

Tema 5: Introducción al Teletráfico y a la Teoría de Colas

Redes y Servicios de Telecomunicaciones (RSTC)
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Jorge Martín Pérez¹

¹Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Madrid

March 6, 2023

- 1 Introducción
- 2 Distribución Exponencial
 - Propiedad sin memoria
 - Mínimo de variables exponenciales
 - Comparación de exponenciales
- 3 Procesos de Llegada de Poisson
 - Tiempos entre llegadas
 - Conteo
 - Agregado
 - PASTA
- 4 Sistema M/M/1
 - Cadena de Markov en tiempo continuo
 - Probabilidades de estado
 - Ecuaciones de equilibrio

Introducción

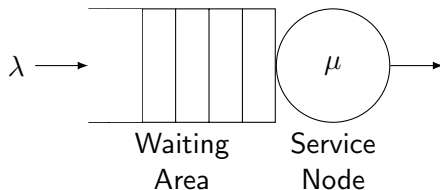
La teoría de colas modela:

- colas de supermercado;
- colas en gasolineras;
- colas en taquillas; o
- **colas de routers.**

Nos interesa saber:

- ¿cuánto vamos a esperar?; o
- la probabilidad de que esté llena la cola.

Introducción



En una cola:

- Llegan λ [usuarios/sec]
- hay $q = 4$ usuarios encolados;
- hay $n = 5$ usuarios en total; y
- se sirven μ [usuarios/sec].

Problema:

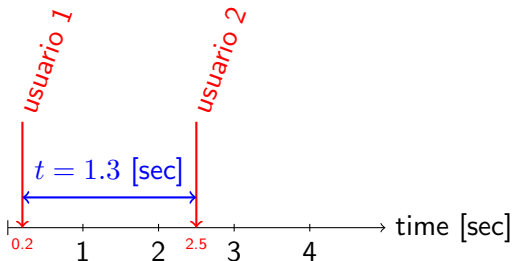
- las llegadas; y
- tiempos de servicio

son **aleatorios**.

Ejemplo: la persona que nos atiende en caja tarda más o menos dependiendo de como de cansada esté, o de cuánto tarde la pasarela de pago (aleatorio).

Distribución Exponencial

Distribución Exponencial



El tiempo entre los usuarios que llegan a la cola t se puede modelar con la **distribución exponencial**.

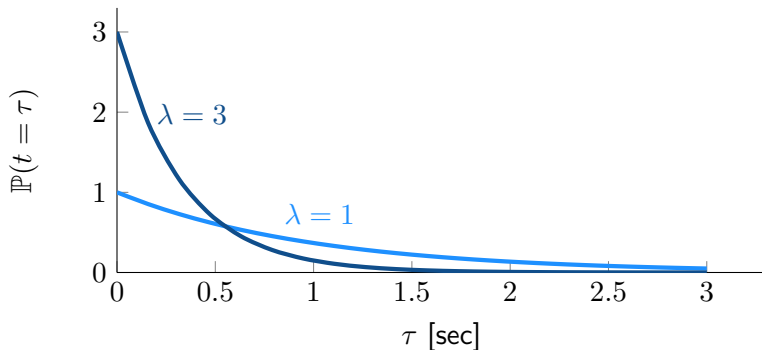
Definición (Distribución exponencial)

Se dice que una variable aleatoria continua $t \in \mathbb{N}$ sigue una distribución exponencial si su función de densidad es:

$$f_t(\tau) = \mathbb{P}(t = \tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (1)$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro que caracteriza la distribución.

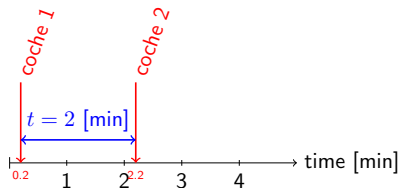
Distribución Exponencial: propiedades



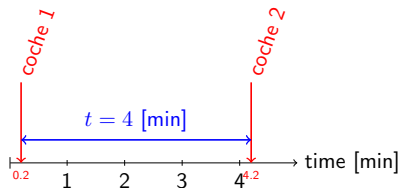
- **media:** $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$
- **varianza:** $\text{Var}[t] = \frac{1}{\lambda^2}$

