



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Segundo Semestre de 2018

## Tarea 5

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/11

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Felipe Guzmán, Fernanda Cares

**Problema 1** (6 pts.). Sea  $N$  un entero positivo y sea  $\chi$  un carácter no-principal modulo  $N$ . Demuestre que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2, \chi) + O_x \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

**Solución problema 1:** Se sabe que

$$\begin{aligned} L(1/2, \chi) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir lo siguiente

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2, \chi) - \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}$$

Ahora vamos a analizar la expresión  $\sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}$ .

Recordamos que  $|\sum_{n \leq t} \chi(n)| \leq \phi(N)$  que es  $\sum_{n \leq t} \chi(n) = O_\chi(1)$ . Ahora sea  $T > x$ , vemos

que

$$\begin{aligned}
\sum_{T > n > x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{T > n} \frac{\chi(n)}{n} - \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n} \\
&= \frac{\sum_{T > n}}{\sqrt{T}} + \int_1^T \frac{\sum_{t > n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}} dt - \frac{\sum_{x > n}}{\sqrt{x}} - \int_1^x \frac{\sum_{t > n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}} dt \\
&= \frac{\sum_{T > n} \chi(n)}{\sqrt{T}} - \frac{\sum_{x > n} \chi(n)}{\sqrt{x}} + \int_x^T \frac{\sum_{t > n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}} dt
\end{aligned}$$

Ahora usamos (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{T > n > x} \frac{\chi(n)}{n} &= \frac{O_\chi(1)}{\sqrt{T}} + \frac{O_\chi(1)}{\sqrt{x}} + \int_x^T \frac{O_\chi(1)}{2t\sqrt{t}} dt \\
&= O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos

$$\sum_{T > n > x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Ahora tomamos  $T \rightarrow \infty$ , por lo que  $O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \rightarrow 0$

$$\sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{T > n > x} \frac{\chi(n)}{n} = O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Juntando todo tenemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2, \chi) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

■

**Problema 2** (7 pts.). Sea  $N$  un entero positivo y sea  $\chi$  un carácter no-principal modulo  $N$ . Demuestre que existe una constante  $M_\chi \in \mathbb{C}$  tal que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{p} = M_\chi + O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

**Solución problema 2:** Se nota que

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{p} &= \sum_{p \leq x} \frac{\chi(p) \log p}{p} \cdot \frac{1}{\log p} \\ &= \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \frac{\chi(p) \log p}{p} + \int_2^x \frac{1}{t(\log t)^2} \sum_{p \leq t} \frac{\chi(p) \log p}{p} dt\end{aligned}$$

Se sabe que  $\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p) \log p}{p} = O_\chi(1)$ , con lo cual se ve lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{p} &= \frac{O_\chi(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2} dt \\ &= \frac{O_\chi(1)}{\log x} + \int_2^\infty \frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2} dt - \int_x^\infty \frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2} dt \\ &= O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right) + C_\chi + O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right) + K_\chi \\ &= M_\chi + O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)\end{aligned}$$

Ya que las integrales correspondientes convergen. ■

**Problema 3.** Sea  $N$  un entero positivo y sea  $a$  un entero coprimo con  $N$ . Demuestre que existe una constante  $C_{a,N} \in \mathbb{R}$  que solo depende de  $a$  y de  $N$  tal que

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{N}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(N)} \cdot \log \log x + C_{a,N} + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

**Solución problema 3:** Sea

$$A(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{N}}} \frac{\log(p)}{p},$$

por teorema visto en clases,

$$A(x) = \frac{1}{\phi(N)} \log(x) + O_N(1)$$

Reescribiendo

$$\spadesuit = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{N}}} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{N}}} \frac{\log p}{p} \cdot \frac{1}{p},$$

usando sumas por partes, tenemos que

$$\spadesuit = A(x) \cdot \frac{1}{\log x} + \int_q^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2} dt,$$

donde  $q$  es el primer primo tal que  $q \equiv A \pmod{N}$ . Desarrollando esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \spadesuit &= \frac{1}{O(n)} \cdot \log(x) \cdot \frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{\log(x)} \cdot O_N(1) + \int_q^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2} dt \\ &= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_q^x \frac{A(t) - \log(t)/\phi(n)}{t(\log t)^2} dt + \int_q^x \frac{\log(t)/\phi(n)}{t(\log t)^2} dt \\ &= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_q^x \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2} dt + \frac{1}{\phi(N)} \int_q^x \frac{1}{t \log t} dt \\ &= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \underbrace{\int_q^\infty \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2} dt}_{\text{converge} \Rightarrow O_N(1)} - \underbrace{\int_x^\infty \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2} dt}_{O_N(1/\log(x))} + \frac{1}{\phi(N)} \int_q^x \frac{1}{t \log t} dt \\ &= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{\log \log x}{\phi(N)} - \underbrace{\frac{\log \log q}{\phi(N)}}_{\text{depende de } a \text{ y } N} \\ &= C_{N,a} + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{\log \log x}{\phi(N)}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■