2 Berechnung und Approximation der Gesamtschadenverteilung

Im folgenden sei stets vorausgesetzt, dass die Verteilungen von Schadenhöhen und Schadenzahl im Standardmodell der kollektiven Risikotheorie bekannt seien. Ziel ist es, das Gesamtrisiko des Versicherungsportfolios zu quantifizieren, indem man die Verteilung des Gesamtschadens

$$S_{koll} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

(approximativ) bestimmt. Dazu sei erst einmal an den Begriff der Faltung erinnert.

2.1 Satz und Definition *(i) Sind X, Y unabhängige Zv. mit Vf. F bzw. G, so heißt die Verteilung von $X+Y$ die* **Faltung** *von P^X und P^Y, i.Z. $P^{X+Y} = P^X * P^Y$. Die Vf. von $X+Y$ wird auch als Faltung $F * G$ von F und G bezeichnet.*

Bei n unabhängigen Zv. X_i mit Vf. F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, schreibt man auch $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n} P^{X_i} = P^{\sum_{i=1}^n X_i}$ mit Vf. $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n} F_i$. Ferner schreibt man statt $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n} F$ auch F^{*n} und für ein W.maß Q auf $\mathbb{R}$ statt $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n} Q$ auch Q^{*n}. Schließlich verwenden wir die Konvention $Q^{*0} := \varepsilon_0$.

(ii) $(F * G)(t) = \int F(t-y)\, G(dy) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

(iii) Besitzt F eine Dichte f, so besitzt $F * G$ die Dichte

$$h(t) = \int f(t-y)\, G(dy), \quad t \in \mathbb{R}.$$ □

Beweis. Die Aussagen folgen leicht aus dem Satz von Fubini. Ein Beweis der Formel für die Dichte findet sich z.B. bei Behnen und Neuhaus, 2003, Korollar 22.9. □

Wegen der Unabhängigkeit der X_i von N hat S_{koll} folglich die Vf.

$$\begin{aligned} P\{S_{koll} \leqslant x\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\Big\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x, N = n\Big\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\Big\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\Big\} \cdot P\{N=n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) P\{N=n\}, \end{aligned}$$

wobei F die Vf. von P^{X_i} bezeichne. Die Verteilung des Gesamtschadens ist also die Mischung der Faltungspotenzen der Schadenhöhenverteilung unter P^N.

Da man zur Berechnung von F^{*n} ein $(n-1)$-faches Integral bestimmen muss, hilft diese Darstellung nur in Spezialfällen weiter, bei denen die Faltungen analytisch bestimmt werden können. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn F zu einer Familie von Vf. gehört, die abgeschlossen unter der Faltungsoperation ist.

2.2 Beispiel Sei $F = \Gamma_{\alpha,\beta}$ mit Dichte

$$\gamma_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, \qquad x > 0,$$

und $G = \Gamma_{\tilde\alpha,\beta}$. Dann hat $F * G$ die Dichte

$$\begin{aligned} h(x) &= \int \gamma_{\alpha,\beta}(x-t)\gamma_{\tilde\alpha,\beta}(t)\,dt \\ &= \frac{\beta^{\alpha+\tilde\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tilde\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\tilde\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}\,dt \\ &= \frac{\beta^{\alpha+\tilde\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tilde\alpha)} x^{\alpha+\tilde\alpha-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\tilde\alpha-1}\,du \\ &= \gamma_{\alpha+\tilde\alpha,\beta}(x), \qquad x > 0, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Substitution $t = ux$ vorgenommen wurde und im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass die Dichte von der Form $h(x) = cx^{\alpha+\tilde\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$, ist, also die Gamma-Dichte $\gamma_{\alpha+\tilde\alpha,\beta}$ sein muss.

Die Faltung von Gammaverteilungen mit gleichem Skalenparameter β ist also wieder eine Gammaverteilung mit Skalenparameter β, wobei die Formparameter sich addieren. Mit vollständiger Induktion folgt:

$$\Gamma_{\alpha,\beta}^{*n} = \Gamma_{n\alpha,\beta}$$

mit $\Gamma_{0,\beta} := \varepsilon_0$. Somit ist die Gesamtschadenverteilung eine Mischung von Gammaverteilungen:

$$P\{S_{koll} \leqslant x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{n\alpha,\beta}(x) P\{N = n\}. \qquad \square$$

In den Fällen, in denen die Faltungen nicht einfach analytisch zu berechnen sind, sind gewisse Transformierte von P^X und P^N hilfreich.

