Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,
Javier Reyes

1. Problemas

Problema 1 (2 pts. c/u)**.** Demuestre las siguientes identidades (demostrando también convergencia en el dominio indicado):

(i)

(ii)

(iii)

Problema 2 (3 pts.)**.** Demuestre que cuando $s \to 1^+$, la diferencia

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right|$$

se mantiene acotada.

Problema 3 (2 pts.)**.** Sea f una función aritmética que cumple

(i) $f(n) \geq 0$ para todo n

(ii) Existen $r \in \mathbb{N}$ y cierta función continua $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ de manera que para todo $s > 1$ se cumple $D(s, f) = F(s)\zeta(s)^r$

Demuestre que

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} \ll (\log x)^r$$

Problema 4 (2 pts. c/u)**.** Calcule σ_c y σ_a para las series de Dirichlet de las siguientes funciones aritméticas f:

(I) $f(n) = (\log n)^2 \phi(n)$

(II) $f(n) = 2^{-n}$

(III) $f(n) = i^n$ donde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

Problema 5 (3 pts.)**.** Demuestre que para cada real $r \in [0, 1]$ existe alguna función aritmética f que cumple la relación

$$\sigma_a(f) = \sigma_c(f) + r$$

entre las abscisas de convergencia y de convergencia absoluta de $D(s, f)$.