



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2018

Tarea 3

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/04

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Problema 1 (3 pts.). Demuestre que para todo entero positivo n se tiene

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2(\log 2)n$$

Solución problema 1: Recordamos la definición de θ

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

Dado esto escribimos lo siguiente

$$\exp(\theta(2n) - \theta(n)) = \prod_{n \leq p \leq 2n} p = L \in \mathbb{Z}$$

Lema 1. Sea un primo $p \in \{n+1, n+2, \dots, 2n-1, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$.

Para demostrar esto, notemos que todo $1 < n < p$ no divide a p , luego expandiendo $\binom{2n}{n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n)}{n!}$$

Como $\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1, n\}$ $k \nmid p$, por lo que $p/n!$ es irreducible, lo que implica que $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p^{\alpha} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha > 0$, por lo que $p \mid \binom{2n}{n}$

Notemos que por L es libre de cuadrados por construcción, luego $L \mid \binom{2n}{n}$. Vemos que $2^{2n} = \sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$, por lo que $L \leq 2^{2n}$.

$$\therefore \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Que es lo que queríamos demostrar. ■

Problema 2 (2 pts. c/u).

I Demuestre que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm}(1, 2, \dots, n)$ para todo entero positivo n .

II Dado cualquier polinomio $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de grado $d \geq 1$, demuestre que

$$\exp(\psi(d+1)) \cdot \int_0^1 F(t) dt$$

es un entero.

III Sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$. Muestre que para todo entero positivo k se cumple

$$0 < \int_0^1 G(t)^k dt \leq \left(\frac{27}{16384} \right)^k$$

IV Muestre que para todo entero de la forma $n = 8k + 1$ se tiene que

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n-1)$$

Solución problema 2:

I Sea $k \in \{1, \dots, n\}$, luego $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_c^{\alpha_c}$ con p_j primos distintos y α_j sus respectivos exponentes en la descomposición prima.

$$p_j^{\alpha_j} \mid k \implies p_j^{\alpha_j} \leq n$$

Luego por definición de $\psi(n)$ se tiene que

$$p_j^{\alpha_j} \mid \exp(\psi(n)) \quad \forall j \in \{1, \dots, c\}$$

Se puede ver que $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}$ son coprimos, por lo que

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \mid \exp(\psi(n))$$

Luego $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}$ son coprimos

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \mid \exp(\psi(n))$$

Notamos que este proceso se puede iterar tal que

$$k \mid \exp(\psi(n))$$

Esto se cumple $\forall k \in \{1, \dots, n\} \implies \exp(\psi(n))$ es múltiplo de los primeros n números.

Se concluye que

$$\text{mcm}(1, \dots, n) \leq \exp(\psi(n))$$

Viendo que $\exp(\psi(n)) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ con p_j primos distintos, p_r el mayor primo menor que n y α_j el mayor natural tal que $p_j^{\alpha_j} \leq n$.

Por definición de $\psi(n)$

$$p_1^{\alpha_1} \leq n \implies p_1^{\alpha_1} \mid \text{mcm}(1, \dots, n)$$

Así $\forall p_j^{\alpha_j}$ en la descomposición de $\exp(\psi(n))$ se tiene que $p_j^{\alpha_j} \mid \text{mcm}(1, \dots, n)$

Nuevamente iterando los $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$ son coprimos de a pares por lo que iterando el argumento anterior obtenemos que

$$\exp(\psi(n)) \mid \text{mcm}(1, \dots, n)$$

Se concluye entonces que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm}(1, \dots, n)$

II Por (I) tenemos que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm}(1, 2, \dots, n)$, luego

$$F(t) = \sum_{n=0}^d a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned}
\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t) dt &= \exp(\psi(d+1)) \sum_{n=0}^d \frac{a_n}{n+1} \\
&= \text{mcm}(1, 2, \dots, d+1) \sum_{n=0}^d \frac{a_n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^d a_n \frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Claramente vemos que $n+1 \mid \text{mcm}(1, 2, \dots, d+1)$ para todo $n \in \{0, 1, \dots, d\}$, por lo que $\frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sum_{n=0}^d a_n \frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Y como eso es igual a $\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t) dt$, tenemos lo que queríamos.

III Dada la expresión $G(t)^k$, queremos encontrar un máximo en el intervalo $[0, 1]$, para esto derivamos la función e igualamos a 0.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} G(t)^k \\
&= k((1-2t)^{2k-1}(1-t)^{3k-1}t^{3k-1})(4t-3)(4t-1)
\end{aligned}$$

