

# Tema 7: Teletráfico en redes de telecomunicaciones

May 8, 2023

# RSTC

Redes y Servicios de  
Telecomunicación



This work is licensed under a "CC BY-NC-SA 4.0" license.



- 1 Sistema M/M/N
  - Cadena de Markov
  - Ecuaciones de equilibrio
  - Segunda distribución de Earlang
  - Distribución de Earlang-C
  - Métricas famosas

- 2 Sistema M/M/1/K
  - Cadena de Markov
  - Ecuaciones de equilibrio
  - Probabilidad de bloqueo
  - Caudal cursado
  - métricas famosas

- 3 Sistema M/M/N/N
  - Cadena de Markov
  - Ecuaciones de equilibrio
  - Probabilidad de bloqueo

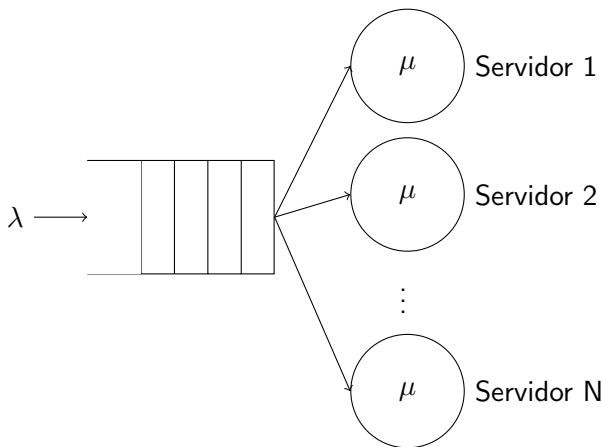
# Contenido II

- Caudal cursado
- Métricas famosas

# Sistema M/M/N

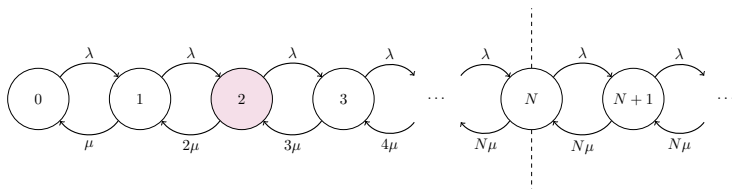
# Sistema M/M/N

Un sistema de cola única con  $t_l \sim Exp(\lambda)$  y N servidores en paralelo con  $t_s \sim Exp(\mu)$ .

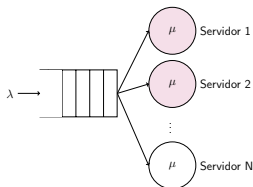


# Sistema M/M/N: Cadena de Markov

Un sistema M/M/N es un proceso estocástico Markoviano<sup>1</sup>.

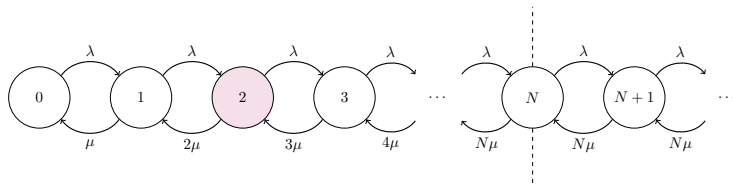


Sus tasas de transición no son homogéneas  $q_{i,j} = i\mu$ ,  $i \leq N$ .



<sup>1</sup>El tiempo de estancia es exponencial no homogéneo.

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio



Con  $i < N$  tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu)$$

pero con  $i \geq N$  tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + N\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + N\mu)$$

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

## Lema (Ecuaciones equilibrio M/M/N)

*En régimen estacionario de un sistema M/M/N, la probabilidad de estar en el estado  $i$  es:*

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{A^i}{i!} \pi_0, & i \leq N \\ \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0, & i \geq N \end{cases} \quad (1)$$

con  $A = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$ ; y

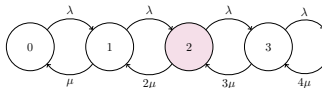
$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \quad (2)$$



# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

## Demostración:

- para  $i \leq N$  se tiene:



sabiendo que  $\pi_0\lambda = \pi_1\mu$  se tiene  $\pi_1 = A\pi_0$ . Por tanto tenemos que

$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = \pi_1(\lambda + \mu) \iff \pi_2 = \frac{A^2}{2}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 + 3\mu\pi_3 = \pi_2(\lambda + 2\mu) \iff \pi_3 = \frac{A^3}{3!}\pi_0$$

...

