4 Tarifierung und Credibility-Theorie

Prämien werden auf der Basis der erwarteten Schadenhöhe (sowie des Schwankungsrisikos) berechnet. I.d.R. sind Versicherungsportfolios inhomogen, d.h. unterschiedliche Policen haben eine unterschiedliche Schadenerwartung. Daher werden Risikomerkmale zur Tarifierung herangezogen. Das Gesamtportfolio wird also in *Risikoklassen* zerlegt, d.h. in Teilportfolios, die aus Policen mit (näherungsweise) gleichen Risikomerkmalen und daher (hoffentlich) auch mit gleichen Schadenerwartungen bestehen.

Für die mathematische Behandlung der Tarifierung unter Berücksichtigung von Risikomerkmalen ist es hilfreich, die Merkmale als Zufallsvariablen aufzufassen, deren zufällige Ausprägungen vom Versicherungsunternehmen beobachtet werden können, während die Realisation der Schadenhöhe natürlich nicht im Voraus bekannt ist. (Dies kann man z.B. so interpretieren, dass aus dem Gesamtportfolio eine Police zufällig ausgewählt wird, so dass die Ausprägung des Risikomerkmals damit auch zufällig ist.) Die für die Policen einer Risikoklasse angemessene Nettorisikoprämie ergibt sich dann als *faktorisierter bedingter Erwartungswert*.

Bezeichnet also X die zufällige Schadenhöhe für die betrachtete Police in der nächsten Versicherungsperiode und Y eine Zufallsvariable auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in einem Messraum $(S, \mathcal{D})$, deren Realisation $y \in S$ beobachtet werden kann, so ist die individuelle Nettorisikoprämie für dieses Risiko gerade $E(X \mid Y = y)$. Soll zusätzlich ein angemessener Risikozuschlag erhoben werden, so kann man z.B. die individuelle Prämie als $H(Z_y)$ berechnen, wobei H ein Prämienkalkulationsprinzip ist und Z_y eine Zufallsvariable, deren Verteilung gerade gleich der faktorisierten bedingten Verteilung $P^{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$ ist.

Die tatsächliche Bestimmung dieser individuellen Prämie nach diesem Schema kann aus mehreren Gründen schwierig sein. Zum einen sind bedingte Erwartungswerte nicht immer leicht zu berechnen. Wenn aber z.B. X und Y gemeinsam eine Dichte bzgl. eines Produktmaßes haben, so kann die faktorisierte bedingte Verteilung und sie daraus abgeleitete individuelle Prämie mit Hilfe bedingter Dichten bestimmt werden (s. Kurzskript zur Maßtheorie, Satz und Definition 5.7), wobei ggf. Integrale numerisch zu berechnen sind.

Gravierender sind jedoch statistische Probleme. Wie bereits im ersten Kapitel erwähnt, können die Risikomerkmale oft sehr viele verschiedene Ausprägungen annehmen. Die naheliegende Idee, $E(X \mid Y = y)$ nur aus den Schadenhöhen der Policen mit Merkmalsausprägung y zu schätzen, wird daher i.d.R. daran scheitern, dass es nur sehr wenige solche Policen gibt. Es ist daher nötig, weitere Modellannahmen einzuführen, die es z.B. erlauben, aus den Schadenhöhen von Policen mit "ähnlichen" Merkmalsausprägungen $\tilde{y}$ auf den bedingten Erwartungswert $E(X \mid Y = y)$ zu schließen. Derartige Modellierungsansätze und gebräuchliche Schätzer werden in der Vorlesung zur *Aktuariellen Statistik* behandelt und sollen hier nicht weiter diskutiert werden.

Erfahrungstarifierung

Im folgenden sei vorausgesetzt, dass bereits Risikoklassen gebildet und für jede Klasse eine faire Nettorisikoprämie bestimmt worden sind. Wir betrachten nun eine feste Risikoklasse und bezeichnen die faire Nettorisikoprämie für ein Risiko mit zufälliger Schadenhöhe mit $E(X)$ (statt mit $E(X \mid Y = y)$), da innerhalb der Klasse nur noch eine Ausprägung der für die Tarifierung verwendeten Risikomerkmale möglich ist. (Formal bedeutet dies, dass wir statt des Erwartungswerts unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{A})$ den Erwartungswert unter dem bedingten Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_y = P^{Id|Y=y}$ betrachten, wobei Id die Identität auf Ω bezeichne; vgl. Kurzskript zur Maßtheorie, p. 21f.)

In der Regel unterscheiden sich nun aber auch die versicherten Risiken innerhalb dieser Risikoklasse in ihrer Risikostruktur, weil nicht alle relevanten Risikomerkmale bei der Einteilung in Risikoklassen berücksichtigt worden sind. Als mögliche Gründe dafür sind zu nennen:

- Relevante Merkmale sind nicht direkt beobachtbar oder vom Versicherungsnehmer leicht zu manipulieren (z.B. Risikoverhalten der versicherten Person bei Unfallversicherungen oder die Art der Verwendung des Fahrzeugs bei Kfz-Versicherungen).
- Die Verwendung gewisser Merkmale kann rechtlich unzulässig sein (Stichwort Diskriminierungsverbot), ist den Versicherungsnehmern schlecht vermittelbar oder wird als ungünstig für das Image der Versicherungsunternehmens angesehen (z.B. Geschlecht des Fahrers bei Kfz-Versicherungen).
- Die Relevanz des Risikomerkmals wird vom Versicherungsunternehmen nicht erkannt oder ist aufgrund des beschränkten Datenmaterials nicht statistisch signifikant.
- Das Merkmal wird bewusst vernachlässigt, um den Versicherungstarif einfacher zu gestalten.