2.3 Definition *Sei X eine $\mathbb{R}$-wertige Zv.*

(i) Die auf

$$\mathcal{M}_X := \{t \in \mathbb{R} \mid E(e^{tX}) < \infty\}$$

durch

$$\psi_X(t) := E(e^{tX}) = \int \mathrm{e}^{tx}\, P^X(dx)$$

definierte Funktion ψ_X heißt **momenterzeugende Funktion** *von X bzw. von P^X.*

(ii) Die auf

$$\mathcal{M}_X^w := \{t > 0 \mid E(t^X) < \infty\}$$

durch

$$\varphi_X(t) := E(t^X) = \int t^x\, P^X(dx)$$

definierte Funktion φ_X heißt **wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion** *von X bzw. von P^X.*

(iii) Die auf $\mathbb{R}$ durch

$$\chi_X(t) := E(\mathrm{e}^{itX}) = \int \mathrm{e}^{itx}\, P^X(dx)$$

definierte Funktion χ heißt **charakteristische Funktion** *oder* **Fourier-Transformierte** *von X bzw. von P^X. Dabei wird der Erwartungswert (bzw. das Integral) einer $\mathbb{C}$-wertigen Zv. komponentenweise definiert, d.h. für $\mathbb{R}$-wertige Zv. X und Y mit endlichen Erwartungswerten definiert man $E(X+iY) = E(X) + iE(Y)$.* □

2.4 Bemerkung (i) Offensichtlich gilt

$$\mathcal{M}_X^w = \mathrm{e}^{\mathcal{M}_X} = \{\mathrm{e}^t \mid t \in \mathcal{M}_X\}, \quad \varphi_X(t) = \psi_X(\log t).$$

Die Funktion $t \mapsto \psi_X(-t)$ heißt auch **Laplace-Transformierte** von X bzw. von P^X. (Manchmal wird auch die momenterzeugende Funktion als Laplace-Transformierte bezeichnet und für die Fourier-Transformierte verwenden manche Autoren die Definition $t \mapsto E(\mathrm{e}^{-itX})$.)

(ii) $\psi_X(0) = 1 = \varphi_X(1)$

(iii) Für manche Verteilungen P^X (z.B. für Cauchy-Verteilungen) ist $\psi_X(t)$ nur für $t = 0$ definiert. Insbesondere impliziert $E((X^+)^r) = \infty$ für ein $r > 0$, dass $\mathcal{M}_X \subset (-\infty, 0]$, und $E((X^-)^r) = \infty$ impliziert $\mathcal{M}_X \subset [0, \infty)$.

Umgekehrt gilt aber für $X \geqslant 0$ stets $(-\infty, 0] \subset \mathcal{M}_X$, da für $t \leqslant 0$ der Integrand e^{tX} durch 1 beschränkt ist.

(iv) Für $\mathbb{N}_0$-wertige Zv. X lässt sich φ_X sogar auf der Menge $\bar{\mathcal{M}}_X^w := \{z \in \mathbb{C} \mid |E(z^X)| < \infty\}$ definieren. Es gilt stets $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\} \subset \bar{\mathcal{M}}_X^w$.

(v) Da e^{itX} stets die Norm 1 hat, ist die Fourier-Transformierte ohne weitere Voraussetzungen überall definiert. □

Die Bedeutung dieser Transformierten liegt darin begründet, dass sie (unter geeigneten Voraussetzungen) die Verteilung eindeutig charakterisieren:

2.5 Satz *(i) Sind X und Y $\mathbb{R}$-wertige Zv., so dass ψ_X und ψ_Y auf einer nicht-leeren offenen Menge überein stimmen, so besitzen sie dieselbe Verteilung. Insbesondere ist P^X durch ψ_X (und durch φ_X) eindeutig bestimmt, falls $\mathcal{M}_X$ einen inneren Punkt besitzt.*

(ii) Die charakteristische Funktion χ_X bestimmt P^X stets eindeutig. □

Beweis. Ein Beweis der allgemeinen Resultate findet sich z.B. in der Monographie von Billingsley (1986), Probability and Measure, Theorem 30.1 und p. 408, bzw. Theorem 26.2.

Hier soll der Beweis nur für eine P-f.s. $\mathbb{N}_0$-wertige Zv. X und eine offene Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ der 0 geführt werden. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k P\{X = k\} \qquad \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad \varphi_X^{(n)}(0) = n! P\{X = n\} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \\ &\Rightarrow \quad P\{X = n\} = \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{n!} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Damit folgt die erste Behauptung unmittelbar.

