

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

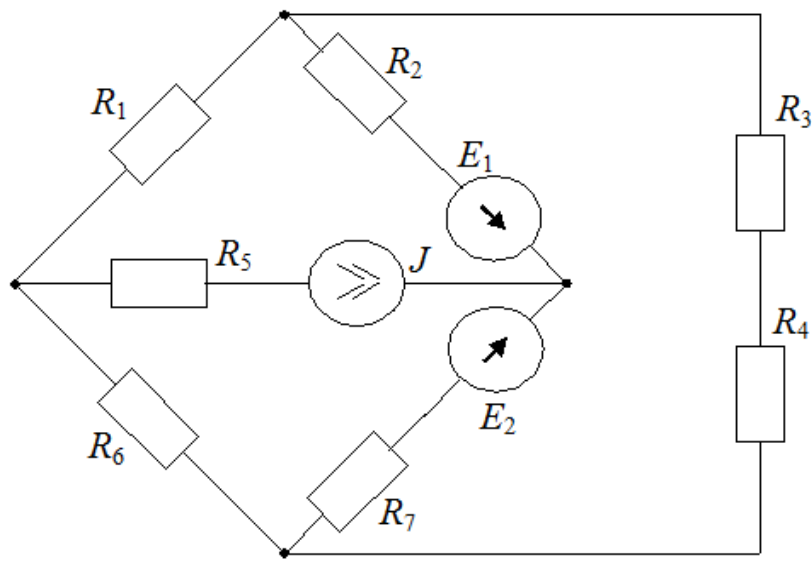
Модуль «Электротехника»

Анализ цепей постоянного тока

преподаватель – Никитина Мария Владимировна,
mvnikitina@itmo.ru

Санкт-Петербург – 2021

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа



Дано: $E_1=20$ [В], $E_2=5$ [В], $J=0,5$ [А],
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_6=1$ [Ом],
 $R_5=4$ [Ом], $R_7=5$ [Ом].

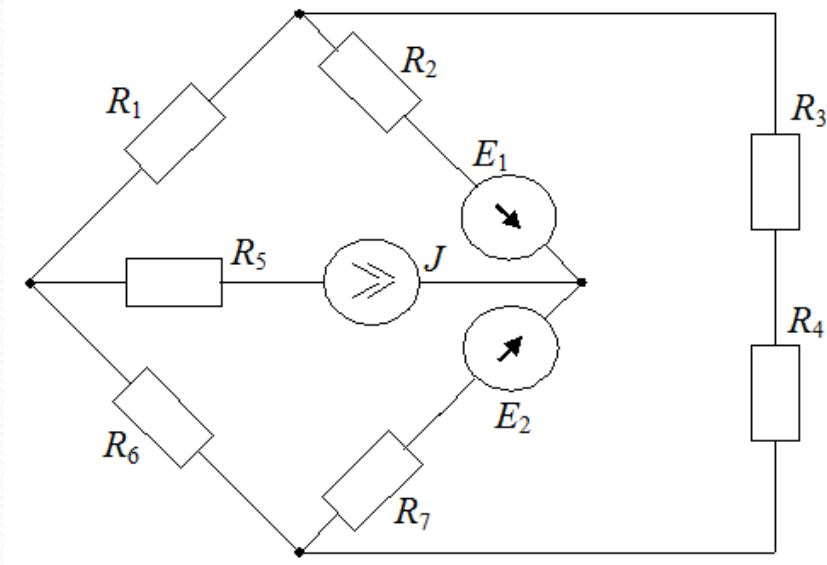
Найти: все неизвестные токи,
 используя законы Кирхгофа (ЗК).

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа

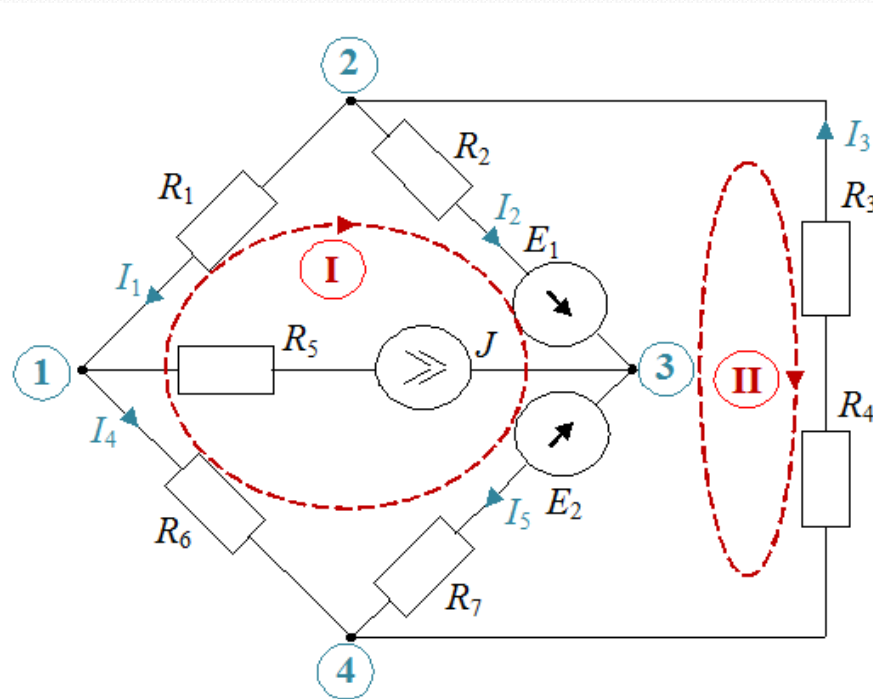
Алгоритм и решение:

1. Определить топологию цепи

- $p^* = 6$ (общее количество ветвей),
 $p_{\text{ит}} = 1$ (количество ветвей с ист. тока),
 $p = p^* - p_{\text{ит}} = 6 - 1 = 5$ (количество неизвестных токов),
 $q = 4$ (количество узлов),
 $n = p - (q - 1) = 5 - (4 - 1) = 2$ (количество независимых контуров),
 $m_I = q - 1 = 4 - 1 = 3$ (количество уравнений по ЗКИ),
 $m_{II} = n = 2$ (количество уравнений по ЗКП).



Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа



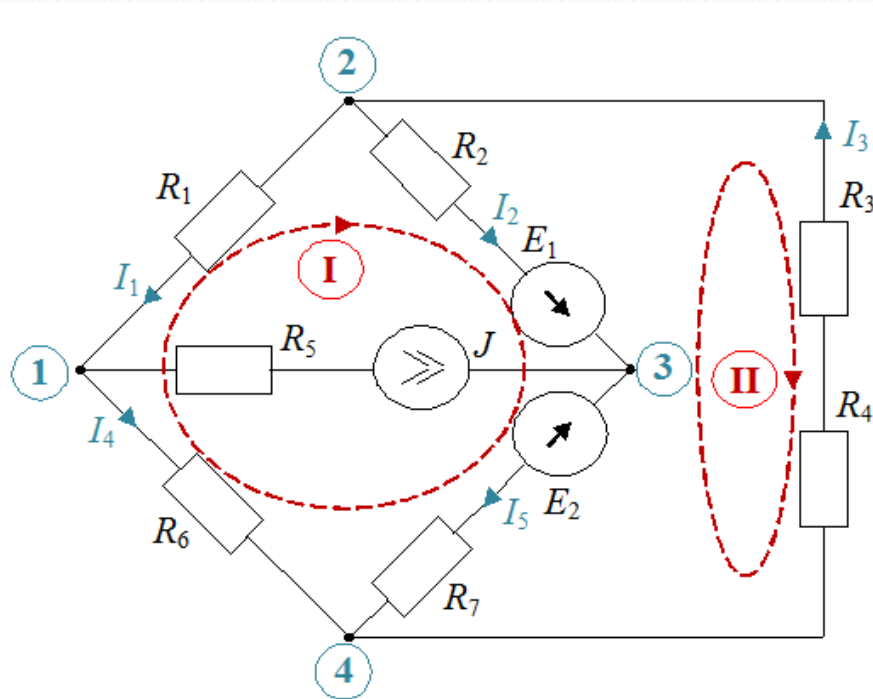
Произвольно обозначить p неизвестных токов, q узлов и n независимых контуров.

В любом месте ветви обозначается стрелка и имя искомого тока.

Рядом с узлом ставится порядковый номер (арабская цифра), обведенный окружностью.

Для выбранных контуров указывается направление их обхода и внутри контура указывается порядковый номер (римская цифра), обведенный окружностью.

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа

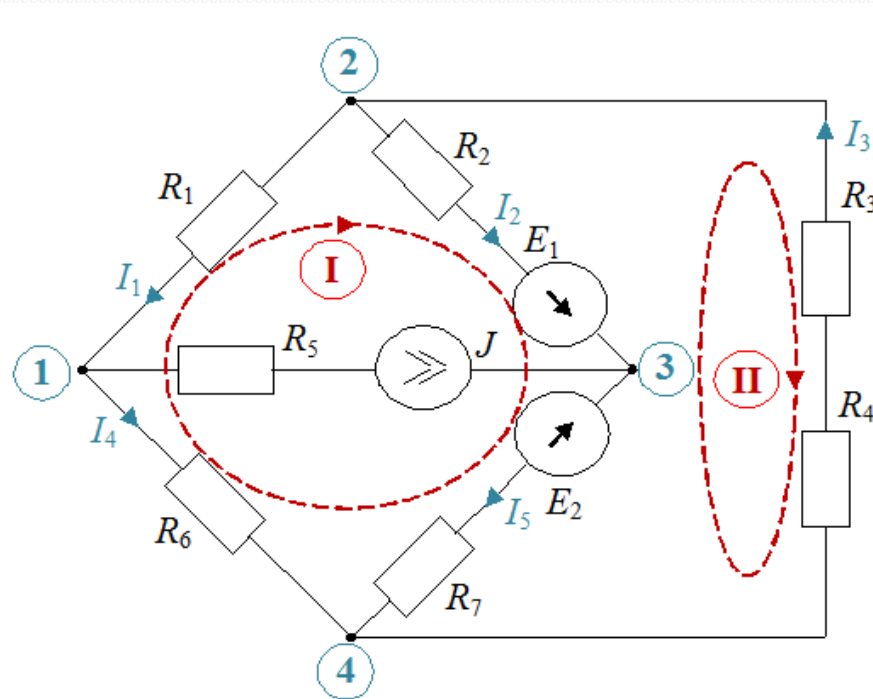


Правила выбора независимых контуров:

- граница контура **не должна** скользить вдоль ветви с источником тока;
- каждый последующий контур должен отличаться от всех предыдущих хотя бы одной ветвью.

