# Tema 6: Teletráfico en redes de telecomunicaciones

May 4, 2023

RSTC

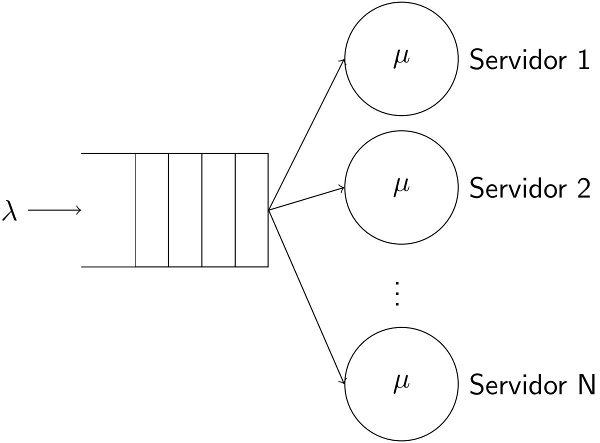
Redes y Servicios de Telecomunicación

# Contenido

# Sistema M/M/N

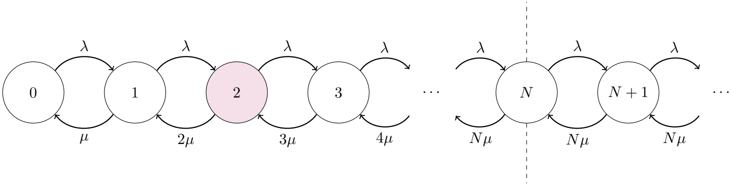
# Sistema M/M/N

Un sistema de cola única con $t_l \sim Exp(\lambda)$ y N servidores en paralelo con $t_s \sim Exp(\mu)$.

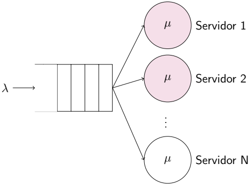


# Sistema M/M/N: Cadena de Markov

Un sistema M/M/N es un proceso estocástico Markoviano[1].

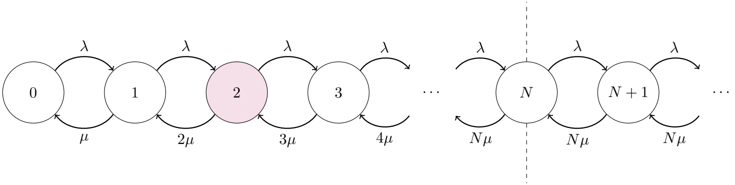



Sus tasas de transición no son homogéneas $q_{i,j} = i\mu,\ i \leq N$.




[1] El tiempo de estancia es exponencial no homogéneo.

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio




Con $i < N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu)$$

pero con $i \geq N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + N\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + N\mu)$$

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

## Lema (Ecuaciones equilibrio M/M/N)

*En régimen estacionario de un sistema M/M/N, la probabilidad de estar en el estado $i$ es:*

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{A^i}{i!}\pi_0, & i \leq N \\ \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0, & i \geq N \end{cases} \tag{1}$$

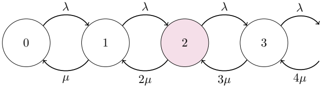
*con* $A = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$*; y*

$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \tag{2}$$

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

*Demostración*:

- para $i \leq N$ se tiene:




sabiendo que $\pi_0\lambda = \pi_1\mu$ se tiene $\pi_1 = A\pi_0$. Por tanto tenemos que

$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = \pi_1(\lambda+\mu) \Longleftrightarrow \pi_2 = \frac{A^2}{2}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 + 3\mu\pi_3 = \pi_2(\lambda+2\mu) \Longleftrightarrow \pi_3 = \frac{A^3}{3!}\pi_0$$

$$\cdots$$

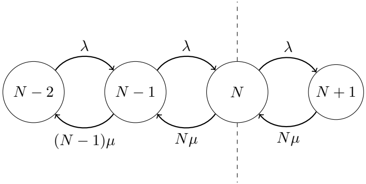
$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda+i\mu) \Longleftrightarrow \pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$$

y deducimos $\pi_i = \frac{A}{i}\pi_{i-1}$.

