

# Tema 5: Fundamentos de Teletráfico y Teoría de Colas

March 19, 2024

# RSTC

Redes y Servicios de  
Telecomunicación



This work is licensed under a "CC BY-NC-SA 4.0" license.



# Contenido I

## 1 Introducción

## 2 Distribución Exponencial

- Propiedad sin memoria
- Mínimo de variables exponenciales
- Comparación de exponenciales
- Suma de exponenciales

## 3 Procesos de Llegada de Poisson

- Tiempos entre llegadas
- Conteo
- Agregado
- Descomposición
- PASTA

## 4 Teoría de Colas

## 5 Sistema M/M/1

- Cadena de Markov en tiempo continuo
- Probabilidades de estado

# Contenido II

- Ecuaciones de equilibrio
- Métricas famosas

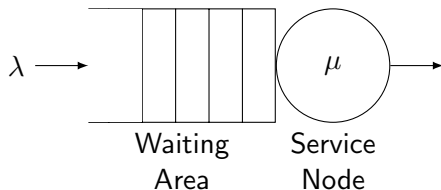
# Introducción

La teoría de colas modela:

- colas de supermercado;
- colas en gasolineras;
- colas en taquillas; o
- **colas de routers.**

Nos interesa saber:

- ¿cuánto vamos a esperar?; o
- la probabilidad de que esté llena la cola.



En una cola:

- Llegan  $\lambda$  [usuarios/sec]
- hay  $q = 4$  usuarios encolados;
- hay  $n = 5$  usuarios en total; y
- se sirven  $\mu$  [usuarios/sec].

Problema:

- las llegadas; y
- tiempos de servicio

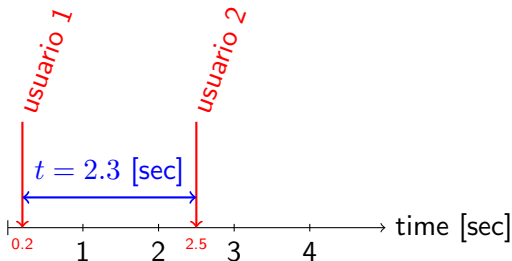
son **aleatorios**.

*Ejemplo:* la persona que nos atiende en caja tarda más o menos dependiendo de como de cansada esté, o de cuánto tarde la pasarela de pago (aleatorio).

# Distribución Exponencial



# Distribución Exponencial



El tiempo entre los usuarios que llegan a la cola  $t$  se puede modelar con la **distribución exponencial**.

## Definición (Distribución exponencial)

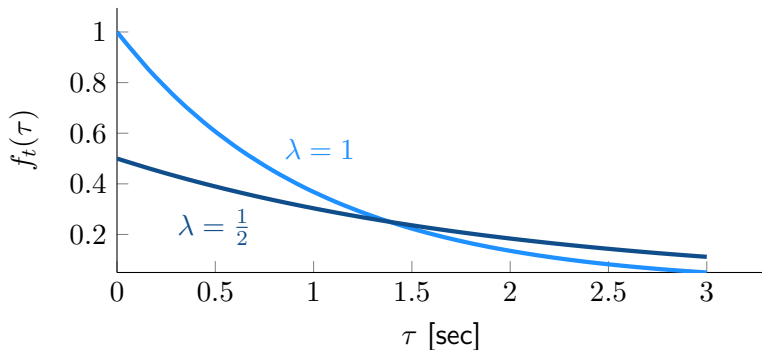
*Se dice que una variable aleatoria continua  $t \in \mathbb{N}$  sigue una distribución exponencial si su función de densidad es:*

$$f_t(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (1)$$

*donde  $\lambda > 0$  es el parámetro que caracteriza la distribución; y su función de distribución acumulada es*

$$F_t(\tau) = \mathbb{P}(t \leq \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} \quad (2)$$

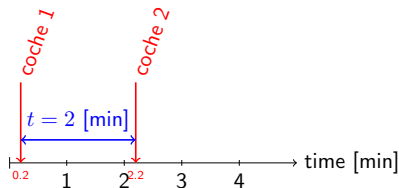
# Distribución Exponencial: propiedades



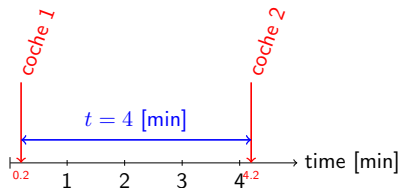
- **media:**  $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$
- **varianza:**  $\text{Var}[t] = \frac{1}{\lambda^2}$

# Distribución Exponencial: ejemplo gasolinera

*Ejemplo:* el tiempo medio que pasa un coche en un surtidor es  $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda} = 2$  [min]. Por tanto  $\lambda = \frac{1}{2}$  [coches/min].



(a)  $\mathbb{P}(t \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = 0.63$

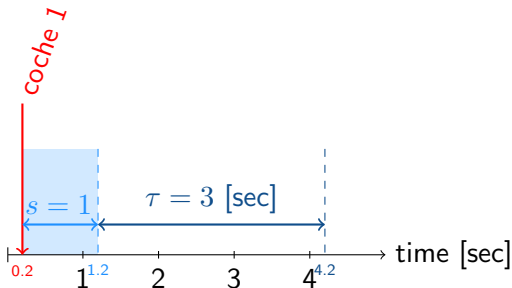


(b)  $\mathbb{P}(t \leq 4) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = 0.86$

# Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado  $s$  [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde  $\tau$  [sec] más?:

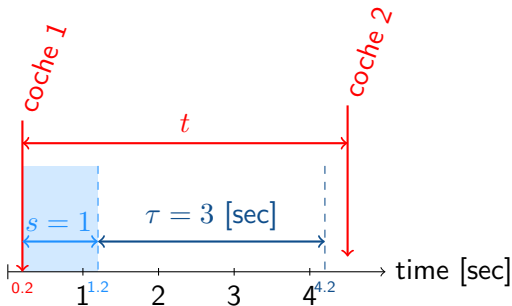
$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) \quad (3)$$



# Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado  $s$  [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde  $\tau$  [sec] más?:

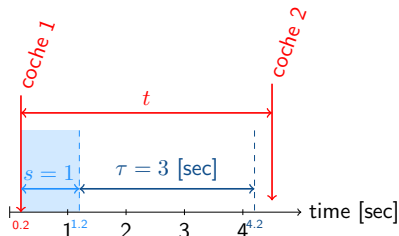
$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) \quad (3)$$



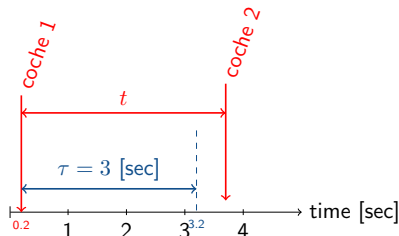
# Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Por la propiedad sin memoria de una exponencial tenemos que:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) \quad (4)$$



(a)  $\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s)$



(b)  $\mathbb{P}(t > \tau)$

# Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

*Ejemplo:* en media el surtidor de una gasolinera está ocupado 5 [min]. Si el surtidor lleva  $s = 1$  [min] ocupado, ¿cuál es la probabilidad de que esté ocupado  $\tau = 3$  [min] más?

Por la propiedad sin memoria tenemos:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t > 3) = e^{-\frac{1}{5} \cdot 3} = 0.55$$



# Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

*Ejemplo:* los compactos llegan a gasolinera con tasa  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  [coches/min], y los todoterreno con tasa  $\lambda_2 = \frac{1}{8}$  [coches/min].

¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

# Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

## Lema (Mínimo de v.a. exponenciales)

Sean las v.a.<sup>a</sup> exponenciales  $t_1$  y  $t_2$ , con tasas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; la v.a.  $t = \min\{t_1, t_2\}$  se distribuye como una v.a. exponencial de tasa  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

---

<sup>a</sup>v.a. significa variable aleatoria

*Demostración:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t > \tau) &= \mathbb{P}(t_1 > \tau)\mathbb{P}(t_2 > \tau) = \left( \int_{\tau}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \right) \left( \int_{\tau}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \right) \\ &= e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 \tau} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \tau} = e^{-\lambda \tau}\end{aligned}$$

# Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

*Ejemplo:* los compactos llegan a gasolinera con tasa  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  [coches/min], y los todoterreno con tasa  $\lambda_2 = \frac{1}{8}$  [coches/min].

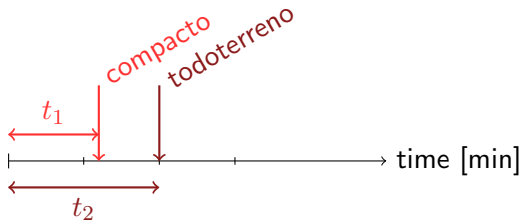
¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t \leq 3) &= 1 - \mathbb{P}(t > 3) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 3} \\ &= 1 - e^{-(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \cdot 3} = 0.67\end{aligned}$$

# Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

*Ejemplo:* los compactos llegan a gasolinera con tasa  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  [coches/min],  
y los todoterreno con tasa  $\lambda_2 = \frac{1}{8}$  [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir,  
( $t_1 < t_2$ )?



## Lema (Comparación de v.a. exponenciales)

Sean las v.a. exponenciales  $t_1$  y  $t_2$ , con tasas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; se tiene que:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (5)$$

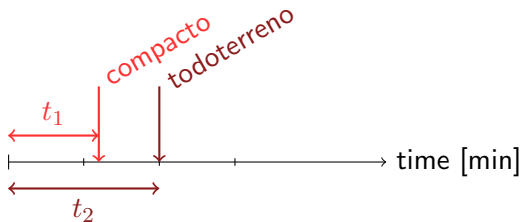
*Demostración:*

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \int_0^{\infty} f_{t_1}(t) \mathbb{P}(t_2 > t) dt = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

# Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

*Ejemplo:* los compactos llegan a gasolinera con tasa  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  [coches/min], y los todoterreno con tasa  $\lambda_2 = \frac{1}{8}$  [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir,  $(t_1 < t_2)$ ?

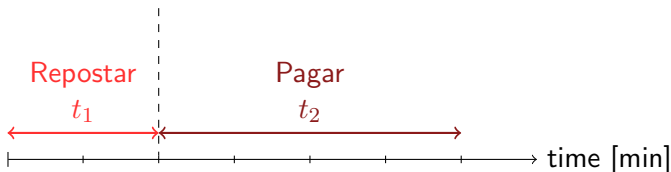


$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 0.67 \quad (6)$$

# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

*Ejemplo:* en media un coche tarda en repostar  $t_1 = 2$  [min]. Después tarda, en media,  $t_2 = 4$  [min] en pagar.

¿Cuál es la probabilidad de que tarde 6 [min] en repostar y pagar?



# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

## Lema (Suma de v.a. exponenciales independientes)

Sean las v.a. exponenciales independientes  $t_1$  y  $t_2$ , con tasas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; se tiene que:

$$\mathbb{P}(t_1 + t_2 = t) = \lambda_1 \lambda_2 \left( e^{-\lambda_2 t} \right) \frac{e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (7)$$

*Demostración:*

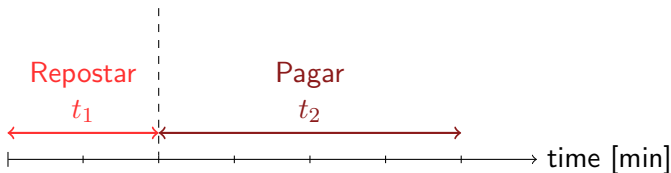
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t_1 + t_2 = t) &= \int_0^t f_{t_1}(\tau) f_{t_2}(t - \tau) d\tau = f_{t_1} * f_{t_2}(t) \\ &= \int_0^t \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} e^{\tau(\lambda_2 - \lambda_1)} d\tau = \dots \end{aligned}$$



# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

*Ejemplo:* en media un coche tarda en repostar  $t_1 = 2$  [min]. Después tarda, en media,  $t_2 = 4$  [min] en pagar.

¿Cuál es la probabilidad de que tarde 6 [min] en repostar y pagar?

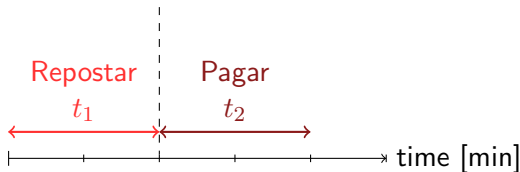


$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t_1 + t_2 = 6) &= \lambda_1 \lambda_2 \left( e^{-\lambda_2 6} \right) \frac{e^{6(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{1}{4} 6} \right) \frac{e^{6(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})} - 1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = 0.08667154589028295\end{aligned}$$

# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

*Ejemplo:* en media un coche tarda en repostar y pagar  $t_1 = t_2 = 2$  [min].

¿Cuál es la probabilidad de que tarde 4 [min] en repostar y pagar?



# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

## Lema (Suma de v.a. exponenciales i.i.d)

Sean las v.a. exponenciales independientes e idénticamente distribuidas  $t_1$  y  $t_2$ , ambas con tasa  $\lambda$ , se tiene que:

$$\mathbb{P}(t_1 + t_2 = t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad (8)$$

*Demostración:* Tomamos límite para  $x = \lambda_2 - \lambda_1$  usando (7):

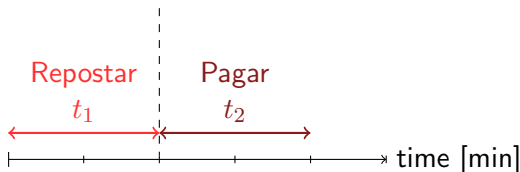
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lambda_1 \lambda_2 \left( e^{-\lambda_2 t} \right) & \underbrace{\frac{e^{tx} - 1}{x}}_{\text{indeterminación}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lambda_1 \lambda_2 \left( e^{-\lambda_2 t} \right) \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(tx)^k}{k!} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lambda_1 \lambda_2 \left( e^{-\lambda_2 t} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{t^k x^{k-1}}{k!} \underbrace{=}_{\text{nota } 1} \lambda^2 e^{-\lambda t} t \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Intercambio límites convergencia uniforme  $e^x$

# Distribución Exponencial: Suma de exponenciales

*Ejemplo:* en media un coche tarda en repostar y pagar  $t_1 = t_2 = 2$  [min].

¿Cuál es la probabilidad de que tarde 4 [min] en repostar y pagar?

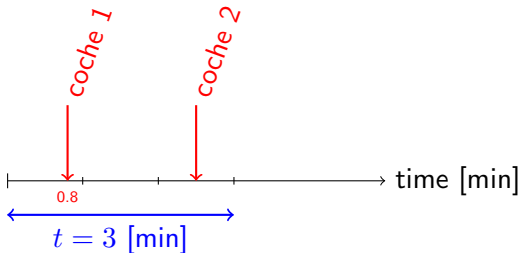


$$\mathbb{P}(t_1 + t_2 = 4) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 4 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = 0.1353352832366127$$

# Procesos de Llegada de Poisson

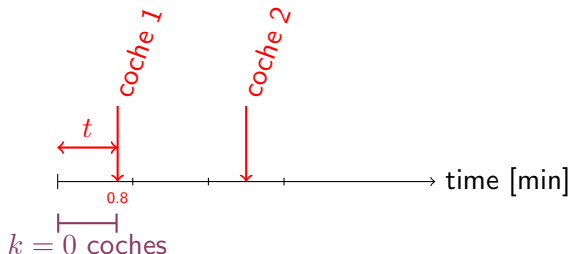
# Procesos de Llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

Buscamos una distribución que diga cómo de probable es que lleguen 2 coches en 3 segundos:



# Procesos de Llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

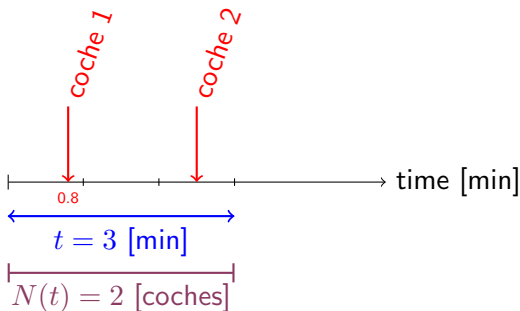
Si el tiempo entre llegadas es exponencial, sabemos la probabilidad de que lleguen  $k = 0$  coches en  $t = 0.8$  [min].



$$\mathbb{P}(0 \text{ coches en } 0.8 \text{ min}) = 1 - \mathbb{P}(t > 0.8) = 1 - e^{-\lambda 0.8}$$

# Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

Pero lo que queremos es contar el número de coches  $N(t) = 2$  que llegan en  $t = 3$  [min], y saber qué probabilidad tiene  $\mathbb{P}(N(t) = 2)$



