Tema 6: Teletráfico en redes de datos

[1]Departamento de Ingeniería Telemática, Universidad Politécnica de Madrid

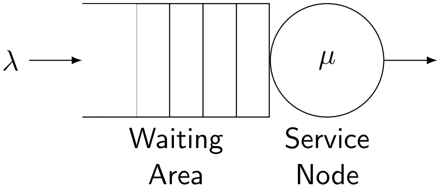
April 24, 2023

RSTC
Redes y Servicios de Telecomunicación

Contenido

Introducción

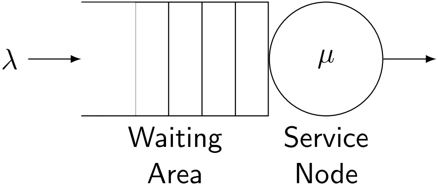
Hemos visto colas M/M/1



con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Hemos visto colas M/M/1

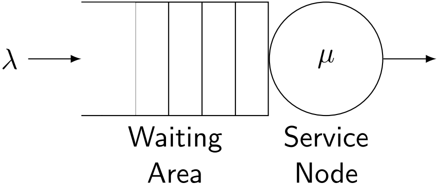


con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

Hemos visto colas M/M/1



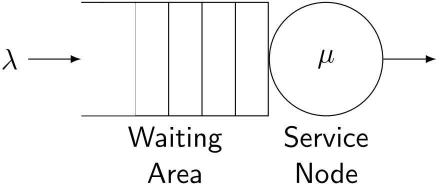
con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

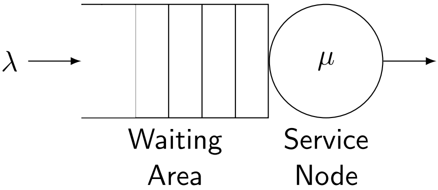
- sistema M/G/1

Hemos estudiado una sola cola



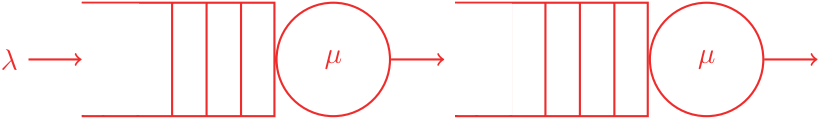
Pero, ¿y si hay más colas?

Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

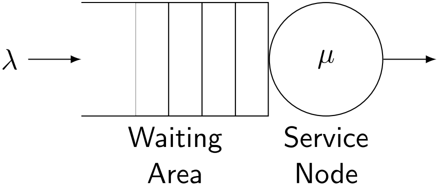
- redes de Jackson



Contenido

Sistema M/G/1

Tiempo de servicio sigue una distribución general[1] $t_s \sim G(\mu)$.

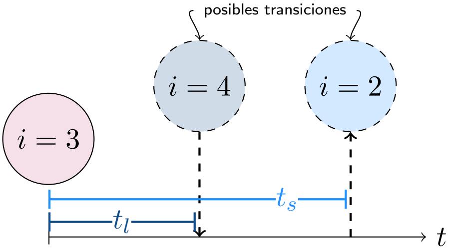


Para modelar como cadena de Markov es necesario que

- tiempo estancia en estado $t_i \sim Exp(\nu_i)$.

[1] Por ejemplo, $G(\mu) = U(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu})$

Sistema M/G/1: No Markoviano



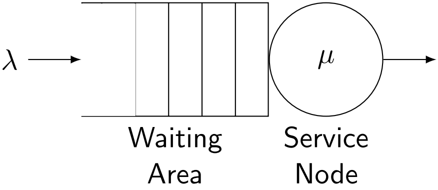
Veamos si se cumple que $t_i \sim Exp(\nu_i)$:

$$\mathbb{P}(t_i > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = \mathbb{P}(t_l > \tau)\mathbb{P}(t_s > \tau)$$
$$= \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\mu\tau} \neq e^{-\nu_i\tau} \quad (1)$$

con $t_s \sim G(\mu) = U\left(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right),\ \tau \in \left[\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right]$.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Podemos obtener el tiempo medio de espera en cola $\mathbb{E}[W(t)]$ de un M/G/1.