Etwas abstrakter betrachtet ergibt sich die Eindeutigkeit von P^X aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Potenzreihe, die auf einem nicht-entarteten Intervall definiert ist. Eine analoge Eindeutigkeitsaussage für $\mathbb{C}$-wertige Potenzreihen liefert die zweite Behauptung. □

2.6 Bemerkung Die Relation (2.1) erklärt den Namen "wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion". □

Die Transformierten einer Faltung ergeben sich leicht aus den Transformierten der einzelnen Verteilungen.

2.7 Satz *Im folgenden seien X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zv. und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:*

(i) $\psi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t) \qquad \forall\, t \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}_{X_i}$

(ii) $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) \qquad \forall\, t \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}^w_{X_i}$

(iii) $\chi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \chi_{X_i}(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$ □

Beweis. Wir beweisen nur die erste Behauptung, da die zweite unmittelbar mit Bemerkung 2.4 folgt und die letzte Behauptung völlig analog zur ersten nachgewiesen werden kann. Aus der Unabhängigkeit von e^{tX_i} für verschiedene i folgt für $t \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}_{X_i}$

$$\psi_{S_n}(t) = E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E\Big(\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{tX_i}\Big) = \prod_{i=1}^n E(\mathrm{e}^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t).$$

□

2.8 Korollar *Im Standardmodell der kollektiven Risikotheorie gilt:*

(i) $\psi_{S_{koll}}(t) = \varphi_N(\psi_{X_1}(t)) \qquad \forall\, t \in \mathcal{M}_{koll} := \{s \in \mathbb{R} \mid s \in \mathcal{M}_{X_1}, \psi_{X_1}(s) \in \mathcal{M}^w_N\}$

(ii) $\varphi_{S_{koll}}(t) = \varphi_N(\varphi_{X_1}(t)) \qquad \forall\, t \in \mathrm{e}^{\mathcal{M}_{koll}}$

(iii) $\chi_{S_{koll}}(t) = \varphi_N(\chi_{X_1}(t)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$ □

Beweis. Die Definition der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion liefert zusammen mit Satz 2.7 und der Unabhängigkeit von $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und N für alle $t \in \mathcal{M}_{koll}$

$$\begin{aligned}
\varphi_N(\psi_{X_1}(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{X_1}^n(t) P\{N = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{S_n}(t) P\{N = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\mathrm{e}^{tS_n} 1_{\{N=n\}}\Big) \\
&= E\big(\mathrm{e}^{tS_{koll}}\big) \\
&= \psi_{S_{koll}}(t).
\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt nun unmittelbar mit Bemerkung 2.4, während die dritte Behauptung wie die erste verifiziert werden kann. (Man beachte dabei, dass $|\chi_{X_1}(t)| \leqslant 1$.) □

Man kann also aus φ_N und ψ_{X_1} (bzw. φ_{X_1}, bzw. χ_{X_1}) auch $\psi_{S_{koll}}$ (bzw. $\varphi_{S_{koll}}$, bzw. $\chi_{S_{koll}}$) berechnen, wodurch wegen Satz 2.5 und Bemerkung 2.4 die Verteilung von S_{koll} eindeutig bestimmt ist. Allerdings ist es i.d.R. nicht möglich, die Vf. oder ggf. eine Dichte von S_{koll} analytisch aus einer der Transformierten zu bestimmen. In diesen Fällen ist man darauf angewiesen, die Verteilung $P^{S_{koll}}$ mittels numerischer Verfahren aus den Transformierten zu berechnen. Insbesondere kann man mit Hilfe der Inversionsformel

$$P\{a < S_{koll} \leqslant b\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita} - \mathrm{e}^{-itb}}{it} \chi_{S_{koll}}(t)\, dt,$$

die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $P\{S_{koll} \in \{a, b\}\} = 0$ gilt (s. Billingsley, 1986, Probability and Measure, Theorem 26.2), die Verteilungsfunktion von S_{koll} numerisch aus der Fourier-Transformierten bestimmen.[1]

Aber auch ohne diese numerischen Verfahren liefern die Transformierten bereits interessante Informationen über die zugrundeliegende Verteilung. Liegen beispielsweise die Schadenhöhen in diskretisierter Form, d.h. als Vielfache einer kleinsten Geldeinheit vor, so ist S_{koll} also $\mathbb{N}_0$-wertig und (2.1) beschreibt, wie sich prinzipiell die W. $P\{S_{koll} = k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ aus der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $\varphi_{S_{koll}}$ berechnen lassen. (Dieses Verfahren ist allerdings i.d.R. nicht besonders effizient, wenn die zugrunde gelegte kleinste Geldeinheit so klein ist, dass die einzelnen diskretisierten Schadenhöhen sehr viele verschiedene Werte annehmen können.) Ebenso lassen sich die Momente einer nichtnegativen Zv. leicht aus der momenterzeugenden Funktion berechnen, was natürlich auch den Namen erklärt.