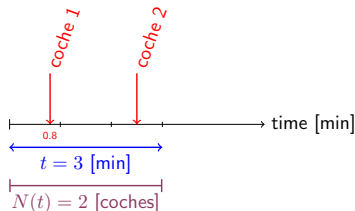


# Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

## Definición (Distribución de Poisson)

Un proceso de llegadas  $N(t)$  con tasa  $\lambda$  es de Poisson si el tiempo entre llegadas se distribuye como una v.a. exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ ; y su función de densidad es

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (9)$$

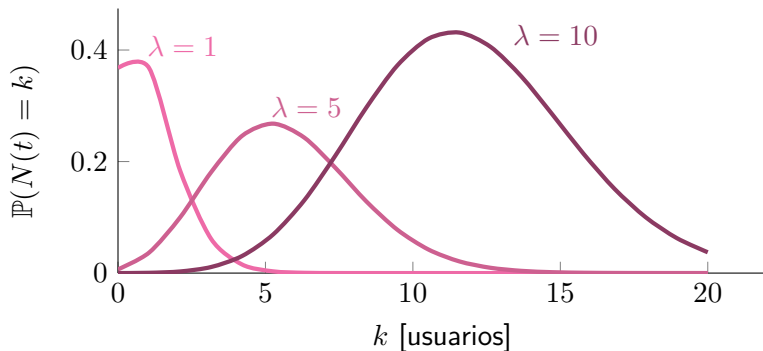


Ejemplo:  $\mathbb{P}(N(3) = 2) = \frac{(\lambda 3)^2 e^{-\lambda 3}}{2!} = 0.27$   
 $\lambda=2/3$

# Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

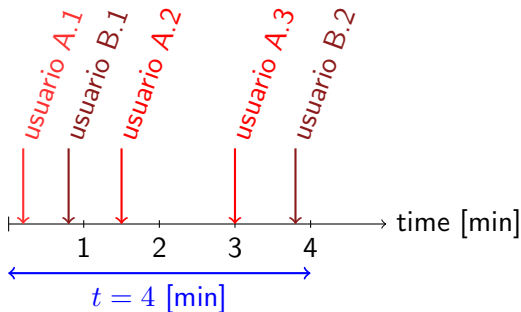
## Propiedades de la distribución de Poisson:

- **media:**  $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$  usuarios
- **varianza:**  $\text{Var}[N(t)] = \lambda t$  usuarios<sup>2</sup>



# Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

¿Cómo se distribuyen las llegadas de **A** y **B** juntos?



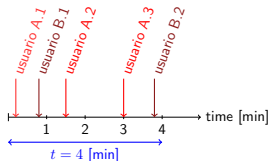
Vemos que:

- $\lambda_A = \frac{3}{4}$  [coches/min], ya que  $N_A(t = 4\text{min}) = 3$  [coches]
- $\lambda_B = \frac{2}{4}$  [coches/min], ya que  $N_B(t = 4\text{min}) = 2$  [coches]

# Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

## Lema (Agregado procesos de Poisson)

Sean **A** y **B** dos procesos de Poisson independientes con tasas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; el agregado es un proceso de Poisson de tasa  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .



*Demostración* (caso general  $n$  procesos):

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \prod_i^n \mathbb{P}(N_i(t) = 0) = \prod_i^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_i^n \lambda_i t} = e^{-\lambda t} \quad (10)$$

## Teorema (Palm-Khintchine [YMG23])

Sea  $\{N_i(t)\}_i^n$  un conjunto de  $n$  procesos de llegada independientes con sendas tasas  $\lambda_i$ . La superposición de procesos

$$N(t) = \sum_i^n N_i(t), t \geq 0 \quad (11)$$

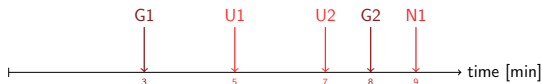
tiende a un **proceso de Poisson** de tasa  $\lambda = \sum_i \lambda_i$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , siempre y cuando se cumpla:

- 1 carga finita  $\lambda < \infty$ ; y
- 2 ningún proceso domine al agregado  $\lambda_i \ll \lambda$

# Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

*Ejemplo (tma. Palm-Khintchine):* los tiempos de llegada de coches dependen del color, y son independientes del de otros colores. Además:

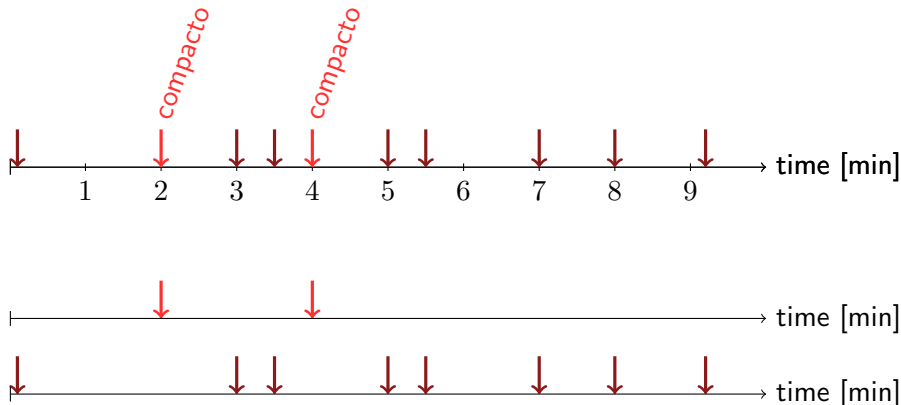
- tiempo entre coches rojos  $\sim U(0, 10 \text{ [min]})$
- tiempo entre coches granates  $\sim N(\mu = 20 \text{ [min]}, \sigma = 1 \text{ [min]})$
- ...
- tiempo entre coches fucsia  $\sim \text{Geo}(p = 0.2)$



El agregado será un proceso Poisson de tasa  $\lambda = \sum_i \lambda_i = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \dots + p$

# Procesos de Llegada de Poisson: Descomposición

*Ejemplo:* una gasolinera recibe  $\lambda = \frac{1}{4}$  [coches/min]. Un coche es compacto con probabilidad  $p = 0.2$ , y todoterreno con probabilidad  $1 - p = 0.8$ . ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 2 compactos en 9 [min]?



