

Basic Music Theory

A Formalistic Note

Aug 13, 2024

Mepy

Minpows@outlook.com

前言

乐理总学不会怎么办? 仿生人有仿生人的路子, 让我们来 formalize 一下吧! 乐理的 naming convention 非常不好, 这不能赖我, 如三和弦与七和弦, 请自行适应.

音符

文法

$$\begin{aligned}\text{Note } X &:= | Y | \sharp X | \flat X | \natural X \\ Y &:= | C | D | E | F | G | A | B\end{aligned}$$

其中 $\sharp X$ 读作升 X , $\flat X$ 读作降 X , $\natural X$ 读作还原 X .

事实上, Y 只包含了一组音符, 而钢琴上不止一组音符, 大字 2 组的 A 黑 B , 大字 1 组, 大字组, 小字组, 小字 1 组, 小字 2 组, 小字 3 组, 小字 4 组与小字 5 组的 C , 一共 $2 + 1 + 7 * (7 + 5) + 1 = 88$ 个音符, 并按如上顺序分组, 其中 小字 1 组的 C 称为中央 C , 小字 1 组的 A 标准发音频率为 440Hz.

为了更具体地区分音符, 一般有两种记法:

1. 大字组用大写字母, 小字组用小写字母, 大/小字 x 组加上标 x , 例如中央 C 是 c^1
2. 从大字 2 组往右赋予从 0 开始的索引 $i := 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 统一记作 X^i , 例如中央 C 是 C^4 .

在电子音乐软件中, 一般使用第 2 种记法, 但对应索引有偏移, 例如 cubase 与 vocaloid 中 A^3 才对应 440Hz 而非 A^4 , 又如 fl 中 A^5 才对应 440Hz, 请以实际软件音高为准.

语义

取语义域 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, 其上伴有模 12 加法 $+$,

(对应钢琴上一组琴键 7 白+5 黑: 白黑白黑白 白黑白黑白黑白) 有如下语义 $\varphi: \text{Note} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\varphi : \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\
\varphi \quad C &:= 0 \\
\varphi \quad D &:= 2 \\
\varphi \quad E &:= 4 \\
\varphi \quad F &:= 5 \\
\varphi \quad G &:= 7 \\
\varphi \quad A &:= 9 \\
\varphi \quad B &:= 11 \\
\varphi \quad \sharp X &:= (\varphi X) + 1 \\
\varphi \quad \flat X &:= (\varphi X) - 1 \\
\varphi \quad \natural Y &:= \varphi Y \\
\varphi \quad \sharp\sharp X &:= \varphi\sharp X \\
\varphi \quad \flat\flat X &:= \varphi\flat X \\
\varphi \quad \sharp\flat X &:= \varphi\sharp X
\end{aligned}$$

从语义中可以很清晰地看出 \sharp 升 \flat 降 \natural 还原.

另取语义域 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 其上伴有模 7 加法 $+$, (对应钢琴上一组琴键 7 白键) 有如下语义 $\psi : \text{Note} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\psi : \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\
\psi \quad C &:= 0 \\
\psi \quad D &:= 1 \\
\psi \quad E &:= 2 \\
\psi \quad F &:= 3 \\
\psi \quad G &:= 4 \\
\psi \quad A &:= 5 \\
\psi \quad B &:= 6 \\
\psi \quad \sharp X &:= \psi X \\
\psi \quad \flat X &:= \psi X \\
\psi \quad \natural X &:= \psi X
\end{aligned}$$

和声

和声是同时弹奏的不少于二个音符.

音程 : 音符间路程

$$\begin{aligned}
\text{deg} : \text{Note} \times \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z} \text{ with } i : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, i(n) = n \\
\text{deg} \quad (X_1, X_2) &:= i(\psi X_2 - \psi X_1) + 1
\end{aligned}$$

例如 C 到 E 是三度 即 $\text{deg}(C, E) = 3$, 而 E 到 C (下一组的 C) 是六度.

deg 并不足以表述音程的全部属性, 因为有黑键与升降符的存在, 考虑如下映射:

$$\begin{aligned}
\text{keysOf} : \text{Note} \times \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z} \text{ with } i : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, i(n) = n \\
\text{keysOf} \quad (X_1, X_2) &:= i(\varphi X_2 - \varphi X_1) + 1
\end{aligned}$$

$\deg(C, E) = 3, \deg(C, \flat E) = 3$ 但是 $\text{keysOf}(C, E) = 5, \text{keysOf}(C, \flat E) = 4$, 因此我们称前者为大 3 度, 后者为小 3 度.

