Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 2

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/21

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,
Javier Reyes

1. Problemas

Problema 1 (2 pts. c/u)**.** Demuestre las siguientes identidades (demostrando también convergencia en el dominio indicado):

(I) Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces $D(s, \sigma_k) = \zeta(s)\zeta(s-k)$ para $s > \text{máx}\{1, k+1\}$

(II) $D(s, \phi) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$ para $s > 2$

(III) $D(s, \sigma_0^2) = \zeta(s)^4/\zeta(2s)$ para $s > 1$

Solución problema 1:

(I) Recordamos que $D(s, f * g) = D(s, f)D(s, g)$ y que $\sigma_k = I_0 * I_k$

$$\begin{aligned}
\therefore D(s, \sigma_k) &= D(s, I_0)D(s, I_k) \\
&= \zeta(s) \sum_n \frac{n^k}{n^s} \\
&= \zeta(s) \sum_n \frac{1}{n^{s-k}} \\
&= \zeta(s)\zeta(s-k)
\end{aligned}$$

Notamos que esto converge para $s > \text{máx}\{1, k+1\}$

(II) Ahora, usando que $\phi = \mu * I_1$

$$\begin{aligned} D(s,\phi) &= D(s,\mu)D(s,I_1) \\ &= \frac{1}{\zeta(s)}\zeta(s-1) \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

Lo cual converge para $s > 2$

(III) En primer lugar, como $\sigma_0 = I_0 * I_0$, entonces para $s > 1$, $D(s,\sigma_0) = \zeta(s)^2$, es decir,

$$\begin{aligned} D(s,\sigma_0) = \sum_n \frac{\sigma_0(n)}{n} &= \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \dots\right) \\ &= \prod_p \left(\frac{p^s}{p^s-1}\right)^2 \\ &= \zeta(s)^2 \end{aligned}$$

Dado que $\zeta(2s) = \sum_n 1/(n^2)^s = \prod_p (1 + p^{-2s} + p^{-4s} + \dots) = \prod_p p^{2s}/(p^{2s}-1)$, se tiene que para $s > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s)^4/\zeta(2s) &= \prod_p \left(\frac{p^s}{p^s-1}\right)^4 \frac{p^{2s}-1}{p^{2s}} \\ &= \prod_p \left(\frac{p^s}{p^s-1}\right)^2 \frac{p^s+1}{p^s-1} \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \dots\right)\left(1 + 2\frac{1}{p^s-1}\right) \\ &= \prod_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{p^{ks}}\right)\left(1 + \sum_{j\geq 1} \frac{2}{p^{js}}\right) \\ &= \prod_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{p^{ks}} + \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 1} \frac{2(k+1)}{p^{(k+j)s}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(s)^4/\zeta(2s) &= \prod_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{p^{ks}} + \sum_{k\geq 0} \frac{\sum_{l=0}^{k-1} 2(l+1)}{p^{ks}} \right) \\
&= \prod_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k+1+(k-1)k+2k}{p^{ks}} \right) \\
&= \prod_p \sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)^2}{p^{ks}} \\
&= \prod_p \sum_{k\geq 0} \frac{\sigma_0^2(p^k)}{p^{ks}} \\
&= D(s, \sigma_0^2)
\end{aligned}
$$

■

Problema 2 (3 pts.). Demuestre que cuando $s \to 1^+$, la diferencia

$$
\left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right|
$$

se mantiene acotada.

Solución problema 2: Para $s > 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s} dt \\
&= \int_1^\infty O\left(\frac{1}{t^{2s}}\right) dt \\
&= O\left(\frac{1}{2s-1}\right)
\end{aligned}
$$

Es decir, para todo $s > 1$, $\left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right| \leq A \quad \frac{1}{2s-1} \leq A$, probando que tal diferencia está siempre acotada.

■

Problema 3 (2 pts.). Sea f una función aritmética que cumple

(I) $f(n) \geq 0$ para todo n

(II) Existen $r \in \mathbb{N}$ y cierta función continua $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ de manera que para todo $s > 1$ se cumple $D(s, f) = F(s)\zeta(s)^r$

Demuestre que

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} \ll (\log x)^r$$

Solución problema 3: Sabemos que $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tal que cuando $s \to 1^+$

$$\left| \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right| < k$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1) \text{ cuando } s \to 1^+$$

Sea $\log x = \frac{1}{s-1}$

$$x \geq 3 \text{ nos interesa} \qquad \implies s = \frac{1}{\log x} + 1$$

Notar que si $s \to 1^+ \implies s \in [1, \infty) \implies F(s)$ esta bien definida y como es continua, $F(s)$ alcanza un máximo en $[1, 2]$, en particular $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $F(s) < k$. Así:

$$k \cdot (\log x)^r \gg F(s) \cdot \zeta(s)^r = D(s, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n \cdot n^{\frac{1}{\log x}}} \geq \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n \cdot n^{\frac{1}{\log x}}} \geq \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n \cdot x^{\frac{1}{\log x}}}$$