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

*Demostración*:

- para $i \geq N$ se tiene:




$$\pi_{N-1}(\lambda + (N-1)\mu) = \pi_N N\mu + \pi_{N-2}\lambda$$

$$\pi_N = \frac{1}{N\mu}\left(\pi_{N-1}\lambda + \pi_{N-1}\mu(N-1) - \pi_{N-2}\lambda\right)$$

sustituyendo $\pi_{N-1} = \frac{A}{N-1}\pi_{N-2}$, sacamos la recursión

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

*Demostración*:

- para $i \geq N$ se tiene:

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

y si usamos $\pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$ con $i \leq N$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi_i =& \frac{A}{N}\pi_{i-1} = \frac{A^2}{N^2}\pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\pi_N = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\frac{A^N}{N!}\pi_0 \\ =& \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0\end{aligned}$$

*Demostración*:

- para $i = 0$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i + \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!}\pi_0 + \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0 \\
&= \pi_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \pi_0 \frac{N^N}{N!} \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i
\end{aligned}
$$

sabiendo que $\sum_{i=N}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^N}{1-\rho}$, sacamos

$$
\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}
$$

# Sistema M/M/N: Segunda distribución de Earlang

## Definición (Segunda distribución de Earlang)

*Popularmente, la probabilidad de que un M/M/N esté vacío*

$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

*se conoce como la segunda distribución de Earlang, y a la razón $A$ se le llaman "Earlangs".*

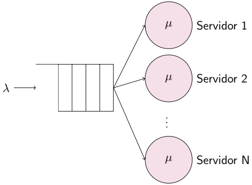
*Ejemplo*: si tenemos tasas $\lambda = 10$ y $\mu = 2$; los Earlangs $A = \frac{\lambda}{\mu} = 5$ me dicen que necesito $> 5$ servidores; y con $N = 7$ tenemos

$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{6} \frac{5^i}{i!} \right) + \frac{5^7}{7!} \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \right)^{-1} \simeq 0.006$$

## Lema (Earlang-C)

*La probabilidad de esperar en un sistema M/M/N viene dada por la distribución Earlang-C:*

$$E_C(N, A) = \mathbb{P}(N(t) \geq N) = \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \pi_0 \tag{3}$$




*Demostración*:

$$\mathbb{P}(N(t) \geq N) = \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 = \frac{N^N}{N!} \frac{\rho^N}{1-\rho} \pi_0 \tag{4}$$

# Sistema M/M/N: Métricas famosas

## Lema (Número medio en cola M/M/N)

*En un sistema M/M/N el número medio de usuarios encolados es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) \tag{5}$$

*Demostración*:

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \sum_{i=N}^{\infty} (i-N)\pi_N = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 (i-N) = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \sum_{i=N}^{\infty} (i-N)\rho^i$$

$$= \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[ \sum_{i=N}^{\infty} i\rho^i - N \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[ \frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} \right]$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A)$$

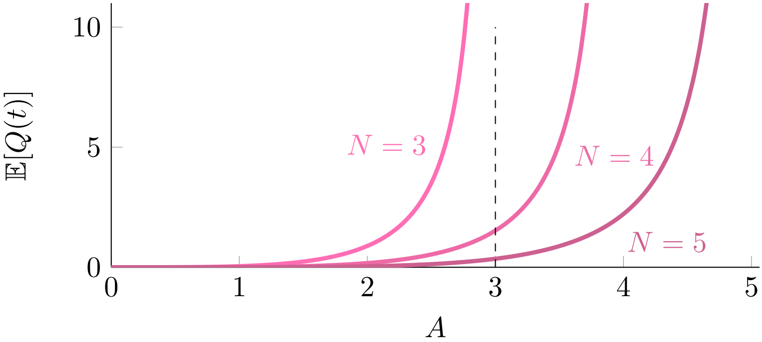
# Sistema M/M/N: Métricas famosas

*Ejemplo*: sea un sistema con una carga de $A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$ Earlangs, ¿cuántos servidores $N$ hay que poner para que, en media, haya menos de 10 usuarios encolados?

$$N : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) = \frac{\frac{3}{N}}{1-\frac{3}{N}} \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^N}{1-\frac{3}{N}} \pi_0$$

$$= \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^{N+1}}{\left(1-\frac{3}{N}\right)^2} \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{3^i}{i!} \right) + \frac{3^N}{N!} \frac{1}{1-\frac{3}{N}} \right)^{-1} < 10$$

*Ejemplo (cont.)*: vemos que con una intensidad de $A = 3$ Earlangs necesitamos $N > 3$ para que $\mathbb{E}[Q(t)] \leq 10$.



