfrac{P}{g}a_A$，$F_{\mathrm{I}y} = ma_{Cy} = \dfrac{P}{g}\dfrac{l}{2}\alpha$

由达朗贝尔原理，得

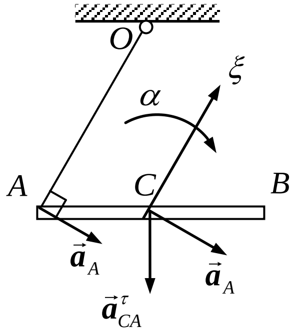
$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \quad F_{\mathrm{I}x} = 0 \\ \sum F_y = 0, \quad P - F_{\mathrm{T}} - F_{\mathrm{I}y} = 0 \\ \sum M_C(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0, F_{\mathrm{T}}\dfrac{l}{2} - M_{\mathrm{IC}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{P}{g}a_A = 0 \\ P - F_{\mathrm{T}} - \dfrac{Pl}{2g}\alpha = 0 \\ F_{\mathrm{T}}\dfrac{l}{2} - \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha = 0 \end{cases} \text{，解得} \begin{cases} a_A = 0 \\ \alpha = \dfrac{3g}{2l} \\ F_{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{4}P \end{cases}$$

即：B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力 $F_{\mathrm{T}} = \dfrac{P}{4}$

（2）



（b）



（b1）

在 B 端绳子突然断开瞬时，杆的角速度及杆上各点的速度均为零，A 点轨迹为以 O 为圆心、绳长为半径的圆周，则 $\vec{a}_A \perp OA$，杆将作平面运动，

由基点法 $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau$ ， $a_{CA}^n = 0, a_{CA}^\tau = \dfrac{1}{2} l\alpha$ ，　$\therefore \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^\tau$ ，

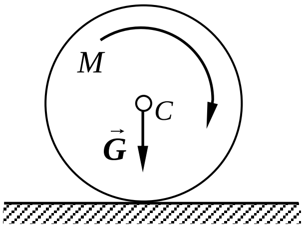
惯性力系主矢分量 $F_{I1} = ma_A = \dfrac{P}{g} a_A, F_{I2} = ma_{CA}^\tau = \dfrac{Pl}{2g}\alpha$ ，主矩 $M_{IC} = \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha$ ，

方向如图。由达朗贝尔原理，得

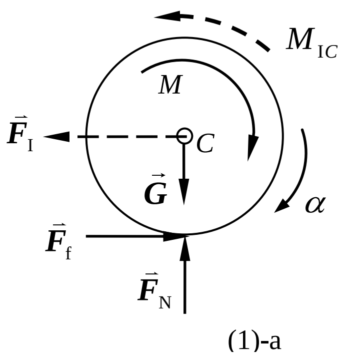
$$\begin{cases} \sum F_\xi = 0, \quad F_T + F_{I2}\sin 60° - P\sin 60° = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0, F_T \dfrac{l}{2}\sin 60° - M_{IC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_T + \dfrac{1}{2} ml\alpha \sin 60° - P\sin 60° = 0 \\ F_T \dfrac{l}{2}\sin 60° - \dfrac{1}{12} ml^2\alpha = 0 \end{cases},$$

解得 $\alpha = \dfrac{18}{13}\dfrac{g}{l}$ 　，B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力为 $F_T = \dfrac{2\sqrt{3}}{13} P$

13.8　已知圆轮重 G、半径为 R，沿水平面纯滚。若不计滚阻：试问在下列两种情况下，轮心的加速度及接触面的摩擦力是否相等： (1)在轮上作用一矩为 M 的顺钟向力偶；(2)在轮心上作用一水平向右、大小为 M/R 的力 P。



(1)



(1)-a

[**解**]　（1）轮作纯滚动，设轮心加速度为 a，　角加速度为 α，则 $a = R\alpha$，

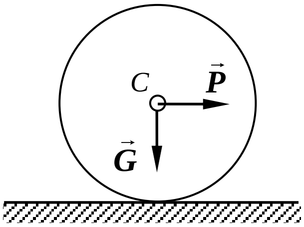
轮受力如图，惯性力系主矢 $F_I = \dfrac{G}{g} a$ ，主矩 $M_{IC} = J_C\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g} R^2\alpha = \dfrac{GR}{2g} a$

由达朗贝尔原理，得

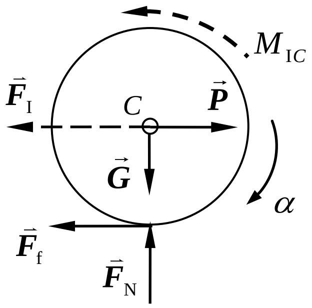
$\sum M_C(\vec{F})=0$， $M-M_{IC}-F_f R=0$

