Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (4 pts)**.** Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ para los siguientes valores de d:

(I) (1 pt) $d = 60$

(II) (2 pt) $d = 61$

(III) (1 pt) $d = 62$

Solución problema 1:

(I) Escribiendo la tabla y usando un programa de python[1] para conseguir la fracción continua

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-11
1	8	1	4
2	23	3	-11
1	31	4	1
14	457	59	-11
1	488	63	4
2	1433	185	-11
1	1921	248	1

Podemos ver que $(31, 4)$ es solución, y es la fundamental por tabla.

(II) Usando lo mismo que en (I)

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-12
1	8	1	3
4	39	5	-4
3	125	16	9
1	164	21	-5
2	453	58	5
2	1070	137	-9
1	1523	195	4
3	5639	722	-3
4	24079	3083	12
1	29718	3805	-1
14	440131	56353	12
1	469849	60158	-3
4	2319527	296985	4
3	7428430	951113	-9
1	9747957	1248098	5
2	26924344	3447309	-5
2	63596645	8142716	9
1	90520989	11590025	-4
3	335159612	42912791	3
4	1431159437	183241189	-12
1	1766319049	226153980	1

Notamos que $(1766319049, 226153980)$ es solución y por la tabla es la fundamental

(III) Usando lo mismo que en (I)

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-13
1	8	1	2
6	55	7	-13
1	63	8	1
14	937	119	-13
1	1000	127	2
6	6937	881	-13
1	7937	1008	1

Notamos que $(63, 8)$ es solución fundamental.

■

Problema 2 (2 pts. c/u)**.** Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. Sea $k \neq 0$ un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \tag{1}$$

Dos soluciones enteras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de (1) son P-*equivalentes* si hay una solución entera $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ que cumple $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$.

(I) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).

(II) Muestre que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

(III) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera (a, b), entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de (a, b) en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = \left(s + \sqrt{d}t\right)\left(a + \sqrt{d}b\right) \text{ para algún } (s, t) \in \mathcal{P}_d\mathbb{Z}\}$$

y ese conjunto es infinito.

(IV) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).

(V) Para la ecuación $x^2 - 5y^2 = 4$, muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

Solución problema 2:

(I) Refleja: Notar que $(1,0) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, por lo que $\forall (a_1, b_1) \in Q$ tenemos que

$$a_1 + b_1\sqrt{d} = (1 + 0\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}).$$

Simétrica: Sean (a_1, b_1) y $(a_2, b_2) \in Q$, $(s,t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, tal que

$$a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}),$$

lo que pasa si y solo si

$$a_2 + b_2\sqrt{d} \cdot \frac{1}{(s + t\sqrt{d})} = (a_1 + b_1\sqrt{d})$$

Racionalizando $\frac{1}{(s+t\sqrt{d})}$ (y usando el hecho que (s,t) es solución), llegamos a que lo anterior pasa si y solo si

$$(a_2 + b_2\sqrt{d})(s - t\sqrt{d}) = (a_1 + b_1\sqrt{d}),$$

y claramente $(s, -t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$.

Transitiva: Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in Q$ y $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, tal que $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s_1 + t_1\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$ y $a_3 + b_3\sqrt{d} = (s_2 + t_2\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d})$. Esto dice que

$$\begin{aligned} a_3 + b_3\sqrt{d} &= (s_2 + t_2\sqrt{d})(s_1 + t_1\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}) \\ &= (s_2s_1 + dt_2t_1 + (t_2s_1 + s_2t_1)\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}) \end{aligned}$$

Veamos que $(s_2s_1 + dt_2t_1, t_2s_1 + s_2t_1) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (s_2s_1 + dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1 + s_2t_1)^2 &= (s_2s_1)^2 + 2ds_1s_2t_1t_2 + (dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1)^2 - 2ds_1s_2t_1t_2 - (s_2t_1)^2 \\ &= s_1(s_2^2 - dt_2^2) + dt_1^2(dt_2^2 - s_2^2) \\ &= s_1^2 - dt_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene lo pedido.

(II) Supongamos que tiene soluciones enteras. Sea (a,b) una solución. Luego,

$$a^2 - 5b^2 = 2.$$

Aplicando $\pmod 5$ queda $a^2 \equiv 2 \pmod 5$, pero 2 no es un cuadrado $\pmod 5$, $\rightarrow\leftarrow$.

(III)

(IV)

(V) Notar que $(7,3)$ y $(3,1)$ son soluciones. Supongamos que están relacionadas. Luego,

$$7 + 3\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})\underbrace{(5 + t\sqrt{5})}_{\in \mathcal{P}_5(\mathbb{Z})}.$$

Desde aquí se tiene $7 + 3\sqrt{5} = (15 + 5t) + \sqrt{5}(3t+5)$. Esto implica que

- $15 + 5t = 7 \Rightarrow 0 \equiv 2 \pmod 5$, $\rightarrow\leftarrow$

- $3t + 5 = 3 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod 3$, $\rightarrow\leftarrow$

Así, $[(7,3)] \neq [(3,1)]$.

■

Problema 3 (3 pts.). Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos N con esta propiedad, es decir que si sumamos $1+2+...+N$ obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de N que lo cumplen ($N=1$ y $N=8$ funcionan; faltan los siguientes tres).

Solución problema 3: Recordamos que la suma de los primeros n naturales tiene la siguiente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Nosotros queremos que esta expresión sea un cuadrado, y notamos que si escribimos n y $n+1$ de la siguiente forma tenemos que la expresión anterior es un cuadrado

$$n = 2t^2 \quad (n+1) = s^2$$

Juntando ambas cosas se consigue lo siguiente:

$$s^2 - 2t^2 = 1$$

Lo cuál es una ecuación de Pell, por el problema 2, sabemos que si la ecuación tiene una solución no trivial entonces tiene infinitas.

$$(3, 2) \to 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

Por lo que tenemos lo pedido. Vemos que $n = 1$, $n = 8$, $n = 49$, $n = 288$, y $n = 1681$ son las primeras cinco soluciones gracias al programa[1], donde cada n cumple lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 4 (3 pts)**.** Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos $3 \cdot 6$:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos $A < B$ con la misma propiedad, es decir, que cumplen $A + (A+1) + ...(B-1) + B = A \cdot B$. Además, encuentre otros tres ejemplos.

Solución problema 4: El problema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a \cdot b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}$$

Donde hay que encontrar infinitos $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ con $a < b$, tal que sean solución. Por la última condición se puede ver lo siguiente $b = a + c$, con $c \in \mathbb{N}$, usando esto para reescribir la ecuación se tiene que

$$2a^2 - 2a = c^2 + c$$

Completando cuadrados y multiplicando por 4

$$(2c+1)^2 - 2(2a-1)^2 = -1$$

Luego recordamos el problema 2 y tomamos la siguiente solución $(a, c) = (1, 0) \rightarrow a = b = 1$, por lo que hay infinitas soluciones para la ecuación, lo que nos da infinitos a, b que cumplen lo pedido. Ahora tomamos $(20, 15) \rightarrow a = 20, b = 35$, $(119, 85) \rightarrow a = 85, b = 204$ y $(696, 493) \rightarrow a = 493, b = 1189$.

■

Referencias

[1] Nicholas Mc-Donnell. Python program to calculate continued fractions, and format latex tables, 2018.