

# Tema 6: Teletráfico en redes de datos

April 26, 2023

# RSTC

Redes y Servicios de  
Telecomunicación



This work is licensed under a "CC BY-NC-SA 4.0" license.



## 1 Introducción

## 2 Sistema M/G/1

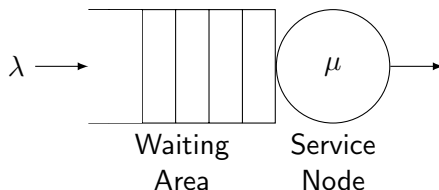
- No Markoviano
- Tiempo medio de espera en cola
- Ejemplos distribuciones servicio
- M/M/1 como caso peor

## 3 Redes de Colas

- Distribución salida M/M/1
- Vector de Probabilidades
- Redes de Jackson
- Tiempo Medio de tránsito

# Introducción

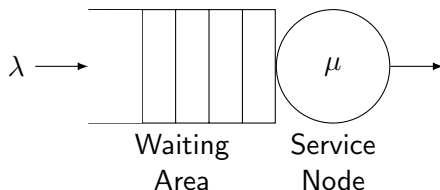
Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

- de llegada exponenciales  $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim Exp(\mu)$

Hemos visto colas M/M/1



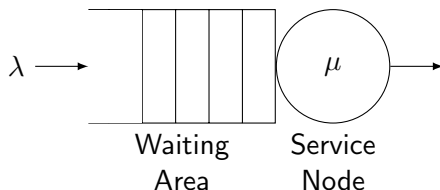
con tiempos:

- de llegada exponenciales  $t_l \sim \text{Exp}(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio  $t_s$  sigue otra distribución?

# Introducción

Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

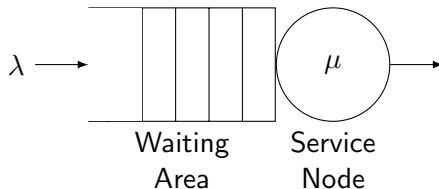
- de llegada exponenciales  $t_l \sim \text{Exp}(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio  $t_s$  sigue otra distribución?

- sistema M/G/1

# Introducción

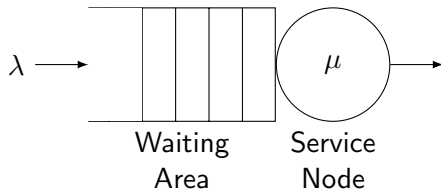
Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

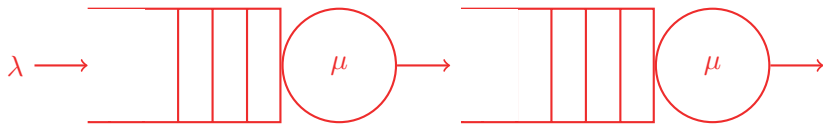
# Introducción

Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

- redes de Jackson





## 1 Introducción

## 2 Sistema M/G/1

- No Markoviano
- Tiempo medio de espera en cola
- Ejemplos distribuciones servicio
- M/M/1 como caso peor

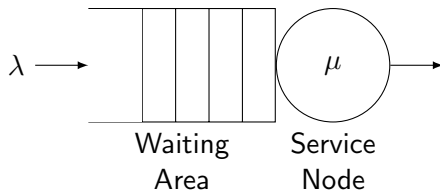
## 3 Redes de Colas

- Distribución salida M/M/1
- Vector de Probabilidades
- Redes de Jackson
- Tiempo Medio de tránsito

# Sistema M/G/1

# Sistema M/G/1: No Markoviano

Tiempo de servicio sigue una distribución general<sup>1</sup>  $t_s \sim G(\mu)$ .



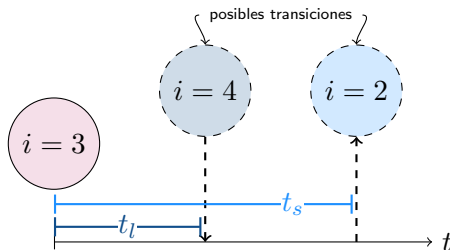
Para modelar como cadena de Markov es necesario que

- tiempo estancia en estado  $t_i \sim \text{Exp}(\nu_i)$ .

