6 Ruintheorie im Cramér-Lundberg-Modell

Bislang haben wir bei jedem Einzelschaden nur berücksichtigt, in welcher Versicherungsperiode er eingetreten ist, nicht aber den genauen Eintrittszeitpunkt. Im folgenden wollen wir ein einfaches *dynamisches* Modell vorstellen, bei dem neben den Schadenhöhen auch die Schadeneintrittszeiten als zufällig modelliert werden. In diesem Kapitel sind daher die Zufallsvariablen X_i nicht mehr als Gesamtschäden im Portfolio zu interpretieren, sondern als Einzelschäden. Die zugehörigen Schadeneintrittszeitpunkte werden mit T_i bezeichnet.

6.1 Definition *(i) Das* **Erneuerungsmodell** *in der Risikotheorie besteht aus einer Folge von iid Zufallsvektoren $(X_i, W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von* **Schadenhöhen** *$X_i > 0$ und* **Zwischenankunftszeiten** *$W_i > 0$ zwischen dem $(i-1)$-ten und dem i-ten Schaden. Dabei seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und es gelte*

$$\mu := E(X_1) < \infty, \qquad \frac{1}{\lambda} := E(W_1) < \infty.$$

Die zugehörigen **Schadenankunftszeiten** *oder* **Schadeneintrittszeiten** *T_k werden definiert als*

$$T_k := \sum_{i=1}^{k} W_i, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

der **Schadenzahlprozess** *N durch*

$$N_t := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,t]}(T_k) = \max\{k \mid T_k \leqslant t\}, \qquad t \in [0,\infty).$$

(ii) Sind die W_i exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\lambda$, so heißt das Erneuerungsmodell **Cramér-Lundberg-Modell**. *Der zugehörige Schadenzahlprozess heißt* **(homogener) Poisson-Prozess mit Intensität** *λ, der Prozess*

$$S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[0,t]}(T_i), \qquad t \in [0,\infty),$$

heißt **zusammengesetzter Poisson-Prozess**.

(iii) Wird weiterhin die Zahlung einer kontinuierlichen Prämie mit Rate $c > 0$ vorausgesetzt, so ist der zugehörige **Risikoreserveprozess** *bei Startkapital $u \geqslant 0$ definiert durch*

$$Z_t := Z_t(u) := u + ct - \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1_{[0,t]}(T_i) = u + ct - S_{N_t}, \qquad t \in [0,\infty).$$

Die **Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Zeithorizont** *ist*

$$\phi(u) := P\{Z_t(u) < 0 \text{ für ein } t > 0\}. \qquad \square$$

Der Name Poisson-Prozess erklärt sich dadurch, dass die Zuwächse des Prozesses Poisson-verteilt sind.

6.2 Satz *Für $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind bei einem Poisson-Prozess N mit Intensität λ die Zuwächse $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, unabhängig und $\mathcal{P}_{\lambda(t_i - t_{i-1})}$-verteilt.* □

Beweis. Ein ausführlicher Beweis findet sich z.B. bei Billingsley (1986), Theorem 23.1. Hier soll nur eine Beweisskizze für den Fall $n = 2$ gegeben werden. Wegen $N_{t_0} = 0$ müssen wir dazu zeigen, dass für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ die folgende Wahrscheinlichkeit sich als Produkt der entsprechenden "Poisson-Wahrscheinlichkeiten" schreiben lässt. Dazu wenden wir unter Verwendung der Unabhängigkeit von T_k und W_j, $j > k$, dreimal den Satz von Fubini an.

$$\begin{aligned}
&P\{N_{t_1} = k, N_{t_2} - N_{t_1} = l\}\\
&= P\{T_k \leqslant t_1, T_{k+1} > t_1, T_{k+l} \leqslant t_2, T_{k+l+1} > t_2\}\\
&= \int_{(0,t_1]} P\Big\{W_{k+1} > t_1 - s, \sum_{i=k+1}^{k+l} W_i \leqslant t_2 - s, \sum_{i=k+1}^{k+l+1} W_i > t_2 - s\Big\}\, P^{T_k}(ds)\\
&= \int_{(0,t_1]} \int_{(t_1-s,t_2-s]} P\Big\{\sum_{i=k+2}^{k+l} W_i \leqslant t_2 - s - u, \sum_{i=k+2}^{k+l+1} W_i > t_2 - s - u\Big\}\, P^{W_{k+1}}(du)\, P^{T_k}(ds)\\
&= \int_{(0,t_1]} \int_{(t_1-s,t_2-s]} \int_{(0,t_2-s-u]} P\Big\{W_{k+l+1} > t_2 - s - u - v\Big\}\, P^{\sum_{i=k+2}^{k+l} W_i}(dv)\\
&\qquad\qquad P^{W_{k+1}}(du)\, P^{T_k}(ds).
\end{aligned}$$

Nun ist nach Beispiel 2.2 $P^{T_k} = \Gamma_{k,\lambda}$ und $P^{\sum_{i=k+2}^{k+l} W_i} = \Gamma_{l-1,\lambda}$, falls $k, l \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich für die rechte Seite der oben stehenden Gleichungskette

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \Big(\int_{t_1-s}^{t_2-s} \Big(\int_0^{t_2-s-u} e^{\lambda(s+u+v-t_2)} \frac{\lambda^{l-1}}{\Gamma(l-1)} v^{l-2} e^{-\lambda v}\, dv\Big)\, \lambda e^{-\lambda u}\, du\Big)\, \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} s^{k-1} e^{-\lambda s}\, ds\\
&= e^{-\lambda t_2} \frac{\lambda^{l+k}}{\Gamma(l-1)\Gamma(k)} \int_0^{t_1} \Big(\int_{t_1-s}^{t_2-s} \frac{(t_2 - s - u)^{l-1}}{l-1}\, du\Big)\, s^{k-1}\, ds\\
&= e^{-\lambda t_2} \frac{\lambda^{l+k}(t_2 - t_1)^l}{\Gamma(l-1)\Gamma(k) l(l-1)} \frac{t_1^k}{k}\\
&= \mathcal{P}_{\lambda t_1}\{k\} \cdot \mathcal{P}_{\lambda(t_2 - t_1)}\{l\}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit analogen Rechnungen im Fall $k = 0$ oder $l = 0$ folgt die Behauptung. □

6.3 Bemerkung Im allgemeinen sind die Zuwächse des Schadenzahlprozesses im Erneuerungsmodell *nicht* unabhängig. Es ist gerade diese besondere Eigenschaft des Poisson-Prozesses (die i.W. durch die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung bedingt ist), der die Analyse der Ruinwahrscheinlichkeit im Cramér-Lundberg-Modell besonders einfach macht. □

Offensichtlich kann der Ruin nur zu einem der Zeitpunkte T_k eintreten, da der Risikoreserveprozess dazwischen linear anwächst. Es gilt daher

$$\phi(u) = P\Big\{Z_{T_k}(u) = u + \sum_{i=1}^{k} (cW_i - X_i) < 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Somit können wir die Resultate aus Kapitel 5 über die Ruinwahrscheinlichkeit im zeitdiskreten Modell mit Pseudo-Schadenhöhen $\tilde{X}_i := X_i - cW_i$ und Pseudo-Prämie $\tilde{\pi} = 0$ anwenden, bei denen negative "Schadenhöhen" zugelassen sind.

