Tema 5: Introducción al Teletráfico y Teoría de Colas

[1]Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Madrid

April 10, 2023

RSTC
Redes y Servicios de Telecomunicación

Contenido

Introducción

Introducción

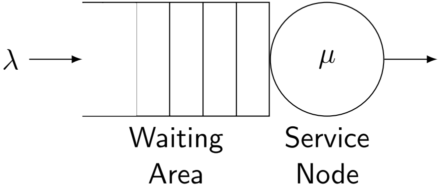
La teoría de colas modela:

- colas de supermercado;
- colas en gasolineras;
- colas en taquillas; o
- **colas de routers**.

Nos interesa saber:

- ¿cuánto vamos a esperar?; o
- la probabilidad de que esté llena la cola.

Introducción



En una cola:

- llegan λ [usuarios/sec]
- hay $q = 4$ usuarios encolados;
- hay $n = 5$ usuarios en total; y
- se sirven μ [usuarios/sec].

Introducción

Problema:

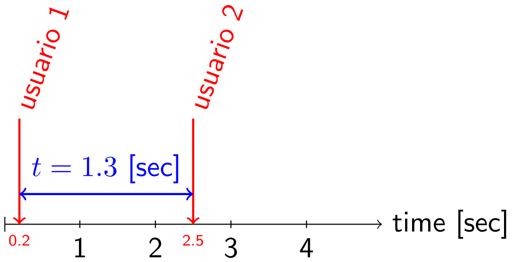
- las llegadas; y
- tiempos de servicio

son **aleatorios**.

Ejemplo: la persona que nos atiende en caja tarda más o menos dependiendo de como de cansada esté, o de cuánto tarde la pasarela de pago (aleatorio).

Distribución Exponencial

Distribución Exponencial



El tiempo entre los usuarios que llegan a la cola t se puede modelar con la **distribución exponencial**.

Distribución Exponencial

Definición (Distribución exponencial)

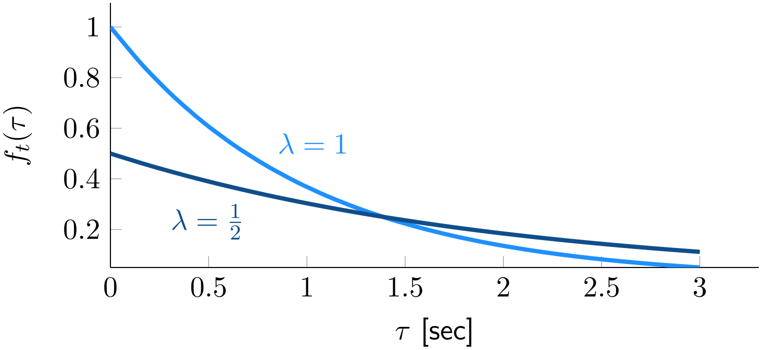
Se dice que una variable aleatoria continua $t \in \mathbb{N}$ *sigue una distribución exponencial si su función de densidad es:*

$$f_t(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \tag{1}$$

donde $\lambda > 0$ *es el parámetro que caracteriza la distribución; y su función de distribución acumulada es*

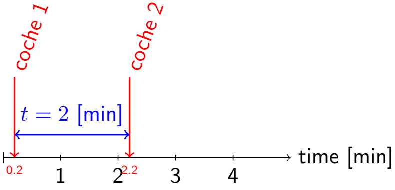
$$F_t(\tau) = \mathbb{P}(t \leq \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} \tag{2}$$

Distribución Exponencial: propiedades

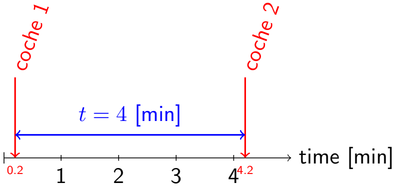


- **media**: $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$
- **varianza**: $\mathrm{Var}[t] = \frac{1}{\lambda^2}$

Ejemplo: el tiempo medio que pasa un coche en un surtidor es $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda} = 2$ [min]. Por tanto $\lambda = \frac{1}{2}$ [coches/min].



