Università di Pisa

Corso di Laurea Magistrale
Data Science and Business Informatics

Analisi del problema Transport

Matteo Biviano - 543933

Insegnamento Logistics
Docente Maria Grazia Scutellà
Anno Accademico 2021/2022

Indice

1 Introduzione

L'obiettivo del progetto è quello di aiutare il management dell'azienda **Transport**, società di trasporto operante negli USA, nel determinare la localizzazione di due hub all'interno dell'insieme di siti candidati *V1*, rappresentato dai seguenti 11 terminal: Altus, Ardmore, Bartlesville, Duncan, Edmond, Enid, Lawton, Muskogee, Oklahoma City, Ponca City, Stillwater, Tulsa. Il problema prevede, inoltre, che ogni terminal i sia assegnato solo ad un hub j, considerando solo il costo di trasporto (in dollari) da ciascun terminal all'hub, definito come:

$$c_{ij} = 2 * 0.74 * l_{ij} \tag{1}$$

dove 0.74 è il costo stimato di trasporto in dollari per miglio, mentre l_{ij} è la distanza in miglia tra i e j, riportata nella tabella seguente:

	Altus	**Ardmore**	**Bartlesville**	**Duncan**	**Edmond**	**Enid**	**Lawton**	**Muskogee**	**Oklahoma City**	**Ponca City**	**Stillwater**	**Tulsa**
Altus	0.0	169.8	291.8	88.2	153.9	208.2	54.2	274.2	141.1	245.0	209.2	248.0
Ardmore	169.8	0.0	248.6	75.9	112.5	199.0	115.8	230.4	100.5	202.2	162.6	204.6
Bartlesville	291.8	248.6	0.0	231.5	146.0	132.4	238.7	92.2	151.4	70.2	115.0	45.6
Duncan	88.2	75.9	231.5	0.0	93.5	137.5	34.1	213.5	80.9	184.8	145.3	187.8
Edmond	153.9	112.5	146.0	93.5	0.0	88.8	100.7	145.7	14.4	91.9	53.0	102.2
Enid	208.2	199.0	132.4	137.5	88.8	0.0	145.0	166.4	87.6	64.5	65.8	118.4
Lawton	54.2	115.8	238.7	34.1	100.7	145.0	0.0	220.6	88.0	191.9	152.5	194.9
Muskogee	274.2	230.4	92.2	213.5	145.7	166.4	220.6	0.0	140.4	142.5	119.2	48.1
Oklahoma City	141.1	100.5	151.4	80.9	14.4	87.6	88.0	140.4	0.0	104.7	66.6	107.6
Ponca City	245.0	202.2	70.2	184.8	91.9	64.5	191.9	142.5	104.7	0.0	41.9	96.5
Stillwater	209.2	162.6	115.0	145.3	53.0	65.8	152.5	119.2	66.6	41.9	0.0	71.2
Tulsa	248.0	204.6	45.6	187.8	102.2	118.4	194.9	48.1	107.6	96.5	71.2	0.0

Tabella 1: Distanze in miglia tra terminal

2 Analisi e soluzione del problema

L'obiettivo del problema preso in analisi è quello di minimizzare il massimo costo di trasporto terminal−hub (w), rispettando i vincoli del problema.
I **dati di input** sono:
- **V1** = insieme dei terminal
- $\boldsymbol{c_{ji}}$ = costo di trasporto tra il terminal i e l'hub j, calcolato come in 1.

Definiamo, inoltre, un insieme **V2** uguale a V1, rappresentante i *siti candidati* a localizzare un hub.
Le **variabili decisionali** sono:
- $\boldsymbol{x_j}$, $j \in V2$ = è una variabile decisionale binaria il cui valore è uguale ad 1 se il terminal j ospita un hub, 0 altrimenti.
- $\boldsymbol{y_{ij}}$, $i \in V1$, $j \in V2$ = è una variabile decisionale binaria il cui valore è uguale a 1 se il terminal i è assegnato all'hub j, 0 altrimenti.

La formulazione del problema, la quale può essere vista come la formulazione di un **p-center model** (sostituendo il concetto di *distanza* con quello di *costo di trasporto*), è la seguente:

$$\min w$$

$$\sum_{j \in V2} x_j = 2 \tag{1}$$

$$\sum_{j \in V2} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V1 \tag{2}$$

$$y_{ij} <= x_j \qquad \forall i \in V1, \forall j \in V2 \tag{3}$$

$$\sum_{j \in V2} c_{ij} y_{ij} <= w \qquad \forall i \in V1 \tag{4}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall j \in V2$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V1, \forall j \in V2$$

