5 Ruintheorie in diskreter Zeit

Im folgenden bezeichnen X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, stets unabhängige, identisch verteilte Schadenhöhen eines Versicherungsportfolios in n aufeinander folgenden Versicherungsperioden mit $E(X_1) < \infty$, und X bezeichnet eine Zufallsvariable mit $P^{X_1} = P^X$. Die Gesamtprämie für das Versicherungsportfolio sei in jeder Periode dieselbe und werde mit π bezeichnet. Des weiteren stehe dem Versicherungsunternehmen ein Anfangskapital der Höhe $u \geqslant 0$ zur Verfügung.

5.1 Definition *$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ bezeichne den Gesamtschaden in den ersten n Perioden. Der* **(zeitdiskrete) Risikoreserveprozess** *$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bei Anfangskapital u und Prämie π ist definiert durch*

$$Z_n := Z_n(u) := u + \sum_{i=1}^n (\pi - X_i) = u + n\pi - S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die **Ruinwahrscheinlichkeit bei Zeithorizont m** *(und Anfangskapital u) ist für $m \in \mathbb{N}$ definiert als*

$$\phi_m(u) := P\big\{Z_i(u) < 0 \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, m\}\big\};$$

die **Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Zeithorizont** *(und Anfangskapital u) ist definiert als*

$$\phi_\infty(u) := P\{Z_i(u) < 0 \text{ für ein } i \in \mathbb{N}\}.$$

5.2 Bemerkung (i) Das diesem (technischen) Ruinbegriff zugrunde liegende Modell ist sehr stark vereinfachend, da es

- keinerlei Kosten- oder Prämiensteigerungen berücksichtigt
- keine Verzinsung des Kapitals vorsieht
- voraussetzt, dass Gewinne (bzw. Verluste) $\pi - X_i$ aus der i-ten Periode in voller Höhe auf die nächste Periode übertragen werden, also insbesondere keine Gewinnausschüttungen erfolgt und beliebig hohe (steuerbefreite) Rückstellungen gebildet werden können.

Es sind auch Resultate in realistischeren Modell (etwa unter Berücksichtigung von Kapitalgewinnen) bekannt, aber die Analyse erfordert dann bei weitem tiefer liegende mathematische Hilfsmittel.

(ii) Offensichtlich gilt $\phi_\infty(u) = \lim_{m\to\infty} \phi_m(u)$. □

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, dass im Fall $\pi = E(X)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Zeithorizont 1 ist. In diesem Kapitel wollen wir unter geeigneten Annahmen an die Schadenhöhenverteilung P^X obere und untere Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeiten herleiten und das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeiten bei steigendem Anfangskapital analysieren. Wir werden dabei oft die folgende Bedingung voraussetzen.

5.3 Bedingung (Cramér-Bedingung) *Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass $E(\mathrm{e}^{\delta X}) < \infty$ gilt.* □

Es gilt dann natürlich auch $\psi_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX}) < \infty$ für alle $t \leqslant \delta$ und die Bedingung ist äquivalent dazu, dass der Definitionsbereich $\mathcal{M}_X$ von ψ_X einen nicht-leeren Schnitt mit $(0, \infty)$ besitzt.

Zunächst leiten wir i.d.R. recht grobe obere Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeiten her.

5.4 Satz *Es sei die Cramér-Bedingung 5.3 erfüllt. Gilt für $g(t) := \mathrm{e}^{-\pi t}\psi_X(t) = \psi_{X-\pi}(t) < 1$ (d.h. ist die Prämie π größer als $\frac{1}{t}\log\psi_X(t)$) für ein $t > 0$, so folgt*

$$\phi_m(u) \leqslant \mathrm{e}^{-ut} g(t) \frac{1 - g^m(t)}{1 - g(t)}, \quad m \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

$$\phi_\infty(u) \leqslant \mathrm{e}^{-ut} g(t) \frac{1}{1 - g(t)}. \tag{5.2}$$

□

Beweis. Die Behauptung (5.2) folgt offensichtlich aus (5.1) mit Bemerkung 5.2 (ii), da nach Voraussetzung $g(t) < 1$ gilt.

