Комбинаторика

Конспект по книге "Комбинаторика - Я. Н. Виленкин (и др.) 2006 г."

3 января 2023 г.

Содержание

1 Общие правила комбинаторики **1**

1.1 Правило суммы 1

1.2 Правило произведения 1

1.3 Пример. Задача на домино. 1

1.4 Размещения с повторением 2

1.5 Пример. Задача на доставку писем. 2

1.6 Формула включений и исключений 2

1.7 Пример. Решето Эратосфена. 3

1.8 Пример. Знающие иностранные языки. 3

1 Общие правила комбинаторики

1.1 Правило суммы

Определение без использования множеств можно описать так:

> Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор **"либо A, либо B"** можно осуществить $m + n$ способами.

При том, при использовании этого правила нужно следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с способом выбора объекта B, иначе эти совпадения следует вычесть из общего результата: $m + n - k$, где k – количество совпадающих способов выбора.

1.2 Правило произведения

Определение:

> Если объект A можно выбрать m способами, и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары $(A; B)$ в указанном порядке можно осуществить mn способами.

Конечно, при наличии различных $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ элементов, которые можно выбрать последовательно способами $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$, и пользуясь математической индукцией, количество выборов последовательностей $(a_1; a_2; a_3; ...; a_k)$ можно рассчитать как $n_1 n_2 n_3 ... n_k$.

1.3 Пример. Задача на домино.

Текст задачи:

> Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т.е. чтобы какое-то число встречалась на обоих костях)

Для решения попробуем сначала выбрать первую кость:

- Мы можем выбрать один из 7 дублей: [0|0], [1|1], [2|2], [3|3], [4|4], [5|5], [6|6]
- Мы можем выбрать любую из 21 остальных костей с разными числами на концах ([0|1], ..., $[5, 6]$)

Далее попробуем выбрать вторую кость к первой в зависимости от выбранного ранее варианта

- Если мы выбрали один из 7 дублей вида $[X|X]$, то к нему нам подойдет одна из 6 костей вида $[X|0]$, ..., $[X|6]$ (кроме кости $[X|X]$, ведь её мы уже взяли)
- Если мы выбрали "обычную"кость вида $[X|Y]$, то к ней существует 6 других костей с X ($[X|0]$, ..., $[X|6]$, за исключением $[X|Y]$) и 6 других костей с Y ($[Y|0]$, ..., $[Y|6]$, за исключением $[X|Y]$), то есть всего 12 различных костей

Итого, по правилу произведения при выборе дубля в качестве первой кости получаем $7*6 = 42$ варианта, а во втором случае получаем $21*12 = 252$ варианта последовательного выбора двух костей. По правилу сложения: $42 + 252 = 294$.

Однако, учтем также, что порядок выбора не играет роли, то есть в нашем ответе варианты продублированы (взять $[0|0]$, а потом $[0|1]$ – это то же самое, что взять $[0|1]$, а потом $[0|0]$), так что итоговое количество вариантов равняется $\frac{294}{2} = 147$.

1.4 Размещения с повторением

Грубо говоря, это определение частного случая, которое вытекает из правила произведения:

> Упорядоченная выборка k элементов с повторениями из выборки n элементов называется **размещением с повторениями** из n элементов по k мест, и рассчитывается по формуле:
>
> $$\overline{A}_n^k = n^k$$

Простейший пример использования: расчет количества допустимых вариантов для k-битного слова/числа (в данном случае будет $n = 2$, так как мы говорим о двоичной системе счисления)

1.5 Пример. Задача на доставку писем.

Текст задачи:

> Требуется срочно доставить 6 писем разным адресатам. Сколькими способами это можно сделать, если можно послать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров? (Порядок доставки не играет роли)

Решение максимально простое:

$$\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729$$

Важно только обратить внимание, что фактически требуется распределить курьеров по письмам, а не наоборот, так как мы вполне можем распределить одного курьера на все 6 писем, а при распределении $\overline{A}_6^3$ мы бы фактически распределили по одному письму каждому из 3 курьеров (более того, был бы реален случай, что двум курьерам дано одно письмо), что, очевидно, ошибочно.

