Tema 6: Teletráfico en redes de telecomunicaciones

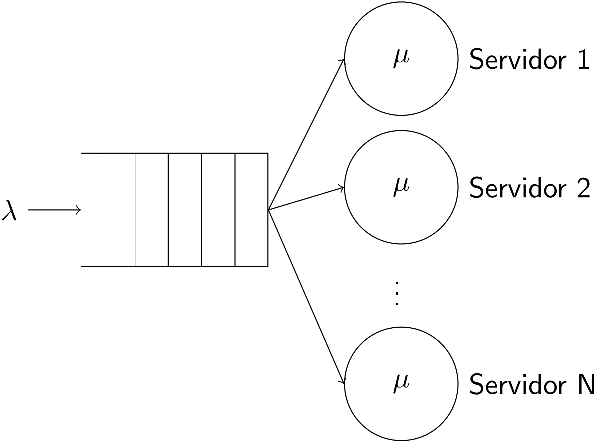
May 3, 2023

Contenido

Sistema M/M/N

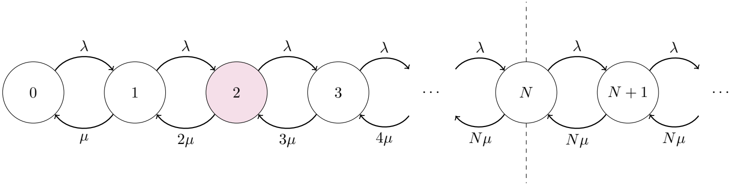
Sistema M/M/N

Un sistema de cola única con $t_l \sim Exp(\lambda)$ y N servidores en paralelo con $t_s \sim Exp(\mu)$.

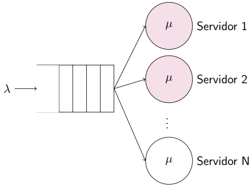


Sistema M/M/N: Cadena de Markov

Un sistema M/M/N es un proceso estocástico Markoviano[1].

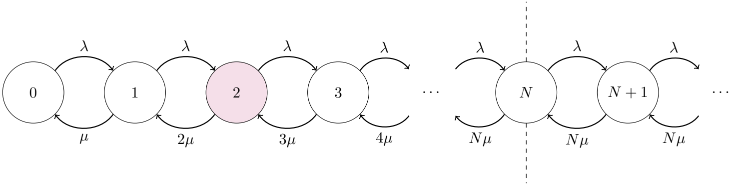


Sus tasas de transición no son homogéneas $q_{i,j} = i\mu,\ i \leq N$.



[1] El tiempo de estancia es exponencial no homogéneo.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio



Con $i < N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu)$$

pero con $i \geq N$ tenemos

$$\lambda\pi_{i-1} + N\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + N\mu)$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Lema (Ecuaciones equilibrio M/M/N)

En régimen estacionario de un sistema M/M/N, la probabilidad de estar en el estado i es:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{A^i}{i!}\pi_0, & i \leq N \\ \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0, & i \geq N \end{cases} \tag{1}$$

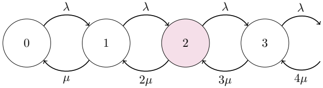
con $A = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$*; y*

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \tag{2}$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \leq N$ se tiene:



sabiendo que $\pi_0\lambda = \pi_1\mu$ se tiene $\pi_1 = A\pi_0$. Por tanto tenemos que

$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = \pi_1(\lambda + \mu) \Longleftrightarrow \pi_2 = \frac{A^2}{2}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 + 3\mu\pi_3 = \pi_2(\lambda + 2\mu) \Longleftrightarrow \pi_3 = \frac{A^3}{3!}\pi_0$$

$$\dots$$

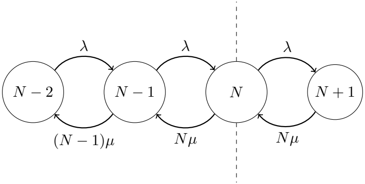
$$\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} = \pi_i(\lambda + i\mu) \Longleftrightarrow \pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$$

y deducimos $\pi_i = \frac{A}{i}\pi_{i-1}$.

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:



$$\begin{aligned} \pi_{N-1}(\lambda + (N-1)\mu) =& \pi_N N\mu + \pi_{N-2}\lambda \\ \pi_N =& \frac{1}{N\mu}\left(\pi_{N-1}\lambda + \pi_{N-1}\mu(N-1) - \pi_{N-2}\lambda\right) \end{aligned}$$

sustituyendo $\pi_{N-1} = \frac{A}{N-1}\pi_{N-2}$, sacamos la recursión

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

Demostración:

- para $i \geq N$ se tiene:

$$\pi_i = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{i-1}, \quad i \geq N$$

y si usamos $\pi_i = \frac{A^i}{i!}\pi_0$ con $i \leq N$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi_i =& \frac{A}{N}\pi_{i-1} = \frac{A^2}{N^2}\pi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\pi_N = \left(\frac{A}{N}\right)^{i-N}\frac{A^N}{N!}\pi_0 \\ =& \rho^i\frac{N^N}{N!}\pi_0 \end{aligned}$$

