Tema 6: Teletráfico en redes de datos

May 3, 2023

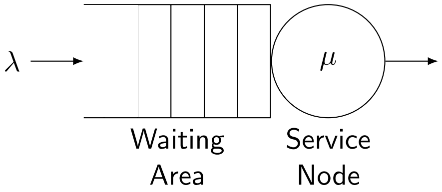
Redes y Servicios de Telecomunicación

Contenido

Introducción

Introducción

Hemos visto colas M/M/1

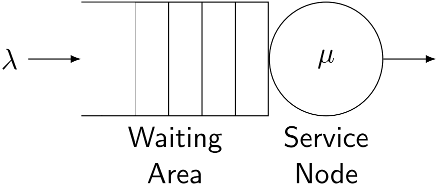


con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Introducción

Hemos visto colas M/M/1



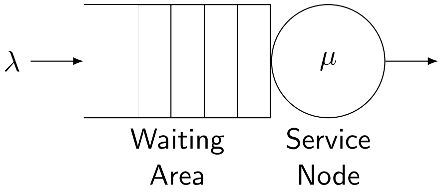
con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

Introducción

Hemos visto colas M/M/1



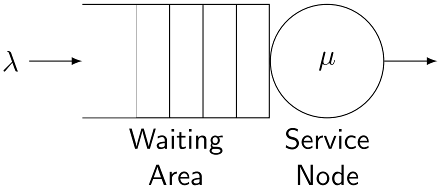
con tiempos:

- de llegada exponenciales $t_l \sim Exp(\lambda)$
- de servicio exponenciales $t_s \sim Exp(\mu)$

Pero, ¿y si el tiempo de servicio t_s sigue otra distribución?

- sistema M/G/1

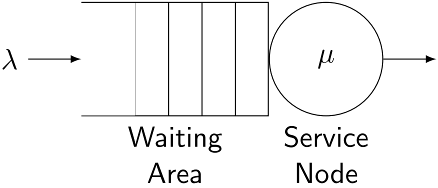
Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

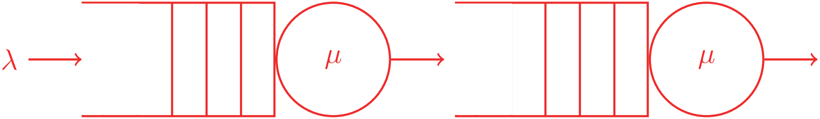
Introducción

Hemos estudiado una sola cola



Pero, ¿y si hay más colas?

- redes de Jackson

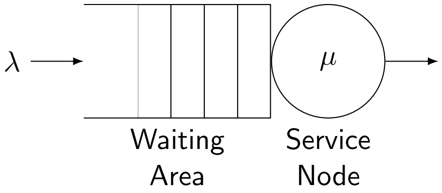


Contenido

Sistema M/G/1

Sistema M/G/1: No Markoviano

Tiempo de servicio sigue una distribución general[1] $t_s \sim G(\mu)$.

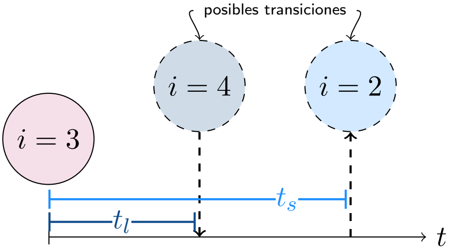


Para modelar como cadena de Markov es necesario que

- tiempo estancia en estado $t_i \sim Exp(\nu_i)$.

[1] Por ejemplo, $G(\mu) = U(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu})$

Sistema M/G/1: No Markoviano



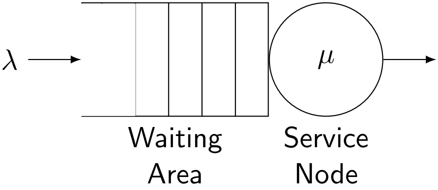
Veamos si se cumple que $t_i \sim Exp(\nu_i)$:

$$\mathbb{P}(t_i > \tau) = \mathbb{P}(\min\{t_l, t_s\} > \tau) = \mathbb{P}(t_l > \tau)\mathbb{P}(t_s > \tau)$$
$$= \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\lambda\tau} \neq e^{-\nu_i\tau} \quad (1)$$

con $t_s \sim G(\mu) = U\left(\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right), \ \tau \in \left[\frac{1}{2\mu}, \frac{2}{3\mu}\right]$.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Podemos obtener el tiempo medio de espera en cola $\mathbb{E}[W(t)]$ de un M/G/1.