# Sistema M/M/N: Métricas famosas

## Lema (Número medio usuarios en M/M/N)

*En un sistema M/M/N el tiempo medio de usuarios en el sistema es*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A \tag{6}$$

*Demostración*: con Little sabemos $\mathbb{E}[W(t)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)]$, y también sabemos que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[W(t)] + \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)] + \frac{1}{\mu}$$

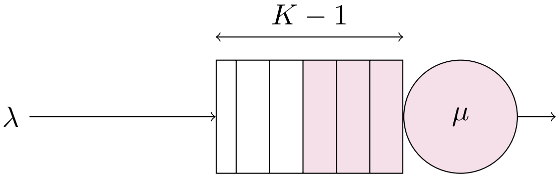
y usando Little de nuevo ($\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)]\lambda$) llegamos a

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A$$

# Sistema M/M/1/K

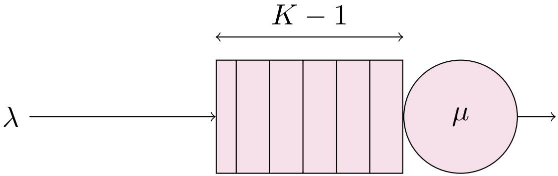
# Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K - 1$ hay pérdidas.



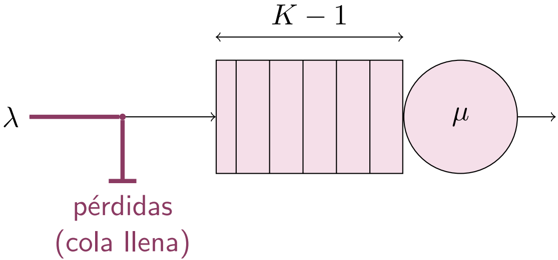
# Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K-1$ hay pérdidas.



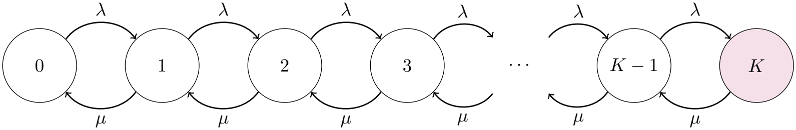
# Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K-1$ hay pérdidas.



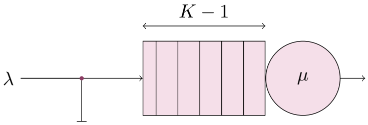
# Sistema M/M/1/K: Cadena de Markov

Un sistema M/M/1/K es un proceso estocástico markoviano, por tanto se puede modelar con una cadena de Markov finita.




La cadena tiene tasas de transición $q_{i,j}$ homogéneas

$$q_{i+1,i} = q_{j+1,j} = \mu, \quad \forall i, j$$
$$q_{i-1,i} = q_{j-1,j} = \lambda, \quad \forall i, j$$



# Sistema M/M/1/K: Ecuaciones de equilibrio

## Lema

*Ecuaciones de equilibrio M/M/1/K En régimen estacionario, las ecuaciones de equilibrio de un sistema M/M/1/K resultan en*

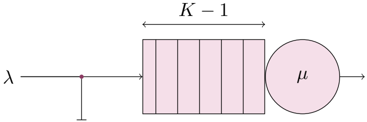
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & i = 0 \\ \rho^i \pi_0, & 0 < i \leq K \end{cases} \tag{7}$$

*Demostración*: de la cadena se deduce por inducción que $\pi_i = \rho^i \pi_0$. Sabiendo que $\sum_i^K \pi_i = 1$, tenemos

$$1 = \pi_0 \sum_{i=0}^{K} \rho^i \Longleftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}(1-\rho^{K+1})}$$

# Sistema M/M/1/K: Probabilidad de bloqueo

El sistema M/M/1/K bloquea la entrada de usuarios si la cola está llena



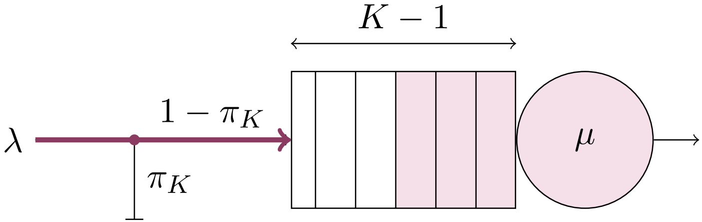

lo cual sucede con probabilidad

$$\pi_K = \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

según las ecuaciones de equilibrio (7).