Distribución Exponencial: ejemplo gasolinera

Ejemplo: el tiempo medio que pasa un coche en un surtidor es $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda} = 2$ [min]. Por tanto $\lambda = \frac{1}{2}$ [coches/min].



$$(a) \mathbb{P}(t = 2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = 0.18$$

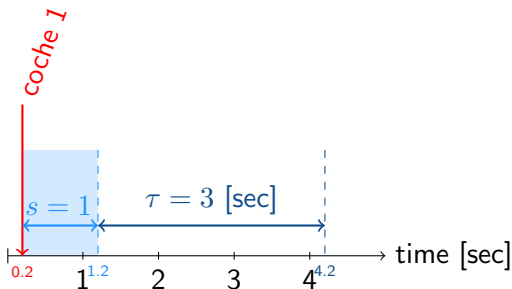


$$(b) \mathbb{P}(t = 4) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = 0.07$$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

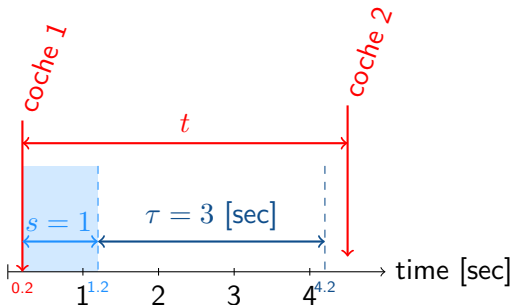
$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) \quad (2)$$



Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

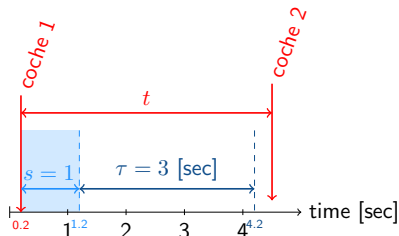
$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) \quad (2)$$



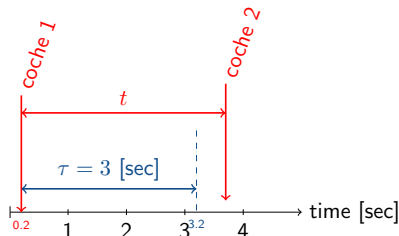
Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Por la propiedad sin memoria de una exponencial tenemos que:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) \quad (3)$$



(a) $\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s)$



(b) $\mathbb{P}(t > \tau)$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Ejemplo: en media el surtidor de una gasolinera está ocupado 5 [min]. Si el surtidor lleva $s = 1$ [min] ocupado, ¿cuál es la probabilidad de que esté ocupado $\tau = 3$ [min] más?

Por la propiedad sin memoria tenemos:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau \mid t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t > 3) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5} \cdot 3} = 0.11$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Lema (Mínimo de v.a. exponenciales)

Sean las v.a.^a exponenciales t_1 y t_2 , con tasas λ_1 y λ_2 ; la v.a. $t = \min\{t_1, t_2\}$ se distribuye como una v.a. exponencial de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

^av.a. significa variable aleatoria

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t > \tau) &= \mathbb{P}(t_1 > \tau)\mathbb{P}(t_2 > \tau) = \left(\int_{\tau}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \right) \left(\int_{\tau}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \right) \\ &= e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 \tau} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \tau} = e^{-\lambda \tau}\end{aligned}$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

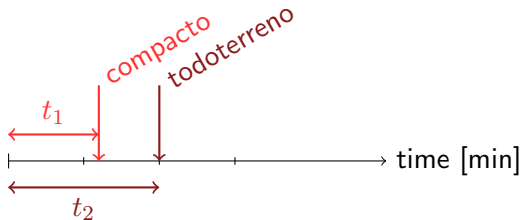
¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(t > 1) &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 3} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)e^{-(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \cdot 3} = 0.12 \end{aligned}$$

Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min],
y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir,
($t_1 < t_2$)?



