Laurea Magistrale in Informatica A.A. 2020/2021
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Seminario Logiche quantistiche e sistemi concorrenti

Pelusi Marta
Marta629

Dualità stati - proprietà

Con **proprietà** si intende il *significato* di una proposizione, ad esempio "stato di deadlock".
Supponendo di avere un modello di Kripke con degli stati Q, si ha una funzione di interpretazione $I : Q \rightarrow 2^{AP}$, con AP insieme di proposizioni. Fissiamo una proposizione $p \in AP$ e cerchiamo nel modello di Kripke tutti gli stati in cui p è vera. Prendiamo un'altra proposizione $q \in AP$ e cerchiamo tutti gli stati in cui è vera q. Si possono identificare proposizioni e insiemi di stati. È possibile che si vengano a creare intersezioni tra stati, ovvero stati in cui è vera la formula $p \wedge q \in F$, dove F è l'insieme delle formule proposizionali.
Si può spingere agli estremi questa idea dimenticandoci di AP ma dichiarando semplicemente che *una proposizione è qualunque sottoinsieme di stati*; infatti qualsiasi sottoinsieme di stati possiamo associarlo alla proposizione vera in quegli stati.
Dato Q si può costruire 2^Q e dire che ogni elemento di questo insieme è una proposizione.

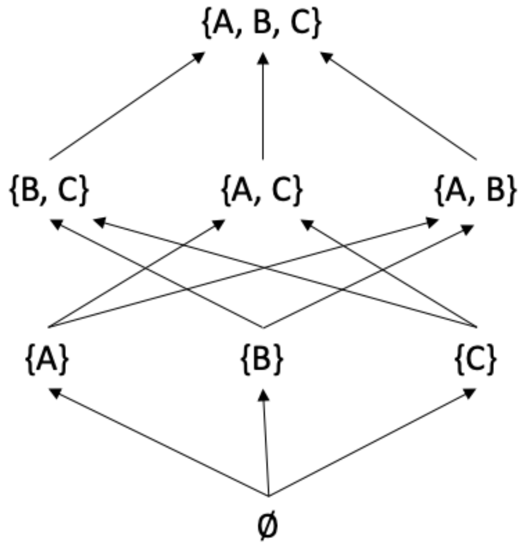

Figura 1

Proprietà $\equiv$ insieme di stati (in cui è vera una data proposizione)
Stato $\equiv$ insieme di proprietà (descritto da un insieme di proposizioni vere in quello stato)

2^Q può essere parzialmente ordinato attraverso la relazione d'ordine parziale $\subseteq$. Se vogliamo disegnare 2^Q in un grafo, supponiamo di avere l'insieme $E = \{A, B, C\}$ e disegnamo tutti i possibili sottoinsiemi di E. Questa è una rappresentazione delle relazioni logiche tra le varie proprietà, dove le frecce rappresentano delle implicazioni logiche tra le varie proprietà. L'insieme vuoto corrisponderà alla proposizione "false", mentre $\{A, B, C\}$ corrisponde alla proposizione "true".

Dal punto di vista algebrico questo è un reticolo, più precisamente è un'**algebra booleana**, ovvero è un reticolo con proprietà più forti. Si possono associare due connettivi logici $\wedge$, $\vee$ chiamati *meet, join.* Hanno simboli di negazione $\neg$ chiamato *not* anche conosciuto come complemento.
Si può identificare la logica proposizionale classica con l'algebra booleana grazie alle associazioni logiche tra le proposizioni. Questo è più o meno quello che si fa nel model checking con i modelli di Kripke. La logica proposizionale corrisponde, in un certo senso, all'algebra dell'algebra booleana.

Rappresentazione formale di sistemi concorrenti

L'idea di un sistema di transizioni è che gli stati rappresentano fotografie di un certo sistema in un certo istante t.

Esempio 1. *Prese tre colline con in cima tre persone e ogni persona ha in mano 2 lampadine, lo stato globale è rappresentato dall'insieme delle lampadine accese. Contrariamente a quanto si possa pensare, lo stato globale non è osservabile da nessuna delle tre persone e nemmeno da un osservatore esterno. Questo succede perchè diventa rilevante la distanza che intercorre tra le persone e la velocità di trasmissione della luce tra una persona e l'altra.*

Nei sistemi concorrenti la nozione di stato globale è problematica; ci possono essere dei casi in cui si può supporre di poterlo osservare ma ci sono situazioni in cui non è possibile osservarlo.

1. nei sistemi distribuiti nello spazio lo stato globale non è osservabile
2. nella realtà fisica non esiste un sistema di riferimento temporale unico e privilegiato
3. un sistema distribuito è intrinsicamente concorrente: la semantica "interleaving" non rappresenta fedelmente le caratteristiche reali

Per ovviare a questo, Petri intorno al 1960 inventa la teoria delle Reti di Petri. Nelle reti elementari uno stato/condizione di una rete corrisponde ad una condizione vera/falsa che cambia stato da un momento all'altro, tramite la **regola di scatto**.
Ogni rete ha il suo grafo dei casi, ovvero il suo **sistema di transizioni** costruito sull'idea di semantica "interleaving" sulla base dei problemi citati precedentemente, che rappresenta il comportamento della rete. Ogni stato della rete può essere interpretato come una proposizione atomica che ci dice quali proposizioni sono vere in ogni stato.
Una **componente sequenziale** di una rete è una sottorete che se si suppone di non vedere tutto il resto ma vediamo solo la sottorete, questa si comporta sempre in modo sequenziale (non ci sono mai eventi concorrenti). Questo può essere utile perchè ci dà informazioni su quali sono i componenti che compongono il sistema modellato da quella rete. Le componenti sequenziali possono anche sovrapporsi.

