Tema 5: Introducción al Teletráfico y a la Teoría de Colas

Redes y Servicios de Telecomunicaciones (RSTC)
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Jorge Martín Pérez[1]

[1]Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Madrid

March 7, 2023

Contenido

Introducción

Introducción

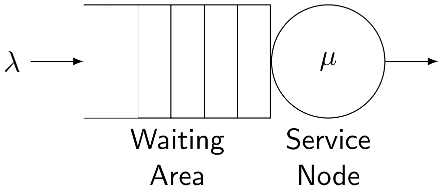
La teoría de colas modela:

- colas de supermercado;
- colas en gasolineras;
- colas en taquillas; o
- **colas de routers**.

Nos interesa saber:

- ¿cuánto vamos a esperar?; o
- la probabilidad de que esté llena la cola.

Introducción



En una cola:

- llegan λ [usuarios/sec]
- hay $q = 4$ usuarios encolados;
- hay $n = 5$ usuarios en total; y
- se sirven μ [usuarios/sec].

Introducción

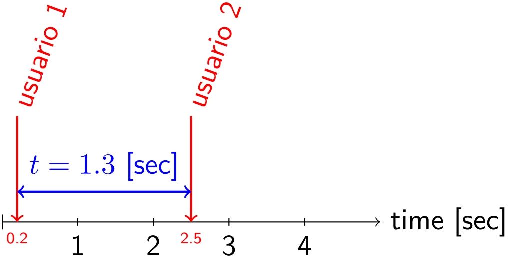
Problema:

- las llegadas; y
- tiempos de servicio

son **aleatorios**.

Ejemplo: la persona que nos atiende en caja tarda más o menos dependiendo de como de cansada esté, o de cuánto tarde la pasarela de pago (aleatorio).

Distribución Exponencial



El tiempo entre los usuarios que llegan a la cola t se puede modelar con la **distribución exponencial**.

Distribución Exponencial

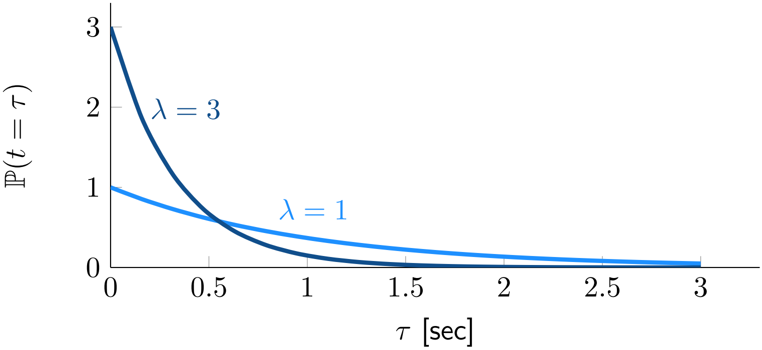
Definición (Distribución exponencial)

Se dice que una variable aleatoria continua $t \in \mathbb{N}$ *sigue una distribución exponencial si su función de densidad es:*

$$f_t(\tau) = \mathbb{P}(t = \tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \tag{1}$$

donde $\lambda > 0$ *es el parámetro que caracteriza la distribución.*

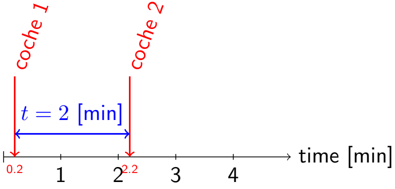
Distribución Exponencial: propiedades



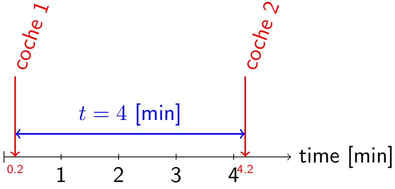
- **media**: $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$
- **varianza**: $\mathrm{Var}[t] = \frac{1}{\lambda^2}$

Distribución Exponencial: ejemplo gasolinera

Ejemplo: el tiempo medio que pasa un coche en un surtidor es $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda} = 2$ [min]. Por tanto $\lambda = \frac{1}{2}$ [coches/min].



