Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 5

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/11

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (6 pts.)**.** Sea N un entero positivo y sea χ un carácter no-principal modulo N. Demuestre que

$$\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2,\chi) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Solución problema 1: Se sabe que

$$\begin{aligned}L(1/2,\chi) &= \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}\\ &= \sum_{n>x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir lo siguiente

$$\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2,\chi) - \sum_{n>x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}$$

Ahora vamos a analizar la expresión $\displaystyle\sum_{n>x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}$.

Recordamos que $\left|\sum_{n\leq t}\chi(n)\right| \leq \phi(N)$ que es $\sum_{n\leq t}\chi(n) = O_\chi(1)$. Ahora sea $T > x$, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{T>n>x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{T>n} \frac{\chi(n)}{n} - \sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{n} \\
&= \frac{\sum_{T>n}}{\sqrt{T}} + \int_1^T \frac{\sum_{t>n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \frac{\sum_{x>n}}{\sqrt{x}} - \int_1^x \frac{\sum_{t>n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sum_{T>n} \chi(n)}{\sqrt{T}} - frac \sum_{x>n} \chi(n)\sqrt{x} + \int_x^T \frac{\sum_{t>n} \chi(n)}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ahora usamos (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{T>n>x} \frac{\chi(n)}{n} &= \frac{O_\chi(1)}{\sqrt{T}} + \frac{O_\chi(1)}{\sqrt{x}} + \int_x^T \frac{O_\chi(1)}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos

$$\sum_{T>n>x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) +)_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Ahora tomamos $T \to \infty$, por lo que $O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \to 0$

$$\sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{T\to\infty} \sum_{T>n>x} \frac{\chi(n)}{n} = O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Juntando todo tenemos

$$\sum_{n\le x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2,\chi) + O_\chi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

■

Problema 2 (7 pts.)**.** Sea N un entero positivo y sea χ un carácter no-principal modulo N. Demuestre que existe una constante $M_\chi \in \mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)}{p} = M_\chi + O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Solución problema 2: Se nota que

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)}{p}&=\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)\log p}{p}\cdot\frac{1}{\log p}\\&=\frac{1}{\log x}\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)\log p}{p}+\int_2^x\frac{1}{t(\log t)^2}\sum_{p\leq t}\frac{\chi(p)\log p}{p}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Se sabe que $\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)\log p}{p}=O_\chi(1)$, con lo cual se ve lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)}{p}&=\frac{O_\chi(1)}{\log x}+\int_2^x\frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{O_\chi(1)}{\log x}+\int_2^\infty\frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t-\int_x^\infty\frac{O_\chi(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)+C_\chi+O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)+K_\chi\\&=M_\chi+O_\chi\left(\frac{1}{\log x}\right)\end{aligned}$$

Ya que las integrales correspondientes convergen.

■

Problema 3. Sea N un entero positivo y sea a un entero coprimo con N. Demuestre que existe una constante $C_{a,N}\in\mathbb{R}$ que solo depende de a y de N tal que

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \text{ mód } N}}\frac{1}{p}=\frac{1}{\phi(N)}\cdot\log\log x+C_{a,N}+O_N\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Solución problema 3: Sea

$$A(x)=\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \pmod N}}\frac{\log(p)}{p},$$

por teorema visto en clases,

$$A(x)=\frac{1}{\phi(N)}\log(x)+O_N(1)$$

Reescribiendo

$$\spadesuit = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod N}} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod N}} \frac{\log p}{p} \cdot \frac{1}{p},$$

usando sumas por partes, tenemos que

$$\spadesuit = A(x) \cdot \frac{1}{\log x} + \int_q^x \frac{A(t)}{t(logt)^2}\,\mathrm{d}t,$$

donde q es el primer primo tal que $q \equiv A \pmod N$. Desarrollando esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned}
\spadesuit &= \frac{1}{O(n)} \cdot \log(x) \cdot \frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{\log(x)} \cdot O_N(1) + \int_q^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_q^x \frac{A(t) - \log(t)/\phi(n)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_q^x \frac{\log(t)/\phi(n)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_q^x \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\phi(N)} \int_q^x \frac{1}{t\log t}\,\mathrm{d}t \\
&= O_N(1) + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \underbrace{\int_q^\infty \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t}_{\text{converge}\Rightarrow O_N(1)} - \underbrace{\int_x^\infty \frac{O_N(1)}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t}_{O_N(1/\log(x))} + \frac{1}{\phi(N)} \int_q^x \frac{1}{t\log t}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{O_N(1)}_{\text{depende de } a \text{ y } N} + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{\log\log x}{\phi(N)} - \frac{\log\log q}{\phi(N)} \\
&= C_{N,a} + O_N\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{\log\log x}{\phi(N)},
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

$\blacksquare$