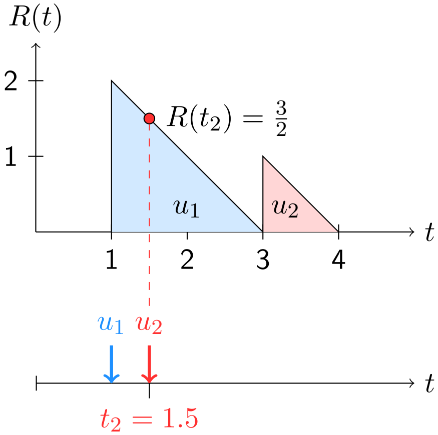
Veamos lo que espera un usuario nuevo:

1. $\mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu}$ en cola ; y
2. la media del tiempo residual R del que se está sirviendo.

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[R(t)]$$

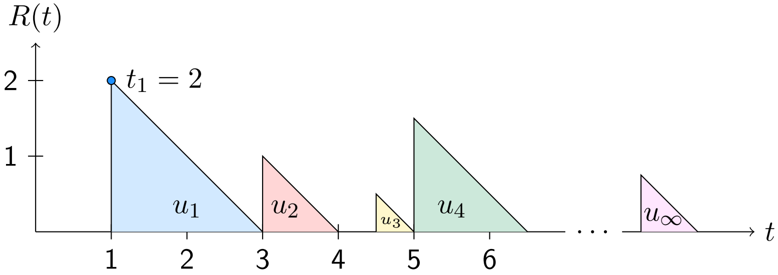
$$\implies \mathbb{E}[(W(t))] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho}$$

Interpretación gráfica de tiempo residual en cada instante $R(t)$:



Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

[2] La media del tiempo residual corresponde con el promedio de áreas.



$$\mathbb{E}[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \int_0^t R(\tau)\ d\tau$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_i^2}{2}$$

[2] Ilustración y demostración basadas en [YMG23, Figura 8.3].

Multiplicando y dividiendo por $N(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_i^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \right) \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} t_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[t_s^2]
\end{aligned}$$

con t_s la v.a. del tiempo de servicio.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Lema (Fórmula de Pollaczek-Khintchine)

El tiempo medio de espera en cola de en un sistema M/G/1 es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

con t_s *la v.a. del tiempo de servicio que sigue una distribución* G.

Demostración:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{1-\rho} = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)}$$

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim Exp(\mu)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^\infty \tau^2 \mu e^{-\mu\tau}\ d\tau \\ &\underbrace{=}_{partes} \left[-\tau^2 e^{-\mu\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty} - \int_0^\infty -e^{-\mu\tau} 2\tau\ d\tau \\ &= \int_0^\infty 2\tau e^{-\mu\tau}\ d\tau \\ &\underbrace{=}_{partes} \frac{2}{\mu^2}\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

la expresión que vimos para M/M/1.

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim U(0, \frac{2}{\mu})$.

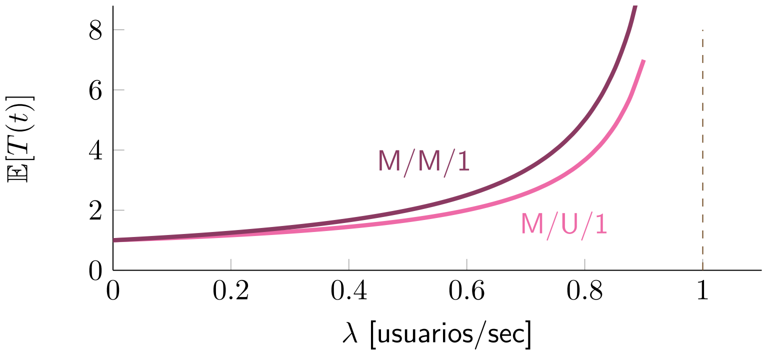
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^{\frac{2}{\mu}} \tau^2 \frac{1}{2/\mu} \, d\tau \\
&= \frac{\mu}{2} \left[\frac{\tau^3}{3} \right]_{\tau=0}^{\frac{2}{\mu}} \\
&= \frac{4}{3\mu^2}
\end{aligned}
$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$
\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}
$$

Sistema M/G/1: M/M/1 como caso peor

El tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)]$ es pesimista en un M/M/1.



Ejemplo (arriba): el tiempo medio total es menor[3] en una uniforme.

[3] Tomamos $\mu = 1$ [usuario/sec].

Redes de Jackson

Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.