Sind die Inhomogenitäten innerhalb der Risikoklasse hinreichend groß, so werden "schlechte Risiken" im langfristigen Mittel signifikant höhere Schäden verursachen als die "guten Risiken". Die *Credibility-Theorie* stellt mathematische Methoden zur Verfügung, die es erlauben, die zunächst einheitliche Nettorisikoprämie $E(X)$ auf der Basis der später beobachteten Schadenhöhen so zu differenzieren, dass für jede Police eine dem tatsächlichen Risiko angemessene (oder zumindest angemessenere) Prämie zu zahlen ist. Die Grundidee der Credibility-Theorie wurde Ende der 60er Jahre von Bühlmann entwickelt, seitdem vielfach verfeinert und verallgemeinert und zählt heute zum Standardrepertoire der Versicherungspraxis.

Im folgenden bezeichnet Θ eine Zv., die bei der Einteilung der Risikoklassen *nicht* berücksichtigte Risikomerkmale beschreibt. P^Θ beschreibt dann die Verteilung dieser Risikomerkmale bei einer zufällig aus der betrachteten Risikoklasse ausgewählten Police. Die Zv. Θ wird als *Risikoparameter* bezeichnet, P^Θ als *Strukturverteilung*. Gilt bei einer bestimmten Police $\Theta = \vartheta$, so wäre $E(X \mid \Theta = \vartheta)$ die angemessene Nettorisikoprämie. Da aber das zufällige Risikomerkmal Θ i.d.R. nicht beobachtet werden kann, kann diese Prämie so nicht erhoben werden. Vielmehr versucht man, anhand der für diese feste Police in n vergangenen Perioden beobachteten Schadenhöhen $X_1, \ldots, X_n$ eine möglichst gute Approximation für die unbekannte Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta = \vartheta)$ für das in der $(n+1)$-ten Periode versicherte Risiko X_{n+1} zu berechnen, oder aber direkt eine möglichst gute Prognose für die zukünftige zufällige Schadenhöhe X_{n+1}. (In manchen Zusammenhängen sind die X_i auch als Schadenzahlen zu interpretieren.)

In diesem Kapitel werden wir i.d.R. eine der folgenden beiden Annahme machen:

4.1 Voraussetzung *Die Zv.* $X_1, \ldots, X_{n+1}$ *sind bedingt unabhängig gegeben* $\Theta = \vartheta$, *d.h.*

$$P^{(X_1,\ldots,X_{n+1})|\Theta=\vartheta} = \bigotimes_{i=1}^{n+1} P^{X_i|\Theta=\vartheta} \qquad \text{für } P^{\Theta}\text{-f.a. } \vartheta, \tag{4.1}$$

oder bedingt unkorreliert gegeben $\Theta = \vartheta$, *d.h. für alle* $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ *gilt*

$$E(X_i \cdot X_j \mid \Theta = \vartheta) = E(X_i \mid \Theta = \vartheta) \cdot E(X_j \mid \Theta = \vartheta) \qquad \text{für } P^{\Theta}\text{-f.a. } \vartheta. \tag{4.2}$$

4.2 Bemerkung Die bedingte Unabhängigkeit impliziert die bedingte Unkorreliertheit, falls $E(X_i^2) < \infty$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. □

Da die individuelle Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ für die $(n+1)$-te Versicherungsperiode in Abhängigkeit des Risikomerkmals Θ nicht beobachtbar ist, liegt es nahe, die beste beobachtbare Approximation zu verwenden. Im Fall $E(X_{n+1}^2) < \infty$ ist dies (im Sinn einer L_2-Approximation) gemäß Satz 5.12 des Kurzskripts zur Maßtheorie unter der Bedingung (4.1) gerade

$$\begin{aligned} E\big(E(X_{n+1} \mid \Theta) \mid X_1, \ldots, X_n\big) &= E\big(E(X_{n+1} \mid \Theta, X_1, \ldots, X_n) \mid X_1, \ldots, X_n\big) \\ &= E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) \qquad P\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

wobei für die Gleichungen Satz 5.9 (xiii) bzw. (xi) des Kurzskripts zur Maßtheorie verwendet worden sind. Die beste Approximation für die individuelle Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ ist also zugleich auch die beste Approximation (Vorhersage) für die zukünftige Schadenhöhe X_{n+1}.

4.3 Definition $E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n)$ *heißt* **Bayes-Prämie** *für* X_{n+1}. □

Man beachte, dass die Bayes-Prämie von dem angenommenen stochastischen Modell für P^{Θ} und $P^{(X_1,\ldots,X_{n+1})|\Theta}$ abhängt, auch wenn Θ in der Definition formal nicht mehr auftritt.

4.4 Beispiel Hängen die Unterschiede zwischen den Gesamtschadenhöhen unterschiedlicher Policen in einer Periode in erster Linie von der Anzahl der Schäden ab, die für die Policen anfallen, so liegt es nahe, als X_i die Zahl der Schäden anzusetzen. Sei im folgenden

$$P^{X_i|\Theta=\vartheta} = \mathcal{P}_{\vartheta},$$

d.h. die Schadenzahlen seien bedingt Poisson-verteilt, wobei der Risikoparameter Θ die erwartete Zahl von Schäden angibt. Die nicht beobachtbare individuelle "Nettorisikoprämie" ist dann gegeben durch

$$E(X_{n+1} \mid \Theta) = \Theta.$$

Sei nun $P^{\Theta} = \Gamma_{\alpha,\beta}$ eine Gamma-Verteilung mit Dichte $\gamma_{\alpha,\beta}$. Die beste Approximation der bedingten erwarteten Schadenzahl $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ beruhend auf den beobachteten Schadenzahlen ist dann

$$E(\Theta \mid X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = \frac{E\big(\Theta 1_{\{(k_1,\ldots,k_n)\}}(X_1, \ldots, X_n)\big)}{P\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n\}}.$$

