

# 基于奇异向量和奇异值的人脸识别新方法\*

刘文超, 陈艳红

(汕头大学工学院 电子系, 广东 汕头 515063)

**摘要:** 通过提出一种基于奇异值向量和奇异值的人脸识别新方法——正交奇异值方法, 将奇异向量和奇异值中的信息有效结合, 克服了目前基于奇异值分解的识别方法中, 要么丢弃了奇异值中的信息, 要么丢弃了奇异向量中的信息, 识别效果并不理想的缺陷。在ORL 国际标准人脸库上实验显示, 与目前基于奇异值分解的识别方法相较, 该方法达到了更好的识别效果。

**关键词:** 人脸识别; 奇异值; 奇异向量; 奇异值分解; 特征提取

**中图分类号:** TP393.41

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-7437(2005)06-49-04

## 引言

在人脸识别中, 提取好的识别特征是解决人脸识别的关键问题之一。识别的有效性依赖于特征提取与特征匹配, 而良好的特征提取则有益于识别率的提高。文献[1,2]较全面地阐述了人脸识别已有的研究成果。文献[3]中 Hong Z 提出了基于奇异值分解(SVD)的人脸识别方法, 将奇异值作为识别特征, 错误识别率为42.67%。文献[4]提出了一种基于小样本的统计模型方法, 也是仅将奇异值作为识别特征, 对8个人64张人脸图像进行了验证, 正确识别率达100%。但是, 这两种方法都丢弃了奇异向量中的信息, 而且均是在小样本数据库下测得的结果。文献[5~8]都把奇异值作为人脸的识别特征, 也丢弃了奇异向量中的信息, 而文献[9]提出了一种把人脸图像投影到左、右奇异向量而获得最终的人脸识别特征, 并采用贝叶斯分类器对其进行分类的识别方法。但此方法丢弃了包含在奇异值中的人脸信息, 而且采用了较复杂的贝叶斯分类器。本文所提出的方法, 同时利用了奇异值分解中的奇异向量和奇异值所包含的有用信息, 识别过程简单, 而且大大提高了识别率。

## 1 奇异值分解

奇异值分解为提取图像代数特征提供了新的手

段, 获得了广泛的应用。而人脸图像的奇异值具有良好的稳定性, 即当图像有较小的扰动时, 奇异值变化不大。奇异值的一些特性如下。

**定理1 (SVD)** 令  $A_{m \times n}$  是实矩阵(不失一般性, 设  $m \geq n$ ), 且  $\text{rank}(A) = k$ , 则存在正交矩阵  $U_{m \times m}$  和  $V_{n \times n}$  及对角阵  $D_{m \times n}$  使下式成立:

$$A = UDV^T \quad (1)$$

$$\text{其中, } D_{m \times n} = \begin{bmatrix} \sum_{k \times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sum_{k \times k} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k),$$

$$U_{m \times m} = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m),$$

$$V_{n \times n} = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n),$$

式中  $T$ ——转置符号;

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $(i=1, 2, \dots, k, \dots, n)$  为矩阵  $A$  的奇异值;

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$  是  $A^T A$  并且也是  $AA^T$  的非零特征值的全体;

而  $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$  为  $A^T A$  的  $(n-k)$  个零特征值;

$u_i, v_i, (i=1, 2, \dots, k)$  分别是  $AA^T$  和  $A^T A$  对应于非零特征值  $\lambda_i$  的特征向量;

