Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (4 pts)**.** Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ para los siguientes valores de d:

(i) (1 pt) $d = 60$

(ii) (2 pt) $d = 61$

(iii) (1 pt) $d = 62$

Solución problema 1:

$\blacksquare$

Problema 2 (2 pts. c/u)**.** Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. Sea $k \neq 0$ un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \tag{1}$$

Dos soluciones enteras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de (1) son P-*equivalentes* si hay una solución entera $(s,t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ que cumple $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$.

(i) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).

(ii) Muestre que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

(iii) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera (a, b), entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de (a, b) en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = \left(s + \sqrt{d}t\right)\left(a + \sqrt{d}b\right) \text{ para algún } (s, t) \in \mathcal{P}_d\mathbb{Z}\}$$

y ese conjunto es infinito.

(iv) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).

(v) Para la ecuación $x^2 - 5y^2 = 4$, muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

Solución problema 2:

■

Problema 3 (3 pts.)**.** Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos N con esta propiedad, es decir que si sumamos $1 + 2 + ... + N$ obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de N que lo cumplen ($N = 1$ y $N = 8$ funcionan; faltan los siguientes tres).

Solución problema 3:

■

Problema 4 (3 pts)**.** Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos $3 \cdot 6$:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos $A < B$ con la misma propiedad, es decir, que cumplen $A + (A + 1) + ...(B - 1) + B = A \cdot B$. Además, encuentre otros tres ejemplos.

Solución problema 4:

■