LES ARBRES

1. Exemples

Un organisateur de tournoi de rugby recherche la meilleure solution pour afficher les potentiels quarts de final, demi-finales et finale :
Au départ nous avons 4 poules de 4 équipes. Les 4 équipes d'une poule s'affrontent dans un mini championnat (3 matchs par équipe). À l'issue de cette phase de poule, les 2 premières équipes de chaque poule sont qualifiées pour les quarts de finale.

Dans ce qui suit, on désigne les 2 qualifiés par poule par :

- Poule 1 => 1er Eq1 ; 2e Eq8
- Poule 2 => 1er Eq2 ; 2e Eq7
- Poule 3 => 1er Eq3 ; 2e Eq6
- Poule 4 => 1er Eq4 ; 2e Eq5

En quart de final on va avoir :

- Quart de finale 1 => Eq1 contre Eq5
- Quart de finale 2 => Eq2 contre Eq6
- Quart de finale 3 => Eq3 contre Eq7
- Quart de finale 4 => Eq4 contre Eq8

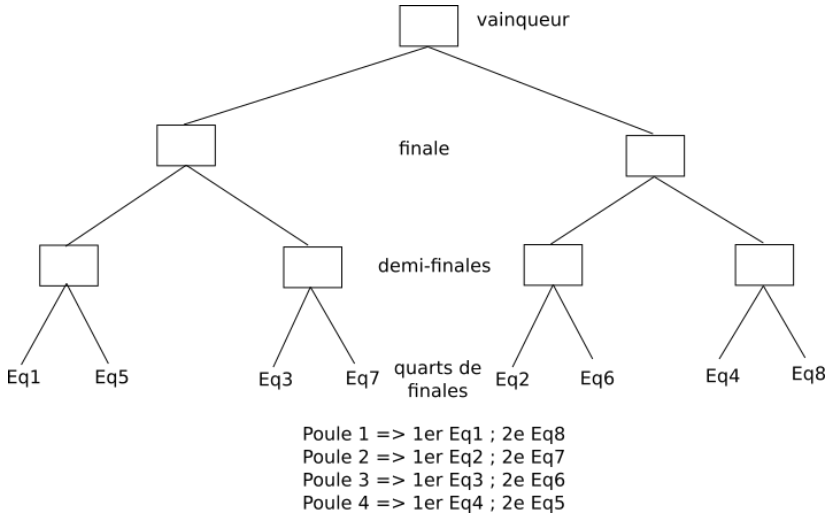
Pour les demi-finales on aura :

- Demi-finale 1 => vainqueur quart de finale 1 contre vainqueur quart de finale 3
- Demi-finale 2 => vainqueur quart de finale 2 contre vainqueur quart de finale 4

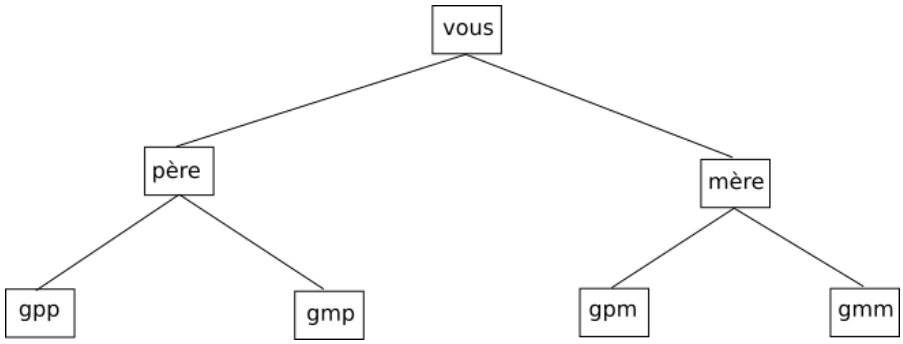
L'organisateur du tournoi affiche les informations ci-dessus le jour du tournoi. Malheureusement, la plupart des spectateurs se perdent quand ils cherchent à déterminer les potentielles demi-finales (et ne parlons pas de la finale !)