Damit nicht P-f.s. Ruin eintritt, müssen die Pseudo-Schadenhöhen einen negativen Erwartungswert besitzen, d.h. $E(X_1 - cW_1) = \mu - c/\lambda < 0$ gelten, was offensichtlich äquivalent ist zu

$$c > \lambda\mu.$$

Diese Bedingung werden wir im folgenden stets voraussetzen. Man beachte, dass dann nach dem starken Gesetz der großen Zahlen $n^{-1}\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \to E(\tilde{X}_1) < 0$ und daher $\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \to -\infty$ P-f.s. gilt. Daraus folgt dann aber sofort $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i < \infty$ P-f.s. und somit schließlich

$$\lim_{u\to\infty}\phi(u) = \lim_{u\to\infty} P\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \geqslant u\Big\} = 0. \tag{6.1}$$

Zunächst werden wir eine Reihendarstellung der Ruinwahrscheinlichkeit herleiten, die sich als Survivalfunktion einer Gesamtschadenhöhe in einem kollektiven Modell interpretieren lässt.

In einem ersten Schritt werden wir dazu eine Integralgleichung für ϕ herleiten, die sich auch als so genannte *defektive Erneuerungsgleichung* interpretieren lässt.

6.4 Satz *Bezeichnet F_X die Verteilungsfunktion der Schadenhöhen im Cramér-Lundberg-Modell und gilt $c > \lambda\mu$, so erfüllt ϕ die Gleichung*

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty 1 - F_X(r)\,dr + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-t)(1-F_X(t))\,dt, \qquad u \geqslant 0, \tag{6.2}$$

und es gilt $\phi(0) = \lambda\mu/c$. □

Beweis. Aus der in Satz 5.8 hergeleiteten Rekursionsgleichung folgt bei $m \to \infty$ für $\bar{\phi} := 1 - \phi$ unter Verwendung der Unabhängigkeit von X_1 und W_1 und des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(u) &= \int_{(-\infty,u]} \bar{\phi}(u-t)\,P^{X_1-cW_1}(dt) \\
&= \int 1_{(-\infty,u]}(r-cs)\bar{\phi}(u-(r-cs))\,P^{(X_1,W_1)}(dr,ds) \\
&= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,u+cs]} \bar{\phi}(u-r+cs)\,P^{X_1}(dr)\,P^{W_1}(ds) \\
&= \int_{(0,\infty)}\Big(\int_{(0,u+cs]} \bar{\phi}(u-r+cs)\,P^{X_1}(dr)\Big)\,\lambda e^{-\lambda s}\,ds \\
&\overset{z=u+cs}{=} \lambda\int_u^\infty \Big(\int_{(0,z]} \bar{\phi}(z-r)\,P^{X_1}(dr)\Big)\,\frac{e^{-\lambda(z-u)/c}}{c}\,dz \\
&= \frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty \Big(\int_{(0,z]} \bar{\phi}(z-r)\,P^{X_1}(dr)\Big)\,e^{-\lambda z/c}\,dz.
\end{aligned}$$

Da der Integrand des äußeren Integrals auf der rechten Seite beschränkt ist, ist das Integral λ^1-f.ü. differenzierbar und die Ableitung ist gleich dem Negativem des Integranden für $z = u$. Also ist auch $\bar{\phi}$ absolutstetig mit Lebesgue-Dichte

$$\begin{aligned}\bar{\phi}'(u) &= \frac{\lambda}{c}\Big(\frac{\lambda}{c}\mathrm{e}^{\lambda u/c}\int_u^\infty \Big(\int_{(0,z]} \bar{\phi}(z-r)\,P^{X_1}(dr)\Big)\,\mathrm{e}^{-\lambda z/c}\,dz \\ &\qquad -\mathrm{e}^{\lambda u/c}\int_{(0,u]} \bar{\phi}(u-r)\,P^{X_1}(dr)\mathrm{e}^{-\lambda u/c}\Big) \\ &= \frac{\lambda}{c}\bar{\phi}(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,u]} \bar{\phi}(u-r)\,P^{X_1}(dr), \quad u \geqslant 0.\end{aligned}$$

Durch Integration erhält man nun eine Integraldarstellung für $\bar{\phi}$:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(t) &= \bar{\phi}(0) + \int_0^t \bar{\phi}'(u)\,du \\ &= \bar{\phi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{\phi}(u)\,du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_{(0,u]} \bar{\phi}(u-r)\,P^{X_1}(dr)\,du \\ &= \bar{\phi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{\phi}(t-r)\,dr - \frac{\lambda}{c}\int_{(0,t]}\int_r^t \bar{\phi}(u-r)\,du\,P^{X_1}(dr).\end{aligned}$$

Das letzte Integral formen wir nun mit Hilfe der Transformation $v = u - r$ und partieller Integration um:

$$\begin{aligned}\int_{(0,t]}\int_r^t \bar{\phi}(u-r)\,du\,P^{X_1}(dr) &= \int_{(0,t]}\int_0^{t-r} \bar{\phi}(v)\,dv\,P^{X_1}(dr) \\ &= F_X(r)\int_0^{t-r}\bar{\phi}(v)\,dv\Big|_{r=0}^{r=t} + \int_0^t F_X(r)\bar{\phi}(t-r)\,dr,\end{aligned}$$

wobei der erste Summand gleich 0 ist. Insgesamt erhält man also

$$\bar{\phi}(t) = \bar{\phi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(r))\bar{\phi}(t-r)\,dr.$$

Wegen (6.1) gilt $\lim_{t\to\infty}\bar{\phi}(t) = 1$, so dass mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(0) &= \lim_{t\to\infty}\Big(\bar{\phi}(t) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(r))\bar{\phi}(t-r)\,dr\Big) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty 1 - F_X(r)\,dr \\ &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c}\end{aligned}$$

folgt. Zusammen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\phi(t) &= 1 - \bar{\phi}(t) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(r))(1-\phi(t-r))\,dr \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_t^\infty (1-F_X(r))\,dr + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(r))\phi(t-r)\,dr. \qquad \square\end{aligned}$$

6.5 Definition *Das Wahrscheinlichkeitsmaß* Q_I *mit Lebesgue-Dichte* $t \mapsto \frac{1}{\mu}(1 - F_X(t))1_{[0,\infty)}(t)$ *wird* **tail-integrierte Verteilung** *zu* F_X *genannt.* □

6.6 Bemerkung Die Gleichung (6.2) hat die Form

$$\phi(u) = z(u) + \int_{[0,u]} \phi(u-t)\, M(dt) \tag{6.3}$$

mit

$$M = \frac{\lambda\mu}{c} Q_I, \qquad z(u) = M(u,\infty).$$

Eine Gleichung dieses Typs heißt *Erneuerungsgleichung*. Da nach Voraussetzung $\lambda\mu/c < 1$ gilt und daher M strikt substochastisch (defektiv) ist, d.h. $M[0,\infty) < 1$ gilt, spricht man von einer *defektiven Erneuerungsgleichung*.