Unter Voraussetzung (4.1) erhält man mit Satz 5.15 des Kurzskripts zur Maßtheorie

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n\} \\
&= \int P^{(X_1,\dots,X_n)|\Theta=\vartheta}\{(k_1,\dots,k_n)\}\, P^{\Theta}(d\vartheta) \\
&= \int \prod_{i=1}^{n} P^{X_i|\Theta=\vartheta}\{k_i\}\, P^{\Theta}(d\vartheta) \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} \Big(\mathrm{e}^{-\vartheta}\frac{\vartheta^{k_i}}{k_i!}\Big) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\vartheta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\vartheta}\, d\vartheta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n k_i!}\int_0^\infty \vartheta^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+\beta)\vartheta}\, d\vartheta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n k_i!}\cdot\frac{\Gamma\big(\sum_{i=1}^n k_i+\alpha\big)}{(n+\beta)^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha}}\cdot\int_0^\infty \gamma_{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha,n+\beta}(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n k_i!}\cdot\frac{\Gamma\big(\sum_{i=1}^n k_i+\alpha\big)}{(n+\beta)^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha}}
\end{aligned}
$$

und mit Hilfe von Satz 5.9 (i) und (ix) des Kurzskripts zur Maßtheorie und analogen Rechnungen wie oben

$$
\begin{aligned}
E\big(\Theta 1_{\{(k_1,\dots,k_n)\}}(X_1,\dots,X_n)\big) &= E\Big(E\big(\Theta 1_{\{(k_1,\dots,k_n)\}}(X_1,\dots,X_n)\mid\Theta\big)\Big) \\
&= E\Big(\Theta P\big(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n\mid\Theta\big)\Big) \\
&= \int_0^\infty \vartheta\prod_{i=1}^{n}\Big(\mathrm{e}^{-\vartheta}\frac{\vartheta^{k_i}}{k_i!}\Big)\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\vartheta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\vartheta}\, d\vartheta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n k_i!}\cdot\frac{\Gamma\big(\sum_{i=1}^n k_i+\alpha+1\big)}{(n+\beta)^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha+1}}.
\end{aligned}
$$

Zusammen ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
E(\Theta\mid X_1=k_1,\dots,X_n=k_n) &= \frac{\Gamma\big(\sum_{i=1}^n k_i+\alpha+1\big)}{\Gamma\big(\sum_{i=1}^n k_i+\alpha\big)}\cdot\frac{(n+\beta)^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha}}{(n+\beta)^{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha+1}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha}{n+\beta}.
\end{aligned}
$$

Hätte man keinerlei Schadenerfahrung vorliegen, so würde man die erwartete Schadenzahl als $E(X_{n+1}) = E(\Theta) = \alpha/\beta$ annehmen. Würde man die erwartete Schadenzahl nur anhand der beobachteten Schadenzahlen schätzen, so erhielte man $\bar{k}_n := \sum_{i=1}^n k_i/n$. Die oben berechnete Approximation

$$
\frac{\sum_{i=1}^n k_i+\alpha}{n+\beta} = \frac{n}{n+\beta}\bar{k}_n + \frac{\beta}{n+\beta}E(\Theta)
$$

ist also gerade eine Konvexkombination dieser beiden Extremfälle, wobei den Beobachtungen umso mehr Gewicht zugemessen wird, je mehr Beobachtungswerte vorliegen. Für $n\to\infty$ konvergiert dieses Gewicht $n/(n+\beta)$ gegen 1.

Diese Konvexkombination kann nun entweder direkt zur Berechnung von Zu- bzw. Abschlägen (auf die Prämie $E(\Theta)$) in Form eines Bonus-/Malus-Systems verwendet werden oder für eine Zuordnung zu einem System von Schadenfreiheitsklassen, die dann ein neues Risikomerkmal definieren. □

Oft ist die Bayes-Prämie (als bedingter Erwartungswert) nicht explizit berechenbar. Daher hat Bühlmann 1967 vorgeschlagen, statt dessen die beste Approximation von $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ (oder X_{n+1}) zu betrachten, die sich als (affin) *lineare* Funktion der Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ darstellen lässt. Im folgenden soll zunächst ein allgemeines Resultat über die beste lineare Approximation einer beliebigen quadratintegrierbaren Zv. M vorgestellt werden.

4.5 Definition *Seien $M, X_1, \ldots, X_n$ Zv. mit $E(M^2) < \infty$ und $E(X_i^2) < \infty$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Eine Zv. Y der Form*

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

heißt **(lineare) Credibility-Prämie** *oder* **(linearer) Credibility-Schätzer** *von M (auf der Basis von $X_1, \ldots, X_n$), falls*

$$E((Y-M)^2) = \inf_{\tilde{Y}} E((\tilde{Y}-M)^2),$$

wobei das Infimum über alle Zv. $\tilde{Y}$ der Form (4.3) *gebildet wird.* □

4.6 Bemerkung Manchmal wird die Bayes-Prämie auch als (exakte) Credibility-Prämie bezeichnet, so dass man dann die in Definition 4.5 definierte Prämie zur Unterscheidung als lineare Credibility-Prämie bezeichnen muss. □

Der Credibility-Schätzer lässt sich (analog zu Bemerkung 5.12 des Kurzskripts zur Maßtheorie) auch wie folgt geometrisch interpretieren: Y ist die orthogonale Projektion der Zv. M auf den von $1, X_1, \ldots, X_n$ aufgespannten linearen Unterraum des Raums L_2 der quadratintegrierbaren Zv. (also der Zv. vom Typ (4.3)), der mit dem "Skalarprodukt" $\langle X, Y \rangle := E(XY)$ versehen wird. Im Gegensatz zum Bayes-Schätzer $E(M \mid X_1, \ldots, X_n)$, der gemäß Bemerkung 5.12 des Kurzskripts zur Maßtheorie die Orthogonalprojektion von M auf den Unterraum aller *messbaren* Funktionen von $X_1, \ldots, X_n$ ist, betrachten wir hier also die Orthogonalprojektion auf den kleineren Unterraum der *affin linearen* Funktionen von $X_1, \ldots, X_n$. (Streng genommen muss man hier wie üblich zu den Äquivalenzklassen der P-f.s. identischen Zv. übergehen; vgl. Bemerkung 5.12 des Kurzskripts zur Maßtheorie.)

