1 Mengen

1.1 Grundlegendes

Was ist eine Menge?

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit. Die Reihenfolge der Elemente ist irrelevant. Jedes Element ist einzigartig.
Seien A und B Elemente, dann gilt:

$$A = B \Leftrightarrow \{A, B\} = \{A\} \tag{1}$$

$$A \neq B \Leftrightarrow \{A, B\} \neq \{A\} \tag{2}$$

D.h. gleiche Elemente werden in Mengen nur einmal gezählt. 2 Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

Besondere Mengen

Die Menge, die keine Elemente enthält, wird als die *leere Menge* bezeichnet, das Symbol hierfür ist: $\{\}$ oder $\emptyset$.
Die *Potenzmenge* ist die Vereinigung aller Teilmengen einer Menge. Sie wird mit $P(A)$ oder 2^A bezeichnet. Jede Potenzmenge enthält die leere Menge als Element.

Def.: $P(A) := \{U | U \subseteq A\}$

Beispiel: $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, A\}$

1.2 Mächtigkeit von Mengen

Für endliche (abzählbare) Mengen ist die Mächtigkeit gleichzusetzen mit der Anzahl der Elemente einer Menge. Für unendliche (nicht abzählbare) Mengen müssen andere Definitionen getroffen werden, um deren Mächtigkeit zu beschreiben.

Man schreibt: $|A|$ oder $\#A$

Es gilt: $|2^A| = 2^{|A|}$

Gleichmächtigkeit

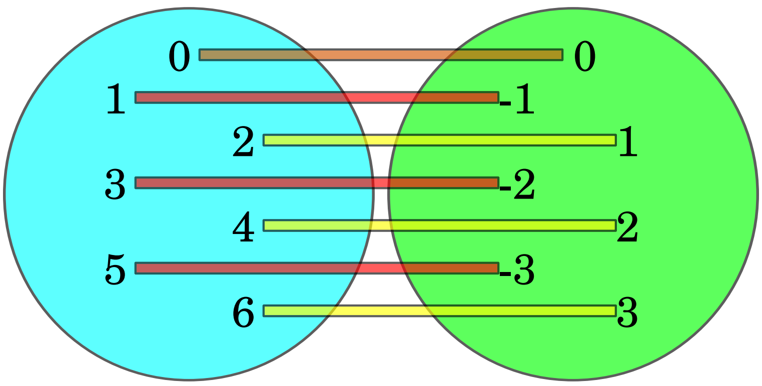
Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann heißt A gleichmächtig zur Menge B, wenn eine Bijektion ($f : A \to B$) gebildet werden kann. Das bedeutet, dass eine Vorschrift existiert, welches jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet. Dabei werden alle Elemente der Menge B einmal erfasst. Diese Vorschrift ist umkehrbar.

Man schreibt: $\#A = \#B$ bzw. $|A| = |B|$

Beispiele: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$
Jede Menge, die gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, wird als *abzählbar* bezeichnet. Die Mächtigkeit der reelen Zahlen hingegen wird als *überabzählbar* bezeichnet.

Erläuterung zu $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$: Der Einwand, dass die natürlichen Zahlen doch 'offensichtlich' (von der 0 abgesehen) doppelt so viele seien müssten, wie die ganzen Zahlen

Abbildung 1: Beispiel für eine Abbildung $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$



zählt bei diesen unendlichen Mengen nicht! Stattdessen sollte man an die Definition der Gleichmächtigkeit denken: 2 Mengen sind dann gleich, wenn man eine eineindeutige(bijektive) Abbildung finden kann. Es werden also die 0 auf die 0, die ungeraden Zahlen auf die positiven Zahlen und die geraden Zahlen auf die negativen Zahlen abgebildet. Dies ist aufgrund der Unendlichkeit der beiden Mengen ohne Probleme möglich.
Auch für die rationalen Zahlen lässt sich ein solches Schema für eine Bijektion finden. Hierauf geht ein Wikipedia-Artikel näher ein:
http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erstes_Diagonalargument
Und auch bei der Frage, warum die reellen Zahlen nicht abzählbar sind, hilft Wikipedia:
http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument

2 Abbildungen

2.1 Definition

Seien A und B zwei Mengen. Dann ist eine *Abbildung* ein eindeutige Vorschrift, die jedem Element aus A genau ein Element aus B zuordnet. Ein andere Bezeichnung für Abbildung ist *Funktion*.
Die Menge A wird als *Defintionsbereich* bezeichnet.
Die Menge B wird als *Wertebereich* bezeichnet.
Der *Bildbereich* wird definiert als $f^{[A]} := \{b|b = f(a), a \in A\}$
Von bijektiven Funktionen kann eine *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ gebildet werden.
Diese ist nicht zu verwechseln mit dem *Urbild*, was ähnlich geschrieben wird. [1]

Beispiele

Hier müssen noch Beispiele eingefügt werden.

[1] Grafik mit den Mengen zum Beispiel $f^{-1}(c) = \{a, b, c\}$ wird noch erstellt.

2.2 Kern einer Funktion

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildungsvorschrift. Dann ist:

$$ker(f) := \{(a,b)|f(a) = f(b)\}$$

eine Menge, der sogenannte Kern von f.

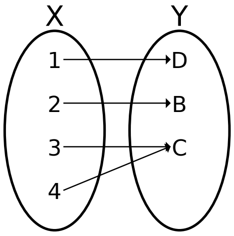
2.2.1 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

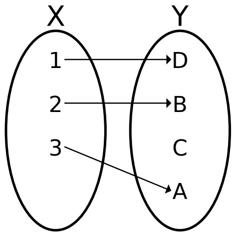
$$ker(f) = \{(a,b)|f(a) = f(b)\} =$$

$$= \{(a,b)|a^2 = b^2\} =$$

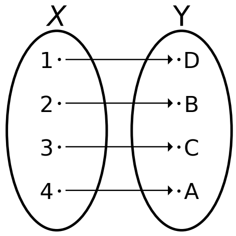
$$= \{(a,b)||a| = |b|\}$$



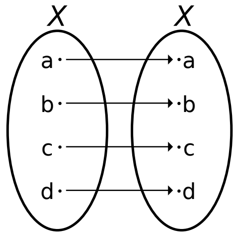
(a) surjektive Abbildung



(b) injektive Abbildung



(c) bijektive Abbildungen



(d) identische Abbildungen

2.3 Typen von Abbildungen

Seinen A und B zwei Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildungsvorschrift. Dann gibt es 3 besondere Typen von Abbildungen:

surjektive Abbildung *alle* Elemente von B mindestens einmal erfassen

injektive Abbildungen alle Elemente von A erhalten *unterschiedliche* Elemente aus B

bijektive Abbildungen *surjektiv und injektiv* zu gleich: alle A erhalten genau ein B und alle B werden getroffen. Dies impliziert die Umkehrbarkeit der Funktion. Eine Sonderform der bijektiven Abbildung ist die *Identität*. Dabei wird jedes Element sich selbst zugeordnet.

2.4 Mächtigkeit einer Abbildung

Seien A und B Mengen. Dann bezeichnet B^A oder $Map(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B.

Satz: Für A, B endliche Mengen gilt:

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$