(a) $\mathbb{P}(t \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = 0.63$

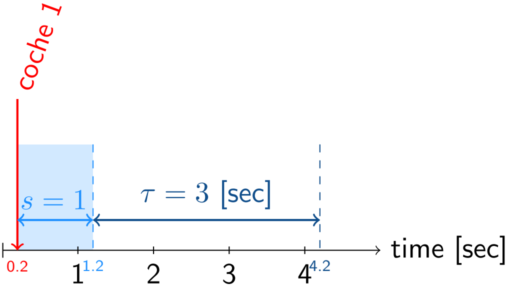


(b) $\mathbb{P}(t \leq 4) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = 0.86$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

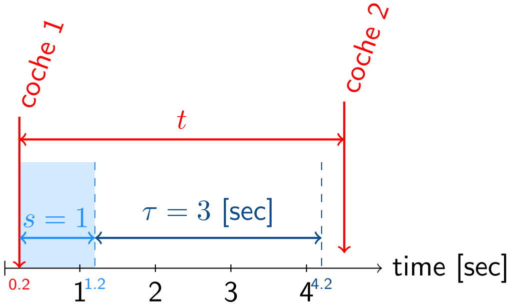
$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) \tag{3}$$



Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

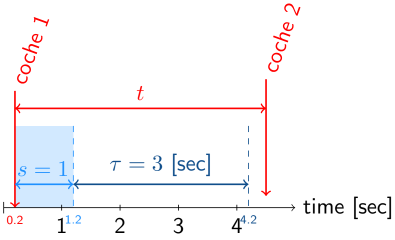
Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau | \; t > s) \quad (3)$$

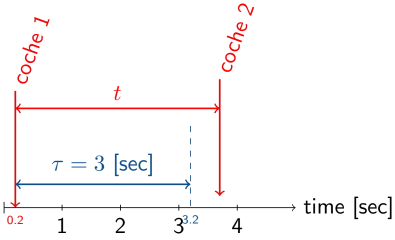


Por la propiedad sin memoria de una exponencial tenemos que:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) \tag{4}$$



(a) $\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s)$



(b) $\mathbb{P}(t > \tau)$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Ejemplo: en media el surtidor de una gasolinera está ocupado 5 [min]. Si el surtidor lleva $s = 1$ [min] ocupado, ¿cuál es la probabildad de que esté ocupado $\tau = 3$ [min] más?

Por la propiedad sin memoria tenemos:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau | \, t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t > 3) = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5} \cdot 3} = 0.11$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Lema (Mínimo de v.a. exponenciales)

Sean las v.a.[a] *exponenciales* t_1 *y* t_2, *con tasas* λ_1 *y* λ_2*; la v.a.* $t = \min\{t_1, t_2\}$ *se distribuye como una v.a. exponencial de tasa* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

[a] v.a. significa variable aleatoria

Demostración:

$$\mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t_1 > \tau)\mathbb{P}(t_2 > \tau) = \left(\int_\tau^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt\right)\left(\int_\tau^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt\right)$$
$$= e^{-\lambda_1\tau}e^{-\lambda_2\tau} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} = e^{-\lambda\tau}$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

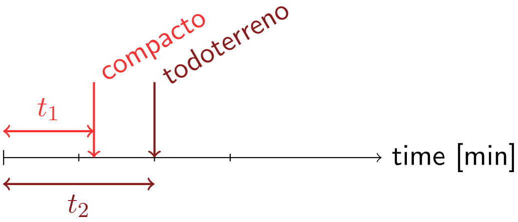
¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

$$
\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(t > 3) &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot 3} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{-(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})\cdot 3} = 0.12
\end{aligned}
$$

Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?



Lema (Comparación de v.a. exponenciales)

Sean las v.a. exponenciales t_1 y t_2, con tasas λ_1 y λ_2; se tiene que:

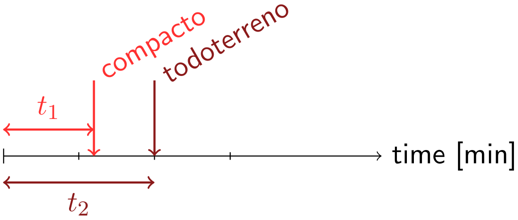
$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{5}$$

Demostración:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \int_0^\infty f_{t_1}(t)\mathbb{P}(t_2 > t)\, dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}\, dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?