$u_i, (i=k+1, \dots, m)$  是为了表达上的方便而引入的  $(m-k)$  个向量。

\* 收稿日期: 2005-10-07

作者简介: 刘文超(1980-), 男, 广东中山人, 广东汕头大学工学院硕士研究生, 主要研究方向为人脸识别。

可以设想它是  $AA^T$  对应于  $\lambda_i=0$  的特征向量。同理,  $v_i, (i=k+1, \dots, n)$  为对应于  $\lambda_i=0$  的特征向量。将(1)式写成乘积的形式

$$A = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T \quad (2)$$

定理 2 (奇异值的稳定性) 设  $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $A, B$  的奇异值分别为  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p, \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_p$ , 其中  $p = \min(m, n)$ , 则  $\|\sigma_i - \tau_i\| \leq \|A - B\|_2$ , 这意味者当矩阵  $A$  有小的扰动, 奇异值的变化不大于扰动矩阵的 2-范数。

定理 3 (奇异值的比例不变性) 设  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 矩阵  $A$  的奇异值为  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ , 矩阵  $\alpha \times A$  的奇异值为  $\sigma_1^3, \sigma_2^3, \dots, \sigma_k^3$ , 则

$$|\alpha|(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = (\sigma_1^3, \sigma_2^3, \dots, \sigma_k^3).$$

定理 4 (奇异值的旋转不变性) 设  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 矩阵  $A$  的奇异值为  $\sigma_i (i=1, 2, \dots, p)$ ,  $p = \min(m, n)$ . 若  $P$  是酉矩阵, 则矩阵  $PA$  的奇异值与矩阵  $A$  的奇异值相同, 即

$$|AA^H - \sigma_i^2 I| = |PA(PA)^H - \sigma_i^2 I| = 0.$$

由定理 1~4 可知, 奇异值固有的稳定性、比例不变性和旋转不变性能有效的反映矩阵的特征。因此, 在人脸识别中, 将图像矩阵的奇异值作为识别特征是有效的。

## 2 基于奇异向量和奇异值的识别方法

虽然奇异值和奇异向量都包含有用的人脸信息<sup>[3,5,9]</sup>, 但是目前基于奇异值分解的人脸识别方法仅仅利用了二者之一, 导致识别效果不理想。为了克服这一缺点, 我们提出了一种结合奇异向量和奇异值中两者信息的新方法——正交奇异值方法。

### 2.1 正交奇异值方法

我们要把人脸图像  $A$  投影到一个向量中, 使得投影的结果中包含有奇异值和某一或全部的奇异向量, 然后希望通过奇异值加权其对应的奇异向量的简单方式而获得最终的人脸识别向量。由此, 我们在(2)式两边都乘以人脸图像  $A$  的右奇异向量,

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_k], k = \text{rank}(A).$$

则(2)式变为

$$Y = A \cdot V = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T V = [\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \dots, \sigma_k u_k], \quad (3)$$

即通过把人脸图像  $A$  投影到右奇异向量  $V$  中, 得到的投影结果  $Y$  就是奇异值  $\sigma_i$  加权了其对应的左奇异向

量  $u_i$  的累加, 这就是所需要的图像  $A$  的识别特征。此时, 可以只选择前  $d$  个最大  $\sigma_i$  所对应的  $\sigma_i u_i$  作为最终的识别特征。因为  $u_i$  是正交矩阵向量, 因此我们称此方法为正交奇异值方法。

实验结果显示, 如果只使用人脸图像投影到奇异向量而获得的向量或奇异值  $\sigma_i$  作为识别特征, 其得到的识别率明显低于本方法所得的识别率。因此, 正交奇异值方法可以同时利用奇异向量与奇异值中的信息。

### 2.2 训练阶段

设  $A_{st}$  是第  $s$  类, 第  $t$  幅  $m \times n$  维的训练人脸图像,  $s=1, \dots, M, t=1, \dots, N$ , 它的前  $d$  个奇异值及奇异向量分别表示为

$$\sigma_{st\_1} \geq \sigma_{st\_2} \geq \dots \geq \sigma_{st\_d} > 0,$$

$$[u_{st\_1} \geq u_{st\_2}, \dots, u_{st\_d}], [v_{st\_1} \geq v_{st\_2}, \dots, v_{st\_d}].$$