Con esto notamos que los ceros de la derivada que no son ceros del polinomio son $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
G^k(3/4) &= ((1-3/2)^2(1-3/4)^3(3/4)^3)^k = \left(\frac{3^3}{2^{14}}\right)^k \\
G^k(1/4) &= ((1-1/2)^2(1-1/4)^3(1/4)^3)^k = \left(\frac{3^3}{2^{14}}\right)^k
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a notar que el intervalo tiene largo 1, por lo que $\left(\frac{3^3}{2^{14}}\right)^k$ es cota de la integral, generando la siguiente desigualdad

$$\int_0^1 G(t)^k dt \leq \left(\frac{27}{16384}\right)^k$$

Para ver la otra desigualdad, se puede notar que G^k es una función continua, y por la otra desigualdad sabemos que $\exists c \in [0, 1] : G^k(c) > 0$, y como es continua existe un abierto $A = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [0, 1]$ tal que $\forall x \in A : g(x) > 0$, con esto se puede ver que

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} G^k(t) dt > 0$$

Y como $A \subset [0, 1]$

$$\int_0^1 G^k(t) dt = \int_0^{c-\varepsilon} G^k(t) dt + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} G^k(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^1 G^k(t) dt$$

Trivialmente se nota que $G^k(t) \geq 0 \forall t \in [0, 1]$, por lo que

$$\int_0^{c-\varepsilon} G^k(t) dt, \int_{c+\varepsilon}^1 G^k(t) dt \geq 0$$

Lo que a su vez nos deja concluir que

$$\int_0^1 G^k(t) dt > 0$$

Juntando esto con lo anterior tenemos que

$$0 < \int_0^1 G(t)^k dt \leq \left(\frac{27}{16384} \right)^k$$

IV Sea $n = 8k + 1$ y sea $G(t) = t^3(1 - 2t)^2(1 - t)^3$, notamos que $\deg(G^k) = 8k$.

Por (II) se sabe que $\exp(\psi(n)) \int_0^1 G(t) dt \in \mathbb{Z}$, más aún es estrictamente positivo

$$1 \leq \exp(\psi(n)) \int_0^1 G^k(t) dt$$

Complementando con (III)

$$1 \leq \exp(\psi(n)) \int_0^1 G^k(t) dt \leq \exp(\psi(n)) \left(\frac{3^3}{2^{14}} \right)^k$$

Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \left(\frac{2^{14}}{3^3}\right)^k \leq \exp(\psi(n)) \\
&\Longleftrightarrow k(\log(2^{14}) - \log(3^3)) \leq \psi(n) \quad k = \frac{n-1}{8} \\
&\Longleftrightarrow (n-1) \left(\frac{\log(2^{14}) - \log(3^3)}{8}\right) \leq \psi(n)
\end{aligned}$$

Notar que $\frac{4}{5} \leq \left(\frac{\log(2^{14}) - \log(3^3)}{8}\right)$

$$\therefore \frac{4}{5}(n-1) \leq \psi(n)$$

■

Problema 3 (5 pts.). Demuestre que para todo $x > 1$ existe un primo p que cumple $x < p < 2x$.

Solución problema 3: De la pregunta 1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\theta(n) - \theta(n/2) &\leq \log(2)n \\
\theta(n/2) - \theta(n/4) &\leq \log(2)n/2 \\
&\vdots \\
\theta(n/2^k) - \theta(n/2^{k+1}) &\leq \log(2)n/2^k
\end{aligned}$$

Notamos que si $k > \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2$, entonces $n/2^{k+1} < 2$, por lo que $\theta(n/2^{k+1}) = 0$. Por lo que tomamos $k = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2 \right\rfloor + 1$, y sumamos, tal que

$$\theta(n) = \theta(n) - \theta(n/2^{k+1}) \leq \log(2)n \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} \leq \log(2)n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \log(2)2n$$

Con lo que obtenemos

$$\theta(n) \leq \log(2)2n \tag{1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, luego por propiedades modulares existe $n_0 \in \{n, n-1, n-2, \dots, n-7\}$ tal que

$n_0 = 8k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$. Y así con la pregunta 2, obtenemos

$$\psi(n) \geq \psi(n_0) \geq \frac{4}{5}(n_0 - 1) \geq \frac{4}{5}(n - 8)$$

Por lo que conseguimos

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n - 8) \quad (2)$$

En clase vimos $\psi(n) = \sum_{k \geq 1} \theta(n^{1/k})$. Con esto se obtiene

$$\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k \geq 2} \theta((2n)^{1/k})$$

Pero notamos que $\theta((2n)^{1/k}) = 0$ con $k = \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que $2 > (2n)^{1/k}$.

Así $\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k \geq 2}^{\left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil} \theta((2n)^{1/k}) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que si $k_1 > k_2$ se cumple que $\theta(n^{1/k_1}) \leq \theta(n^{1/k_2})$.