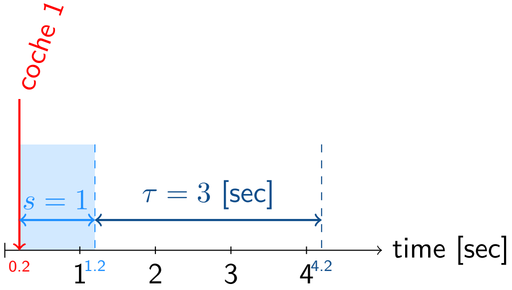
(a) $\mathbb{P}(t = 2) = \frac{1}{2}\ e^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 0.18$



(b) $\mathbb{P}(t = 4) = \frac{1}{2}\ e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = 0.07$

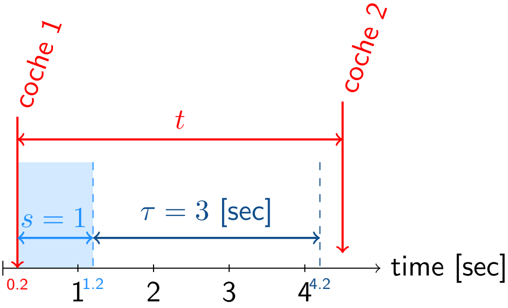
Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) \tag{2}$$



Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

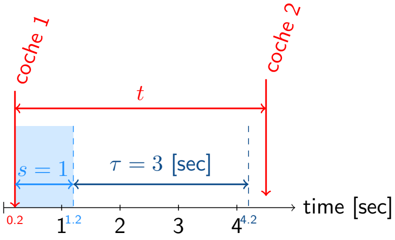
$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) \tag{2}$$



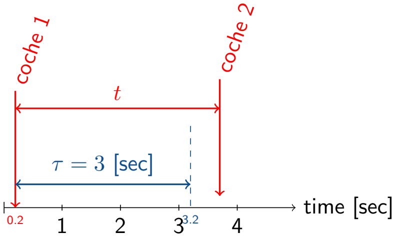
Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Por la propiedad sin memoria de una exponencial tenemos que:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) \tag{3}$$



(a) $\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s)$



(b) $\mathbb{P}(t > \tau)$

Ejemplo: en media el surtidor de una gasolinera está ocupado 5 [min]. Si el surtidor lleva $s = 1$ [min] ocupado, ¿cuál es la probabildad de que esté ocupado $\tau = 3$ [min] más?

Por la propiedad sin memoria tenemos:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t > 3) = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5} \cdot 3} = 0.11$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Con qué probabilidad llegua un coche cualquiera en 3 [min]?

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Lema (Mínimo de v.a. exponenciales)

Sean las v.a.[a] *exponenciales* t_1 *y* t_2, *con tasas* λ_1 *y* λ_2; *la v.a.* $t = \min\{t_1, t_2\}$ *se distribuye como una v.a. exponencial de tasa* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

[a] v.a. significa variable aleatoria

Demostración:

$$\mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t_1 > \tau)\mathbb{P}(t_2 > \tau) = \left(\int_\tau^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt\right)\left(\int_\tau^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt\right)$$
$$= e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 \tau} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} = e^{-\lambda\tau}$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

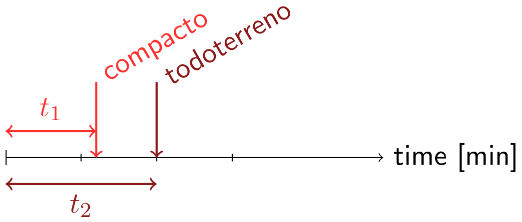
Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

$$
\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(t > 1) &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\cdot 3} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) e^{-(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})\cdot 3} = 0.12
\end{aligned}
$$

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?



