

Progetto per Complementi di Meccanica

Simone Gallo, Giulio Zingrillo

30 marzo 2023

1 Introduzione

Il doppio pendolo è un sistema fisico che può essere schematizzato come costituito da due pendoli attaccati, entrambi composti da un filo inestensibile privo di massa ed un punto materiale presente all'estremità e liberi di oscillare attorno al proprio punto di vincolo. L'evoluzione di questo sistema è particolarmente sensibile alle piccole variazioni delle condizioni iniziali e, per determinati valori dell'energia, il moto finale risulta caotico.

L'idea principale dietro questo progetto è quella di raffrontare il moto di più pendoli doppi aventi una piccola variazione della situazione iniziale proprio per evidenziare la natura fortemente caotica di questo sistema. Oltretutto, è anche presente l'opzione di simulazione di un singolo pendolo con la possibilità di scegliere l'angolo iniziale a piacer così da poter notare la sua evoluzione anche quando l'angolo iniziale non è piccolo, ossia non approssimabile con un sistema lineare.

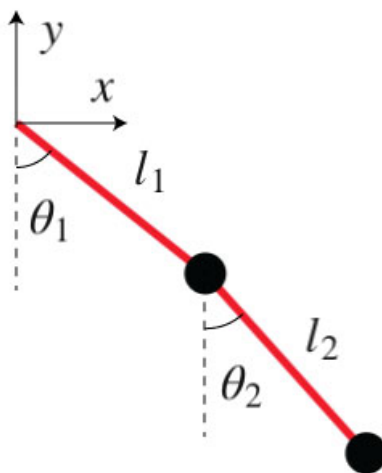
Nell'applicativo sviluppato, proposto come progetto, è possibile selezionare non solo il numero di doppi pendoli da generare ma anche le lunghezze l_1 e l_2 delle due aste prive di massa di cui sono composti i doppi pendoli, le masse m_1 e m_2 posizionate precisamente all'estremità delle due aste ed infine gli angoli iniziali θ_1 e θ_2 .

2 Doppio Pendolo

Quando gli angoli iniziali non sono piccoli nel doppio pendolo il sistema si comporta in maniera caotica, ossia è particolarmente sensibile alle piccole variazioni dei dati iniziali. Per determinare le equazioni del doppio pendolo non conviene utilizzare la meccanica Newtoniana bensì quella Lagrangiana.

Il punto fisso O verrà considerato come l'origine del sistema cartesiano con l'asse x e y diretti orizzontalmente e verticalmente come in figura, con θ_1 e θ_2 indico gli angoli che le aste formano con l'asse y . Con x_1, y_1 , x_2 e y_2 indico, rispettivamente, le posizioni della prima e della seconda massa.

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \quad y_1 = -l_1 \cos(\theta_1)$$



$$x_2 = x_1 + l_2 \sin(\theta_2) \quad y_2 = y_1 - l_2 \cos(\theta_2)$$

Derivando rispetto al tempo ottengo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è data da $L = T - V$, dove T e V sono, rispettivamente, l'energia cinetica e potenziale del sistema. L'energia cinetica T è data da:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 v [(l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

Mentre l'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Utilizzando l'equazione di Eulero - Lagrange possiamo ottenere due equazioni differenziali

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin(\theta_1) - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2^2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \end{aligned}$$

3 Applicazione

L'applicativo web che abbiamo progettato è stato sviluppato in javascript per quanto riguarda la gestione dei dati forniti dal menu iniziale, l'implementazione delle classi sia per il doppio che per il singolo pendolo (e dunque anche l'integrazione numerica mediante il metodo di eulero) ed infine l'animazione del movimento del doppio pendolo. Invece, il markup language HTML, insieme a CSS, è stato adoperato per sviluppare l'UI dell'applicazione. Il progetto è [open source](#) e può essere visualizzato al seguente [link](#).

3.1 Metodo di Eulero

Nel menu iniziale è possibile scegliere il metodo di integrazione numerica utilizzato per risolvere l'equazione differenziale. Il metodo di Eulero è una procedura numerica del primo ordine appartenente alla famiglia dei metodi Runge Kutta, in cui l'errore generale è $O(h)$, utilizzata per risolvere le equazioni differenziali ordinarie (ODE).

Supponendo di voler approssimare la soluzione del problema di Cauchy:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad y(t_0) = y_0$$

discretizzando la variabile t , quindi definendo $t_n = t_0 + nh$, con h la dimensione di ogni intervallo. Tra t_n e $t_{n+1} = t_n + h$ il comportamento della soluzione può essere approssimato stimando:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

Per un'equazione differenziale di ordine N :

$$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t))$$

si introducono le variabili ausiliari $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, \dots , $z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$ in modo da ottenere l'equazione equivalente:

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}'(t) \\ z_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \\ y^{(N)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \\ f(t, z_1(t), \dots, z_N(t)) \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema del primo ordine nella variabile $\mathbf{z}(t)$, e può essere approssimato col metodo di Eulero o con qualsiasi altro metodo per sistemi del primo ordine.

3.2 Metodi Runge Kutta

Il metodo Runge Kutta del secondo ordine, in cui l'errore generale è $O(h^2)$.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, y) \\ k_2 &= hf(t + h, y + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \end{aligned}$$

Il metodo Runge Kutta del terzo ordine, in cui l'errore generale è $O(h^3)$.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, y) \\ k_2 &= hf(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t + h, y + 2k_2 - k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \end{aligned}$$

Un altro metodo utilizzato per l'integrazione numerica è il metodo Runge-Kutta del quarto ordine, ossia un metodo in cui l'errore generale è $O(h^4)$. Il metodo è ragionevolmente robusto, solido e semplice da implementare ed è per questi motivi uno dei migliori candidati per l'integrazione numerica. Vengono calcolati più incrementi basati su punti diversi dell'intervallo considerato.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, y) \\ k_2 &= hf(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(t + h, y + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5) \end{aligned}$$