Da die Ruinwahrscheinlichkeit bei Zeithorizont m nach oben abgeschätzt werden kann durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass nach der i-ten Periode der Risikoreserveprozess negativ ist, erhält man mit der Markov-Ungleichung und Satz 2.7

$$\begin{aligned}
\phi_m(u) &\leqslant \sum_{i=1}^m P\{Z_i < 0\} \\
&= \sum_{i=1}^m P\{S_i > i\pi + u\} \\
&= \sum_{i=1}^m P\{\mathrm{e}^{tS_i} > \mathrm{e}^{(i\pi+u)t}\} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \frac{E(\mathrm{e}^{tS_i})}{\mathrm{e}^{i\pi t}\mathrm{e}^{ut}} \\
&= \mathrm{e}^{-ut} \sum_{i=1}^m \left(\mathrm{e}^{-\pi t}\psi_X(t)\right)^i \\
&= \mathrm{e}^{-ut} \sum_{i=1}^m g^i(t) \\
&= \mathrm{e}^{-ut} g(t) \frac{1 - g^m(t)}{1 - g(t)}.
\end{aligned}$$

□

5.5 Bemerkung $\frac{1}{t}\log\psi_X(t)$ ist gerade die Prämie nach dem Exponentialprinzip zum Parameter t. Die Bedingung, die in Satz 5.4 an π gestellt wird, impliziert nach Satz 3.15 also insbesondere, dass π größer als die erwartete Schadenhöhe $E(X)$ ist. □

Es soll nun t so gewählt werden, dass der in der oberen Schranke (5.1) auftretende Faktor $g(t)(1-g^m(t))/(1-g(t)) = \sum_{i=1}^m g^i(t)$ möglichst klein wird, was offensichtlich dann der Fall ist, wenn $g(t)$ minimiert wird. Dabei werden wir den trivialen Fall ausschließen, dass $X \leqslant \pi$ P-f.s. gilt, da dann ohnehin offensichtlich $\phi_\infty(u) = 0$ gilt.

5.6 Lemma und Definition *Es gelte die Cramér-Bedingung 5.3 und* $\pi > E(X)$, $P\{X > \pi\} > 0$ *sowie* $\lim_{t\uparrow\sup\mathcal{M}_X} \psi_X(t) = \infty$*, falls* $\sup\mathcal{M}_X < \infty$.

(i) Die Funktion $g = \psi_{X-\pi}$ *ist strikt konvex auf* $\mathcal{M}_X$ *und besitzt dort genau eine Minimalstelle* t_0*. Es gilt* $t_0 > 0$ *und*

$$\pi = \frac{\psi_X'(t_0)}{\psi_X(t_0)} = \frac{E(X\mathrm{e}^{t_0X})}{E(\mathrm{e}^{t_0X})} > \frac{1}{t_0}\log\psi_X(t_0).$$

(ii) Es existiert genau ein $t_1 \in (0,\infty) \cap \mathcal{M}_X$ *mit* $g(t_1) = 1$*. Es gilt* $t_1 > t_0$*. Der Wert* t_1 *heißt dann* **Anpassungskoeffizient** *von* $P^{X-\pi}$ *bzw. von* $X - \pi$. □

Beweis. Man beachte zunächst, dass wegen $g(t) = \psi_{X-\pi}(t) = \mathrm{e}^{-\pi t}\psi_X(t)$ der Definitionsbereich von g gleich $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{X-\pi}$ ist. Gemäß Bemerkung 2.10 ist $g = \psi_{X-\pi}$ in jedem inneren Punkt von $\mathcal{M}_X$ beliebig oft differenzierbar mit

$$g^{(j)}(t) = E\Big((X-\pi)^j\mathrm{e}^{(X-\pi)t}\Big).$$

Insbesondere gilt also

$$g'(0) = E(X-\pi) < 0$$

und

$$g''(t) > 0,$$

d.h. g ist auf einer Umgebung der 0 monoton fallend und auf $\mathcal{M}_X$ strikt konvex.

