Prof. Stefan E. Schmidt, Ulrike Püschmann Wintersemester 2011/2012

Algebra für Informationssystemtechnik – 1. Übungsblatt

Die Übungsblätter werden zukünftig nicht mehr in der Übung ausgeteilt. Sie können unter `http://tu-dresden.de/Members/ulrike.pueschmann/lehre` heruntergeladen und dann selbst ausgedruckt werden.

Aufgabe 1. Die Potenzmenge $\wp(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Gesucht ist $\wp(\{a,b,c\})$ sowie der Durchschnitt von $\wp(\{a,b,c\})$ mit $\wp(\{a,b,c,d,e,f,g\})$.

Aufgabe 2. Geben Sie die Potenzmenge der Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge an. Gesucht sind weiterhin Durchschnitt und Vereinigung dieser Menge mit der Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge. Welche Mächtigkeit hat $\wp(\wp(\wp(\wp(\varnothing))))$?

Aufgabe 3. Wieviele fünfelementige Teilmengen hat eine neunelementige Menge? Wieviele vierelementige Teilmengen hat sie?

Aufgabe 4. Beweisen Sie, ohne die rechte Seite tatsächlich auszurechnen, dass die folgende Gleichung gilt. Benutzen Sie dazu ihr Wissen über Potenzmengen.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aufgabe 5. Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $A_1, \dots, A_n$ Mengen. Ihr kartesisches Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$ ist die Menge aller n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. (Ist eines der A_i leer, so ist auch das kartesische Produkt die leere Menge.) Berechnen Sie W_3 als $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$. Zeichnen Sie ein Diagramm für W_3 wie folgt: Jedes der Elemente in W_3 wird durch genau einen Knoten dargestellt. Zwei Knoten (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3) werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $\#\{a_1, b_1\} + \#\{a_2, b_2\} + \#\{a_3, b_3\} = 4$ gilt.

Aufgabe 6. In einem Königreich leben n Ritter. Je zwei von ihnen sind entweder ein Paar von Freunden oder ein Paar von Feinden. Jeder Ritter hat genau drei Feinde. Im Königreich gilt das Gesetz: „Ein Feind meines Freundes ist auch mein Feind“. Bestimme die Zahlen n, für die das möglich ist.

Aufgabe 7. (Hausaufgabe, 10 Punkte. Lösung bitte zu Beginn der nächsten Übung abgeben.)
Es sei M die Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$. Gesucht sind nichtleere Teilmengen $A_1, \dots, A_{12}$ von M, für die gilt:

$$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3) \setminus A_4 = \varnothing$$
$$((A_5 \setminus A_6) \cup A_7) \cap A_8 = A_6$$
$$((A_9 \cap A_{10}) \setminus A_{11}) \cup A_{12} = M$$