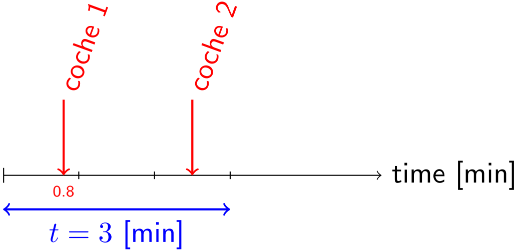


$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 0.67 \tag{6}$$

Procesos de llegada de Poisson

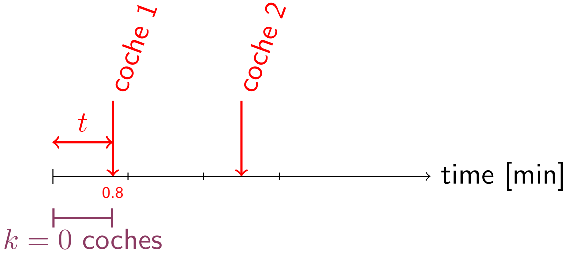
Procesos de llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

Buscamos una distribución que diga cómo de probable es que lleguen 2 coches en 3 segundos:



Procesos de llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

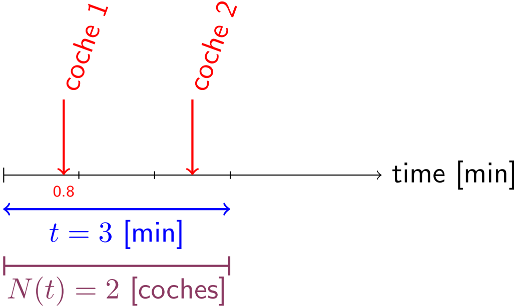
Si el tiempo entre llegadas es exponencial, sabemos la probabilidad de que lleguen $k = 0$ coches en $t = 0.8$ [min].



$$\mathbb{P}(0 \text{ coches en } 0.8 \text{ min}) = 1 - \mathbb{P}(t > 0.8) = 1 - \lambda 0.8 e^{-\lambda 0.8}$$

Procesos de llegada de Poisson: Conteo

Pero lo que queremos es contar el número de coches $N(t) = 2$ que llegan en $t = 3$ [min], y saber qué probabilidad tiene $\mathbb{P}(N(t) = 2)$

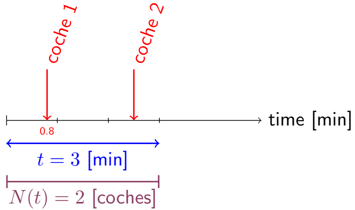


Procesos de llegada de Poisson: Conteo

Definición (Distribución de Poisson)

Un proceso de llegadas $N(t)$ *con tasa* λ *es de Poisson si el tiempo entre llegadas se distribuye como una v.a. exponencial de media* $\frac{1}{\lambda}$*; y su función de densidad es*

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k \; e^{-\lambda t}}{k!} \tag{7}$$

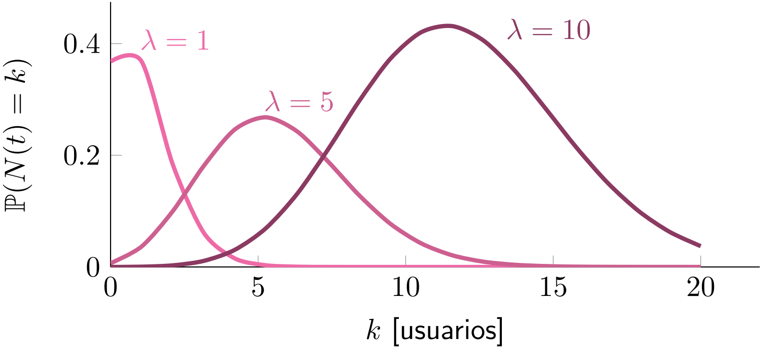


Ejemplo: $\mathbb{P}(N(3) = 2) = \frac{(\lambda 3)^2 \; e^{-\lambda 3}}{2!} \underbrace{=}_{\lambda=2/3} 0.27$

Procesos de llegada de Poisson: Conteo

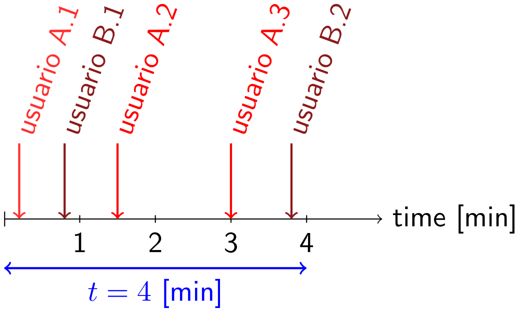
Propiedades de la distribución de Poisson:

- **media**: $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ usuarios
- **varianza**: $\mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$ usuarios^2



Procesos de llegada de Poisson: Agregado

¿Cómo se distribuyen las llegadas de **A** y **B** juntos?