Il vincolo (1) prevede la possibilità di aprire solo 2 hub nell'insieme di siti candidati V2. Il vincolo (2) impone ad ogni terminal in V1 di essere assegnato ad un solo hub in V2. Il vincolo (3) rappresenta il legame tra *location* e *allocation* in quanto si può assegnare un terminal ad un hub (y_{ij} =1) solo se è stato aperto l'hub in quel sito ($x_j = 1$). Il vincolo (4) permette di definire w come un **upper bound** del costo di trasporto tra ogni terminal e l'hub ad esso associato, quindi minimizzando w nella funzione obiettivo, si minimizza il massimo costo. Questo vincolo può essere espresso in maniera esplicita (considerando la Tabella [1]), per il sito candidato **Altus**, come:

$$251.304 y_{AltusArdmore} + 431.864 y_{AltusBartlesville} + 130.536 y_{AltusDuncan} +$$
$$227.772 y_{AltusEdmond} + 308.136 y_{AltusEnid} + 80.216 y_{AltusLawton} +$$
$$405.816 y_{AltusMuskogee} + 208.828 y_{AltusOklahomaCity} + 362.6 y_{AltusPoncaCity} +$$
$$309.616 y_{AltusStillwater} + 367.04 y_{AltusTulsa} <= w$$

Nella figura seguente vengono mostrati i dati utilizzati nell'implementazione **AMPL**, forniti dal problema.

```
data;
set V1 := Altus Ardmore Bartlesville Duncan Edmond Enid Lawton Muskogee
        OklahomaCity PoncaCity Stillwater Tulsa;
set V2 := Altus Ardmore Bartlesville Duncan Edmond Enid Lawton Muskogee
        OklahomaCity PoncaCity Stillwater Tulsa;

param l:
              Altus Ardmore Bartlesville Duncan Edmond  Enid  Lawton Muskogee OklahomaCity PoncaCity Stillwater Tulsa :=
Altus         0.0    169.8   291.8        88.2   153.9  208.2 54.2   274.2    141.1        245.0     209.2      248.0
Ardmore       169.8  0.0     248.6        75.9   112.5  199.0 115.8  230.4    100.5        202.2     162.6      204.6
Bartlesville  291.8  248.6   0.0          231.5  146.0  132.4 238.7  92.2     151.4        70.2      115.0       45.6
Duncan        88.2   75.9    231.5        0.0    93.5   137.5 34.1   213.5    80.9         184.8     145.3      187.8
Edmond        153.9  112.5   146.0        93.5   0.0    88.8  100.7  145.7    14.4         91.9      53.0       102.2
Enid          208.2  199.0   132.4        137.5  88.8   0.0   145.0  166.4    87.6         64.5      65.8       118.4
Lawton        54.2   115.8   238.7        34.1   100.7  145.0 0.0    220.6    88.0         191.9     152.5      194.9
Muskogee      274.2  230.4   92.2         213.5  145.7  166.4 220.6  0.0      140.4        142.5     119.2       48.1
OklahomaCity  141.1  100.5   151.4        80.9   14.4   87.6  88.0   140.4     0.0         104.7     66.6       107.6
PoncaCity     245.0  202.2   70.2         184.8  91.9   64.5  191.9  142.5    104.7        0.0       41.9        96.5
Stillwater    209.2  162.6   115.0        145.3  53.0   65.8  152.5  119.2    66.6         41.9      0.0        71.2
Tulsa         248.0  204.6   45.6         187.8  102.2  118.4 194.9  48.1     107.6        96.5     71.2         0.0;
```

