

Progetto finale del Corso di Complementi di Matematica

Simone Gallo, Giulio Zingrillo

Ottobre 2023

1 — Introduzione

Il progetto che proponiamo analizza il sistema fisico del doppio pendolo, mettendone in luce in particolare il comportamento caotico. L'utente può selezionare diversi parametri per la simulazione (vedi APPLICATIVO) e scegliere quanti pendoli generare. Ogni pendolo ha, rispetto a tutti gli altri, piccole differenze nelle condizioni iniziali. Tali differenze, che evidenziamo raffrontando le traiettorie, portano queste ultime a essere completamente estranee le une alle altre nel giro di poco tempo. Nella progettazione prima e nella trattazione poi, abbiamo dedicato particolare attenzione all'integrazione numerica, al modello fisico e alla concezione di un lavoro che fosse il più possibile *cross-platform* e accessibile.

2 — Integrazione numerica

Nel nostro lavoro abbiamo utilizzato, per l'integrazione numerica, i metodi Runge-Kutta espliciti di ordine da 1 a 4. Supponiamo di avere un sistema non autonomo di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo $y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt$ che, con la regola del trapezio, diviene:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1)$$

Nota come *regola del trapezio implicito*, l'equazione è alla base dei metodi di Runge-Kutta (1895).

Riportiamo di seguito un prospetto dei metodi utilizzati:

2.1 Primo ordine

$$k_1 = f(t, y) \\ y_{n+1} = y_n + h * k_1$$

con k_1 incremento basato sulla pendenza all'inizio dell'intervallo, utilizzando y_n . Questo metodo è meglio noto come *metodo di Eulero*.

Per un'equazione differenziale di ordine N :

$$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t))$$

si introducono le variabili ausiliari $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, \dots , $z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$ in modo da ottenere l'equazione equivalente:

$$z'(t) = (z)_1'(t) : z_{N-1}'(t) z_N'(t) = (y)'(t) : y^{(N-1)}(t) y^{(N)}(t) = (z)_2(t) : z_N(t) f(t, z_1(t), \dots, z_N(t))$$

2.2 Secondo ordine

$$k_1 = f(t, y) \\ k_2 = f(t + h, y + k_1 * h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} * k_1 + \frac{h}{2} * k_2$$

con k_1 incremento basato sulla pendenza all'inizio dell'intervallo, utilizzando y_n e k_2 incremento basato sulla pendenza alla fine dell'intervallo, utilizzando k_1 .

2.3 Terzo ordine

$$k_1 = f(t, y) \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1 * h}{2}) \\ k_3 = f(t + h, y + 2 * k_2 * h - k_1 * h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} * k_1 + \frac{2h}{3} * k_2 + \frac{h}{6} * k_3$$

con k_1 incremento basato sulla pendenza all'inizio dell'intervallo, utilizzando y_n , k_2 incremento basato sulla pendenza a metà dell'intervallo, utilizzando k_1 , e k_3 relativo alla fine dell'intervallo, utilizzando su k_1 e k_2 .

2.4 Quarto ordine

$$k_1 = f(t, y) \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1 * h}{2}) \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2 * h}{2}) \\ k_4 = f(t + h, y + k_3 * h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} * k_1 + \frac{2h}{3} * k_2 + \frac{h}{6} * k_3$$

con k_1 incremento basato sulla pendenza all'inizio dell'intervallo, utilizzando y_n , k_2 incremento basato sulla pendenza a metà dell'intervallo, utilizzando k_1 , k_3 incremento basato sulla pendenza a metà dell'intervallo, utilizzando k_2 , e k_4 basato sulla pendenza alla fine dell'intervallo, utilizzando su k_4 .

2.5 Metodo di Adams-Bashforth

Per l'integrazione numerica dell'equazione differenziale del sistema fisico relativo al singolo pendolo

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

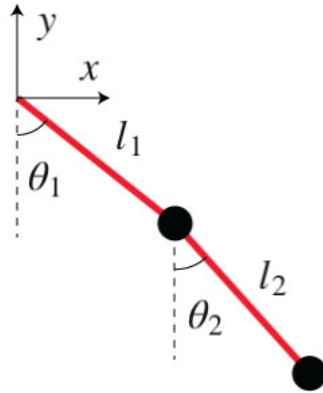
abbiamo utilizzato il metodo di Adams-Bashforth di ordine 2. Tale metodo, pubblicato nel 1883 è esplicito e multimodale. Un metodo si dice multimodale se non si basa, per l'approssimazione numerica, solo sulle condizioni iniziali, ma considera anche uno o più istanti precedenti. Nello specifico, il metodo in oggetto determina il punto successivo y_{n+1} non solo in funzione di y_n ma anche di y_{n-1} , come riportato di seguito:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf(t_n, y_n) - \frac{1}{2}hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

3 — Modello fisico - Meccanica Lagrangiana

Consideriamo il moto sul piano cartesiano di origine O, con assi diretti come in figura. Indichiamo con:

- θ_1 e θ_2 gli angoli che le aste formano con l'asse y ;
- x_1, y_1, x_2 e y_2 le posizioni delle aste;
- l_1 e l_2 le lunghezze delle aste.



