Tema 6: Teletráfico en redes de datos

April 25, 2023

RSTC

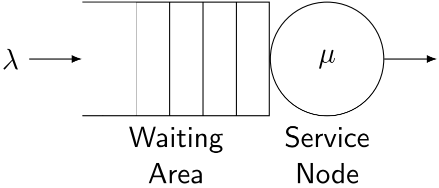
Redes y Servicios de Telecomunicación

Contenido

Introducción

Introducción

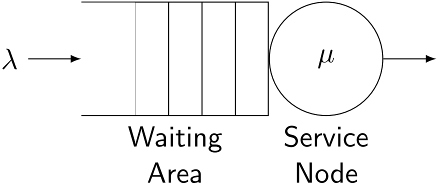
Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Hemos visto colas M/M/1

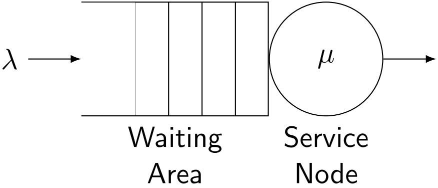


con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

Hemos visto colas M/M/1



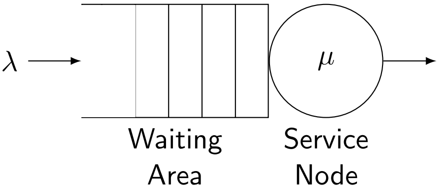
con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

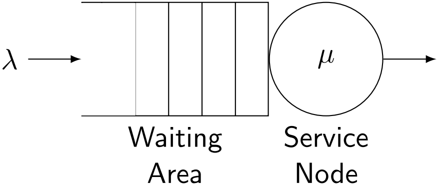
- sistema M/G/1

Hemos estudiado una sola cola



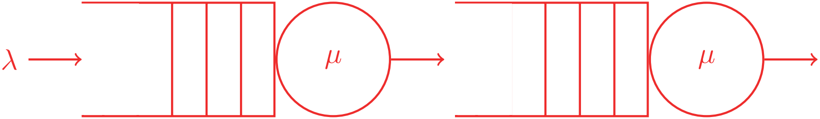
Pero, ¿y si hay más colas?

Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

- redes de Jackson

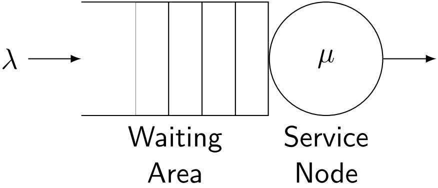


Contenido

Sistema M/G/1

Sistema M/G/1: No Markoviano

Tiempo de servicio sigue una distribución general[1] $t_s \sim G(\mu)$.

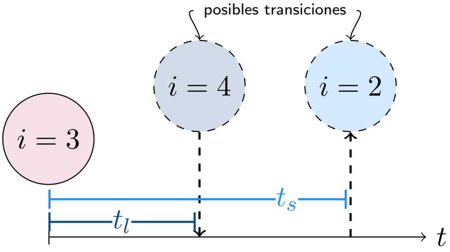


Para modelar como cadena de Markov es necesario que

- tiempo estancia en estado $t_i \sim Exp(\nu_i)$.

[1] Por ejemplo, $G(\mu) = U(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu})$

Sistema M/G/1: No Markoviano



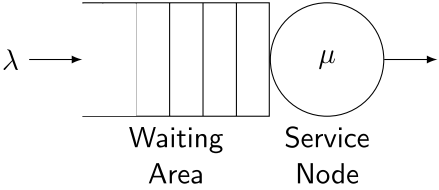
Veamos si se cumple que $t_i \sim Exp(\nu_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t_i > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = \mathbb{P}(t_l > \tau)\mathbb{P}(t_s > \tau) \\ = \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\mu\tau} \neq e^{-\nu_i\tau} \end{aligned} \quad (1)$$

con $t_s \sim G(\mu) = U\left(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right), \ \tau \in \left[\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right]$.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Podemos obtener el tiempo medio de espera en cola $\mathbb{E}[W(t)]$ de un M/G/1.



