Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (4 pts)**.** Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ para los siguientes valores de d:

(i) (1 pt) $d = 60$

(ii) (2 pt) $d = 61$

(iii) (1 pt) $d = 62$

Solución problema 1:

■

Problema 2 (2 pts. c/u)**.** Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. Sea $k \neq 0$ un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \tag{1}$$

Dos soluciones enteras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de (1) son P-*equivalentes* si hay una solución entera $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ que cumple $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$.

(i) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).

(ii) Muestre que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

(III) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera (a, b), entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de (a, b) en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = \left(s + \sqrt{d}t\right)\left(a + \sqrt{d}b\right) \text{ para algún } (s,t) \in \mathcal{P}_d\mathbb{Z}\}$$

y ese conjunto es infinito.

(IV) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).

(V) Para la ecuación $x^2 - 5y^2 = 4$, muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

Solución problema 2:

■

Problema 3 (3 pts.)**.** Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos N con esta propiedad, es decir que si sumamos $1+2+...+N$ obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de N que lo cumplen ($N = 1$ y $N = 8$ funcionan; faltan los siguientes tres).

Solución problema 3: Recordamos que la suma de los primeros n naturales tiene la siguiente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Nosotros queremos que esta expresión sea un cuadrado, y notamos que si escribimos n y $n + 1$ de la siguiente forma tenemos que la expresión anterior es un cuadrado

$$n = 2t^2 \quad (n + 1) = s^2$$

Juntando ambas cosas se consigue lo siguiente:

$$s^2 - 2t^2 = 1$$

Lo cuál es una ecuación de Pell, por el problema 2, sabemos que si la ecuación tiene una solución no trivial entonces tiene infinitas.

$$(3,2) \rightarrow 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

Por lo que tenemos lo pedido. Vemos que $(3,2) \rightarrow n = 8$, la siguiente $(17,12) \rightarrow n = 288$, la subsiguiente es $(99,70) \rightarrow n = 9800$, y la subsubsiguiente $(577,408) \rightarrow n = 332928$, donde cada n cumple lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 4 (3 pts)**.** Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos $3 \cdot 6$:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos $A < B$ con la misma propiedad, es decir, que cumplen $A + (A+1) + ...(B-1) + B = A \cdot B$. Además, encuentre otros tres ejemplos.

Solución problema 4: El problema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a \cdot b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}$$

Donde hay que encontrar infinitos $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ con $a < b$, tal que sean solución. Por la última condición se puede ver lo siguiente $b = a + c$, con $c \in \mathbb{N}$, usando esto para reescribir la ecuación se tiene que

$$2a^2 - 2a = c^2 + c$$

Completando cuadrados y multiplicando por 4

$$(2c+1)^2 - 2(2a-1)^2 = -1$$

Luego recordamos el problema 2 y tomamos la siguiente solución $(a,c) = (1,0) \rightarrow a = b = 1$, por lo que hay infinitas soluciones para la ecuación, lo que nos da infinitos a, b que cumplen lo pedido. Ahora tomamos $(3,3) \rightarrow a = 3, b = 6$, y $(20,15) \rightarrow a = 20, b = 35$.

$\blacksquare$