那么  $A_{st}$  的识别特征为

$$Y_{st} = [y_{st}(1), y_{st}(2), \dots, y_{st}(d)] =$$

$$A_{st} \cdot [v_{st\_1}, v_{st\_2}, \dots, v_{st\_d}] =$$

$$[\sigma_{st\_1} u_{st\_1}, \sigma_{st\_2} u_{st\_2}, \dots, \sigma_{st\_d} u_{st\_d}].$$

### 2.3 测试及识别阶段

设  $A_{test}$  也是一副  $m \times n$  维的测试人脸图像, 同理, 它的前  $d$  个奇异值及奇异向量为

$$\sigma_{test\_1} \geq \sigma_{test\_2} \geq \dots \geq \sigma_{test\_d} > 0,$$

$$[u_{test\_1}, u_{test\_2}, \dots, u_{test\_d}],$$

$$[v_{test\_1}, v_{test\_2}, \dots, v_{test\_d}].$$

那测试图像的识别特征为

$$Y_{test} = [y_{test}(1), y_{test}(2), \dots, y_{test}(d)] =$$

$$A_{test} \cdot [v_{test\_1}, v_{test\_2}, \dots, v_{test\_d}] =$$

$$\sigma_{test\_1} u_{test\_1}, \sigma_{test\_2} u_{test\_2}, \dots, \sigma_{test\_d} u_{test\_d}]$$

我们采用最小欧拉距离分类器对测试样本进行分类, 通过测量测试样本的识别特征与所有训练样本的识别特征的距离, 把测试样本归入与其距离最短的训练样本那一类, 即

$$d_s = \arg \min_{\forall t} \sum_{j=1}^d \|y_{st}(j) - y_{test}(j)\|_2,$$

那么,  $A_{test} \in \omega_s$  类。

## 3 实验结果

采用 ORL 国际标准人脸库(可从 <http://www.uk.research.att.com/facedatabase.html> 获得)验证本文所提出的方法。此人脸库由 40 人, 每人 10 幅 112

×92 图像组成。其中有些图像是拍摄于不同时期的;人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化,比如,笑或不笑,眼睛或睁或闭,戴或不戴眼镜;人脸姿态也有相当程度的变化,深度旋转和平面旋转可达20度。人脸库中的部分人脸图像如图 1 所示。



图 1 ORL 人脸库中部分人脸图像

3.1 不同方法识别率的比较

在人脸库中,每个人随机选取 6 幅图像做训练样本,其余 4 幅图像做测试样本,各种方法的实验结果比较如表 1 所示。

表 1 不同方法的识别率比较

	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
正确识别率	94.15%	87.50%	92.50%	80.90%

其中,方法 1 是本文提出的正交奇异值方法,采用最小欧拉距离分类器;方法 2 是文献[9]提出的把人脸图像投影到左、右奇异向量上获得识别特征,采用最小欧拉距离分类器对其进行分类的方法;方法 3 是在方法 2 上使用贝叶斯分类器代替欧拉距离分类器进行分类的方法;方法 4 是文献[5]提出的基于奇异值匹配的方法。从表 1 可见,正交奇异值方法,与仅使用基于奇异向量信息或奇异值信息的方法相比,可以获得更高的识别率。

3.2 正交奇异值方法的性能分析

我们分析了参数(识别特征个数)对本文所提出方法的正确识别率的影响,并与以往的基于奇异值分解的方法进行了分析比较,分别如图 2 和图 3 所示。其中,图 2 显示了前个奇异值占全部奇异值的百分比情况。首个最大的奇异值几乎占了全部奇异值总和的一半。

图 3 中,横坐标是识别特征个数 $d$ ,纵坐标是其对应的正确识别率。Case1 表示本文所提出的方法在选择前 $d$ 个识别特征向量 $\sigma_i u_i$ 下的识别率;Case2 表示只使用前 $d$ 个最大奇异值所对应的右奇异向量 $u_i$ 作