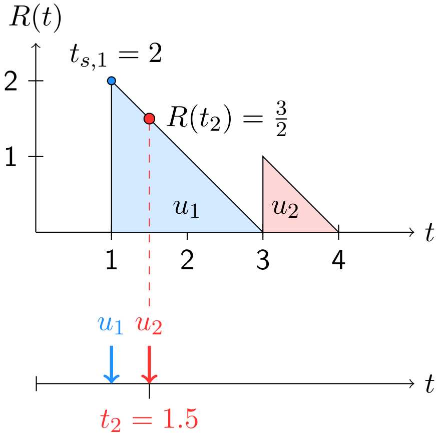
Veamos lo que espera un usuario nuevo:

1. $\mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu}$ en cola ; y
2. la media del tiempo residual R del que se está sirviendo.

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[R(t)]$$
$$\implies \mathbb{E}[(W(t))] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho}$$

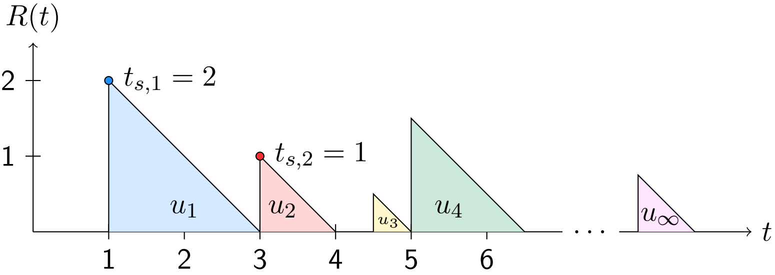
Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Interpretación gráfica de tiempo residual en cada instante $R(t)$:



Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

[2] La media del tiempo residual corresponde con el promedio de áreas.



$$\mathbb{E}[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \int_0^t R(\tau)\ d\tau$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2}$$

[2] Ilustración y demostración basadas en [YMG23, Figura 8.3].

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Multiplicando y dividiendo por $N(t)$:

$$\mathbb{E}[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \right) \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} t_{s,i}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[t_s^2]$$

con $t_{s,i}$ la realización de la v.a. del tiempo de servicio para el usuario i.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Lema (Fórmula de Pollaczek-Khintchine)

El tiempo medio de espera en cola de en un sistema M/G/1 es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

con t_s *la v.a. del tiempo de servicio que sigue una distribución* G.

Demostración:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{1-\rho} = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)}$$

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim Exp(\mu)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^\infty \tau^2 \mu e^{-\mu\tau}\ d\tau \\
&\underbrace{=}_{partes} \left[-\tau^2 e^{-\mu\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty} - \int_0^\infty -e^{-\mu\tau} 2\tau\ d\tau \\
&= \int_0^\infty 2\tau e^{-\mu\tau}\ d\tau \\
&\underbrace{=}_{partes} \frac{2}{\mu^2}
\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

la expresión que vimos para M/M/1.

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim U(0, \frac{2}{\mu})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^{\frac{2}{\mu}} \tau^2 \frac{1}{2/\mu}\ d\tau \\ &= \frac{\mu}{2}\left[\frac{\tau^3}{3}\right]_{\tau=0}^{\frac{2}{\mu}} \\ &= \frac{4}{3\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda\mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{3}\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Otra manera de ver el momento de segundo orden es sabiendo que

$$\mathbb{E}[t_s^2] = \mathrm{Var}[t_s] + \mathbb{E}^2[t_s]$$

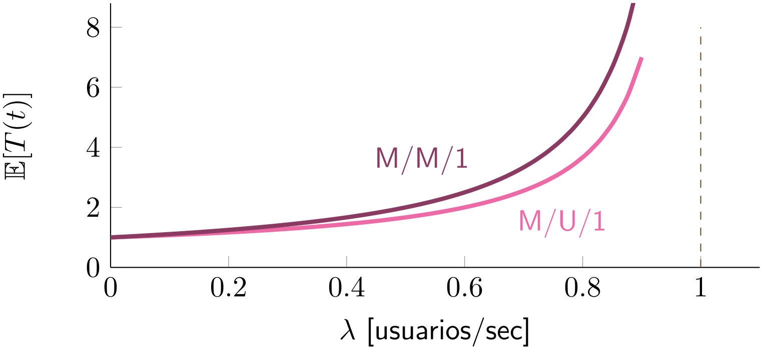
Ejemplo:

- $t_s \sim Exp(\mu) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}$;
- $t_s \sim U\left(0, \frac{2}{\mu}\right) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\mu} - 0\right)^2 + \frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{3\mu^2}$.

que coincide con las expresiones anteriores.

