Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 9

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/11/06

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (2 pts. c/u)**.** Los siguientes $f \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ determinan un conjunto algebraico $X = \mathbb{V}(f)$ en la carta afín $U_0 \simeq \mathbb{A}^2$ de $\mathbb{P}^2$. En cada caso, calcule los puntos al infinito de la clausura proyectiva de X:

1. $y_1^3 - y_2^3$
2. $y_1^2 y_2 - 2y_1 y_1^2 + y_1 y_2 - 3$
3. $y_1^n + y_2^n + 1$ con n entero positivo

Solución problema 1:

1. $H = x_1^3 - x_2^2 x_0$ homogeneización de f. Luego, $\mathbb{V}_{u_0}(f) = \mathbb{V}_{\mathbb{P}^2}(H)$. Queremos puntos en $\mathbb{V}_{\mathbb{P}^2}(H) \backslash \mathbb{V}(f)$.
   Como vemos $\mathbb{V}(f)$ en $u_0 \to$ tomemos $p = [0 : a : b] \notin u_0$.
   Además, $a^3 - b^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$. Luego, $[0 : 0 : 1]$ es punto al infinito de la clausura.

2. $H = x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_0 - 3x_0^3$. Tomemos $p = [0 : a : b] \notin u_0$, $p \in H$. Luego,

   $$a^2 b - 2ab^2 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow ab(a - 2b^2) = 0.$$

   Si $a = 0$, tenemos que $p_1 = [0 : 0 : 1]$ es punto al infinito. Análogamente, $p_2 = [0 : 1 : 0]$ es punto al infinito. Si $a - 2b = 0$, entonces $a = 2b$. Luego, $p_3 = [0 : 2 : 1]$ es un punto al infinito.
   Con esto, tenemos que p_1, p_2 y p_3 son todos los puntos al infinito.

3. $H = x_1^2 + x_2^n + x_0^n = 0$. Tomemos $p = [0 : a : b]$ con $p \in H$. Luego, $a^n + b^n = 0$. Si $a = 0$, entonces $b = 0$, pero $[0 : 0 : 0] \notin \mathbb{P}^3$, $\rightarrow\leftarrow$. Análogamente, $b = 0$ no nos da puntos.
   Si $a, b \neq 0$, entonces $p = [0 : 1 : c]$ implica que $c^n = -1$. Si n es par, no hay puntos. Si n es impar, entonces tenemos $C_n = -\text{cis}\,(2\pi n/k)$, con $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Luego, tenemos $p_n = [0 : 1 : C_n]$ puntos al infinito.

$\blacksquare$

Problema 2 (3 pts. c/u)**.** Sea $0 \neq f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado $m \geq 1$.

1. Muestre que
$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = m \cdot f$$
2. Muestre que si las tres derivadas parciales de f no tienen ceros comunes en $\mathbb{P}^2$ entonces $\mathbb{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ es suave.

Solución problema 2:

1. Tenemos que
$$f = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=m}} \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k$$
   Luego, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}$ es igual a
$$\begin{aligned} & x_0 \sum i \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^{i-1} x_1^j x_2^k + x_1 \sum j \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^{j-1} x_2^k + \sum k \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^{k-1} \\ =& \sum i \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k + \sum j \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k + \sum k \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k \\ =& \sum (i+j+k) \cdot \alpha_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k \\ =& m \cdot f, \end{aligned}$$
   que es lo que se quería demostrar.
2. Intersectaremos con u_0, u_1 y u_2 y veremos que define curvas afines suaves.
   Viendo $\mathbb{V}(f) \backslash u_0$, tenemos que $f_1(x, y) = f(x_0, x_1, x_2)$ con $(x_0, x_1, x_2) = (1, x, y)$. Luego,
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(1,x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial x_0}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x}}_{0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,x,y)$$

Análogamente, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,x,y)$. Supongamos que (a,b) es cero común. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,a,b) = 0\\
\frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,a,b) = 0\\
f_1(a,b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(1,a,b) = 0
\end{aligned}$$

Por la parte i), tenemos que

$$1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_0}(1,a,b) + a \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,a,b)}_{0} + b \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,a,b)}_{0} = m \cdot \underbrace{f(1,a,b)}_{0}$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial x_0} f(1,a,b) = 0$. Luego, $(1,a,b)$ es un cero común de las tres derivadas parciales, $\rightarrow\leftarrow$.