Veamos lo que espera un usuario nuevo:

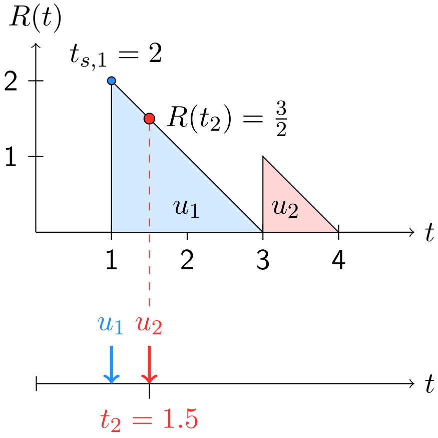
1. $\mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu}$ en cola ; y
2. la media del tiempo residual R del que se está sirviendo.

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[Q(t)]\frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[R(t)]$$

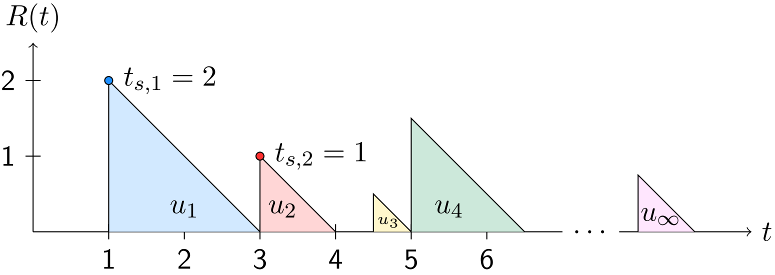
$$\implies \mathbb{E}[(W(t))] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho}$$

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Interpretación gráfica de tiempo residual en cada instante $R(t)$:



[2] La media del tiempo residual corresponde con el promedio de áreas.



$$\mathbb{E}[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau)\ d\tau$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2}$$

[2] Ilustración y demostración basadas en [YMG23, Figura 8.3].

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Multiplicando y dividiendo por $N(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(t)] &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{t_{s,i}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \right) \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} t_{s,i}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[t_s^2]\end{aligned}$$

con $t_{s,i}$ la realización de la v.a. del tiempo de servicio para el usuario i.

Sistema M/G/1: Tiempo medio de espera en cola

Lema (Fórmula de Pollaczek-Khintchine)

El tiempo medio de espera en cola de en un sistema M/G/1 es

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} \tag{2}$$

con t_s la v.a. del tiempo de servicio que sigue una distribución G.

Demostración:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{1-\rho} = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)}$$

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim Exp(\mu)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^\infty \tau^2 \mu e^{-\mu\tau} \ d\tau \\
&\underbrace{=}_{partes} \left[-\tau^2 e^{-\mu\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty} - \int_0^\infty -e^{-\mu\tau} 2\tau \ d\tau \\
&= \int_0^\infty 2\tau e^{-\mu\tau} \ d\tau \\
&\underbrace{=}_{partes} \frac{2}{\mu^2}
\end{aligned}$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

la expresión que vimos para M/M/1.

