



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Segundo Semestre de 2018

## Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Felipe Guzmán, Fernanda Cares

**Problema 1** (4 pts). Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell  $x^2 - dy^2 = 1$  para los siguientes valores de  $d$ :

(I) (1 pt)  $d = 60$

(II) (2 pt)  $d = 61$

(III) (1 pt)  $d = 62$

**Solución problema 1:**

(I) Escribiendo la tabla y usando un programa de python[1] para conseguir la fracción continua

$a_s$	$P_s$	$Q_s$	Diff
*	1	0	1
7	7	1	-11
1	8	1	4
2	23	3	-11
1	31	4	1
14	457	59	-11
1	488	63	4
2	1433	185	-11
1	1921	248	1

Podemos ver que  $(31, 4)$  es solución, y es la fundamental por tabla.

(II) Usando lo mismo que en (I)

$a_s$	$P_s$	$Q_s$	Diff
*	1	0	1
7	7	1	-12
1	8	1	3
4	39	5	-4
3	125	16	9
1	164	21	-5
2	453	58	5
2	1070	137	-9
1	1523	195	4
3	5639	722	-3
4	24079	3083	12
1	29718	3805	-1
14	440131	56353	12
1	469849	60158	-3
4	2319527	296985	4
3	7428430	951113	-9
1	9747957	1248098	5
2	26924344	3447309	-5
2	63596645	8142716	9
1	90520989	11590025	-4
3	335159612	42912791	3
4	1431159437	183241189	-12
1	1766319049	226153980	1

Notamos que (1766319049, 226153980) es solución y por la tabla es la fundamental

(III) Usando lo mismo que en (I)

$a_s$	$P_s$	$Q_s$	Diff
*	1	0	1
7	7	1	-13
1	8	1	2
6	55	7	-13
1	63	8	1
14	937	119	-13
1	1000	127	2
6	6937	881	-13
1	7937	1008	1

Notamos que  $(63, 8)$  es solución fundamental.

■

**Problema 2** (2 pts. c/u). Sea  $d$  un entero positivo que no es un cuadrado. Sea  $k \neq 0$  un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \quad (1)$$

Dos soluciones enteras  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  de (1) son *P-equivalentes* si hay una solución entera  $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$  de la ecuación de Pell  $x^2 - dy^2 = 1$  que cumple  $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$ .

- (I) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).
- (II) Muestre que la ecuación  $x^2 - 5y^2 = 2$  no tiene soluciones enteras.
- (III) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera  $(a, b)$ , entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de  $(a, b)$  en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = (s + \sqrt{d}t) (a + \sqrt{d}b) \text{ para algún } (s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})\}$$

y ese conjunto es infinito.

- (IV) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).
- (V) Para la ecuación  $x^2 - 5y^2 = 4$ , muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

## Solución problema 2:

(I) Refleja: Notar que  $(1, 0) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ , por lo que  $\forall (a_1, b_1) \in Q$  tenemos que

$$a_1 + b_1\sqrt{d} = (1 + 0\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}).$$

Simétrica: Sean  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2) \in Q$ ,  $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ , tal que

$$a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}),$$

lo que pasa si y solo si

$$a_2 + b_2\sqrt{d} \cdot \frac{1}{(s + t\sqrt{d})} = (a_1 + b_1\sqrt{d})$$

Racionalizando  $\frac{1}{(s + t\sqrt{d})}$  (y usando el hecho que  $(s, t)$  es solución), llegamos a que lo anterior pasa si y solo si

$$(a_2 + b_2\sqrt{d})(s - t\sqrt{d}) = (a_1 + b_1\sqrt{d})$$

y claramente  $(s, -t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ .

Transitiva: Sean  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in Q$  y  $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ , tal que  $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s_1 + t_1\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$  y  $a_3 + b_3\sqrt{d} = (s_2 + t_2\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d})$ . Esto dice que

$$\begin{aligned} a_3 + b_3\sqrt{d} &= (s_2 + t_2\sqrt{d})(s_1 + t_1\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}) \\ &= (s_2s_1 + dt_2t_1 + (t_2s_1 + s_2t_1)\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d}) \end{aligned}$$

Veamos que  $(s_2s_1 + dt_2t_1, t_2s_1 + s_2t_1) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (s_2s_1 + dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1 + s_2t_1)^2 &= (s_2s_1)^2 + 2ds_1s_2t_1t_2 + (dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1)^2 - 2ds_1s_2t_1t_2 - (s_2t_1)^2 \\ &= s_1(s_2^2 - dt_2^2) + dt_1^2(dt_2^2 - s_2^2) \\ &= s_1^2 - dt_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene lo pedido.