Mit Hilfe des *Faltungsoperators* kann die Erneuerungsgleichung kompakter geschrieben werden. Seien im folgenden ν, ν_1 und ν_2 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, die Mengen der Form $(-\infty, u]$ endliche Werte zuordnen und f, f_1 und f_2 messbare Abbildungen von $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ nach $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Man definiert

$$(f * \nu)(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u-t)\, \nu(dt),$$

falls die rechte Seite in $\mathbb{R}$ existiert. Ebenso definiert man die Faltung der Maße ν_1 und ν_2 als Maß mit maßdefinierender Funktion

$$(\nu_1 * \nu_2)(-\infty, u] := \int_{\mathbb{R}} \nu_1(-\infty, u-t]\, \nu_2(dt),$$

falls dieses Integral für alle $u \in \mathbb{R}$ endlich ist. Rekursiv definiert man Faltungspotenzen von ν durch

$$\nu^{*0} := \varepsilon_0, \quad \nu^{*1} := \nu, \quad \nu^{*(n+1)} := \nu * \nu^{*n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ist speziell f auf $[0,\infty)$ definiert und ν ein Maß mit $\nu(-\infty, 0) = 0$, so setzt man $f(x) := 0$ für $x < 0$ und erhält dann

$$(f * \nu)(u) = \int_{[0,u]} f(u-t)\, \nu(dt).$$

Ebenso gilt für Maße ν_1 und ν_2 mit $\nu_1(-\infty,0) = \nu_2(-\infty,0) = 0$

$$(\nu_1 * \nu_2)[0,u] = \int_{[0,u]} \nu_1[0, u-t]\, \nu_2(dt),$$

wobei jeweils vorausgesetzt worden ist, dass alle Integrale in $\mathbb{R}$ existieren.

Der Faltungsoperator ist linear, d.h. für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (af) * \nu &= a(f * \nu) = f * (a\nu) \\ (f_1 + f_2) * \nu &= f_1 * \nu + f_2 * \nu \\ f * (\nu_1 + \nu_2) &= f * \nu_1 + f * \nu_2, \end{aligned}$$

falls jeweils eine der Seiten wohldefiniert ist. Ferner gelten die folgenden Assoziativgesetze:

$$f \ast (\nu_1 \ast \nu_2) = (f \ast \nu_1) \ast \nu_2$$
$$\nu \ast (\nu_1 \ast \nu_2) = (\nu \ast \nu_1) \ast \nu_2,$$

falls jeweils eine der Seiten wohldefiniert ist. Man beachte schließlich, dass $f \ast \nu^{\ast 0} = f \ast \varepsilon_0 = f$.

Die Gleichung (6.3) lässt sich nun schreiben als

$$\phi = z + \phi \ast M.$$

Sukzessives Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
\phi &= z + (z + \phi \ast M) \ast M \;=\; z + z \ast M + \phi \ast M^{\ast 2} \\
&= z + z \ast M + (z + \phi \ast M) \ast M^{\ast 2} \;=\; \sum_{k=0}^{2} z \ast M^{\ast k} + \phi \ast M^{\ast 3} \;=\; \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{n} z \ast M^{\ast k} + \phi \ast M^{\ast (n+1)}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dadurch wird folgende Lösung der Erneuerungsgleichung nahe gelegt:

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} z \ast M^{\ast k},$$

d.h.

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,u]} z(u-t)\, M^{\ast k}(dt).$$

□

Im folgenden wird gezeigt, dass die in Bemerkung 6.6 angegebene Lösung der Erneuerungsgleichung (6.3) die einzige relevante ist.

6.7 Satz *Die Erneuerungsgleichung*

$$g(u) = z(u) + \int_{[0,u]} g(u-t)\, M(dt), \qquad u \geqslant 0,$$

mit einem Maß $M \neq \varepsilon_0$ *auf* $\big([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)\big)$, *so dass* $0 < M[0,\infty) \leqslant 1$, *und lokal beschränkter Funktion* z *(d.h.* z *ist auf beschränkten Mengen beschränkt) besitzt als einzige lokal beschränkte Lösung*

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,u]} z(u-t)\, M^{\ast n}(dt) = \sum_{n=0}^{\infty} (z \ast M^{\ast n})(u), \quad u \geqslant 0. \tag{6.4}$$

BEWEIS. Definiere $D := \sup_{t\in[0,u]} |z(t)|$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{M} := M/M[0,\infty)$, iid Zufallsvariablen Y_i, $i \in \mathbb{N}$, mit $P^{Y_i} = \tilde{M}$, sowie $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $M^{*n} = \big(M[0,\infty)\big)^n \tilde{M}^{*n}$ und somit für alle $t \in [0,u]$

$$\sum_{n=0}^\infty \left| \int_{[0,t]} z(t-s)\, M^{*n}(ds) \right| \leqslant D \sum_{n=0}^\infty \big(M[0,\infty)\big)^n \tilde{M}^{*n}[0,u].$$

Ist $M[0,\infty) < 1$, so ist die rechte Seite beschränkt durch

$$D \sum_{n=0}^\infty \big(M[0,\infty)\big)^n = \frac{D}{1 - M[0,\infty)} < \infty,$$

im Fall $M[0,\infty) = 1$ ist sie gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \tilde{M}^{*n}[0,u] &= \sum_{n=0}^\infty P\{S_n \leqslant u\} = \sum_{n=0}^\infty P\{\mathrm{e}^{-S_n} \geqslant \mathrm{e}^{-u}\} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^u E(\mathrm{e}^{-S_n}) = \mathrm{e}^u \sum_{n=0}^\infty \big(E(\mathrm{e}^{-Y_1})\big)^n \\
&= \frac{\mathrm{e}^u}{1 - E(\mathrm{e}^{-Y_1})} < \infty,
\end{aligned}$$

wobei die Voraussetzungen an M implizieren, dass $Y_1 \geqslant 0$ P-f.s. und $P\{Y_1 = 0\} < 1$ und folglich auch $E(\mathrm{e}^{-Y_1}) < 1$. Dies zeigt zum einen, dass g in der Tat wohldefiniert und lokal beschränkt ist, und zum anderen, dass $\sum_{n=0}^\infty M^{*n}[0,u]$ für alle $u \in [0,\infty)$ endlich ist, insbesondere also $M^{*n}[0,u]$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. (Ist die Erneuerungsgleichung defektiv, so ist $\sum_{n=0}^\infty M^{*n}$ sogar ein endliches Maß, denn $M^{*n}[0,\infty) = (M[0,\infty))^n$.)

Man erhält wiederum mit Hilfe der Linearität und Assoziativität der Faltung

$$z + g * M = z + \sum_{n=0}^\infty (z * M^{*n}) * M = z * M^{*0} + z * \sum_{k=1}^\infty M^{*k} = g,$$

d.h. g ist tatsächlich eine Lösung der Erneuerungsgleichung.

