Mecánica Computacional 2011
Guía de Referencia

Nellmeldin, Fernando

Contents

1 Ejercicio 1 - Difusión del Calor

Los problemas de transferencia de calor expresan la satisfacción de la conservación de la energía en el campo de la física. Una representación de los mismos viene dada por el siguiente problema matemático: Hallar el campo de temperaturas T(x,y,z;t) tal que

$$\begin{aligned}
&\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(k\nabla T) + G - h(T - T_{amb}) && \forall x \in \Omega \\
&\text{Sujeto a las siguientes condiciones} && \\
&T = \bar{T} && \forall x \in r_T \\
&q = -k\nabla T = \bar{q} && \forall x \in r_q \\
&q = -k\nabla T + h(T - T_{ref}) && \forall x \in r_h \\
&T = T^0 && \forall x \in \omega \quad y \quad t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

ρ = densidad; c = calor específico; k = conductividad térmica; h = coeficiente de convección; G = fuente de calor; T_{amb} = temperatura del medio ambiente.

1.1 Parte A

Considerar una simetría del problema tal que puede ser resuelto en 1D, L = 1, ρc = 1, k = 1, h = 0 y G = 0. Entonces el problema queda planteado como:

Hallar el campo de temperaturas T(x,t) tal que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad \forall x \in [0;1] \tag{2}$$

Sujeto a las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
T(0,t) &= 1 \\
T(1,t) &= 0 \\
T(x,0) &= 1 - x
\end{aligned} \tag{3}$$

Se discretiza el tiempo con Forward Euler y la derivada segunda con método de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} &= \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\
\Rightarrow T_i^{n+1} &= T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)
\end{aligned} \tag{4}$$

Se elige un paso Δx de 1/3.

Como la relación: $F_0 = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ debe cumplir $F_0 < 1/2$ donde F_0 es el número de Fourier, se elige un $\Delta t = 1/36$.

Así, se obtienen las siguientes condiciones iniciales: Sea

$$T_i^0 = 1 - x \Rightarrow \begin{cases} T_0^0 = 1 \\ T_1^0 = 2/3 \\ T_2^0 = 1/3 \\ T_3^0 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

El stencil tiene la siguiente forma final:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{1}{4}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right) \tag{6}$$

El algoritmo guiaRefEj1a.sci resuelve este problema de manera iterativa.

1.2 Parte B

Resolver el problema en 1D, L = 1, ρc = 1, k = 1, h = 1, $T_{amb} = 0$, con

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \leq 1/2 \\ 0 & \forall x > 1/2 \end{cases} \tag{7}$$

Luego, el problema queda planteado como:
Hallar el campo de temperaturas T(x,t) tal que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T = 1 && \forall x \in [0, 1/2] \\ &\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T = 0 && \forall x \in (0, 1/2] \\ &\text{Sujeto a las condiciones de contorno} \\ &T(0,t) = 1 \\ &\frac{\partial T}{\partial x}(1,t) = 0 \\ &T(x,0) = 1 - x \end{aligned} \tag{8}$$

Se discretiza el tiempo con Forward Euler y la derivada segunda con método de segundo orden:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + T_i^n = G_i$$

$$\Rightarrow T_i^{n+1} = \Delta t(G_i - T_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + T_i^n \tag{9}$$

Se elige un paso Δx de 1/4.

Como la relación: $F_0 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ debe cumplir $F_0 < 1/2$ donde F_0 es el número de Fourier, se elige un $\Delta t = 1/64$.
Así, se obtienen las siguientes condiciones iniciales:

$$T_i^0 = 1 - x \Rightarrow \begin{cases} T_0^0 = 1 \\ T_1^0 = 3/4 \\ T_2^0 = 1/2 \\ T_3^0 = 1/4 \\ T_4^0 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

De la condición de contorno tipo Neumann, se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow T_{i+1}^n = T_{i-1}^n \text{ en } x = 1 \tag{11}$$

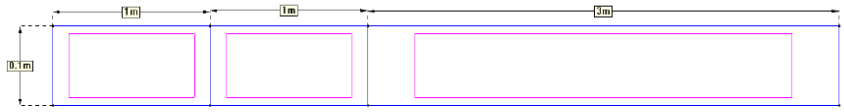
El stencil tiene la siguiente forma final:

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{64}(G_i - T_i^n) + \frac{1}{4}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + T_i^n \tag{12}$$

El algoritmo guiaRefEj1b.sci resuelve este problema de manera iterativa.

1.3 Parte C

Considerar el problema de transferencia de calor bidimensional, en presencia de 3 fuentes de calor distribuidas, con simetría con respecto al eje x, tal que puede resolverse en una dimensión. Las dimensiones de la placa se muestran en la siguiente figura:



El problema puede ser planteado como:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -f(x) \\
&\text{Sujeto a las siguientes condiciones de contorno:} \\
&T(0) = 100 \\
&\frac{\partial T}{\partial x}(5) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Donde

$$f(x) = \begin{cases} -10 & \forall\, x \in [0, 1] \\ 5 & \forall\, x \in (1, 2] \\ -1 & \forall\, x \in (2, 5] \end{cases} \tag{14}$$

Además, se debe verificar la continuidad y derivabilidad en los extremos de cada uno de los intervalos interiores.

Se discretiza la derivada segunda con método de segundo orden:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = -f_i \Rightarrow T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = -f_i \Delta x^2 \tag{15}$$

Utilizando la condición de Contorno tipo Dirichlet en $x = 0$ obtenemos el valor

$$T_0 = 100$$

Asimismo, de la condición de contorno tipo Neumann, en $x = 5$ se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow T_{i+1} = T_{i-1} \text{ en } x = 5 \tag{16}$$

El algoritmo guiaRefEj1c.sci resuelve este problema.

2 Ejercicio 4 - Flujo Potencial

En un problema de flujo de fluídos bidimensional, invíscido, irrotacional e incompresible (flujo potencial), las componentes de velocidades (u, v) en las direcciones x e y, y el potencial de velocidad satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}; \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Construir aproximaciones para (u,v,ϕ) de forma tal de determinar el campo de velocidades sobre un dominio cuadrado definido como $-1 \leq x, y \leq 1$ sujeto a las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} u = 0 & \text{en } x = \pm 1 \\ v = 0 & \text{en } y = -1 \\ v = x & \text{en } y = +1 \end{array} \tag{18}$$

El problema queda planteado como encontrar ϕ tal que cumpla:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall\, x, y \in -1 \leq x, y \leq 1$$

Sujeta a las condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 & \text{en } x = \pm 1 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & \text{en } y = -1 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x & \text{en } y = 1 \end{array} \tag{19}$$

Se discretiza utilizando aproximaciones de segundo orden para cada una de las derivadas:

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \tag{20}$$

Dado que el dominio tiene la misma dimensión en cada uno de los ejes, se elige $\Delta x = \Delta y$.

De esta manera, el stencil se simplifica a:

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} = 0 \tag{21}$$

Se aplican las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \phi_{i+1,j} = \phi_{i-1,j} && \text{en } x = \pm 1 \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow \phi_{i,j+1} = \phi_{i,j-1} && \text{en } y = -1 \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y} = x_i \Rightarrow \phi_{i,j+1} = \phi_{i,j-1} + x_i && \text{en } y = 1
\end{aligned} \tag{22}$$

El algoritmo guiaRefEj4.sci resuelve este problema.