Lema (Comparación de v.a. exponenciales)

Sean las v.a. exponenciales t_1 y t_2 , con tasas λ_1 y λ_2 ; se tiene que:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (4)$$

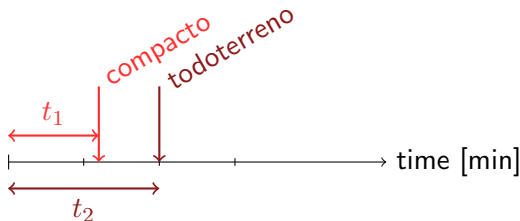
Demostración:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(t_1 = t) \mathbb{P}(t_2 > t) dt = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?

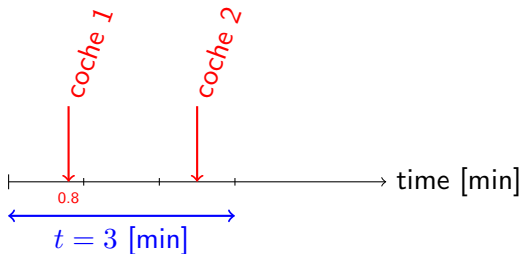


$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 0.67 \quad (5)$$

Procesos de Llegada de Poisson

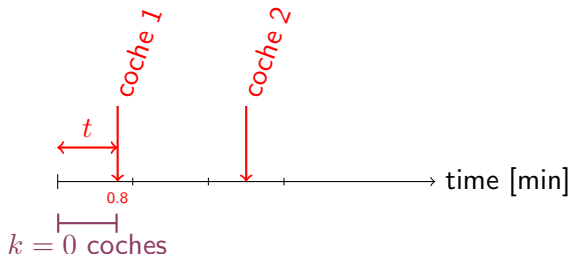
Procesos de Llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

Buscamos una distribución que diga cómo de probable es que lleguen 2 coches en 3 segundos:



Procesos de Llegada de Poisson: Tiempos entre llegadas

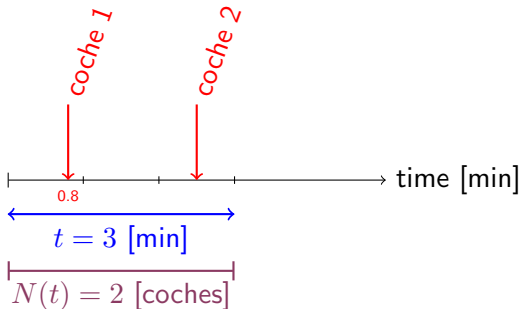
Si el tiempo entre llegadas es exponencial, sabemos la probabilidad de que lleguen $k = 0$ coches en $t = 0.8$ [min].



$$\mathbb{P}(0 \text{ coches en } 0.8 \text{ min}) = 1 - \mathbb{P}(t > 0.8) = 1 - \lambda 0.8 e^{-\lambda 0.8}$$

Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

Pero lo que queremos es contar el número de coches $N(t) = 2$ que llegan en $t = 3$ [min], y saber qué probabilidad tiene $\mathbb{P}(N(t) = 2)$

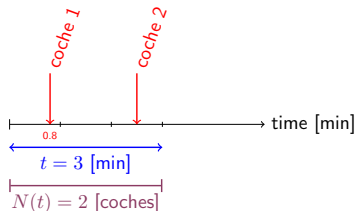


Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

Definición (Distribución de Poisson)

Un proceso de llegadas $N(t)$ con tasa λ es de Poisson si el tiempo entre llegadas se distribuye como una v.a. exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$; y su función de densidad es

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (6)$$

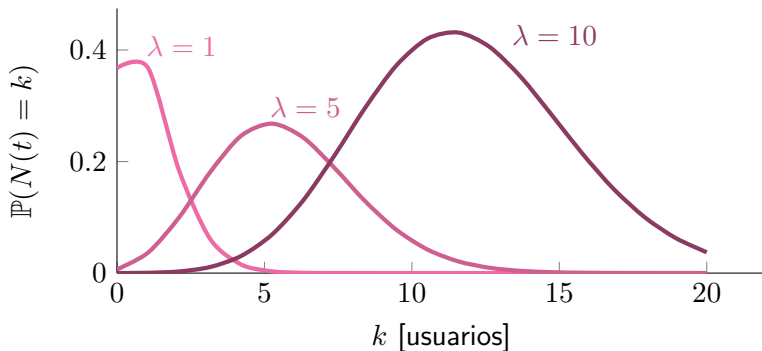


Ejemplo: $\mathbb{P}(N(3) = 2) = \frac{(\lambda 3)^2 e^{-\lambda 3}}{2!} \underbrace{=}_{\lambda=2/3} 0.27$