Sei nun $\tilde{g}$ eine weitere lokal beschränkte Lösung. Dann ist $h := g - \tilde{g}$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$h(u) = \int_{[0,u]} h(u-t)\, M(dt) = (h * M)(u).$$

Induktiv folgt wie in Bemerkung 6.6 (mit $z = 0$)

$$h(u) = (h * M^{*n})(u) = \int_{[0,u]} h(u-t)\, M^{*n}(dt)$$

und somit

$$|h(u)| \leqslant \sup_{t\in[0,u]} |h(t)| \cdot M^{*n}[0,u] \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$, da nach Voraussetzung h lokal beschränkt ist. Damit haben wir aber gezeigt, dass $\tilde{g}$ mit g übereinstimmen muss. $\square$

6.8 Korollar *Gilt im Cramér-Lundberg-Modell $c > \lambda\mu$, so hat die Ruinwahrscheinlichkeit die Darstellung*

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n Q_I^{*n}(u,\infty), \qquad u \geqslant 0. \qquad \square$$

Beweis. Eine Anwendung von Satz 6.7 auf die Gleichung (6.2) liefert

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,u]} \frac{\lambda\mu}{c} Q_I(u-t,\infty) \Big(\frac{\lambda\mu}{c} Q_I\Big)^{*n}(dt) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^{n+1} \int_{[0,u]} (1 - Q_I[0,u-t])\, Q_I^{*n}(dt) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^{n+1} \big(Q_I^{*n}[0,u] - Q_I^{*(n+1)}[0,u]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^{n+1} \big(Q_I^{*(n+1)}(u,\infty) - Q_I^{*n}(u,\infty)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^{k} Q_I^{*k}(u,\infty) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^{n+1} Q_I^{*n}(u,\infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n Q_I^{*n}(u,\infty),
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt $Q_I^{*0}(u,\infty) = \varepsilon_0(u,\infty) = 0$ für $u \geqslant 0$ ausgenutzt worden ist. $\square$

Die Abbildung

$$[0,\infty) \ni u \mapsto 1 - \phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n Q_I^{*n}[0,u]$$

(man beachte $Q_I^{*0}(u,\infty) = \varepsilon_0(u,\infty) = 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda\mu/c)(\lambda\mu/c)^k = 1$) lässt sich als Verteilungsfunktion des Gesamtschadens im Standardmodell der kollektiven Risikotheorie mit Schadenhöhenverteilung Q_I und geometrischer Schadenzahlverteilung $P\{N = k\} = (1-\phi(0))\phi^k(0)$ mit "Misserfolgswahrscheinlichkeit" $p = \phi(0) = \lambda\mu/c$ (s. Satz 6.4) interpretieren. Sind die Ruinwahrscheinlichkeit $\phi(0)$ bei Anfangskapital 0 und die tail-integrierte Verteilungsfunktion $u \mapsto Q_I[0,u]$ bekannt, so lassen sich die in Kapitel 2 vorgestellten Methoden verwenden, um $\phi(u)$ zu berechnen. Man beachte dazu, dass N gerade $\mathcal{B}^-_{(1,1-p)}$-verteilt ist und daher die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $\varphi_N(x) = (1-p)/(1-px)$ besitzt für $x \in (0, 1/p)$.

6.9 Beispiel Sind die Schadenhöhen exponentialverteilt mit Erwartungswert μ, so ergibt sich für die tail-integrierte Verteilung

$$Q_I(u,\infty) = \frac{1}{\mu}\int_u^{\infty} \mathrm{e}^{-x/\mu}\, dx = \mathrm{e}^{-u/\mu},$$

d.h. $Q_I = P^{X_1}$ mit momenterzeugender Funktion $\psi_X(t) = 1/(1-\mu t), t < 1/\mu$. Sei N eine von $X_i, i \in \mathbb{N}$, unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1-p = 1-\lambda\mu/c$. Die Ruinwahrscheinlichkeit ϕ ist dann gerade die Survivalfunktion von $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ mit momenterzeugender Funktion

$$\psi_{S_N}(t) = \varphi_N(\psi_X(t)) = \frac{1-p}{1-\frac{p}{1-\mu t}} = \frac{(1-p)(1-\mu t)}{1-\mu t-p} = 1-p+\frac{p}{1-\frac{\mu}{1-p}t}$$

für $t < (1-p)/\mu$. Dies ist gleichzeitig die momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariablen V mit Verteilungsfunktion $x \mapsto 1-p+p(1-\mathrm{e}^{-x(1-p)/\mu})$, $x \geqslant 0$, d.h. P^V ist eine Mischung des Dirac-Maßes in 0 und einer Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\mu/(1-p)$. Es folgt für $u \geqslant 0$

$$\phi(u) = P\{V > u\} = p\mathrm{e}^{-u(1-p)/\mu} = \frac{\lambda\mu}{c}\mathrm{e}^{-Ru} \qquad \text{mit} \quad R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}.$$

Dabei lässt sich R als Anpassungskoeffizienten des strikt substochastischen Maßes pQ_I (also einer defektiven Verteilung) auffassen, denn

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rx}\,(pQ_I)(dx) = \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rx}\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-x/\mu}\,dx = \frac{\lambda}{c}\frac{1}{1/\mu - R} = 1. \qquad \square$$

Im folgenden soll ein Analogon zu Satz 5.9 hergeleitet werden.

6.10 Satz und Definition (Cramér-Lundberg-Schranke) *Gilt im Cramér-Lundberg-Modell $c > \lambda\mu$ und besitzt die Gleichung*

$$\psi_X(R) = 1 + \frac{cR}{\lambda} \tag{6.5}$$

eine Lösung $R > 0$, so gilt

$$\phi(u) \leqslant \mathrm{e}^{-Ru} \qquad \forall\, u \geqslant 0.$$

R heißt dann **Cramér-Lundberg-Anpassungskoeffizient**. $\square$

Beweis. Wendet man Satz 5.9 über die zeitdiskrete Cramér-Lundberg-Schranke auf die Pseudo-Schadenhöhen $\tilde{X}_i = X_i - cW_i$ und die Pseudo-Prämie $\tilde{\pi} = 0$ an, so erhält man $\phi(u) \leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$ für alle $u \geqslant 0$, wobei $R > 0$ die Lösung der Gleichung $\psi_{X_1-cW_1}(R) = 1$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass diese Gleichung äquivalent zu (6.5) ist.

Da X_1 und $-cW_1$ unabhängig sind und W_1 exponentialverteilt mit Mittelwert $1/\lambda$ gilt

$$\psi_{X_1-cW_1}(R) = \psi_{X_1}(R)\cdot\psi_{-cW_1}(R) = \psi_{X_1}(R)\cdot\psi_{W_1}(-cR) = \psi_{X_1}(R)\cdot\frac{1}{1+cR/\lambda}.$$

Damit ist (6.5) offensichtlich äquivalent zu $\psi_{X_1-cW_1}(R) = 1$. $\square$

6.11 Bemerkung (i) Offensichtlich kann (6.5) nur dann für ein $R > 0$ erfüllt sein, wenn die Cramér-Bedingung erfüllt ist. Wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{Rx}\, Q_I(dx) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{Rx}(1-F_X(x))\,dx \\ &= \frac{1}{\mu R}e^{Rx}(1-F_X(x))\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{\mu R}\int_0^\infty e^{Rx}\,F_X(dx) \\ &= \frac{1}{\mu R}(-1+\psi_X(R))\end{aligned}$$

(man beachte dabei $e^{Rx}(1-F_X(x)) \leqslant \int_x^\infty e^{Ru}\,F_X(du) \to 0$ für $x\to\infty$) ist (6.5) dann äquivalent zu

$$\int_0^\infty e^{Rx}\,Q_I(dx) = \frac{c}{\mu\lambda}, \tag{6.6}$$

bzw. mit $p := \mu\lambda/c = \phi(0)$

$$\int_0^\infty e^{Rx}\,(pQ_I)(dx) = 1.$$

R ist also (wie schon in Beispiel 6.9) der Anpassungkoeffizient der defektiven Verteilung pQ_I und, wie im Beweis zu Satz 6.10 gezeigt, auch der Anpassungskoeffizient von $P^{X_1-cW_1}$.