Así, no hay ceros comunes y $\mathbb{V}(f) \cap u_0$ es curva afín suave.

■

Problema 3 (2 pts. c/u)**.** Dado un entero positivo n, la *curva de Fermat* $X_n \subseteq \mathbb{P}^2$ es la curva plana proyectiva definida por el polinomio homogéneo

$$x_0^n + y_0^n + z_0^n$$

1. Muestre que X_N es suave chequeando que su intersección con las cartas afines U_0, U_1, U_2 define curvas afines suaves.

2. Muestre que X_n es suave chequeando directamente en $\mathbb{P}^2$, usando el Problema 2.

Solución problema 3:

1. Tenemos $x_0^n + y_0^n + z_0^n = X$, $n \neq 0$.
   $X \cap U_0$: Tenemos que $1 + \alpha^n + \beta^n = 0, n \cdot \alpha^{n-1} = n \cdot \beta^{n-1} = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$, pero en este caso $1 + \alpha^n + \beta^n = 1$, $\rightarrow\leftarrow$.
   $X \cap U_1$: Tenemos que $\alpha^n + 1 + \beta^n = 0, n \cdot \alpha^{n-1} = n \cdot \beta^{n-1} = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$, pero en este caso $\alpha^n + 1 + \beta^n = 1$, $\rightarrow\leftarrow$.
   $X \cap U_2$: Tenemos que $\alpha^n + \beta^n + 1 = 0, n \cdot \alpha^{n-1} = n \cdot \beta^{n-1} = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$, pero en este caso $\alpha^n + \beta^n + 1 = 1$, $\rightarrow\leftarrow$.
   Así, se tiene lo pedido.

2. Por la pregunta 2, basta que las derivadas parciales no tengan ceros comunes en $\mathbb{P}^2$. Si $n = 1$, entonces la derivada parcial da $1 \neq 0$, por lo que no hay ceros comunes. Si $n > 1$, entonces la derivada parcial en la primera variable da $n \cdot x_0^{n-1}$. Luego, para que sea 0, $x_0 = 0$. Análogamente, $y_0 = z_0 = 0$. Pero $[0 : 0 : 0] \notin \mathbb{P}^3$, $\rightarrow\leftarrow$.
   Por lo tanto, no hay ceros comunes y la curva es suave.

$\blacksquare$

Problema 4 (4 pts.)**.** Sean $A, B \in \mathbb{C}$. Considere la curva plana afín dada por

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^2$ su clausura proyectiva (considerando la curva afín en $U_0 \subseteq \mathbb{P}^2$). Demuestre que si $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ entonces X es suave.

Solución problema 4: Por teorema de clases, $\overline{\mathbb{V}_{U_0}(f)} = \mathbb{V}_{\mathbb{P}_2}(H)$, donde $H = -x_2^2 x_0 + x_1^3 + Ax_1x_0^2 + Bx_0^3$. Por la pregunta 2, basta buscar ceros comunes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -x_2^2 + 2Ax_1x_0 + 3Bx_0^2 \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + Ax_0^2 \tag{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2x_0 \tag{3}$$

Desde (3), tenemos dos opciones. Si $x_0 = 0$, entonces desde (2) tenemos $x_1 = 0$, y desde (1) tendríamos $x_2 = 0$, $\rightarrow\leftarrow$.
Luego, $x_0 \neq 0$ y $x_2 = 0$. Luego, podemos reescribir (1) como

$$2Ax_1 + 3Bx_0 \tag{4}$$

Desde (4) se llega a $2Ax_1 = -3Bx_0$. Si $A = 0$, entonces $B = 0$, por lo que $4A^3 + 27B^2 = 0$. Luego, asumamos $A \neq 0$. Esto dice que $x_1 = \frac{-3Bx_0}{2A}$. Reemplazando en (2), se llega a

$$3 \cdot \left(\frac{-3Bx_0}{2A}\right)^2 + Ax_0^2 = 0$$

Como $4A^2 \neq 0$, desarrollando la expresión llegamos a

$$27B^2x_0^2 + 4A^3x_0^2 = 0$$

Como $x_0 \neq 0$, al simplificar queda $27B^2 + 4A^3 = 0$. Por lo tanto, si $27B^2 + 4A^3 \neq 0$, no hay ceros comunes y la curva es suave.

$\blacksquare$