$\sum F_x=0$， $F_f-F_I=0$

联立解得 $a=\dfrac{2Mg}{3GR}$， $F_f=\dfrac{2M}{3R}$



(2)



(2)-a

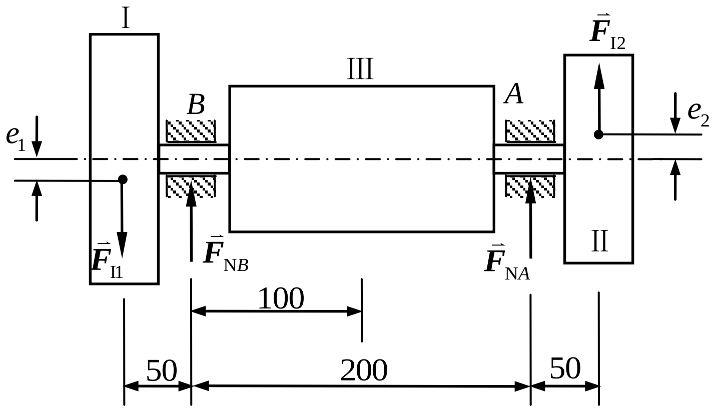
（2）$\sum F_x=0$， $P-F_I-F_f=0$　　而　$P=M/R$

$\sum M_C(\vec{F})=0$， $M_{IC}-F_f R=0$

联立解得 $a=\dfrac{2Mg}{3GR}$， $F_f=\dfrac{M}{3R}$

可见，(1)、(2)两种情况下，轮心加速度相等，而接触面的摩擦力不相等。

13.9　已知砂轮 I 质量 m_1=1kg，偏心距 e_1=0.5mm，砂轮 II 质量 m_2=0.5kg，偏心距 e_2=1mm。电动转子 III 质量 m_3=8kg，转速 n=3000r/min。求转动时轴承 A、B 的附加动反力。



[**解**]砂轮角速度 $\omega=\dfrac{2\pi n}{60}=\dfrac{2\pi\times3000}{60}=100\pi$ (rad/s)

砂轮 I、II 的惯性力分别为

$$F_{I1}=m_1e_1\omega^2=1\times0.5\times10^{-3}\times(100\pi)^2=5\pi^2\ \text{(N)},$$

$$F_{I2}=m_2e_2\omega^2=0.5\times1\times10^{-3}\times(100\pi)^2=5\pi^2\ \text{(N)}$$

当只求动反力时，受力图中重力可不考虑，由达朗贝尔原理

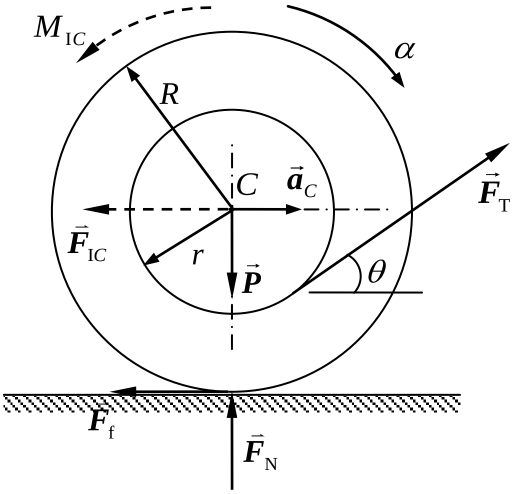
$$\sum M_A\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad -200F_{NB}+250F_{I1}+50F_{I2}=0$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad 200F_{NA}+250F_{I2}+50F_{I1}=0$$

解出附加动反力 $F_{NB}=-F_{NA}=73.5\,(\mathrm{N})$

即：转动时轴承 A 处的附加动反力为 73.5N，方向与图示相反；B 处的附加动反力为 73.5N，方向与图示相同。

13.10 图示绕线轮重 P，半径为 R 及 r，对水平质心 C 的转动惯量为 J_C，在与水平成 θ 角的常力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 作用下纯滚动。试求（1）轮心加速度；（2）绕线轮作纯滚动的条件。



