Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 3

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/04

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Problema 1 (3 pts.)**.** Demuestre que para todo entero positivo n se tiene

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2(\log 2)n$$

Solución problema 1: Recordamos la definición de θ

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

Dado esto escribimos lo siguiente

$$\exp(\theta(2n) - \theta(n)) = \prod_{n \leq p \leq 2n} p = L \in \mathbb{Z}$$

Lema 1. *Sea un primo $p \in \{n+1, n+2, ..., 2n-1, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$. Para demostrar esto, notemos que todo $1 < n < p$ no divide a p, luego expandiendo $\binom{2n}{n}$*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot ... \cdot (2n-1)(2n)}{n!}$$

Como $\forall k \in \{2, 3, ..., n-1, n\} \quad k \nmid p$, por lo que $p/n!$ es irreductible, lo que implica que $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p^{\alpha} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha > 0$, por lo que $p \mid \binom{2n}{n}$

Notemos que por L es libre de cuadrados por construcción, luego $L \mid \binom{2n}{n}$. Vemos que $2^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$, por lo que $L \leq 2^{2n}$.

$$\therefore \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\blacksquare$

Problema 2 (2 pts. c/u).

I Demuestre que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm }(1, 2, ..., n)$ para todo entero positivo n.

II Dado cualquier polinomio $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de grado $d \geq 1$, demuestre que

$$\exp(\psi(d+1)) \cdot \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$$

es un entero.

III Sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$. Muestre que para todo entero positivo k se cumple

$$0 < \int_0^1 G(t)^k\,\mathrm{d}t \leq \left(\frac{27}{16384}\right)^k$$

IV Muestre que para todo entero de la forma $n = 8k+1$ se tiene que

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n-1)$$

Solución problema 2:

I Sea $k \in \{1, ..., n\}$, luego $k = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_c^{\alpha_c}$ con p_j primos distintos y α_j sus respectivos exponentes en la descomposición prima.

$$p_j^{\alpha_j} \mid k \implies p_j^{\alpha_j} \leq n$$

Luego por definición de $\psi(n)$ se tiene que

$$p_j^{\alpha_j} \mid \exp(\psi(n)) \quad \forall j \in \{1z, ..., c\}$$

Se puede ver que $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}$ son coprimos, por lo que

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \mid \exp(\psi(n))$$

Luego $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}$ son coprimos

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3} \mid \exp(\psi(n))$$

Notamos que este proceso se puede iterar tal que

$$k \mid \exp(\psi(n))$$

Esto se cumple $\forall k \in \{1, ..., n\} \implies \exp(\psi(n))$ es múltiplo de los primeros n números.
Se concluye que

$$\text{mcm } (1, ..., n) \leq \exp(\psi(n))$$

Viendo que $\exp(\psi(n)) = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ con p_j primos distintos, p_r el mayor primo menor que n y α_j el mayor natural tal que $p_j^{\alpha_j} \leq n$.
Por definición de $\psi(n)$

$$p_1^{\alpha_1} \leq n \implies p_1^{\alpha_1} \mid \text{mcm } (1, ..., n)$$

Así $\forall p_j^{\alpha_j}$ en la descomposición de $\exp(\psi(n))$ se tiene que $p_j^{\alpha_j} \mid \text{mcm } (1, ..., n)$
Nuevamente iterando los $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, ..., p_r^{\alpha_r}$ son coprimos de a pares por lo que iterando el argumento anterior obtenemos que

$$\exp(\psi(n)) \mid \text{mcm } (1, ..., n)$$

Se concluye entonces que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm } (1, ..., n)$

II Por (I) tenemos que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm } (1, 2, ..., n)$, luego

$$F(t) = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned}
\exp(\psi(d+1))\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t &= \exp(\psi(d+1))\sum_{n=0}^{d}\frac{a_n}{n+1} \\
&= \text{mcm }(1,2,...,d+1)\sum_{n=0}^{d}\frac{a_n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{d} a_n\frac{\text{mcm }(1,2,...,d+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Claramente vemos que $n+1 \mid \text{mcm }(1,2,...,d+1)$ para todo $n \in \{0,1,...,d\}$, por lo que $\frac{\text{mcm }(1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sum_{n=0}^{d} a_n\frac{\text{mcm }(1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Y como eso es igual a $\exp(\psi(d+1))\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$, tenemos lo que queríamos.