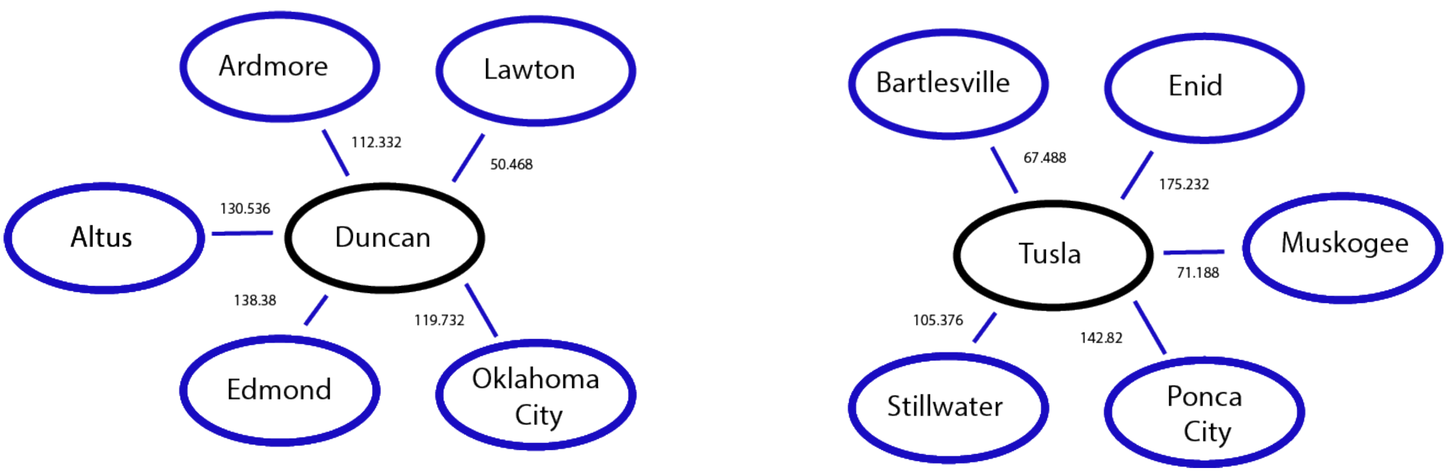
Figura 1: Dati in transportation.dat

La risoluzione del problema è avvenuta tramite il solver **CPLEX**, il quale ha riportato (come visibile in figura sottostante) costo di trasporto **w** pari a 175.232$. Questa soluzione ottimale ha portato all'apertura di due hub situati nei terminal **Duncan** e **Tulsa**. I terminal *Altus*, *Ardmore*, *Duncan*,*Edmond*, *Lawton*, *Oklahoma City* sono assegnati all'hub Duncan, mentre l'hub *Tulsa* serve i terminal *Bartlesville*, *Enid*, *Muskogee*, *Ponca City*, *Stillwater* e *Tulsa*.

```
CPLEX 20.1.0.0: optimal integer solution; objective 175.232
139 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
ampl: display w;
w = 175.232
ampl: display x;
x [*] :=
       Altus  0
     Ardmore  0
Bartlesville  0
      Duncan  1
      Edmond  0
        Enid  0
      Lawton  0
    Muskogee  0
OklahomaCity  0
   PoncaCity  0
  Stillwater  0
       Tulsa  1
;
```

```
ampl: display y;
y [*,*]
# $3 = Bartlesville
# $8 = Muskogee
# $9 = OklahomaCity
# $10 = PoncaCity
# $11 = Stillwater
:            Altus Ardmore  $3 Duncan Edmond Enid Lawton  $8  $9 $10 $11 Tulsa :=
Altus          0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Ardmore        0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Bartlesville   0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
Duncan         0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Edmond         0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Enid           0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
Lawton         0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Muskogee       0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
OklahomaCity   0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
PoncaCity      0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
Stillwater     0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
Tulsa          0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   0    1
;
```

Nella figura seguente viene riportata graficamente la soluzione ottimale prodotta dal solver, identificando con il colore nero i nodi terminal nei quali è stato aperto un hub. Sugli archi tra nodi terminal e nodi hub viene riportato il costo di trasporto c_{ij}.



3 Analisi e soluzione del problema modificato

In questa sezione viene affrontato il problema modificato, nel quale viene richiesto di determinare la posizione dei due hub da aprire, in modo tale da minimizzare il costo totale di trasporto tra i terminal e gli hub ad essi assegnati. In questo contesto vengono presi in considerazione stessi dati di input e variabili decisionali definite per la risoluzione del problema precedente (in Sezione [2]).

La formulazione del problema modificato, la quale può essere vista come la formulazione di un **p-median model** (sostituendo il concetto di *distanza* con quello di *costo di trasporto*), è la seguente:

$$\mathbf{min} \sum_{i \in V1} \sum_{j \in V2} c_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in V2} x_j = 2 \tag{1}$$

$$\sum_{j \in V2} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V1 \tag{2}$$

$$y_{ij} <= x_j \qquad \forall i \in V1, \forall j \in V2 \tag{3}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall j \in V2$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V1, \forall j \in V2$$

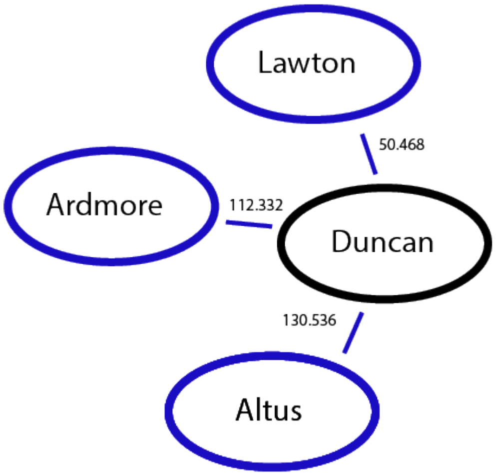
Il problema modificato è risultato essere molto simile a quello definito in precedenza (Sezione [2]). In particolare, si distingue con il modello precedente per la funzione obiettivo e per l'assenza del vincolo (4). I dati utilizzati per la risoluzione del modello sono stati gli stessi presentati in Figura [1].
La risoluzione del problema è avvenuta tramite il solver **CPLEX**, il quale ha riportato (come visibile in figura sottostante) costo totale di trasporto (definito nel file *transportation2.mod* come **m_cost**) pari a 1081.73\$. Questa soluzione ottimale ha portato all'apertura di due hub situati nei terminal **Duncan** e **Stillwater**. I terminal *Altus*, *Ardmore*, *Duncan* e *Lawton*, sono assegnati all'hub **Duncan**, mentre l'hub **Stillwater** serve i terminal *Bartlesville*, *Edmond*, *Enid*, *Muskogee*, *Oklahoma City*, *Ponca City*, *Stillwater* e *Tulsa*.