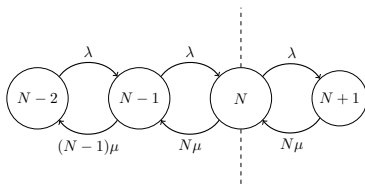
$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu) \iff \pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$$

y deducimos  $\pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$ .

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

## Demostración:

- para  $i \geq N$  se tiene:



$$\pi_{N-1}(\lambda + (N-1)\mu) = \pi_N N\mu + \pi_{N-2}\lambda$$

$$\pi_N = \frac{1}{N\mu} (\pi_{N-1}\lambda + \pi_{N-1}\mu(N-1) - \pi_{N-2}\lambda)$$

sustituyendo  $\pi_{N-1} = \frac{A}{N-1}\pi_{N-2}$ , sacamos la recursión

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu} \pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

*Demostración:*

- para  $i \geq N$  se tiene:

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu} \pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

y si usamos  $\pi_i = \frac{A^i}{i!} \pi_0$  con  $i \leq N$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{A}{N} \pi_{i-1} = \frac{A^2}{N^2} \pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N} \pi_N = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N} \frac{A^N}{N!} \pi_0 \\ &= \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 \end{aligned}$$

# Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

## Demostración:

- para  $i = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i + \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \pi_0 + \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \pi_0 \frac{N^N}{N!} \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \end{aligned}$$

sabiendo que  $\sum_{i=N}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^N}{1-\rho}$ , sacamos

$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

# Sistema M/M/N: Segunda distribución de Earlang

## Definición (Segunda distribución de Earlang)

*Popularmente, la probabilidad de que un M/M/N esté vacío*

$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

*se conoce como la segunda distribución de Earlang, y a la razón  $A$  se le llaman "Earlangs".*

*Ejemplo:* si tenemos tasas  $\lambda = 10$  y  $\mu = 2$ ; los Earlangs  $A = \frac{\lambda}{\mu} = 5$  me dicen que necesito  $> 5$  servidores; y con  $N = 7$  tenemos

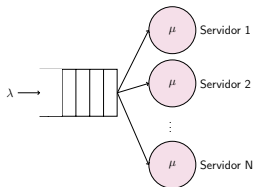
$$\pi_0 = \left( \left( \sum_{i=0}^6 \frac{5^i}{i!} \right) + \frac{5^7}{7!} \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \right)^{-1} \simeq 0.006$$

# Sistema M/M/N: Distribución de Earlang-C

## Lema (Erlang-C)

*La probabilidad de esperar en un sistema M/M/N viene dada por la distribución Earlang-C:*

$$E_C(N, A) = \mathbb{P}(N(t) \geq N) = \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1 - \rho} \pi_0 \quad (3)$$



*Demostración:*

$$\mathbb{P}(N(t) \geq N) = \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 = \frac{N^N}{N!} \frac{\rho^N}{1 - \rho} \pi_0 \quad (4)$$

# Sistema M/M/N: Métricas famosas

## Lema (Número medio en cola M/M/N)

*En un sistema M/M/N el número medio de usuarios encolados es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) \quad (5)$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=N}^{\infty} (i - N) \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 (i - N) = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \sum_{i=N}^{\infty} (i - N) \rho^i \\ &= \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[ \sum_{i=N}^{\infty} i \rho^i - N \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[ \frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} \right] \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) \end{aligned}$$