(ii) Die in Bemerkung 6.6 diskutierte *defektive* Erneuerungsgleichung

$$\phi(u) = pQ_I(u,\infty) + \int_0^u \phi(u-t)(pQ_I)(dt)$$

mit defektiver Verteilung pQ_I lässt sich unter der Bedingung (6.5) zu einer Erneuerungsgleichung mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß als Integrator umformen. Wir definieren dazu Q_R als das Maß mit Q_I-Dichte $x \mapsto pe^{Rx}$, d.h. mit Lebesgue-Dichte $x \mapsto \frac{\lambda}{c}e^{Rx}(1-F_X(x))1_{(0,\infty)}(x)$; die Identität (6.6) zeigt, dass dann in der Tat $Q_R(0,\infty) = 1$ gilt. Für $\phi_R(u) := e^{Ru}\phi(u)$ gilt dann die Erneuerungsgleichung

$$\phi_R(u) = e^{Ru}\big(pQ_I(u,\infty)+\int_0^u \phi(u-t)\,(pQ_I)(dt)\big) = pe^{Ru}Q_I(u,\infty)+\int_0^u \phi_R(u-t)\,Q_R(dt).$$

Gemäß Satz 6.7 besitzt diese Gleichung genau eine lokal beschränkte Lösung.

Das *Erneuerungstheorem* (s. z.B. Feller (1966): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II*, Theorem XI.1.2, p. 349) liefert unter schwachen Zusatzbedingungen strukturelle Aussagen über das asymptotische Verhalten der Lösung für $u \to \infty$: Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{Q}$ auf $\big((0,\infty),\mathcal{B}(0,\infty)\big)$, das nicht die gesamte Masse auf einem Gitter (also eine Menge der Form $a\mathbb{N}$ für ein $a > 0$) konzentriert und einen endlichen Mittelwert besitzt, und eine direkt Riemann-integrierbare Funktion h besitzt die Erneuerungsgleichung

$$g(u) = h(u) + \int_{(0,u]} g(u-t)\,\tilde{Q}(dt)$$

genau eine direkt Riemann-integrierbare Lösung g und für diese gilt

$$\lim_{u\to\infty} g(u) = \frac{\int_0^\infty h(x)\,dx}{\int_0^\infty x\,\tilde{Q}(dx)}.$$

In der vorliegenden Situation gilt also sogar

$$\lim_{u\to\infty} \phi_R(u) = \frac{\int_0^\infty p\mathrm{e}^{Rx} Q_I(x,\infty)\,dx}{\int_0^\infty x\,Q_R(dx)},$$

falls $\int_0^\infty x\,Q_R(dx) < \infty$. Mit partieller Integration

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rx} Q_I(x,\infty)\,dx = \frac{1}{R}\mathrm{e}^{Rx}Q_I(x,\infty)\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rx}\,Q_I(dx) = \frac{1}{R}\Big(-1+\frac{1}{p}\Big)$$

(vgl. (6.6)) erhält man also unter der Bedingung $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{Rx}(1-F_X(x))\,dx < \infty$ die folgende exakte Asymptotik für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\lim_{u\to\infty} \mathrm{e}^{Ru}\phi(u) = \frac{\mu(c/(\lambda\mu)-1)}{R\int_0^\infty x\mathrm{e}^{Rx}(1-F_X(x))\,dx} = \frac{c/\lambda-\mu}{R}\Big/\int_0^\infty x\mathrm{e}^{Rx}(1-F_X(x))\,dx.$$

Die Cramér-Lundberg-Schranke ist in dem Fall also bis auf einen konstanten Faktor optimal! Insbesondere lässt sich die Konstante R im Exponenten nicht mehr verbessern. (Eine analoge Aussage für die zeitdiskreten Modelle hatten wir in Bemerkung 5.10 fest gehalten.) □

Unter der Cramér-Bedingung fällt die Ruinwahrscheinlichkeit mit steigendem Startkapital i.d.R. exponentiell schnell ab. Abschließend soll nun die Ruinwahrscheinlichkeit für eine große Klasse von Schadenhöhenverteilungen, die die Cramér-Bedingung nicht erfüllen, analysiert werden.

6.12 Definition *Eine Verteilung Q auf $\big((0,\infty),\mathcal{B}(0,\infty)\big)$ mit $Q(x,\infty) > 0$ für alle $x > 0$ heißt* **subexponentiell***, falls*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{Q^{*2}(x,\infty)}{Q(x,\infty)} \leqslant 2.$$

□

6.13 Bemerkung Es gilt stets

$$\begin{aligned} Q^{*2}(0,x] &= \int_{(0,x]} Q(0,x-u]\,Q(du) \\ &\leqslant \int_{(0,x]} Q(0,x]\,Q(du) \\ &= \big(Q(0,x]\big)^2 \end{aligned}$$

und folglich

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{Q^{*2}(x,\infty)}{Q(x,\infty)} \geqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{1-(1-Q(x,\infty))^2}{Q(x,\infty)} = 2.$$

Für subexponentielle Verteilungen gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Q^{*2}(x,\infty)}{Q(x,\infty)} = 2. \qquad \square$$

6.14 Lemma *Ist Q subexponentiell, so gilt sogar für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Q^{*n}(x,\infty)}{Q(x,\infty)} = n. \qquad \square$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, für $n = 2$ bereits in Bemerkung 6.13 gezeigt.

Für den Induktionsschluß definieren wir $F(x) := Q(0,x]$ und $\bar{F}(x) := Q(x,\infty)$, sowie in analoger Weise $F^{*n}(x) := Q^{*n}(0,x]$ und $\overline{F^{*n}}(x) := Q^{*n}(x,\infty)$. Ausgangspunkt ist die Darstellung

$$\frac{Q^{*(n+1)}(x,\infty)}{Q(x,\infty)} = 1 + \frac{F(x) - F^{*(n+1)}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_{(0,x]} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) \tag{6.7}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein x_ε so, dass für alle $x \geqslant x_\varepsilon$

$$\left|\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)} - n\right| \leqslant \varepsilon.$$

Also gilt für ein geeignetes $r(x)$ mit $|r(x)| \leqslant \varepsilon$

$$\int_{(0,x-x_\varepsilon]} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) = (n + r(x)) \int_{(0,x-x_\varepsilon]} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt). \tag{6.8}$$