Ferner gilt im Fall $\sup\mathcal{M}_X = \infty$

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} E\big(\mathrm{e}^{(X-\pi)t}\big) \geqslant \lim_{t\to\infty} E\big(\mathrm{e}^{\varepsilon t}1_{\{X > \pi+\varepsilon\}}\big) = \infty$$

für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Im Fall $t_2 := \sup\mathcal{M}_X < \infty$ gilt nach Voraussetzung

$$\lim_{t\uparrow t_2} g(t) \geqslant \mathrm{e}^{-\pi t_2}\lim_{t\uparrow t_2}\psi_X(t) = \infty.$$

In beiden Fällen folgt also die Existenz und Eindeutigkeit von t_1 und t_0, sowie $0 < t_0 < t_1$ aus dem Zwischenwertsatz bzw. dem Satz von Rolle.

Ferner gilt

$$g'(t_0) = E\big((X-\pi)\mathrm{e}^{(X-\pi)t_0}\big) = 0$$

und folglich

$$\pi = \frac{E(X\mathrm{e}^{t_0(X-\pi)})}{E(\mathrm{e}^{t_0(X-\pi)})} = \frac{E(X\mathrm{e}^{t_0X})}{E(\mathrm{e}^{t_0X})} = \frac{\psi_X'(t_0)}{\psi_X(t_0)}.$$

Außerdem folgt aus $g(t_0) < 1$, dass

$$0 > \frac{\log g(t_0)}{t_0} = -\pi + \frac{\log\psi_X(t_0)}{t_0}.$$

□

5.7 Korollar *Unter den Bedingungen von Lemma 5.6 gilt*

$$\begin{aligned}\phi_m(u) &\leqslant \mathrm{e}^{-ut_0} g(t_0)\frac{1-g^m(t_0)}{1-g(t_0)}, \quad m \in \mathbb{N}\\ \phi_\infty(u) &\leqslant \mathrm{e}^{-ut_0} g(t_0)\frac{1}{1-g(t_0)}.\end{aligned} \qquad \square$$

Man beachte jedoch, dass die Wahl $t = t_0$ i.d.R. *nicht* die obere Schranke aus Satz 5.4 minimiert.

Die Ruinwahrscheinlichkeit fällt also unter der Cramér-Bedingung mit steigendem Anfangskapital wenigstens exponentiell mit der rate e^{-ut} für ein beliebiges $t \in (0, t_1)$ ab. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass man sogar die Konvergenzrate e^{-ut_1} erreichen kann. Dazu leiten wir eine Rekursionsgleichung für die Ruinwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Zeithorizont her. Diese formulieren wir in einer etwas allgemeineren Form, die geeigneter ist für spätere Anwendungen auf Ruinwahrscheinlichkeiten in zeitstetigen Modellen.

5.8 Satz *Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\pi, u \in \mathbb{R}$. Dann gilt für*

$$\bar{\phi}_m(u) := 1 - \phi_m(u) = P\{S_n \leqslant n\pi + u \quad \text{für alle } 1 \leqslant n \leqslant m\}, \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

die Rekursionsgleichung

$$\bar{\phi}_{m+1}(u) = \int_{(-\infty,\pi+u]} \bar{\phi}_m(\pi + u - t)\, P^{X_1}(dt), \qquad m \in \mathbb{N}_0. \qquad \square$$

Beweis. Aus der Unabhängigkeit von X_1 und $(X_2, \ldots, X_{m+1})$ folgt mit $\tilde{X}_i := X_{i+1}$ und $\tilde{S}_n := \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i$

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{m+1}(u) &= P\{S_n \leqslant n\pi + u \quad \forall\, 1 \leqslant n \leqslant m+1\}\\ &= P\Big(\{X_1 \leqslant \pi + u\} \cap \Big\{\sum_{i=2}^n X_i \leqslant (n-1)\pi + u + \pi - X_1 \ \ \forall\, 2 \leqslant n \leqslant m+1\Big\}\Big)\\ &= \int_{(-\infty,\pi+u]} E\Big(1_{\{\sum_{i=2}^n X_i \leqslant (n-1)\pi + u + \pi - X_1 \ \ \forall\, 2 \leqslant n \leqslant m+1\}} \Big| X_1 = t\Big)\, P^{X_1}(dt)\\ &= \int_{(-\infty,\pi+u]} E\Big(1_{\{\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{X}_i \leqslant (n-1)\pi + u + \pi - t \ \ \forall\, 2 \leqslant n \leqslant m+1\}}\Big)\, P^{X_1}(dt)\\ &= \int_{(-\infty,\pi+u]} P\big\{\tilde{S}_k \leqslant k\pi + (u + \pi - t) \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant m\big\}\, P^{X_1}(dt)\\ &= \int_{(-\infty,\pi+u]} \bar{\phi}_m(u + \pi - t)\, P^{X_1}(dt),\end{aligned}$$