Bekanntlich besitzt die orthogonale Projektion von M ja gerade den minimalen Abstand zu M unter allen Punkten im linearen Unterraum, ist also gleich dem (P-f.s. eindeutig bestimmten) Credibility-Schätzer von M. Die Bedingung, dass $Y - M$ senkrecht auf dem von $1, X_1, \ldots, X_n$ aufgespannten linearen Unterraum stehen muss, liefert ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_i.

4.7 Satz *(i) Eine Zv. Y der Form* (4.3) *ist genau dann ein Credibility-Schätzer für M, falls sie die folgenden* **Normalgleichungen** *erfüllt:*

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(M) \\ Cov(Y, X_i) &= Cov(M, X_i) \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \end{aligned} \tag{4.4}$$

(ii) Sind Zv. $Y, \tilde{Y}$ der Form (4.3) *Lösungen von* (4.4), *so gilt $Y = \tilde{Y}$ P-f.s. und*

$$Cov(Y, M) = Var(Y) = Var(M) - Var(Y - M).$$

□

BEWEIS. (i) Zunächst nehmen wir an, dass $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$ das Gleichungssystem (4.4) erfüllt. Dann gilt für jede Zv. $Z = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i$

$$\begin{aligned} E\big((M - Y) \cdot (Y - Z)\big) &= (a_0 - b_0) E(M - Y) + \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) E\big((M - Y) X_i\big) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) Cov(M - Y, X_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} E\big((M - Z)^2\big) &= E\big((M - Y + Y - Z)^2\big) \\ &= E\big((M - Y)^2\big) + E\big((Y - Z)^2\big) \\ &\geqslant E\big((M - Y)^2\big), \end{aligned} \tag{4.5}$$

d.h. Y minimiert $Z \mapsto E\big((M - Z)^2\big)$.

Ist umgekehrt Y eine Zv. der Form (4.3), die $E\big((M - Y)^2\big)$ minimiert, so gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und alle Z der Form (4.3)

$$\begin{aligned} E\big((M - Y)^2\big) &\leqslant E\big((M - Y - \varepsilon Z)^2\big) \\ &= E\big((M - Y)^2\big) - 2\varepsilon E((M - Y) Z) + \varepsilon^2 E(Z^2), \end{aligned}$$

und somit $2\varepsilon E((M - Y)Z) \leqslant \varepsilon^2 E(Z^2)$. Wäre nun $E((M - Y)Z)$ von 0 verschieden und wählte man ε so, dass es das gleiche Vorzeichen wie $E((M - Y)Z)$ hat, so folgt $2|E((M - Y)Z)| \leqslant |\varepsilon| E(Z^2)$, woraus man für $\varepsilon \to 0$ sofort einen Widerspruch zu $E((M - Y)Z) \neq 0$ erhält, d.h. es muss $E((M - Y)Z) = 0$ gelten. Speziell für $Z = 1$ bzw. $Z = X_i - E(X_i)$ liefert dies gerade die Normalgleichungen (4.4).

(ii) Da nach (i) Y und $\tilde{Y}$ beide $E((M - Y)^2)$ minimieren, folgt aus (4.5), dass $E((Y - \tilde{Y})^2) = 0$ gelten muss, d.h. $Y = \tilde{Y}$ P-f.s.

Ferner folgt für $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$ aus (4.4)

$$\begin{aligned} Var(Y) &= Cov\Big(Y, a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i Cov(Y, X_i) \\ &= Cov(M, a_0) + \sum_{i=1}^n a_i Cov(M, X_i) \\ &= Cov(M, Y). \end{aligned}$$

Wendet man (4.5) mit $Z = E(M) = E(Y)$ an, so erhält man schließlich

$$Var(M) = E((M - Y)^2) + Var(Y) = Var(M - Y) + Var(Y). \qquad \square$$

4.8 Bemerkung Die Gleichung (4.5) lässt sich auch als Anwendung des Satzes von Pythagoras im Raum $(L_2, \|\cdot\|_2)$ interpretieren:

$$\|M - Z\|_2^2 = \|M - Y\|_2^2 + \|Y - Z\|_2^2. \qquad \square$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \\ \mathbf{X} &:= (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \\ E(\mathbf{X}) &:= (E(X_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \\ Cov(\mathbf{X}) &:= (Cov(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \\ Cov(M, \mathbf{X}) &:= (Cov(M, X_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}, \end{aligned}$$

so lassen sich die Normalgleichungen schreiben als

$$\begin{aligned} a_0 + \mathbf{a}'E(\mathbf{X}) &= E(M) \\ \mathbf{a}'Cov(\mathbf{X}) &= Cov(M, \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Ist $Cov(\mathbf{X})$ invertierbar, so erhält man als eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \big(Cov(\mathbf{X})\big)^{-1} \cdot \big(Cov(M, \mathbf{X})\big)' \\ a_0 &= E(M) - \mathbf{a}'E(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Ist $Cov(\mathbf{X})$ nicht invertierbar (d.h. sind die Zv. $1, X_1, \ldots, X_n$ als Vektoren im L_2 nicht linear unabhängig), so ist die Lösung für a_0 und $\mathbf{a}$ zwar nicht eindeutig; sie existiert aber stets, und der durch eine Lösung definierte der Credibility-Schätzer ist als Orthogonalprojektion von M auf den von $1, X_1, \ldots, X_n$ aufgespannten linearen Unterraum dennoch eindeutig bestimmt.