Notamos que $x^{\frac{1}{\log x}} = \mathrm{e}$, y así

$$(\log x)^r \gg \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}$$

$\blacksquare$

Problema 4 (2 pts. c/u)**.** Calcule σ_c y σ_a para las series de Dirichlet de las siguientes funciones aritméticas f:

(I) $f(n) = (\log n)^2 \phi(n)$

(II) $f(n) = 2^{-n}$

(III) $f(n) = i^n$ donde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

Solución problema 4:

(i) Dado que $f(n) \geq 0$, entonces $\sigma_a = \sigma_c$. También observamos que $D(s, f) = D(s, \phi)''$. Estudiaremos σ_c para la serie de ϕ. Tenemos para $s > \sigma_a$.

$$\begin{aligned} D(s,\phi) &= \prod_p \left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{p(p-1)}{p^{2s}} + \frac{p^2(p-1)}{p^{3s}} + \dots\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{p-1}{p} \sum_{k\geq 1} p^{k-ks}\right) \end{aligned}$$

El producto converge si y solo si $\sum_p \frac{p-1}{p} \sum_k p^{(1-s)k}$ converge, pero como

$$\frac{1}{2}\sum_p \sum_{k\geq 1} p^{(1-s)k} \leq \sum_p \frac{p-1}{p} \sum_{k\geq 1} p^{(1-s)k} \leq \sum_p \sum_{k\geq 1} p^{(1-s)k}$$

entonces converge si y solo si lo hace $\sum_p \sum_k p^{(1-s)k}$, que converge si y solo si converge

$$\prod_p \left(1 + \sum_{k\geq 1} p^{(1-s)k}\right) = \zeta(s-1)$$

Se concluye que para $D(s,\phi)$, $\sigma_c = \sigma_a = 2$. Dado que $\log x \ll_\varepsilon x^\varepsilon$ para todo ε, entonces la derivada de una serie de Dirichlet conserva las abscisas, luego para f, $\sigma_a = \sigma_c = 2$.

(ii) Usando el criterio de Cauchy sobre la siguiente serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n^s}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^{-n}}{n^s}\right|} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n^s}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2(\sqrt[n]{n})^s} \\ &= \frac{1}{2\cdot 1^s} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Por lo que converge independiente de s, lo que nos da que $\sigma_a = \sigma_c = -\infty$

(III) Usando que $f(2n) = (-1)^n$ y que $f(2n-1) = i(-1)^{n+1}$ podemos escribir lo siguiente:

$$D(s,f) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)^s} + i \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^s}$$

Donde cada parte tiene $\sigma_c = 0$ por criterio de las serie alternante, y trivialmente se nota que $\sigma_a = 1$, ya que $D(s,|f|) = D(s,1) = \zeta(s)$

■

Problema 5 (3 pts.)**.** Demuestre que para cada real $r \in [0,1]$ existe alguna función aritmética f que cumple la relación

$$\sigma_a(f) = \sigma_c(f) + r$$

entre las abscisas de convergencia y de convergencia absoluta de $D(s,f)$.

Solución problema 5: Es suficiente encontrar una función f que cumpla las siguientes dos propiedades

- $|f(n)| = n^r$.
- $|S_f(n)| = n$.

La primera nos asegura que $S_{|f|}(n) \sim n^{r+1}$, es decir $\sigma_a(f) = 1 + r$, mientras que la segunda da $\sigma_c(f) = 1$, que satisface la relación requerida.

Sea $f(1) = 1$, y para construir f por inducción, supongamos que $|S_f(n-1)| = n-1$ y $|f(n-1)| = (n-1)^r$. Sea S la circunferencia de centro $S_f(n-1)$ y radio n^r. Como $r \in [0,1]$, entonces $1 \leq n^r \leq n$. Esto nos dice que

$$\max_{z\in S}\{|z|\} \geq |S_f(n-1)| + 1 = n \quad \text{y}$$

$$\min_{z\in S} \leq \min(||S_f(n-1)| - n|\,, ||S_f(n-1)| - 1|) = n-2$$

Dado que esta circunferencia tiene una parte de norma mayor o igual a n, y otra con norma menor a n, entonces existe al menos algun punto $d \in S$ tal que $|d| = n$. Definimos entonces $f(n) = d - S_f(n-1)$. Por construcción, $|f(n)| = n^r$ y $S_f(n) = f(n) + S_f(n-1) = d$ tiene norma n.

Esta construcción otorga una f que satisface ambas propiedades arriba.

■

2. Agradecimientos

- Felipe Guzmán
- Maximiliano Norbu
- Fernanda Cares
- Agustín Oyarce
- Gabriel Ramirez
- Daniel Gajardo
- Fernando Figueroa
- Duvan Henao
- Hector Pasten