[1] Da dies oft numerisch noch recht aufwendig ist, wird alternativ statt der Fourier-Transformierten nach Diskretisierung von $P^{S_{koll}}$ die diskrete Fourier-Transformierte betrachtet, die sich mit Hilfe der sog. *Fast Fourier Transformation* (FFT) effizient numerisch invertieren lässt.

2.9 Satz *Sei X eine Zv., deren momenterzeugende Funktion ψ_X auf einer Umgebung der 0 definiert ist. Dann ist ψ_X in 0 beliebig oft differenzierbar und es gilt für die Ableitungen*

$$\psi_X^{(n)}(0) = E(X^n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \psi_X'(0) \\ Var(X) &= \psi_X''(0) - \big(\psi_X'(0)\big)^2. \end{aligned}$$ □

Beweis. Sei $a > 0$ so gewählt, dass $[-2a, 2a] \subset \mathcal{M}_X$. Die Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar mit n-ter Ableitung $x^n \mathrm{e}^{tx}$. Da (wegen $\sup_{u \geqslant 0} u^n \mathrm{e}^{-au} = (n/(a\mathrm{e}))^n$) für alle $t \in (-a, a)$

$$|X|^n \mathrm{e}^{tX} \leqslant |X|^n \mathrm{e}^{a|X|} \leqslant \Big(\frac{n}{a\mathrm{e}}\Big)^n \mathrm{e}^{2a|X|} =: Y_n$$

und

$$E(Y_n) \leqslant \Big(\frac{n}{a\mathrm{e}}\Big)^n \big(E(\mathrm{e}^{-2aX}) + E(\mathrm{e}^{2aX})\big) = \Big(\frac{n}{a\mathrm{e}}\Big)^n \big(\psi_X(-2a) + \psi_X(2a)\big) < \infty,$$

ist gemäß dem Mittelwertsatz der Differenzenquotient, als dessen Limes die n-te Ableitung definiert ist, auf $[-a, a]$ durch die endlich integrable Zv. Y_n majorisiert. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert daher (mit vollständiger Induktion)

$$\psi_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} E(\mathrm{e}^{tX})|_{t=0} = E\Big(\frac{d^n}{dt^n} \mathrm{e}^{tX}|_{t=0}\Big) = E(X^n).$$ □

2.10 Bemerkung Ebenso kann man zeigen, dass ψ_X in jedem Punkt des Inneren $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_X$ von $\mathcal{M}_X$ beliebig oft differenzierbar ist mit $\psi_X^{(n)}(t) = E(X^n \mathrm{e}^{tX})$ für alle $t \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}_X$. □

2.11 Korollar *Ist beim Standardmodell der kollektiven Risikotheorie ψ_{X_1} auf einer Umgebung der 0 endlich definiert und existiert für ein $\varepsilon > 0$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $\varphi_N(t)$ für alle $0 < t < 1 + \varepsilon$, so gilt*

$$\begin{aligned} E(S_{koll}) &= E(N) \cdot E(X_1) \\ Var(S_{koll}) &= E(N) \cdot Var(X_1) + Var(N) \cdot (E(X_1))^2. \end{aligned}$$ □

Beweis. Nach Voraussetzung enthält $\mathcal{M}_{X_1}$ eine Umgebung der 0 und aus Satz 2.9 folgt sofort $\lim_{t \to 0} \psi_{X_1}(t) = \psi_{X_1}(0) = 1$, so dass $\varphi_N \circ \psi_{X_1}$ auf einer Umgebung der 0 definiert ist. Korollar 2.8 liefert somit $\psi_{S_{koll}}(t) = \varphi_N(\psi_{X_1}(t)) = \psi_N(\log \psi_{X_1}(t))$. Nach Satz 2.9 (bzw. Bemerkung 2.10) ist diese Funktion auf einer Umgebung der 0 beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$\psi_{S_{koll}}'(t) = \frac{\psi_N'(\log \psi_{X_1}(t))}{\psi_{X_1}(t)} \cdot \psi_{X_1}'(t),$$

woraus wegen $\psi_{X_1}(0) = 1$

$$E(S_{koll}) = \psi'_{S_{koll}}(0) = \psi'_N(0) \cdot \psi'_{X_1}(0) = E(N) \cdot E(X_1)$$