Проверяем себя – выбранные n контуров должны охватывать p ветвей с неизвестными токами!

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа



Произвольно обозначить p неизвестных токов, q узлов и n независимых контуров.

В любом месте ветви обозначается стрелка и имя искомого тока.

Рядом с узлом ставится порядковый номер (арабская цифра), обведенный окружностью.

Для выбранных контуров указывается направление их обхода и указывается порядковый номер (римская цифра), обведенный окружностью.

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа

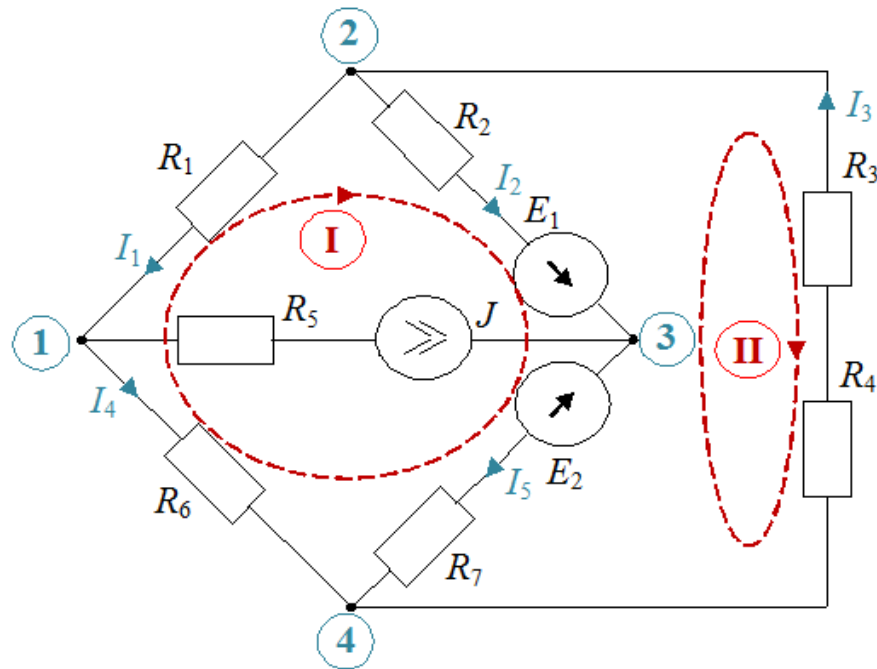
2. Составить систему уравнений из m_I уравнений по ЗКІ и m_{II} уравнений по ЗКІІ. Представить систему в матричной форме.

Для уравнений по ЗКІ: если ток направлен в узел (стрелка направлена в узел), то такой ток в уравнение ставится со знаком «+», в противном случае (ток направлен от узла) – со знаком «-»; все известные значения токов необходимо переносить справа от знака «=».

Для уравнений по ЗКІІ: если направление действия напряжения и ЭДС совпадает с направлением обхода контура, то такие напряжения и ЭДС в уравнение записываются со знаком «+», в противном случае (при несовпадении направлений) – со знаком «-».

Матричная форма записи системы уравнений: $A \cdot X = F$, где матрица A – матрица коэффициентов при неизвестных токах размерностью $p \times p$, матрица X – матрица-столбец неизвестных токов размерностью $p \times 1$, матрица F – матрица-столбец источников размерностью $p \times 1$.

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа



$$\text{ЗКІ.1: } I_1 - I_4 - J = 0 \text{ или } I_1 - I_4 = J$$

$$\text{ЗКІ.2: } -I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{ЗКІ.3: } I_2 - I_5 + J = 0 \text{ или } I_2 - I_5 = -J$$

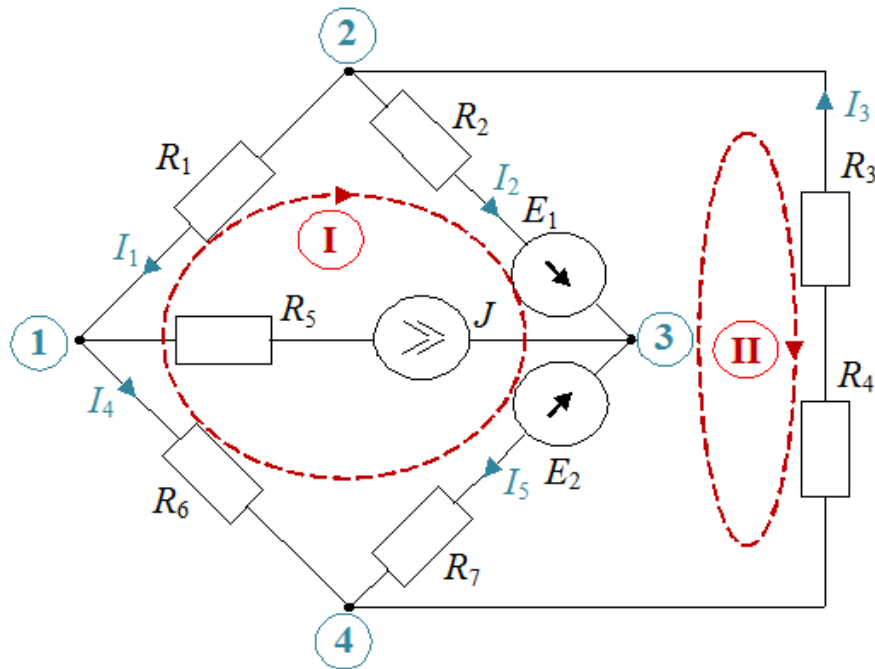
$$\text{ЗКІІ.І: } -R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_7 I_5 - R_6 I_4 = E_1 - E_2$$

$$\text{ЗКІІ.ІІ: } -R_7 I_5 - R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 = E_2 - E_1$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -R_1 & R_2 & 0 & -R_6 & R_7 \\ 0 & -R_2 & -(R_3 + R_4) & 0 & -R_7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ 0 \\ -J \\ E_1 - E_2 \\ E_2 - E_1 \end{pmatrix}$$

Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа



Подставив численные значения, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

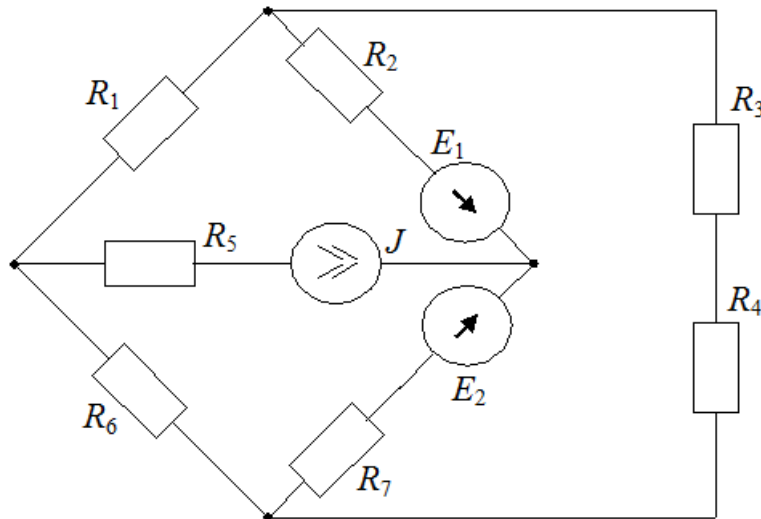
Расчет цепей постоянного тока по законам Кирхгофа

3. Решить систему уравнений

$$X := \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1.75 \\ 1 \\ -1.25 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

Ответ: $I_1 = -0.75$ [A], $I_2 = 1.75$ [A], $I_3 = 1$ [A], $I_4 = -1.25$ [A], $I_5 = 2.25$ [A].

Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)



Дано: $E_1=20$ [В], $E_2=5$ [В], $J=0,5$ [А],
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_6=1$ [Ом],
 $R_5=4$ [Ом], $R_7=5$ [Ом].