# Procesos de llegada de Poisson: Descomposición

## Lema (Descomposición proceso de Poisson)

Considere un proceso de Poisson  $N(t)$  con tasa  $\lambda$ . Si:

- $N_1(t)$  un proceso que asignar una llegada con probabilidad  $p$ ; y
- $N_2(t)$  un proceso que asignar una llegada con probabilidad  $1 - p$

entonces  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  son procesos de Poisson con tasas  $\lambda p$ ,  $\lambda(1 - p)$ ; respectivamente.

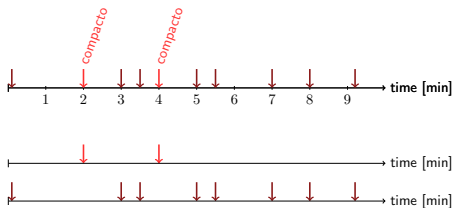
Demostración [YMG23]:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1(t) = n, N_2(t) = m) &= \mathbb{P}(N_1(t) = n \mid N(t) = n + m) \mathbb{P}(N(t) = n + m) \\ &= \binom{n + m}{n} p^n (1 - p)^m \cdot \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n+m}}{(n + m)!} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda p t)^n}{n!} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda (1 - p) t)^m}{m!}\end{aligned}$$



# Procesos de Llegada de Poisson: Descomposición

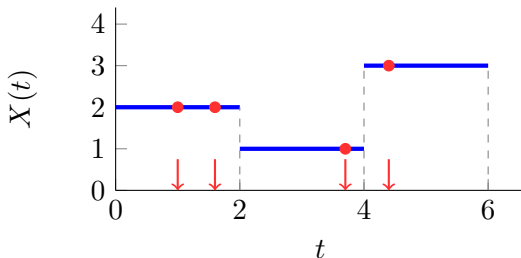
*Ejemplo:* una gasolinera recibe  $\lambda = \frac{1}{4}$  [coches/min]. Un coche es compacto con probabilidad  $p = 0.2$ , y todoterreno con probabilidad  $1 - p = 0.8$ . ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 2 compactos en 9 [min]?



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1(9) = 2) &= \frac{e^{-\lambda p 9} (\lambda p 9)^2}{2!} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{4} \cdot 0.2 \cdot 9} \left(\frac{1}{4} \cdot 0.2 \cdot 9\right)^2}{2!} = 0.1587916087808796\end{aligned}$$

# Procesos de Llegada de Poisson: PASTA

“Poisson Arrivals See Time Averages” (PASTA)<sup>2</sup>



En media, los **valores** vistos por **llegadas** de Poisson es la media temporal  $\bar{X}(t)$ .

<sup>2</sup>Ejemplo de [YMG23, Figura 3.17]

## Lema (PASTA)

Sea  $X(t)$  un proceso aleatorio, y  $Y$  la v.a. definida como el valor que toman las llegadas de Poisson al muestrear  $X(t)$ , se tiene que:

$$\overline{X(t)} = \overline{Y} \quad (12)$$

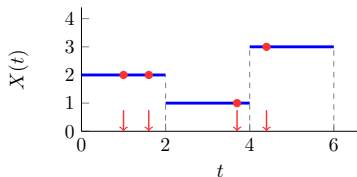
# Procesos de Llegada de Poisson: PASTA- ejemplo

Media temporal:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{6} \int_0^6 X(t) dt = \frac{1}{6}(2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{12}{6}$$

Llegadas de Poisson:

$$\overline{Y} = 2 \cdot \mathbb{P}([0, 2]) + 1 \cdot \mathbb{P}([2, 4]) + 3 \cdot \mathbb{P}([4, 6]) = 2 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{6}$$

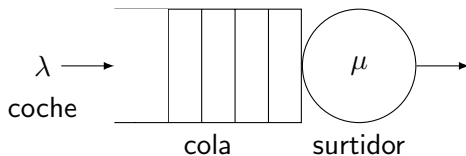


con

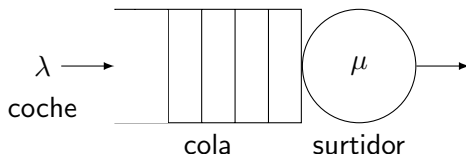
$$\mathbb{P}([0, 2]) = \frac{\mathbb{P}(N(0, 2) = 1) \mathbb{P}(N(2, 4) = 0) \mathbb{P}(N(4, 6) = 0)}{\mathbb{P}(N([0, 6]) = 1)} = \frac{\frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!} \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}}{\frac{(6\lambda)^1 e^{-6\lambda}}{1!}} = \frac{2}{6}$$

# Teoría de Colas

Estudia las prestaciones de sistemas de colas como la ilustrada abajo



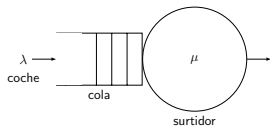
- $\lambda$ : tasa de llegadas [vehículos/min]
- $\mu$ : tasa de servicio [vehículos/min]



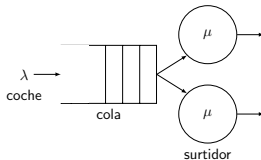
A lo largo del tiempo  $t$  queremos saber:

- $N(t)$ : el número de usuarios en el sistema [vehículos]
- $T(t)$ : el tiempo total en el sistema [min]
- $Q(t)$ : el número de usuarios encolados [vehículos]
- $W(t)$ : el tiempo de espera en cola [min]

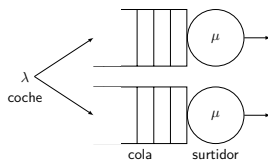
Si llegan muchos usuarios (coches) a la cola, hay que dimensionar:



(a) Surtidor potente



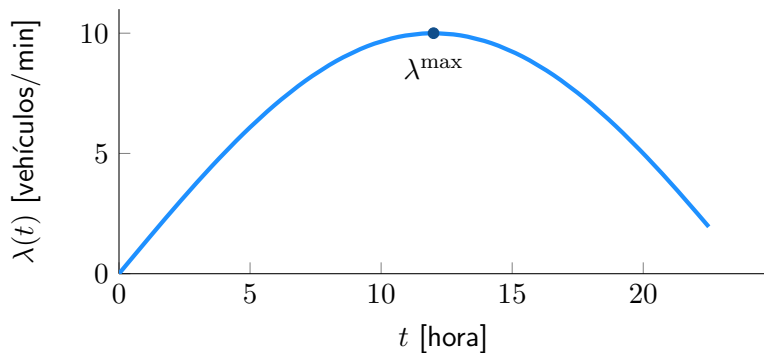
(b) Dos surtidores



(c) Dos colas+surtidor



Hay que dimensionar para **hora pico**  $\lambda^{\max}$ .



# Sistema M/M/1

La notación de Kendall define cómo es una cola

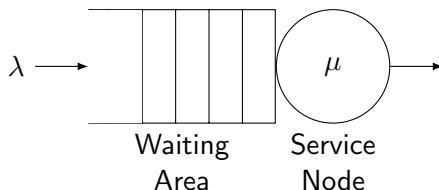
$$A/S/c/K/N/D$$

donde:

- **A** es la v.a. del tiempo entre llegadas;
- **S** es la v.a. del tiempo de servicio;
- **c** es el número de servidores que atienden la cola;
- **K** es en tamaño de la cola;
- **N** es la cantidad de llegadas; y
- **D** es la política de encolado.

# Sistema M/M/1

Un M/M/1 es una cola<sup>3</sup> como la de la figura.



donde:

- el tiempo entre llegadas es exponencial (M);
- el tiempo de servicio es exponencial (M);
- hay un servidor atendiendo (1); y
- la cola es infinita ( $\infty$ ).

---

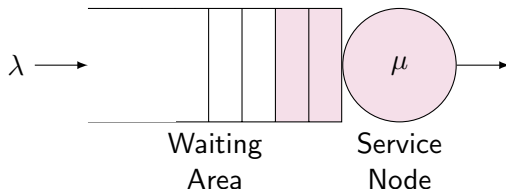
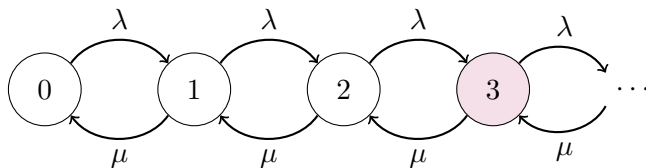
<sup>3</sup>en notación Kendall M/M/1/ $\infty$ / $\infty$ /FIFO

Queremos responder a preguntas cómo:

- ¿cuál es la probabilidad de esperar en cola?
- ¿cuánto esperaré en la cola? o
- ¿cuánto tardaré en ser servido?

Para ello modelamos la cola con una cadena de Markov.

# Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo



- estados = #usuarios en cola y servidor
- transiciones = tasa de llegada  $\lambda$  / tasa de servicio  $\mu$

## Definición (Cadena de Markov en tiempo continuo[YMG23])

*Un proceso estocástico  $\{N(t), t > 0\}$  es una cadena de Markov si cumple:*

- ❶ *el tiempo de estancia en el estado  $i$  sigue una v.a. exponencial independiente de tasa  $\nu_i$ ; y*
- ❷ *el proceso pasa del estado  $i$  al  $j$  con una probabilidad  $\pi_{ij}$  que cumple  $\sum_j \pi_{ij} = 1, \forall i$*

# Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov?



# Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov? **Sí.**

- 1 el tiempo de estancia  $T$  en un estado se distribuye como una exponencial de tasa  $\nu = \lambda_l + \lambda_s$ :

$$\mathbb{P}(T > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = e^{-(\lambda_l + \lambda_s)\tau}$$

con  $t_l, t_s$  las v.a. exponenciales del tiempo de llegada y servicio.

- 2 la suma de probabilidades de transición es uno

$$\begin{aligned} & \pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1} \\ &= \mathbb{P}(N(t+1) = k+1 \mid N(t) = k) + \mathbb{P}(N(t+1) = k-1 \mid N(t) = k) \\ &= \mathbb{P}(t_l < t_s) + \mathbb{P}(t_s < t_l) = \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_s} + \frac{\lambda_s}{\lambda_l + \lambda_s} = 1 \end{aligned}$$

# Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

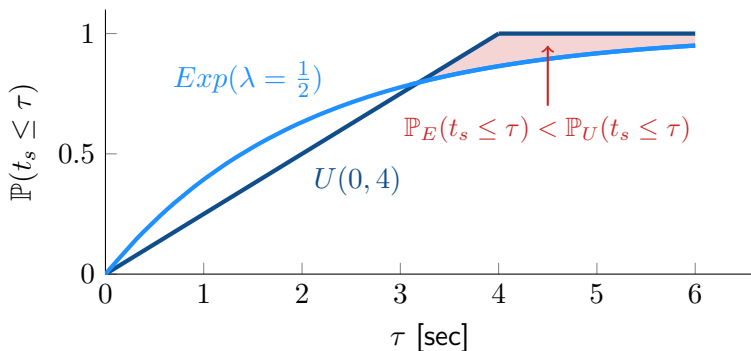
¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada:** sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.

# Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada:** sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.
- **tiempos de servicio:** no, pero da expresiones cerradas y es una cota pesimista para altas fiabilidades

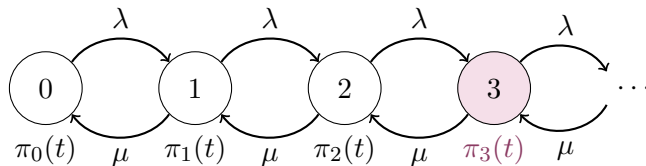


# Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

La cadena de Markov va pasando por estados.

En el instante  $t$  la probabilidad de estar en cada estado es, e.g.:

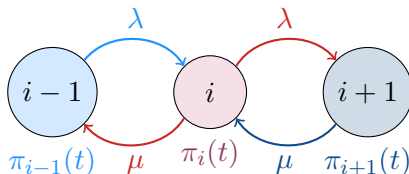
$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \dots) = (0.02, 0.12, 0.3, 0.07, \dots)$$



# Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

¿Cómo varía la probabilidad de estar en el estado  $i$  tras  $\varepsilon$  [sec]?

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_i(t) &= -\pi_i(t)\nu_i + \sum_{j \neq i} \pi_j(t) \cdot \nu_j \pi_{ji} \\ &= -\pi_i(t)(\lambda + \mu) + \pi_{i-1}(t) \cdot (\lambda + \mu) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \pi_{i+1}(t) \cdot \overbrace{(\lambda + \mu)}^{\nu_{i+1}} \overbrace{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}^{\pi_{i,i+1}(t)} \\ &= -\pi_i(t)(\lambda + \mu) + \pi_{i-1}(t)\lambda + \pi_{i+1}(t)\mu \quad (13)\end{aligned}$$



Si  $t \rightarrow \infty$ , la cadena alcanza [YMG23] una distribución estacionaria donde las probabilidades no varían:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \pi_i(t) = 0, \quad \forall i \quad (14)$$

Nos referimos a la **distribución estacionaria** como  $\pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$ .

*Ejemplo:*

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) = (0.12, 0.04, 0.17, 0.06, \dots)$$

# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Usando (13) y (14) podemos definir la **ecuación de equilibrio** para encontrar la distribución estacionaria  $\pi$ :

$$0 = \pi Q = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (15)$$

con

$$q_{ij} = \begin{cases} \nu_i \pi_{ij}, & i \neq j \\ -\nu_i, & i = j \end{cases} \quad (16)$$

la entrada  $(i, j)$  de la matriz de transición  $Q$ .

# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (15) sacamos el sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \frac{\lambda}{\mu}, \quad \forall i > 0 \quad (17)$$

que equivale a:

$$\pi_i = \pi_0 \rho^i, \quad \forall i > 0 \quad (18)$$

donde  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  es la **carga del sistema**.



# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (18) sacamos la probabilidad de que el sistema M/M/1 esté vacío:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0 \rho^i \\ &= 1 - \pi_0 \frac{1-\rho}{1-\rho} (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \\ &= 1 - \pi_0 \frac{1}{1-\rho} \lim_{\iota \rightarrow \infty} (\rho - \rho^2 + \rho^2 - \rho^3 + \rho^3 - \dots - \rho^\iota) \\ &= 1 - \pi_0 \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}\tag{19}$$

siempre y cuando  $\rho < 1$ .

# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Despejando en (19) y (18) obtenemos que

**Lema (Probabilidades estado M/M/1)**

*En un sistema M/M/1 la probabilidad de estar en el estado  $i$  es:*

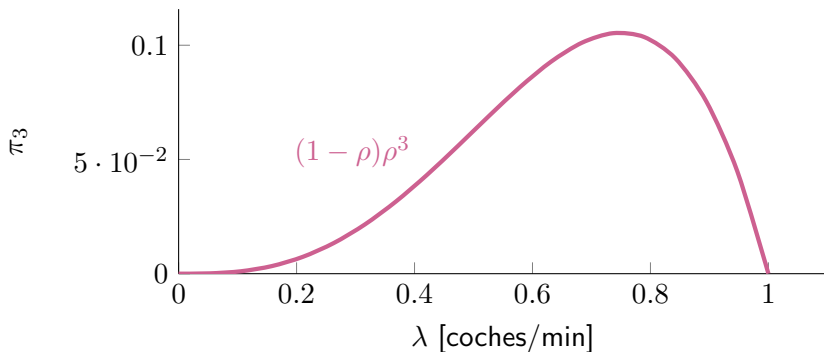
$$\pi_i = \begin{cases} 1 - \rho, & i = 0 \\ (1 - \rho)\rho^i, & i > 0 \end{cases} \quad (20)$$

*donde  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  es la carga del sistema.*

# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

*Ejemplo:* en una gasolinera llegan  $\lambda$  [coches/min] a un surtidor que sirve a tasa  $\mu = 1$  [coches/min].

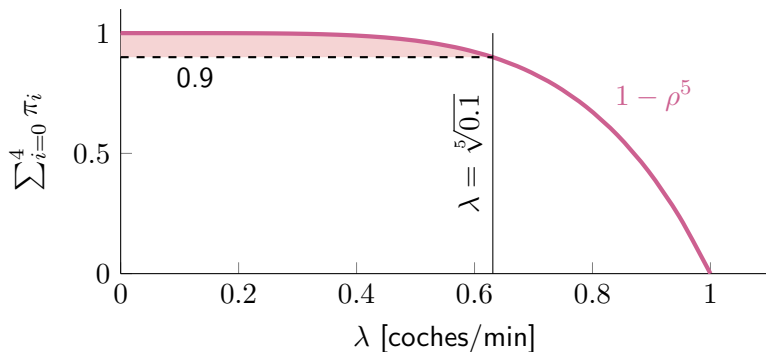
¿Cómo varía la probabilidad de tener  $i = 3$  coches en función de  $\lambda$ ?



# Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

*Ejemplo (cont.):* ¿cuántos coches aguanta el surtidor para que el 90% de las veces tenga menos de 5 coches?

$$\lambda : \sum_{i=0}^4 \pi_i = \sum_{i=0}^4 (1 - \rho) \rho^i = 1 - \rho^5 \geq 0.9 \implies \lambda \leq \sqrt[5]{0.1} \text{ [coches/min]}$$



Lemma (Número medio de usuarios en un M/M/1)

*El número medio de usuarios en un sistema M/M/1 es*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (21)$$

*Demostración:*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_i = (1 - \rho) \rho \sum_{i=1}^{\infty} i \rho^{i-1} = (1 - \rho) \rho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \dots = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Lemma (Número medio de usuarios encolados en un M/M/1)

*El número medio de usuarios encolados en un sistema M/M/1 es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (22)$$

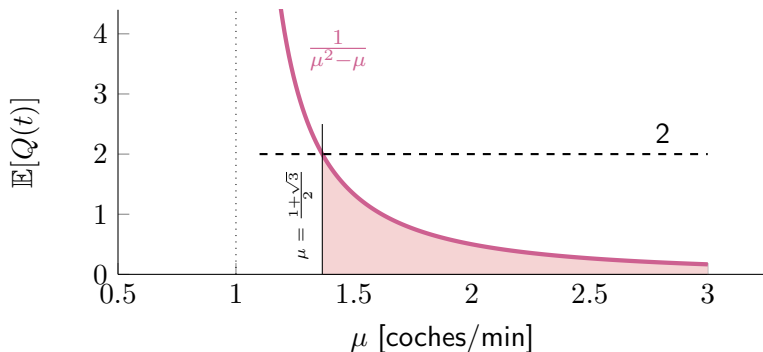
*Demostración:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \\ &= \mathbb{E}[N(t)] - (1 - \pi_0) = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \end{aligned}$$

# Sistema M/M/1: Métricas famosas

*Ejemplo (cont.):* si llegan  $\lambda = 1$  [coches/min], ¿cómo de rápido debe ser el surtidor para que, en media, haya menos de 3 coches esperando?

$$\mu : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{1}{\mu^2 - \mu} \leq 2 \implies \mu \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ [coches/min]} \quad (23)$$



¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola, o en ser servido?



¿Y si queremos sacar el tiempo de espera en cola, o en ser servido?

## Teorema (Teorema de Little)

*En un sistema de colas, la relación entre tiempo medio de servicio  $\mathbb{E}[T(t)]$  y número medio de usuarios es*

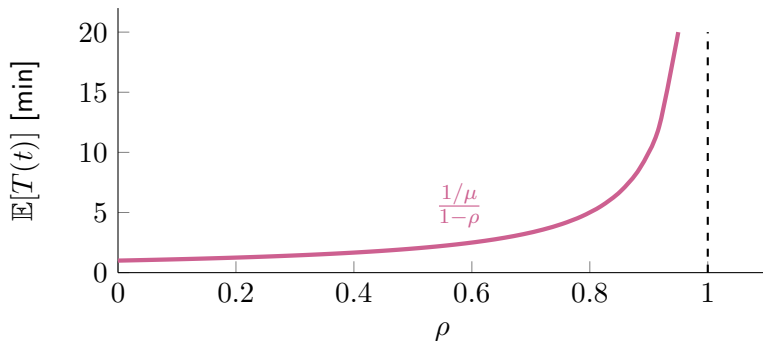
$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)] \cdot \lambda \quad (24)$$

*Del mismo modo, la relación entre tiempo medio de espera en cola  $\mathbb{E}[W(t)]$  y número medio de usuario en cola es*

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \mathbb{E}[W(t)] \cdot \lambda \quad (25)$$

# Sistema M/M/1: Métricas famosas

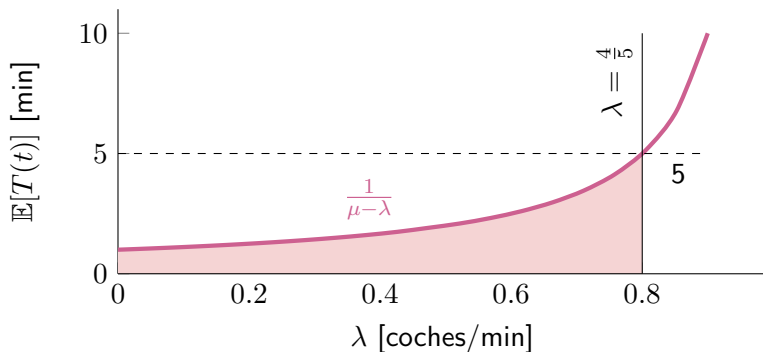
Si  $\rho \rightarrow 1$ , el tiempo medio de servicio  $\mathbb{E}[T(t)] \rightarrow \infty$ .



# Sistema M/M/1: Métricas famosas

*Ejemplo:* ¿cuál es la cantidad máxima de coches que agunta la gasolinera para que, en media, un coche tarde menos de 5 [min] en repostar?

$$\lambda : \mathbb{E}[T(t)] = \frac{1}{\mu - \lambda} \leq 5 \implies \lambda \leq \frac{4}{5} \text{ [coches/min]} \quad (26)$$





Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez,  
Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.