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Ejemplo: supongamos un tiempo de servicio $t_s \sim U(0, \frac{2}{\mu})$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[t_s^2] &= \int_0^{\frac{2}{\mu}} \tau^2 \frac{1}{2/\mu} \, d\tau \\
&= \frac{\mu}{2} \left[\frac{\tau^3}{3} \right]_{\tau=0}^{\frac{2}{\mu}} \\
&= \frac{4}{3\mu^2}
\end{aligned}
$$

Usando Pollaczek-Khintchine tenemos

$$
\mathbb{E}[W(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[t_s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}
$$

Sistema M/G/1: Ejemplos distribuciones servicio

Otra manera de ver el momento de segundo orden es sabiendo que

$$\mathbb{E}[t_s^2] = \mathrm{Var}[t_s] + \mathbb{E}^2[t_s]$$

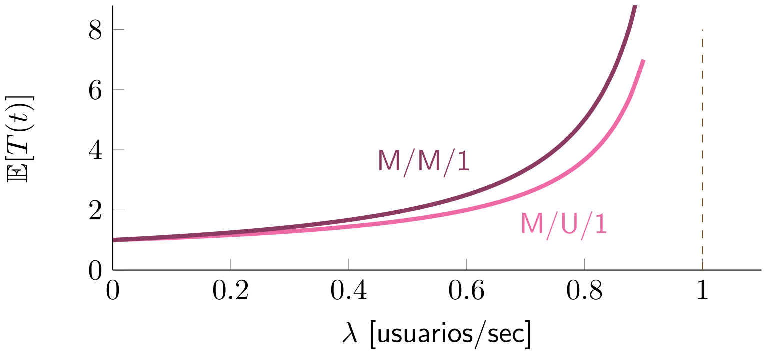
Ejemplo:

- $t_s \sim Exp(\mu) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}$;
- $t_s \sim U\left(0, \frac{2}{\mu}\right) \implies \mathbb{E}[t_s^2] = \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\mu} - 0\right)^2 + \frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{3\mu^2}$.

que coincide con las expresiones anteriores.

Sistema M/G/1: M/M/1 como caso peor

El tiempo medio de servicio $\mathbb{E}[T(t)]$ es pesimista en un M/M/1.

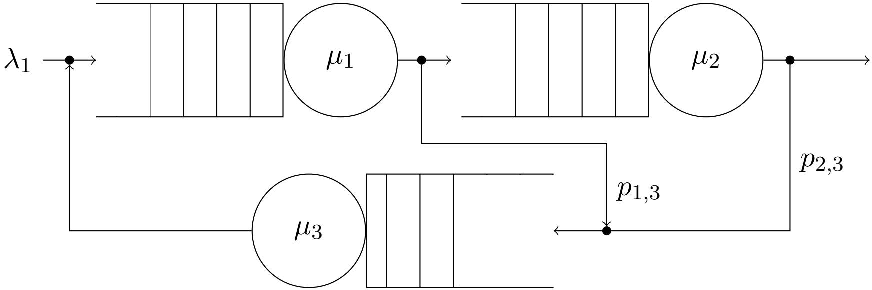


Ejemplo (arriba): el tiempo medio total es menor[3] en una uniforme.

[3] Tomamos $\mu = 1$ [usuario/sec].

Redes de Colas

Podemos estudiar cómo modelar una red de colas (e.g., routers).



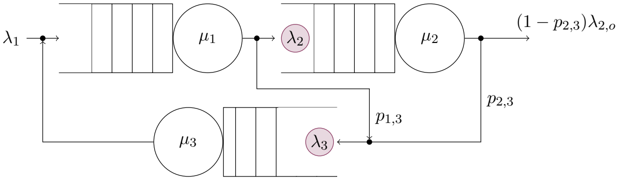
con $p_{2,3}$ la probabilidad de ir de la cola 2 a la 3.

Las llegadas λ_i a la cola i se averiguan usando probabilidades $p_{i,j}$.

Ejemplo:

$$\lambda_3 = p_{1,3}\lambda_{1,o} + p_{2,3}\lambda_{2,o}$$

con $\lambda_{i,o}$ la tasa de salidas de la cola i.



