

Inoffizielles Script zur Vorlesung Algebra 1 für IST, Prof. Schmidt

Mitwirkende Autoren:

Mic92

chaosbastler

js75

Revision: 9. November 2011

Dieses Script wird fortlaufend mit den Vorlesungen erweitert. Es lohnt sich also ab und an nach Updates zu schauen.

Mitarbeit ist natürlich erwünscht, weitere Informationen auf der Projektseite:

<https://github.com/Mic92/Algebra-I>

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----------|
| 1 Mengen | 3 |
| 1.1 Grundlegendes | 3 |
| 1.2 Mächtigkeit von Mengen | 4 |
| 2 Abbildungen | 6 |
| 2.1 Definition | 6 |
| 2.2 Kern einer Funktion | 7 |
| 2.2.1 Beispiel | 7 |
| 2.3 Typen von Abbildungen | 8 |
| 2.4 Mächtigkeit einer Abbildung | 9 |

1 Mengen

1.1 Grundlegendes

Was ist eine Menge?

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit.

Die Reihenfolge der Elemente ist irrelevant. Jedes Element ist einzigartig.

Seien A und B Elemente, dann gilt:

$$A = B \Leftrightarrow \{A, B\} = \{A\} \quad (1)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow \{A, B\} \neq \{A\} \quad (2)$$

D.h. gleiche Elemente werden in Mengen nur einmal gezählt. 2 Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

Besondere Mengen

Die Menge, die keine Elemente enthält, wird als die *leere Menge* bezeichnet, das Symbol hierfür ist: $\{\}$ oder \emptyset .

Die *Potenzmenge* ist die Vereinigung aller Teilmengen einer Menge. Sie wird mit $P(A)$ oder 2^A bezeichnet. Jede Potenzmenge enthält die leere Menge als Element.

Def.: $P(A) := \{U \mid U \subseteq A\}$

Beispiel: $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

1.2 Mächtigkeit von Mengen

Für endliche (abzählbare) Mengen ist die Mächtigkeit gleichzusetzen mit der Anzahl der Elemente einer Menge. Für unendliche (nicht abzählbare) Mengen müssen andere Definitionen getroffen werden, um deren Mächtigkeit zu beschreiben.

Man schreibt: $|A|$ oder $\#A$

Es gilt: $|2^A| = 2^{|A|}$

Satz von Cantor Die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge A ist stets größer als die Mächtigkeit der Menge A selber:

$$|2^A| > |A|$$

Dies gilt insbesondere für die leere Menge, da $2^0 > 0$. Außerdem ist für sämtliche endliche Mengen klar: $2^n > n$. Auch bei unendlichen Mengen lässt sich die Gültigkeit des Satzes zeigen.

Gleichmächtigkeit

Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann heißt A gleichmächtig zur Menge B , wenn eine Bijektion ($f : A \rightarrow B$) gebildet werden kann. Das bedeutet, dass eine Vorschrift existiert, welches jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet. Dabei werden alle Elemente der Menge B einmal erfasst. Diese Vorschrift ist umkehrbar.

Man schreibt: $\#A = \#B$ bzw. $|A| = |B|$

Beispiele: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$

Jede Menge, die gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, wird als *abzählbar* bezeichnet. Die Mächtigkeit der reellen Zahlen hingegen wird als *überabzählbar* bezeichnet.

Erläuterung zu $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$: Der Einwand, dass die natürlichen Zahlen doch “offensichtlich” (von der 0 abgesehen) doppelt so viele sein müssten, wie die ganzen Zahlen zählt bei diesen unendlichen Mengen nicht! Stattdessen sollte man an die Definition

der Gleichmächtigkeit denken: 2 Mengen sind dann gleich, wenn es eine eindeutige(bijektive) Abbildung gibt. Es werden also die 0 auf die 0, die ungeraden Zahlen auf die positiven Zahlen und die geraden Zahlen auf die negativen Zahlen abgebildet. Dies ist aufgrund der Unendlichkeit der beiden Mengen ohne Probleme möglich.

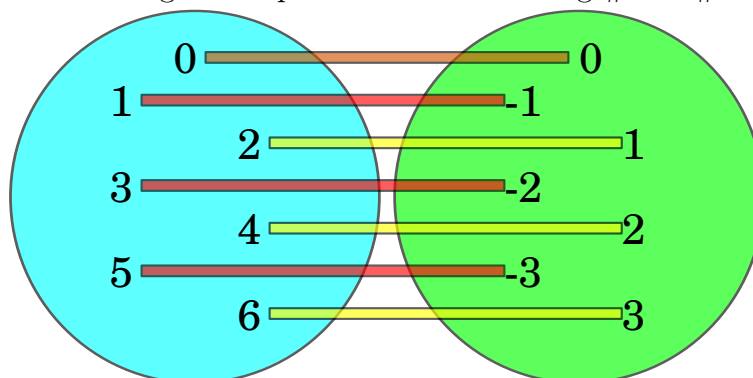
Auch für die rationalen Zahlen lässt sich ein solches Schema für eine Bijektion finden. Hierauf geht ein Wikipedia-Artikel näher ein:

http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erstes_Diagonalargument

Und auch bei der Frage, warum die reellen Zahlen nicht abzählbar sind, hilft Wikipedia:

http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument

Abbildung 1: Beispiel für eine Abbildung $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$



2 Abbildungen

2.1 Definition

Seien A und B zwei Mengen. Dann ist eine *Abbildung* eine eindeutige Vorschrift, die jedem Element aus A genau ein Element aus B zuordnet. Eine andere Bezeichnung für Abbildung ist *Funktion*.