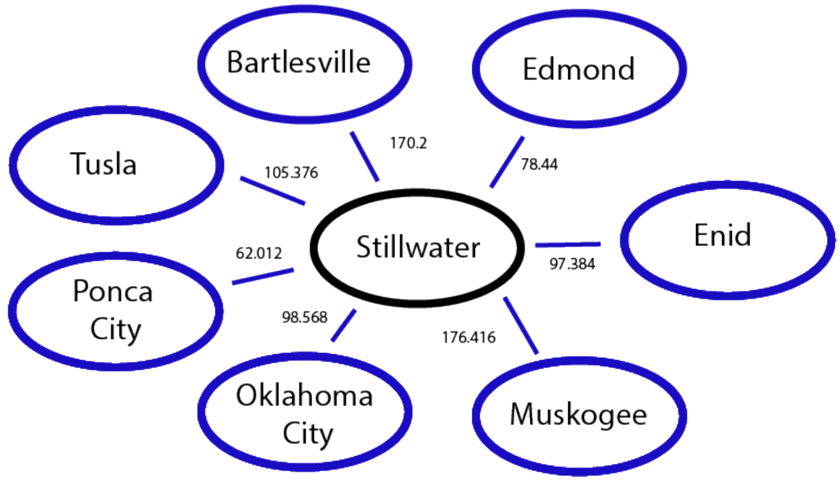
```
CPLEX 20.1.0.0: optimal integer solution; objective 1081.732
53 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
ampl: display m_cost;
m_cost = 1081.73

ampl: display x;
x [*] :=
       Altus  0
     Ardmore  0
Bartlesville  0
      Duncan  1
      Edmond  0
        Enid  0
      Lawton  0
    Muskogee  0
OklahomaCity  0
   PoncaCity  0
  Stillwater  1
       Tulsa  0
;
```

```
ampl: display y;
y [*,*]
# $3 = Bartlesville
# $8 = Muskogee
# $9 = OklahomaCity
# $10 = PoncaCity
# $11 = Stillwater
:            Altus Ardmore  $3 Duncan Edmond Enid Lawton  $8  $9 $10 $11 Tulsa :=
Altus          0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Ardmore        0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Bartlesville   0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
Duncan         0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Edmond         0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
Enid           0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
Lawton         0      0      0    1      0     0     0     0   0   0   0    0
Muskogee       0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
OklahomaCity   0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
PoncaCity      0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
Stillwater     0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
Tulsa          0      0      0    0      0     0     0     0   0   0   1    0
;
```

Nella figura seguente, come fatto per il problema precedente, viene riportata graficamente la soluzione ottimale prodotta dal solver.





Confrontando questa soluzione con quella riportata in Sezione [2], è possibile notare come, seppur cambiando modello (e quindi funzione obiettivo), il terminal Duncan risulta un'ottima scelta per l'apertura di un hub. Tuttavia, la soluzione precedente non è più ottima in questo caso, nel quale viene richiesto di minimizzare il costo totale. Infatti, considerando la combinazione di terminal−hub trovati in precedenza (aprendo hub in Duncan e Tulsa) il costo totale sarebbe stato pari a 1113.552$ (superiore al costo di 1081.73$ riportato dal solver CPLEX), come riportato dalle seguenti operazioni:

$$\begin{aligned}
&2 * 0.74 * 88.2 + && (Altus - Duncan)\\
&2 * 0.74 * 75.9 + && (Ardmore - Duncan)\\
&2 * 0.74 * 45.6 + && (Bartlesville - Tulsa)\\
&2 * 0.74 * 93.5 + && (Edmond - Duncan)\\
&2 * 0.74 * 118.4 + && (Enid - Tulsa)\\
&2 * 0.74 * 34.1 + && (Lawton - Duncan)\\
&2 * 0.74 * 48.1 + && (Muskogee - Tulsa)\\
&2 * 0.74 * 80.9 + && (OklahomaCity - Duncan)\\
&2 * 0.74 * 96.5 + && (PoncaCity - Tulsa)\\
&2 * 0.74 * 71.2 = && (Stillwater - Tulsa)\\
&1113.552 &&
\end{aligned}$$