da $(\tilde{S}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ und $(S_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ dieselbe Verteilung besitzen. $\square$

5.9 Satz (zeitdiskrete Cramér-Lundberg-Schranke) *Existiert in der Situation von Satz 5.8 der Anpassungskoeffizienten $R > 0$ von $X - \pi$, so folgt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$\phi_m(u) \leqslant \phi_\infty(u) \leqslant \mathrm{e}^{-Ru}. \qquad \square$$

Beweis. Offensichtlich reicht es, $\phi_m(u) \leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$ für alle $m \in \mathbb{R}$ und $u \geqslant 0$ zu zeigen. Dies geschieht durch vollständige Induktion über m.

Wie im Beweis zu Satz 5.4 zeigt man mit der Markov-Ungleichung

$$\phi_1(u) = P\{X_1 > u + \pi\} \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{R(X_1-\pi)})}{\mathrm{e}^{uR}} = \mathrm{e}^{-uR},$$

da nach Definition des Anpassungskoeffizienten $E\left(\mathrm{e}^{R(X_1-\pi)}\right) = \psi_{X_1-\pi}(R) = 1$ gilt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\phi_m(u) \leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$ für alle $u \geqslant 0$ gilt. Satz 5.8 liefert dann

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(u) &= 1 - \int_{(-\infty,\pi+u]} \bar{\phi}_m(\pi + u - t)\, P^{X_1}(dt) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi_m(\pi + u - t)1_{(-\infty,\, \pi + u]}(t) + 1_{(\pi + u,\, \infty)}(t)\, P^{X_1}(dt) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-R(\pi+u-t)}\, P^{X_1}(dt) \\
&= \mathrm{e}^{-Ru} E\left(\mathrm{e}^{R(X_1-\pi)}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-Ru}. \qquad \square
\end{aligned}$$

5.10 Bemerkung Man kann im Fall $P\{X > \pi\} > 0$ sogar zeigen, dass

$$\lim_{u\to\infty} \phi_\infty(u)\mathrm{e}^{Ru} = C \in (0, 1]$$

gilt, falls zusätzlich $E(X\mathrm{e}^{RX}) < \infty$ angenommen wird. (Diese Bedingung ist insbesondere unter den Bedingungen von Lemma 5.6 erfüllt.) Die Rate e^{-Ru} der Cramér-Lundberg-Schranke kann dann also nicht mehr verbessert werden. Sie ist auch stets besser als die in Korollar 5.7 hergeleitete Rate $\mathrm{e}^{-t_0 u}$, d.h. für hinreichend großes Anfangskapital u ist die Cramér-Lundberg-Schranke kleiner. Für kleinere Werte von u können aber durchaus die Schranken aus Korollar 5.7 genauer sein. $\square$

Entscheidende Voraussetzung für die obige Argumentation ist die Cramér-Bedingung. Ist diese nicht erfüllt, so konvergiert $\phi_\infty(u)$ i.d.R. für $u \to \infty$ nicht mit exponentieller Rate gegen 0. Insbesondere gilt dies für Schadenhöhenverteilungen mit $E(X^\alpha) = \infty$ für ein $\alpha > 0$ (also z.B. für Pareto-Verteilungen). Dies folgt aus den folgenden unteren Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit.