Ferner erhält man aus (6.7) mit $n = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \int_{(0,x_\varepsilon]} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) + \int_{(x_\varepsilon,x]} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt)\\ &\geqslant 1 + F(x_\varepsilon) + \frac{\bar{F}(x-x_\varepsilon)}{\bar{F}(x)}\big(F(x) - F(x_\varepsilon)\big),\end{aligned}$$

woraus wiederum

$$1 \leqslant \frac{\bar{F}(x-x_\varepsilon)}{\bar{F}(x)} \leqslant \frac{\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(x_\varepsilon)}{F(x) - F(x_\varepsilon)} \longrightarrow 1$$

für $x \to \infty$ folgt. Wir erhalten daher

$$\tilde{r}(x) := \int_{(x-x_\varepsilon,x]} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) \leqslant \frac{F(x) - F(x-x_\varepsilon)}{\bar{F}(x)} = \frac{\bar{F}(x-x_\varepsilon)}{\bar{F}(x)} - 1 \longrightarrow 0$$

sowie (vgl. (6.7))

$$\int_{(0,x-x_\varepsilon]} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) = \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} - \tilde{r}(x) = \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - \tilde{r}(x) \longrightarrow 1. \tag{6.9}$$

Zusammen zeigen (6.8) und (6.9), dass für hinreichend großes $x \geqslant x_\varepsilon$

$$\left| \int_{(0,x-x_\varepsilon]} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) - n \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Andererseits gilt die Abschätzung

$$\int_{(x-x_\varepsilon,x]} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x)}\, F(dt) \leqslant \sup_{0<u\leqslant x_\varepsilon} \frac{\overline{F^{*n}}(u)}{\bar{F}(u)} \cdot \tilde{r}(x) \longrightarrow 0$$

für $x \to \infty$, so dass (6.7) die Induktionsbehauptung folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war. □

6.15 Bemerkung (i) Lemma 6.14 kann wie folgt interpretiert werden: Sind $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Verteilung Q, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P\{\sum_{i=1}^n X_i > x\}}{P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i > x\}} = 1,$$

d.h. die Summe ist im Wesentlichen genau dann groß, wenn ein Summand groß ist. Es gilt nämlich nach der Siebformel

$$\begin{aligned}
\left| P\Big\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i > x \Big\} - \sum_{i=1}^n P\{X_i > x\} \right| &= \left| P\Big(\bigcup_{i=1}^n \{X_i > x\} \Big) - n\bar{F}(x) \right| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P\{X_i > x, X_j > x\} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} (\bar{F}(x))^2,
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i > x\}}{\bar{F}(x)} = n.$$

Ist die Schadenhöhenverteilung subexponentiell, so tritt daher der Ruin bei hohem Startkapital i.d.R. ggf. durch *einen* großen Schaden ein, während unter der Cramér-Bedingung der Ruin ggf. meistens durch eine große Zahl kleinerer Schäden verursacht wird.

(ii) Der Name "subexponentiell" erklärt sich dadurch, dass $\mathrm{e}^{\varepsilon x}\bar{F}(x) \to \infty$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\bar{F}(x)$ konvergiert langsamer gegen 0 als die Survivalfunktion jeder Exponentialverteilung. Insbesondere ist die Cramér-Bedingung nicht erfüllt, denn für alle $t \geqslant 0$ gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\delta x}\, F(dx) \geqslant \mathrm{e}^{\delta t}\bar{F}(t) \to \infty$.

Beispiele solcher Verteilung sind (wie wir im Folgenden sehen werde) u.a. Pareto-Verteilungen, Burr-Verteilungen und Weibull-Verteilungen mit Survivalfunktion $\bar{F}(x) = \exp(-x^\tau)$ für ein $\tau \in (0,1)$. □

Für subexponentielle tail-integrierte Schadenhöhenverteilung verhält sich die Ruinwahrscheinlichkeit bei hohem Startkapital bis auf eine multiplikative Konstante wie die Survivalfunktion der tail-integrierten Verteilung.

6.16 Satz *Ist die tail-integrierte Schadenhöhenverteilung Q_I subexponentiell, so gilt im Cramér-Lundberg-Modell mit $c > \lambda\mu$*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi(u)}{Q_I(u,\infty)} = \frac{1}{\frac{c}{\lambda\mu} - 1}. \qquad \square$$

BEWEIS. Wie oben setzen wir $p := \lambda\mu/c$. Wenn wir zeigen können, dass für hinreichend großes u eine summierbare Majorante zu $(p^n Q_I^{*n}(u,\infty)/Q_I(u,\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so folgt aus Korollar 6.8

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi(u)}{Q_I(u,\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)p^n \lim_{u\to\infty} \frac{Q_I^{*n}(u,\infty)}{Q_I(u,\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)p^n n = \frac{p}{1-p},$$

also die Behauptung.

Zur Konstruktion der gesuchten Majorante wählen wir ein $\varepsilon \in (0,1)$ so, dass $p(1+\varepsilon) < 1$. Bei Verwendung der Notation aus dem Beweis von Lemma 6.14 für F_I, der Verteilungsfunktion von Q_I, existiert dann ein $x_\varepsilon > 0$ so, dass

$$\sup_{x\geqslant x_\varepsilon} \frac{\overline{F_I^{*2}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leqslant 2+\varepsilon.$$

Wir zeigen nun induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\geqslant 0} \frac{\overline{F_I^{*n}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leqslant \Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon},$$

das p^n-fache der rechten Seite also eine summierbare Majorante von $p^n Q_I^{*n}(u,\infty)/Q_I(u,\infty)$ darstellt.

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, da die rechte Seite der Ungleichung größer als 1 ist. Für den Induktionsschluß beachte man zunächst, dass für $x \leqslant x_\varepsilon$ offensichtlich

$$\frac{\overline{F_I^{*(n+1)}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leqslant \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)} \leqslant \Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon}$$

gilt. Für $x > x_\varepsilon$ gilt andererseits gemäß (6.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F_I^{*(n+1)}}(x)}{\bar{F}_I(x)} &= 1 + \int_{(0,x]} \frac{\overline{F_I^{*n}}(x-t)}{\bar{F}_I(x)}\, F_I(dt) \\
&\leqslant 1 + \sup_{u>0} \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\bar{F}_I(u)} \int_{(0,x]} \frac{\bar{F}_I(x-t)}{\bar{F}_I(x)}\, F_I(dt) \\
&\leqslant 1 + \left[\Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon}\right]\left(\frac{\overline{F_I^{*2}}(x)}{\bar{F}_I(x)} - 1\right) \\
&\leqslant 1 + \left[\Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon}\right](1+\varepsilon) \\
&\leqslant \Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\left[\frac{(1+\varepsilon)^{n+1} - (1+\varepsilon)}{\varepsilon} + 1\right] \\
&= \Big(1 + \frac{1}{\bar{F}_I(x_\varepsilon)}\Big)\frac{(1+\varepsilon)^{n+1} - 1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

also die Induktionsbehauptung. □

Für die Anwendung dieser asymptotischen Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit ist zu untersuchen, welche Verteilungen subexponentiell sind. Insbesondere sind dies die Verteilungsfunktionen, die sich für große Argumente ähnlich wie Pareto-Verteilungsfunktionen verhalten, für die also die Survivalfunktion i.W. wie eine Potenz abfällt.

