Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 7

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/10/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (4 pts)**.** Calcule la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ para los siguientes valores de d:

(I) (1 pt) $d = 60$

(II) (2 pt) $d = 61$

(III) (1 pt) $d = 62$

Solución problema 1:

(I) Escribiendo la tabla y usando un programa de python (Mc-Donnell, 2018) para conseguir la fracción continua

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-11
1	8	1	4
2	23	3	-11
1	31	4	1
14	457	59	-11
1	488	63	4
2	1433	185	-11
1	1921	248	1

Podemos ver que $(31, 4)$ es solución, y es la fundamental por tabla.

(II) Usando lo mismo que en (I)

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-12
1	8	1	3
4	39	5	-4
3	125	16	9
1	164	21	-5
2	453	58	5
2	1070	137	-9
1	1523	195	4
3	5639	722	-3
4	24079	3083	12
1	29718	3805	-1
14	440131	56353	12
1	469849	60158	-3
4	2319527	296985	4
3	7428430	951113	-9
1	9747957	1248098	5
2	26924344	3447309	-5
2	63596645	8142716	9
1	90520989	11590025	-4
3	335159612	42912791	3
4	1431159437	183241189	-12
1	1766319049	226153980	1

Notamos que $(1766319049, 226153980)$ es solución y por la tabla es la fundamental

(III) Usando lo mismo que en (I)

a_s	P_s	Q_s	Diff
$*$	1	0	1
7	7	1	-13
1	8	1	2
6	55	7	-13
1	63	8	1
14	937	119	-13
1	1000	127	2
6	6937	881	-13
1	7937	1008	1

Notamos que $(63, 8)$ es solución fundamental.

■

Problema 2 (2 pts. c/u)**.** Sea d un entero positivo que no es un cuadrado. Sea $k \neq 0$ un entero. Considere la ecuación

$$x^2 - dy^2 = k \tag{1}$$

Dos soluciones enteras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de (1) son P-*equivalentes* si hay una solución entera $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$ de la ecuación de Pell $x^2-dy^2 = 1$ que cumple $a_2+b_2\sqrt{d} = (s+t\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d})$.

(I) Muestre que la P-equivalencia es una *relación de equivalencia* en el conjunto de las soluciones enteras de (1).

(II) Muestre que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

(III) Muestre que si (1) tiene alguna solución entera (a, b), entonces tiene infinitas. Más precisamente, muestre que la clase de P-equivalencia de (a, b) en las soluciones enteras de (1) es exactamente

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\sqrt{d} = \left(s + \sqrt{d}t\right)\left(a + \sqrt{d}b\right) \text{ para algún } (s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})\}$$

y ese conjunto es infinito.

(IV) Muestre que hay a lo más finitas clases de P-equivalencia entre las soluciones de (1).

(V) Para la ecuación $x^2-5y^2 = 4$, muestre que existen soluciones que no son P-equivalentes entre ellas (es decir, hay más de una clase de P-equivalencia).

Solución problema 2:

(I) Refleja: Notar que $(1,0) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, por lo que $\forall (a_1,b_1) \in Q$ tenemos que

$$a_1 + b_1\sqrt{d} = (1+0\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d}).$$

Simétrica: Sean (a_1,b_1) y $(a_2,b_2) \in Q$, $(s,t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, tal que

$$a_2 + b_2\sqrt{d} = (s+t\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d}),$$

lo que pasa si y solo si

$$a_2 + b_2\sqrt{d} \cdot \frac{1}{(s+t\sqrt{d})} = (a_1+b_1\sqrt{d})$$

Racionalizando $\frac{1}{(s+t\sqrt{d})}$ (y usando el hecho que (s,t) es solución), llegamos a que lo anterior pasa si y solo si

$$(a_2+b_2\sqrt{d})(s-t\sqrt{d}) = (a_1+b_1\sqrt{d})$$

y claramente $(s,-t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$.

Transitiva: Sean $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3) \in Q$ y $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, tal que $a_2 + b_2\sqrt{d} = (s_1+t_1\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d})$ y $a_3+b_3\sqrt{d} = (s_2+t_2\sqrt{d})(a_2+b_2\sqrt{d})$. Esto dice que

$$\begin{aligned} a_3+b_3\sqrt{d} &= (s_2+t_2\sqrt{d})(s_1+t_1\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d}) \\ &= (s_2s_1+dt_2t_1+(t_2s_1+s_2t_1)\sqrt{d})(a_1+b_1\sqrt{d}) \end{aligned}$$

Veamos que $(s_2s_1+dt_2t_1, t_2s_1+s_2t_1) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (s_2s_1+dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1+s_2t_1)^2 &= (s_2s_1)^2 + 2ds_1s_2t_1t_2 + (dt_2t_1)^2 - d(t_2s_1)^2 - 2ds_1s_2t_1t_2 - (s_2t_1)^2 \\ &= s_1(s_2^2 - dt_2^2) + dt_1^2(dt_2^2 - s_2^2) \\ &= s_1^2 - dt_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene lo pedido.

(II) Supongamos que tiene soluciones enteras. Sea (a, b) una solución. Luego,

$$a^2 - 5b^2 = 2.$$

Aplicando $\pmod 5$ queda $a^2 \equiv 2 \pmod 5$, pero 2 no es un cuadrado $\pmod 5$, $\to\leftarrow$.