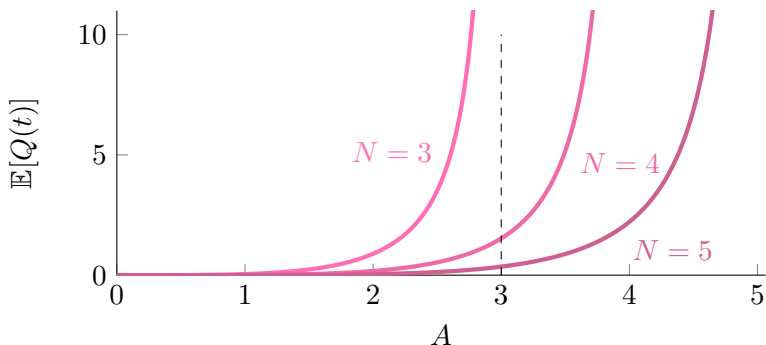
*Ejemplo:* sea un sistema con una carga de  $A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$  Earlangs, ¿cuántos servidores  $N$  hay que poner para que, en media, haya menos de 10 usuarios encolados?

$$\begin{aligned} N : \mathbb{E}[Q(t)] &= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) = \frac{\frac{3}{N}}{1 - \frac{3}{N}} \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^N}{1 - \frac{3}{N}} \pi_0 \\ &= \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^{N+1}}{\left(1 - \frac{3}{N}\right)^2} \left( \left( \sum_{i=0}^{N-1} \frac{3^i}{i!} \right) + \frac{3^N}{N!} \frac{1}{1 - \frac{3}{N}} \right)^{-1} < 10 \end{aligned}$$



# Sistema M/M/N: Métricas famosas

*Ejemplo (cont.):* vemos que con una intensidad de  $A = 3$  Earlangs necesitamos  $N > 3$  para que  $\mathbb{E}[Q(t)] \leq 10$ .



## Lema (Número medio usuarios en M/M/N)

*En un sistema M/M/N el tiempo medio de usuarios en el sistema es*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A \quad (6)$$

*Demostración:* con Little sabemos  $\mathbb{E}[W(t)] = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[Q(t)]$ , y también sabemos que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[W(t)] + \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[Q(t)] + \frac{1}{\mu}$$

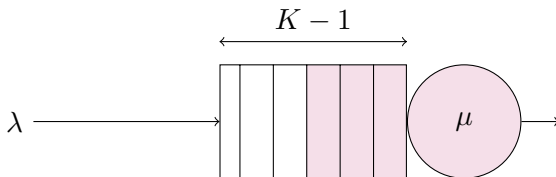
y usando Little de nuevo ( $\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)]\lambda$ ) llegamos a

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A$$

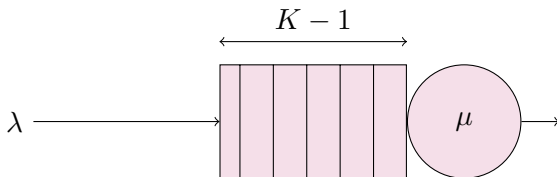
# Sistema M/M/1/K

# Sistema M/M/1/K

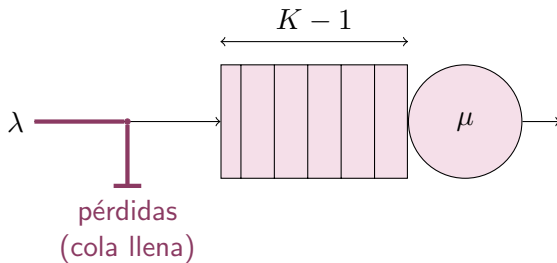
Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño  $K - 1$  hay pérdidas.



Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño  $K - 1$  hay pérdidas.

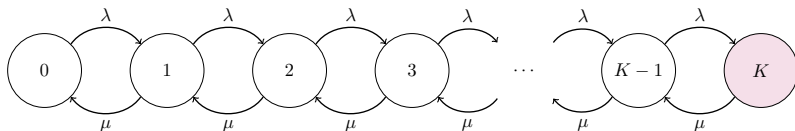


Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño  $K - 1$  hay pérdidas.



