

Tema 6: Teletráfico en redes de telecomunicaciones

May 3, 2023

RSTC

Redes y Servicios de
Telecomunicación



This work is licensed under a "CC BY-NC-SA 4.0" license.

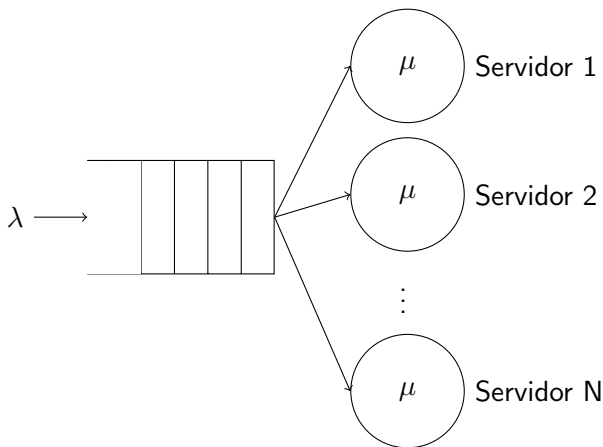


- 1 Sistema M/M/N
 - Cadena de Markov
 - Ecuaciones de equilibrio
 - Segunda distribución de Earlang
 - Distribución de Earlang-C
 - Métricas famosas

Sistema M/M/N

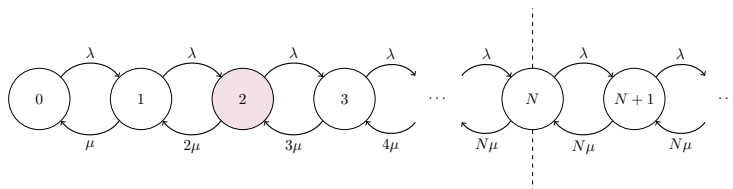
Sistema M/M/N

Un sistema de cola única con $t_l \sim Exp(\lambda)$ y N servidores en paralelo con $t_s \sim Exp(\mu)$.

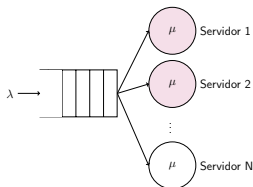


Sistema M/M/N: Cadena de Markov

Un sistema M/M/N es un proceso estocástico Markoviano¹.

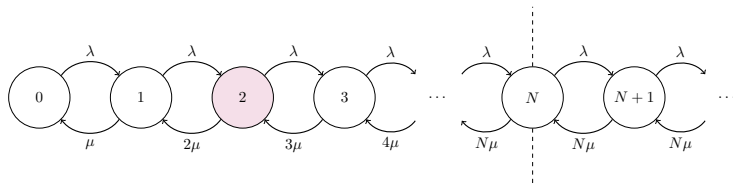


Sus tasas de transición no son homogéneas $q_{i,j} = i\mu$, $i \leq N$.



¹El tiempo de estancia es exponencial no homogéneo.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio



Con $i < N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu)$$

pero con $i \geq N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + N\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + N\mu)$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Lema (Ecuaciones equilibrio M/M/N)

En régimen estacionario de un sistema M/M/N, la probabilidad de estar en el estado i es:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{I^i}{i!} \pi_0, & i \leq N \\ \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0, & i \geq N \end{cases} \quad (1)$$

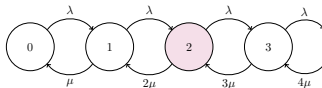
con $I = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$; y

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{I^i}{i!} \right) + \frac{I^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \quad (2)$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \leq N$ se tiene:



sabiendo que $\pi_0\lambda = \pi_1\mu$ se tiene $\pi_1 = I\pi_0$. Por tanto tenemos que

$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = \pi_1(\lambda + \mu) \iff \pi_2 = \frac{I^2}{2}\pi_0$$
$$\lambda\pi_1 + 3\mu\pi_3 = \pi_2(\lambda + 2\mu) \iff \pi_3 = \frac{I^3}{3!}\pi_0$$

...

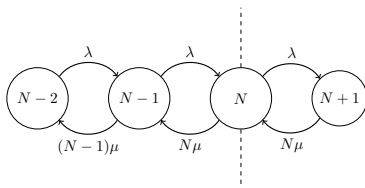
$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu) \iff \pi_i = \frac{I^i}{i!}\pi_0$$

y deducimos $\pi_i = \frac{I}{i}\pi_{i-1}$.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:



$$\pi_{N-1}(\lambda + (N-1)\mu) = \pi_N N\mu + \pi_{N-2}\lambda$$

$$\pi_N = \frac{1}{N\mu} (\pi_{N-1}\lambda + \pi_{N-1}\mu(N-1) - \pi_{N-2}\lambda)$$

sustituyendo $\pi_{N-1} = \frac{I}{N-1}\pi_{N-2}$, sacamos la recursión

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu} \pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu} \pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

y si usamos $\pi_i = \frac{I^i}{i!} \pi_0$ con $i \leq N$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{I}{N} \pi_{i-1} = \frac{I^2}{N^2} \pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{I}{N} \right)^{i-N} \pi_N = \left(\frac{I}{N} \right)^{i-N} \frac{I^N}{N!} \pi_0 \\ &= \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 \end{aligned}$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i + \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{I^i}{i!} \pi_0 + \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{I^i}{i!} + \pi_0 \frac{N^N}{N!} \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \end{aligned}$$

sabiendo que $\sum_{i=N}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^N}{1-\rho}$, sacamos