folgt. Analog erhält man

$$\begin{aligned} E(S_{koll}^2) &= \psi''_{S_{koll}}(0) \\ &= \Big(\frac{\psi''_N(\log \psi_{X_1}(0))}{(\psi_{X_1}(0))^2} - \frac{\psi'_N(\log \psi_{X_1}(0))}{(\psi_{X_1}(0))^2}\Big) \cdot \big(\psi'_{X_1}(0)\big)^2 + \frac{\psi'_N(\log \psi_{X_1}(0))}{\psi_{X_1}(0)} \cdot \psi''_{X_1}(0) \\ &= \big(E(N^2) - E(N)\big)E^2(X_1) + E(N) \cdot E(X_1^2), \end{aligned}$$

woraus die zweite Behauptung folgt:

$$Var(S_{koll}) = E(S_{koll}^2) - E^2(N) \cdot E^2(X_1) = E(N) \cdot Var(X_1) + Var(N) \cdot E^2(X_1). \qquad \square$$

Dieser Satz lässt sich allerdings ohne die (in der Stärke unnötige) Voraussetzung, dass die momenterzeugende Funktion auf einer Umgebung der 0 definiert ist, auch auf direktem Wege beweisen.

Die Transformierten sind auch für theoretische Überlegungen hilfreich. Beim nachfolgenden Resultat wird z.B. mit ihrer Hilfe gezeigt, dass sich unabhängige Portfolios mit Poisson-verteilten Schadenzahlen zu einem Portfolio zusammen fassen lassen, das wiederum durch ein Standardmodell der kollektiven Risikotheorie mit Poisson-verteilten Schadenzahlen beschreiben lässt.

2.12 Satz *Seien N_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, unabhängige $\mathcal{P}_{\lambda_i}$-verteilte Zv. und $X_{i,l}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $l \in \mathbb{N}$, untereinander und gemeinsam von $(N_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ unabhängige $(0,\infty)$-wertige Zv. mit $P^{X_{i,l}} = P^{X_{i,1}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Bezeichnet $S_i = \sum_{l=1}^{N_i} X_{i,l}$ den Gesamtschaden des i-ten Portfolios, so besitzt die Summe $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ der Gesamtschäden aller k Portfolios die gleiche Verteilung wie $\tilde{S} = \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \tilde{X}_l$, wobei $\tilde{N}$ $\mathcal{P}_\lambda$-verteilt ist mit $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, die Zv. $\tilde{X}_l$ unabhängig und identisch verteilt sind gemäß der Mischung der $P^{X_{i,1}}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, mit den Gewichten λ_i/λ, $1 \leqslant i \leqslant k$, d.h.*

$$P\{\tilde{X}_1 \in B\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} P\{X_{i,1} \in B\}, \qquad B \in \mathcal{B}[0,\infty),$$

und $\tilde{N}$ und $(\tilde{X}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind. $\square$

Beweis. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist gegeben durch $\varphi(x) = \exp(\lambda(x-1))$. Außerdem ergibt sich die momenterzeugende Funktion der Mischung $P^{\tilde{X}_1}$ als entsprechende Linearkombination der momenterzeugenden Funktionen der gemischten Verteilungen $P^{X_{i,1}}$:

$$\psi_{\tilde{X}_1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \psi_{X_{i,1}}.$$

Da die Gesamtschadenhöhen S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, unabhängig sind, liefern der Satz 2.7, das Korollar 2.8 (i) und die Bemerkung 2.4 (iii) für alle $t \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
\psi_S(t) &= \prod_{i=1}^{k} \psi_{S_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \varphi_{N_i}(\psi_{X_{i,1}}(t)) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \exp\big(\lambda_i(\psi_{X_{i,1}}(t)-1)\big) \\
&= \exp\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\psi_{X_{i,1}}(t)-1)\Big) \\
&= \exp\Big(\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda}\psi_{X_{i,1}}(t)-1\Big)\Big) \\
&= \exp\big(\lambda(\psi_{\tilde{X}_1}(t)-1)\big) \\
&= \varphi_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{X}_1}(t)) \\
&= \psi_{\tilde{S}}(t).
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun direkt aus Satz 2.5. □

2.13 Bemerkung und Definition In der Situation von Satz 2.12 heißen die Verteilungen von S_i und S *zusammengesetzte Poisson-Verteilungen*. Wir haben also gezeigt, dass die Faltung von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen wieder eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung ist. □