Lema (Tiempo entre salidas)

En un sistema M/M/1 el tiempo entre salidas y llegadas siguen la misma distribución. Es decir, se cumple:

$$t_e \sim Exp(\lambda)$$
$$t_l \sim Exp(\lambda)$$

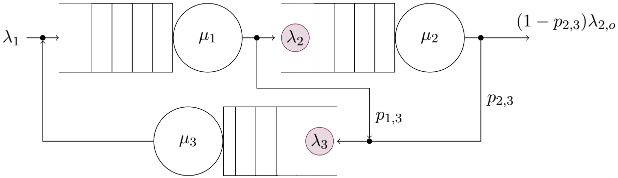
Demostración:

$$F_{t_e}(\tau) = \pi_0 \mathbb{P}(t_l + t_s \leq \tau) + (1-\pi_0)\mathbb{P}(t_s \leq \tau)$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau f_{t_l+t_s}(t)\ dt + \rho e^{-\mu\tau} = (1-\rho)\int_0^\tau f_{t_l} * f_{t_s}(t)\ dt + \rho e^{-\mu\tau}$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau \int_0^t f_{t_l}(t-\theta) f_{t_s}(\theta)\ d\theta\ dt + \rho e^{-\mu\tau}$$
$$= (1-\rho)\int_0^\tau \int_0^t e^{-\lambda(t-\theta)} e^{-\mu\theta}\ d\theta\ dt + \rho e^{-\mu\tau} = \ldots = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

Redes de Colas: Distribución salida M/M/1

Ejemplo (cont.): sabiendo que $\lambda_{i,o} = \lambda_i$ en la red de colas de abajo tendríamos que

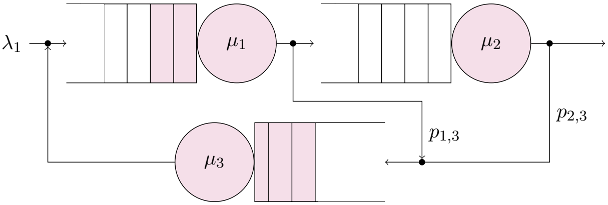
$$\begin{aligned}\lambda_3 =& p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}\lambda_2 \\ =& p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}(1 - p_{1,3})\lambda_1\end{aligned}$$



Quiero saber la probabilidad de tener $\mathbf{K} = (3, 1, 4)$ usuarios en equilibrio:

$$\mathbb{P}(\mathbf{K}) = (\mathbb{P}(N_1 = 3), \mathbb{P}(N_2 = 1), \mathbb{P}(N_3 = 4))$$

con N_i el número de usuarios en la cola i al alcanzar equilibrio.



Para que exista $\mathbb{P}(\mathbf{K})$ necesitamos que sea una red de Jackson:

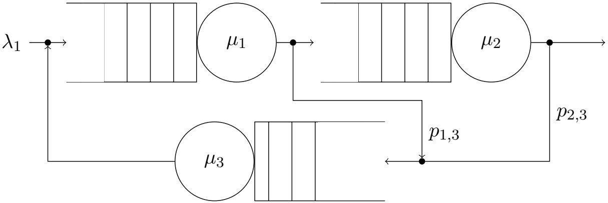
Definición (Red de Jackson)

Las colas interconectadas forman una red de Jackson si:

1. *la red es abierta, y las llegadas en cola siguen un proceso de Poisson;*
2. *los tiempos de servicio son exponenciales y las colas son FIFO;*
3. *un usuario pasa de la cola i a j con probabilidad $p_{i,j}$, o sale con probabilidad $1 - \sum_j p_{i,j}$; y*
4. *la carga de las colas está por debajo de 1, i.e. $\rho_i < 1, \ \forall i$*

Redes de Colas: Redes de Jackson

Ejemplo: ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?



Comprobemos las propiedades:

1. red abierta y ¿llegadas de Poisson?
   - ✓cola $i = 1$ con llegadas $Poiss(\lambda_1)$;
   - **?** cola $i = 2$ recibe $(1 - p_{1,3})$ de salidas de cola $i = 1$; y
   - **?** cola $i = 3$ recibe $p_{1,3}$ de salidas de cola $i = 1$, y el $p_{2,3}$ de salidas de cola $i = 2$;

Lema (Descomposición proceso de Poisson)

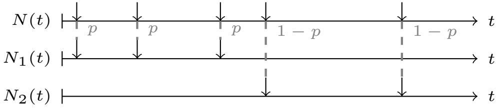
Si $\{N(t), t > 0\}$ *es un proceso estocástico que sigue una distribución* $Poiss(\lambda)$, *y cada llegada se asigna a*