(III) Dado (a, b) solución, notamos que por lo demostrado en (I) el conjunto dado tiene que ser subconjunto de la clase de equivalencia. Ahora sea, (x, y) un elemento de la clase de equivalencia, entonces existe $(s, t) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{Z})$, tal que $(x+y\sqrt{d}) = (s+t\sqrt{d})(a+b\sqrt{d})$, por lo que la clase esta contenida en el conjunto. Ahora recordamos que si (s, t) es una solución no trivial $(1, 0)$, se tendrá que (s, t) operado consigo mismo será una solución nueva de $x^2 - dy^2 = 1$

$$\begin{aligned}
(s + t\sqrt{d})^2 &= s^2 + t^2 d + 2st\sqrt{d} \\
\therefore (s^2 + t^2 d)^2 - d(2st)^2 &= (s^2 - t^2 d)^2 \\
&= 1^2 = 1
\end{aligned}$$

Y como $s^2 + t^2 d > s$ si $t \neq 0$, y $2st \neq t$, ya que $t \neq 0$ y $s \in \mathbb{Z}$. Con esto notamos que si tomamos (a, b) y lo operamos con (s, t) operado consigo mismo n veces, se garantiza que es una solución distinta.

(IV) Sea G el conjunto de las soluciones de $x^2 - dy^2 = 1$ con la operación $(a, b) * (c, e) = (ac + bed, ae + bc)$, queremos ver que esto es un grupo.

$$(ac + bed)^2 - d(ae + bc)^2 = (a^2 - b^2 d)(x^2 - dy^2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Notamos que $(1, 0)$ es el neutro, sea $(a, b) \in G$, veamos que $(a, b) * (a, -b) = (a^2 - d * b^2, ab - ab) = (1, 0)$, solo nos falta la asociatividad, pero notamos que esta operación es la multiplición de elementos del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, por lo que es asociativa.
Ahora sea H el conjunto de soluciones de $x^2 - dy^2 = k$

(V) Notar que $(7, 3)$ y $(3, 1)$ son soluciones. Supongamos que están relacionadas. Luego,

$$7 + 3\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})\underbrace{(5 + t\sqrt{5})}_{\in \mathcal{P}_5(\mathbb{Z})}.$$

Desde aquí se tiene $7 + 3\sqrt{5} = (15 + 5t) + \sqrt{5}(3t + 5)$. Esto implica que

- $15 + 5t = 7 \Rightarrow 0 \equiv 2 \pmod{5}$, $\rightarrow\leftarrow$
- $3t + 5 = 3 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{3}$, $\rightarrow\leftarrow$

Así, $[(7,3)] \neq [(3,1)]$.

$\blacksquare$

Problema 3 (3 pts.)**.** Si sumamos los números enteros de 1 a 8 obtenemos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

que es un cuadrado. Muestre que hay infinitos enteros positivos N con esta propiedad, es decir que si sumamos $1+2+...+N$ obtenemos un cuadrado. Además, encuentre los primeros 5 valores de N que lo cumplen ($N = 1$ y $N = 8$ funcionan; faltan los siguientes tres).

Solución problema 3: Recordamos que la suma de los primeros n naturales tiene la siguiente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Nosotros queremos que esta expresión sea un cuadrado, y notamos que si escribimos n y $n+1$ de la siguiente forma tenemos que la expresión anterior es un cuadrado

$$n = 2t^2 \quad (n+1) = s^2$$

Juntando ambas cosas se consigue lo siguiente:

$$s^2 - 2t^2 = 1$$

Lo cuál es una ecuación de Pell, por el problema 2, sabemos que si la ecuación tiene una solución no trivial entonces tiene infinitas.

$$(3,2) \rightarrow 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

Por lo que tenemos lo pedido. Vemos que $n = 1$, $n = 8$, $n = 49$, $n = 288$, y $n = 1681$ son las primeras cinco soluciones gracias al programa (Mc-Donnell, 2018), donde cada n cumple lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 4 (3 pts)**.** Si sumamos los enteros de 3 a 6 obtenemos $3 \cdot 6$:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 3 \cdot 6$$

Muestre que hay infinitos pares de enteros positivos $A < B$ con la misma propiedad, es decir, que cumplen $A + (A+1) + ...(B-1) + B = A \cdot B$. Además, encuentre otros tres ejemplos.

Solución problema 4: El problema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a \cdot b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}$$

Donde hay que encontrar infinitos $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ con $a < b$, tal que sean solución. Por la última condición se puede ver lo siguiente $b = a + c$, con $c \in \mathbb{N}$, usando esto para reescribir la ecuación se tiene que

$$2a^2 - 2a = c^2 + c$$

Completando cuadrados y multiplicando por 4

$$(2c+1)^2 - 2(2a-1)^2 = -1$$

Luego recordamos el problema 2 y tomamos la siguiente solución $(a, c) = (1, 0) \rightarrow a = b = 1$, por lo que hay infinitas soluciones para la ecuación, lo que nos da infinitos a, b que cumplen lo pedido. Ahora tomamos $(20, 15) \rightarrow a = 20, b = 35$, $(119, 85) \rightarrow a = 85, b = 204$ y $(696, 493) \rightarrow a = 493, b = 1189$.

■

Referencias

Mc-Donnell, N. (2018). *Python program to calculate continued fractions, and format latex tables.* Descargado de `https://github.com/N9199/Tareas-Teoria-de-Numeros/blob/master/Tarea%207/generateTable.py`