



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,

Javier Reyes, Persona4

1. Problemas

Problema 1. Muestre que para $\epsilon > 0$ existe una constante $k_\epsilon > 0$ tal que para todo entero positivo n se cumpla que $\sigma_0(n) \leq k_\epsilon \cdot n^\epsilon$

Solución problema 1: Notamos que el problema es equivalente a demostrar que hay una cota para la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\epsilon} = \prod_{p|n} \left(\frac{1 + v_p(n)}{p^{\epsilon v_p(n)}} \right)$$

Ya que la expresión es una función aritmética multiplicativa podemos analizarla para un termino específico p' tal que $p'|n$

$$\frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\epsilon v_{p'}(n)}}$$

Tomamos $p' \gg 1$ y notamos que lo siguiente se cumple

$$p'^{\epsilon v_{p'}(n)} \geq \underbrace{\exp(v_{p'}(n))}_{\text{Por expansión de Taylor}} \geq 1 + v_{p'}(n)$$

$$\therefore \frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\epsilon v_{p'}(n)}} \leq 1$$

Notamos que lo anterior solo se cumple si $p' \geq \exp(\epsilon^{-1})$, veamos el caso donde esto no se

cumple, para esto veamos la siguiente expresión:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1+a}{p'^{ea}} = 0$$

Esto nos da que la expresión tiene una cota que no depende de a

$$\frac{1+a}{p'^{ea}} \leq C_{\epsilon, p'}$$

Con esto podemos concluir que $\sigma_0(n)/n^\epsilon$ esta acotado, lo que implica que existe un k_ϵ tal que para todo n

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\epsilon} \leq k_\epsilon$$

Lo cual es equivalente a

$$\sigma_0(n) \leq k_\epsilon \cdot n^\epsilon$$

Que es lo que queríamos demostrar¹

■

Problema 2. Demuestre que existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo entero positivo n se tiene

$$An^2 \leq \phi(n)\sigma_1(n) \leq Bn^2$$

Solución problema 2: [2]

■

Problema 3. Pruebe que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

¹Demostración basada en el blog de Terence Tao[1]

Solución problema 3: Usando un teorema visto en clases podemos ver que esto se cumple:

$$\begin{aligned}
\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x \log x} - \int_2^x \lfloor t \rfloor \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\
&= \frac{x - \{x\}}{x \log x} - \int_2^x (t - \{t\}) \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt + \int_2^x \{t\} \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log t} \Big|_2^x + \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt \\
&= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log x} + C' + \log \log x + C' \\
&= \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos. ■

Problema 4. Muestre que

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot x^2 + O(x \log x)$$

Solución problema 4: ■

Problema 5. Pruebe que

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{si no lo es} \end{cases}$$

Solución problema 5: Reescribamos la sumatoria de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{d^2|n} \mu(d) &= \sum_{d^2|n} \mu(d) I_0(n/d^2) \\ &= (\mu * I_0)(n)\end{aligned}$$

■

Problema 6. Defina la función contadora de libres de cuadrados:

$$Q(x) := \#\{n \leq x : n \text{ es libre de cuadrados}\}.$$

Demuestre que

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot x + O(x^{1/2})$$

Solución problema 6:

■

2. Agradecimientos

- Felipe Guzmán
- Francisco Monardes
- Gabriel Ramirez
- Agustín Oyarce
- Matías Bruna

Referencias

- [1] Tao. Terence tao's blog, 2008.
- [2] Wright. Hardy. *Introduction to theory of numbers*. 4th edition, 1968.