Lema (Comparación de v.a. exponenciales)

Sean las v.a. exponenciales t_1 *y* t_2*, con tasas* λ_1 *y* λ_2*; se tiene que:*

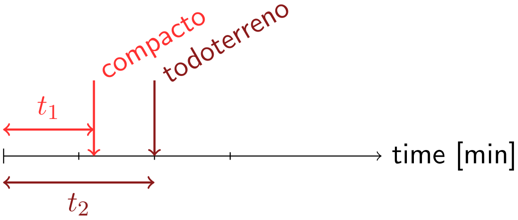
$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{4}$$

Demostración:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(t_1 = t)\mathbb{P}(t_2 > t)\, dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}\, dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

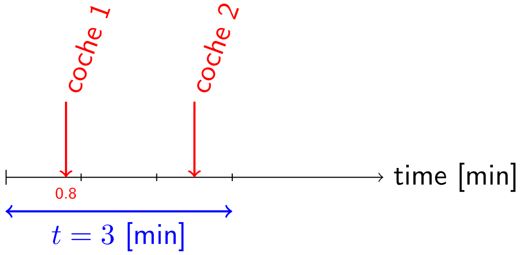
¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?



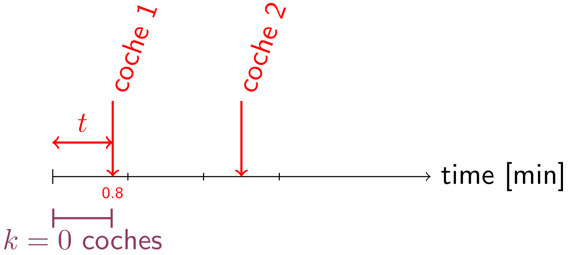
$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 0.67 \tag{5}$$

Procesos de llegada de Poisson

Buscamos una distribución que diga cómo de probable es que lleguen 2 coches en 3 segundos:

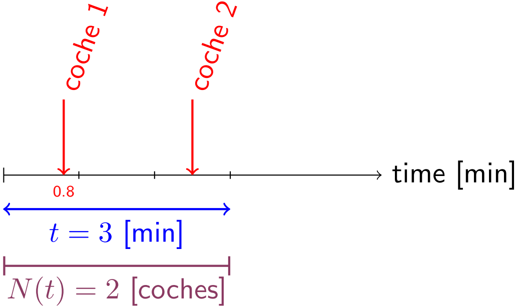


Si el tiempo entre llegadas es exponencial, sabemos la probabilidad de que lleguen $k = 0$ coches en $t = 0.8$ [min].



$$\mathbb{P}(0 \text{ coches en } 0.8 \text{ min}) = 1 - \mathbb{P}(t > 0.8) = 1 - \lambda 0.8 e^{-\lambda 0.8}$$

Pero lo que queremos es contar el número de coches $N(t) = 2$ que llegan en $t = 3$ [min], y saber qué probabilidad tiene $\mathbb{P}(N(t) = 2)$

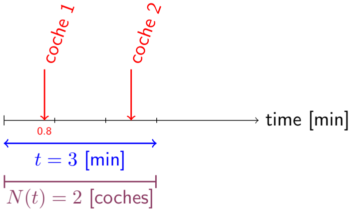


Procesos de llegada de Poisson: Conteo

Definición (Distribución de Poisson)

Un proceso de llegadas $N(t)$ *con tasa* λ *es de Poisson si el tiempo entre llegadas se distribuye como una v.a. exponencial de media* $\frac{1}{\lambda}$*; y su función de densidad es*

$$\mathbb{P}(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k \ e^{-\lambda t}}{k!} \tag{6}$$