III Dada la expresión $G(t)^k$, queremos encontrar un máximo en el intervalo $[0,1]$, para esto derivamos la función e igualamos a 0.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)^k \\
&= -k((1-2t)^2(t-1)^3t^3)^{k-1}(4t-3)(4t-1)
\end{aligned}$$

Para ver la otra desigualdad, se puede notar que G^k es una función continua, y por la otra desigualdad sabemos que $\exists c \in [0,1] : G^k(c) > 0$, y como es continua existe un abierto $A = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset [0,1]$ tal que $\forall x \in A : g(x) > 0$, con esto se puede ver que

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} G^k(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Y como $A \subset [0,1]$

$$\int_0^1 G^k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{c-\varepsilon} G^k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} G^k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c+\varepsilon}^{1} G^k(t)\,\mathrm{d}t$$

Trivialmente se nota que $G^k(t) \geq 0 \forall t \in [0,1]$, por lo que

$$\int_0^{c-\varepsilon} G^k(t)\,\mathrm{d}t, \int_{c+\varepsilon}^1 G^k(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Lo que a su vez nos deja concluir que

$$\int_0^1 G^k(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Juntando esto con lo anterior tenemos que

$$0 < \int_0^1 G(t)^k\,\mathrm{d}t \leq \left(\frac{27}{16384}\right)^k$$

IV Sea $n = 8k+1$ y sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$, notamos que $\deg(G^k) = 8k$. Por (II) se sabe que $\exp(\psi(n)) \int_0^1 G^(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{Z}$, más aún es estrictamente positivo

$$1 \leq \exp(\psi(n)) \int_0^1 G^k(t)\,\mathrm{d}t$$

Complementando con (III)

$$1 \leq \exp(\psi(n)) \int_0^1 G^k(t)\,\mathrm{d}t \leq \exp(\psi(n)) \left(\frac{3^3}{2^{14}}\right)^k$$

Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\iff \left(\frac{2^{14}}{3^3}\right)^k \leq \exp(\psi(n)) \\
&\iff k\left(\log(2^{14}) - \log(3^3)\right) \leq \psi(n) \qquad k = \frac{n-1}{8} \\
&\iff (n-1)\left(\frac{\log(2^{14}) - \log(3^3)}{8}\right) \leq \psi(n)
\end{aligned}$$

Notar que $\dfrac{4}{5} \leq \left(\dfrac{\log(2^{14} - \log(3^3))}{8}\right)$

$$\therefore \frac{4}{5}(n-1) \leq \psi(n)$$

$\blacksquare$

Problema 3 (5 pts.)**.** Demuestre que para todo $x > 1$ existe un primo p que cumple $x < p < 2x$.

Solución problema 3: De la pregunta 1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered}\theta(n) - \theta(n/2) \leq \log(2)n \\ \theta(n/2) - \theta(n/4) \leq \log(2)n/2 \\ \vdots \\ \theta(n/2^k) - \theta(n/2^{k+1}) \leq \log(2)n/2^k\end{gathered}$$

Notamos que si $k > \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2$, entonces $n/2^{k+1} < 2$, por lo que $\theta(n/2^{k+1}) = 0$. Por lo que tomamos $k = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2 \right\rfloor + 1$, y sumamos, tal que

$$\theta(n) = \theta(n) - \theta(n/2^{k+1}) \leq \log(2)n \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \leq \log(2)n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \log(2)2n$$

Con lo que obtenemos

$$\theta(n) \leq \log(2)2n \tag{1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, luego por propiedades modulares existe $n_0 \in \{n, n-1, n-2, ..., n-7\}$ tal que $n_0 = 8k+1$ con $k \in \mathbb{N}$. Y así con la pregunta 2, obtenemos

$$\psi(n) \geq \psi(n_0) \geq \frac{4}{5}(n_0 - 1) \geq \frac{4}{5}(n - 8)$$

Por lo que conseguimos

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n - 8) \tag{2}$$

En clase vimos $\psi(n) = \sum_{k \geq 1} \theta(n^{1/k})$. Con esto se obtiene

$$\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k \geq 2} \theta((2n)^{1/k})$$

Pero notamos que $\theta((2n)^{1/k}) = 0$ con $k = \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que $2 > (2n)^{1/k}$.

Así $\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k\geq 2}^{\left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil} \theta((2n)^{1/k}) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que si $k_1 > k_2$ se cumple que $\theta(n^{1/k_1}) \leq \theta(n^{1/k_2})$.

Con esto y juntando con (2) obtenemos

$$\frac{4}{5}(2n-8) \leq \psi(2n) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2}$$

De lo cual se obtiene

$$\frac{4}{5}(2n-8) - \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \theta(2n) \tag{3}$$

Usando (1) se puede obtener lo siguiente

$$-2n \log 2 \leq -\theta(n) \tag{4}$$

$$\theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \tag{5}$$

Usando (3), (4) y (5)

$$\frac{4}{5}(2n-8) - 2n\log 2 - \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \leq \theta(2n) - \theta(n)$$

Ahora analizando la función

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{4}{5}(2n-8) - 2n\log 2 - \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \\ &= n\left(\frac{8}{5} - 2\log 2 - \frac{\sqrt{2}\log 2 \log 2n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{32}{5} \end{aligned}$$

Más aún analizando la función

$$g(n) == \frac{8}{5} - 2\log 2 - \frac{\sqrt{2}\log 2 \log 2n}{\sqrt{n}}$$

Derivándola se ve

$$\begin{aligned} g'(n) &= \frac{\sqrt{2}(\log 2)^2}{2n\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}\log 2}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}\log 2 \log n}{2n\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\log 2}{2n\sqrt{n}}(\log 2 - 2 - \log n) \\ &= \frac{\sqrt{2}\log 2}{2n\sqrt{n}} \log\left(\frac{2n}{\mathrm{e}^2}\right) \end{aligned}$$

Aquí se puede notar que si $n > \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} \implies g'(n) > 0$

Luego $\forall n > \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ se tiene que $g(n)$ es creciente

Recordamos que $f(n) = n \cdot g(n) - \dfrac{28}{5}$, por lo que cuando $g(n) > 0$, $f(n)$ será creciente.