一般地, 我们有如下称呼(忽略纯 1 度和纯 8 度)

2. 大 2 度 $\text{keysOf} = 3 = \text{keysOf}(C, D)$
3. 大 3 度 $\text{keysOf} = 5 = \text{keysOf}(C, E)$
4. 纯 4 度 $\text{keysOf} = 6 = \text{keysOf}(C, F)$
5. 纯 5 度 $\text{keysOf} = 8 = \text{keysOf}(C, G)$
6. 大 6 度 $\text{keysOf} = 10 = \text{keysOf}(C, A)$
7. 大 7 度 $\text{keysOf} = 12 = \text{keysOf}(C, B)$

上述数字看似无规律, 实则确实无甚规律, 这是一组琴键 7 白 5 黑的 12 平均律导致的.

需要注意的是, 大/纯的区别我也没搞懂, 先这么对称地记着先.

显然, 由于升降音符的存在, keysOf 的值会比上述大/纯的高或低, 因此有如下规律:

- 倍减/减/小/大/增/倍增
- 倍减/减/纯/增/倍增

往左依次-1, 往右依次+1

例如 $D, \flat G$ 是减 4 度, 因为 $\deg(D, \flat G) = 4, \text{keysOf}(D, \flat G) = 5$.

三和弦

三和弦是指同时弹奏的三个音符, 且三者间音程均为三度, 并且根据三度的情况有如下区分:

- 大三和弦: 大三度+小三度
- 小三和弦: 小三度+大三度
- 增三和弦: 大三度+大三度
- 减三和弦: 小三度+小三度

例如 C, E, G 是大三和弦, 因为 C, E 是大三度+ E, G 是小三度.

我们一般把这种和弦中的三个音透过 ψ 再排序, 依次称作根音、三音与五音, 上述例子中 C 是根音, E 是三音, G 是五音, 因为 $\deg(C, E) = 3, \deg(C, G) = 5$. 需要注意的是, E, G, C 中 C (下一组 C) 仍然是根音, 因为我们需要透过 ψ 再排序, E, G, C 即所谓转位和弦 C/E .

对于三和弦, 我们只需其根音以及属性(大小增减)便可唯一确认该三和弦, 有如下记法:
(显然这并不是一个很好的命名风格, 但 convention 如此)

- 大三和弦 $C = C, E, G$
- 小三和弦 $Cm = C, \flat E, G$
- 增三和弦 $Caug = C, E, \sharp G$
- 减三和弦 $Cdim = C, \flat E, \flat G$

例如 E, G, B 是小三和弦 Em .

(七声)调式

什么是调式? 相对地取定的一组 C, D, E, F, G, A, B , 在十二键中取定的八度便是调式.

考虑音符集 Note, 我们不考虑大/小字几组这一差异, 调式是相对音高而非绝对音高, 这是**相对地**.

音符集 Note 内, 由于升降音符的存在, 我们有不同的 C , 例如 $C, \sharp C, \flat C$ 等等, 也有不同的 D, E, \dots, B , 从中选定一组这样的 C, \dots, B .

例如, 自然 C 大调便选取了 C, D, E, F, G, A, B (全为原音符, 无升无降);

又如, 自然 A 小调便选取了 A, B, C, D, E, F, G , 注意此时 A, B 与 C, D, E, F, G 不在同一组键中.

所谓的自然大调, 便是指keysOf依次为3, 3, 2, 3, 3, 3, 2 的调式, 即所谓全全半全全全半;

所谓的自然小调, 便是指keysOf依次为3, 2, 3, 3, 2, 3, 3的调式, 即所谓全半全全半全全.

注意, keysOf为了凑齐 7 个, 第 8 个音符比第 1 个音符 (主音) 高 8 度, 即所谓 C, D, E, F, G, A, B, C .

- 自然 C 大调 C, D, E, F, G, A, B
- 自然 D 大调 $D, E, \sharp F, G, A, B, \sharp C$
- 自然 E 大调 $E, \sharp F, \sharp G, A, B, \sharp C, \sharp D$
- 自然 F 大调 $F, G, A, \flat B, C, D, E$
- 自然 G 大调 $G, A, B, C, D, E, \sharp F$
- 自然 A 大调 $A, B, \sharp C, D, E, \sharp F, \sharp G$
- 自然 B 大调 $B, \sharp C, \sharp D, E, \sharp F, \sharp G, \sharp A$

练习: 写出自然 $\flat D$ 大调、自然 $\flat E$ 大调、自然 $\flat G$ 大调、自然 $\flat A$ 大调、自然 $\flat B$ 大调.

(注意: $\flat D$ 与 $\sharp C$ 是同一个黑键, 对于黑键作为根音的自然大调, 我们一般选用 \flat , 其书写较为简洁.)

按顺序分别称为(乐名) 主音 上主音 中音 下属音 属音 上中音 导音 所谓的五度圈, 令人感叹.

TODO

1. 删去还原 \natural