---

<sup>1</sup>Por ejemplo,  $G(\mu) = U(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu})$

# Sistema M/G/1: No Markoviano



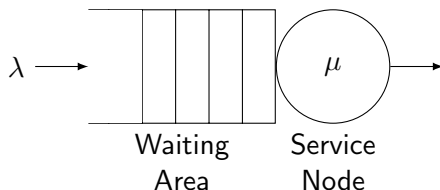
Veamos si se cumple que  $t_i \sim \text{Exp}(\nu_i)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t_i > \tau) &= \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = \mathbb{P}(t_l > \tau)\mathbb{P}(t_s > \tau) \\ &= \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\mu\tau} \neq e^{-\nu_i\tau} \quad (1)\end{aligned}$$

con  $t_s \sim G(\mu) = U\left(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right)$ ,  $\tau \in \left[\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right]$ .

# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Podemos obtener el tiempo medio de espera en cola  $\mathbb{E}[W(t)]$  de un M/G/1.



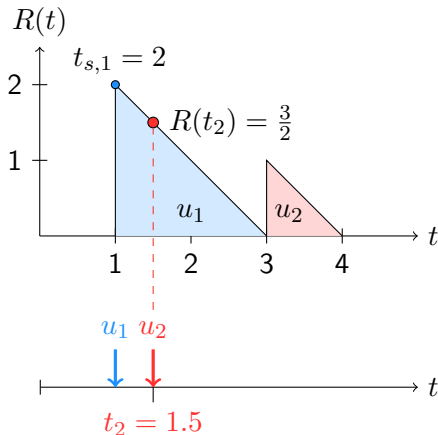
Veamos lo que espera un usuario nuevo:

- 1  $\mathbb{E}[Q(t)] \frac{1}{\mu}$  en cola ; y
- 2 la media del tiempo residual  $R$  del que se está sirviendo.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)] &= \mathbb{E}[Q(t)] \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[R(t)] \\ \implies \mathbb{E}[W(t)] &= \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1 - \rho}\end{aligned}$$

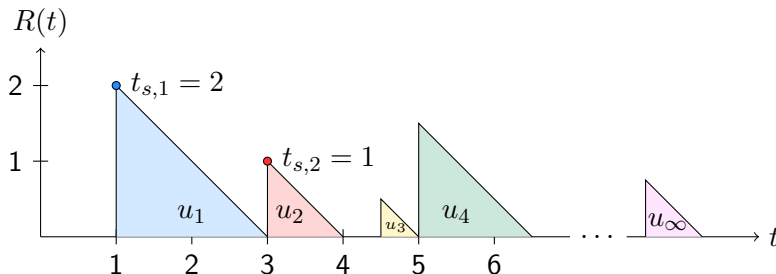
# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Interpretación gráfica de tiempo residual en cada instante  $R(t)$ :



# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

<sup>2</sup> La media del tiempo residual corresponde con el promedio de áreas.



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R(\tau) d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2}\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ilustración y demostración basadas en [YMG23, Figura 8.3].

# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Multiplicando y dividiendo por  $N(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} t_{s,i}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[t_s^2]\end{aligned}$$

con  $t_{s,i}$  la realización de la v.a. del tiempo de servicio para el usuario  $i$ .



# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

## Lema (Fórmula de Pollaczek-Khintchine)

*El tiempo medio de espera en cola de en un sistema M/G/1 es*

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1 - \rho)} \quad (2)$$

*con  $t_s$  la v.a. del tiempo de servicio que sigue una distribución  $G$ .*

*Demostración:*

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{2} \lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{1 - \rho} = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1 - \rho)}$$

# Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

*Ejemplo:* supongamos un tiempo de servicio  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^\infty \tau^2 \mu e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\underbrace{=}_{\text{partes}} \left[ -\tau^2 e^{-\mu\tau} \right]_{\tau=0}^\infty - \int_0^\infty -e^{-\mu\tau} 2\tau d\tau \\ &= \int_0^\infty 2\tau e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\underbrace{=}_{\text{partes}} \frac{2}{\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

la expresión que vimos para M/M/1.

*Ejemplo:* supongamos un tiempo de servicio  $t_s \sim U(0, \frac{2}{\mu})$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^{\frac{2}{\mu}} \tau^2 \frac{1}{2/\mu} d\tau \\ &= \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\tau^3}{3} \right]_{\tau=0}^{\frac{2}{\mu}} \\ &= \frac{4}{3\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Otra manera de ver el momento de segundo orden es sabiendo que