Pourtant, un simple graphique aurait grandement simplifié les choses :

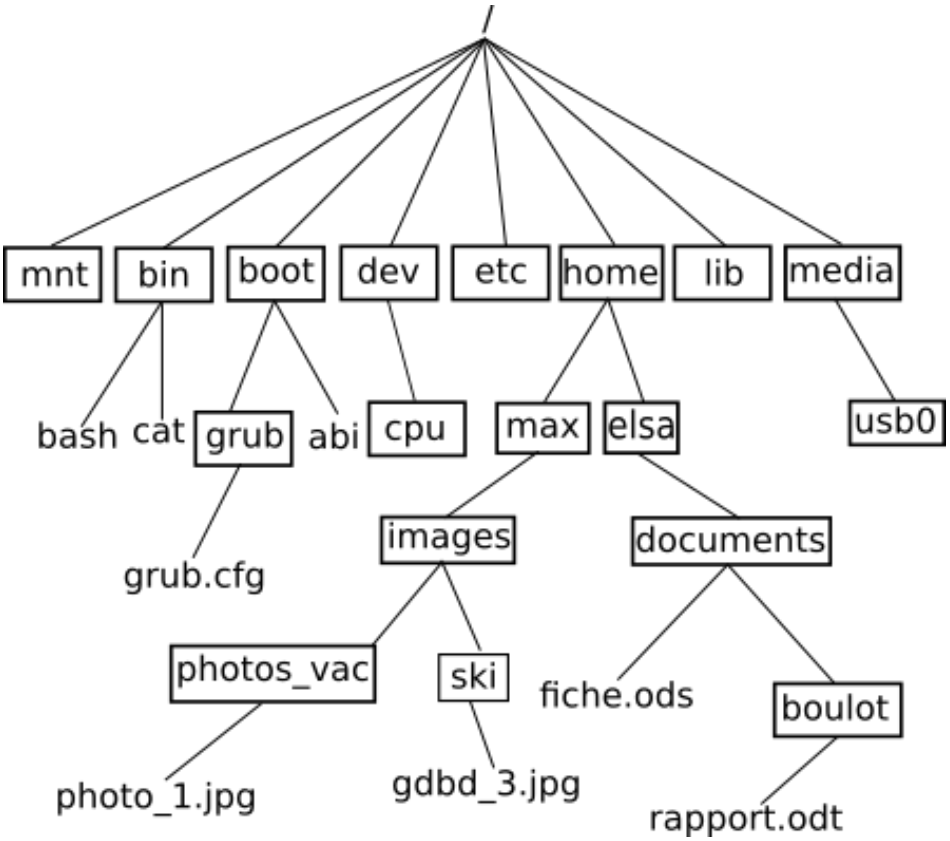
Les spectateurs peuvent alors recopier sur un bout de papier ce schéma et ensuite se livrer au jeu des pronostics.



Nous avons ci-dessous ce que l'on appelle une structure en arbre. On peut aussi retrouver cette même structure dans un arbre généalogique :



Dernier exemple, les systèmes de fichiers dans les systèmes de type UNIX ont aussi une structure en arbre (notion vue l'année dernière)



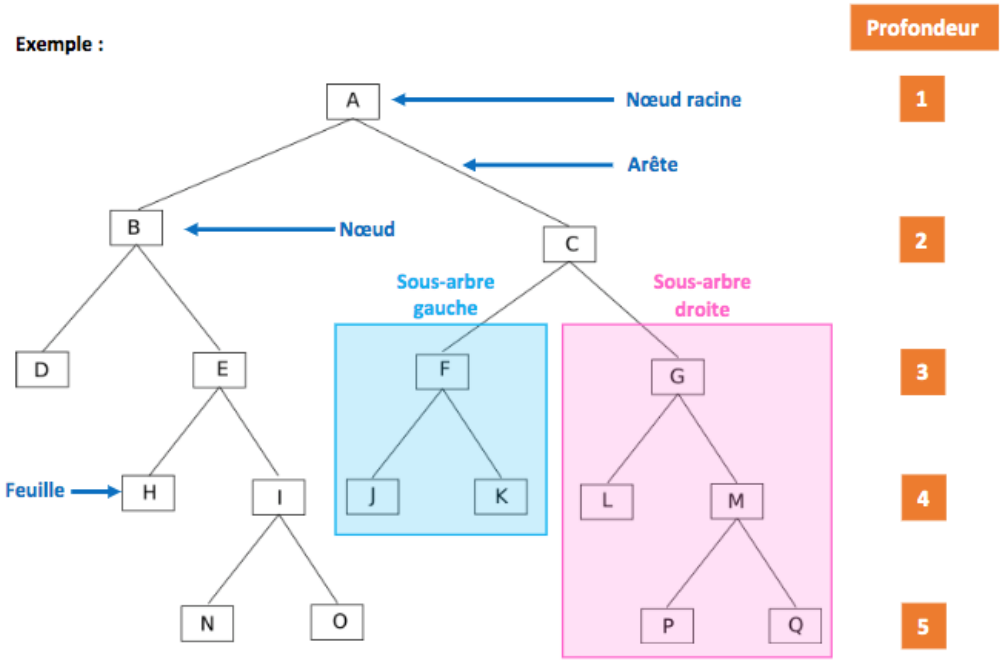
Système de fichiers de type UNIX

Les arbres sont des types abstraits très utilisés en informatique. On les utilise notamment quand on a besoin d'une structure hiérarchique des données : dans l'exemple ci-dessus le fichier « grub.cfg » ne se trouve pas au même niveau que le fichier « rapport.odt » (le fichier « grub.cfg » se trouve "plus proche" de la racine / que le fichier « rapport.odt »).