[解]研究绕线轮，受力如图，惯性力系主矢 $F_{IC}=\dfrac{P}{g}a_C$，主矩 $M_{IC}=J_C\alpha$

绕线轮纯滚动时有 $a_C=R\alpha$ ，由达朗贝尔原理，

$$\sum F_x=0\,,\quad F_T\cos\theta-F_{IC}-F_f=0$$

$$\sum F_y=0\,,\quad F_N+F_T\sin\theta-P=0$$

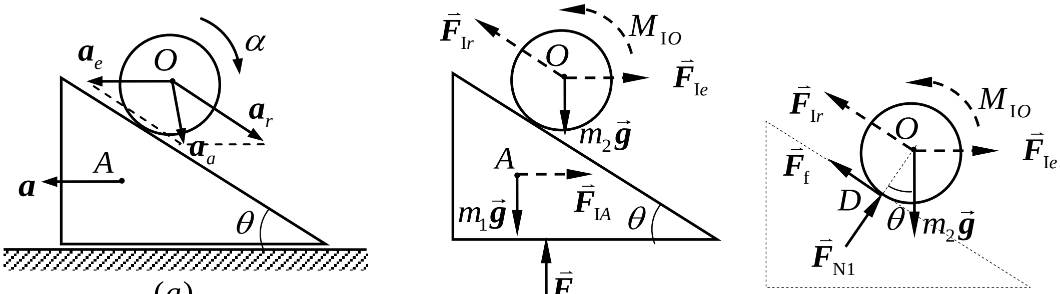
$$\sum M_C\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad F_T r-F_f R+M_{IC}=0$$

联立解得 $a_C=\dfrac{F_T R(R\cos\theta-r)}{J_C+\dfrac{P}{g}R^2}$；$F_f=\dfrac{F_T(\dfrac{P}{g}Rr+J_C\cos\theta)}{J_C+\dfrac{P}{g}R^2}$

及 $F_N=P-F_T\sin\theta$，再将 F_N、F_f 代入 $F_f\le fF_N$

得绕线轮作纯滚动的条件为 $f\ge\dfrac{F_T(\dfrac{P}{g}Rr+J_C\cos\theta)}{(P-F_T\sin\theta)(J_C+\dfrac{P}{g}R^2)}g$ ）

13.11 如图所示，质量为 m_1 、倾角为 θ 的三棱柱与水平面的摩擦不计；质量为 m_2 、半径为 r 的均质圆柱沿三棱柱斜面向下作纯滚动，求三棱柱的加速度及圆柱中心相对于三棱柱的加速度。



(a) (b) (c)

[**解**] 取圆柱中心为动点，三棱柱为动系，由加速度合成定理 $\vec{\boldsymbol{a}}_a = \vec{\boldsymbol{a}}_e + \vec{\boldsymbol{a}}_r$

式中 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_O$ 为圆柱中心的加速度，$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}$ 为三棱柱平动的加速度，$\boldsymbol{a}_r$ 为圆柱中心相对于三棱柱的加速度，圆柱角加速度 $\alpha = \dfrac{a_r}{r}$，加速度如图(a)，系统的受力图及虚加惯性力系如图(b)，圆柱的受力图如图(c)，

其中 $F_{\mathrm{IA}} = m_1 a_e$，$F_{\mathrm{Ie}} = m_2 a_e$，$F_{\mathrm{Ir}} = m_2 a_r$，$M_{\mathrm{IO}} = \dfrac{1}{2} m_2 r^2 \alpha = \dfrac{1}{2} m_2 r a_r$

由达朗贝尔原理，研究系统，$\sum F_x = 0$，$F_{\mathrm{IA}} - F_{\mathrm{Ir}} \cos\theta + F_{\mathrm{Ie}} = 0$

研究圆柱，$\sum M_D = 0,\ M_{\mathrm{IO}} + F_{\mathrm{Ir}} r - F_{\mathrm{Ie}} r \cos\theta - m_2 g r \sin\theta = 0$

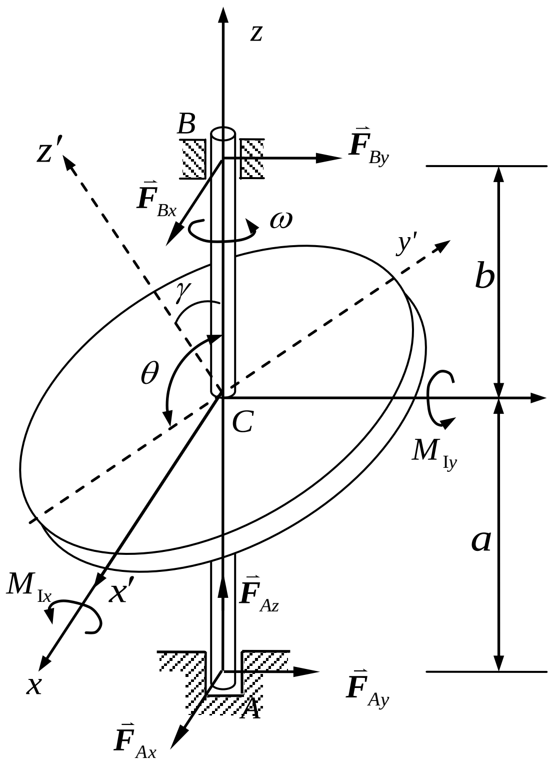
代入惯性力表达式，得

$$\begin{cases} m_1 a_e - m_2 a_r \cos\theta + m_2 a_e = 0 \\ \dfrac{1}{2} m_2 r a_r + m_2 a_r r - m_2 a_e r \cos\theta - m_2 g r \sin\theta = 0 \end{cases}$$

