Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,
Javier Reyes

1. Problemas

Problema 1 (3 pts.)**.** Muestre que para $\varepsilon > 0$ existe una constante $\kappa_\varepsilon > 0$ tal que para todo entero positivo n se cumpla que $\sigma_0(n) \leq k_\varepsilon \cdot n^\varepsilon$

Solución problema 1: Notamos que el problema es equivalente a demostrar que hay una cota para la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p|n} \left(\frac{1 + v_p(n)}{p^{\varepsilon v_p(n)}} \right)$$

Ya que la expresión es una función aritmética multiplicativa podemos analizarla para un término especifico p' tal que $p'|n$

$$\frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\varepsilon v_{p'}(n)}}$$

Tomamos $p' \gg 1$ y notamos que lo siguiente se cumple

$$p'^{\varepsilon v_{p'}(n)} \geq \underbrace{\exp(v_{p'}(n)) \geq 1 + v_{p'}(n)}_{\text{Por expansión de Taylor}}$$

$$\therefore \frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\varepsilon v_{p'}(n)}} \leq 1$$

Notamos que lo anterior solo se cumple si $p' \geq \exp(\varepsilon^{-1})$. Veamos el caso contrario, que consta de solo finitos primos $p' < \exp(\varepsilon^{-1})$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1+a}{p'^{\varepsilon a}} = 0$$

Esto nos da que la expresión tiene una cota que no depende de a

$$\frac{1+a}{p'^{\varepsilon a}} \leq C_{\varepsilon,p'}$$

Con esto podemos concluir que $\sigma_0(n)/n^\varepsilon$ esta acotado, lo que implica que existe un

$$\kappa_\varepsilon = \prod_{p'<\exp(\varepsilon^{-1})} C_{\varepsilon,p'}$$

tal que para todo n

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon} \leq \kappa_\varepsilon$$

Lo cual es equivalente a

$$\sigma_0(n) \leq \kappa_\varepsilon \cdot n^\varepsilon$$

Que es lo que queríamos demostrar[1]

■

Problema 2 (3 pts.)**.** Demuestre que existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo entero positivo n se tiene

$$An^2 \leq \phi(n)\sigma_1(n) \leq Bn^2$$

Solución problema 2: Recordamos que $\phi(n) = n\prod_{p|n} p^{-1}(p-1)$ y $\sigma_1(n) = \prod_{p|n}(1+p+\ldots+$

[1]Demostración basada en el blog de Terence Tao[1]

$p^{v_p(n)}$), esto nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi(n)\sigma_1(n) &= \prod_{p|n}(1+p+\ldots+p^{v_p(n)})p^{-1}(p-1) \\
&= n\prod_{p|n}\frac{p^{v_p(n)+1}-1}{p-1}p^{-1}(p-1) \\
&= n\prod_{p|n}\frac{p^{v_p(n)+1}-1}{p} \\
&\leq n\prod_{p|n}p^{v_p(n)} \\
&\leq n^2
\end{aligned}$$

Por lo que $B = 1$. Veremos ahora

$$\begin{aligned}
\phi(n)\sigma_1(n) &= n^2\prod_{p|n}(1-p^{-1-v_p(n)}) \\
&\geq n^2\prod_{p|n}(1-p^{-2}) \\
&\geq n^2\prod_{p}(1-p^{-2})
\end{aligned}$$

Sea $A = \prod_p(1-p^{-2})$, por lo que solo falta demostrar que esto es distinto de cero.

$$\begin{aligned}
\log\prod_p(1-p^{-2}) &= \sum_p \log(1-p^{-2}) \\
&= \sum_p \log(p^{-2}) + \log(p^2-1) \\
&= -\sum_p \log(p^2) - \log(p^2-1) \\
&= -\sum_p \log'(\xi) \quad \xi\in[p^2-1,p^2] \\
&\geq -\sum_p \frac{1}{p^2-1}
\end{aligned}$$

Podemos ver que esta ultima suma tiene que ser convergente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$. Esto implica que lo que teníamos es distinto de cero. Por lo que tenemos lo que queríamos.

$\blacksquare$

Problema 3 (3 pts.)**.** Pruebe que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

Solución problema 3: Usando sumatoria por partes podemos ver que esto se cumple:

$$\begin{aligned}
\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} &= \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{x \log x} - \int_2^x (\lfloor t \rfloor - 1) \left(\frac{1}{t \log t}\right)' \mathrm{d}t \\
&= \frac{x - \{x\} - 1}{x \log x} - \int_2^x (t - \{t\} - 1) \left(\frac{1}{t \log t}\right)' \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t}\right)' \mathrm{d}t + \int_2^x (\{t\} + 1) \left(\frac{1}{t \log t}\right)' \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t}\right)' \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log t}\bigg|_2^x + \int_2^x \frac{1}{t \log t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log x} + \log \log x + C' \\
&= \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos.