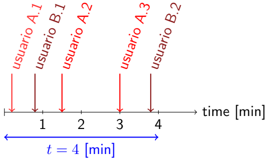
Vemos que:

- $\lambda_A = \frac{3}{4}$ [coches/min], ya que $N_A(t = 4\text{min}) = 3$ [coches]
- $\lambda_B = \frac{2}{4}$ [coches/min], ya que $N_B(t = 4\text{min}) = 2$ [coches]

Procesos de llegada de Poisson: Agregado

Lema (Agregado procesos de Poisson)

Sean **A** *y* **B** *dos procesos de Poisson independientes con tasas λ_1 y λ_2; el agregado es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.*



Demostración (caso general n procesos):

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \prod_{i}^{n} \mathbb{P}(N_i(t) = 0) = \prod_{i}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_i^n \lambda_i t} = e^{-\lambda t} \tag{8}$$

Teorema (Palm-Khintchine [YMG23])

Sea $\{N_i(t)\}_i^n$ *un conjunto de* n *procesos de llegada independientes con sendas tasas* λ_i. *La superposición de procesos*

$$N(t) = \sum_i^n N_i(t), t \geq 0 \tag{9}$$

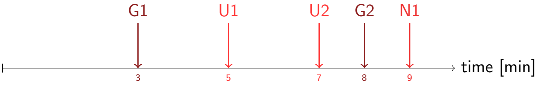
tiende a un **proceso de Poisson** *de tasa* $\lambda = \sum_i \lambda_i$ *cuando* $n \to \infty$, *siempre y cuando se cumpla:*

1. *carga finita* $\lambda < \infty$; *y*
2. *ningún proceso domine al agregado* $\lambda_i << \lambda$

Procesos de llegada de Poisson: Agregado

Ejemplo (tma. Palm-Khintchine): los tiempos de llegada de coches dependen del color, y son independientes del de otros colores. Además:

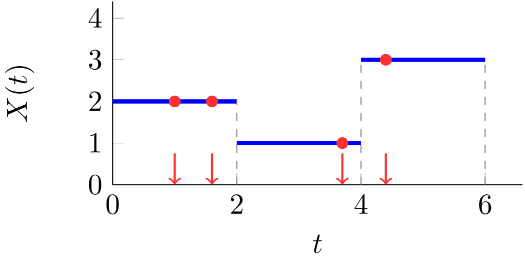
- tiempo entre coches rojos $\sim U(0, 10 \text{ [min]})$
- tiempo entre coches granates $\sim N(\mu = 20 \text{ [min]}, \sigma = 1 \text{ [min]})$
- ...
- tiempo entre coches fucsia $\sim Geo(p = 0.2)$



El agregado será un proceso Poisson de tasa $\lambda = \sum_i \lambda_i = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \ldots + p$

Procesos de llegada de Poisson: PASTA

"Poisson Arrivals See Time Averages" (PASTA)[1]



En media, los valores vistos por llegadas de Poisson es la media temporal $\overline{X}(t)$.

[1] Ejemplo de [YMG23, Figura 3.17]

Procesos de llegada de Poisson: PASTA

Lema (PASTA)

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio, y Y la v.a. definida como el valor que toman las llegadas de Poisson al muestrear $X(t)$, se tiene que:

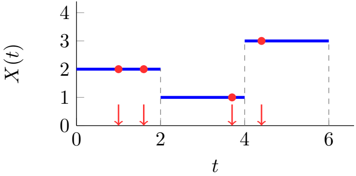
$$\overline{X}(t) = \overline{Y} \tag{10}$$

Media temporal:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{6}\int_0^6 X(t)\ dt = \frac{1}{6}(2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2) = \frac{8}{6}$$

Llegadas de Poisson:

$$\overline{Y} = 2\cdot \mathbb{P}([0,2]) + 1\cdot \mathbb{P}([2,4]) + 3\cdot \mathbb{P}([4,6]) = 2\cdot\frac{2}{6} + 1\cdot\frac{2}{6} + 3\cdot\frac{2}{6} = \frac{8}{6}$$

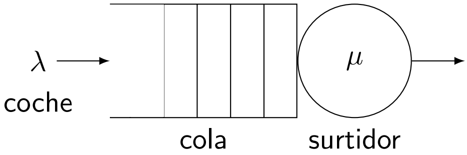


con

$$\mathbb{P}([0,2]) = \frac{\mathbb{P}(N(0,2)=1)\mathbb{P}(N(2,4)=0)\mathbb{P}(N(4,6)=0)}{\mathbb{P}(N([0,6])=1)} = \frac{\frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!}\ \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}\ \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}}{\frac{(6\lambda)^1 e^{-6\lambda}}{1!}} = \frac{2}{6}$$