联立解得三棱柱的加速度为 $a_e = \dfrac{m_2 g \sin 2\theta}{3(m_1 + m_2) - 2m_2 \cos^2\theta}$，

圆柱中心相对于三棱柱的加速度为 $a_r = \dfrac{2(m_1 + m_2) g \sin\theta}{3(m_1 + m_2) - 2m_2 \cos^2\theta}$

13.12 图示均质圆盘以等角速度 ω 绕 z 轴转动，圆盘平面与转轴 z 交成 θ 角，轴承 A 和 B 与圆盘中心相距各为 a 和 b；圆盘半径为 R，质量为 m，厚度可忽略不计。求两轴承 A 和 B 的附加动反力。



[**解**]在图示坐标系中，由于圆盘上各点的 x 坐标对于 z 轴对称，圆盘的惯性积

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$$

为计算 J_{yz} 作圆盘的中心惯性主轴 $ox'y'z'$ 如图

$$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = \sum m_i (y_i' \cos\gamma - z_i' \sin\gamma)(y_i' \sin\gamma + z_i' \cos\gamma)$$

$$= J_{x'} \cos\gamma \sin\gamma = -\frac{m}{8} R^2 \sin 2\theta$$

以圆盘和轴为研究对象，受力图中惯性力向中心点 O 简化结果为

$$F_{\mathrm{I}} = \frac{P}{g} a_C = 0 \qquad M_{\mathrm{I}x} = -J_{yz}\omega^2 = \frac{m}{8} R^2 \omega^2 \sin 2\theta, \qquad M_{\mathrm{I}y} = J_{xz}\omega^2 = 0$$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} = 0$$

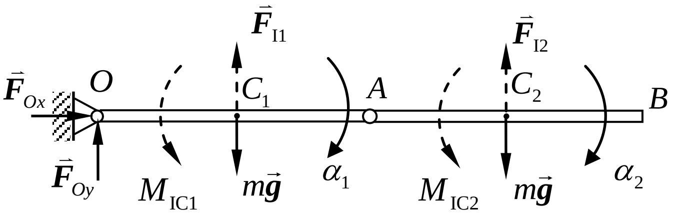
$$\sum F_z = 0 \qquad F_{Az} = 0$$

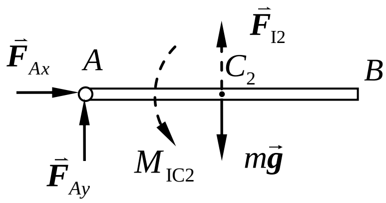
$$\sum M_x\left(\vec{F}\right) = 0 \qquad M_{\mathrm{I}x} + aF_{Ay} - bF_{By} = 0$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}\right) = 0 \qquad M_{\mathrm{I}y} - aF_{Ax} + bF_{Bx} = 0$$

联立解得 $F_{Ax} = F_{Bx} = F_{Az} = 0$；$F_{Ay} = -F_{By} = -\dfrac{mR^2\omega^2}{8(a+b)} \sin 2\theta$

13.13 均质细杆 *OA*、*AB* 的质量均为 *m*、长均为 *l*，用光滑铰链 *O*、*A* 连接如图。初始时两杆均处于水平位置，求系统由静止释放瞬时，两杆的角加速度。





解：系统静止释放瞬时，两杆的角速度均为零，*OA* 杆将作定轴转动，*AB* 杆作平面运动。设角加速度分别为α_1、α_2

由刚体平面运动基点法，$\vec{a}_{C2}=\vec{a}_A+\vec{a}^{\tau}_{C_2A}+\vec{a}^{n}_{C_2A}$，式中

$a^n_{C_2A}=0$，$a^{\tau}_{C_2A}=\dfrac{1}{2}l\alpha_2$ 所以 $a_{C2}=l(\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2)$

对系统虚加惯性力 $F_{I1}=\dfrac{1}{2}ml\alpha_1$，$M_{IC1}=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha_1$，

$$F_{I2}=ml(\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2)，\ M_{IC2}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_2$$

根据达朗贝尔原理，

对 *AB* 杆 $\sum M_A(\vec{F})=0$，$\dfrac{1}{12}ml^2\alpha_2+ml(\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2)\dfrac{l}{2}-mg\dfrac{l}{2}=0$ …...….. (a)

对系统 $\sum M_O(\vec{F})=0$，

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_1+\frac{1}{2}ml\alpha_1\cdot\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}+\frac{1}{12}ml^2\alpha_2+ml(\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2)\cdot\frac{3l}{2}-mg\frac{3l}{2}=0 \qquad \text{(b)}$$

联立(a)、(b)，解得 $\underline{\alpha_1=\dfrac{9}{7}\dfrac{g}{l},\alpha_2=-\dfrac{3}{7}\dfrac{g}{l}}$