

# Tema 6: Teletráfico en redes de datos

April 24, 2023

# RSTC

Redes y Servicios de  
Telecomunicación



This work is licensed under a "CC BY-NC-SA 4.0" license.



## 1 Introducción

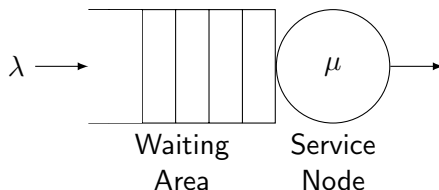
## 2 Sistema M/G/1

- No Markoviano
- Tiempo medio de espera en cola
- Ejemplos distribuciones servicio
- M/M/1 como caso peor

## 3 Redes de Jackson

# Introducción

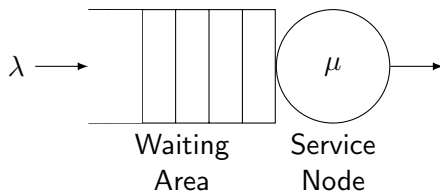
Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

- de llegada exponenciales  $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim Exp(\mu)$

Hemos visto colas M/M/1



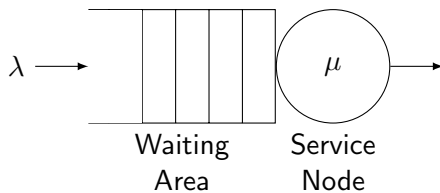
con tiempos:

- de llegada exponenciales  $t_l \sim \text{Exp}(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio  $t_s$  sigue otra distribución?

# Introducción

Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

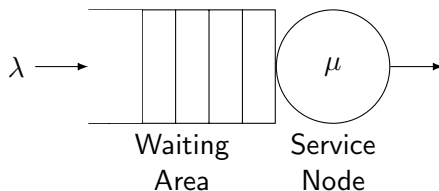
- de llegada exponenciales  $t_l \sim \text{Exp}(\lambda)$
- de servicio exponenciales  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio  $t_s$  sigue otra distribución?

- sistema M/G/1

# Introducción

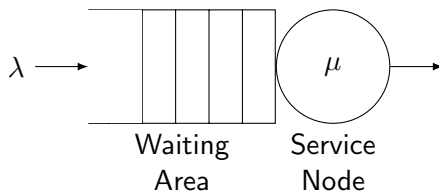
Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

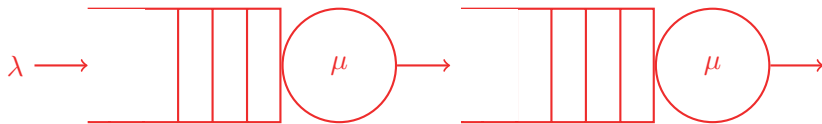
# Introducción

Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

- redes de Jackson





## 1 Introducción

## 2 Sistema M/G/1

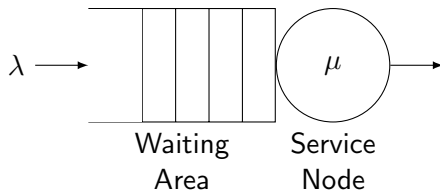
- No Markoviano
- Tiempo medio de espera en cola
- Ejemplos distribuciones servicio
- M/M/1 como caso peor

## 3 Redes de Jackson

# Sistema M/G/1

# Sistema M/G/1: No Markoviano

Tiempo de servicio sigue una distribución general<sup>1</sup>  $t_s \sim G(\mu)$ .



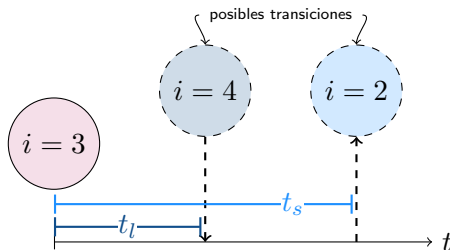
Para modelar como cadena de Markov es necesario que

- tiempo estancia en estado  $t_i \sim Exp(\nu_i)$ .

---

<sup>1</sup>Por ejemplo,  $G(\mu) = U(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu})$

# Sistema M/G/1: No Markoviano



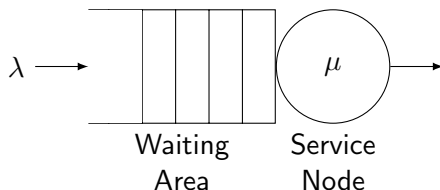
Veamos si se cumple que  $t_i \sim \text{Exp}(\nu_i)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t_i > \tau) &= \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = \mathbb{P}(t_l > \tau)\mathbb{P}(t_s > \tau) \\ &= \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\mu\tau} \neq e^{-\nu_i\tau} \quad (1)\end{aligned}$$

con  $t_s \sim G(\mu) = U\left(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right)$ ,  $\tau \in \left[\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right]$ .

# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Podemos obtener el tiempo medio de espera en cola  $\mathbb{E}[W(t)]$  de un M/G/1.