Procesos de Llegada de Poisson: Conteo

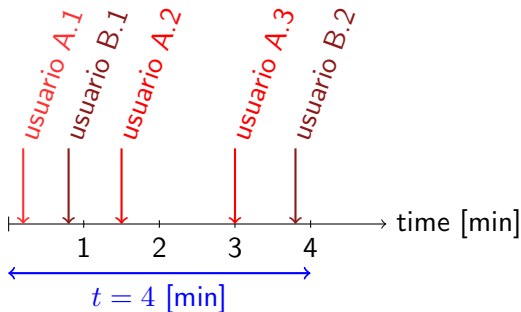
Propiedades de la distribución de Poisson:

- **media:** $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ usuarios
- **varianza:** $\text{Var}[N(t)] = \lambda t$ usuarios²



Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

¿Cómo se distribuyen las llegadas de **A** y **B** juntos?



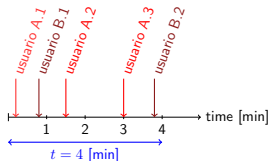
Vemos que:

- $\lambda_A = \frac{3}{4}$ [coches/min], ya que $N_A(t = 4\text{min}) = 3$ [coches]
- $\lambda_B = \frac{2}{4}$ [coches/min], ya que $N_B(t = 4\text{min}) = 2$ [coches]

Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

Lema (Agregado procesos de Poisson)

Sean **A** y **B** dos procesos de Poisson independientes con tasas λ_1 y λ_2 ; el agregado es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.



Demostración (caso general n procesos):

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \prod_i^n \mathbb{P}(N_i(t) = 0) = \prod_i^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_i^n \lambda_i t} = e^{-\lambda t} \quad (7)$$

Teorema (Palm-Khintchine [YMG23])

Sea $\{N_i(t)\}_i^n$ un conjunto de n procesos de llegada independientes con sendas tasas λ_i . La superposición de procesos

$$N(t) = \sum_i^n N_i(t), t \geq 0 \quad (8)$$

tiende a un **proceso de Poisson** de tasa $\lambda = \sum_i \lambda_i$ cuando $n \rightarrow \infty$, siempre y cuando se cumpla:

- 1 carga finita $\lambda < \infty$; y
- 2 ningún proceso domine al agregado $\lambda_i \ll \lambda$

Procesos de Llegada de Poisson: Agregado

Ejemplo (tma. Palm-Khintchine): los tiempos de llegada de coches dependen del color, y son independientes del de otros colores. Además:

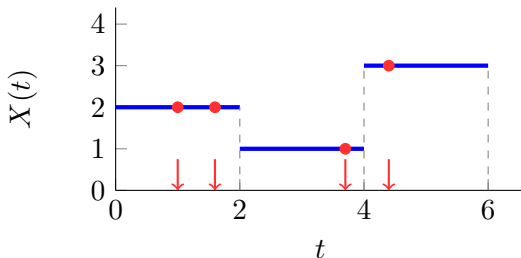
- tiempo entre coches rojos $\sim U(0, 10 \text{ [min]})$
- tiempo entre coches granates $\sim N(\mu = 20 \text{ [min]}, \sigma = 1 \text{ [min]})$
- ...
- tiempo entre coches fucsia $\sim Geo(p = 0.2)$



El agregado será un proceso Poisson de tasa $\lambda = \sum_i \lambda_i = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \dots + p$

Procesos de Llegada de Poisson: PASTA

“Poisson Arrivals See Time Averages” (PASTA)¹



En media, los **valores** vistos por **llegadas** de Poisson es la media temporal $\bar{X}(t)$.