Найти: все неизвестные токи МКТ

Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)

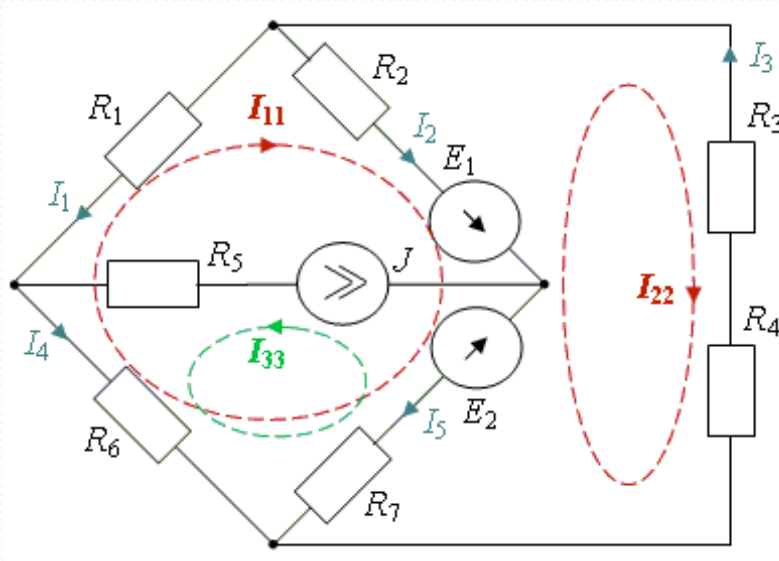
Алгоритм и решение:

1. Определить топологию цепи

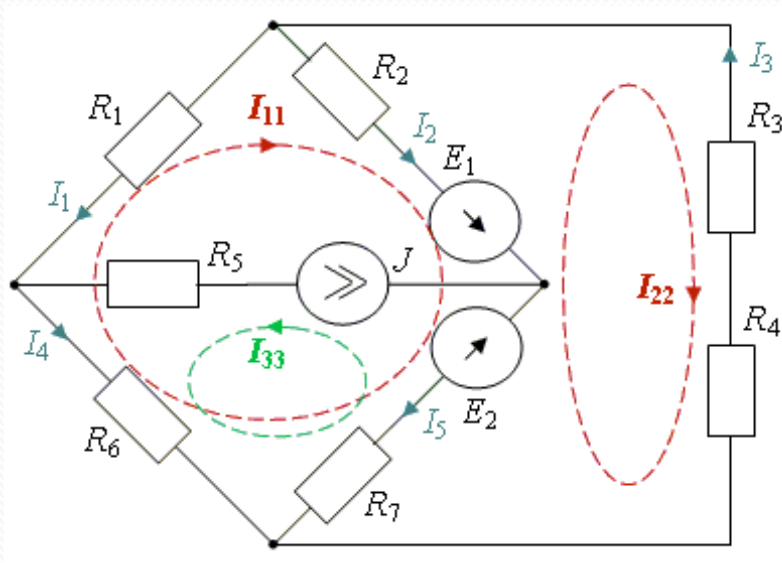
$p^* = 6$ (общее количество ветвей),
 $p_{\text{ит}} = 1$ (количество ветвей с ист. тока),
 $p = p^* - p_{\text{ит}} = 6 - 1 = 5$ (количество неизвестных токов),
 $q = 4$ (количество узлов),
 $n = p - (q - 1) = 5 - (4 - 1) = 2$ (количество неизвестных контурных токов),
 $m = p_{\text{ит}} = 1$ (количество известных контурных токов).

Произвольно обозначить p неизвестных токов и $s = n + m$ контурных токов.

$$I_{33} = -J = -0,5 \text{ [A]}.$$



Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)



2. Составить и решить систему вида

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1n}I_{nn} + \dots + R_{1s}I_{ss} = E_{11}$$

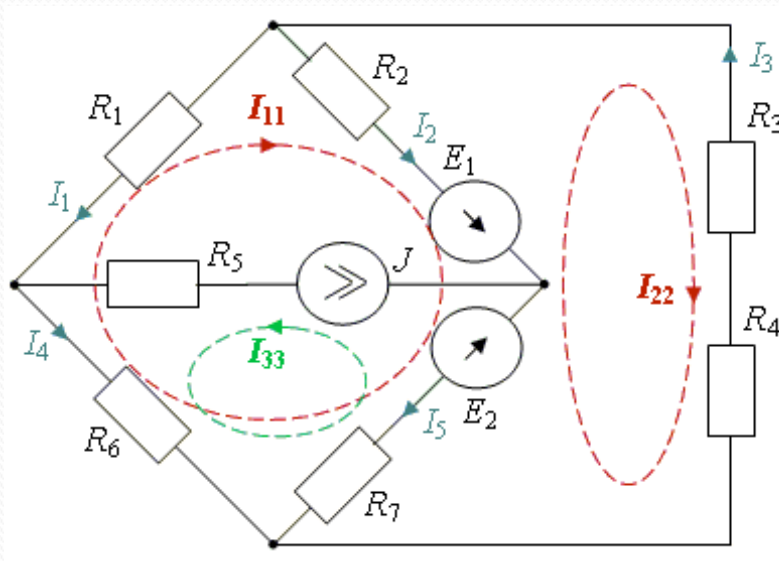
$$R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \dots + R_{2n}I_{nn} + \dots + R_{2s}I_{ss} = E_{22}$$

⋮

$$R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} + \dots + R_{ns}I_{ss} = E_{nn}$$

$R_{kl} = R_{lk}$ (для $k=1 \dots s$, $l=1 \dots s$, $k \neq l$) – общие сопротивления – сумма всех сопротивлений, охватываемых одновременно контурными токами I_{kk} и I_{ll} . Перед $R_{kl} = R_{lk}$ ставится знак «минус», если контурные токи протекают через него в разные стороны, в противном случае – знак «ПЛЮС».

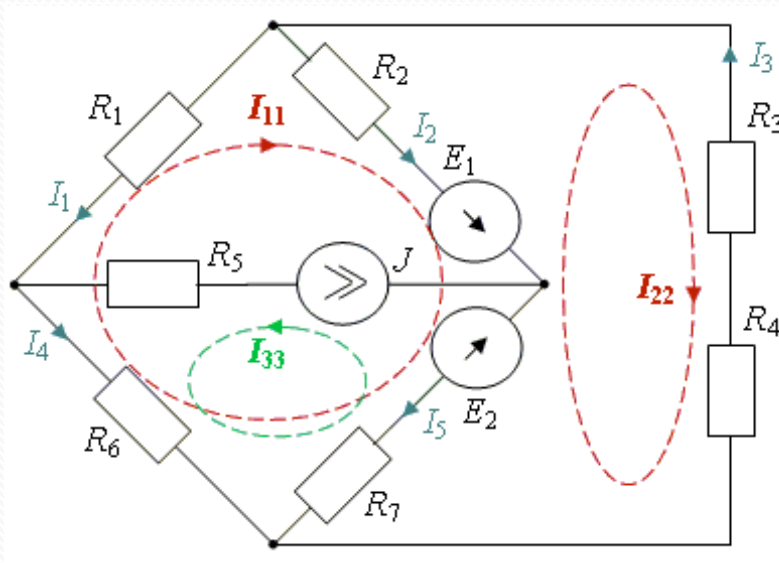
Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)



R_{kk} (для $k=1\dots n$) — собственные сопротивления — сумма всех сопротивлений, охватываемых контурным током I_{kk} .

E_{kk} (для $k=1\dots n$) — контурная ЭДС — алгебраическая сумма ЭДС, охватываемых контурным током I_{kk} . Если направление контурного тока и ЭДС совпадают, то в E_{kk} такая ЭДС пишется со знаком «плюс», в противном случае «минус».

Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)



Итак, для рассматриваемой схемы необходимо составить систему вида

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}$$

$$R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_7 + R_6)I_{11} - (R_2 + R_7)I_{22} - (R_6 + R_7)I_{33} = E_1 - E_2$$

$$-(R_2 + R_7)I_{11} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_7)I_{22} + R_7I_{33} = -E_1 + E_2$$

Подставив численные значения

$$8I_{11} - 6I_{22} + 3 = 15$$

$$-6I_{11} + 8I_{22} - 2,5 = -15$$

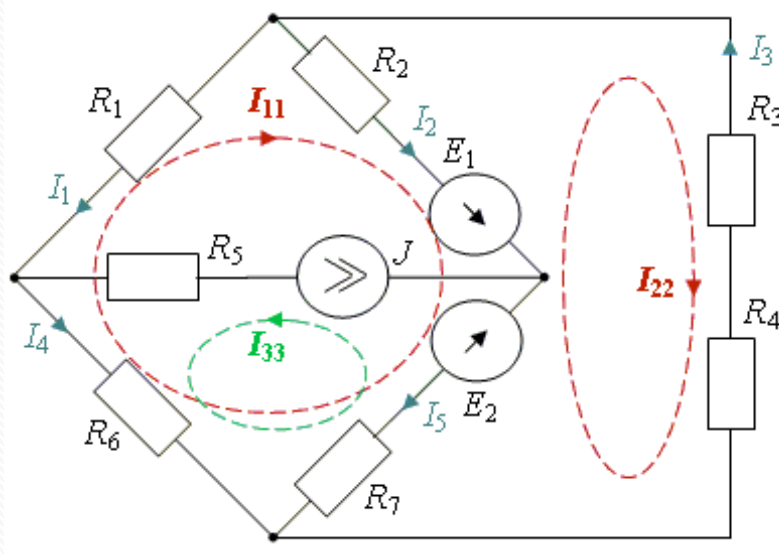
и решив систему уравнений, получим

$$I_{11} = 0,75 \text{ [A]}, I_{22} = -1 \text{ [A]}.$$

Расчет цепей постоянного тока методом контурных токов (МКТ)

3. Найти искомые токи через контурные токи

В общем случае ток в ветви является алгебраической суммой контурных токов, т.е. $I_x = \sum \pm I_{kk}$ ($k=1 \dots s$). Если контурный ток совпадает по направлению с направлением искомого тока, то в \sum перед ним ставится знак «плюс», в противном случае – знак «минус».



$$I_1 = -I_{11} = -0,75 \text{ [A]},$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,75 - (-1) = 1,75 \text{ [A]},$$

$$I_3 = -I_{22} = -(-1) = 1 \text{ [A]},$$

$$I_4 = -I_{11} + I_{33} = -0,75 + (-0,5) = -1,25 \text{ [A]},$$

$$I_5 = I_{11} - I_{22} - I_{33} = 0,75 - (-1) - (-0,5) = 2,25 \text{ [A]}.$$

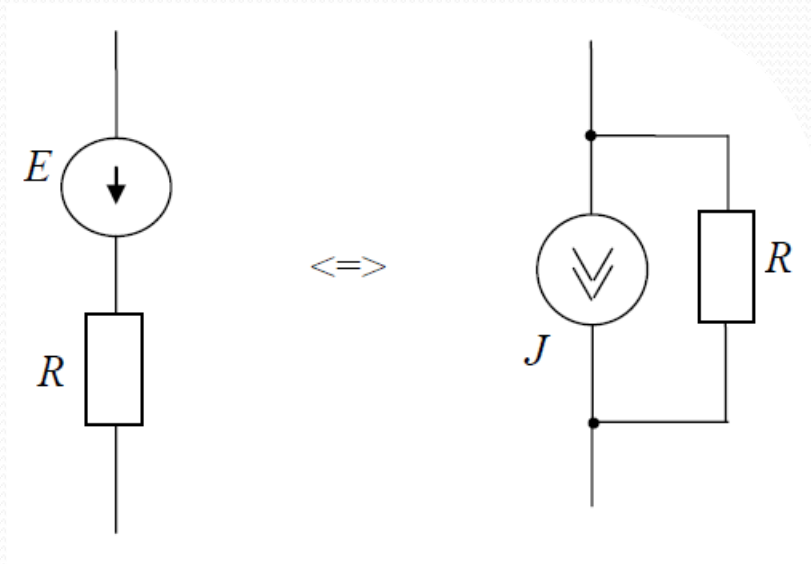
Ответ: $I_1 = -0.75 \text{ [A]}$, $I_2 = 1.75 \text{ [A]}$, $I_3 = 1 \text{ [A]}$, $I_4 = -1.25 \text{ [A]}$, $I_5 = 2.25 \text{ [A]}$.