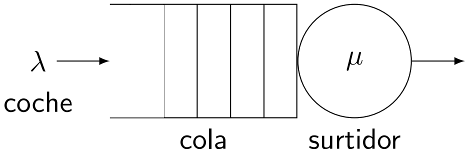
Teoría de Colas

Estudia las prestaciones de sistemas de colas como la ilustrada abajo



- λ: tasa de llegadas [vehículos/min]
- μ: tasa de servicio [vehículos/min]

Teoría de Colas

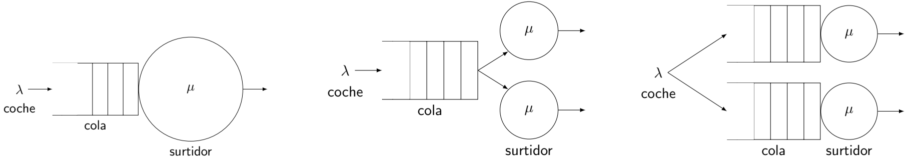


A lo largo del tiempo t queremos saber:

- $N(t)$: el número de usuarios en el sistema [vehículos]
- $T(t)$: el tiempo total en el sistema [min]
- $Q(t)$: el número de usuarios encolados [vehículos]
- $W(t)$: el tiempo de espera en cola [min]

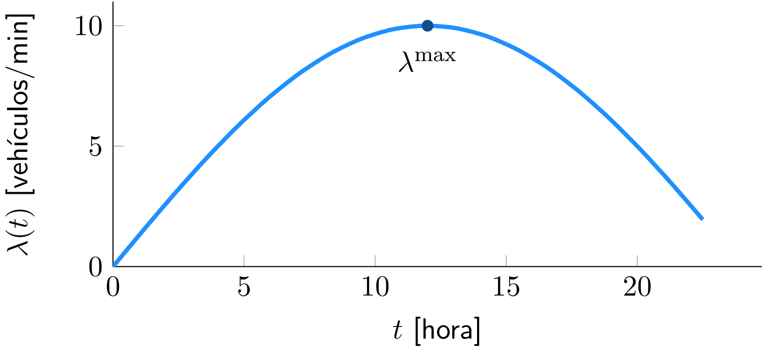
Teoría de Colas

Si llegan muchos usuarios (coches) a la cola, hay que dimensionar:



(a) Surtidor potente (b) Dos surtidores (c) Dos colas+surtidor

Hay que dimensionar para **hora pico** $\lambda^{\max}$.



Sistema M/M/1

Sistema M/M/1

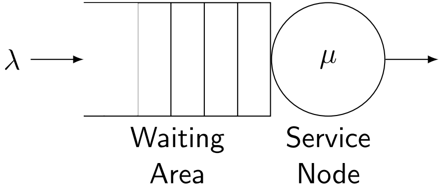
La notación de Kendall define cómo es una cola

$$A/S/c/K/N/D$$

donde:

- **A** es la v.a. del tiempo entre llegadas;
- **S** es la v.a. del tiempo de servicio;
- **c** es el número de servidores que atienden la cola;
- **K** es en tamaño de la cola;
- **N** es la cantidad de llegadas; y
- **D** es la política de encolado.

Un M/M/1 es una cola[2] como la de la figura.



donde:

- el tiempo entre llegadas es exponencial (M);
- el tiempo de servicio es exponencial (M);
- hay un servidor atendiento (1); y
- la cola es infinita (∞).

[2] en notación Kendall M/M/1/∞/∞/FIFO

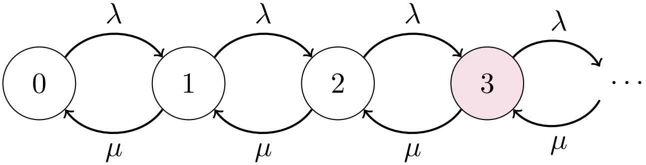
Sistema M/M/1

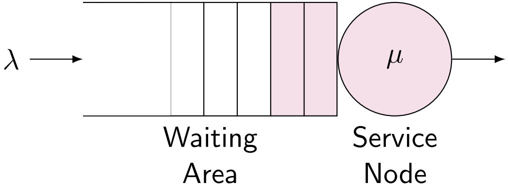
Queremos responder a preguntas cómo:

- ¿cuál es la probabilidad de esperar en cola?
- ¿cuánto esperaré en la cola? o
- ¿cuánto tardaré en ser servido?

