Tema 7: Teletráfico en redes de telecomunicaciones

May 16, 2023

RSTC
Redes y Servicios de Telecomunicación

Contenido I

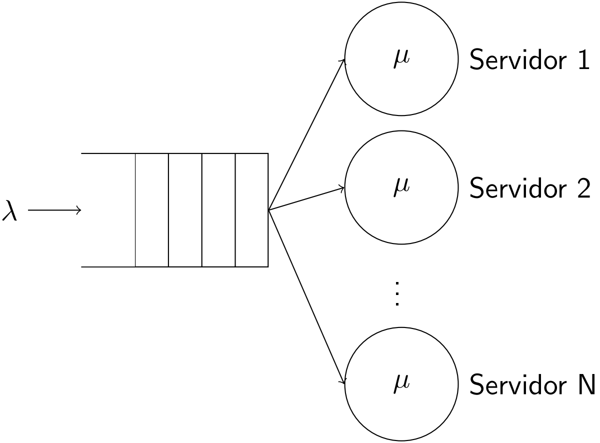
Contenido II

- Caudal cursado
- Métricas famosas

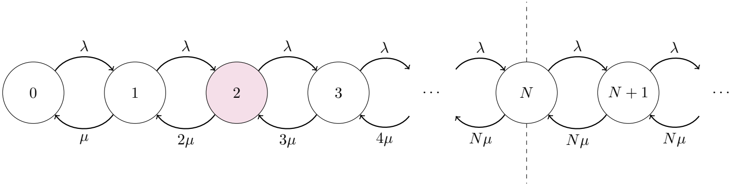
Sistema M/M/N

Sistema M/M/N

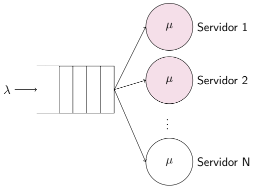
Un sistema de cola única con $t_l \sim Exp(\lambda)$ y N servidores en paralelo con $t_s \sim Exp(\mu)$.



Un sistema M/M/N es un proceso estocástico Markoviano[1].

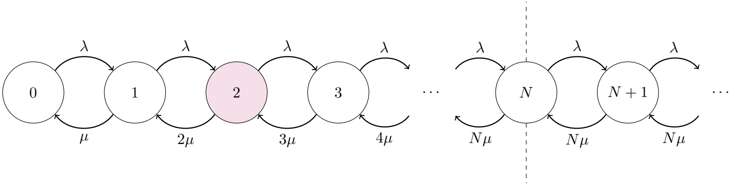


Sus tasas de transición no son homogéneas $q_{i,j} = i\mu,\ i \leq N$.



[1] El tiempo de estancia es exponencial no homogéneo.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio



Con $i < N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu)$$

pero con $i \geq N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + N\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + N\mu)$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Lema (Ecuaciones equilibrio M/M/N)

En régimen estacionario de un sistema M/M/N, la probabilidad de estar en el estado i es:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{A^i}{i!}\pi_0, & i \leq N \\ \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0, & i \geq N \end{cases} \tag{1}$$

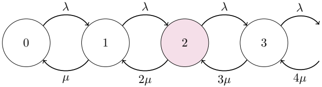
con $A = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$; y

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \tag{2}$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \leq N$ se tiene:



sabiendo que $\pi_0\lambda = \pi_1\mu$ se tiene $\pi_1 = A\pi_0$. Por tanto tenemos que

$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = \pi_1(\lambda+\mu) \Longleftrightarrow \pi_2 = \frac{A^2}{2}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 + 3\mu\pi_3 = \pi_2(\lambda+2\mu) \Longleftrightarrow \pi_3 = \frac{A^3}{3!}\pi_0$$

$$\ldots$$

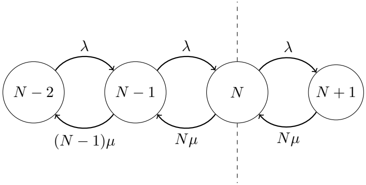
$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda+i\mu) \Longleftrightarrow \pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$$

y deducimos $\pi_i = \frac{A}{i}\pi_{i-1}$.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:



$$\pi_{N-1}(\lambda + (N-1)\mu) = \pi_N N\mu + \pi_{N-2}\lambda$$
$$\pi_N = \frac{1}{N\mu}\left(\pi_{N-1}\lambda + \pi_{N-1}\mu(N-1) - \pi_{N-2}\lambda\right)$$

sustituyendo $\pi_{N-1} = \frac{A}{N-1}\pi_{N-2}$, sacamos la recursión

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

y si usamos $\pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$ con $i \leq N$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi_i =& \frac{A}{N}\pi_{i-1} = \frac{A^2}{N^2}\pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\pi_N = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\frac{A^N}{N!}\pi_0 \\ =& \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0\end{aligned}$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i = 0$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i + \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!}\pi_0 + \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0 \\
&= \pi_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \pi_0 \frac{N^N}{N!} \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i
\end{aligned}
$$

sabiendo que $\sum_{i=N}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^N}{1-\rho}$, sacamos

$$
\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}
$$

Sistema M/M/N: Segunda distribución de Erlang

Definición (Segunda distribución de Erlang)

Popularmente, la probabilidad de que un M/M/N esté vacío

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

se conoce como la segunda distribución de Erlang, y a la razón A se le llaman "Erlangs".

Ejemplo: si tenemos tasas $\lambda = 10$ y $\mu = 2$; los Erlangs $A = \frac{\lambda}{\mu} = 5$ me dicen que necesito > 5 servidores; y con $N = 7$ tenemos

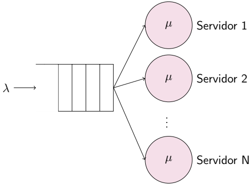
$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{6} \frac{5^i}{i!} \right) + \frac{5^7}{7!} \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \right)^{-1} \simeq 0.006$$

Sistema M/M/N: Distribución de Erlang-C

Lema (Erlang-C)

La probabilidad de esperar en un sistema M/M/N viene dada por la distribución Erlang-C:

$$E_C(N, A) = \mathbb{P}(N(t) \geq N) = \frac{A^N}{N!}\frac{1}{1-\rho}\pi_0 \tag{3}$$



Demostración:

$$\mathbb{P}(N(t) \geq N) = \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0 = \frac{N^N}{N!}\frac{\rho^N}{1-\rho}\pi_0 \tag{4}$$

Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio en cola M/M/N)

En un sistema M/M/N el número medio de usuarios encolados es

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) \tag{5}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=N}^{\infty}(i-N)\pi_i = \sum_{i=N}^{\infty}\rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0(i-N) = \frac{N^N}{N!}\pi_0 \sum_{i=N}^{\infty}(i-N)\rho^i \\ &= \frac{N^N}{N!}\pi_0 \left[\sum_{i=N}^{\infty} i\rho^i - N\sum_{i=N}^{\infty}\rho^i\right] = \frac{N^N}{N!}\pi_0 \left[\frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2}\right] \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}E_C(N, A)\end{aligned}$$

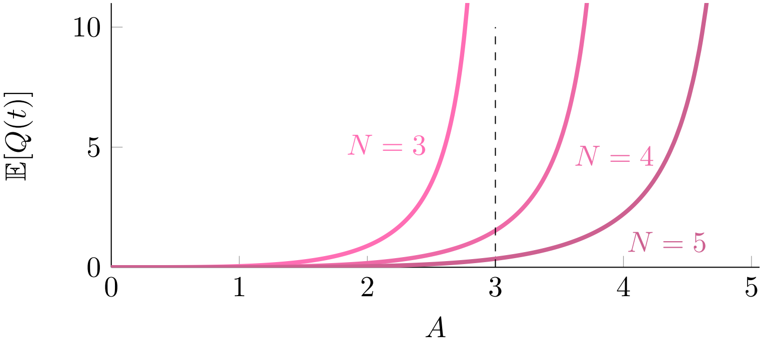
Ejemplo: sea un sistema con una carga de $A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$ Erlangs, ¿cuántos servidores N hay que poner para que, en media, haya menos de 10 usuarios encolados?

$$N : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) = \frac{\frac{3}{N}}{1-\frac{3}{N}} \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^N}{1-\frac{3}{N}} \pi_0$$

$$= \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^{N+1}}{\left(1-\frac{3}{N}\right)^2} \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{3^i}{i!} \right) + \frac{3^N}{N!} \frac{1}{1-\frac{3}{N}} \right)^{-1} < 10$$

Sistema M/M/N: Métricas famosas

Ejemplo (cont.): vemos que con una intensidad de $A = 3$ Erlangs necesitamos $N > 3$ para que $\mathbb{E}[Q(t)] \leq 10$.



Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio usuarios en M/M/N)

En un sistema M/M/N el número medio de usuarios en el sistema es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A \tag{6}$$

Demostración: con Little sabemos $\mathbb{E}[W(t)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)]$, y también sabemos que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[W(t)] + \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)] + \frac{1}{\mu}$$

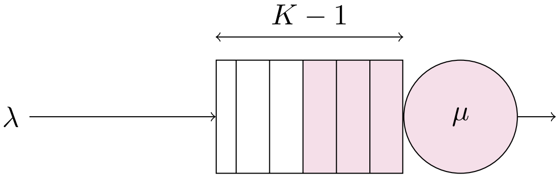
y usando Little de nuevo ($\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)]\lambda$) llegamos a

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A$$

Sistema M/M/1/K

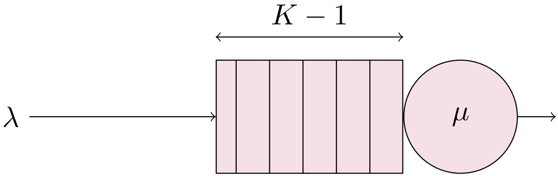
Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K-1$ hay pérdidas.



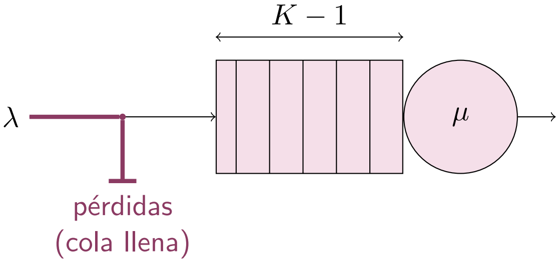
Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K-1$ hay pérdidas.



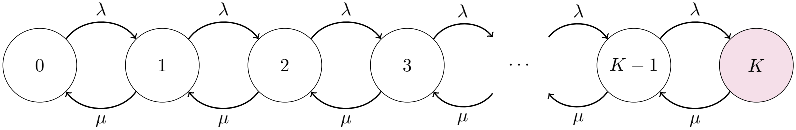
Sistema M/M/1/K

Si tuviéramos un servidor con cola finita de tamaño $K-1$ hay pérdidas.



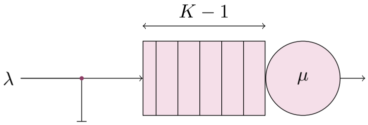
Sistema M/M/1/K: Cadena de Markov

Un sistema M/M/1/K es un proceso estocástico markoviano, por tanto se puede modelar con una cadena de Markov finita.



La cadena tiene tasas de transición $q_{i,j}$ homogéneas

$$q_{i+1,i} = q_{j+1,j} = \mu, \quad \forall i, j$$
$$q_{i-1,i} = q_{j-1,j} = \lambda, \quad \forall i, j$$



Sistema M/M/1/K: Ecuaciones de equilibrio

Lema

Ecuaciones de equilibrio M/M/1/K En régimen estacionario, las ecuaciones de equilibrio de un sistema M/M/1/K resultan en

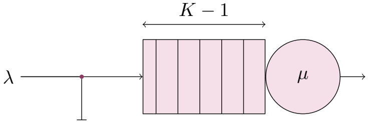
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & i = 0 \\ \rho^i \pi_0, & 0 < i \leq K \end{cases} \tag{7}$$

Demostración: de la cadena se deduce por inducción que $\pi_i = \rho^i \pi_0$. Sabiendo que $\sum_i^K \pi_i = 1$, tenemos

$$1 = \pi_0 \sum_{i=0}^{K} \rho^i \Longleftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}(1-\rho^{K+1})}$$