Типовые эквивалентные преобразования

Суть метода эквивалентных преобразований (МЭП) заключается в применении типовых эквивалентных преобразований к исходной схеме для ее сведения к одноконтурной относительно ветви с искомым током.

1. Преобразования источников энергии

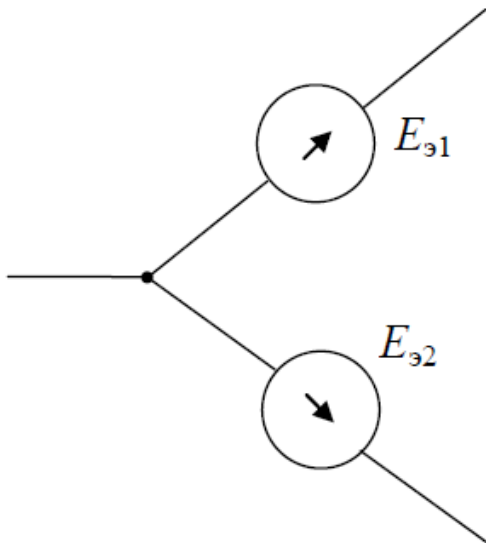
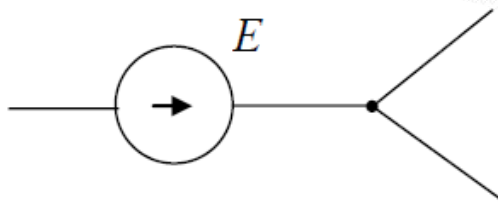
а) преобразование реальных источников энергии друг в друга



$$J = E/R \quad \Leftrightarrow \quad E = J \cdot R$$

Типовые эквивалентные преобразования

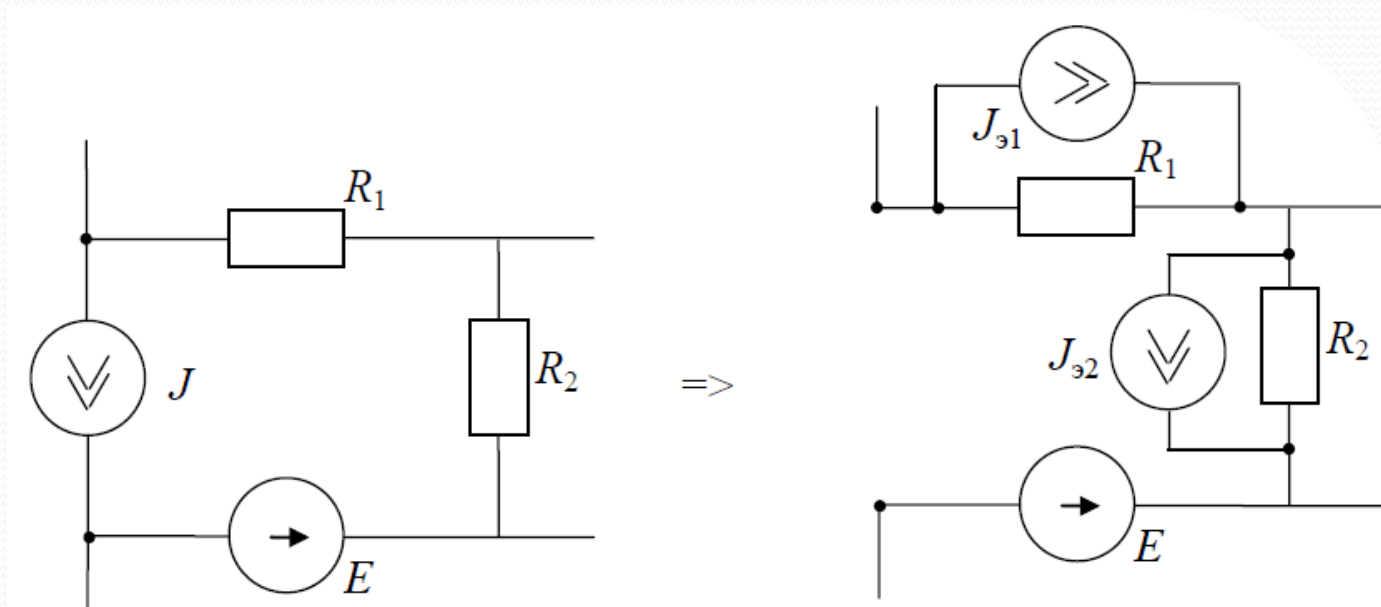
б) расщепление идеальных источников ЭДС



$$E_{э1} = E_{э2} = E$$

Типовые эквивалентные преобразования

в) расщепление идеальных источников тока

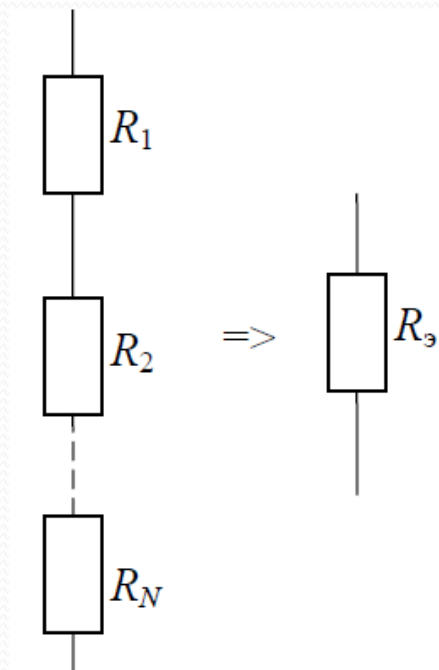


$$J_{31} = J_{32} = J$$

Типовые эквивалентные преобразования

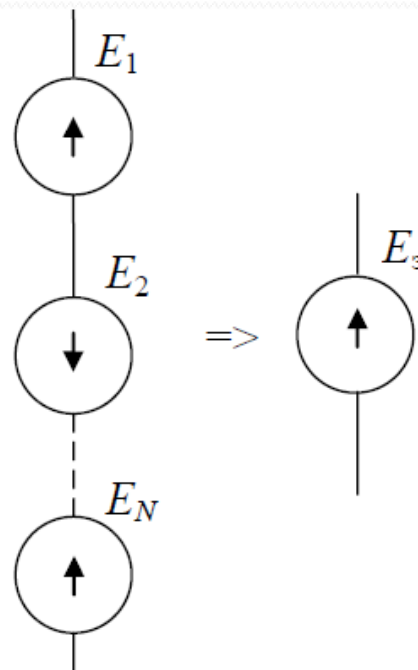
2. Преобразование последовательно соединенных элементов