- $N_1(t)$ *con probabilidad* p, *y*
- $N_2(t)$ *con probabilidad* $1 - p$;

entonces:

- $N_1(t) \sim Poiss(p\lambda)$
- $N_2(t) \sim Poiss\left((1-p)\lambda\right)$

4



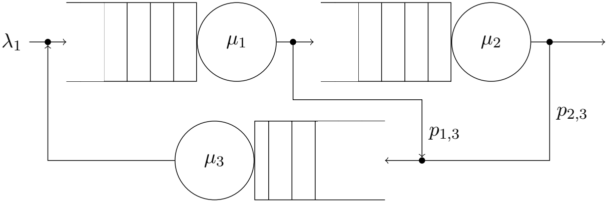
4 Figura basada en [YMG23, Figura 3.7]

Demostración [YMG23]:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1(t) = n, N_2(t) = m) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m) \cdot \mathbb{P}(N(t) = n+m) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_1(t) = n \mid N(t) = n+m) \cdot \mathbb{P}(N(t) = n+m) \\
&\quad = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \cdot \frac{(\lambda t)^{n+m} e^{-\lambda t}}{(n+m)!} \\
&\quad = \frac{(n+m)!}{n!\, m!} p^n (1-p)^m \cdot \frac{(\lambda t)^{n+m} e^{-\lambda t}}{(n+m)!} \\
&\quad = \frac{(p\lambda \cdot t)^n e^{-p\lambda \cdot t}}{n!} \frac{[(1-p)\lambda \cdot t]^m e^{-(1-p)\lambda \cdot t}}{m!} \\
&\quad = \mathbb{P}(N_1(t) = n) \cdot \mathbb{P}(N_2(t) = m)
\end{aligned}
$$

con $N_1(t) \sim Poiss(p\lambda)$ y $N_2(t) \sim Poiss((1-p)\lambda)$

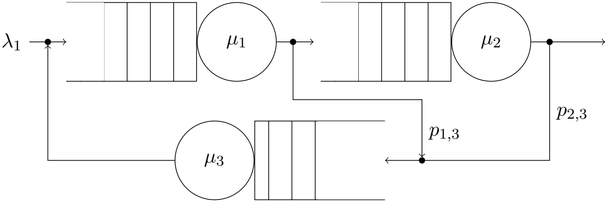
Ejemplo (cont.): ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?



Comprobemos las propiedades:

1. ✓red abierta y ¿llegadas de Poisson?
   - ✓cola $i = 1$ con llegadas $Poiss(\lambda_1)$;
   - ✓cola $i = 2$ con llegadas $Poiss\left((1 - p_{1,3})\lambda_1\right)$;
   - ✓cola $i = 3$ con llegadas $Poiss\left(p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}\lambda_2\right)$;

Ejemplo (cont.): ¿tenemos una red de Jackson en esta diapositiva?



Comprobemos las propiedades:

2. ✓tiempos de servicio $Exp(\mu_i)$ y colas FIFO;
3. ✓vamos de i a j con probabilidad $p_{i,j}$ y salimos con probabilidad $1 - \sum_j p_{i,j}$; y
4. ✓las cargas $\rho_i < 1$ si diseñamos la red para que $\lambda_i < \mu_i$

Teorema (Teorema de Jackson)

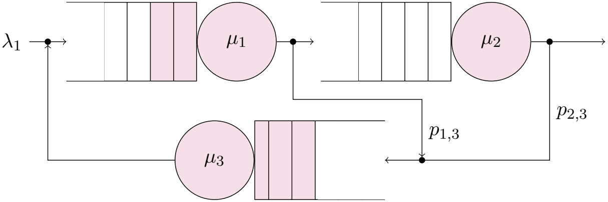
Sea una red de Jackson con m sistemas M/M/1, existe $\mathbb{P}(\mathbf{K})$ y se expresa como:

$$\mathbb{P}(\mathbf{K}) = \prod_{i}^{m} \mathbb{P}(N_i = K_i) = \prod_{i}^{m} \pi_{K_i} = \prod_{i}^{m} (1 - \rho_i)\rho_i^{K_i}$$

con ρ_i la carga de la cola i.