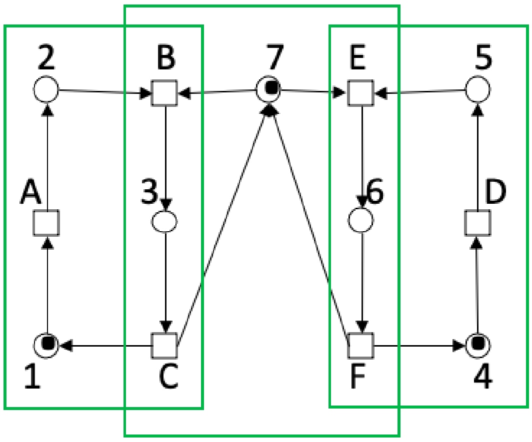

Figura 2

In generale, tra le condizioni di una rete si possono scoprire relazioni logiche; questo, però, non è sempre vero. Quando è vero, lo stato che si "aggiunge" corrisponde ad una combinazione di stati che sono già presenti. Si possono calcolare quali sono gli stati che si possono aggiungere e, un aspetto interessante, è che non posso aggiungere qualsiasi combinazione logica di stati che sono già presenti, perchè si cambierebbe il comportamento della rete.

Esempio 2. *In questo caso non è possibile aggiungere uno stato che sia equivalente alla formula* $b \wedge c$ *senza cambiare il comportamento della rete.*

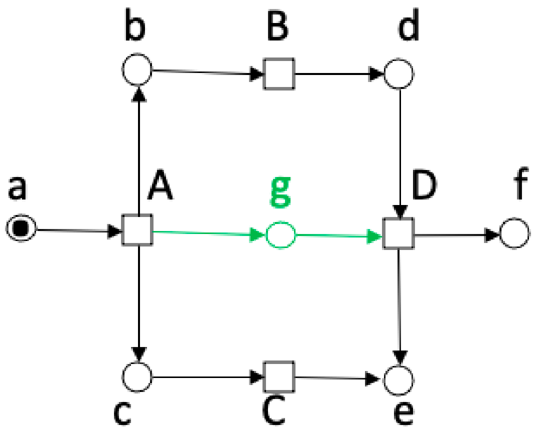

Figura 3

Questo ci permette di compiere l'operazione di **saturazione** della rete. Si possono aggiungere, quindi, nuovi stati senza cambiare il comportamento della rete.
Si può concludere che la logica delle condizioni/stati locali di una rete elementare non è la logica booleana tipica della logica proposizionale classica. Petri ha costruito la teoria delle reti partendo dall'osservazione che le semantiche interleaving sono inadeguate per descrivere sistemi concorrenti.
Ma se questa logica non è un'algebra booleana, allora com'è fatta?

Definizione 1. *Sia data una struttura logica di stati locali (rete elementare) definita come segue*

$$N = (B, E, F, C),\ \ x, y \in B \quad x \leqslant y \Leftrightarrow \forall c \in C:\ \ x \in c \Rightarrow y \in c$$

Si può definire una nuova rete elementare a partire da N definita come segue

$$\widehat{N} = (\widehat{B}, E, \widehat{F}, \widehat{C})\ tc:\ \ B \subseteq \widehat{B}$$

$\widehat{B}$ è l'insieme di stati aggiunti ad N senza modificarne il comportamento.

Teorema 1. *$\langle \widehat{B}, \leqslant, false, true, (.)' \rangle$ è una struttura dell'algebra booleana chiamata logica quantistica (poset).*

Esempio 3. *Logica quantistica interpretata graficamente*

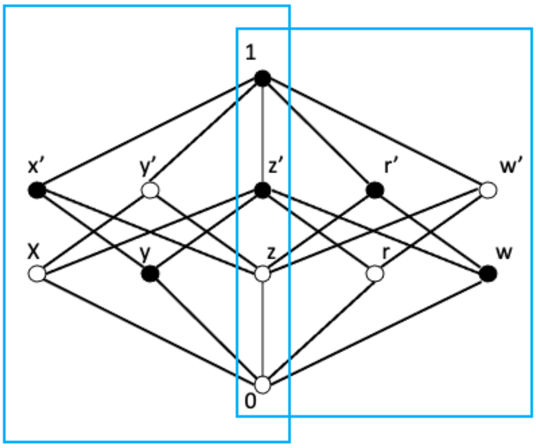

Figura 4

La struttura parzialmente ordinata può essere vista come formata da due algebre booleane, dove i simboli del tipo a' rappresentano i complementi logici dei simboli di tipo a:

- $0, 1, x, y, z, x', y', z'$
- $z, r, w, z', r', w', 0, 1$

Queste algebre booleane coorispondono alle componenti sequenziali della rete. Ogni componente osserva le proprie condizioni locali, quindi la logica di quegli stati è completamente nota e corrisponde ad una delle algebre booleane, ma dal punto di vista globale tutto l'insieme è formato da una somma/unione delle algebre booleane corrispondente ai singoli elementi.

Si chiamano **logiche quantistiche** perchè sono nate per studiare caratteristiche di sistemi quantistici nell'ambito della meccanica quantistica. Quando si studiano sistemi subatomici alcuni principi non valgono più, ad esempio non possiamo osservare simultaneamente due quantità fisiche diverse di questi sistemi. Non posso osservare nello stesso istante con la massima precisione quello che sta succedendo da un'altra parte rispetto a dove mi trovo io, ma posso osservare localmente.