Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 9

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/11/20

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (10 pts.). ¿Existe algún entero $n > 1$ tal que la suma $1 + 2 + 3 + ... + n$ sea un cubo perfecto?

Solución problema 1:

$\blacksquare$

Problema 2 (10 pts.). Muestre que existen infinitos números racionales $a \in \mathbb{Q}$ tales que el polinomio $P_a(t) = at^2 - 12t + a^2$ es reducible sobre $\mathbb{Q}$

Solución problema 2: Que el polinomio sea reducible en $\mathbb{Q}$ es equivalente a encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $P_a(t) = (\alpha t + \beta)(t + \gamma)$

$$\implies \alpha = a, \quad \alpha\gamma + \beta = -12, \quad \beta\gamma = a^2$$

Con esto se puede escribir la siguiente ecuación

$$\alpha^3 = -\beta^2 - 12\beta$$

La cual es un curva elíptica E, por lo que encontrar infinitos a tales que $P_a(t)$ sea reducible en $\mathbb{Q}$ es equivalente a encontrar infinitos puntos racionales en E.

Para trabajar esta curva elíptica se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\alpha^3 &= \beta^2 + 12\beta \\ -\alpha^3 + 36 &= \beta^2 + 12\beta + 36 \\ -\alpha^3 + 36 &= (\beta + 6)^2 \end{aligned}$$

Ahora usando el cambio de variable $y = \beta + 6$ y $x = -\alpha$ nos queda

$$y^2 = x^3 + 36$$

Vemos que $\Delta = -16(4 \cdot 0 + 27 \cdot 36^2) \neq 0$. Con lo cual podemos concluir que E es suave. Con esto se sabe que $E(\mathbb{Q})$[1] es un grupo de orden infinito, por lo que hay infinitos puntos racionales en E, lo cual nos da lo que queríamos demostrar.

$\blacksquare$

[1] Tiene puntos racionales ya que $(4, 10)$ es solución