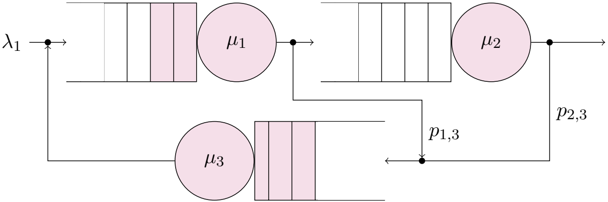
Ejemplo: quiero saber la probabilidad de tener $\mathbf{K} = (3, 1, 4)$ usuarios en equilibrio:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{K}) &= (\mathbb{P}(N_1 = 3), \mathbb{P}(N_2 = 1), \mathbb{P}(N_3 = 4)) \\
&= \prod_{i=1}^{3} (1 - \rho_i)\rho_i^{K_i} \\
&= (1 - \rho_1)\rho_1^3 \cdot (1 - \rho_2)\rho_2^1 \cdot (1 - \rho_3)\rho_3^4
\end{aligned}$$



Ejemplo (cont.): miremos qué carga tiene cada cola[5].

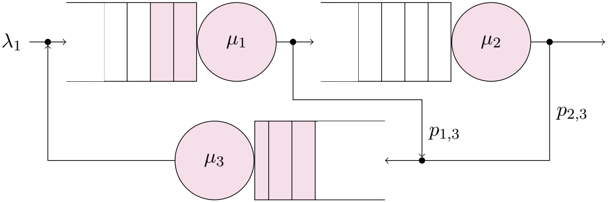
- carga cola $i = 1$: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$;
- carga cola $i = 2$: $\rho_2 = \frac{(1-p_{1,3})\lambda_1}{\mu_2} = (1 - p_{1,3})\rho_1$; y
- carga cola $i = 3$: $\rho_3 = \frac{p_{1,3}\lambda_1 + p_{2,3}(1-p_{1,3})\lambda_1}{\mu_3} = [p_{1,3} + p_{2,3}(1 - p_{1,3})]\rho_1$.



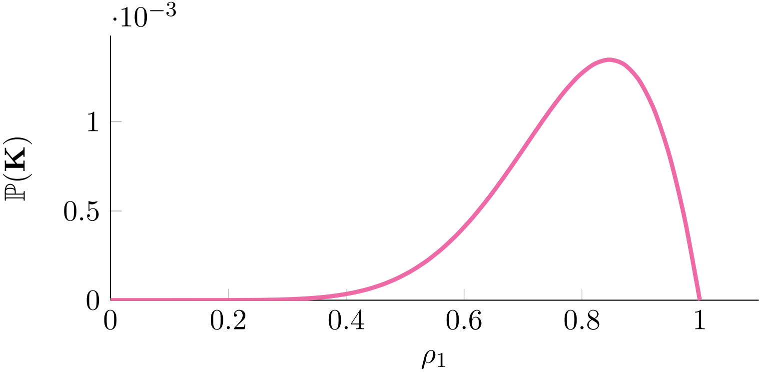
[5] $\mu_2 = \mu_3 = \mu_1$.

Ejemplo (cont. II): tomando $p_{i,j} = \frac{1}{2},\ \forall(i,j)$ tenemos $\rho_2 = \frac{\rho_1}{2}, \rho_3 = \frac{3\rho_1}{4}$. Por tanto la probabilidad del estado $\mathbf{K} = (3,1,4)$ en la red de Jackson es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{K}) &= (1-\rho_1)\rho_1^3 \cdot (1-\rho_2)\rho_2^1 \cdot (1-\rho_3)\rho_3^4 \\ &= (1-\rho_1)\rho_1^3 \cdot \left(1 - \frac{\rho_1}{2}\right)\frac{\rho_1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3\rho_1}{4}\right)\left(\frac{3\rho_1}{4}\right)^4\end{aligned}$$

