基于流的 Spigot 算法的进位界估计

记有理数 $C=\dfrac{P}{Q}$，$\lambda=\dfrac{p}{2q}$. 考虑级数

$$\begin{aligned}S&=\frac{P}{Q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!!}\left(\frac{p}{q}\right)^k\\&=\frac{P}{Q}\left(1+\frac{p}{3q}\left(1+\frac{2p}{5q}\left(1+\cdots\frac{kp}{(2k+1)q}\left(1+\cdots\right)\cdots\right)\right)\right),\end{aligned}$$

其前 N 项之和为

$$\begin{aligned}S[N]&=\frac{P}{Q}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k!}{(2k+1)!!}\left(\frac{p}{q}\right)^k\\&=\frac{P}{Q}\left(1+\frac{p}{3q}\left(1+\frac{2p}{5q}\left(1+\cdots\frac{(N-1)p}{(2N-1)q}\left(1+\frac{Np}{(2N+1)q}\times 0\right)\cdots\right)\right)\right).\end{aligned}$$

第一截断误差

$$\begin{aligned}\Pi_1(N)&=S-S[N]\\&=\frac{P}{Q}\cdot\frac{p}{3q}\cdot\frac{2p}{5q}\cdot\cdots\cdot\frac{Np}{(2N+1)q}\left(1+\cdots\right)\\&\leqslant\frac{P}{Q}\left(\frac{p}{2q}\right)^N\left(1+\frac{p}{2q}+(\frac{p}{2q})^2+\cdots\right)\\&=\frac{2qP}{(2q-p)Q}\left(\frac{p}{2q}\right)^N=\frac{C\lambda^N}{1-\lambda},\end{aligned}$$

标准型第二截断误差

$$\begin{aligned}\Pi_2&=\frac{1}{Q}\left((Q-1)+\frac{p}{3q}\left((3q-1)+\frac{2p}{5q}\left((5q-1)+\cdots\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\left.\frac{kp}{(2k+1)q}\left(((2k+1)q-1)+\cdots\right)\cdots\right)\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{Q}\left((Q-1)+\frac{p}{3q}\left(3q+\frac{2p}{5q}\left(5q+\cdots\frac{kp}{(2k+1)q}\left((2k+1)q+\cdots\right)\cdots\right)\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{Q}\left((Q-1)+p\cdot\left(1+\frac{2p}{3q}\left(1+\cdots\frac{kp}{(2k-1)q}\left(1+\cdots\right)\cdots\right)\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{Q}\left((Q-1)+p\cdot\left(1+\frac{p}{2q}\times 2+(\frac{p}{2q})^2\times 3+\cdots\right)\right)\\&=1+\frac{1}{Q}\left(\frac{4pq^2}{(2q-p)^2}-1\right)=1+\frac{1}{Q}\left(\frac{p}{(1-\lambda)^2}-1\right).\end{aligned}$$

当 $Q=p=q=1$ 时，上述

$$\Pi_2=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2}{5}\left(4+\frac{3}{7}\left(6+\cdots\frac{k}{(2k+1)}\left(2k+\cdots\right)\cdots\right)\right)\right)$$

可以直接计算出来:

首先将 2 表为

$$2=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2}{5}\left(4+\frac{3}{7}\left(6+\cdots\frac{N}{(2N+1)}\left(2N+(2N+2)\right)\cdots\right)\right)\right),$$

两式相减得余项

$$\begin{aligned}\Pi_2-2&=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\cdots\times\frac{N}{2N+1}\times\\&\qquad\left(\frac{N+1}{2N+3}\left((2N+2)+\frac{N+2}{2N+5}\left((2N+4)+\cdots\right)\right)-(2N+2)\right),\end{aligned}$$

上式大括号部分记作 $R(N)$，那么

$$|\Pi_2 - 2| \leqslant \frac{|R(N)|}{2^N},$$

一方面,

$$R(N) \leqslant \left((N+1) + \frac{N+2}{2} + \frac{N+3}{2^2} + \cdots\right) - (2N+2) = 2,$$

另一方面,

$$\begin{aligned} R(N) &\geqslant \left(\frac{N+1}{2N+3} + (\frac{N+1}{2N+3})^2 + (\frac{N+1}{2N+3})^3 + \cdots\right) \cdot (2N+2) - (2N+2) \\ &= -\frac{2N+2}{N+2} \geqslant -2, \end{aligned}$$

因此 $R(N)$ 有界，从而得到 $\Pi_2 = 2$.