$$\mathbb{E}[t_s^2] = \text{Var}[t_s] + \mathbb{E}^2[t_s]$$

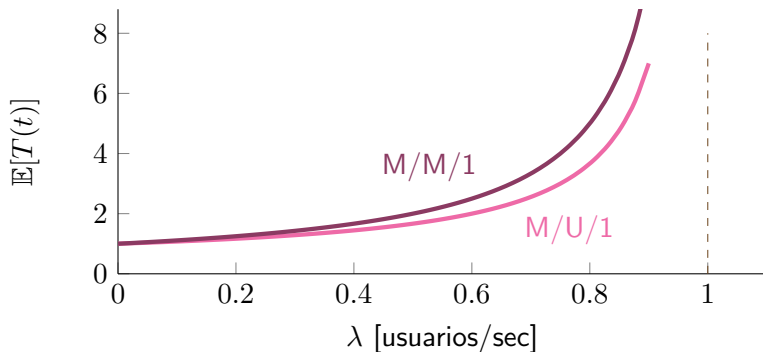
*Ejemplo:*

- $t_s \sim \text{Exp}(\mu) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2};$
- $t_s \sim U\left(0, \frac{2}{\mu}\right) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{\mu} - 0\right)^2 + \frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{3\mu^2}.$

que coincide con las expresiones anteriores.

# Sistema M/G/1: M/M/1 como caso peor

El tiempo medio de servicio  $\mathbb{E}[T(t)]$  es pesimista en un M/M/1.

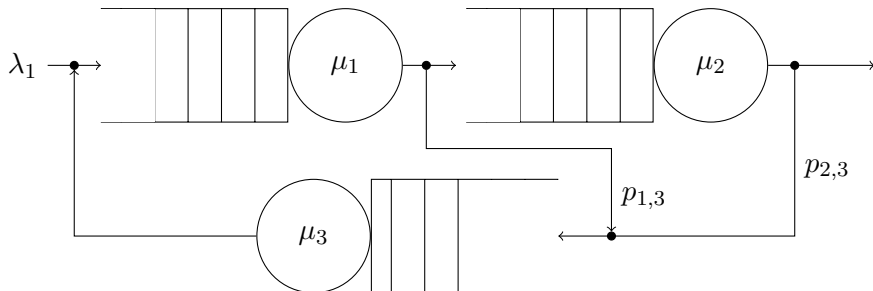


*Ejemplo (arriba):* el tiempo medio total es menor<sup>3</sup> en una uniforme.

<sup>3</sup>Tomamos  $\mu = 1$  [usuario/sec].

# Redes de Colas

Podemos estudiar cómo modelar una red de colas (e.g., routers).



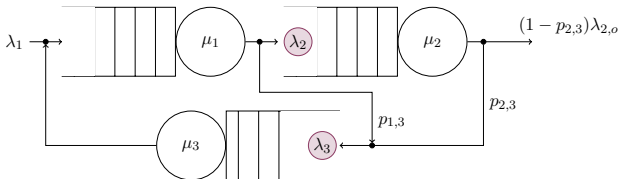
con  $p_{2,3}$  la probabilidad de ir de la cola 2 a la 3.

Las llegadas  $\lambda_i$  a la cola  $i$  se averiguan usando probabilidades  $p_{i,j}$ .

*Ejemplo:*

$$\lambda_3 = p_{1,3}\lambda_{1,o} + p_{2,3}\lambda_{2,o}$$

con  $\lambda_{i,o}$  la tasa de salidas de la cola  $i$ .





## Lema (Tiempo entre salidas)

*En un sistema M/M/1 el tiempo entre salidas y llegadas siguen la misma distribución. Es decir, se cumple:*

$$t_e \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$t_l \sim \text{Exp}(\lambda)$$

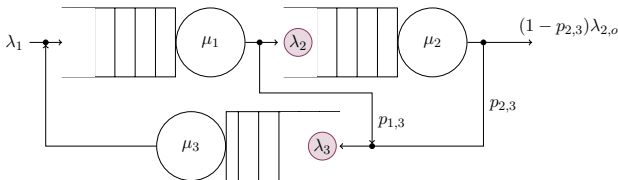
*Demostración:*

$$\begin{aligned} F_{t_e}(\tau) &= \pi_0 \mathbb{P}(t_l + t_s \leq \tau) + (1 - \pi_0) \mathbb{P}(t_s \leq \tau) \\ &= (1 - \rho) \int_0^\tau f_{t_l+t_s}(t) dt + \rho e^{-\mu\tau} = (1 - \rho) \int_0^\tau f_{t_l} * f_{t_s}(t) dt + \rho e^{-\mu\tau} \\ &= (1 - \rho) \int_0^\tau \int_0^t f_{t_l}(t - \theta) f_{t_s}(\theta) d\theta dt + \rho e^{-\mu\tau} \\ &= (1 - \rho) \int_0^\tau \int_0^t e^{-\lambda(t-\theta)} e^{-\mu\theta} d\theta dt + \rho e^{-\mu\tau} = \dots = 1 - e^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