1.6 Формула включений и исключений

Пусть у нас есть задача, в которой предметы могут обладать различными свойствами $a_1, a_2, ..., a_n$, при том предметов с одинаковым набором свойств может быть несколько. Количество таких предметов с одинаковыми свойствами будем обозначать как $N(a_i a_j ... a_k)$, а отрицание какого-либо свойства будем обозначать черной над ним: $N(a_i \overline{a_j} ... a_k)$.

> Для нахождения количества всех предметов $N(\overline{a_1} \overline{a_2} ... \overline{a_n})$, не удовлетворяющих ни одному свойству, применяется формула:

$$\begin{aligned}
N(\overline{a_1} \overline{a_2} ... \overline{a_n}) = N & \\
& - N(a_1) - N(a_2) - ... - N(a_n) \\
& + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + ... + N(a_1 a_n) + N(a_2 a_3) + ... + N(a_{n-1} a_n) \\
& - N(a_1 a_2 a_3) - N(a_1 a_2 a_4) - ... - N(a_{n-2} a_{n-1} a_n) \\
& + ... + (-1)^n N(a_1 a_2 ... a_n)
\end{aligned}$$

То есть попеременно вычитаются количества предметов с четным количеством свойств и вычитаются с нечетным количеством свойств. Для $n = 3$ формула будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} N(\overline{a_1}\overline{a_2}\overline{a_3}) = N \\ & - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) \\ & + N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + N(a_2a_3) \\ & - N(a_1a_2a_3) \end{aligned}$$

Также формулу можно использовать интерпретировать для случая, когда необходимо исследовать предметы, обладающие конкретным свойством a_n:

$$\begin{aligned} N(\overline{a_1}\overline{a_2}...\overline{a_{n-1}}a_n) = N(a_n) \\ & - N(a_1a_n) - ... - N(a_1n-1a_n) \\ & + N(a_1a_2a_n) - ... - N(a_{n-2}a_{n-1}a_n) \\ & + ... + (-1)^{n-1}N(a_1a_2...a_{n-1}a_n) \end{aligned}$$

Та же формула при $n = 3$:

$$\begin{aligned} N(\overline{a_1}\overline{a_2}a_3) = N(a_3) \\ & - N(a_1a_3) - N(a_2a_3) \\ & + N(a_1a_2a_3) \end{aligned}$$

1.7 Пример. Решето Эратосфена.

Данная задача использует идею решета Эратосфена, но мы используем его не для всех чисел. Текст задачи:

Сколько чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7?

Обозначим за a_x свойство деления на x, а a_5 и a_7 – свойство деления на 5 и на 7 соответственно.
Тогда найдем количество чисел, делящихся на 5, 7 и $5 * 7 = 35$:

- $N(a_5) = 1000/5 = 200$
- $N(a_7) = 1000/7 = 142$ (с округлением вниз)
- $N(a_5a_7) = \frac{1000}{5*7} = 28$ (с округлением вниз)

Тогда итоговый результат $N(\overline{a_5}\overline{a_7}) = 1000 - 200 - 142 + 28 = 686$.

1.8 Пример. Знающие иностранные языки.

В некотором отделе: 6 человек знают английский, 7 – французский, 6 – немецкий, 2 знают английский и французский, 4 – английский и немецкий, 3 – французский и немецкий, 1 человек знает все 3 языка.

Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык?

Обозначим свойства буквами названия языка на английском: a_e, a_f, a_g
Общее количество человек рассчитаем по формуле:

$$N = N(a_e) + N(a_f) + N(a_g) - N(a_ea_f) - N(a_ea_g) - N(a_fa_g) + N(a_ea_fa_g) = 6 + 7 + 6 - 2 - 4 - 3 + 1 = 11$$

.

Знающих только английский язык (свойство a_e) рассчитаем по формуле:

$$N(a_e\overline{a_f}\overline{a_g}) = N(a_e) - N(a_ea_f) - N(a_ea_g) + N(a_ea_fa_g) = 6 - 2 - 4 + 1 = 1$$