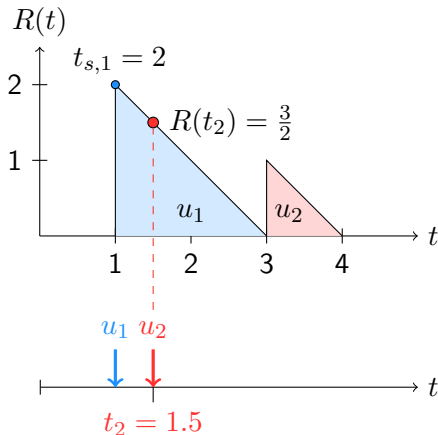
Veamos lo que espera un usuario nuevo:

- ➊  $\mathbb{E}[Q(t)] \frac{1}{\mu}$  en cola ; y
- ➋ la media del tiempo residual  $R$  del que se está sirviendo.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)] &= \mathbb{E}[Q(t)] \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[R(t)] \\ \implies \mathbb{E}[W(t)] &= \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1 - \rho}\end{aligned}$$

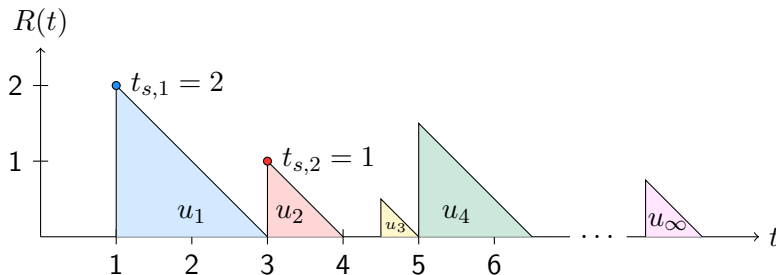
# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Interpretación gráfica de tiempo residual en cada instante  $R(t)$ :



# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

<sup>2</sup> La media del tiempo residual corresponde con el promedio de áreas.



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R(\tau) d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2}\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ilustración y demostración basadas en [YMG23, Figura 8.3].

# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Multiplicando y dividiendo por  $N(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} t_{s,i}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[t_s^2]\end{aligned}$$

con  $t_{s,i}$  la realización de la v.a. del tiempo de servicio para el usuario  $i$ .



# Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

## Lema (Fórmula de Pollaczek-Khintchine)

*El tiempo medio de espera en cola de en un sistema M/G/1 es*

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1 - \rho)} \quad (2)$$

*con  $t_s$  la v.a. del tiempo de servicio que sigue una distribución  $G$ .*

*Demostración:*

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{2} \lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{1 - \rho} = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1 - \rho)}$$

# Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

*Ejemplo:* supongamos un tiempo de servicio  $t_s \sim \text{Exp}(\mu)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^\infty \tau^2 \mu e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\underbrace{=}_{\text{partes}} \left[ -\tau^2 e^{-\mu\tau} \right]_{\tau=0}^\infty - \int_0^\infty -e^{-\mu\tau} 2\tau d\tau \\ &= \int_0^\infty 2\tau e^{-\mu\tau} d\tau \\ &\underbrace{=}_{\text{partes}} \frac{2}{\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

la expresión que vimos para M/M/1.

*Ejemplo:* supongamos un tiempo de servicio  $t_s \sim U(0, \frac{2}{\mu})$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^{\frac{2}{\mu}} \tau^2 \frac{1}{2/\mu} d\tau \\ &= \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\tau^3}{3} \right]_{\tau=0}^{\frac{2}{\mu}} \\ &= \frac{4}{3\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Otra manera de ver el momento de segundo orden es sabiendo que

$$\mathbb{E}[t_s^2] = \text{Var}[t_s] + \mathbb{E}^2[t_s]$$

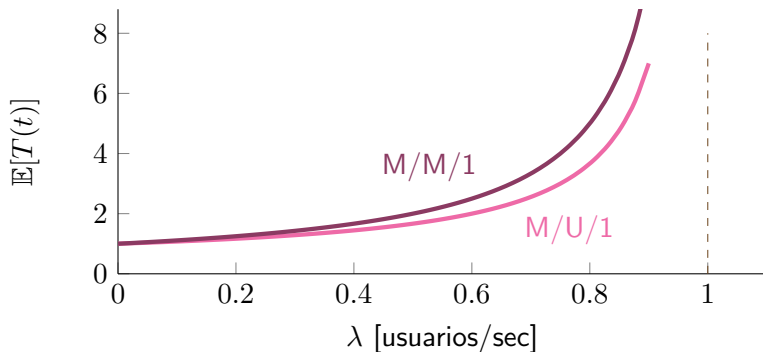
*Ejemplo:*

- $t_s \sim \text{Exp}(\mu) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2};$
- $t_s \sim U\left(0, \frac{2}{\mu}\right) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{\mu} - 0\right)^2 + \frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{3\mu^2}.$

que coincide con las expresiones anteriores.

# Sistema M/G/1: M/M/1 como caso peor

El tiempo medio de servicio  $\mathbb{E}[T(t)]$  es pesimista en un M/M/1.



*Ejemplo (arriba):* el tiempo medio total es menor<sup>3</sup> en una uniforme.

<sup>3</sup>Tomamos  $\mu = 1$  [usuario/sec].

# Redes de Jackson



Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez,  
Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.