为识别特征向量所获得的识别率,Case3 表示仅使用前 $d$ 个最大奇异值 $\sigma_i$ 作为识别特征向量所获得的识别率。

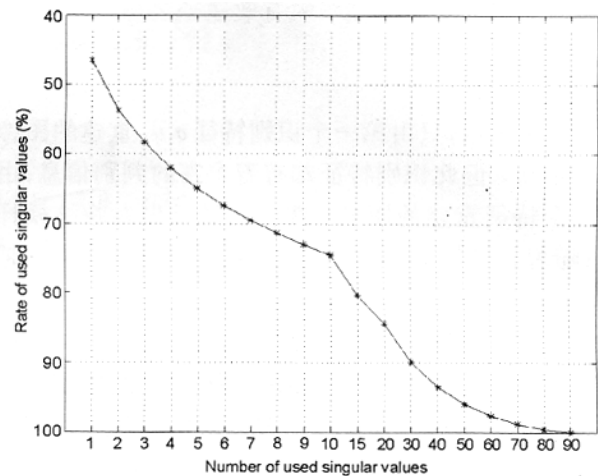


图 2 前  $d$  个最大奇异值所占全部的比例情况

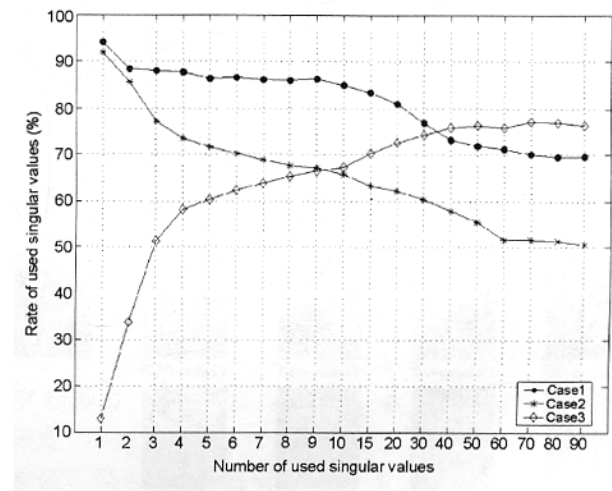


图 3 识别特征个数与正确识别率的关系

由图 2、图 3 可见,本文所提出的正交奇异值方法具有如下优势:第一,通过有效的结合奇异向量和奇异值中的信息,进一步提高了识别率;第二,只把人脸图像投影到第一个左奇异向量 $v_1$ 所获得的识别特征向量 $\sigma_1 u_1$ ,就可以取得最高识别率 94.15%。虽然随着识别特征个数的增加,识别率呈下降趋势,但是下降幅度比起 Case2 的下降幅度要小的多。由此可见,人脸图像的大部分判别信息都包含在识别特征 $\sigma_1 u_1$ 中,而且在识别特征个数很少的情况下,便可以达到很高的识别率,大大减少了训练和识别样本的时间;第三,仅使用前 $d$ 个右奇异向量 $u_i$ 作为识别特征时,识别率也随识别特征个数的增加而大幅度地减少,但最大识别率仅能达到 91.90%。而仅使用前 $d$ 个奇异值 $\sigma_i$ 时,

识别率随着识别特征个数的增加而提高,但最大识别率却只能达到 77%。因此我们认为,仅仅使用奇异向量或者奇异值作为识别特征是不够的,将两者信息有效结合是提高正确识别率的有效途径之一。

### 3.3 图像重建

图 4 显示,只由第一个识别特征  $\sigma_1 u_1$  重建的图像模糊不清,但此识别特征却有着丰富的判别信息;由前 3 个特征重建的图像,就已经显示出人脸的模样了;随着识别特征个数的增加,重建的图像也越来越清晰,但是,识别特征个数约达 10 个以后,这种变化却越来越小,且仅局限于细节上的变化。由此可知,前面的识别特征包含了人脸的大体轮廓信息,也包含了丰富的判别信息;随后的识别特征只包含人脸的细节信息。