6.17 Definition *Eine Funktion* $h : \big([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)\big) \to \big([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)\big)$ *heißt* **regulär variierend mit Index (Exponentem)** $\alpha \in \mathbb{R}$ *(i.Z.* $h \in \mathcal{R}_\alpha$*), falls für alle* $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha. \tag{6.10}$$

Im Fall $\alpha = 0$ *heißt* h *auch* **langsam variierend**. □

6.18 Bemerkung (i) Es lässt sich zeigen, dass in (6.10) nur Potenzfunktionen als nicht-triviale Grenzfunktionen auftreten können; dies soll hier nur für eine monotone Funktion h gezeigt werden. Aus $h(tx)/h(x) \to g(t)$ folgt nämlich

$$g(st) = \lim_{x\to\infty} \frac{h(stx)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{h(stx)}{h(tx)} \cdot \frac{h(tx)}{h(x)} = g(s) \cdot g(t).$$

Da mit h auch g monoton ist und nach Voraussetzung nicht identisch 0, folgt daraus bekanntlich, dass $g(t) = t^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ gilt.

(ii) Für eine Funktion $h \in \mathcal{R}_\alpha$ gilt stets

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\tau} h(x) = \begin{cases} 0, & \tau > \alpha, \\ \infty, & \tau < \alpha. \end{cases}$$

Insbesondere folgt für den Erwartungswert μ einer Schadenhöhenverteilung mit Survivalfunktion $\bar{F}_X \in \mathcal{R}_{-\alpha}$

$$\mu \begin{cases} < \infty, & \alpha > 1, \\ = \infty, & \alpha < 1, \end{cases}$$

denn im Fall $\alpha > 1$ gilt für $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ und hinreichend großes x_0

$$\mu = \int_0^\infty \bar{F}_X(x)\,dx \leqslant \int_0^{x_0} \bar{F}_X(x)\,dx + \int_{x_0}^\infty x^{-\alpha+\varepsilon}\,dx < \infty$$

und im Fall $\alpha < 1$ für $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ und hinreichend großes x_0

$$\mu \geqslant \int_{x_0}^\infty x^{-\alpha-\varepsilon}\,dx = \infty.$$ □

6.19 Satz *(i) Ist* G *eine Verteilungsfunktion auf* $(0,\infty)$ *mit* $\bar{G} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$*, so ist* G *subexponentiell.*

(ii) (Satz von Karamata)
Besitzt die Schadenhöhe einen endlichen Erwartungswert μ, so gilt

$$\bar{F}_X \in \mathcal{R}_{-\alpha} \quad \textit{für ein } \alpha > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_I(x)}{x\bar{F}_X(x)} = \frac{1}{\mu(\alpha-1)}.$$

Insbesondere ist dann $\bar{F}_I \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$. □

Beweis. (i) Für alle $0 < \delta < 1/2$ gilt gemäß (6.7)

$$\begin{aligned}
\overline{G^{*2}}(x) &= 1 - G(x) + \int_{[0,x]} 1\, G(dt) - \int_{[0,x]} G(x-t)\, G(dt) \\
&= \bar{G}(x) + \int_{(0,x]} \bar{G}(x-t)\, G(dt) \\
&\leqslant \int_{(0,\delta x]} \bar{G}((1-\delta)x)\, G(dt) + \int_{(\delta x,(1-\delta)x]} \bar{G}(\delta x)\, G(dt) + \int_{((1-\delta)x,x]} 1\, G(dt) + \bar{G}(x) \\
&= \bar{G}((1-\delta)x)G(\delta x) + \bar{G}(\delta x)\big(\bar{G}(\delta x) - \bar{G}((1-\delta)x)\big) + \\
&\qquad \bar{G}((1-\delta)x) - \bar{G}(x) + \bar{G}(x) \\
&\leqslant \bar{G}((1-\delta)x) + \big(\bar{G}(\delta x)\big)^2 + \bar{G}((1-\delta)x),
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\bar{G}(x)} &\leqslant 2 \cdot \limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{G}((1-\delta)x)}{\bar{G}(x)} + \limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(\delta x)}{\bar{G}(x)} \bar{G}(\delta x) \\
&= 2(1-\delta)^{-\alpha} + \delta^{-\alpha} \cdot 0.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\delta \downarrow 0$ liefert nun die Behauptung.

(ii) Für die Implikation "$\Rightarrow$" soll hier nur eine heuristische Begründung gegeben werden. Wegen der regulären Variation von $\bar{F}_X$ liegt es nahe, dass für λ^1-f.a. x

$$\frac{\bar{F}_I(x)}{x\bar{F}_X(x)} = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \frac{\bar{F}_X(t)}{x\bar{F}_X(x)}\, dt = \frac{1}{\mu} \int_1^\infty \frac{\bar{F}_X(sx)}{\bar{F}_X(x)}\, ds \longrightarrow \frac{1}{\mu} \int_1^\infty s^{-\alpha}\, ds = \frac{1}{\mu(\alpha-1)}.$$

(Für einen formalen Beweis benötigt man eine integrable Majorante von $\bar{F}_X(sx)/\bar{F}_X(x)$ für alle hinreichend großen x. Die Existenz einer solchen wird z.B. durch die sog. Potter-Schranken gewährleistet; s. Bingham, Goldie und Teugels (1987), *Regular Variation*, Theorem 1.5.6.).

Sei umgekehrt $\lim_{x\to\infty} x\bar{F}_X(x)/\bar{F}_I(x) = \mu(\alpha-1)$. Dann folgt wegen $d/dx \log(\mu\bar{F}_I(x))$

$= -\bar{F}_X(x)/(\mu\bar{F}_I(x))$ für λ^1-f.a. x

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{F}_I(tx)}{\bar{F}_I(x)} &= \exp\Big(\log\big(\mu\bar{F}_I(tx)\big) - \log\big(\mu\bar{F}_I(x)\big)\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_x^{tx} \frac{\bar{F}_X(y)}{\mu\bar{F}_I(y)}\,dy\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_1^{t} \frac{xr\bar{F}_X(xr)}{\mu\bar{F}_I(xr)} r^{-1}\,dr\Big) \\
&\to \exp\Big(-(\alpha-1)\int_1^{t} r^{-1}\,dr\Big) \\
&= t^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

für $x \to \infty$, also die behauptete reguläre Variation von $\bar{F}_I$. Außerdem erhält man nun

$$\frac{\bar{F}_X(tx)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{\bar{F}_I(tx)}{\bar{F}_I(x)} \cdot \frac{tx\bar{F}_X(tx)}{\bar{F}_I(tx)} \cdot \frac{\bar{F}_I(x)}{x\bar{F}_X(x)} \cdot t^{-1} \to t^{-\alpha}$$

für $x \to \infty$, also $\bar{F}_X \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. □

6.20 Korollar *Ist im Cramér-Lundberg-Modell die Survivalfunktion der Schadenhöhenverteilung regulär variierend mit Index $-\alpha$ für ein $\alpha > 1$ und gilt $c > \lambda\mu$, so gilt*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi(u)}{u\bar{F}_X(u)} = \frac{1}{(c/\lambda - \mu)(\alpha - 1)}.$$ □