а) R



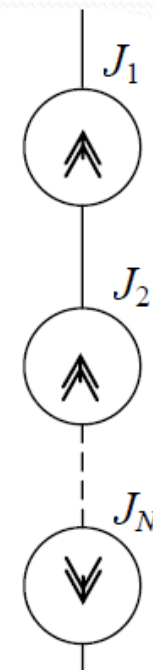
$$R_3 = \sum R_n$$

б) E



$$E_3 = \sum \pm E_n$$

в) J



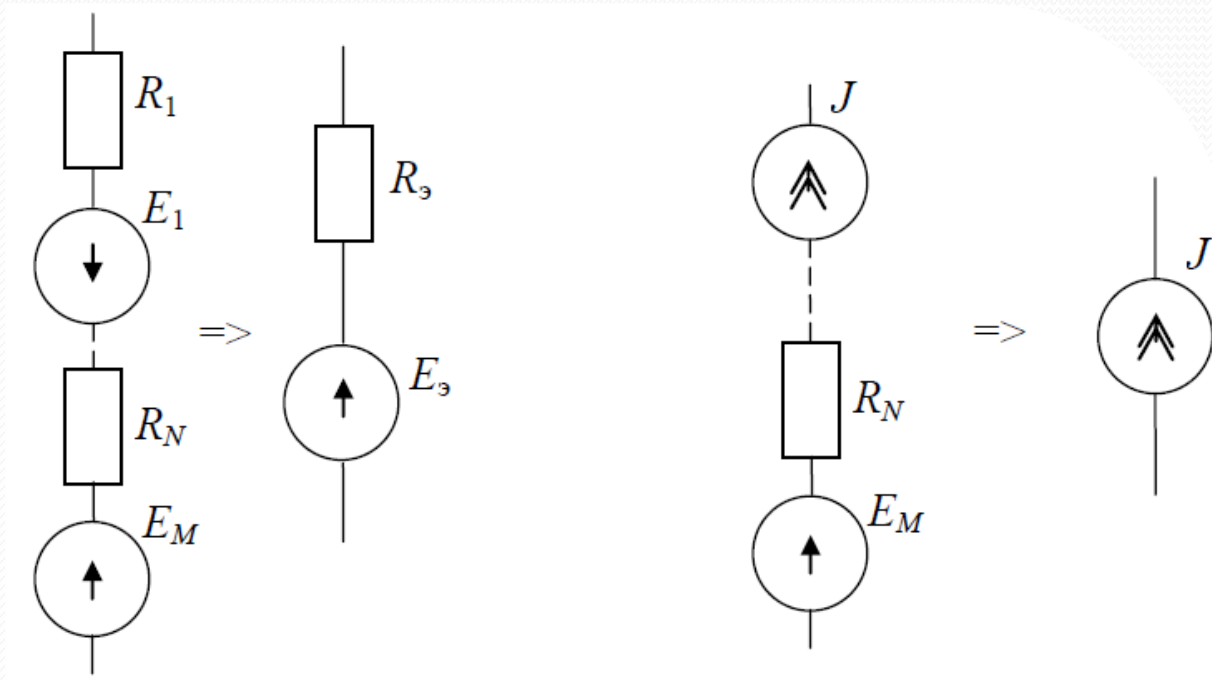
невозможное
соединение

Типовые эквивалентные преобразования

2. Преобразование последовательно соединенных элементов

г) R, E

д) R, E, J



$$R_э = \sum R_n, \quad E_э = \sum \pm E_m$$

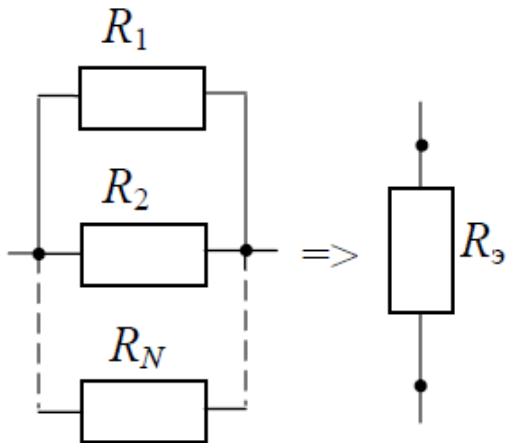
Типовые эквивалентные преобразования

3. Преобразование параллельно соединенных элементов

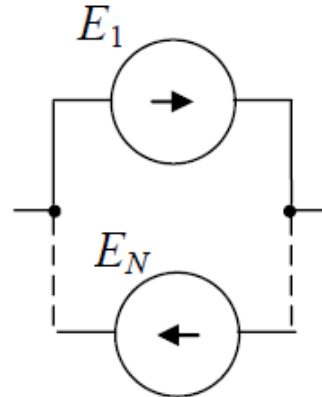
а) R

б) E

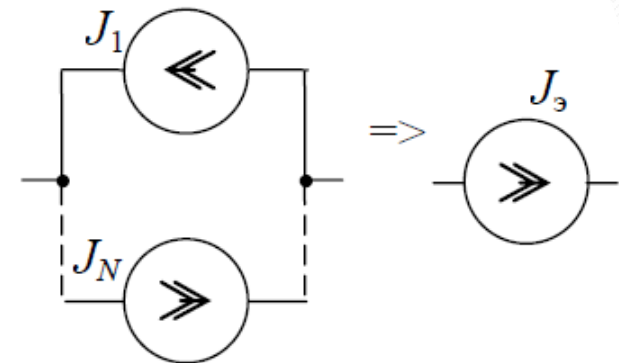
в) J



$$R_3 = 1 / \sum (1/R_n)$$



невозможное
соединение



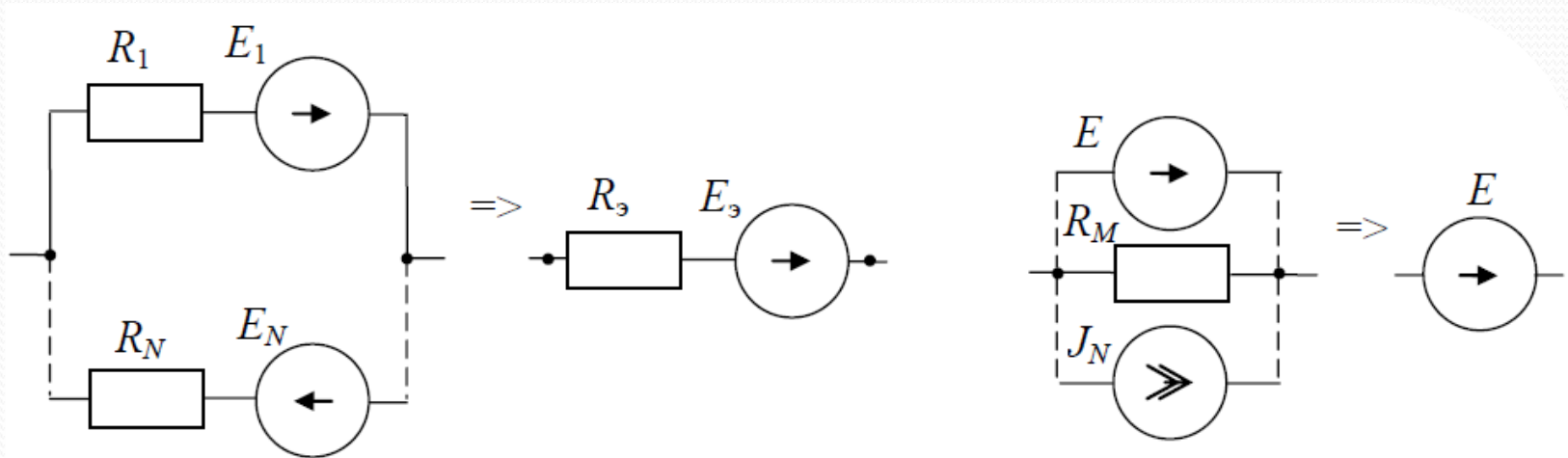
$$J_3 = \sum \pm J_n$$

Типовые эквивалентные преобразования

3. Преобразование параллельно соединенных элементов

г) R, E

д) R, J, E

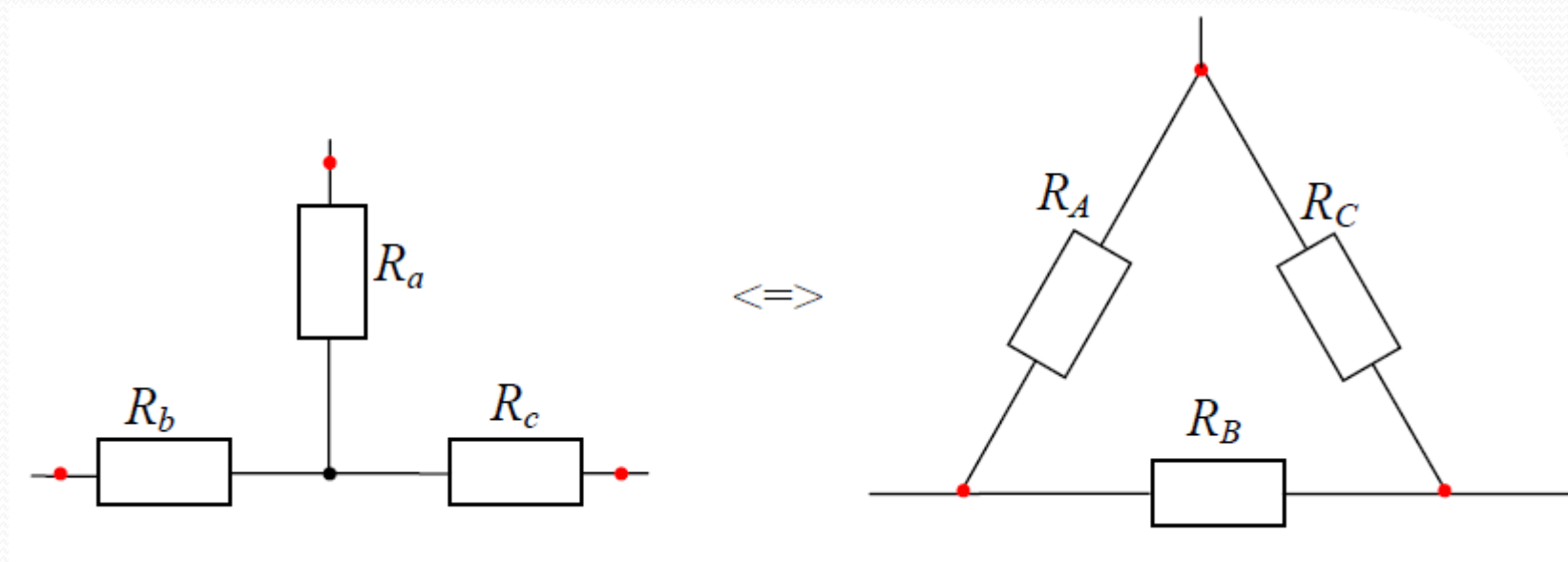


$$R_3 = 1 / \sum (1 / R_n)$$

$$E_3 = R_3 \cdot \sum (\pm E_n / R_n)$$

Типовые эквивалентные преобразования

4. Преобразование треугольник-звезда и обратно



$$R_a = R_A \cdot R_C / (R_A + R_B + R_C)$$

$$R_b = R_A \cdot R_B / (R_A + R_B + R_C)$$

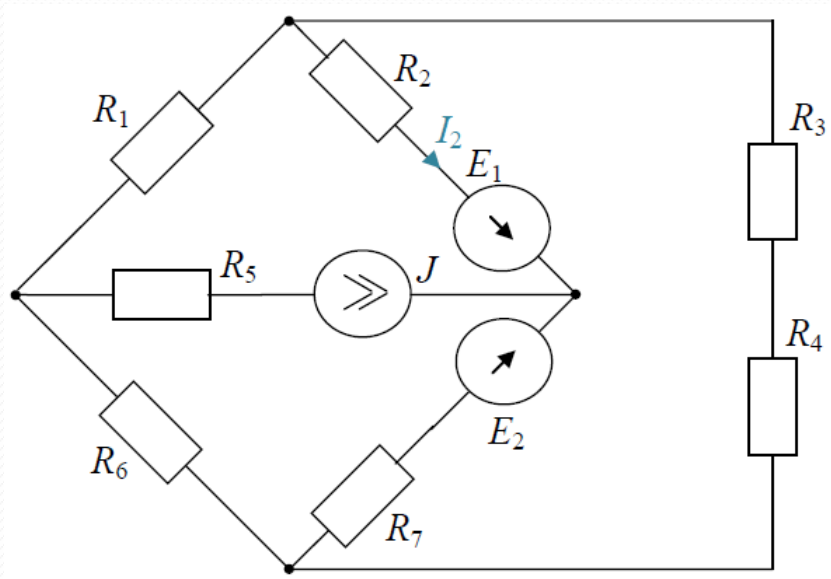
$$R_c = R_B \cdot R_C / (R_A + R_B + R_C)$$