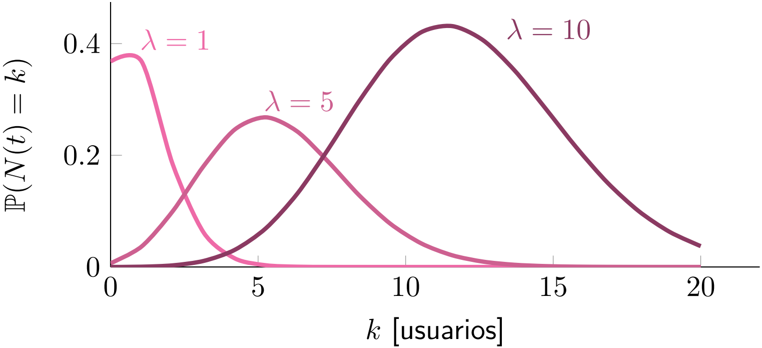


Ejemplo: $\mathbb{P}(N(3)=2) = \frac{(\lambda 3)^2 \ e^{-\lambda 3}}{2!} \underbrace{=}_{\lambda=2/3} 0.27$

Procesos de llegada de Poisson: Conteo

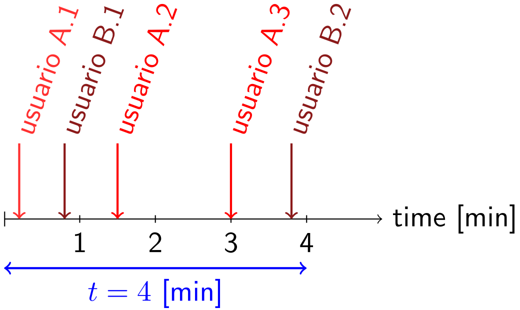
Propiedades de la distribución de Poisson:

- **media**: $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ usuarios
- **varianza**: $\mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$ usuarios^2



Procesos de llegada de Poisson: Agregado

¿Cómo se distribuyen las llegadas de **A** y **B** juntos?



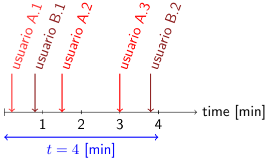
Vemos que:

- $\lambda_A = \frac{3}{4}$ [coches/min], ya que $N_A(t = 4\text{min}) = 3$ [coches]
- $\lambda_B = \frac{2}{4}$ [coches/min], ya que $N_B(t = 4\text{min}) = 2$ [coches]

Procesos de llegada de Poisson: Agregado

Lema (Agregado procesos de Poisson)

Sean **A** *y* **B** *dos procesos de Poisson independientes con tasas* λ_1 *y* λ_2*; el agregado es un proceso de Poisson de tasa* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.



Demostración (caso general n procesos):

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \prod_i^n \mathbb{P}(N_i(t) = 0) = \prod_i^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_i^n \lambda_i t} = e^{-\lambda t} \quad (7)$$

Procesos de llegada de Poisson: Agregado

Teorema (Palm-Khintchine [YMG23])

Sea $\{N_i(t)\}_i^n$ *un conjunto de* n *procesos de llegada independientes con sendas tasas* λ_i. *La superposición de procesos*

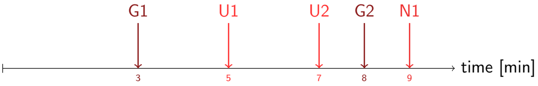
$$N(t) = \sum_i^n N_i(t), t \geq 0 \tag{8}$$

tiende a un **proceso de Poisson** *de tasa* $\lambda = \sum_i \lambda_i$ *cuando* $n \to \infty$, *siempre y cuando se cumpla:*

1. *carga finita* $\lambda < \infty$; *y*
2. *ningún proceso domine al agregado* $\lambda_i << \lambda$

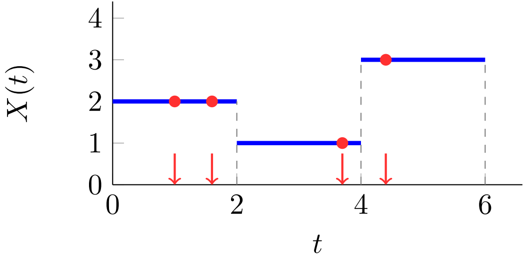
Ejemplo (tma. Palm-Khintchine): los tiempos de llegada de coches dependen del color, y son independientes del de otros colores. Además:

- tiempo entre coches rojos $\sim U(0, 10 \text{ [min]})$
- tiempo entre coches granates $\sim N(\mu = 20 \text{ [min]}, \sigma = 1 \text{ [min]})$
- ...
- tiempo entre coches fucsia $\sim Geo(p = 0.2)$



El agregado será un proceso Poisson de tasa $\lambda = \sum_i \lambda_i = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \ldots + p$

"Poisson Arrivals See Time Averages" (PASTA)[1]



En media, los valores vistos por llegadas de Poisson es la media temporal $\overline{X}(t)$.