Sistema M/M/1/K: Probabilidad de bloqueo

El sistema M/M/1/K bloquea la entrada de usuarios si la cola está llena



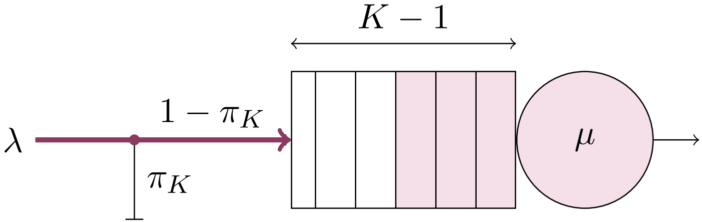
lo cual sucede con probabilidad

$$\pi_K = \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

según las ecuaciones de equilibrio (7).

Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

El caudal cursado será el de los usuarios admitidos $\overline{\lambda}$



el cual es precisamente $\overline{\lambda} = \lambda(1-\pi_K)$.

Sistema M/M/1/K: Caudal cursado

Ejemplo: sea un servidor con tasa $\mu = 1$ [usuarios/sec] y $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado $\overline{\lambda}$ quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].

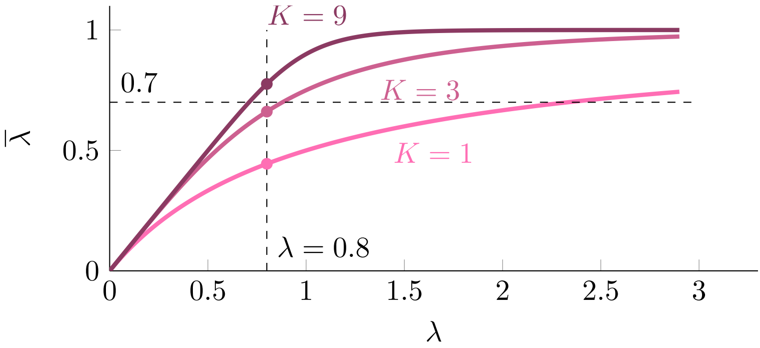
$$k : \overline{\lambda} = \lambda(1 - \pi_K) \geq 0.7 \iff \lambda\left(1 - \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right) \geq 0.7$$

$$\iff \underbrace{\frac{1 - \frac{0.7}{\lambda}}{1-\rho}}_{\alpha} \geq \frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}} \iff \rho^K \leq \frac{\alpha}{1+\alpha\rho}$$

sustituyendo $\alpha = \frac{1-0.7/0.8}{1-0.8} = \frac{5}{8}$ y $\rho = \frac{8}{10}$ queda

$$\rho^K \leq \frac{5}{12} \iff K \geq \log_\rho \frac{5}{12} \iff K \geq 3.92$$

Ejemplo: sea un servidor con tasa $\mu = 1$ [usuarios/sec] y $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], calcule el tamaño de cola de modo que el caudal cursado $\overline{\lambda}$ quede por encima de 0.7 [usuarios/sec].



Sistema M/M/1/K: métricas famosas

Lema (Número medio usuarios M/M/1/K)

El número medio de usuarios en un sistema M/M/1/K es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \tag{8}$$

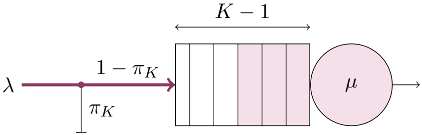
Demostración:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=0}^{K} i\pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{K} i\rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{i=0}^{K} \rho^i = \pi_0 \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho) + (1-\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2} = \dots$$

Sistema M/M/1/K: métricas famosas

Para aplicar Little hay que considerar el caudal efectivo $\overline{\lambda}$.



En concreto

$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)}$$

Y sabiendo que el tiempo medio de espera de los atendidos es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[T(t)] - \mathbb{E}[t_s] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)} - \frac{1}{\mu}$$

sacamos el número medio de usuarios encolados con Little

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \lambda(1-\pi_K)\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[N(t)] - \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$$

Ejemplo: sea un sistema M/M/1/K con $K = 10$, $\lambda = 0.8$ [usuarios/sec], $\mu = 1$ [usuarios/sec]; ¿cuál es el tiempo medio que pasa un usuario atendido?