Die allgemeinen Resultate sollen nun verwendet werden, um möglichst gute Vorhersagen für X_{n+1} zu konstruieren, die nur affin linear von $X_1, \ldots, X_n$ abhängen, d.h. wir betrachten nun den Fall $M = X_{n+1}$. Unter geeigneten Annahmen an die bedingte Verteilung von $X_1, \ldots, X_{n+1}$ gegeben Θ kann man die Credibility-Prämie dann explizit bestimmen.

4.9 Satz (Credibility-Prämie im Bühlmann-Modell) *Seien $X_1, \ldots, X_{n+1}$ bedingt unkorreliert gegeben Θ mit identischen ersten beiden bedingten Momenten, d.h. es gilt* (4.2) *und*

$$\begin{aligned} \mu(\Theta) &:= E(X_1 \mid \Theta) = E(X_i \mid \Theta) \\ \sigma^2(\Theta) &:= Var(X_1 \mid \Theta) = Var(X_i \mid \Theta) \quad P\text{-f.s.} \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n+1. \end{aligned}$$

Gilt $Var(\mu(\Theta)) \in (0, \infty)$ und $E(\sigma^2(\Theta)) < \infty$, so ist

$$Y = \frac{n}{n+\kappa}\bar{X}_n + \frac{\kappa}{n+\kappa}E(X_{n+1})$$

mit

$$\kappa = \frac{E(\sigma^2(\Theta))}{Var(\mu(\Theta))} \quad \textit{und} \quad \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein Credibility-Schätzer für X_{n+1}. □

4.10 Bemerkung Das Gewicht $n/(n+\kappa)$ wird *Credibility-Faktor* genannt und quantifiziert das Vertrauen (Credibility), die man zum Zweck der Prämiengestaltung in die Schadenerfahrung setzen sollte. Dieses ist groß, wenn viele Beobachtungen vorliegen (also n groß ist) oder κ klein ist. Letzteres ist der Fall, wenn die Variabilität $\sigma^2(\Theta)$ der Schadenhöhen bei festem Risikoparameter im Mittel klein ist (so dass die vergangenen Schäden viel Information über den unbekannten Risikoparameter enthalten) oder die bedingte erwartete Schadenhöhe $\mu(\Theta)$ mit dem Risikoparameter stark variiert (und daher $E(X_{n+1})$ eine schlechte Approximation der individuellen Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ ist). □

Beweis. Wir müssen nachweisen, dass die Normalgleichungen durch Y gemäß (4.3) mit $a_0 = E(X_{n+1})\kappa/(n+\kappa)$ und $a_i = 1/(n+\kappa)$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ gelöst werden. Da wegen Satz 5.9 (i) des Kurzskripts zur Maßtheorie und der bedingten Unkorreliertheit der X_i für $i \neq j$

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \\ &= E\big(E(X_iX_j \mid \Theta)\big) - E\big(E(X_i \mid \Theta)\big)E\big(E(X_j \mid \Theta)\big) \\ &= E(\mu^2(\Theta)) - \big(E(\mu(\Theta))\big)^2 \\ &= Var(\mu(\Theta)) \end{aligned}$$

und

$$Var(X_i) = Var(E(X_i \mid \Theta)) + E(Var(X_i \mid \Theta)) = Var(\mu(\Theta)) + E(\sigma^2(\Theta))$$

gilt, lauten die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j E(X_j) &= E(X_{n+1}) \\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} a_j Var(\mu(\Theta)) + a_i\big(Var(\mu(\Theta)) + E(\sigma^2(\Theta))\big) &= Var(\mu(\Theta)) \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt daher wegen

$$\frac{\kappa}{n+\kappa}E(X_{n+1}) + \frac{1}{n+\kappa}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(\mu(\Theta)) = E(X_{n+1})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Var(\mu(\Theta)) + a_i E(\sigma^2(\Theta)) = \frac{n}{n+\kappa}Var(\mu(\Theta)) + \frac{\kappa}{n+\kappa}Var(\mu(\Theta)) = Var(\mu(\Theta)).$$

□

Wir haben gesehen, dass die Bayes-Prämie sowohl als beste beobachtbare Approximation der unbekannten individuellen Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ als auch als beste Vorhersage der Schadenhöhe X_{n+1} aufgefasst werden kann, wenn die Schadenhöhen X_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, bedingt unabhängig sind gegeben Θ und endliche Varianzen besitzen. Ebenso ist im Bühlmann-Modell die Credibility-Prämie für X_{n+1} zugleich auch der Credibility-Schätzer für $E(X_{n+1} \mid \Theta)$, wobei der mittlere quadratische Prognosefehler für X_{n+1} sich additiv zusammensetzt aus dem mittleren quadratischen Approximationsfehler für $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ und der mittleren (nicht prognostizierbaren) Variabilität $E(\sigma^2(\Theta))$ der Schadenhöhe bei gegebenem Risikoparameter.