# Redes de Colas: Distribución salida M/M/1

*Ejemplo (cont.):* sabiendo que  $\lambda_{i,o} = \lambda_i$  en la red de colas de abajo tendríamos que

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}\lambda_2 \\ &= p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}(1 - p_{1,3})\lambda_1\end{aligned}$$

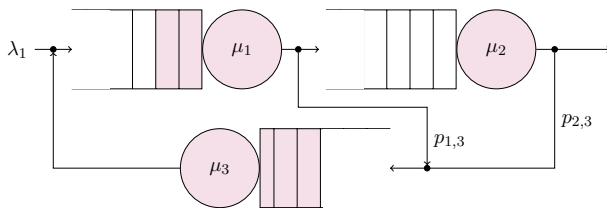


# Redes de Colas: Vector de Probabilidades

Quiero saber la probabilidad de tener  $\mathbf{K} = (3, 1, 4)$  usuarios en equilibrio:

$$\mathbb{P}(\mathbf{K}) = (\mathbb{P}(N_1 = 3), \mathbb{P}(N_2 = 1), \mathbb{P}(N_3 = 4))$$

con  $N_i$  el número de usuarios en la cola  $i$  al alcanzar equilibrio.



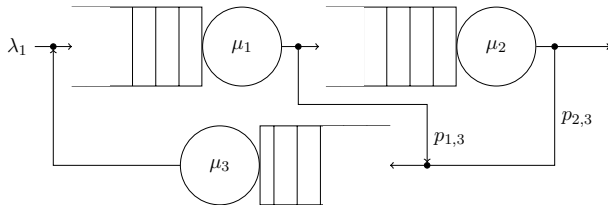
Para que exista  $\mathbb{P}(\mathbf{K})$  necesitamos que sea una red de Jackson:

## Definición (Red de Jackson)

*Las colas interconectadas forman una red de Jackson si:*

- ① *la red es abierta, y las llegadas en cola siguen un proceso de Poisson;*
- ② *los tiempos de servicio son exponenciales y las colas son FIFO;*
- ③ *un usuario pasa de la cola  $i$  a  $j$  con probabilidad  $p_{i,j}$ , o sale con probabilidad  $1 - \sum_j p_{i,j}$ ; y*
- ④ *la carga de las colas está por debajo de 1, i.e.  $\rho_i < 1, \forall i$*

*Ejemplo:* ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?



Comprobemos las propiedades:

① red abierta y ¿llegadas de Poisson?

- ✓ cola  $i = 1$  con llegadas  $Poiss(\lambda_1)$ ;
- ? cola  $i = 2$  recibe  $(1 - p_{1,3})$  de salidas de cola  $i = 1$ ; y
- ? cola  $i = 3$  recibe  $p_{1,3}$  de salidas de cola  $i = 1$ , y el  $p_{2,3}$  de salidas de cola  $i = 2$ ;

## Lema (Descomposición proceso de Poisson)

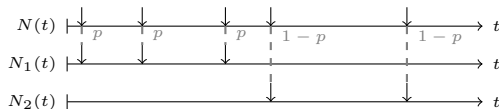
Si  $\{N(t), t > 0\}$  es un proceso estocástico que sigue una distribución  $Poiss(\lambda)$ , y cada llegada se asigna a

- $N_1(t)$  con probabilidad  $p$ , y
- $N_2(t)$  con probabilidad  $1 - p$ ;

entonces:

- $N_1(t) \sim Poiss(p\lambda)$
- $N_2(t) \sim Poiss((1 - p)\lambda)$

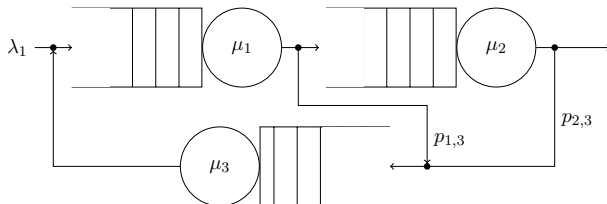
4



<sup>4</sup>Figura basada en [YMG23, Figura 3.7]

*Demostración:* TBD

*Ejemplo (cont.):* ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?



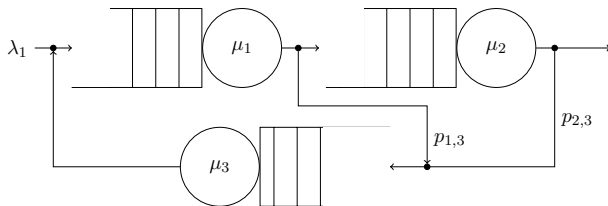
Comprobemos las propiedades:

① ✓ red abierta y ¿llegadas de Poisson?