5.11 Satz *Bezeichnet F_X die Verteilungsfunktion von $X \geqslant 0$, so gilt*

$$
\begin{aligned}
\phi_m(u) &\geqslant 1-\exp\Big(-\frac{1}{\pi}\int_{\pi+u}^{(m+1)\pi+u} 1-F_X(t)\,dt\Big) && (5.3)\\
\phi_\infty(u) &\geqslant 1-\exp\Big(-\frac{1}{\pi}\int_{\pi+u}^{\infty} 1-F_X(t)\,dt\Big)\\
&= 1-\exp\Big(-\frac{1}{\pi}\Big(E(X)-\int_{0}^{\pi+u} 1-F_X(t)\,dt\Big)\Big). && (5.4)
\end{aligned}
$$

□

Beweis. Die Schranken für $\phi_\infty(u)$ ergeben sich sofort aus (5.3), Bemerkung 5.2(ii) und der Identität $E(X) = \int_0^\infty 1 - F_X(t)\,dt$.

Für den Nachweis von (5.3) erhält man wegen der Unabhängigkeit der X_i und der für alle $y > 0$ gültigen Ungleichung $\log y \leqslant y - 1$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
1-\phi_m(u) &= P\{S_i \leqslant u+i\pi\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant m\}\\
&\leqslant P\{X_i \leqslant u+i\pi\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant m\}\\
&= \prod_{i=1}^m F_X(u+i\pi)\\
&\leqslant \prod_{i=1}^m \exp\big(F_X(u+i\pi)-1\big)\\
&= \exp\Big(-\sum_{i=1}^m (1-F_X(u+i\pi))\Big)\\
&\leqslant \exp\Big(-\frac{1}{\pi}\int_{\pi+u}^{(m+1)\pi+u} 1-F_X(t)\,dt\Big),
\end{aligned}
$$

da $1 - F_X(t) \leqslant 1 - F_X(u + i\pi)$ für alle $t \in [u + i\pi, u + (i + 1)\pi)$. □

5.12 Korollar *Gilt $E(X) = \infty$, so folgt $\phi_\infty(u) = 1$ für alle $\pi > 0$ und alle $u \geqslant 0$, d.h. das Risiko ist in dem Sinne nicht versicherbar, dass auch bei beliebig hoher Prämie und beliebig hohem Anfangskapital stets P-f.s. irgendwann der technische Ruin eintritt.* □

Beweis. Gilt $E(X) = \int_0^\infty 1 - F_X(t)\,dt = \infty$, so liefert (5.4) die Behauptung. □

5.13 Beispiel Sei X Pareto-verteilt mit $F_X(t) = 1 - t^{-\alpha}$ für alle $t \geqslant 1$.

- Im Fall $\alpha \leqslant 1$ gilt $E(X) = \infty$ und somit $\phi_\infty(u) = 1$ für alle $u \geqslant 0$.
- Im Fall $\alpha > 1$ ist $\int_{\pi+u}^\infty 1 - F_X(t)\,dt = (\pi + u)^{1-\alpha}/(\alpha - 1)$, also

  $$\phi_\infty(u) \geqslant 1-\exp\Big(-\frac{(\pi+u)^{1-\alpha}}{\pi(\alpha-1)}\Big) \sim \frac{(\pi+u)^{1-\alpha}}{\pi(\alpha-1)} \sim \frac{u^{1-\alpha}}{\pi(\alpha-1)}$$

  für $u \to \infty$. (Hierbei bedeutet $f(u) \sim g(u)$, dass $f(u)/g(u)$ gegen 1 konvergiert.)

  Man kann zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass $\phi_\infty(u) \sim cu^{1-\alpha}$. □

In Bsp. 5.13 weist die untere Schranke bei steigendem Startkapital dieselbe Konvergenzrate auf wie die Ruinwahrscheinlichkeit selbst, obwohl in dem Beweis zu Satz 5.11 an einer Stelle der Gesamtschaden S_i bis z.Z. i durch den Schaden X_i in der i-ten Periode abgeschätzt worden ist. In der Tat werden wir im folgenden Kapitel sehen, dass für eine gewisse Klasse von Schadenverteilungen ein großer Gesamtschaden i.d.R. durch einen großen Einzelschaden verursacht wird, während dieser unter der Cramér-Bedingung meist durch eine große Zahl mittelgroßer Schäden entsteht.