Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 6

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (5 pts.)**.** Considere el número real $\alpha = [0, 1, \overline{4, 8}]$. Muestre que es algebraico y calcule su polinomio minimal.

Solución problema 1:

■

Problema 2 (5 pts.)**.** Sea $b_1, b_2, ...$ una secuencia (infinita) de enteros $b_j \geq 1$ para cada $j \geq 2$. Considere el número real $\alpha = [b_1, b_2, ...]$. Muestre que $DFC(\alpha) = (b_1, b_2, ...)$.

Solución problema 2: Sea $DFC(\alpha) = (a_1, a_2, ...)$. Lo que queremos demostrar es $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$.
Por inducción:
$n = 1$

$$\alpha = b_1 + \frac{1}{[b_2, ...]}$$

Como $[b_2, ...] > 1$, entonces $\frac{1}{[b_2,...]} < 1$

$$a_1 = \lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor b_1 + \frac{1}{[b_2, ..]} \right\rfloor = b_1$$

Supongamos que $a_k = b_k \forall k \leq n$, tenemos que demostrar que $b_{n+1} = a_{n+1}$. Sabemos que $DFC(\alpha) = (b_1, b_2, .., b_n, a_{n+1}, ...)$. Como $\alpha = [DFC(\alpha)_n, \alpha_{n+1}] = [b_1, b_2, ..., b_n, \alpha_{n+1}]$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_{n+1} &= [b_{n+1}, b_{n+2}, ...] \\ &= b_{n+1} + \frac{1}{[b_{n+2}, ...]} \end{aligned}$$

Como $[b_{n+2}, ...] > 1$ entonces $\frac{1}{[b_{n+2}]} < 1$

$$a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = b_{n+1}$$

$\blacksquare$

Problema 3 (5 pts.)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ irracional. Muestre que para todo $s \geq 2$, los convergentes γ_s cumplen

$$|\alpha - \gamma_s| < \frac{1}{a_{s+1} \cdot Q_s^2}$$

Solución problema 3: Se sabe que $\forall s \geq 2$

$$\begin{aligned} \gamma_{s+1} - \gamma_s &= \frac{(-1)^s}{Q_{s+1}Q_s} \\ |\gamma_{s+1} - \gamma_s| &= \frac{1}{Q_{s+1}Q_s} \end{aligned}$$

Tenemos además que

$$\alpha - \gamma_s = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } s \text{ es impar} \\ \geq 0 & \text{si } s \text{ es par} \end{cases}$$

Con lo que podemos ver que

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma_s| &\leq |\gamma_{s+1} - \gamma_s| \\ &\leq \frac{1}{Q_{s+1}Q_s} \\ &\leq \frac{1}{(a_{s+1}Q_s + Q_{s-1})Q_s} \\ &< \frac{1}{a_{s+1}Q_s^2} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos.

$\blacksquare$

Problema 4 (5 pts.)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponga que α *no* es de la forma $x + \sqrt{5}y$ con $x, y \in \mathbb{Q}$. Muestre que existen infinitos racionales $p/q \in \mathbb{Q}$ con $\gcd(p, q) = 1$ y $q \geq 1$ que cumplen

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$