(II) Supongamos que tiene soluciones enteras. Sea  $(a, b)$  una solución. Luego,

$$a^2 - 5b^2 = 2.$$

Aplicando (mód 5) queda  $a^2 \equiv 2 \pmod{5}$ , pero 2 no es un cuadrado (mód 5),  $\rightarrow \leftarrow$ .

(III) Dado  $(a, b)$  solución, notamos que por lo demostrado en (I) el conjunto dado tiene que ser subconjunto de la clase de equivalencia. Ahora sea,  $(x, y)$  un elemento de la clase de equivalencia, entonces existe  $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ , tal que  $(x + y\sqrt{d}) = (s + t\sqrt{d})(a + b\sqrt{d})$ , por lo que la clase esta contenida en el conjunto. Ahora recordamos que si  $(s, t)$  es una solución no trivial  $(1, 0)$ , se tendrá que  $(s, t)$  operado consigo mismo será una solución nueva de  $x^2 - dy^2 = 1$

$$\begin{aligned}(s + t\sqrt{d})^2 &= s^2 + t^2d + 2st\sqrt{d} \\ \therefore (s^2 + t^2d)^2 - d(2st)^2 &= (s^2 - t^2d)^2 \\ &= 1^2 = 1\end{aligned}$$

Y como  $s^2 + t^2d > s$  si  $t \neq 0$ , y  $2st \neq t$ , ya que  $t \neq 0$  y  $s \in \mathbb{Z}$ . Con esto notamos que si tomamos  $(a, b)$  y lo operamos con  $(s, t)$  operado consigo mismo  $n$  veces, se garantiza que es una solución distinta.

(IV) Notar que  $(7, 3)$  y  $(3, 1)$  son soluciones. Supongamos que están relacionadas. Luego,

$$7 + 3\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5}) \underbrace{(5 + t\sqrt{5})}_{\in \mathcal{P}_5(\mathbb{Z})}.$$

Desde aquí se tiene  $7 + 3\sqrt{5} = (15 + 5t) + \sqrt{5}(3t + 5)$ . Esto implica que

- $15 + 5t = 7 \Rightarrow 0 \equiv 2 \pmod{5}$ ,  $\rightarrow \leftarrow$
- $3t + 5 = 3 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\rightarrow \leftarrow$

Así,  $[(7, 3)] \neq [(3, 1)]$ .

■

**Problema 3** (3 pts.). Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos  $N$  con esta propiedad, es decir que si sumamos  $1 + 2 + \dots + N$  obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de  $N$  que lo cumplen ( $N = 1$  y  $N = 8$  funcionan; faltan los siguientes tres).

**Solución problema 3:** Recordamos que la suma de los primeros  $n$  naturales tiene la siguiente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Nosotros queremos que esta expresión sea un cuadrado, y notamos que si escribimos  $n$  y  $n+1$  de la siguiente forma tenemos que la expresión anterior es un cuadrado

$$n = 2t^2 \quad (n+1) = s^2$$

Juntando ambas cosas se consigue lo siguiente:

$$s^2 - 2t^2 = 1$$

Lo cuál es una ecuación de Pell, por el problema 2, sabemos que si la ecuación tiene una solución no trivial entonces tiene infinitas.

$$(3, 2) \rightarrow 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

Por lo que tenemos lo pedido. Vemos que  $n = 1$ ,  $n = 8$ ,  $n = 49$ ,  $n = 288$ , y  $n = 1681$  son las primeras cinco soluciones gracias al programa[1], donde cada  $n$  cumple lo pedido.

■

**Problema 4** (3 pts). Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos  $3 \cdot 6$ :

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos  $A < B$  con la misma propiedad, es decir, que cumplen  $A + (A+1) + \dots + (B-1) + B = A \cdot B$ . Además, encuentre otros tres ejemplos.

**Solución problema 4:** El problema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a \cdot b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}$$

Donde hay que encontrar infinitos  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  con  $a < b$ , tal que sean solución. Por la última condición se puede ver lo siguiente  $b = a + c$ , con  $c \in \mathbb{N}$ , usando esto para reescribir la ecuación se tiene que

$$2a^2 - 2a = c^2 + c$$

Completando cuadrados y multiplicando por 4

$$(2c + 1)^2 - 2(2a - 1)^2 = -1$$

Luego recordamos el problema 2 y tomamos la siguiente solución  $(a, c) = (1, 0) \rightarrow a = b = 1$ , por lo que hay infinitas soluciones para la ecuación, lo que nos da infinitos  $a, b$  que cumplen lo pedido. Ahora tomamos  $(20, 15) \rightarrow a = 20, b = 35$ ,  $(119, 85) \rightarrow a = 85, b = 204$  y  $(696, 493) \rightarrow a = 493, b = 1189$ .

■

## Referencias

- [1] Nicholas Mc-Donnell. Python program to calculate continued fractions, and format latex tables, 2018.