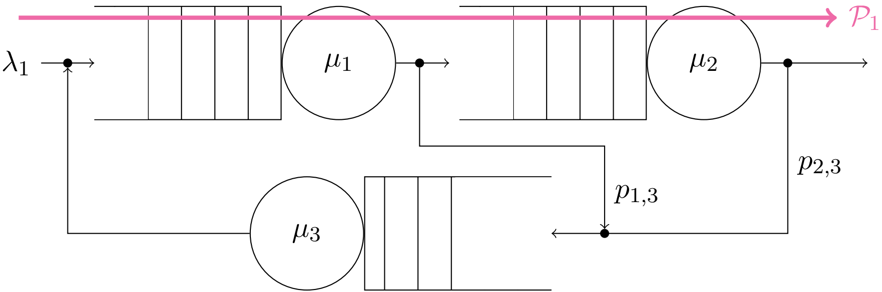


Ejemplo (cont. III): en situación de equilibrio, probabilidad de estar en el estado $\mathbf{K} = (3, 1, 4)$ depende solo de ρ_1



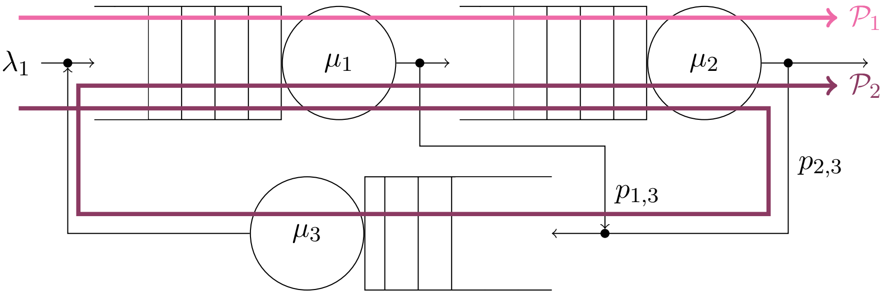
Redes de Colas: Tiempo Medio de tránsito

Los usuarios pueden seguir varias rutas (paths) $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots\}$, cada una de ellas con una probabilidad $\mathbb{P}(\mathcal{P}_i)$.



Redes de Colas: Tiempo Medio de tránsito

Los usuarios pueden seguir varias rutas (paths) $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots\}$, cada una de ellas con una probabilidad $\mathbb{P}\left(\mathcal{P}_i\right)$.



Redes de Colas: Tiempo Medio de tránsito

Lema (Tiempo Medio de Tránsito)

El tiempo medio de tránsito por una ruta $\mathcal{P}_i$ de una red de Jackson en régimen estacionario es

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_i}[T(t)] = \sum_{\iota \in \mathcal{P}_i} \mathbb{E}_\iota[T(t)] = \sum_{\iota \in \mathcal{P}_i} \frac{1}{\mu_\iota - \lambda_\iota} \tag{3}$$

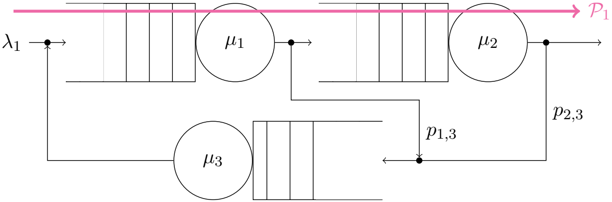
Redes de Colas: Tiempo Medio de tránsito

Ejemplo: el tiempo medio de tránsito en la ruta $\mathcal{P}_1$ es

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}_1}[T(t)] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{1}{\mu_2 - (1 - p_{1,3})\lambda_1} \quad (4)$$

La probabilidad de pasar por la ruta $\mathcal{P}_1$ es

$$\mathbb{P}(\mathcal{P}_1) = (1 - p_{1,3})(1 - p_{2,3}) \quad (5)$$



Referencias I

Pablo Serrano Yáñez-Mingot and José Alberto Hernández Gutiérrez, Una introducción amable a la teoría de colas, 2023.