Por inspección claramente se ve que $g(1302) > 0$, más aún es el primer natural donde la función es positiva, y como $g(n)$ es creciente[1], desde 1302 $g(n)$ siempre es positiva.

Así $\forall n \geq 1302$, se cumple que $f(n)$ es creciente, ahora de nuevo por inspección se tiene que $f(1381) > 0$, y específicamente es el primer natural que cumple que la función sea positiva, y como es creciente[2], $\forall n \geq 1381 \quad f(n) > 0$

$$\forall n \geq 1381 \quad 0 < f(n) \leq \theta(2n) - \theta(n)$$

Es decir $\displaystyle\sum_{n \leq p \leq 2n} \log p > 0 \implies \exists p$ primo : $n < p < 2n \quad \forall n \geq 1381$, dado esto se pueden analizar los casos restantes.

Observación 3.1. Notemos que si $\exists p \in [2, 2n] \cap \mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\forall \alpha \in (n, n+1)$ se tiene que $\alpha < p < 2\alpha$

Demostración. Esto se puede ver ya que

$$\begin{aligned} n < p &\implies n + 1 \leq p \\ &\implies \alpha < n + 1 \leq p \\ &\implies \alpha < p \end{aligned}$$

Por otro lado $p < 2n < 2\alpha$, luego $\alpha < p < 2\alpha$ □

[1] $1302 > \frac{\mathrm{e}^2}{2}$
[2] $1381 > 1302$

La observación anterior ayuda a reducir el análisis a solo los naturales

Lema 2. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* p *primo tal que* $n < p < 2n$*. Entonces* $\forall a \in \{n+1, n+2, ..., p-2, p-1\}$ *se tiene que* $a < p < 2a$

Demostración. Se tiene que $n < a < p$ y $p < 2n < 2a$, por lo que $a < p < 2a$ $\square$

El lema anterior nos reduce a los siguientes casos

$$\begin{aligned}
n &= 2, & 2 < 3 < 4 \\
n &= 3, & 3 < 5 < 6 \\
n &= 5, & 5 < 7 < 10 \\
n &= 7, & 7 < 13 < 14 \\
n &= 13, & 13 < 23 < 26 \\
n &= 23, & 23 < 43 < 46 \\
n &= 43, & 43 < 83 < 86 \\
n &= 83, & 83 < 163 < 166 \\
n &= 163, & 163 < 317 < 326 \\
n &= 317, & 317 < 631 < 634 \\
n &= 631, & 631 < 1259 < 1262 \\
n &= 1259, & 1259 < 2503 < 2518
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Problema 4 (4 pts.)**.** Demuestre que existe una constante real estrictamente positiva $C > 0$ que cumple

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Solución problema 4: Utilizando la serie de $-\log(1-x)$ donde $|x| < 1$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

Tomando $x = 1/p$

$$-\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p,k\ge1}\frac{1}{kp^k}=\sum_{p\le x}\frac{1}{p}+\sum_{p\le x}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}$$

Ahora se analiza la siguiente serie

$$B=\sum_{p}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}$$

Y se nota que esta converge ya que

$$\sum_{p}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}\le\frac{1}{2}\sum_{p}\sum_{k\ge2}\frac{1}{p^k}\le\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}\le\sum_{n\ge2}\frac{1}{n(n-1)}<\infty$$

Con esto se puede ver que

$$\sum_{p}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}=B-\sum_{p>x}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}$$

Y esto ultimo se puede analizar de la siguiente forma

$$\sum_{p}\sum_{k\ge2}\frac{1}{kp^k}=\sum_{p>x}\frac{1}{p(p-1)}\le\sum_{n>x}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n>x}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ahora, se puede usar el teorema 2 de Mertens

$$\begin{aligned}-\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)&=\log\log x+M+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+B+O\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\log\log x+B+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\end{aligned}$$

donde $B = A + M$, luego tomando exponencial se puede deducir

$$\prod_{p\le x}=\frac{1}{\log x}\exp(-B)\exp(1+O(1/\log x))$$

y como

$$\exp(t)=1+O\left(t\right)\quad t\in[0,1]$$

Con esto se puede concluir que

$$
\begin{aligned}
\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) &= \frac{c}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\\
&= \frac{c}{\log x}+O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Que es lo que se buscaba[1]

$\blacksquare$

1. Agradecimientes

- Gabriel Ramirez
- Anibal Aravena

Referencias

[1] Pablo De Nápoli. Introducción a la teoría analítica de números, clase 7, 2009.