Primero sacabos el número medio de usuarios

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$
$$= \frac{0.8}{1-0.8} - \frac{(10+1)0.8^{10+1}}{1-0.8^{10+1}} \simeq 2.97 \text{ [usuarios]}$$

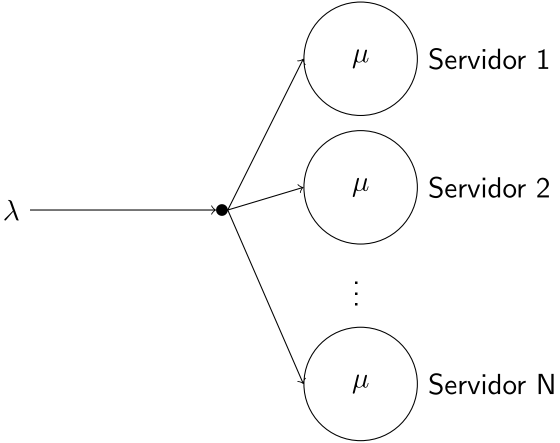
y luego usamos Little

$$\mathbb{E}[T(t)] = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{\lambda(1-\pi_K)} = \frac{2.97}{0.8\left(1-0.8^{10}\frac{1-0.8}{1-0.8^{10+1}}\right)} \simeq 3.80 \text{ [sec]}$$

Sistema M/M/N/N

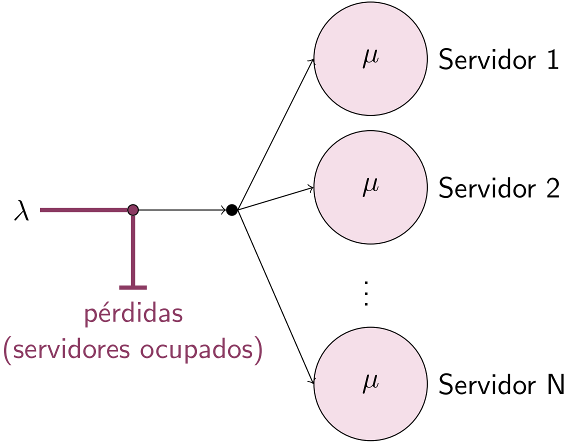
Sistema M/M/N/N

Si tenemos N servidores sin cola también puede haber pérdidas.



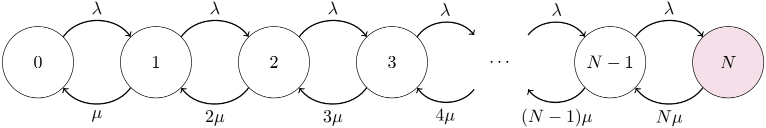
Sistema M/M/N/N

Si tenemos N servidores sin cola también puede haber pérdidas.



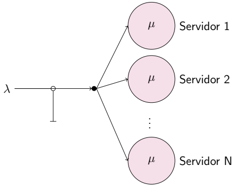
Sistema M/M/N/N: Cadena de Markov

Un sistema M/M/N/N es un proceso estocástico markoviano, y se puede modelar con una cadena de Markov finita



La cadena tiene tasas de transición no homogéneas

$$q_{i+1,i} = (i+1)\mu,\ \forall i \leq N$$



Sistema M/M/N/N: Ecuaciones de equilibrio

Lema (Ecuaciones equilibrio sistema M/M/N/N)

En un sistema M/M/N/N en régimen estacionario, sus ecuaciones de equilibrio resultan en

$$\pi_i = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}\right)^{-1}, & i = 0 \\ \frac{A^i}{i!}\pi_0, & 0 < i \leq N \end{cases} \tag{9}$$

Demostración: de la cadena deducimos $\pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$ por inducción, y usando la ley de probabilidad total tenemos

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i \iff 1 = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!} \iff \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}\right)^{-1}$$

Sistema M/M/N/N: Probabilidad de bloqueo

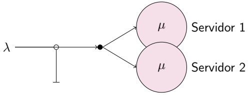
Lema (Probabilidad de bloqueo)

En un sistema M/M/N/N se bloquean llegadas con probabilidad

$$E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}} \tag{10}$$

y se conoce $E_B(N, A)$ como la 1ª distribución de Erlang, o Erlang-B.

Ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de bloqueo en un M/M/2/2 con una intensidad de $A = 1.2$ Erlangs?

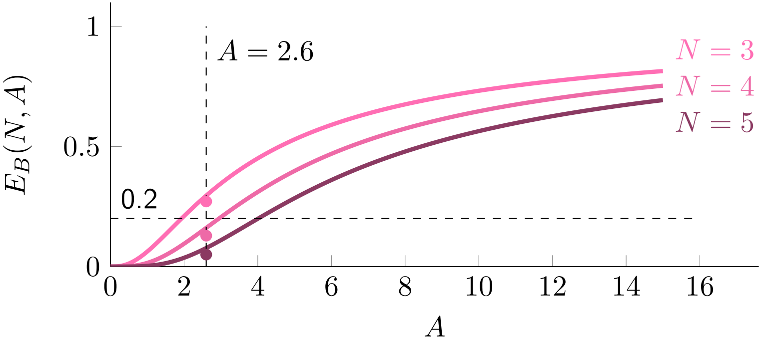


$$E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}} = \frac{1.2^2}{2!} \left(\sum_{i=0}^{2} \frac{1.2^i}{i!} \right)^{-1} = 0.25$$

Sistema M/M/N/N: Probabilidad de bloqueo

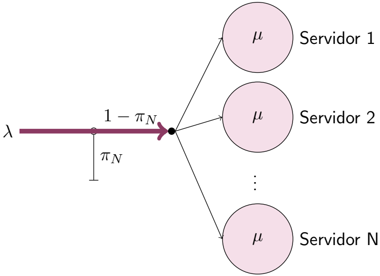
Ejemplo: sea un sistema M/M/N/N con carga $A = 2.6$ Erlangs, ¿cuál es el mínimo número de servidores para que la probabilidad de bloqueo sea menor al 20%?

$$N : E_B(N, A) = \pi_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}} = \frac{\frac{2.6^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{2.6^i}{i!}} \leq 0.2$$



Sistema M/M/N/N: Caudal cursado

El caudal cursado $\overline{\lambda}$ es el flujo que no se rechaza:



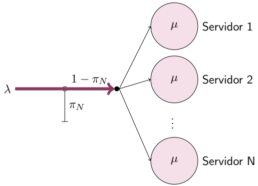
es decir

$$\overline{\lambda} = (1 - \pi_N)\lambda$$

Sistema M/M/N/N: Métricas famosas

Lema (Tiempo medio en sistema M/M/N/N)

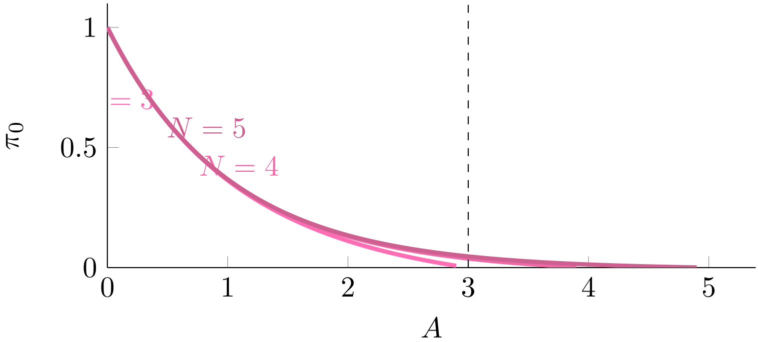
El tiempo medio en un sistema M/M/N/N es $\mathbb{E}[T(t)] = \frac{1}{\mu}$.



Demostración: como no hay espera en cola $W(t) = 0, \ \forall t$; se tiene que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\mu}$$

y por Little sabemos que $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda(1-\pi_N)\mathbb{E}[T(t)] = A(1-\pi_N)$.


1
0.5
0
π_0
$= 3$
$N = 5$
$N = 4$
0
1
2
3
4
5
A

Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.