Sistema M/M/N: Ecuaciones de equilibrio

Demostración:

- para $i = 0$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i + \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!}\pi_0 + \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!}\pi_0 \\
&= \pi_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \pi_0 \frac{N^N}{N!} \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i
\end{aligned}
$$

sabiendo que $\sum_{i=N}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho^N}{1-\rho}$, sacamos

$$
\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}
$$

Sistema M/M/N: Segunda distribución de Earlang

Definición (Segunda distribución de Earlang)

Popularmente, la probabilidad de que un M/M/N esté vacío

$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \right) + \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

se conoce como la segunda distribución de Earlang, y a la razón A se le llaman "Earlangs".

Ejemplo: si tenemos tasas $\lambda = 10$ y $\mu = 2$; los Earlangs $A = \frac{\lambda}{\mu} = 5$ me dicen que necesito > 5 servidores; y con $N = 7$ tenemos

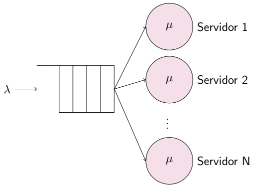
$$\pi_0 = \left(\left(\sum_{i=0}^{6} \frac{5^i}{i!} \right) + \frac{5^7}{7!} \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \right)^{-1} \simeq 0.006$$

Sistema M/M/N: Distribución de Earlang-C

Lema (Earlang-C)

La probabilidad de esperar en un sistema M/M/N viene dada por la distribución Earlang-C:

$$E_C(N, A) = \mathbb{P}(N(t) \geq N) = \frac{A^N}{N!} \frac{1}{1-\rho} \pi_0 \tag{3}$$



Demostración:

$$\mathbb{P}(N(t) \geq N) = \sum_{i=N}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 = \frac{N^N}{N!} \frac{\rho^N}{1-\rho} \pi_0 \tag{4}$$

Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio en cola M/M/N)

En un sistema M/M/N el número medio de usuarios encolados es

$$\mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) \tag{5}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{i=N}^{\infty} (i-N)\pi_N = \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \frac{N^N}{N!} \pi_0 (i-N) = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \sum_{i=N}^{\infty} (i-N)\rho^i \\
&= \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[\sum_{i=N}^{\infty} i\rho^i - N \sum_{i=N}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{N^N}{N!} \pi_0 \left[\frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} \right] \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A)
\end{aligned}$$

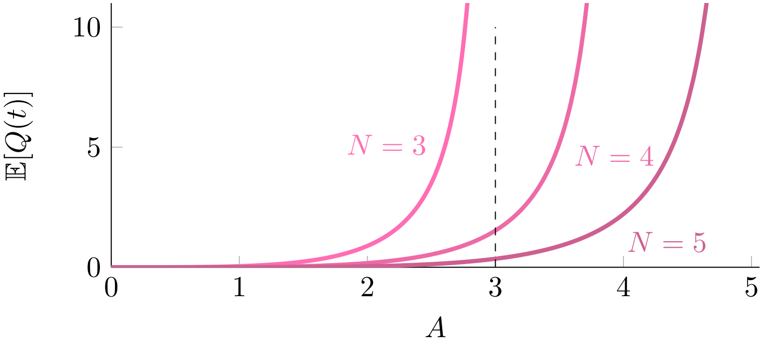
Sistema M/M/N: Métricas famosas

Ejemplo: sea un sistema con una carga de $A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$ Earlangs, ¿cuántos servidores N hay que poner para que, en media, haya menos de 10 usuarios encolados?

$$N : \mathbb{E}[Q(t)] = \frac{\rho}{1-\rho} E_C(N, A) = \frac{\frac{3}{N}}{1 - \frac{3}{N}} \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^N}{1 - \frac{3}{N}} \pi_0$$

$$= \frac{N^N}{N!} \frac{\left(\frac{3}{N}\right)^{N+1}}{\left(1 - \frac{3}{N}\right)^2} \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{3^i}{i!} \right) + \frac{3^N}{N!} \frac{1}{1 - \frac{3}{N}} \right)^{-1} < 10$$

Ejemplo (cont.): vemos que con una intensidad de $A = 3$ Earlangs necesitamos $N > 3$ para que $\mathbb{E}[Q(t)] \leq 10$.



Sistema M/M/N: Métricas famosas

Lema (Número medio usuarios en M/M/N)

En un sistema M/M/N el tiempo medio de usuarios en el sistema es

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A \tag{6}$$

Demostración: con Little sabemos $\mathbb{E}[W(t)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)]$, y también sabemos que

$$\mathbb{E}[T(t)] = \mathbb{E}[W(t)] + \mathbb{E}[t_s] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[Q(t)] + \frac{1}{\mu}$$

y usando Little de nuevo ($\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[T(t)]\lambda$) llegamos a

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[Q(t)] + A$$

Referencias I