On ne pourrait pas avec une simple liste qui contiendrait les noms des fichiers et des répertoires, rendre compte de cette hiérarchie (plus ou moins "proche" de la racine). On trouve souvent dans cette hiérarchie une notion de temps (les quarts de finale sont avant les demi-finales ou encore votre grand-mère paternelle est née avant votre père), mais ce n'est pas une obligation (voir l'arborescence du système de fichiers).

Les arbres binaires sont des cas particuliers d'arbres : l'arbre du tournoi de rugby et l'arbre "père, mère..." sont des arbres binaires, en revanche, l'arbre représentant la structure du système de fichier n'est pas un arbre binaire. Dans un arbre binaire, on a au maximum 2 branches qui partent d'un élément (pour le système de fichiers, on a 7 branches qui partent de la racine : ce n'est donc pas un arbre binaire). Dans la suite nous allons uniquement travailler sur les arbres binaires.

Soit l'arbre binaire suivant :



Hauteur de l'arbre = profondeur maximale : h = 5

2. Un peu de vocabulaire :

- Chaque élément de l'arbre est appelé nœud (par exemple : A, B, C, D, … ,P et Q sont des nœuds).
- Le nœud initial (A) est appelé **nœud racine** ou plus simplement **racine**.
- On dira que le nœud E et le nœud D sont les **fils** du nœud B. On dira que le nœud B est le **père** des nœuds E et D.
- Dans un **arbre binaire**, un nœud possède **au plus 2 fils**.
- Un **nœud** n'ayant **aucun fils** est appelé **feuille** (exemples : D, H, N, O, J, K, L, P et Q sont des feuilles).
- À partir d'un nœud (qui n'est pas une feuille), on peut définir un **sous-arbre gauche** et un **sous-arbre droit** (exemple : à partir de C on va trouver un sous-arbre gauche composé des nœuds F, J et K et un sous-arbre droit composé des nœuds G, L, M, P et Q).
- On appelle **arête** le **segment qui relie 2 nœuds**.
- On appelle **profondeur** d'un nœud ou d'une feuille dans un arbre binaire **le nombre de nœuds du chemin qui va de la racine à ce nœud**. La racine d'un arbre est à une profondeur 1, et la profondeur d'un nœud est égale à la profondeur de son prédécesseur plus 1. Si un nœud est à une profondeur p, tous ses successeurs sont à une profondeur p+1. Exemples : profondeur de B = 2 ; profondeur de I = 4 ; profondeur de P = 5
- ***ATTENTION*** *: on trouve aussi dans certains livres la profondeur de la racine égale à 0 (on trouve alors : profondeur de B = 1 ; profondeur de I = 3 ; profondeur de P = 4). Les 2 définitions sont valables, il faut juste préciser si vous considérez que la profondeur de la racine est de 1 ou de 0.*
- On appelle **hauteur** d'un arbre la **profondeur maximale** des nœuds de l'arbre. Exemple : la profondeur de P = 5, c'est un des nœuds les plus profond, donc la **hauteur de l'arbre est de 5.**
- ***ATTENTION*** *: comme on trouve 2 définitions pour la profondeur, on peut trouver 2 résultats différents pour la hauteur : si on considère la profondeur de la racine égale à 1, on aura bien une hauteur de 5, mais si l'on considère que la profondeur de la racine est de 0, on aura alors une hauteur de 4.*

Il est aussi important de bien noter que l'on peut aussi voir les arbres comme des structures récursives : les fils d'un nœud sont des arbres (sous-arbre gauche et un sous-arbre droite dans le cas d'un arbre binaire), ces arbres sont eux-mêmes constitués d'arbres…

1.3 À faire vous-même

Trouvez un autre exemple de données qui peuvent être représentées par un arbre binaire (dans le domaine de votre choix). Dessinez au moins une partie de cet arbre binaire. Déterminez la hauteur de l'arbre que vous aurez dessiné.