



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2018

Tarea 3

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/04

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Problema 1 (3 pts.). Demuestre que para todo entero positivo n se tiene

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2(\log 2)n$$

Solución problema 1: Recordamos la definición de θ

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

Dado esto escribimos lo siguiente

$$\exp(\theta(2n) - \theta(n)) = \prod_{n \leq p \leq 2n} p = L \in \mathbb{Z}$$

Lema 1. Sea un primo $p \in \{n+1, n+2, \dots, 2n-1, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$.

Para demostrar esto, notemos que todo $1 < n < p$ no divide a p , luego expandiendo $\binom{2n}{n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n)}{n!}$$

Como $\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1, n\}$ $k \nmid p$, por lo que $p/n!$ es irreducible, lo que implica que $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p^{\alpha} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha > 0$, por lo que $p \mid \binom{2n}{n}$

Notemos que por L es libre de cuadrados por construcción, luego $L \mid \binom{2n}{n}$. Vemos que $2^{2n} = \sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$, por lo que $L \leq 2^{2n}$.

$$\therefore \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Que es lo que queríamos demostrar. ■

Problema 2 (2 pts. c/u).

(I) Demuestre que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm}(1, 2, \dots, n)$ para todo entero positivo n .

(II) Dado cualquier polinomio $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de grado $d \geq 1$, demuestre que

$$\exp(\psi(d+1)) \cdot \int_0^1 F(t) dt$$

es un entero.

(III) Sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$. Muestre que para todo entero positivo k se cumple

$$0 < \int_0^1 G(t)^k dt \leq \left(\frac{27}{16384} \right)^k$$

(IV) Muestre que para todo entero de la forma $n = 8k + 1$ se tiene que

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5} \log(n)$$

Solución problema 2:

(I)

(II) Por (I) tenemos que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm}(1, 2, \dots, n)$, luego

$$F(t) = \sum_{n=0}^d a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned} \exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t) dt &= \exp(\psi(d+1)) \sum_{n=0}^d \frac{a_n}{n+1} \\ &= \text{mcm}(1, 2, \dots, d+1) \sum_{n=0}^d \frac{a_n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^d a_n \frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d+1)}{n+1} \end{aligned}$$

Claramente vemos que $n + 1 \mid \text{mcm}(1, 2, \dots, d + 1)$ para todo $n \in \{0, 1, \dots, d\}$, por lo que $\frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d + 1)}{n + 1} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sum_{n=0}^d a_n \frac{\text{mcm}(1, 2, \dots, d + 1)}{n + 1} \in \mathbb{Z}$$

Y como eso es igual a $\exp(\psi(d + 1)) \int_0^1 F(t) dt$, tenemos lo que queríamos.

(III)

(IV)

■

Problema 3 (5 pts.). Demuestre que para todo $x > 1$ existe un primo p que cumple $x < p < 2x$.

Solución problema 3:

■

Problema 4 (4 pts.). Demuestre que existe una constante real estrictamente positiva $C > 0$ que cumple

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Solución problema 4:

■