4.11 Satz *Unter der Bedingung* (4.2) *der bedingten Unkorreliertheit der Zufallsvariablen X_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, stimmen die Credibility-Schätzer für X_{n+1} und für $E(X_{n+1}|\Theta)$ überein. Für die jeweiligen Approximationsfehler gilt*

$$\begin{aligned} Var(Y - X_{n+1}) = \|Y - X_{n+1}\|_2^2 &= \|Y - E(X_{n+1} \mid \Theta)\|_2^2 + E(Var(X_{n+1} \mid \Theta)) \\ &= Var(Y - E(X_{n+1} \mid \Theta)) + E(Var(X_{n+1} \mid \Theta)). \end{aligned}$$

Speziell im Bühlmann-Modell erhält man

$$\begin{aligned} \|Y - X_{n+1}\|_2^2 &= E(\sigma^2(\Theta))\Big(1 + \frac{1}{n+\kappa}\Big) \\ \|Y - E(X_{n+1} \mid \Theta)\|_2^2 &= E(\sigma^2(\Theta))\frac{1}{n+\kappa}. \end{aligned}$$

□

Beweis. Für die erste Behauptung reicht es zu zeigen, dass die in Satz 4.7 genannten Normalgleichungen für $M = X_{n+1}$ äquivalent sind zu den Normalgleichungen für $M = E(X_{n+1} \mid \Theta)$. Dies folgt aber sofort aus

$$E(X_{n+1}) = E(E(X_{n+1} \mid \Theta))$$

und aus

$$\begin{aligned} Cov(X_{n+1}, X_i) &= E\big(E(X_{n+1}X_i \mid \Theta)\big) - E(X_{n+1}) \cdot E(X_i) \\ &\overset{(4.2)}{=} E\big(E(X_{n+1} \mid \Theta) \cdot E(X_i \mid \Theta)\big) - E(E(X_{n+1} \mid \Theta)) \cdot E(X_i) \\ &= E\big(E(X_i E(X_{n+1} \mid \Theta) \mid \Theta)\big) - E(E(X_{n+1} \mid \Theta)) \cdot E(X_i) \\ &= E\big(X_i E(X_{n+1} \mid \Theta)\big) - E(E(X_{n+1} \mid \Theta)) \cdot E(X_i) \\ &= Cov(E(X_{n+1} \mid \Theta), X_i), \end{aligned}$$

wobei Satz 5.9 (i) und (x) des Kurzskripts zur Maßtheorie verwendet worden sind.

Gemäß Satz 4.7 (ii) gilt sowohl für $M = X_{n+1}$ als auch für $M = E(X_{n+1}|\Theta)$ wegen $E(Y) = E(M)$ für den Approximationsfehler

$$\|Y - M\|_2^2 = Var(Y - M) = Var(M) - Var(Y).$$

Wegen der bekannten Gleichung $Var(X_{n+1}) = Var(E(X_{n+1} \mid \Theta)) + E(Var(X_{n+1} \mid \Theta))$, folgt die behauptete Beziehung zwischen den Approximationsfehlern.

Speziell im Bühlmann-Modell folgt wiederum wegen der bedingten Unkorreliertheit der X_i

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E\big(Var(Y \mid \Theta)\big) + Var\big(E(Y \mid \Theta)\big) \\
&= E\Big(\frac{1}{(n+\kappa)^2} Var\Big(\sum_{i=1}^n X_i \Big| \Theta\Big)\Big) + Var\Big(\frac{1}{n+\kappa} E\Big(\sum_{i=1}^n X_i \Big| \Theta\Big)\Big) \\
&= \frac{n}{(n+\kappa)^2} E\big(\sigma^2(\Theta)\big) + \frac{n^2}{(n+\kappa)^2} Var\big(\mu(\Theta)\big) \\
&= \frac{n}{n+\kappa} Var\big(\mu(\Theta)\big),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Definition von κ verwendet worden ist. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
Var\big(Y - E(X_{n+1} \mid \Theta)\big) &= Var\big(E(X_{n+1} \mid \Theta)\big) - Var(Y) \\
&= Var\big(\mu(\Theta)\big)\Big(1 - \frac{n}{n+\kappa}\Big) \\
&= Var\big(\mu(\Theta)\big)\frac{\kappa}{n+\kappa} \\
&= E\big(\sigma^2(\Theta)\big)\frac{1}{n+\kappa}
\end{aligned}$$

und somit schließlich auch

$$\begin{aligned}
Var(Y - X_{n+1}) &= Var(Y - E(X_{n+1} \mid \Theta)) + E(Var(X_{n+1} \mid \Theta)) \\
&= E\big(\sigma^2(\Theta)\big)\Big(1 + \frac{1}{n+\kappa}\Big).
\end{aligned}$$

□

Mit steigendem Stichprobenumfang konvergiert also der Fehler der Approximation der (nicht beobachtbaren) "individuellen Nettorisikoprämie" $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ durch die Credibility-Prämie gegen 0, während der mittlere quadratische Prognosefehler für die zukünftige Schadenhöhe X_{n+1} gegen die mittlere Varianz der Schadenhöhe bei bekanntem Risikoparameter, also gegen $E(\sigma^2(\Theta))$, konvergiert, da auch bei beliebig umfangreicher Schadenerfahrung die Prognoseunsicherheit bestehen bleibt, die bei exakter Kenntnis des Risikoparameters Θ bestehen würde.

Die Credibility-Prämie im Bühlmann-Modell hängt nur noch von den unbekannten Größen

$$\mu := E(\mu(\Theta)) = E(X_1), \quad \varphi := E(\sigma^2(\Theta)), \quad \lambda := Var(\mu(\Theta))$$

ab, während die Bayes-Prämie i.d.R. auf komplexere Art und Weise von der bedingten Verteilung $P^{X_1|\Theta}$ abhängt. Um nun konkret eine Prämie auf der Basis des Credibility-Ansatzes angeben zu können, müssen die oben genannten drei Parameter geschätzt werden. Dazu sei angenommen, dass von l unabhängigen, identisch verteilten Risiken in $r \geqslant 2$ Jahren die Schadenhöhen beobachtet worden sind.