$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin(\theta_1) & y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1) \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin(\theta_2) & y_2 &= y_1 - l_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo ottengo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è data da $L = T - V$, dove T e V sono, rispettivamente, l'energia cinetica e potenziale del sistema. L'energia cinetica T è data da:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 v [(l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

Mentre l'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Utilizzando l'equazione di Eulero - Lagrange possiamo ottenere due equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) \\ \ddot{\theta}_1 &= \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin(\theta_1) - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (l_2 \dot{\theta}_2^2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2^2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \end{aligned}$$

4 — Applicativo

In fase di progettazione dell'applicativo, ci siamo posti l'obiettivo di realizzare un lavoro che fosse accessibile e fruibile per un pubblico il più possibile ampio. Per questo motivo abbiamo utilizzato la lingua inglese. Inoltre, abbiamo utilizzato le tecnologie web, che ci permettevano di mostrare il progetto, con minime variazioni *hardware-dependent*, su tutti i dispositivi connessi a Internet senza richiedere l'installazione di applicativi esterni, o conoscenze specifiche da parte dell'utente. Per le animazioni, l'integrazione numerica e l'acquisizione dell'input ci siamo serviti del linguaggio JavaScript; per la User Interface dell'applicazione abbiamo utilizzato il linguaggio di markup HTML con regole CSS.

Riportiamo di seguito i parametri che l'utente può fornire in input, con i relativi estremi sinistro e destro. Gli estremi sono da considerarsi inclusi. Tutti i campi accettano solo valori interi.

Parametro	Valore minimo	Valore massimo	Note
Pendolo	1	2	Discrimina se l'utente intende graficare un pendolo singolo o doppio.
Time Step	50	200	Imposta il time step della simulazione.
Traccia la traiettoria	0	1	Se selezionato, permette di simulare un solo pendolo, di cui traccia la traiettoria in tempo reale. Al termine della simulazione, il pendolo scompare e l'intera traiettoria viene mostrata a video. È inoltre possibile scaricare la traiettoria del pendolo in formato png .
Numero di pendoli	1	20	Definisce il numero di pendoli da graficare. Se il parametro <i>Traccia la traiettoria</i> è selezionato, vale sempre 1.
Massa 1	1	30	Definisce la massa, in kg, del corpo posto all'estremità della prima asta.
Massa 2	1	30	Definisce la massa, in kg, del corpo posto all'estremità della seconda asta. È selezionabile solo se <i>Pendolo</i> vale 2.

Lunghezza 1	40	120	Definisce la lunghezza, in cm, della prima asta.
Lunghezza 2	40	120	Definisce la lunghezza, in cm, della seconda asta. È selezionabile solo se <i>Pendolo</i> vale 2.
Angolo Iniziale 1	-180	180	Definisce l'angolo iniziale, in gradi, della prima asta con l'asse y .
Angolo Iniziale 2	-180	180	Definisce l'angolo iniziale, in gradi, della seconda asta con l'asse y . È selezionabile solo se <i>Pendolo</i> vale 2.
RK	1	4	Specifica l'ordine del metodo di Runge Kutta da utilizzare. È selezionabile solo se <i>Pendolo</i> vale 2, dal momento che per il pendolo singolo viene utilizzato sempre Adams-Bashforth.

Oltre alla simulazione, l'applicativo restituisce:

- Un file **csv** con i valori, nel tempo, dell'angolo o degli angoli del pendolo, che sono utilizzati nell'integrazione numerica. Vengono inoltre mostrati a video i relativi grafici;
- Un file **csv** con i valori, nel tempo, dell'energia totale del sistema, ottenuti tramite integrazione numerica. Viene inoltre mostrato a video il relativo grafico. Una piccola variazione dei valori dell'energia totale è garanzia di una buona simulazione;
- Un file **csv** con gli spazi delle fasi dei due angoli. Vengono inoltre mostrati a video i relativi grafici;

- Un file **png** con la traiettoria tracciata dal pendolo singolo o dal pendolo doppio.

Il progetto è open source e può essere visualizzato al seguente link.