¹Ejemplo de [YMG23, Figura 3.17]

Procesos de llegada de Poisson: PASTA

Lema (PASTA)

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio, y Y la v.a. definida como el valor que toman las llegadas de Poisson al muestrear $X(t)$, se tiene que:

$$\overline{X(t)} = \overline{Y} \quad (9)$$

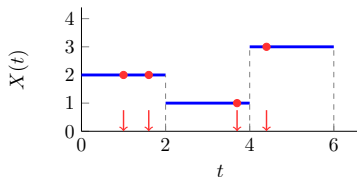
Procesos de Llegada de Poisson: PASTA- ejemplo

Media temporal:

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{6} \int_0^6 X(t) dt = \frac{1}{6}(2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{8}{6}$$

Llegadas de Poisson:

$$\overline{Y} = 2 \cdot \mathbb{P}([0, 2]) + 1 \cdot \mathbb{P}([2, 4]) + 3 \cdot \mathbb{P}([4, 6]) = 2 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$$



con

$$\mathbb{P}([0,2]) = \frac{\mathbb{P}(N(0,2)=1)\mathbb{P}(N(2,4)=0)\mathbb{P}(N(4,6)=0)}{\mathbb{P}(N([0,6])=1)} = \frac{\frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!} \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!}}{\frac{(6\lambda)^1 e^{-6\lambda}}{1!}} = \frac{2}{6}$$

Sistema M/M/1

La notación de Kendall define cómo es una cola

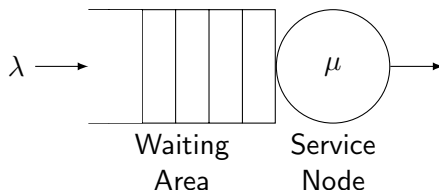
$$A/S/c/K/N/D$$

donde:

- **A** es la v.a. del tiempo entre llegadas;
- **S** es la v.a. del tiempo de servicio;
- **c** es el número de servidores que atienden la cola;
- **K** es en tamaño de la cola;
- **N** es la cantidad de llegadas; y
- **D** es la política de encolado.

Sistema M/M/1

Un M/M/1 es una cola² como la de la figura.



donde:

- el tiempo entre llegadas es exponencial (M);
- el tiempo de servicio es exponencial (M);
- hay un servidor atendiendo (1); y
- la cola es infinita (∞).

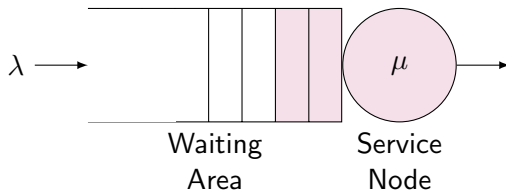
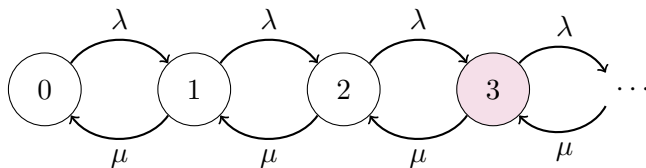
²en notación Kendall M/M/1/ ∞ / ∞ /FIFO

Queremos responder a preguntas cómo:

- ¿cuál es la probabilidad de esperar en cola?
- ¿cuánto esperaré en la cola? o
- ¿cuánto tardaré en ser servido?

Para ello modelamos la cola con una cadena de Markov.

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo



- estados = #usuarios en cola y servidor
- transiciones = tasa de llegada λ / tasa de servicio μ

Definición (Cadena de Markov en tiempo continuo[YMG23])

Un proceso estocástico $\{N(t), t > 0\}$ es una cadena de Markov si cumple:

- 1 el tiempo de estancia en el estado i sigue una v.a. exponencial independiente de tasa ν_i ; y*
- 2 el proceso pasa del estado i al j con una probabilidad π_{ij} que cumple $\sum_j \pi_{ij} = 1, \forall i$*

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov?

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Cumple la cadena de un M/M/1 la condición de Markov? **Sí.**

- 1 el tiempo de estancia T en un estado se distribuye como una exponencial de tasa $\nu = \lambda_l + \lambda_s$:

$$\mathbb{P}(T > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = e^{-(\lambda_l + \lambda_s)\tau}$$

con t_l, t_s las v.a. exponenciales del tiempo de llegada y servicio.