[1]Ejemplo de [YMG23, Figura 3.17]

Procesos de llegada de Poisson: PASTA

Lema (PASTA)

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio, y Y la v.a. definida como el valor que toman las llegadas de Poisson al muestrear $X(t)$, se tiene que:

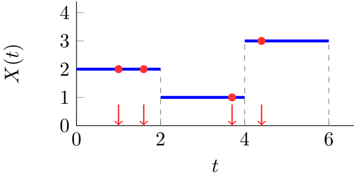
$$\overline{X}(t) = \overline{Y} \tag{9}$$

Media temporal:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{6}\int_0^6 X(t)\ dt = \frac{1}{6}(2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2) = \frac{8}{6}$$

Llegadas de Poisson:

$$\overline{Y} = 2\cdot \mathbb{P}([0,2]) + 1\cdot \mathbb{P}([2,4]) + 3\cdot \mathbb{P}([4,6]) = 2\cdot\frac{2}{6} + 1\cdot\frac{2}{6} + 3\cdot\frac{2}{6} = \frac{8}{6}$$



con

$$\mathbb{P}([0,2]) = \frac{\mathbb{P}(N(0,2)=1)\mathbb{P}(N(2,4)=0)\mathbb{P}(N(4,6)=0)}{\mathbb{P}(N([0,6])=1)} = \frac{\frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!}\frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}\frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}}{\frac{(6\lambda)^1 e^{-6\lambda}}{1!}} = \frac{2}{6}$$

Sistema M/M/1

Sistema M/M/1

La notación de Kendall define cómo es una cola

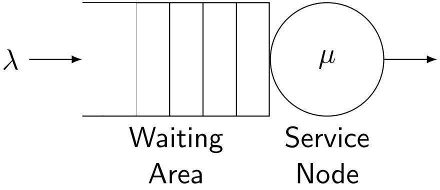
$$A/S/c/K/N/D$$

donde:

- **A** es la v.a. del tiempo entre llegadas;
- **S** es la v.a. del tiempo de servicio;
- **c** es el número de servidores que atienden la cola;
- **K** es en tamaño de la cola;
- **N** es la cantidad de llegadas; y
- **D** es la política de encolado.

Sistema M/M/1

Un M/M/1 es una cola[2] como la de la figura.



donde:

- el tiempo entre llegadas es exponencial (M);
- el tiempo de servicio es exponencial (M);
- hay un servidor atendiento (1); y
- la cola es infinita (∞).

[2] en notación Kendall $M/M/1/\infty/\infty/FIFO$

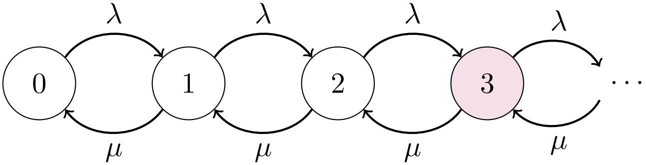
Sistema M/M/1

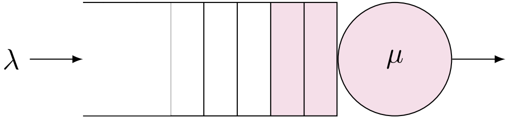
Queremos responder a preguntas cómo:

- ¿cuál es la probabilidad de esperar en cola?
- ¿cuánto esperaré en la cola? o
- ¿cuánto tardaré en ser servido?

Para ello modelamos la cola con una cadena de Markov.