Con esto y juntando con (2) obtenemos

$$\frac{4}{5}(2n - 8) \leq \psi(2n) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2}$$

De lo cual se obtiene

$$\frac{4}{5}(2n - 8) - \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \theta(2n) \quad (3)$$

Usando (1) se puede obtener lo siguiente

$$-2n \log 2 \leq -\theta(n) \quad (4)$$

$$\theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \quad (5)$$

Usando (3), (4) y (5)

$$\frac{4}{5}(2n - 8) - 2n \log 2 - \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \leq \theta(2n) - \theta(n)$$

Ahora analizando la función

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{4}{5}(2n - 8) - 2n \log 2 - \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \\ &= n \left(\frac{8}{5} - 2 \log 2 - \frac{\sqrt{2} \log 2 \log 2n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{32}{5} \end{aligned}$$

Más aún analizando la función

$$g(n) = \frac{8}{5} - 2 \log 2 - \frac{\sqrt{2} \log 2 \log 2n}{\sqrt{n}}$$

Derivándola se ve

$$\begin{aligned} g'(n) &= \frac{\sqrt{2}(\log 2)^2}{2n\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2} \log 2}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2} \log 2 \log n}{2n\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \log 2}{2n\sqrt{n}} (\log 2 - 2 - \log n) \\ &= \frac{\sqrt{2} \log 2}{2n\sqrt{n}} \log \left(\frac{2n}{e^2} \right) \end{aligned}$$

Aquí se puede notar que si $n > \frac{e^2}{2} \implies g'(n) > 0$

Luego $\forall n > \frac{e^2}{2}$ se tiene que $g(n)$ es creciente

Recordamos que $f(n) = n \cdot g(n) - \frac{28}{5}$, por lo que cuando $g(n) > 0$, $f(n)$ será creciente.

Por inspección claramente se ve que $g(1302) > 0$, más aún es el primer natural donde la función es positiva, y como $g(n)$ es creciente¹, desde 1302 $g(n)$ siempre es positiva.

Así $\forall n \geq 1302$, se cumple que $f(n)$ es creciente, ahora de nuevo por inspección se tiene que $f(1381) > 0$, y específicamente es el primer natural que cumple que la función sea positiva, y como es creciente², $\forall n \geq 1381 \quad f(n) > 0$

$$\forall n \geq 1381 \quad 0 < f(n) \leq \theta(2n) - \theta(n)$$

Es decir $\sum_{n \leq p \leq 2n} \log p > 0 \implies \exists p \text{ primo} : n < p < 2n \quad \forall n \geq 1381$, dado esto se pueden analizar los casos restantes.

¹1302 > $\frac{e^2}{2}$
²1381 > 1302

Observación 3.1. Notemos que si $\exists p \in [2, 2n] \cap \mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\forall \alpha \in (n, n+1)$ se tiene que $\alpha < p < 2\alpha$

Demostración. Esto se puede ver ya que

$$\begin{aligned} n < p &\implies n+1 \leq p \\ &\implies \alpha < n+1 \leq p \\ &\implies \alpha < p \end{aligned}$$

Por otro lado $p < 2n < 2\alpha$, luego $\alpha < p < 2\alpha$ □

La observación anterior ayuda a reducir el análisis a solo los naturales

Lema 2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y p primo tal que $n < p < 2n$. Entonces $\forall a \in \{n+1, n+2, \dots, p-2, p-1\}$ se tiene que $a < p < 2a$

Demostración. Se tiene que $n < a < p$ y $p < 2n < 2a$, por lo que $a < p < 2a$ □

El lema anterior nos reduce a los siguientes casos

$n = 2,$	$2 < 3 < 4$
$n = 3,$	$3 < 5 < 6$
$n = 5,$	$5 < 7 < 10$
$n = 7,$	$7 < 13 < 14$
$n = 13,$	$13 < 23 < 26$
$n = 23,$	$23 < 43 < 46$
$n = 43,$	$43 < 83 < 86$
$n = 83,$	$83 < 163 < 166$
$n = 163,$	$163 < 317 < 326$
$n = 317,$	$317 < 631 < 634$
$n = 631,$	$631 < 1259 < 1262$
$n = 1259,$	$1259 < 2503 < 2518$

■

Problema 4 (4 pts.). Demuestre que existe una constante real estrictamente positiva $C > 0$ que cumple

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Solución problema 4: Utilizando la serie de $-\log(1-x)$ donde $|x| < 1$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Tomando $x = 1/p$

$$-\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p, k \geq 1} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq x} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k}$$

Ahora se analiza la siguiente serie

$$B = \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k}$$

Y se nota que esta converge ya que

$$\sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k} \leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} \leq \sum_p \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

Con esto se puede ver que

$$\sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k} = B - \sum_{p > x} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k}$$

Y esto ultimo se puede analizar de la siguiente forma

$$\sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p > x} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n > x} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ahora, se puede usar el teorema 2 de Mertens

$$\begin{aligned} -\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \log \log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + B + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \log \log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \end{aligned}$$

donde $B = A + M$, luego tomando exponencial se puede deducir

$$\prod_{p \leq x} = \frac{1}{\log x} \exp(-B) \exp(1 + O(1/\log x))$$

y como

$$\exp(t) = 1 + O(t) \quad t \in [0, 1]$$

Con esto se puede concluir que

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \frac{c}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \\ &= \frac{c}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right) \end{aligned}$$

Que es lo que se buscaba[1]

■

1. Agradecimientos

- Gabriel Ramirez
- Anibal Aravena

Referencias

- [1] Pablo De Nápoli. Introducción a la teoría analítica de números, clase 7, 2009.