4.12 Satz *Seien (für ein $r \geqslant 2$) $(\Theta_i, X_{i,1}, \ldots, X_{i,r})$, $1 \leqslant i \leqslant l$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren, so dass für alle i die Schadenhöhen $X_{i,1}, \ldots, X_{i,r}$ der i-ten Police bedingt unabhängig und identisch verteilt sind gegeben den Risikoparameter Θ_i, d.h.*

$P^{(X_{i,1},\dots,X_{i,r})|\Theta_i} = \left(P^{X_{i,1}|\Theta_i}\right)^r$. *Definiere*

$$\begin{aligned}
\mu(\vartheta) &:= E(X_{1,1} \mid \Theta_1 = \vartheta) \\
\sigma^2(\vartheta) &:= Var(X_{1,1} \mid \Theta_1 = \vartheta) \\
\mu &:= E(\mu(\Theta_1)) \\
\varphi &:= E(\sigma^2(\Theta_1)) \\
\lambda &:= Var(\mu(\Theta_1)) \\
\bar{X}_{i,\bullet} &:= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} X_{i,j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l \\
\bar{X}_{\bullet,\bullet} &:= \frac{1}{lr}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r} X_{i,j} \\
\hat{\mu} &:= \bar{X}_{\bullet,\bullet} \\
\hat{\varphi} &:= \frac{1}{l(r-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r}(X_{i,j} - \bar{X}_{i,\bullet})^2 \\
\hat{\lambda} &:= \frac{1}{l-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{X}_{i,\bullet} - \bar{X}_{\bullet,\bullet})^2 - \frac{\hat{\varphi}}{r},
\end{aligned}$$

wobei alle Ausdrücke als existent und endlich angenommen sind. Dann sind $\hat{\mu}$, $\hat{\varphi}$ *und* $\hat{\lambda}$ *erwartungstreue und konsistente Schätzer, wenn* $l \to \infty$, *d.h.*

$$\begin{aligned}
&E(\hat{\mu}) = \mu, \quad E(\hat{\varphi}) = \varphi, \quad E(\hat{\lambda}) = \lambda \\
&\hat{\mu} \to \mu, \quad \hat{\varphi} \to \varphi, \quad \hat{\lambda} \to \lambda \quad P\text{-stochastisch für } l \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Beweis. Da die Zv. $X_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant r$, nach Voraussetzung und Satz 5.15 des Kurzskripts zur Maßtheorie identisch verteilt sind, gilt offensichtlich $E(\hat{\mu}) = E(X_{1,1}) = \mu$.

Da die Zv. $X_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, für festes i bedingt i.i.d. sind gegeben Θ_i, ist die zugehörige Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}_i^2 := \frac{1}{r-1}\sum_{j=1}^{r}(X_{i,j} - \bar{X}_{i,\bullet})^2$$

bedingt erwartungstreu, d.h. $E(\hat{\sigma}_i^2 \mid \Theta_i) = Var(X_{i,1} \mid \Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i)$ P-f.s. (vgl. Behnen und Neuhaus, 2003, Beispiel 8.9). Es folgt wegen $E(\hat{\sigma}_i^2) = E\big(E(\hat{\sigma}_i^2 \mid \Theta_i)\big) = E(\sigma^2(\Theta_i)) = \varphi$, dass

$$E(\hat{\varphi}) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} E(\hat{\sigma}_i^2) = \varphi.$$

Da die Zufallsvariablen $\bar{X}_{i,\bullet}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, i.i.d. sind, folgt mit ähnlichen Argumenten und der bedingten Unabhängigkeit der $X_{1,j}$ gegeben Θ_1

$$\begin{aligned}
E(\hat{\lambda}) &= Var(\bar{X}_{1,\bullet}) - \frac{\varphi}{r} \\
&= \Big(Var\Big(\frac{1}{r}E\Big(\sum_{j=1}^{r} X_{1,j} \mid \Theta_1\Big)\Big) + E\Big(\frac{1}{r^2}Var\Big(\sum_{j=1}^{r} X_{1,j} \mid \Theta_1\Big)\Big)\Big) - \frac{\varphi}{r} \\
&= \big(Var(\mu(\Theta_1)) + E(\frac{1}{r}\sigma^2(\Theta_1))\big) - \frac{\varphi}{r} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Da die Zufallsvariablen $\bar{X}_{i,\bullet}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, i.i.d. sind, folgt die Konsistenz des zugehörigen Stichprobenmittels $\hat{\mu}$ aus dem Gesetz der großen Zahlen. Ebenso folgt die Konsistenz von $\hat{\varphi}$ daraus, dass die Zv. $\hat{\sigma}_i^2$ i.i.d. sind, und die Konvergenz der Stichprobenvarianz der $\bar{X}_{i,\bullet}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, also von $\hat{\lambda} + \hat{\varphi}/r$, gegen $Var(\bar{X}_{1,\bullet}) = \lambda + \varphi/r$ (s.o.) und daher auch die Konsistenz von $\hat{\lambda}$. □

4.13 Bemerkung I.d.R. ist $r = n$ die Anzahl der Jahre, für die die Schadenhöhen auch für die zu tarifierende Police vorliegen. □

Ersetzt man in der Definition der Credibility-Prämie im Bühlmann-Modell die unbekannten Parameter durch ihre Schätzer, so erhält man die so genannte *empirische Credibility-Prämie*

$$\hat{C} := \frac{n}{n+\hat{\kappa}}\bar{X}_n + \frac{\hat{\kappa}}{n+\hat{\kappa}}\hat{\mu} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\kappa} := \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\lambda}}.$$

(Hierbei sei $\hat{\lambda} > 0$ vorausgesetzt.) Man beachte, dass sie i.d.R. weder bedingt noch unbedingt erwartungstreu ist, d.h. bezeichnet C die Credibility-Prämie, so gilt i.allg. $E(\hat{C} \mid X_1, \ldots, X_n) \neq C$ und $E(\hat{C}) \neq E(C) = \mu$. (Dies relativiert auch die Relevanz der Erwartungstreue für die Parameterschätzer.)