# Sistema M/M/1/K: Cadena de Markov

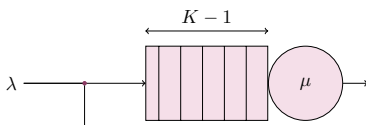
Un sistema M/M/1/K es un proceso estocástico markoviano, por tanto se puede modelar con una cadena de Markov finita.



La cadena tiene tasas de transición  $q_{i,j}$  homogéneas

$$q_{i+1,i} = q_{j+1,j} = \mu, \quad \forall i, j$$

$$q_{i-1,i} = q_{j-1,j} = \lambda, \quad \forall i, j$$



# Sistema M/M/1/K: Ecuaciones de equilibrio

## Lema

*Ecuaciones de equilibrio M/M/1/K En régimen estacionario, las ecuaciones de equilibrio de un sistema M/M/1/K resultan en*

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & i = 0 \\ \rho^i \pi_0, & 0 < i \leq K \end{cases} \quad (7)$$

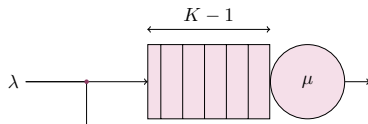
*Demostración:* de la cadena se deduce por inducción que  $\pi_i = \rho^i \pi_0$ . Sabiendo que  $\sum_{i=0}^K \pi_i = 1$ , tenemos

$$1 = \pi_0 \sum_{i=0}^K \rho^i \iff \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^K \rho^i} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}(1 - \rho^{K+1})}$$



# Sistema M/M/1/K: Probabilidad de bloqueo

El sistema M/M/1/K bloquea la entrada de usuarios si la cola está llena



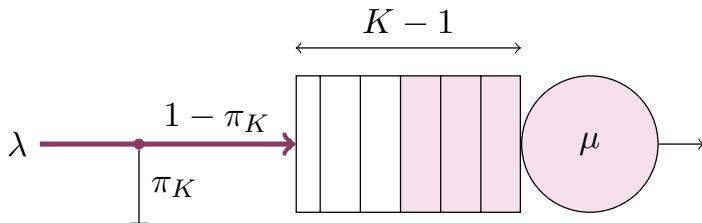
lo cual sucede con probabilidad

$$\pi_K = \rho^K \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

según las ecuaciones de equilibrio (7).

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

El caudal cursado será el de los usuarios admitidos  $\bar{\lambda}$



el cual es precisamente  $\bar{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K)$ .

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

*Ejemplo:* sea un servidor con tasa  $\mu = 1$  [usuarios/sec] y  $\lambda = 0.8$  [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado  $\bar{\lambda}$  quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].

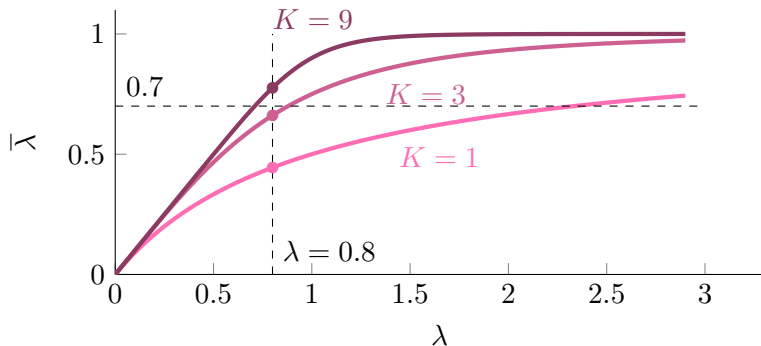
$$\begin{aligned} k : \bar{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K) \geq 0.7 &\iff \lambda \left( 1 - \rho^K \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \right) \geq 0.7 \\ &\iff \underbrace{\frac{1 - \frac{0.7}{\lambda}}{1 - \rho}}_A \geq \frac{\rho^K}{1 - \rho^{K+1}} \iff \rho^K \leq \frac{A}{1 + A\rho} \end{aligned}$$

sustituyendo  $A = \frac{1 - 0.7/0.8}{1 - 0.8} = \frac{5}{8}$  y  $\rho = \frac{8}{10}$  queda

$$\rho^K \leq \frac{5}{12} \iff K \geq \log_{\rho} \frac{5}{12} \iff K \geq 3.92$$

# Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

*Ejemplo:* sea un servidor con tasa  $\mu = 1$  [usuarios/sec] y  $\lambda = 0.8$  [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado  $\bar{\lambda}$  quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].



# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

## Lema (Número medio usuarios M/M/1/K)

*El número medio de usuarios en un sistema M/M/1/K es*

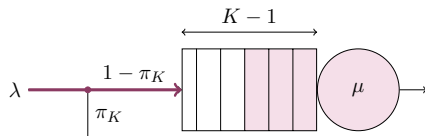
$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \quad (8)$$

*Demostración:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t)] &= \sum_{i=0}^K i\pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^K i\rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^K \rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{dt} \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho} \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho) + (1-\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2} = \dots \end{aligned}$$

# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

Para aplicar Little hay que considerar el caudal efectivo  $\bar{\lambda}$ .



En concreto

$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1 - \pi_K)}$$

Y sabiendo que el tiempo medio de espera de los atendidos es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[T(t)] - \mathbb{E}[t_s] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1 - \pi_K)} - \frac{1}{\mu}$$

sacamos el número medio de usuarios encolados con Little

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \lambda(1 - \pi_K)\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[N(t)] - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

# Sistema M/M/1/K: métricas famosas

*Ejemplo:* sea un sistema M/M/1/K con  $K = 10$ ,  $\lambda = 0.8$  [usuarios/sec],  $\mu = 1$  [usuarios/sec]; ¿cuál es el tiempo medio que pasa un usuario atendido?

Primero sacabos el número medio de usuarios

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t)] &= \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K + 1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} \\ &= \frac{0.8}{1 - 0.8} - \frac{(10 + 1)0.8^{10+1}}{1 - 0.8^{10+1}} \simeq 2.97 \text{ [usuarios]}\end{aligned}$$

y luego usamos Little

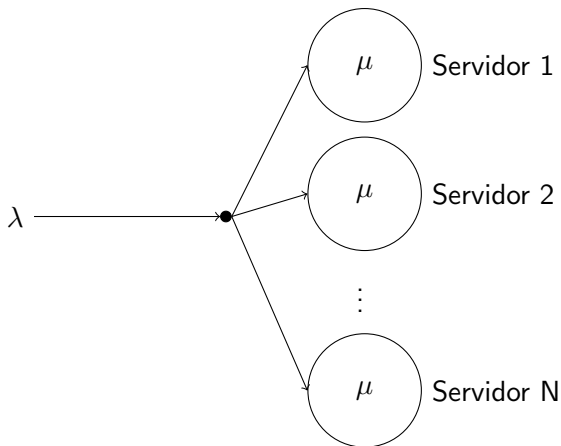
$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1 - \pi_K)} = \frac{2.97}{0.8 \left(1 - 0.8^{10} \frac{1-0.8}{1-0.8^{10+1}}\right)} \simeq 3.80 \text{ [sec]}$$

# Sistema M/M/N/N



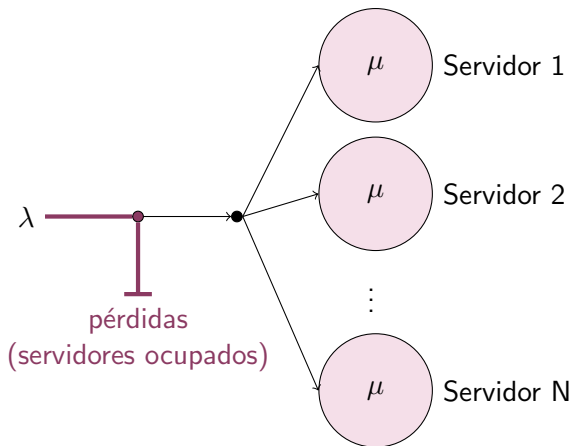
# Sistema M/M/N/N

Si tenemos N servidores sin cola también puede haber pérdidas.



# Sistema M/M/N/N

Si tenemos N servidores sin cola también puede haber pérdidas.