Para ello modelamos la cola con una cadena de Markov.

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo





- estados = #usuarios en cola y servidor
- transiciones = tasa de llegada λ / tasa de servicio μ

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

Definición (Cadena de Markov en tiempo continuo[YMG23])

Un proceso estocástico $\{N(t),\ t > 0\}$ *es una cadena de Markov si cumple:*

1. *el tiempo de estancia en el estado* i *sigue una v.a. exponencial independiente de tasa* ν_i*; y*
2. *el proceso pasa del estado* i *al* j *con una probabilidad* π_{ij} *que cumple* $\sum_j \pi_{ij} = 1,\ \forall i$

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov?

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov? **Sí**.

1. el tiempo de estancia T en un estado se distribuye como una exponencial de tasa $\nu = \lambda_l + \lambda_s$:

$$\mathbb{P}(T > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = e^{-(\lambda_l + \lambda_s)\tau}$$

   con t_l, t_s las v.a. exponenciales del tiempo de llegada y servicio.

2. la suma de probabilidades de transición es uno

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t+1) = k+1 \mid N(t) = k) + \mathbb{P}(N(t+1) = k-1 \mid N(t) = k) \\ = \mathbb{P}(t_l < t_s) + \mathbb{P}(t_s < t_l) = \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_s} + \frac{\lambda_s}{\lambda_l + \lambda_s} = 1 \end{aligned}$$

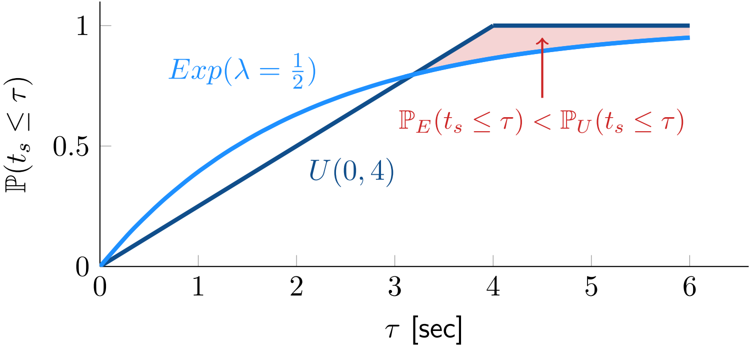
¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada**: sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

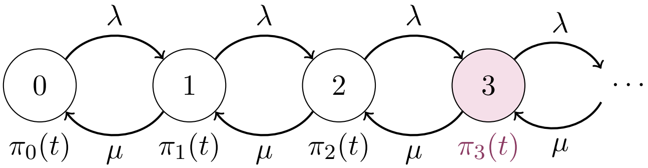
- **tiempos de llegada**: sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.
- **tiempos de servicio**: no, pero da expresiones cerradas y es una cota pesimista para altas fiabilidades



Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

La cadena de Markov va pasando por estados.
En el instante t la probabilidad de estar en cada estado es, e.g.:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \ldots) = (0.02, 0.12, 0.3, 0.07, \ldots)$$



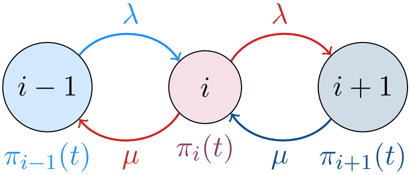
Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

¿Cómo varía la probabilidad de estar en el estado i tras ε [sec]?

$$\frac{d}{dt}\pi_i(t) = -\pi_i(t)\nu_i + \sum_{j\neq i}\pi_j(t)\cdot\nu_j\pi_{ji}$$

$$= -\pi_i(t)(\lambda+\mu) + \pi_{i-1}(t)\cdot(\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \pi_{i+1}(t)\cdot\overbrace{(\lambda+\mu)}^{\nu_{i+1}}\overbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}^{\pi_{i,i+1}(t)}$$

$$= -\pi_i(t)(\lambda+\mu) + \pi_{i-1}(t)\lambda + \pi_{i+1}(t)\mu \quad (11)$$



Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

Si $t \to \infty$, la cadena alcanza [YMG23] una distribución estacionaria donde las probabilidades no varían:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\pi_i(t) = 0, \quad \forall i \tag{12}$$

Nos referimos a la **distribución estacionaria** como $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}(t)$.
Ejemplo:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots) = (0.12, 0.04, 0.17, 0.06, \ldots)$$

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Usando (11) y (12) podemos definir la **ecuación de equilibrio** para encontrar la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$:

$$0 = \boldsymbol{\pi} Q = (\pi_0, \pi_1, \ldots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{13}$$

con $q_{ij} = \nu_i \pi_{ij}$ es la entrada (i, j) de la matriz de transición Q.