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo





- estados = #usuarios en cola y servidor
- transiciones = tasa de llegada λ / tasa de servicio μ

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

Definición (Cadena de Markov en tiempo continuo[YMG23])

Un proceso estocástico $\{N(t),\ t > 0\}$ *es una cadena de Markov si cumple:*

1. *el tiempo de estancia en el estado* i *sigue una v.a. exponencial independiente de tasa* ν_i*; y*
2. *el proceso pasa del estado* i *al* j *con una probabilidad* π_{ij} *que cumple* $\sum_j \pi_{ij} = 1,\ \forall i$

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov?

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov? **Sí**.

1. el tiempo de estancia T en un estado se distribuye como una exponencial de tasa $\nu = \lambda_l + \lambda_s$:

$$\mathbb{P}(T > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = e^{-(\lambda_l+\lambda_s)\tau}$$

   con t_l, t_s las v.a. exponenciales del tiempo de llegada y servicio.

2. la suma de probabilidades de transición es uno

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t+1) = k+1 |\ N(t) = k) + \mathbb{P}(N(t+1) = k-1 |\ N(t) = k)\\ = \mathbb{P}(t_l < t_s) + \mathbb{P}(t_s < t_l) = \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_s} + \frac{\lambda_s}{\lambda_l + \lambda_s} = 1\end{aligned}$$

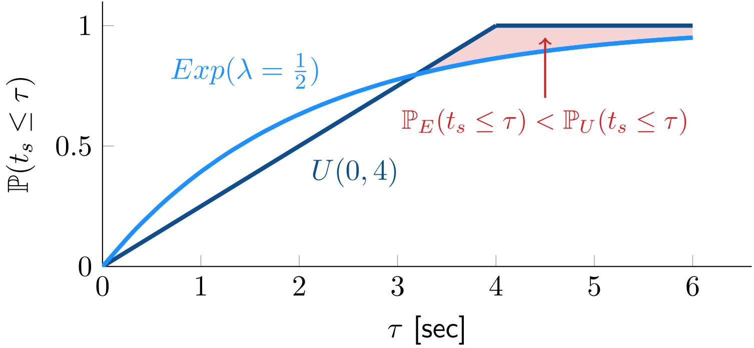
Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada**: sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.

¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

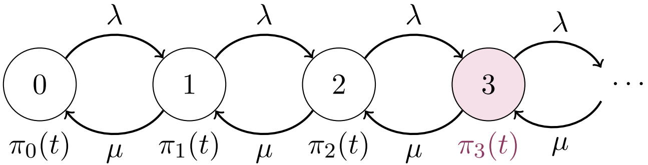
- **tiempos de llegada**: sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.
- **tiempos de servicio**: no, pero da expresiones cerradas y es una cota pesimista para altas fiabilidades



Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

La cadena de Markov va pasando por estados[3].
En el instante t estaremos la probabilidad de estar en cada estado es, e.g.:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \ldots) = (0.02, 0.12, 0.3, 0.07, \ldots)$$



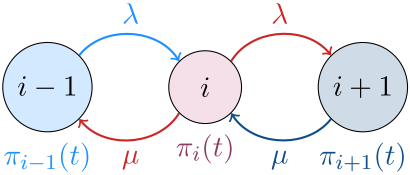
[3] `https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html`

¿Cómo varía la probabilidad de estar en el estado i tras ε [sec]?

$$\frac{d}{dt}\pi_i(t) = -\pi_i(t)\nu_i + \sum_{j\neq i}\pi_j(t)\cdot\nu_j\pi_{ji}$$

$$= -\pi_i(t)(\lambda+\mu) + \pi_{i-1}(t)\cdot(\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \pi_{i+1}(t)\cdot\overbrace{(\lambda+\mu)}^{\nu_{i+1}}\overbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}^{\pi_{i,i+1}(t)}$$

$$= -\pi_i(t)(\lambda+\mu) + \pi_{i-1}(t)\lambda + \pi_{i+1}(t)\mu \quad (10)$$



Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

Si $t \to \infty$, la cadena alcanza [YMG23] una distribución estacionaria donde las probabilidades no varían:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\pi_i(t) = 0, \quad \forall i$$