Die Menge A wird als *Definitionsbereich* bezeichnet.

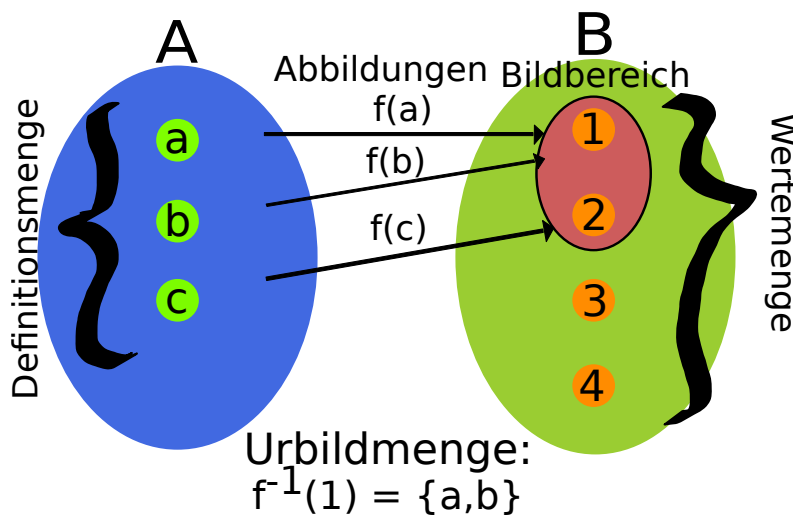
Die Menge B wird als *Wertebereich* bezeichnet.

Der *Bildbereich* wird definiert als $f^{[A]} := \{b \mid b = f(a), a \in A\}$. Er ist Untermenge des *Wertebereichs*. Bei surjektiven Abbildungen ist der Bildbereich gleich dem Definitionsbereich.

Von bijektiven Funktionen kann eine *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \rightarrow A$ gebildet werden. Deswegen bezeichnet bijektive Funktionen auch als *invertierbar*.

Diese ist nicht zu verwechseln mit dem *Urbild*, was ähnlich geschrieben wird.

Beispiel



Hinweis: Der Begriff *Wertemenge* kann als Synonym sowohl für die *Zielmenge* als auch für den *Bildbereich* verwendet werden. In diesem Skript sind *Zielmenge* und *Wertemenge* identisch, der *Bildbereich* ist somit eine Teilmenge der *Wertemenge*.

2.2 Kern einer Funktion

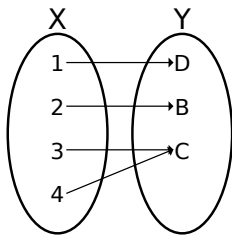
Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildungsvorschrift. Dann ist:

$$\ker(f) := \{(a, b) \mid f(a) = f(b)\}$$

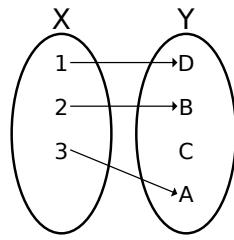
eine Menge, der sogenannte Kern von f .

2.2.1 Beispiel

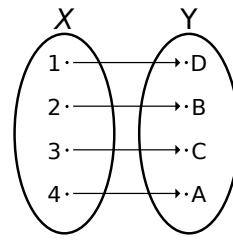
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \\ \ker(f) &= \{(a, b) \mid f(a) = f(b)\} \\ &= \{(a, b) \mid a^2 = b^2\} \\ &= \{(a, b) \mid |a| = |b|\} \end{aligned}$$



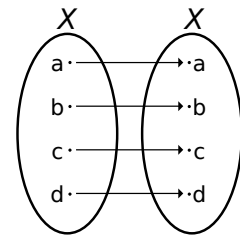
(a) surjektive Abbildung



(b) injektive Abbildung



(c) bijektive Abbildungen



(d) identische Abbildungen

2.3 Typen von Abbildungen

Seien A und B zwei Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildungsvorschrift. Dann gibt es 3 besondere Typen von Abbildungen:

surjektive Abbildung *alle* Elemente von B mindestens einmal erfassen

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

injektive Abbildungen alle Elemente von A erhalten *unterschiedliche* Elemente aus B

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

bijektive Abbildungen *surjektiv und injektiv* zu gleich: alle A erhalten genau ein B und alle B werden getroffen. Dies impliziert die Umkehrbarkeit der Funktion. Eine Sonderform der bijektiven Abbildung ist die *Identität*. Dabei wird jedes Element sich selbst zugeordnet.

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$$

2.4 Mächtigkeit einer Abbildung

Seien A und B Mengen. Dann bezeichnet B^A oder $\text{Map}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B .

Satz: Für A, B endliche Mengen gilt:

$$|B^A| = |A|^{|B|}$$

bijektive Abbildungen Mächtigkeit aller bijektiven Abbildungen entspricht einer *Permutation*:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \\ (|A|)! &= (|B|)! \end{aligned}$$

injektive Abbildungen Die Mächtigkeit aller injektiven Abbildungen entspricht einer *Variation* ohne Zurücklegen:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \\ a &= |A| \quad b = |B| \\ \binom{b}{a} * a! &= \frac{b!}{(b-a)!} \end{aligned}$$

surjektive Abbildung Die Mächtigkeit aller surjektiven Abbildungen lässt sich mithilfe der Stirlingzahl 2. Art ($S_{n,r}$) berechnen.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \\ a &= |A| \quad b = |B| \\ b! \cdot S_{(a,b)} \\ S(a, b) &= \frac{1}{b!} \sum_{j=1}^b (-1)^{b-j} \binom{b}{j} j^a \end{aligned}$$