$\blacksquare$

Problema 4 (4 pts.)**.** Muestre que

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot x^2 + O(x \log x)$$

Solución problema 4: Primero demostraremos un pequeño lema

Lema 1.1 ($\sum_{a>x} \frac{1}{a^2} = O(x^{-1})$)**.** *Podemos usar el test de comparación de la integral*

$$\begin{aligned}
\sum_{a>x} \frac{1}{a^2} &= \sum_{n=\lfloor x \rfloor+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\leq \int_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leq -\frac{1}{t}\bigg|_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \\
&\leq \frac{1}{\lfloor x \rfloor}
\end{aligned}$$

Con esto tenemos lo pedido.

Ahora, comenzamos reescribiendo la suma

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \phi(n) &= \sum_{n\leq x} (\mu * I_1)(n) \\
&= \sum_{n\leq x} \sum_{ab=n} \mu(a)b \\
&= \sum_{a\leq x} \sum_{1\leq b\leq \frac{x}{a}} \mu(a)b \\
&= \sum_{a\leq x} \mu(a) \frac{\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor}{2}
\end{aligned}$$

Se sabe que $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \phi(n) &= \sum_{a\leq x} \mu(a) \frac{(\frac{x}{a})^2 + O(1)\frac{x}{a} + O(1)}{2} \\
&= \left(\sum_{a\leq x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x) \sum_{a\leq x} \frac{\mu(a)}{a} + O(1) \sum_{a\leq x} \mu(a)
\end{aligned}$$

También se sabe que $\mu(n) = O(1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\phi(n) &= \left(\sum_{a\leq x}\frac{\mu(a)}{a^2}\right)\frac{x^2}{2} + O(x)\sum_{a\leq x}\frac{1}{a} + O(x)\\
&= \left(\sum_{a\leq x}\frac{\mu(a)}{a^2}\right)\frac{x^2}{2} + O\left(x\log x\right)\\
&= \left(\sum_{a\in\mathbb{N}}\frac{\mu(a)}{a^2} - \sum_{a>x}\frac{\mu(a)}{a^2}\right)\frac{x^2}{2} + O\left(x\log x\right)\\
&= \left(\frac{1}{\zeta(2)} - \sum_{a>x}\frac{\mu(a)}{a^2}\right)\frac{x^2}{2} + O\left(x\log x\right)\\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x\log x) - \frac{x^2}{2}\sum_{a>x}\frac{\mu(a)}{a^2}\\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x\log x) - O(x^2)\sum_{x>a}\frac{1}{a^2}\\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x\log x) - O(x)\\
&= \frac{1}{2\zeta(2)}\cdot x^2 + O(x\log x)
\end{aligned}$$

■

Problema 5 (3 pts.)**.** Pruebe que

$$\sum_{d^2|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados}\\ 0 & \text{si no lo es}\end{cases}$$

Solución problema 5: Tomamos el caso donde n no es libre de cuadrados, y sean $p_1, ..., p_k$ primos tal que $p_i^2|n$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{d^2|n}\mu(d) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i 1^{k-i}\\
&= (1-1)^k\\
&= 0
\end{aligned}$$

En el caso donde n es libre de cuadrados

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

Que es lo que queríamos demostrar

$\blacksquare$

Problema 6 (4 pts.)**.** Defina la función contadora de libres de cuadrados:

$$Q(x) := \#\{n \leq x : n \text{ es libre de cuadrados}\}.$$

Demuestre que

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot x + O(x^{1/2})$$

Solución problema 6: Usando la función definida en el problema 5, podemos escribir Q de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d^2|n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \leq x} \sum_{n \leq x/d^2} \mu(d) \\
&= \sum_{d \leq x} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor \\
&= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} x - \sum_{d \leq x} \mu(d) \left\{ \frac{x}{d^2} \right\}
\end{aligned}$$

Para desarrollar la segunda parte de la expresión notamos que para $d \leq \sqrt{x}$ pasa que

$\left\{\frac{x}{d^2}\right\} \leq 1$, y si $d > \sqrt{x}$ tenemos que $\left\{\frac{x}{d^2}\right\} = \frac{x}{d^2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{d\leq x} \mu(d) \left\{\frac{x}{d^2}\right\} &= \sum_{d\leq\sqrt{x}} O(1) + \sum_{\sqrt{x}<d\leq x} O(1)\frac{x}{d^2} \\
&= O(\sqrt{x}) + O(x)\left(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} - \sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right) \\
&= O(\sqrt{x}) + O(x)\left(\zeta(2) - O(x^{-1}) - \zeta(2) + O(x^{-1/2})\right) \\
&= O(\sqrt{x}) + O(1) + O(\sqrt{x}) \\
&= O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Esto nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}\right) + O(\sqrt{x}) \\
&= x\left(\frac{1}{\zeta(2)} + O(1)\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}\right) + O(\sqrt{x}) \\
&= \frac{1}{\zeta(2)}x + O(\sqrt{x}) + x\cdot O(x^{-1}) \\
&= \frac{1}{\zeta(2)}x + O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Que es lo que buscábamos.

■

2. Agradecimientos

- Felipe Guzmán
- Maximiliano Norbu
- Fernanda Cares
- Agustín Oyarce
- Francisco Monardes
- Matías Bruna
- Gabriel Ramirez

Referencias

[1] Tao. Terence tao's blog, 2008.