Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Persona2,
Persona3, Persona4

Problema 1. Muestre que para $\epsilon > 0$ existe una constante $k_\epsilon > 0$ tal que para todo entero positivo n se cumpla que $\sigma_0(n) \leq k_\epsilon \cdot n^\epsilon$

Solución: 1.

Problema 2. Demuestre que existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo entero positivo n se tiene

$$An^2 \leq \phi(n)\sigma_1(n) \leq Bn^2$$

Solución: 2.

Problema 3. Pruebe que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{n\log n} = \log\log x + C + O\left(\frac{1}{x\log x}\right)$$

Solución: 3.

Problema 4. Muestre que

$$\sum_{n\leq x} \phi(n) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot x^2 + O(x\log x)$$

Solución: 4.

Problema 5. Pruebe que

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{si no lo es} \end{cases}$$

Solución: 5.

Problema 6. Defina la función contadora de libres de cuadrados:

$$Q(x) := \#\{n \leq x : n \text{ es libre de cuadrados}\}.$$

Demuestre que

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot x + O(x^{1/2})$$