Beweis. Aus Satz 6.16 und Satz 6.19 ergibt sich direkt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi(u)}{u\bar{F}_X(u)} = \frac{1}{\frac{c}{\lambda\mu} - 1} \lim_{u\to\infty} \frac{\bar{F}_I(u)}{u\bar{F}_X(u)} = \frac{1}{(c/\lambda - \mu)(\alpha - 1)}.$$ □

6.21 Beispiel Wir betrachten eine Pareto-Survivalfunktion der Form $\bar{F}_X(x) = x^{-\alpha}$, $x \geqslant 1$, für ein $\alpha > 1$. Korollar 6.20 liefert

$$\lim_{u\to\infty} u^{\alpha-1}\phi(u) = \frac{1}{(c/\lambda - \alpha/(\alpha-1))(\alpha-1)} = \frac{1}{(\alpha-1)c/\lambda - \alpha}.$$

Man vergleiche dieses Resultat mit der unteren Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit im diskreten Modell aus Beispiel 5.13, die ebenfalls mit der Rate $u^{1-\alpha}$ gegen 0 konvergiert. (Da c/λ die Prämie pro Zeiteinheit multipliziert mit der erwarteten Zeitdauer zwischen zwei Schäden ist, also gewissermaßen die mittlere Prämie pro Schadenfall, entspricht diese Größe in gewisser Weise der Prämie π im zeitdiskreten Modell.) □

Es gibt natürlich auch subexponentielle Verteilungen, deren Survivalfunktionen nicht regulär variierend sind. Bei diesen gibt es keinen allgemeinen Zusammenhang zwischen der

Subexponentialität von F_X und F_I, d.h. es gibt subexponentielle Schadenhöhenverteilungen, so dass die zugehörigen tail-integrierten Verteilungen nicht subexponentiell sind, und umgekehrt nicht subexponentielle Schadenhöhenverteilungen, deren tail-integrierten Verteilungen subexponentiell sind. Für viele "klassische" subexponentielle Schadenhöhenverteilungen sind aber auch die zugehörigen tail-integrierten Verteilungen subexponentiell.

Die folgenden hinreichenden Kriterien sind oft hilfreich für den Nachweis, dass F_I subexponentiell ist.

6.22 Lemma *Besitzt F_X eine Lebesgue-Dichte f_X und ist eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllt, so ist F_I subexponentiell:*

(i) $\limsup_{x\to\infty} x f_X(x)/\bar{F}_X(x) < \infty$

(ii) $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{x f_X(x)}{-\bar{F}_X(x)\log(\bar{F}_X(x))} < 1,$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = \infty \tag{6.11}$$

(iii) $f_X/\bar{F}_X \in \mathcal{R}_\delta$ *für ein* $\delta \in [-1, 0)$ *und (im Fall* $\delta = -1$*)* (6.11) *gilt*

(iv) $-\log(\bar{F}_X) \in \mathcal{R}_\delta$ *für ein* $\delta \in (0, 1)$, $f_X/\bar{F}_X$ *ist schließlich monoton fallend und* (6.11) *gilt*

(v) $f_X/\bar{F}_X$ *ist langsam variierend und konvergiert schließlich monoton gegen 0,* $\big(x \mapsto -\log(\bar{F}_X(x)) - x f_X(x)/\bar{F}_X(x)\big) \in \mathcal{R}_1$ *und* (6.11) *gilt* □

Beweis. s. Embrechts, Klüppelberg und Mikosch (1997), *Modelling Extremal Events*, Lemma 1.4.6 □

6.23 Beispiel Seien die Schadenhöhen Weibull-verteilt mit Survivalfunktion $\bar{F}_X(x) = \exp(-x^\tau)$ und Dichte $f_X(x) = \tau x^{\tau-1}\exp(-x^\tau)$, $x \geqslant 0$, für ein $\tau \in (0, 1)$. Dann gilt

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \exp(-t^\tau)\,dt = \frac{1}{\tau\mu}\int_0^{x^\tau} \mathrm{e}^{-s} s^{1/\tau-1}\,ds.$$

Bezeichnet also $\Gamma_{1/\tau,1}$ die Gamma-Verteilungsfunktion mit Formparameter $1/\tau$ und Skalenparameter 1, so erhält man gerade die Darstellung $F_I(x) = \Gamma_{1/\tau,1}(x^\tau)$, da sich beide Seiten nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, als Verteilungsfunktionen also sogar identisch sein müssen. Insbesondere gilt daher auch $\tau\mu = \Gamma(1/\tau)$. Da $x \mapsto f_X(x)/\bar{F}_X(x) = \tau x^{\tau-1}$ regulär variierend ist mit Index $\tau - 1 \in (-1, 0)$, folgt aus Lemma 6.22(iii), dass F_I subexponentiell ist. Folglich gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi(u)}{\overline{\Gamma_{1/\tau,1}}(u^\tau)} = \frac{1}{\frac{c}{\lambda\mu} - 1}.$$

Hierbei gilt nach dem Satz von l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\Gamma_{1/\tau,1}}(x)}{x^{1/\tau-1}\mathrm{e}^{-x}} &= \frac{1}{\Gamma(1/\tau)}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^\infty s^{1/\tau-1}\mathrm{e}^{-s}\,ds}{x^{1/\tau-1}\mathrm{e}^{-x}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\tau)}\lim_{x\to\infty}\frac{-x^{1/\tau-1}\mathrm{e}^{-x}}{(1/\tau-1)x^{1/\tau-2}\mathrm{e}^{-x}-x^{1/\tau-1}\mathrm{e}^{-x}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\tau)}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-(1/\tau-1)/x}\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\tau)}.\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also schließlich

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{\phi(u)}{u^{1-\tau}\exp(-u^\tau)} &= \lim_{u\to\infty}\frac{\phi(u)}{\overline{\Gamma_{1/\tau,1}}(u^\tau)}\cdot\frac{\overline{\Gamma_{1/\tau,1}}(u^\tau)}{u^{1-\tau}\exp(-u^\tau)}\\ &= \frac{1}{(\frac{c\tau}{\lambda\Gamma(1/\tau)}-1)\Gamma(1/\tau)}\\ &= \frac{1}{c\tau/\lambda-\Gamma(1/\tau)}.\end{aligned}$$

Hier konvergiert also die Ruinwahrscheinlichkeit mit steigendem Startkapital langsamer als jede Exponentialfunktion gegen 0, aber schneller als jede Potenz von u. □

Im Rahmen dieser Vorlesung konnte nur ein erster Einblick in den Teil der Ruintheorie gegeben werden, der mittlerweile als klassisch angesehen werden kann. In den letzten 20 Jahren ist das Ruinproblem zum einen in sehr viel allgemeineren Modellen untersucht worden, die z.B. eine Verzinsung oder eine Abhängigkeit zwischen den Schadenhöhen und den Schadenankunftszeiten erlauben, zum anderen sind neben der Ruinwahrscheinlichkeit andere Größen, wie der *overshoot* oder der Ruinzeitpunkt analysiert worden. Einen Überblick über den Stand der Forschung zum Jahrtausendwechsel gibt die Monographie von Asmussen (2000), *Ruin Probabilities.*