Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,
Javier Reyes, Persona4

1. Problemas

Problema 1. Muestre que para $\epsilon > 0$ existe una constante $k_\epsilon > 0$ tal que para todo entero positivo n se cumpla que $\sigma_0(n) \leq k_\epsilon \cdot n^\epsilon$

Solución problema 1: Notamos que el problema es equivalente a demostrar que hay una cota para la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\epsilon} = \prod_{p|n} \left(\frac{1 + v_p(n)}{p^{\epsilon v_p(n)}} \right)$$

Ya que la expresión es una función aritmética multiplicativa podemos analizarla para un termino especifico p' tal que $p'|n$

$$\frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\epsilon v_{p'}(n)}}$$

Tomamos $p' \gg 1$ y notamos que lo siguiente se cumple

$$p'^{\epsilon v_{p'}(n)} \geq \underbrace{\exp(v_{p'}(n)) \geq 1 + v_{p'}(n)}_{\text{Por expansión de Taylor}}$$

$$\therefore \frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\epsilon v_{p'}(n)}} \leq 1$$

Notamos que lo anterior solo se cumple si $p' \geq \exp(\epsilon^{-1})$, veamos el caso donde esto no se cumple, para esto veamos la siguiente expresión:

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1+a}{p'^{\epsilon a}} = 0$$

Esto nos da que la expresión tiene una cota que no depende de a

$$\frac{1+a}{p'^{\epsilon a}} \leq C_{\epsilon, p'}$$

Con esto podemos concluir que $\sigma_0(n)/n^\epsilon$ esta acotado, lo que implica que existe un k_ϵ tal que para todo n

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\epsilon} \leq k_\epsilon$$

Lo cual es equivalente a

$$\sigma_0(n) \leq k_\epsilon \cdot n^\epsilon$$

Que es lo que queríamos demostrar[1]

■

Problema 2. Demuestre que existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo entero positivo n se tiene

$$An^2 \leq \phi(n)\sigma_1(n) \leq Bn^2$$

Solución problema 2: [2]

■

Problema 3. Pruebe que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

[1]Demostración basada en el blog de Terence Tao[1]

Solución problema 3: Usando un teorema visto en clases podemos ver que esto se cumple:

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{n\log n} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x\log x}-\int_2^x\lfloor t\rfloor\left(\frac{1}{t\log t}\right)'\mathrm{d}t\\
&=\frac{x-\{x\}}{x\log x}-\int_2^x(t-\{t\})\left(\frac{1}{t\log t}\right)'\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)-\int_2^x t\left(\frac{1}{t\log t}\right)'\mathrm{d}t+\int_2^x\{t\}\left(\frac{1}{t\log t}\right)'\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)-\int_2^x t\left(\frac{1}{t\log t}\right)'\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)\\
&=\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)-\frac{1}{\log t}\bigg|_2^x+\int_2^x\frac{1}{t\log t}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)-\frac{1}{\log x}+C'+\log\log x+C'\\
&=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos.

$\blacksquare$

Problema 4. Muestre que

$$\sum_{n\leq x}\phi(n)=\frac{1}{2\zeta(2)}\cdot x^2+O(x\log x)$$

Solución problema 4:

$\blacksquare$

Problema 5. Pruebe que

$$\sum_{d^2|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados}\\ 0 & \text{si no lo es}\end{cases}$$

Solución problema 5: Tomamos el caso donde n no es libre de cuadrados, y sean $p_1,...,p_k$

primos tal que $p_i^2|n$

$$\therefore \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i 1^{k-i}$$
$$= (1-1)^k$$
$$= 0$$

En el caso donde n es libre de cuadrados

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

Que es lo que queríamos demostrar

■

Problema 6. Defina la función contadora de libres de cuadrados:

$$Q(x) := \#\{n \leq x : n \text{ es libre de cuadrados}\}.$$

Demuestre que

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot x + O(x^{1/2})$$

Solución problema 6:

■

2. Agradecimientos

- Felipe Guzmán
- Maximiliano Norbu
- Fernanda Cares
- Agustín Oyarce
- Francisco Monardes
- Matías Bruna
- Gabriel Ramirez

Referencias

[1] Tao. Terence tao's blog, 2008.

[2] Wright. Hardy. *Introduction to theory of numbers*. 4th edition, 1968.