- 2 la suma de probabilidades de transición es uno

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t+1) = k+1 \mid N(t) = k) + \mathbb{P}(N(t+1) = k-1 \mid N(t) = k) \\ = \mathbb{P}(t_l < t_s) + \mathbb{P}(t_s < t_l) = \frac{\lambda_l}{\lambda_l + \lambda_s} + \frac{\lambda_s}{\lambda_l + \lambda_s} = 1 \end{aligned}$$

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

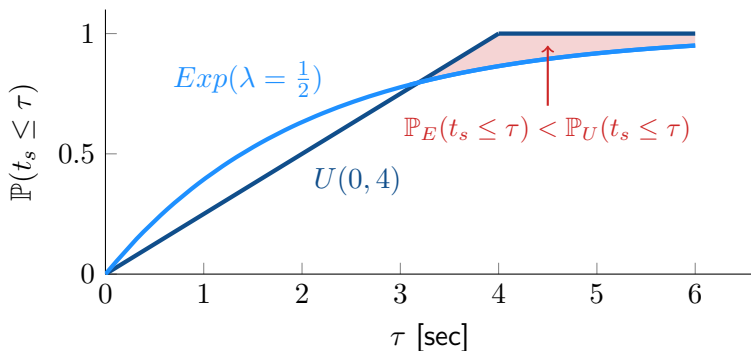
¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada:** sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.

Sistema M/M/1: Cadena de Markov en tiempo continuo

¿Es realista asumir tiempos exponenciales?

- **tiempos de llegada:** sí por el teorema de Palm-Khintchine 3.1.
- **tiempos de servicio:** no, pero da expresiones cerradas y es una cota pesimista para altas fiabilidades

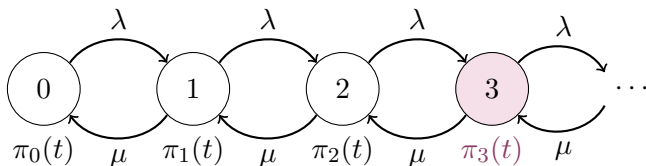


Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

La cadena de Markov va pasando por estados³.

En el instante t estaremos la probabilidad de estar en cada estado es, e.g.:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \dots) = (0.02, 0.12, 0.3, 0.07, \dots)$$

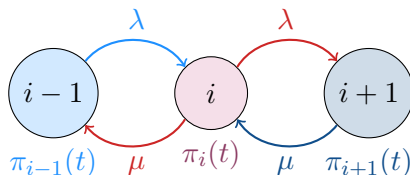


³<https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html>

Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

¿Cómo varía la probabilidad de estar en el estado i tras ε [sec]?

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_i(t) &= -\pi_i(t)\nu_i + \sum_{j \neq i} \pi_j(t) \cdot \nu_j \pi_{ji} \\ &= -\pi_i(t)(\lambda + \mu) + \pi_{i-1}(t) \cdot (\lambda + \mu) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \pi_{i+1}(t) \cdot \overbrace{(\lambda + \mu)}^{\nu_{i+1}} \overbrace{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}^{\pi_{i,i+1}(t)} \\ &= -\pi_i(t)(\lambda + \mu) + \pi_{i-1}(t)\lambda + \pi_{i+1}(t)\mu \quad (10)\end{aligned}$$



Sistema M/M/1: Probabilidades de estado

Si $t \rightarrow \infty$, la cadena alcanza [YMG23] una distribución estacionaria donde las probabilidades no varían:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \pi_i(t) = 0, \quad \forall i$$

Nos referimos a la **distribución estacionaria** como $\pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$.

Ejemplo:

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots) = (0.12, 0.04, 0.17, 0.06, \dots)$$

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

Usando (10) y (44) podemos definir la **ecuación de equilibrio** para encontrar la distribución estacionaria π :

$$0 = \pi Q = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (11)$$

con $q_{ij} = \nu_i \pi_{ij}$ es la entrada (i, j) de la matriz de transición Q .

Sistema M/M/1: Ecuaciones de equilibrio

De (11) sacamos el sistema de ecuaciones:

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \quad (12)$$

$$(13)$$



Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez,
[Una introducción amable a la teoría de colas](#), 2023.