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (14) sacamos el sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\pi_i = \pi_{i-1}\frac{\lambda}{\mu}, \quad \forall i > 0 \tag{14}$$

que equivale a:

$$\pi_i = \pi_0 \rho^i, \quad \forall i > 0 \tag{15}$$

donde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ es la **carga del sistema**.

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (15) sacamos la probabilidad de que el sistema M/M/1 esté vacío:

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \qquad (16)\\
&= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0 \rho^i \\
&= 1 - \pi_0 \frac{1-\rho}{1-\rho} \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots\right) \\
&= 1 - \pi_0 \frac{1}{1-\rho} \lim_{\iota\to\infty} \left(\rho - \rho^2 + \rho^2 - \rho^3 + \rho^3 - \ldots - \rho^\iota\right) \\
&= 1 - \pi_0 \frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}
$$

siempre y cuando $\rho < 1$.

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Despejando en (16) y (15) obtenemos que

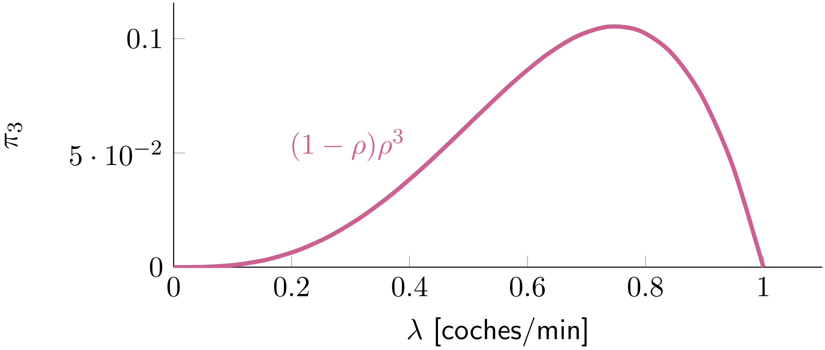
Lema (Probabilidades estado M/M/1)

En un sistema M/M/1 la probabilidad de estar en el estado i es:

$$\pi_i = \begin{cases} 1-\rho, & i=0 \\ (1-\rho)\rho^i, & i>0 \end{cases} \tag{17}$$

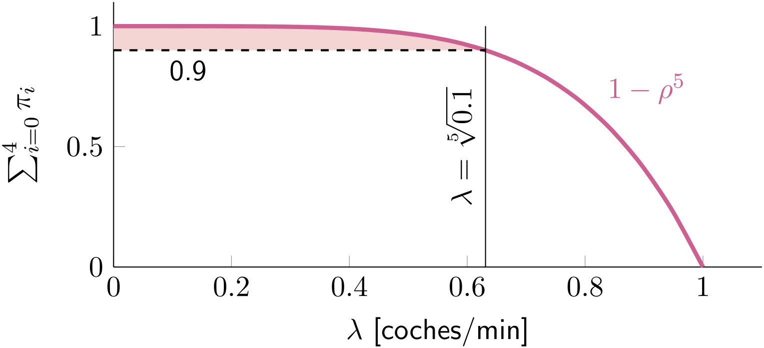
donde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ es la carga del sistema.

Ejemplo: en una gasolinera llegan λ [coches/min] a un surtidor que sirve a tasa $\mu = 1$ [coches/min].
¿Cómo varia la probabilidad de tener $i = 3$ coches en función de λ?



