Tema 5: Introducción al ~~Teletráfico~~ y a la Teoría de Colas

Redes y Servicios de Telecomunicaciones (RSTC)
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Jorge Martín Pérez[1]

[1]Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Madrid

February 23, 2023

Contenido

Introducción

Introducción

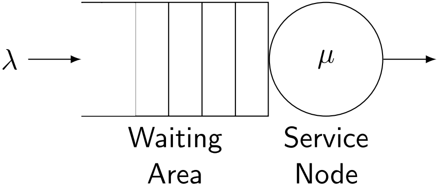
La teoría de colas modela:

- colas de supermercado;
- colas en gasolineras;
- colas en taquillas; o
- **colas de routers**.

Nos interesa saber:

- ¿cuánto vamos a esperar?; o
- la probabilidad de que esté llena la cola.

Introducción



En una cola:

- llegan λ [usuarios/sec]
- hay $q = 4$ usuarios encolados;
- hay $n = 5$ usuarios en total; y
- se sirven μ [usuarios/sec].

Problema:

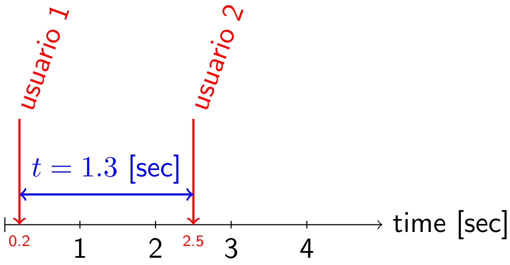
- las llegadas; y
- tiempos de servicio

son **aleatorios**.

Ejemplo: la persona que nos atiende en caja tarda más o menos dependiendo de como de cansada esté, o de cuánto tarde la pasarela de pago (aleatorio).

Distribución Exponencial

Distribución Exponencial



El tiempo entre los usuarios que llegan a la cola t se puede modelar con la **distribución exponencial**.

Distribución Exponencial

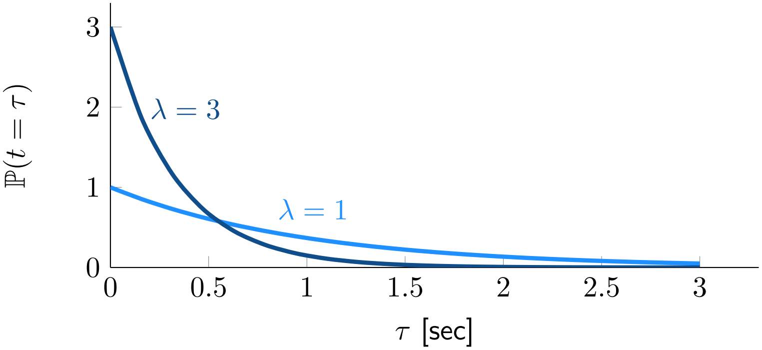
Definición (Distribución exponencial)

Se dice que una variable aleatoria continua $t \in \mathbb{N}$ *sigue una distribución exponencial si su función de densidad es:*

$$f_t(\tau) = \mathbb{P}(t = \tau) = \lambda e^{-\lambda \tau} \tag{1}$$

donde $\lambda > 0$ *es el parámetro que caracteriza la distribución.*

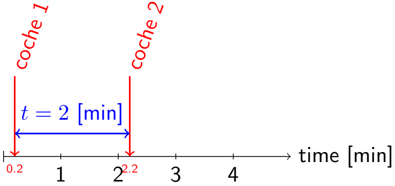
Distribución Exponencial: propiedades



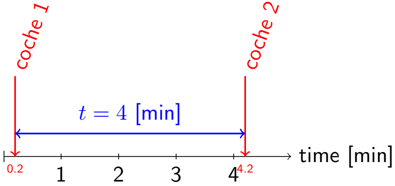
- **media**: $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$
- **varianza**: $\mathrm{Var}[t] = \frac{1}{\lambda^2}$

Distribución Exponencial: ejemplo gasolinera

Ejemplo: el tiempo medio que pasa un coche en un surtidor es $\mathbb{E}[t] = \frac{1}{\lambda} = 2$ [min]. Por tanto $\lambda = \frac{1}{2}$ [coches/min].