下面使用混合进制基底 $\left[\dfrac{jp}{(2j+1)q}\right]_{j=1}^{\infty}$ 下 Horner 形式的表示，那么 Π_2 可简记为

$$\frac{1}{Q}[Q-1;\, 3q-1,\, 5q-1, \cdots,\, (2k+1)q-1, \cdots].$$

初始项数为 A、递增项数为 u、进制基为 B 的三角型第二截断误差

$$\begin{aligned} \Pi_2(A,\, u,\, B) = \frac{1}{Q}\big[&Q-1;\, 3q-1,\, 5q-1, \cdots,\, (2A-1)q-1, \\ &((2A+1)q-1)B, \cdots,\, ((2(A+u)-1)q-1)B, \\ &((2(A+u)+1)q-1)B^2, \cdots,\, ((2(A+2u)-1)q-1)B^2, \\ &\ldots\ldots \\ &((2(A+(k-1)u)+1)q-1)B^k, \cdots,\, ((2(A+ku)-1)q-1)B^k, \cdots\cdots\big] \\ \leqslant \frac{1}{Q}\Big((Q-1) + p\cdot\big[&1;\, 2,\, 3, \cdots,\, A-1,\, AB, \cdots,\, (A+u-1)B, \cdots\cdots \\ &(A+(k-1)u)B^k, \cdots,\, (A+ku-1)B^k, \cdots\cdots\big]\Big) \\ \leqslant \frac{1}{Q}\Big((Q-1) + p\cdot\Big(&1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \cdots + (A-1)\lambda^{A-2} + \\ &B\cdot\left(A\lambda^{A-1} + \cdots + (A+u-1)\lambda^{A+u-2}\right) + \\ &\ldots\ldots \\ &B^k\cdot\left((A+(k-1)u)\lambda^{A+(k-1)u-1} + \cdots + (A+ku-1)\lambda^{A+ku-2}\right) + \cdots\cdots\Big)\Big) \\ \leqslant 1 + \frac{1}{Q}\Big(p\cdot\Big(&\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{B\lambda^A}{(1-\lambda)^2(1-B\lambda^u)} + \frac{B(A-u)\lambda^{A-1}}{(1-\lambda)(1-B\lambda^u)} + \frac{Bu\lambda^{A-1}}{(1-\lambda)(1-B\lambda^u)^2}\Big) - 1\Big). \end{aligned}$$

按照计算要求，第一截断误差需要满足条件：对任意自然数 k，成立 $\Pi_1(A+ku) < B^{-k-1}$. 该条件等价于

$$B\lambda^u < 1,\ C\lambda^{A-u} < 1-\lambda.$$

我们取 $u = \left\lceil -\dfrac{\ln B}{\ln\lambda}\right\rceil + 1$，那么成立 $B\lambda^u \leqslant \lambda$，在此情形下

$$\Pi_2(A,\, u,\, B) \leqslant 1 + \frac{1}{Q}\left(p\cdot\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{\lambda^{A-u+1}}{(1-\lambda)^3} + \max\left\{\frac{(A-u)\lambda^{A-u}}{(1-\lambda)^2}, 0\right\} + \frac{u\lambda^{A-u}}{(1-\lambda)^3}\right) - 1\right).$$

若 $C < 1-\lambda$ 成立，我们取 $A = u$，则上式给出估计

$$\Pi_2(A,\, u,\, B) \leqslant 1 + \frac{1}{Q}\left(\frac{(1+u)p}{(1-\lambda)^3} - 1\right);$$

一般情况下，记 $n = A-u$，在 $C\lambda^n < 1-\lambda$ 成立的前提下，我们寻找满足条件

$$n + \frac{u+\lambda}{1-\lambda} < \lambda^{-n}$$

的最小正整数 n，可以采用 Newton 迭代法求函数

$$F(x) = \lambda^{-x} - x - \frac{u+\lambda}{1-\lambda}$$

的正零点：取初值 $x_0 = 1 - \dfrac{\ln|\ln\lambda|}{|\ln\lambda|}$，使用公式

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{\lambda^{-x_n} - x_n - \dfrac{u+\lambda}{1-\lambda}}{\lambda^{-x_n}|\ln\lambda| - 1} \\
&= \frac{\lambda^{-x_n}(x_n|\ln\lambda| - 1) + \dfrac{u+\lambda}{1-\lambda}}{\lambda^{-x_n}|\ln\lambda| - 1}
\end{aligned}$$

进行迭代，则上式可以给出估计

$$\Pi_2(A,\, u,\, B) \leqslant 1 + \frac{1}{Q}\left(\frac{2p}{(1-\lambda)^2} - 1\right).$$

在此策略下，每一轮计算都将第一截断误差控制在 1 以内，因此进位上界就是 $1 + \lceil \Pi_2 \rceil$.