# Sistema M/M/N/N: Ecuaciones de equilibrio

## Lema (Ecuaciones equilibrio sistema M/M/N/N)

*En un sistema M/M/N/N en régimen estacionario, sus ecuaciones de equilibrio resultan en*

$$\pi_i = \begin{cases} \left( \sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} \right)^{-1}, & i = 0 \\ \frac{A^i}{i!} \pi_0, & 0 < i \leq N \end{cases} \quad (9)$$

*Demostración:* de la cadena deducimos  $\pi_i = \frac{A^i}{i!} \pi_0$  por inducción, y usando la ley de probabilidad total tenemos

$$1 = \sum_{i=0}^N \pi_i \iff 1 = \pi_0 \sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} \iff \pi_0 = \left( \sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} \right)^{-1}$$

# Sistema M/M/N/N: Probabilidad de bloqueo

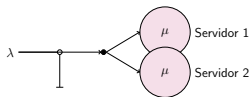
## Lema (Probabilidad de bloqueo)

*En un sistema M/M/N/N se bloquean llegadas con probabilidad*

$$E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} \quad (10)$$

*y se conoce  $E_B(N, A)$  como la 1ª distribución de Earlang, o Earlang-B.*

*Ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de bloqueo en un M/M/2/2 con una intensidad de  $A = 1.2$  Earlangs?*

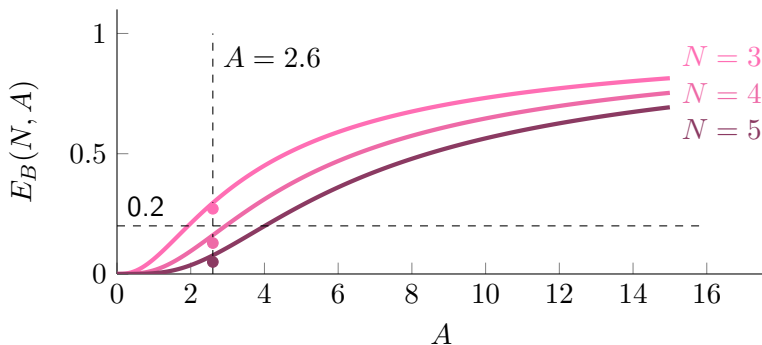


$$E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} = \frac{1.2^2}{2!} \left( \sum_{i=0}^2 \frac{1.2^i}{i!} \right)^{-1} = 0.25$$

# Sistema M/M/N/N: Probabilidad de bloqueo

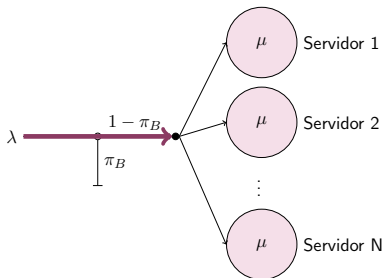
*Ejemplo:* sea un sistema M/M/N/N con carga  $A = 2.6$  Earlangs, ¿cuál es el mínimo número de servidores para que la probabilidad de bloqueo sea menor al 20%?

$$N : E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} = \frac{\frac{2.6^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{2.6^i}{i!}} \leq 0.2$$



# Sistema M/M/N/N: Caudal cursado

El caudal cursado  $\bar{\lambda}$  es el flujo que no se rechaza:



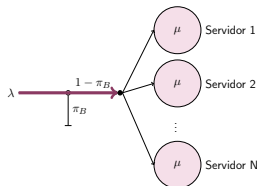
es decir

$$\bar{\lambda} = (1 - \pi_B)\lambda$$

# Sistema M/M/N/N: Métricas famosas

## Lema (Tiempo medio en sistema M/M/N/N)

El tiempo medio en un sistema M/M/N/N es  $\mathbb{E}[T(t)] = \frac{1}{\mu}$ .



*Demostración:* como no hay espera en cola  $W(t) = 0, \forall t$ ; se tiene que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\mu}$$

y por Little sabemos que  $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda(1 - \pi_N)\mathbb{E}[T(t)] = A(1 - \pi_N)$ .





Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez,  
Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.