Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 10

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/11/20

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez
Felipe Guzmán, Fernanda Cares

Problema 1 (10 pts.)**.** ¿Existe algún entero $n > 1$ tal que la suma $1 + 2 + 3 + ... + n$ sea un cubo perfecto?

Solución problema 1: Este problema se puede escribir de la siguiente forma:

$$a^3 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde la pregunta es si existe $n > 1$ y $a \in \mathbb{Z}$ tal que se cumpla la igualdad. Para ver esto hay que reescribirlo de la siguiente forma:

$$(2a)^3 + 1 = (2n+1)^2$$

Si tomamos $y = 2n + 1$ y $x = 2a$, tenemos la siguiente curva elíptica.

$$y^2 = x^3 + 1$$

Y con ayuda de un programa (Mc-Donnell, 2018), notamos que el grupo de torsión es isomorfo a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y que tiene rango 0. Además el programa nos da los siguientes puntos $(0, \pm 1), (-1, 0), (2, \pm 3)$ y con el neutro son todos los elementos de la curva elíptica. Dado eso, notamos que el único punto que no es de interés es el $(2, \pm 3)$, ya que este se mapea a soluciones enteras del problema original, pero la solución es $n = 1$, por lo que vemos que la única solución es esa, y que no existen $n > 1$ que cumplen lo pedido.

$\blacksquare$

Problema 2 (10 pts.)**.** Muestre que existen infinitos números racionales $a \in \mathbb{Q}$ tales que el polinomio $P_a(t) = at^2 - 12t + a^2$ es reducible sobre $\mathbb{Q}$

Solución problema 2: Que el polinomio sea reducible en $\mathbb{Q}$ es equivalente a encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $P_a(t) = (\alpha t + \beta)(t + \gamma)$

$$\implies \alpha = a, \quad \alpha\gamma + \beta = -12, \quad \beta\gamma = a^2$$

Con esto se puede escribir la siguiente ecuación

$$\alpha^3 = -\beta^2 - 12\beta$$

La cual es un curva elíptica E, por lo que encontrar infinitos a tales que $P_a(t)$ sea reducible en $\mathbb{Q}$ es equivalente a encontrar infinitos puntos racionales en E.
Para trabajar esta curva elíptica se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\alpha^3 &= \beta^2 + 12\beta \\ -\alpha^3 + 36 &= \beta^2 + 12\beta + 36 \\ -\alpha^3 + 36 &= (\beta + 6)^2 \end{aligned}$$

Ahora usando el cambio de variable $y = \beta + 6$ y $x = -\alpha$ nos queda

$$y^2 = x^3 + 36$$

Vemos que $\Delta = -16(4 \cdot 0 + 27 \cdot 36^2) \neq 0$. Con lo cual podemos concluir que E es suave. Con esto se sabe que $E(\mathbb{Q})$, luego gracias a un programa (Mc-Donnell, 2018) notamos que tiene rango > 0, por lo que es un grupo de orden infinito, por lo que hay infinitos puntos racionales en E, lo cual nos da lo que queríamos demostrar.

$\blacksquare$

Referencias

Mc-Donnell, N. (2018). *Sage notebook to calculate the torsion group and range of certain elliptic curves.* Descargado de `https://github.com/N9199/Tareas-Teoria-de-Numeros/blob/master/Tarea%2010/Tarea%2010.ipynb`