Sistema M/G/1: M/M/1 como caso peor

El tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)]$ es pesimista en un M/M/1.

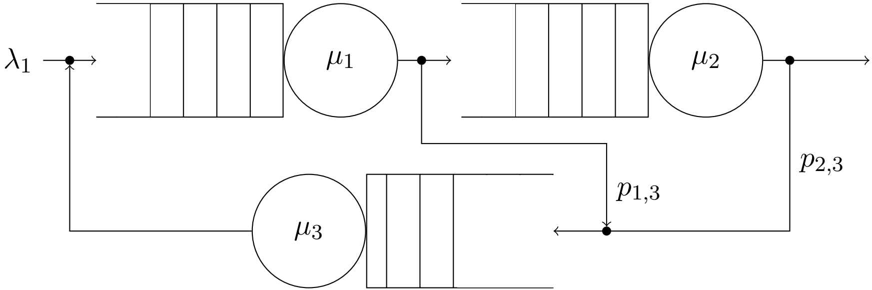


Ejemplo (arriba): el tiempo medio total es menor[3] en una uniforme.

[3] Tomamos $\mu = 1$ [usuario/sec].

Redes de Colas

Podemos estudiar cómo modelar una red de colas (e.g., routers).



con $p_{2,3}$ la probabilidad de ir de la cola 2 a la 3.

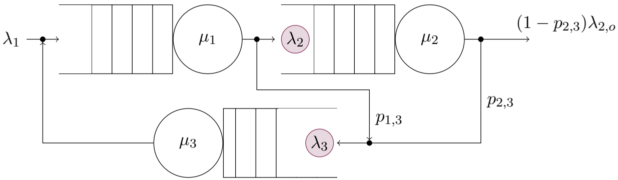
Redes de Colas

Las llegadas λ_i a la cola i se averiguan usando probabilidades $p_{i,j}$.

Ejemplo:

$$\lambda_3 = p_{1,3}\lambda_{1,o} + p_{2,3}\lambda_{2,o}$$

con $\lambda_{i,o}$ la tasa de salidas de la cola i.



Redes de Colas: Distribución salida M/M/1

Lema (Tiempo entre salidas)

En un sistema M/M/1 el tiempo entre salidas y llegadas siguen la misma distribución. Es decir, se cumple:

$$t_e \sim Exp(\lambda)$$
$$t_l \sim Exp(\lambda)$$

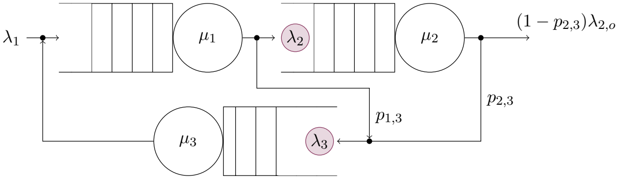
Demostración:

$$F_{t_e}(\tau) = \pi_0 \mathbb{P}(t_l + t_s \leq \tau) + (1 - \pi_0)\mathbb{P}(t_s \leq \tau)$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau f_{t_l+t_s}(t)\ dt + \rho e^{-\mu\tau} = (1-\rho)\int_0^\tau f_{t_l} * f_{t_s}(t)\ dt + \rho e^{-\mu\tau}$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau \int_0^t f_{t_l}(t-\theta) f_{t_s}(\theta)\ d\theta\ dt + \rho e^{-\mu\tau}$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau \int_0^t e^{-\lambda(t-\theta)} e^{-\mu\theta}\ d\theta\ dt + \rho e^{-\mu\tau} = \ldots = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

Redes de Colas: Distribución salida M/M/1

Ejemplo (cont.): sabiendo que $\lambda_{i,o} = \lambda_i$ en la red de colas de abajo tendríamos que

$$\begin{aligned}\lambda_3 =& p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}\lambda_2 \\ =& p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}(1 - p_{1,3})\lambda_1\end{aligned}$$



Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.