图 4 由部分识别特征重建的图像

## 4 结论

本文提出了结合奇异向量和奇异值中信息的正交奇异值方法,获得了更具有判别信息的识别特征,克服了那些仅仅把投影到奇异向量所获得的特征向量信息或者把奇异值信息作为识别特征的识别方法的缺点。实验结果显示,比起那些仅使用奇异值分解中某一部分信息的识别方法,本方法能提取更有效的,更具有判别能力的识别特征,显著提高了人脸识别率。

### 参考文献:

- [1] Chellappa R, Wilson C L, Sirohey S. Human and machine recognition of faces; a survey[J]. Proceedings of the IEEE, 1995,83(5): 705—741.
- [2] Yang Ming-Hsuan, Kriegman David J, Narendra Ahuja. Detecting Faces in Images: A Survey[J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002,24(1): 34—58.
- [3] Hong Zi-quan. Algebraic Feature Extraction of Image for Recognition[J]. Pattern Recognition, 1991,24(3): 211—219.
- [4] Cheng Yong-qing, etc. Human Face Recognition Method Based on the Statistical Model of small Sample Size[J]. SPIE Proceedings on Intelligent Robots and Computer Vision, 1991, 85—95.
- [5] 王蕴红, 谭铁牛, 朱勇. 基于奇异值分解和数据融合的脸像鉴别[J]. 计算机学报, 2000,20(6): 649—653.
- [6] 周德龙, 高文, 赵德斌. 基于奇异值分解和判别 KL 投影的人脸识别[J]. 软件学报, 2003,14(4): 783—789.
- [7] 甘俊英, 张有为. 一种基于奇异值特征的神经网络人脸识别新途径[J]. 电子学报, 2004,32(1): 170—173.
- [8] 荆晓远, 郭跃飞, 杨静宇. 基于奇异值特征的图像预处理及人脸识别[J]. 信息与控制, 1999,28(2): 116—120.
- [9] Tian Yuan, Tan Tie-niu, Wang Yun-hong, Fang Yu-chun. Do singular values contain adequate information for face recognition[J]. Pattern recognition, 2003,36(3): 649—655.

# Face Recognition Approach Based on Singular Vector and Singular Value


LIU Wen-chao, CHEN Yan-hong

(Dept. of Electronics, Shantou University, Guangdong 515063, China)

**Abstract:** Methods of recognizing singular values or singular vector projection coefficients of SVD as face features are proposed and used popularly. However, these methods discard the information either in singular vectors or in singular values. In order to preserve this two kinds of information, we propose a new method which can preserve both of them. The ORL face database is used in experiment and experiment results indicate that the novel method is effective and superior to many existing methods.

**Key words:** face recognition, singular value, singular vector, singular value decomposition, feature extraction

(责任编辑 梁王欢)

作者: [刘文超](#), [陈艳红](#), [LIU Wen-chao](#), [CHEN Yan-hong](#)  
作者单位: [汕头大学工学院, 电子系, 广东, 汕头, 515063](#)  
刊名: [桂林电子工业学院学报](#)   
英文刊名: [JOURNAL OF GUILIN UNIVERSITY OF ELECTRONIC TECHNOLOGY](#)  
年, 卷(期): 2005, 25 (6)  
被引用次数: 3次