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{I^i}{i!} \right) + \frac{I^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

Sistema M/M/N: Segunda distribución de Earlang

Definición (Segunda distribución de Earlang)

Popularmente, la probabilidad de que un M/M/N esté vacío

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{I^i}{i!} \right) + \frac{I^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

se conoce como la segunda distribución de Earlang, y a la razón I se le llaman "Earlangs".

Ejemplo: si tenemos tasas $\lambda = 10$ y $\mu = 2$; los Earlangs $I = \frac{\lambda}{\mu} = 5$ me dicen que necesito > 5 servidores; y con $N = 7$ tenemos

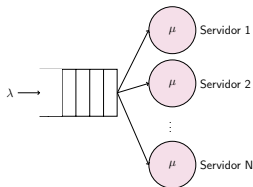
$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^6 \frac{5^i}{i!} \right) + \frac{5^7}{7!} \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \right)^{-1} \simeq 0.006$$

Sistema M/M/N: Distribución de Earlang-C

Lema (Erlang-C)

La probabilidad de esperar en un sistema M/M/N viene dada por la distribución Earlang-C:

$$E_C(N, I) = \mathbb{P}(N(t) \geq N) = \frac{I^N}{N!} \frac{1}{1 - \rho} \pi_0 \quad (3)$$



Demostración:

$$\mathbb{P}(N(t) \geq N) = \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 = \frac{N^N}{N!} \frac{\rho^N}{1 - \rho} \pi_0 \quad (4)$$

Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio en cola M/M/N)

En un sistema M/M/N el número medio de usuarios encolados es

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, I) \quad (5)$$

Demostración:

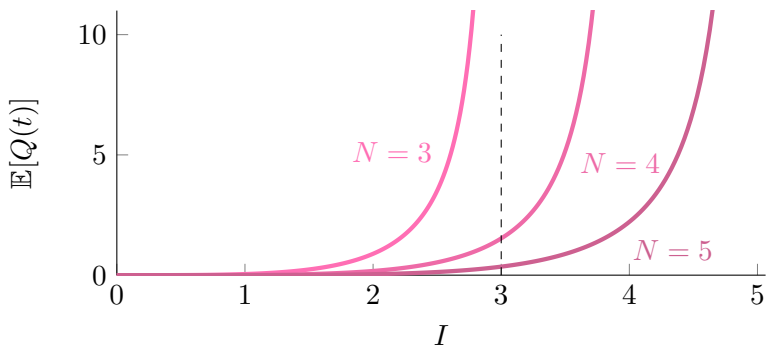
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=N}^{\infty} (i - N) \pi_N = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 (i - N) = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \sum_{i=N}^{\infty} (i - N) \rho^i \\ &= \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[\sum_{i=N}^{\infty} i \rho^i - N \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[\frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} \right] \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, I) \end{aligned}$$

Ejemplo: sea un sistema con una carga de $I = \frac{\lambda}{\mu} = 3$ Earlangs, ¿cuántos servidores N hay que poner para que, en media, haya menos de 10 usuarios encolados?

$$\begin{aligned} N : \mathbb{E}[Q(t)] &= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, I) = \frac{\frac{3}{N}}{1 - \frac{3}{N}} \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^N}{1 - \frac{3}{N}} \pi_0 \\ &= \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^{N+1}}{\left(1 - \frac{3}{N}\right)^2} \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{3^i}{i!} \right) + \frac{3^N}{N!} \frac{1}{1 - \frac{3}{N}} \right)^{-1} < 10 \end{aligned}$$

Sistema M/M/N: Métricas famosas

Ejemplo (cont.): vemos que con una intensidad de $I = 3$ Earlangs necesitamos $N > 3$ para que $\mathbb{E}[Q(t)] \leq 10$.



Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio usuarios en M/M/N)

En un sistema M/M/N el tiempo medio de usuarios en el sistema es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + I \quad (6)$$

Demostración: con Little sabemos $\mathbb{E}[W(t)] = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[Q(t)]$, y también sabemos que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[W(t)] + \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[Q(t)] + \frac{1}{\mu}$$

y usando Little de nuevo ($\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)]\lambda$) llegamos a

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + I$$

Referencias I