Nos referimos a la **distribución estacionaria** como $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}(t)$.
Ejemplo:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots) = (0.12, 0.04, 0.17, 0.06, \ldots)$$

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Usando (10) y (44) podemos definir la **ecuación de equilibrio** para encontrar la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$:

$$0 = \boldsymbol{\pi} Q = (\pi_0, \pi_1, \ldots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{11}$$

con $q_{ij} = \nu_i \pi_{ij}$ es la entrada (i,j) de la matriz de transición Q.

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (12) sacamos el sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\pi_i = \pi_{i-1}\frac{\lambda}{\mu}, \quad \forall i > 0 \tag{12}$$

que equivale a:

$$\pi_i = \pi_0 \rho^i, \quad \forall i > 0 \tag{13}$$

donde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ es la **carga del sistema**.

De (13) sacamos la probabilidad de que el sistema M/M/1 esté vacío:

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0 \rho^i \\
&= 1 - \pi_0 \frac{1-\rho}{1-\rho} \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots \right) \\
&= 1 - \pi_0 \frac{1}{1-\rho} \lim_{\iota \to \infty} \left(\rho - \rho^2 + \rho^2 - \rho^3 + \rho^3 - \ldots - \rho^{\iota} \right) \\
&= 1 - \pi_0 \frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned} \tag{14}
$$

siempre y cuando $\rho < 1$.

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Despejando en (14) y (13) obtenemos que

Lema (Probabilidades estado M/M/1)

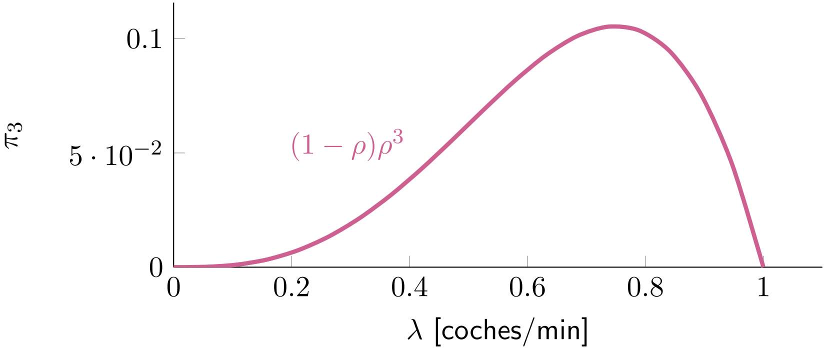
En un sistema M/M/1 la probabilidad de estar en el estado i es:

$$\pi_i = \begin{cases} 1-\rho, & i=0 \\ (1-\rho)\rho^i, & i>0 \end{cases} \tag{15}$$

donde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ es la carga del sistema.

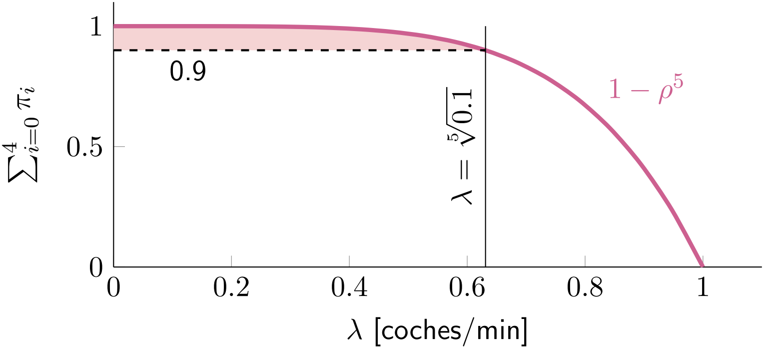
Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Ejemplo: en una gasolinera llegan λ [coches/min] a un surtidor que sirve a tasa $\mu = 1$ [coches/min].
¿Cómo varia la probabilidad de tener $i = 3$ coches en función de λ?