## 参考文献(8条)

1. [Chellappa R. Wilson C L. Sirohey S Human and machine recognition of faces:a survey](#)[外文期刊] 1995 (05)
2. [Yang Ming-Hsuan. Kriegman David J. Narendra Ahuja Detecting Faces in Images:A Survey](#)[外文期刊] 2002 (01)
3. [Hong Zi-quan Algebraic Feature Extraction of Image for Recognition](#)[外文期刊] 1991 (03)
4. [王蕴红. 谭铁牛. 朱勇 基于奇异值分解和数据融合的脸像鉴别](#)[期刊论文]-[计算机学报](#) 2000 (06)
5. [周德龙. 高文. 赵德斌 基于奇异值分解和判别KL投影的人脸识别](#)[期刊论文]-[软件学报](#) 2003 (04)
6. [甘俊英. 张有为 一种基于奇异值特征的神经网络人脸识别新途径](#)[期刊论文]-[电子学报](#) 2004 (01)
7. [荆晓远. 郭跃飞. 杨静宇 基于奇异值特征的图像预处理及人脸识别](#)[期刊论文]-[信息与控制](#) 1999 (02)
8. [Tian Yuan. Tan Tie-niu. Wang Yun-hong. Fang Yu-chun Do singular values contain adequate information for face recognition](#)[外文期刊] 2003 (03)

## 本文读者也读过(10条)

1. [罗仁泽. 冉瑞生. 王汝言. LUO Ren-ze. RAN Rui-sheng. WANG Ru-yan 基于奇异值分解的基图像的人脸识别](#)[期刊论文]-[电讯技术](#)2008, 48 (2)
2. [高仕龙. GAO Shi-long 基于特征融合的车牌汉字识别技术](#)[期刊论文]-[乐山师范学院学报](#)2008, 23 (12)
3. [高全学. 梁彦. 潘泉. 陈玉春. 张洪才. GAO Quan-xue. LIANG Yan. PAN Quan. CHEN Yu-chun. ZHANG Hong-cai SVD用于人脸识别存在的问题及解决方法](#)[期刊论文]-[中国图象图形学报](#)2006, 11 (12)
4. [王敏. 尹政兴. 李汉强. Wang Min. Yin Zhengxing. Li Hanqiang 基于小波变换和奇异值的人脸特征提取](#)[期刊论文]-[中国水运 \(理论版\)](#) 2006 (3)
5. [冉瑞生. 黄廷祝. RAN Rui-sheng. HUANG Ting-zhu 基于奇异值特征提取的彩色人脸识别](#)[期刊论文]-[计算机应用研究](#)2007, 24 (7)
6. [贾换霞 基于奇异值分解和神经网络的人脸识别方法的研究](#)[学位论文]2005
7. [闫荣华. 彭进业. 李岩. 谢明华. 温文龙. YAN Ronghua. PENG Jinye. LI Yan. XIE Minghua. WEN Wenlong 基于小波域奇异值分解的人脸识别方法](#)[期刊论文]-[计算机工程](#)2007, 33 (4)
8. [陈明刚. 燕列雅 四元数矩阵奇异值分解的算法](#)[期刊论文]-[中国科教创新导刊](#)2009 (23)
9. [沈杰. SHEN Jie 一种基于局部奇异值分解和最近邻决策规则的人脸识别方法](#)[期刊论文]-[盐城工学院学报 \(自然科学版\)](#) 2009, 22 (3)
10. [李士进. 杨静宇. 金忠 基于离散隐马尔可夫模型和奇异值特征的人脸检测](#)[期刊论文]-[南京理工大学学报 \(自然科学版\)](#)2000, 24 (5)

## 引证文献(4条)

1. [余立新. 陈光喜 基于PCA与合并聚类的RBFNN人脸识别](#)[期刊论文]-[桂林电子科技大学学报](#) 2009 (2)

2. 王润舵 一种基于DBN信息融合的说话人识别方法[期刊论文]-桂林电子科技大学学报 2010(6)
3. 王润舵 一种基于DBN信息融合的说话人识别方法[期刊论文]-桂林电子科技大学学报 2010(6)
4. 谢立权 基于奇异值分解的人脸表情识别研究[学位论文]硕士 2006

本文链接: [http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_gldzgyxyxb200506012.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_gldzgyxyxb200506012.aspx)