Das in Satz 4.9 diskutierte Bühlmann-Modell setzt voraus, dass die Schadenhöhen bei gegebenem Risikoparameter identische bedingte erste und zweite Momente besitzen. Während dies bei der Betrachtung *einzelner* Policen in erster Näherung (zumindest nach Inflationsbereinigung) realistisch sein kann, ist das Modell zu einschränkend, wenn die X_i mittlere Schadenhöhen einer *Gruppe* von Policen bezeichnen, deren Größe sich mit der Zeit ändert. Solche Fälle treten z.B. bei der Versicherung von Fahrzeugflotten, bei Gruppenversicherungen oder bei der Tarifierung von Rückversicherungen ganzer Portfolios auf. In dem Fall kann die erwartete *mittlere* Schadenhöhe zwar weiter als (näherungsweise) konstant angenommen werden, die bedingte Varianz der mittleren Schadenhöhe wird sich aber oft (näherungsweise) umgekehrt proportional zu dem “Volumen” der Gruppe (also z.B. der Anzahl der Policen in der Gruppe) verhalten.

4.14 Satz (Credibility-Prämie im Bühlmann-Straub-Modell) *Die Zv. $X_1, \ldots, X_{n+1}$ seien bedingt unkorreliert gegeben Θ mit*

$$\begin{aligned} E(X_i \mid \Theta) &= \mu(\Theta) \\ Var(X_i \mid \Theta) &= \frac{\sigma^2(\Theta)}{v_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{aligned}$$

für gewisse $v_i \in (0, \infty)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, und positive Funktionen μ und σ^2 so, dass $0 < Var(\mu(\Theta)) < \infty$. Dann ist

$$Y = \frac{v_\bullet}{v_\bullet + \kappa} \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{v_\bullet} X_i + \frac{\kappa}{v_\bullet + \kappa} E(X_{n+1})$$

mit $v_\bullet = \sum_{i=1}^n v_i$ und $\kappa = E(\sigma^2(\Theta))/Var(\mu(\Theta))$ ein Credibility-Schätzer von X_{n+1} (und von $E(X_{n+1} \mid \Theta)$). □

Beweis. Ähnlich wie der Beweis zu Satz 4.9 (Übungen). □

Man kann in ähnlicher Weise wie in Satz 4.12 erwartungstreue und konsistente Schätzer für die unbekannten Parameter konstruieren, wobei hier nun die beobachteten Schadenhöhen mittels der zugehörigen Volumina v_{ij} gewichtet werden. Für Einzelheiten sei auf das Lehrbuch von Mack (1997), p. 209 ff. verwiesen.

4.15 Bemerkung Bislang haben wir versucht, die nicht beobachtbare individuelle Nettorisikoprämie $E(X_{n+1} \mid \Theta)$ möglichst gut durch eine nur von den beobachteten Schadenhöhen $X_1, \ldots, X_n$ abhängende (Bayes- oder Credibility-) Prämie zu approximieren. Die gleichen Ideen lassen sich jedoch auch verwenden, um aufgrund der Schadenerfahrungen bestimmbare Approximationen von individuellen Prämien (die vom nicht beobachtbaren Risikoparameter abhängen) zu definieren und zu berechnen, wenn diese mittels eines anderen Prämienprinzips definiert werden.

Sei dazu H ein Prämienprinzip und Y_ϑ eine Zv. mit Verteilung $P^{Y_\vartheta} = P^{X_{n+1}|\Theta=\vartheta}$. Dann ist $H_\vartheta := H(Y_\vartheta)$ die zugehörige individuelle Prämie für eine Police mit Ausprägung ϑ des Risikoparameters Θ. Da diese nicht beobachtbar ist, approximiert man die (zufällige) Prämie H_Θ wieder durch die Bayes-Prämie $E(H_\Theta \mid X_1, \ldots, X_n)$ oder durch die zugehörige Credibility-Prämie, also die Zv. Y der Form (4.3), die $\|Y - H_\Theta\|_2$ minimiert. Letztere kann durch Lösung der Normalgleichungen bestimmt werden. Liegt ein Bühlmann-Modell vor, so ergeben sich wiederum einfache explizite Formeln (s. Übungen). □

4.16 Bemerkung Neben der Credibility-Theorie gibt es weitere Ansätze, die Schadenerfahrung jeder einzelnen Police zur individuellen Tarifierung zu verwenden. So ist es z.B. in der Kfz-Versicherung üblich, statt dem in Beispiel 4.4 skizzierten Ansatz zu folgen, Schadenfreiheitsklassen so zu definieren, dass die Zuordnung in der nächsten Versicherungsperiode nur von der jetzigen Klasse und den aktuellen Schäden abhängt, nicht aber von allen bisher beobachteten Schadenhöhen. Dies führt zu einem so genannten Markov-Modell, bei dem in jeder Klasse die Prämie so zu wählen ist, dass die unbekannte individuelle Nettorisikoprämie $E(X \mid \Theta)$ im Mittel möglichst gut approximiert wird. Ein solches Modell wird u.a. von Sundt (1987), An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics, Chapter 7 diskutiert. □