(a) $\mathbb{P}(t=2) = \frac{1}{2}\ e^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 0.18$

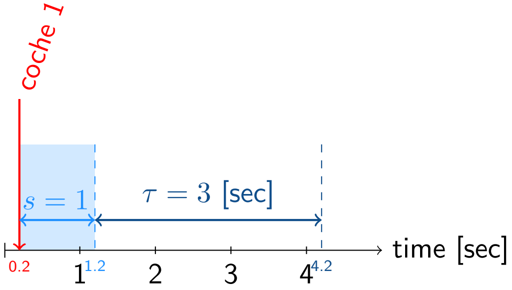


(b) $\mathbb{P}(t=4) = \frac{1}{2}\ e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = 0.07$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

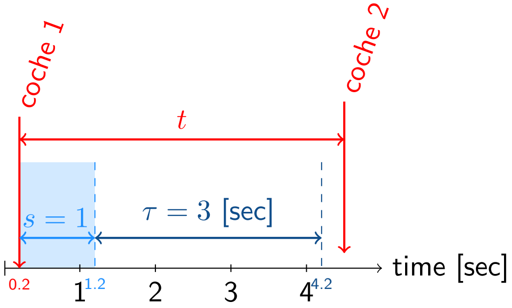
$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) \tag{2}$$



Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

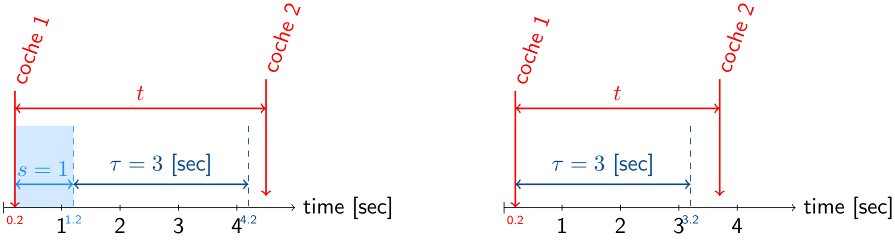
Si ya han pasado s [sec], ¿cuál es la probabilidad de que tarde τ [sec] más?:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) \tag{2}$$



Por la propiedad sin memoria de una exponencial tenemos que:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) \tag{3}$$



(a) $\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s)$ (b) $\mathbb{P}(t > \tau)$

Distribución Exponencial: Propiedad sin memoria

Ejemplo: en media el surtidor de una gasolinera está ocupado 5 [min]. Si el surtidor lleva $s = 1$ [min] ocupado, ¿cuál es la probabildad de que esté ocupado $\tau = 3$ [min] más?

Por la propiedad sin memoria tenemos:

$$\mathbb{P}(t > s + \tau |\ t > s) = \mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t > 3) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}\cdot 3} = 0.11$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Con qué probabilidad llegua un coche cualquiera en 3 [min]?

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Lema (Mínimo de v.a. exponenciales)

Sean las v.a.[a] *exponenciales* t_1 *y* t_2, *con tasas* λ_1 *y* λ_2*; la v.a.* $t = \min\{t_1, t_2\}$ *se distribuye como una v.a. exponencial de tasa* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

[a] v.a. significa variable aleatoria

Demostración:

$$\mathbb{P}(t > \tau) = \mathbb{P}(t_1 > \tau)\mathbb{P}(t_2 > \tau) = \left(\int_\tau^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt\right)\left(\int_\tau^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt\right)$$
$$= e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 \tau} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} = e^{-\lambda \tau}$$

Distribución Exponencial: Mínimo de variables exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

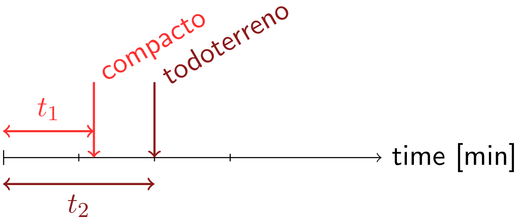
¿Con qué probabilidad llega un coche cualquiera en 3 [min]?

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(t > 1) &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot 3} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{-(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})\cdot 3} = 0.12 \end{aligned}$$

Distribución Exponencial: Comparación de exponenciales

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?



Lema (Comparación de v.a. exponenciales)

Sean las v.a. exponenciales t_1 *y* t_2*, con tasas* λ_1 *y* λ_2*; se tiene que:*

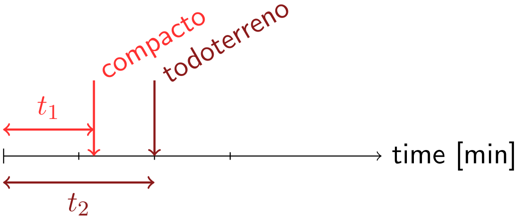
$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{4}$$

Demostración:

$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(t_1 = t)\mathbb{P}(t_2 > t)\, dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}\, dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Ejemplo: los compactos llegan a gasolinera con tasa $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ [coches/min], y los todoterreno con tasa $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ [coches/min].

¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes un compacto, es decir, $(t_1 < t_2)$?

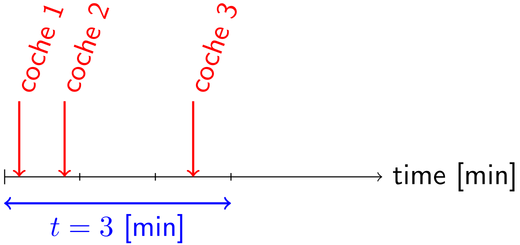


$$\mathbb{P}(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 0.67 \tag{5}$$

Procesos de llegada de Poisson

Procesos de llegada de Poisson: Conteo

Buscamos una distribución que diga cómo de probable es que lleguen 3 coches en 2 segundos:



Si el tiempo entre llegadas es exponencial, sabemos la probabilidad de que lleguen $k = 0$ coches en t [min].

Procesos de llegada de Poisson

Un proceso de llegadas de Poisson nos dice la probabilidad de que lleguen k usuarios en t segundos:

$$\mathbb{P}(k \text{ usuarios en } t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{6}$$

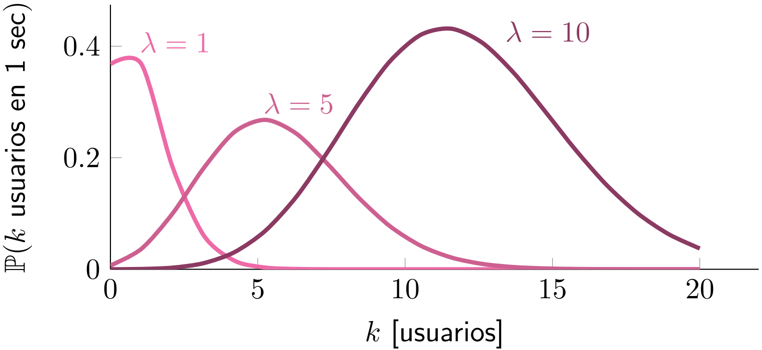
donde λ es la **tasa** de llegadas [usuarios/sec].

Ejemplo: si la tasa de llegada es $\lambda = 5$ [usuarios/sec], la probabilidad de que lleguen $k = 3$ usuarios en $t = 2$ sec es $\frac{(5\cdot 2)^3 e^{-5\cdot 2}}{3!} = 0.0075$.

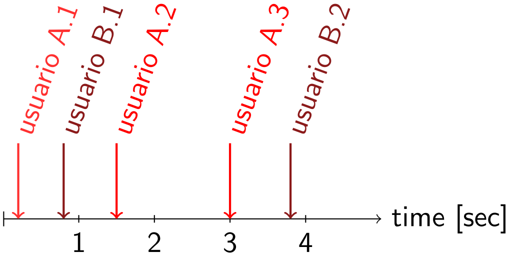
Procesos de llegada de Poisson

Propiedades de la distribución de Poisson:

- **media**: $\mathbb{E}[\#\text{usuarios en } t \text{ sec}] = \lambda t$ usuarios
- **varianza**: $\mathrm{Var}[\#\text{usuarios en } t \text{ sec}] = \lambda t$ usuarios^2



¿Cómo se distribuyen las llegadas de **A** y **B** juntos?



Vemos que:

- $\lambda_A = \frac{3}{4}$ [usuarios/sec], ya que $N_A(t = 4sec) = 3$ [usuarios]
- $\lambda_B = \frac{2}{4}$ [usuarios/sec], ya que $N_B(t = 4sec) = 2$ [usuarios]

Procesos de llegada de Poisson

Teorema (Palm-KhintchinePut Pablos' ref)

Sea $\{N_i(t)\}_i$ *un conjunto de* n *procesos de llegada independientes con sendas tasas* λ_i*. La superposición de procesos*

$$N(t) = \sum_i^n N_i(t), t \geq 0 \tag{7}$$

tiende a un **proceso de Poisson** *de tasa* $\lambda = \sum_i \lambda_i$ *cuando* $n \to \infty$*, siempre y cuando se cumpla:*

1. *carga finita* $\lambda < \infty$*; y*
2. *ningún proceso domine al agregado* $\lambda_i << \lambda$

Sistema M/M/1