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

El caudal cursado será el de los usuarios admitidos $\overline{\lambda}$




el cual es precisamente $\overline{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K)$.

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

*Ejemplo*: sea un servidor con tasa $\mu = 1$ [usuarios/sec] y $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado $\overline{\lambda}$ quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].

$$k : \overline{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K) \geq 0.7 \Longleftrightarrow \lambda \left(1 - \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right) \geq 0.7$$

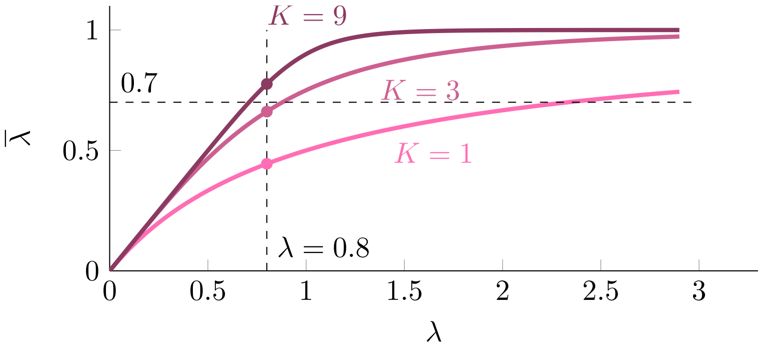
$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1 - \frac{0.7}{\lambda}}{1-\rho}}_{A} \geq \frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}} \Longleftrightarrow \rho^K \leq \frac{A}{1 + A\rho}$$

sustituyendo $A = \frac{1-0.7/0.8}{1-0.8} = \frac{5}{8}$ y $\rho = \frac{8}{10}$ queda

$$\rho^K \leq \frac{5}{12} \Longleftrightarrow K \geq \log_\rho \frac{5}{12} \Longleftrightarrow K \geq 3.92$$

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

*Ejemplo*: sea un servidor con tasa $\mu = 1$ [usuarios/sec] y $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado $\overline{\lambda}$ quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].



# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

## Lema (Número medio usuarios M/M/1/K)

*El número medio de usuarios en un sistema M/M/1/K es*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \tag{8}$$

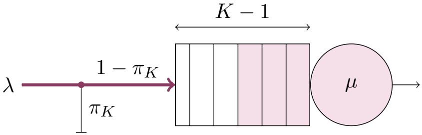
*Demostración*:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=0}^{K+1} i\pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{K} i\rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{K} \rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{dt} \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho) + (1-\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2} = \dots$$

# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

Para aplicar Little hay que considerar el caudal efectivo $\overline{\lambda}$.




En concreto

$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)}$$

Y sabiendo que el tiempo medio de espera de los atendidos es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[T(t)] - \mathbb{E}[t_s] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)} - \frac{1}{\mu}$$

sacamos el número medio de usuarios encolados con Little

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \lambda(1-\pi_K)\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[N(t)] - \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$$

# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

*Ejemplo*: sea un sistema M/M/1/K con $K = 10$, $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], $\mu = 1$ [usuarios/sec]; ¿cuál es el tiempo medio que pasa un usuario atendido?

Primero sacabos el número medio de usuarios

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$
$$= \frac{0.8}{1-0.8} - \frac{(10+1)0.8^{10+1}}{1-0.8^{10+1}} \simeq 2.97 \text{ [usuarios]}$$

y luego usamos Little

$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)} = \frac{2.97}{0.8\left(1-0.8^{10}\frac{1-0.8}{1-0.8^{10+1}}\right)} \simeq 3.80 \text{ [sec]}$$

# Referencias I