- ✓ cola  $i = 1$  con llegadas  $Poiss(\lambda_1)$ ;
- ✓ cola  $i = 2$  con llegadas  $Poiss((1 - p_{1,3})\lambda)$ ;
- ✓ cola  $i = 3$  con llegadas  $Poiss(p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}\lambda_2)$ ;



*Ejemplo (cont.): ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?*



Comprobemos las propiedades:

- ② ✓ tiempos de servicio  $Exp(\mu_i)$  y colas FIFO;
- ③ ✓ vamos de  $i$  a  $j$  con probabilidad  $p_{i,j}$  y salimos con probabilidad  $1 - \sum_j p_{i,j}$ ; y
- ④ ✓ las cargas  $\rho_i < 1$  si diseñamos la red para que  $\lambda_i < \mu_i$

## Teorema (Teorema de Jackson)

*Sea una red de Jackson con  $m$  sistemas  $M/M/1$ , existe  $\mathbb{P}(\mathbf{K})$  y se expresa como:*

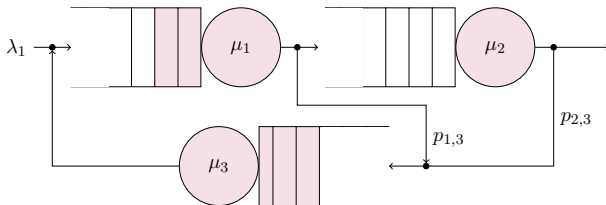
$$\mathbb{P}(\mathbf{K}) = \prod_i^m \mathbb{P}(N_i = K_i) = \prod_i^m \pi_{K_i} = \prod_i^m (1 - \rho_i) \rho_i^{K_i}$$

*con  $\rho_i$  la carga de la cola  $i$ .*

# Redes de Colas: Redes de Jackson

*Ejemplo:* quiero saber la probabilidad de tener  $\mathbf{K} = (3, 1, 4)$  usuarios en equilibrio:

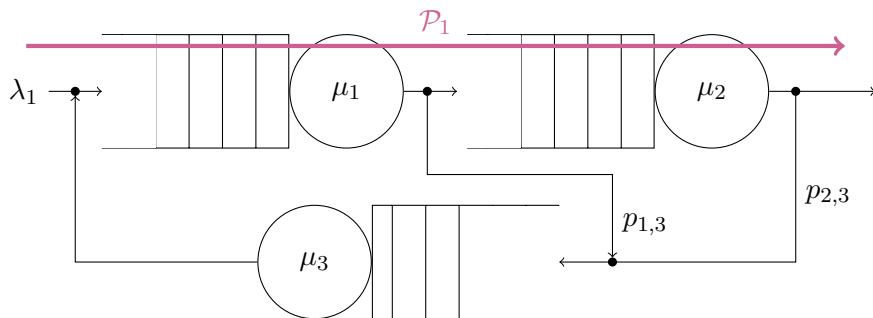
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{K}) &= (\mathbb{P}(N_1 = 3), \mathbb{P}(N_2 = 1), \mathbb{P}(N_3 = 4)) \\ &= \prod_{i=1}^3 (1 - \rho_i) \rho_i^{K_i} \\ &= (1 - \rho_1) \rho_1^3 \cdot (1 - \rho_2) \rho_2^1 \cdot (1 - \rho_3) \rho_3^4\end{aligned}$$



*Ejemplo (cont.):* TBD con números

# Redes de Colas: Tiempo Medio de tránsito

Los usuarios pueden seguir varias rutas (paths)  $\mathcal{P}_i$ , cada una de ellas con una probabilidad  $\mathbb{P}(\mathcal{P}_i)$ .



TBD: dibujar las otras rutas.

## Lema (Tiempo Medio de Tránsito)

*El tiempo medio de tránsito por una ruta  $\mathcal{P}_i$  de una red de Jackson en régimen estacionario es*

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_i}[T(t)] = \sum_{\iota \in \mathcal{P}_i} \mathbb{E}_{\iota}[T(t)] = \sum_{\iota \in \mathcal{P}_i} \frac{1}{\mu_{\iota} - \lambda_{\iota}} \quad (3)$$

*Ejemplo:* TBD, calcular tiempo de tránsito por ruta compleja y su probabilidad



Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez,  
Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.