



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2018

Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (4 pts). Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ para los siguientes valores de d :

(I) (1 pt) $d = 60$

(II) (2 pt) $d = 61$

(III) (1 pt) $d = 62$

Solución problema 1:

(I) Escribiendo la tabla y usando un programa de python[1]

| a_s | P_s | Q_s | Diff |
|-------|-------|-------|------|
| * | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 7 | 1 | -11 |
| 2 | 8 | 1 | 4 |
| 1 | 23 | 3 | -11 |
| 14 | 31 | 4 | 1 |
| 1 | 457 | 59 | -11 |
| 2 | 488 | 63 | 4 |
| 1 | 1433 | 185 | -11 |
| 14 | 1921 | 248 | 1 |

Podemos ver que $(31, 4)$ es solución, y es la fundamental por tabla.

(II) Usando lo mismo que en (I)

| a_s | P_s | Q_s | Diff |
|-------|------------|-----------|------|
| * | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 7 | 1 | -12 |
| 4 | 8 | 1 | 3 |
| 3 | 39 | 5 | -4 |
| 1 | 125 | 16 | 9 |
| 2 | 164 | 21 | -5 |
| 2 | 453 | 58 | 5 |
| 1 | 1070 | 137 | -9 |
| 3 | 1523 | 195 | 4 |
| 4 | 5639 | 722 | -3 |
| 1 | 24079 | 3083 | 12 |
| 14 | 29718 | 3805 | -1 |
| 1 | 440131 | 56353 | 12 |
| 4 | 469849 | 60158 | -3 |
| 3 | 2319527 | 296985 | 4 |
| 1 | 7428430 | 951113 | -9 |
| 2 | 9747957 | 1248098 | 5 |
| 2 | 26924344 | 3447309 | -5 |
| 1 | 63596645 | 8142716 | 9 |
| 3 | 90520989 | 11590025 | -4 |
| 4 | 335159612 | 42912791 | 3 |
| 1 | 1431159437 | 183241189 | -12 |
| 14 | 1766319049 | 226153980 | 1 |

Notamos que (1766319049, 1766319049) es solución y por la tabla es la fundamental

(III) Usando lo mismo que en (I)

| a_s | P_s | Q_s | Diff |
|-------|-------|-------|------|
| * | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 7 | 1 | -13 |
| 6 | 8 | 1 | 2 |
| 1 | 55 | 7 | -13 |
| 14 | 63 | 8 | 1 |
| 1 | 937 | 119 | -13 |
| 6 | 1000 | 127 | 2 |
| 1 | 6937 | 881 | -13 |
| 14 | 7937 | 1008 | 1 |

Notamos que $(63, 8)$ es solución fundamental.

■

Problema 2 (2 pts. c/u). Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. Sea $k \neq 0$ un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \quad (1)$$

Dos soluciones enteras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de (1) son *P-equivalentes* si hay una solución entera $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ que cumple $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$.

- (I) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).
- (II) Muestre que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.
- (III) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera (a, b) , entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de (a, b) en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = (s + \sqrt{d}t)(a + \sqrt{d}b) \text{ para algún } (s, t) \in \mathcal{P}_d\mathbb{Z}\}$$

y ese conjunto es infinito.

- (IV) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).
- (V) Para la ecuación $x^2 - 5y^2 = 4$, muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

Solución problema 2:

Problema 3 (3 pts.). Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos N con esta propiedad, es decir que si sumamos $1 + 2 + \dots + N$ obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de N que lo cumplen ($N = 1$ y $N = 8$ funcionan; faltan los siguientes tres).

Solución problema 3: Recordamos que la suma de los primeros n naturales tiene la siguiente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Nosotros queremos que esta expresión sea un cuadrado, y notamos que si escribimos n y $n+1$ de la siguiente forma tenemos que la expresión anterior es un cuadrado

$$n = 2t^2 \quad (n+1) = s^2$$

Juntando ambas cosas se consigue lo siguiente:

$$s^2 - 2t^2 = 1$$

Lo cuál es una ecuación de Pell, por el problema 2, sabemos que si la ecuación tiene una solución no trivial entonces tiene infinitas.

$$(3, 2) \rightarrow 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

Por lo que tenemos lo pedido. Vemos que $(3, 2) \rightarrow n = 8$, la siguiente $(17, 12) \rightarrow n = 288$, la subsiguiente es $(99, 70) \rightarrow n = 9800$, y la subsubsiguiente $(577, 408) \rightarrow n = 332928$, donde cada n cumple lo pedido.



Problema 4 (3 pts.). Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos $3 \cdot 6$:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos $A < B$ con la misma propiedad, es decir, que cumplen $A + (A + 1) + \dots (B - 1) + B = A \cdot B$. Además, encuentre otros tres ejemplos.

Solución problema 4: El problema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a \cdot b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}$$

Donde hay que encontrar infinitos $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ con $a < b$, tal que sean solución. Por la última condición se puede ver lo siguiente $b = a + c$, con $c \in \mathbb{N}$, usando esto para reescribir la ecuación se tiene que

$$2a^2 - 2a = c^2 + c$$

Completando cuadrados y multiplicando por 4

$$(2c+1)^2 - 2(2a-1)^2 = -1$$

Luego recordamos el problema 2 y tomamos la siguiente solución $(a, c) = (1, 0) \rightarrow a = b = 1$, por lo que hay infinitas soluciones para la ecuación, lo que nos da infinitos a, b que cumplen lo pedido. Ahora tomamos $(3, 3) \rightarrow a = 3, b = 6$, y $(20, 15) \rightarrow a = 20, b = 35$.

■

Referencias

- [1] Nicholas Mc-Donnell. Python program to calculate continued fractions, and format latex tables, 2018.