$$R_A = R_a + R_b + R_a \cdot R_b / R_c$$

$$R_B = R_c + R_b + R_c \cdot R_b / R_a$$

$$R_C = R_a + R_c + R_a \cdot R_c / R_b$$

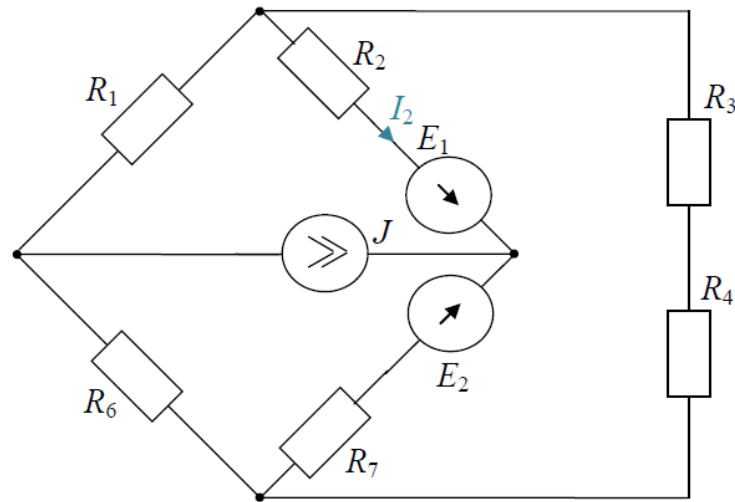
Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)



Дано: $E_1=20$ [В], $E_2=5$ [В], $J=0,5$ [А],
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_6=1$ [Ом],
 $R_5=4$ [Ом], $R_7=5$ [Ом].

Найти: найти ток через любой источник ЭДС МЭП (I_2)

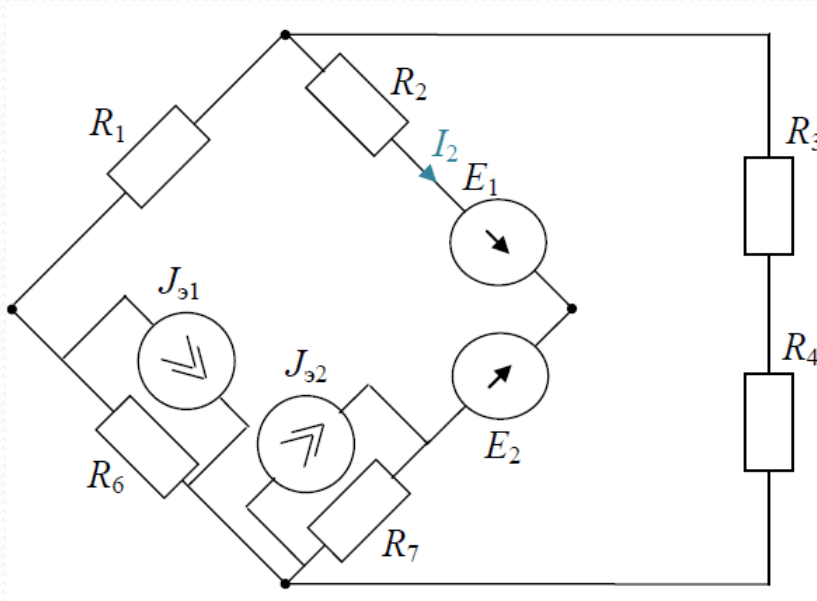
Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)



Решение:

1. R_5 посл. J удаляем [2д].

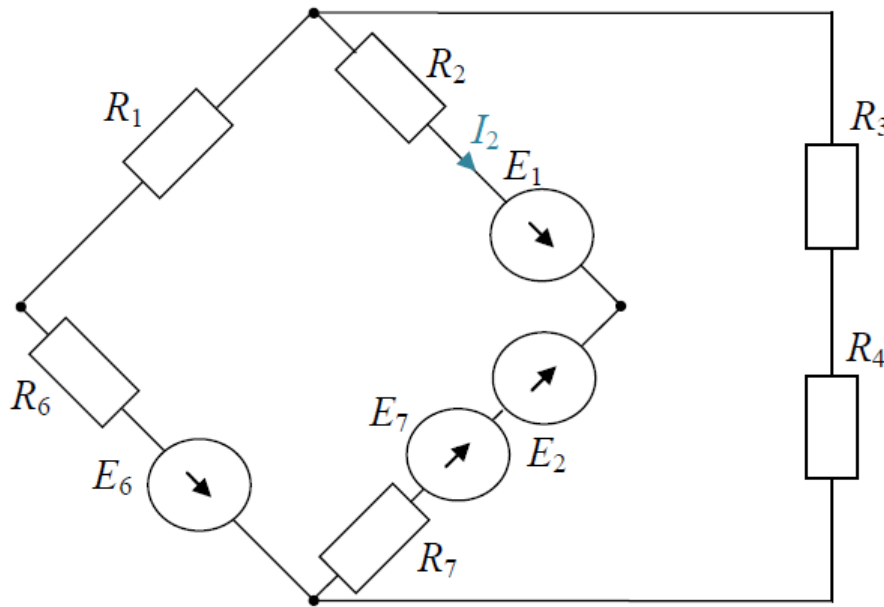
Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)



2. Расщепляем J на R_6 , R_7 , E_2 [1В]

$$J_{31} = J_{32} = J = 0.5 \text{ [A]}$$

Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)

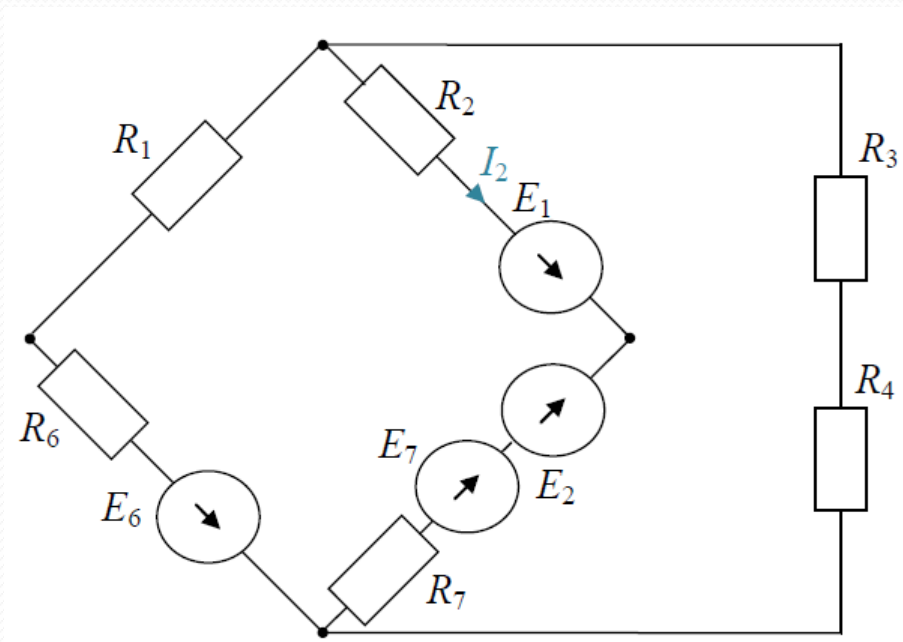


3. $J_{\text{э}1}$ парал. $R_6 \rightarrow E_6$ посл. R_6 [1а],
 $J_{\text{э}2}$ парал. $R_7 \rightarrow E_7$ посл. R_7 [1а].

$$E_6 = R_6 \cdot J_{\text{э}1} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ [В]},$$

$$E_7 = R_7 \cdot J_{\text{э}2} = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ [В]}.$$

Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)

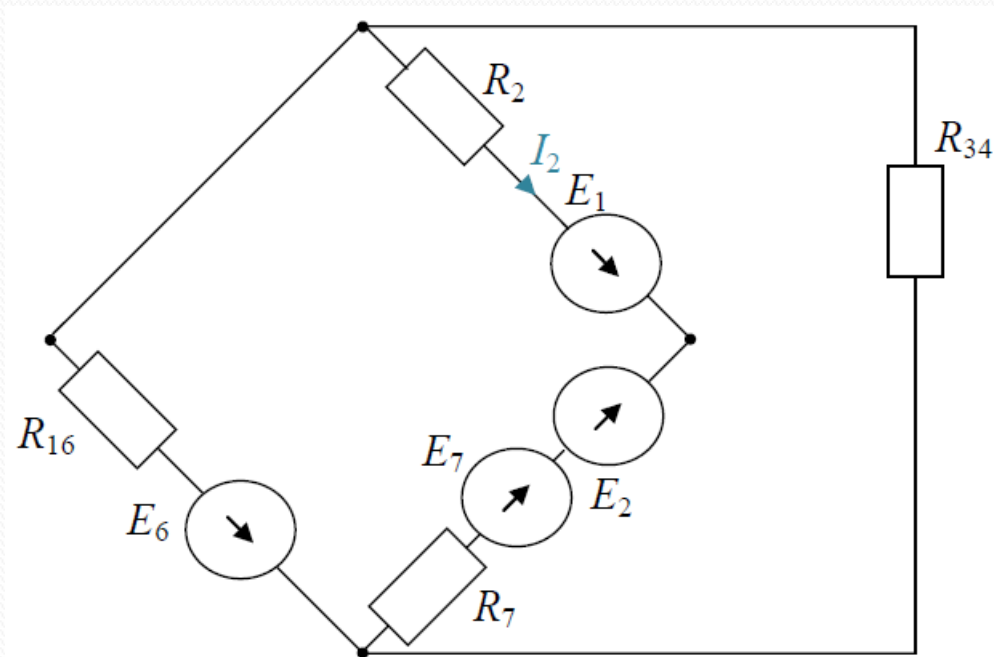


4. R_1 посл. $R_6 \rightarrow R_{16}$ [2а],
 R_3 посл. $R_4 \rightarrow R_{34}$ [2а].

$$R_{16} = R_1 + R_6 = 1 + 1 = 2 \text{ [Ом]},$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 1 + 1 = 2 \text{ [Ом]}.$$

Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)

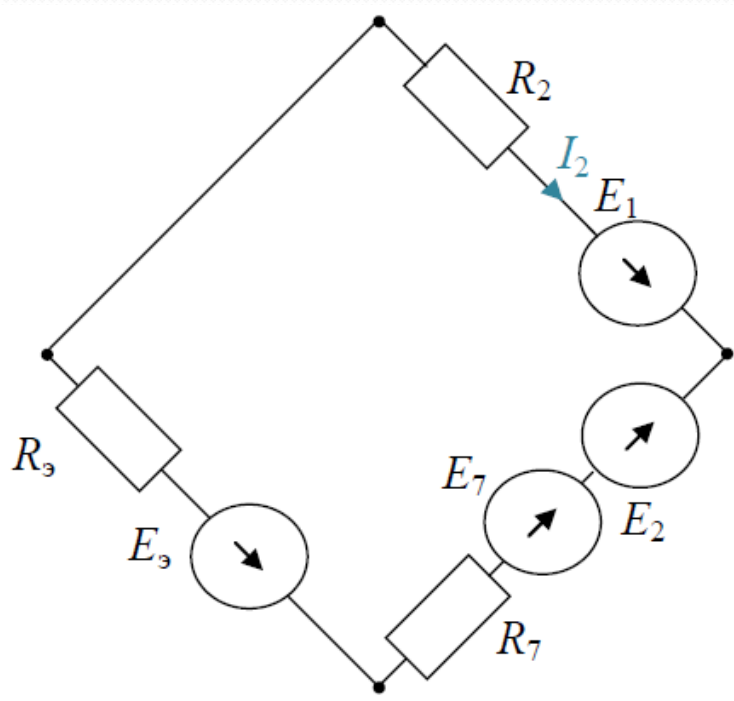


5. (R_{16} посл. E_6) парал. $R_{34} \rightarrow R_9$ посл. E_9 [3Г].

$$R_9 = 1 / (1/R_{16} + 1/R_{34}) = 1 / (1/2 + 1/2) = 1 \text{ [Ом]},$$

$$E_9 = R_9 \cdot (E_6/R_{16}) = 1 \cdot (0,5/2) = 0,25 \text{ [В]}.$$

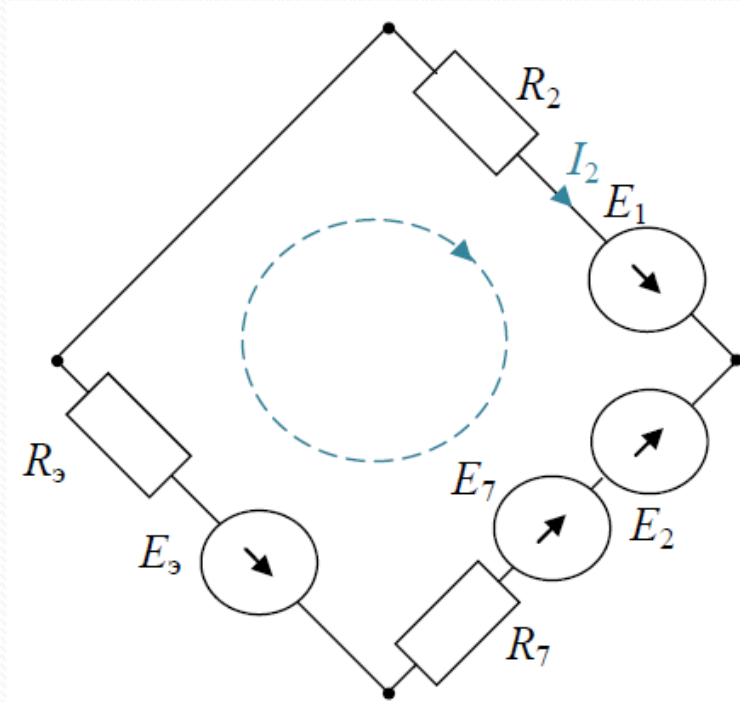
Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)



6. Схема сведена к одноконтурной относительно ветви с искомым током.

Искомый ток R_2 определим с использованием ЗКП.

Расчет цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований (МЭП)



$$(R_2 + R_7 + R_3) \cdot I_2 = E_1 - E_2 - E_7 - E_3$$

$$I_2 = (E_1 - E_2 - E_7 - E_3) / (R_2 + R_7 + R_3)$$

$$I_2 = (20 - 5 - 2,5 - 0,25) / (1 + 5 + 1) = 12,25 / 7 = 1,75 \text{ [A]}.$$

Ответ: $I_2 = 1,75 \text{ [A]}.$

Баланс мощностей

На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источниками электрической энергии в цепи должна быть равна мощности преобразуемой в другие виды энергии в нагрузке:

$$P_{\text{и}} = P_{\text{п}}$$

или

$$\sum \pm P_J + \sum \pm P_E = \sum P_R,$$

где $P_{\text{и}}$ – суммарная мощность источников энергии, $P_{\text{п}}$ – суммарная мощность потребителей (нагрузки), P_J – мощность источника тока, P_E – мощность источника ЭДС, P_R – мощность резистивного элемента.

Баланс мощностей

Мощность источника тока

$$P_J = \pm U_J \cdot J$$

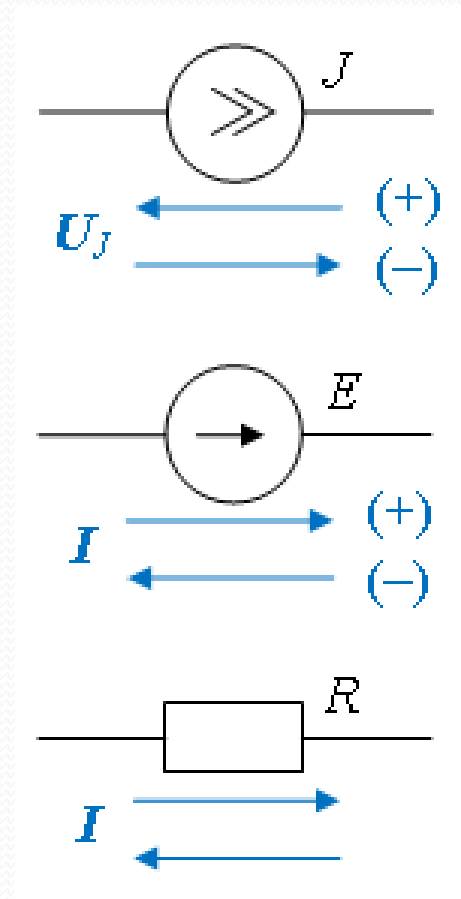
(U_J направляется произвольно и определяется с использованием ЗКП)

Мощность источника ЭДС

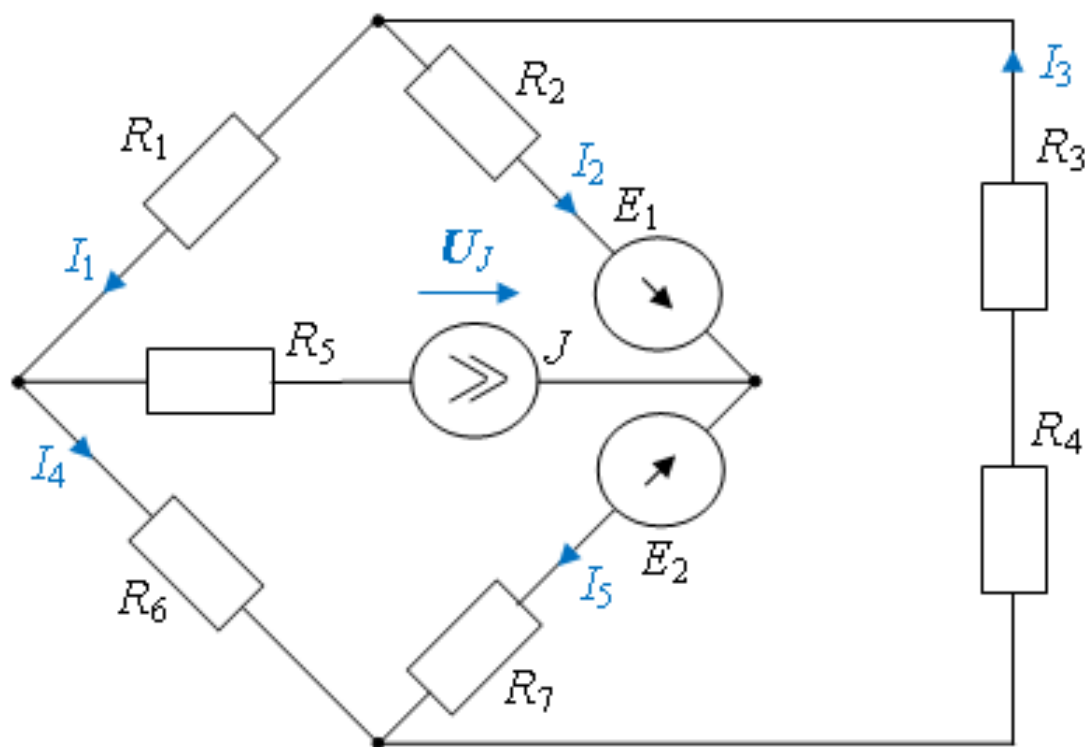
$$P_E = \pm E \cdot I$$

Мощность резистивного элемента

$$P_R = R \cdot I^2$$



Пример



Дано: $E_1=20$ [В], $E_2=5$ [В],
 $J=0,5$ [А], $R_5=4$ [Ом],
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R_6=1$ [Ом],
 $R_7=5$ [Ом], $I_1=-0,75$ [А],
 $I_2=1,75$ [А], $I_3=1$ [А],
 $I_4=-1,25$ [А], $I_5=2,25$ [А].

