



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Segundo Semestre de 2018

## Tarea 9

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/11/20

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Felipe Guzmán, Fernanda Cares

**Problema 1** (10 pts.). ¿Existe algún entero  $n > 1$  tal que la suma  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  sea un cubo perfecto?

**Solución problema 1:** Este problema se puede escribir de la siguiente forma:

$$a^3 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde la pregunta es si existe  $n > 1$  y  $a \in \mathbb{Z}$  tal que se cumpla la igualdad. Para ver esto hay que reescribirlo de la siguiente forma:

$$(2a)^3 + 1 = (2n+1)^2$$

Si tomamos  $y = 2n + 1$  y  $x = 2a$ , tenemos la siguiente curva elíptica.

$$y^2 = x^3 + 1$$

Y con ayuda de un programa (Mc-Donnell, 2018), notamos que el grupo de torsión es isomorfo a  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  y que tiene rango 0. Además el programa nos da los siguientes puntos  $(0, \pm 1), (-1, 0), (2, \pm 3)$  y con el neutro son todos los elementos de la curva elíptica. Dado eso, notamos que el único punto que no es de interés es el  $(2, \pm 3)$ , ya que este se mapea a soluciones enteras del problema original, pero la solución es  $n = 1$ , por lo que vemos que la única solución es esa, y que no existen  $n > 1$  que cumplen lo pedido.

■

**Problema 2** (10 pts.). Muestre que existen infinitos números racionales  $a \in \mathbb{Q}$  tales que el polinomio  $P_a(t) = at^2 - 12t + a^2$  es reducible sobre  $\mathbb{Q}$

**Solución problema 2:** Que el polinomio sea reducible en  $\mathbb{Q}$  es equivalente a encontrar  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$  tal que  $P_a(t) = (\alpha t + \beta)(t + \gamma)$

$$\implies \alpha = a, \quad \alpha\gamma + \beta = -12, \quad \beta\gamma = a^2$$

Con esto se puede escribir la siguiente ecuación

$$\alpha^3 = -\beta^2 - 12\beta$$

La cual es una curva elíptica  $E$ , por lo que encontrar infinitos  $a$  tales que  $P_a(t)$  sea reducible en  $\mathbb{Q}$  es equivalente a encontrar infinitos puntos racionales en  $E$ .

Para trabajar esta curva elíptica se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\alpha^3 &= \beta^2 + 12\beta \\ -\alpha^3 + 36 &= \beta^2 + 12\beta + 36 \\ -\alpha^3 + 36 &= (\beta + 6)^2 \end{aligned}$$

Ahora usando el cambio de variable  $y = \beta + 6$  y  $x = -\alpha$  nos queda

$$y^2 = x^3 + 36$$

Vemos que  $\Delta = -16(4 \cdot 0 + 27 \cdot 36^2) \neq 0$ . Con lo cual podemos concluir que  $E$  es suave. Con esto se sabe que  $E(\mathbb{Q})^1$  es un grupo de orden infinito, por lo que hay infinitos puntos racionales en  $E$ , lo cual nos da lo que queríamos demostrar.

■

## Referencias

Mc-Donnell, N. (2018). *Sage notebook to calculate the torsion group and range of certain elliptic curves*. Descargado de <https://github.com/N9199/Tareas-Teoria-de-Numeros/blob/master/Tarea%2010/Tarea%2010.ipynb>

---

<sup>1</sup>Tiene puntos racionales ya que  $(4, 10)$  es solución y la curva tiene rango 1 (Mc-Donnell, 2018)