Ejemplo (cont.): ¿cuántos coches aguanta el surtidor para que el 90% de las veces tenga menos de 5 coches?

$$\lambda : \sum_{i=0}^{4} \pi_i = \sum_{i=0}^{4} (1-\rho)\rho^i = 1 - \rho^5 \geq 0.9 \implies \lambda \leq \sqrt[5]{0.1} \text{ [coches/min]}$$



Sistema M/M/1: Métricas famosas

Lemma (Número medio de usuarios en un M/M/1)

El número medio de usuarios en un sistema M/M/1 es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{18}$$

Demostración:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = (1-\rho)\rho \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1} = (1-\rho)\rho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \ldots = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Sistema M/M/1: Métricas famosas

Lemma (Número medio de usuarios encolados en un M/M/1)

El número medio de usuarios encolados en un sistema M/M/1 es

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{19}$$

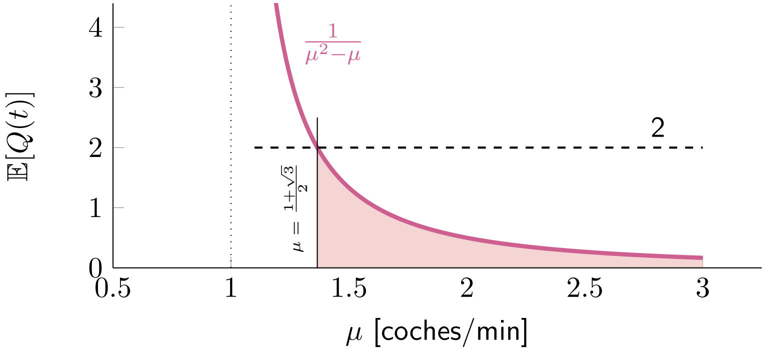
Demostración:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i - \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i \\ &= \mathbb{E}[N(t)] - (1-\pi_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}\end{aligned}$$

Sistema M/M/1: Métricas famosas

Ejemplo (cont.): si llegan $\lambda = 1$ [coches/min], ¿cómo de rápido debe ser el surtidor para que, en media, haya menos de 3 coches esperando?

$$\mu : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{1}{\mu^2 - \mu} \leq 2 \implies \mu \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ [coches/min]} \qquad (20)$$



Sistema M/M/1: Métricas famosas

¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola, o en ser servido?

Sistema M/M/1: Métricas famosas

¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola, o en ser servido?

Teorema (Teorema de Little)

En un sistema de colas, la relación entre tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)]$ *y número medio de usuarios es*

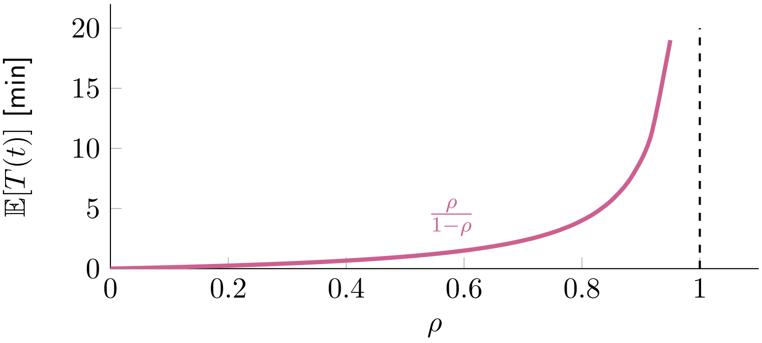
$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)] \cdot \lambda \tag{21}$$

Del mismo modo, la relación entre tiempo medio de espera en cola $\mathbb{E}[W(t)]$ *y número medio de usuario en colas es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \mathbb{E}[W(t)] \cdot \lambda \tag{22}$$

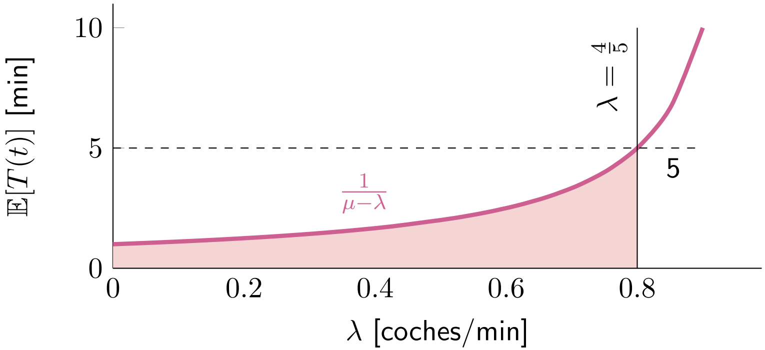
Sistema M/M/1: Métricas famosas

Si $\rho \to 1$, el tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)] \to \infty$.



Ejemplo: ¿cuál es la cantidad máxima de coches que agunta la gasolinera para que, en media, un coche tarde menos de 5 [min] en repostar?

$$\lambda : \mathbb{E}[T(t)] = \frac{1}{\mu - \lambda} \leq 5 \implies \lambda \leq \frac{4}{5} \text{ [coches/min]} \tag{23}$$



Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.