Найти: U_J , мощности всех элементов цепи, суммарные мощности источников и приемников, показать, что соблюдается БМ.

Пример

Решение:

1) Определение U_J
по ЗКП для контура (*)

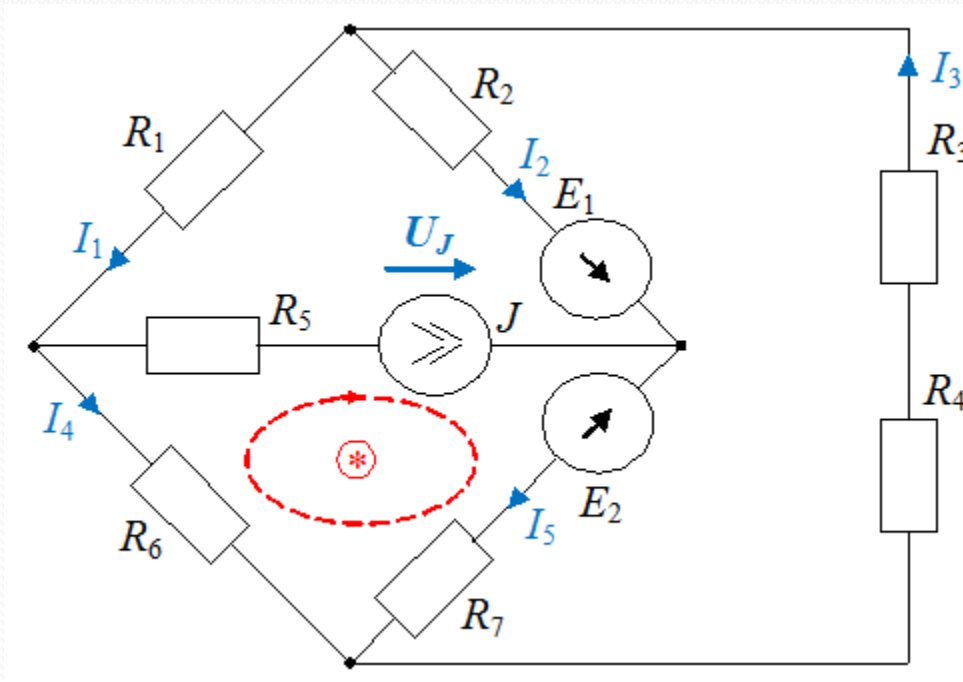
$$R_5 \cdot J + U_J + R_7 \cdot I_5 - R_6 \cdot I_4 = -E_2$$

тогда

$$U_J = -E_2 - R_5 \cdot J - R_7 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_4$$

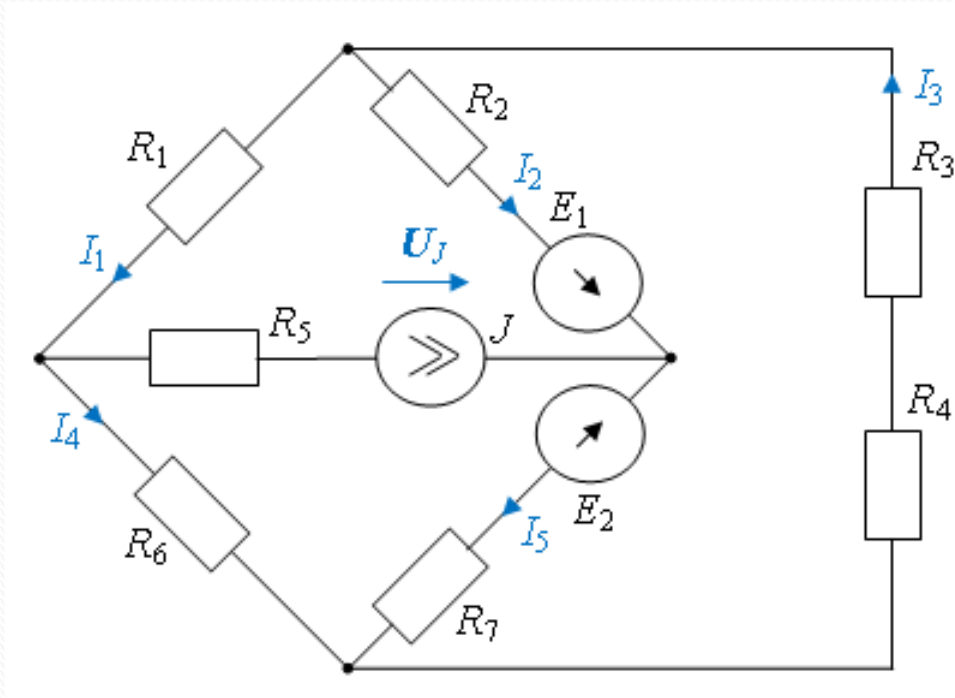
$$U_J = -5 - 4 \cdot 0,5 - 5 \cdot 2,25 + 1 \cdot (-1,25)$$

$$U_J = -19,5 \text{ [В]}.$$



Пример

2) Определение мощностей элементов

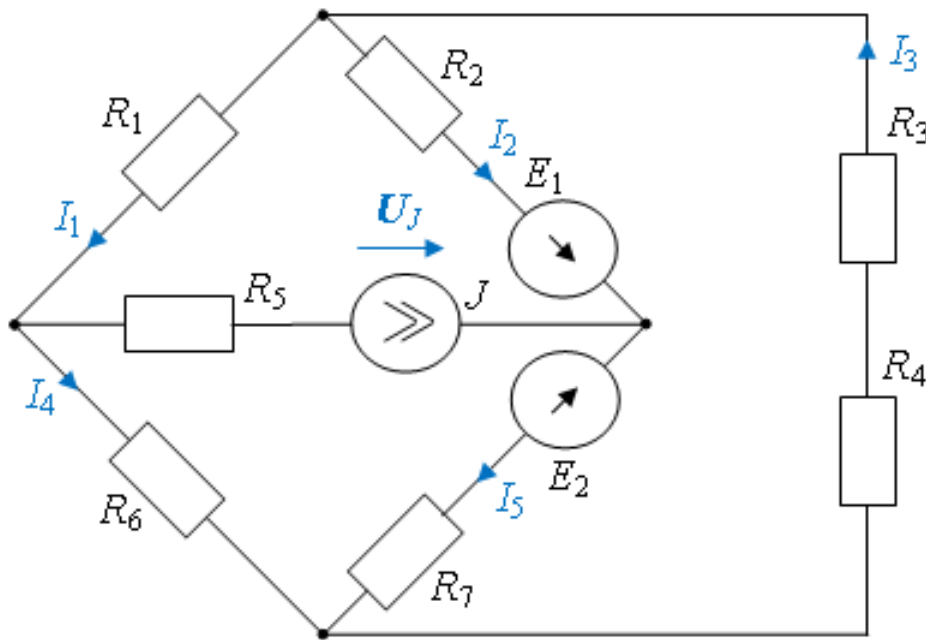


$$P_J = -U_J \cdot J = -(-19,5) \cdot 0,5 = 9,75 \text{ [Вт]}$$

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_2 = 20 \cdot 1,75 = 35 \text{ [Вт]}$$

$$P_{E2} = -E_2 \cdot I_5 = -5 \cdot 2,25 = -11,25 \text{ [Вт]}$$

Пример



$$P_{R1} = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot (-0,75)^2 = 0,5625 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R2} = R_2 \cdot I_2^2 = 1 \cdot (1,75)^2 = 3,0625 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R3} = R_3 \cdot I_3^2 = 1 \cdot (1)^2 = 1 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R4} = R_4 \cdot I_3^2 = 1 \cdot (1)^2 = 1 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R5} = R_5 \cdot J^2 = 4 \cdot (0,5)^2 = 1 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R6} = R_6 \cdot I_4^2 = 1 \cdot (-1,25)^2 = 1,5625 \text{ [Вт]}$$

$$P_{R7} = R_7 \cdot I_5^2 = 5 \cdot (2,25)^2 = 25,3125 \text{ [Вт]}$$

Пример

3) Баланс мощностей

- суммарная мощность источников

$$P_{\text{и}} = P_J + P_{E1} + P_{E2} = 9,75 + 35 + (-11,25) = 33,5 \text{ [Вт]}$$

- суммарная мощность потребителей

$$\begin{aligned} P_{\text{п}} &= P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} + P_{R5} + P_{R6} + P_{R7} = \\ &= 0,5625 + 3,0625 + 1 + 1 + 1 + 1,5625 + 25,3125 = 33,5 \text{ [Вт]} \end{aligned}$$

$$P_{\text{и}} = P_{\text{п}} = 33,5 \text{ [Вт]} \text{ баланс мощностей сошелся}$$

Ответ: $I_1 = -0,75 \text{ [A]}$, $I_2 = 1,75 \text{ [A]}$, $I_3 = 1 \text{ [A]}$, $I_4 = -1,25 \text{ [A]}$, $I_5 = 2,25 \text{ [A]}$,
 $U_J = -19,5 \text{ [В]}$, $P_J = 9,75 \text{ [Вт]}$, $P_{E1} = 35 \text{ [Вт]}$, $P_{E2} = -11,25 \text{ [Вт]}$,
 $P_{R1} = 0,5625 \text{ [Вт]}$, $P_{R2} = 3,0625 \text{ [Вт]}$, $P_{R3} = 1 \text{ [Вт]}$, $P_{R4} = 1 \text{ [Вт]}$, $P_{R5} = 1 \text{ [Вт]}$,
 $P_{R6} = 1,5625 \text{ [Вт]}$, $P_{R7} = 25,3125 \text{ [Вт]}$, $P_{\text{и}} = P_{\text{п}} = 33,5 \text{ [Вт]}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!