Ejemplo (cont.): ¿cuántos coches aguanta el surtidor para que el 90% de las veces tenga menos de 5 coches?

$$\lambda : \sum_{i=0}^{4} \pi_i = \sum_{i=0}^{4} (1-\rho)\rho^i = 1 - \rho^5 \geq 0.9 \implies \lambda \leq \sqrt[5]{0.1} \text{ [coches/min]}$$



Lemma (Número medio de usuarios en un M/M/1)

El número medio de usuarios en un sistema M/M/1 es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{16}$$

Demostración:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = (1-\rho)\rho \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1} = (1-\rho)\rho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \ldots = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Lemma (Número medio de usuarios encolados en un M/M/1)

El número medio de usuarios encolados en un sistema M/M/1 es

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{17}$$

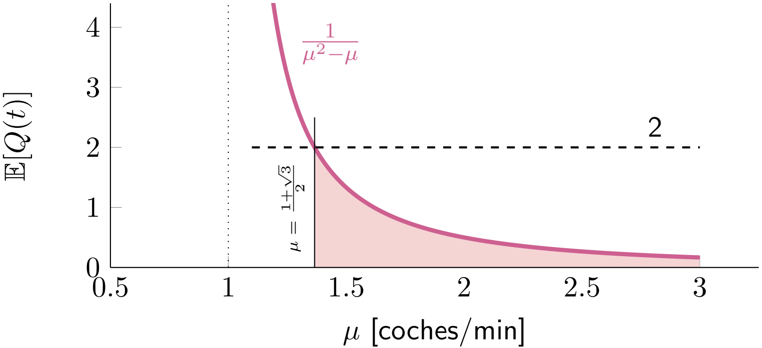
Demostración:

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i - \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i$$
$$= \mathbb{E}[N(t)] - (1-\pi_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Sistema M/M/1: Métricas famosas

Ejemplo (cont.): si llegan $\lambda = 1$ [coches/min], ¿cómo de rápido debe ser el surtidor para que, en media, haya menos de 3 coches esperando?

$$\mu : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{1}{\mu^2 - \mu} \leq 2 \implies \mu \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ [coches/min]} \tag{18}$$



Sistema M/M/1: Métricas famosas

¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola on en ser servido?

¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola on en ser servido?

Teorema (Teorema de Little)

En un sistema de colas, la relación entre tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)]$ *y número medio de usuarios es*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)] \cdot \lambda \quad (19)$$

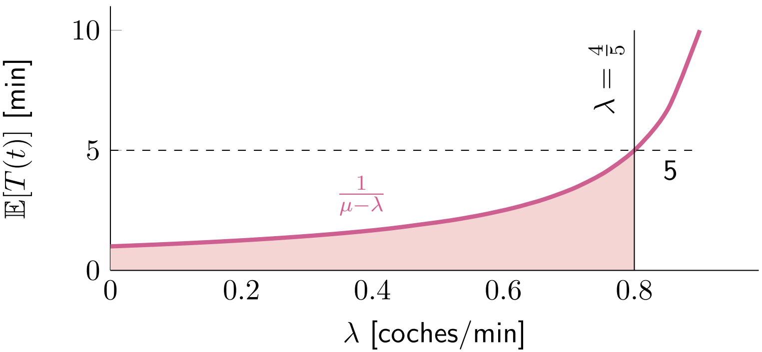
Del mismo modo, la relación entre tiempo medio de espera en cola $\mathbb{E}[W(t)]$ *y número medio de usuario en colas es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \mathbb{E}[W(t)] \cdot \lambda \quad (20)$$

Sistema M/M/1: Métricas famosas

Ejemplo: ¿cuál es la cantidad máxima de coches que agunta la gasolinera para que, en media, un coche tarde menos de 5 [min] en repostar?

$$\lambda : \mathbb{E}[T(t)] = \frac{1}{\mu - \lambda} \leq 5 \implies \lambda \leq \frac{4}{5} \text{ [coches/min]} \tag{21}$$



Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.