Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

Segundo Semestre de 2018

Tarea 3

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/04

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Problema 1 (3 pts.)**.** Demuestre que para todo entero positivo n se tiene

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2(\log 2)n$$

Solución problema 1: Recordamos la definición de θ

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

Dado esto escribimos lo siguiente

$$\exp(\theta(2n) - \theta(n)) = \prod_{n \leq p \leq 2n} p = L \in \mathbb{Z}$$

Lema 1. *Sea un primo $p \in \{n+1, n+2, ..., 2n-1, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$. Para demostrar esto, notemos que todo $1 < n < p$ no divide a p, luego expandiendo $\binom{2n}{n}$*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot ... \cdot (2n-1)(2n)}{n!}$$

Como $\forall k \in \{2, 3, ..., n-1, n\} \quad k \nmid p$, por lo que $p/n!$ es irreductible, lo que implica que $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p^{\alpha} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha > 0$, por lo que $p \mid \binom{2n}{n}$

Notemos que por L es libre de cuadrados por construcción, luego $L \mid \binom{2n}{n}$. Vemos que $2^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$, por lo que $L \leq 2^{2n}$.

$$\therefore \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\blacksquare$

Problema 2 (2 pts. c/u)**.**

(I) Demuestre que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm } (1, 2, ..., n)$ para todo entero positivo n.

(II) Dado cualquier polinomio $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de grado $d \geq 1$, demuestre que

$$\exp(\psi(d+1)) \cdot \int_0^1 F(t)\, \mathrm{d}t$$

es un entero.

(III) Sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$. Muestre que para todo entero positivo k se cumple

$$0 < \int_0^1 G(t)^k\, \mathrm{d}t \leq \left(\frac{27}{16384}\right)^k$$

(IV) Muestre que para todo entero de la forma $n = 8k+1$ se tiene que

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n-1)$$

Solución problema 2:

(I)

(II) Por (I) tenemos que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm } (1, 2, ..., n)$, luego

$$F(t) = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned}
\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t)\, \mathrm{d}t &= \exp(\psi(d+1)) \sum_{n=0}^{d} \frac{a_n}{n+1} \\
&= \text{mcm } (1, 2, ..., d+1) \sum_{n=0}^{d} \frac{a_n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{d} a_n \frac{\text{mcm } (1, 2, ..., d+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Claramente vemos que $n+1 \mid \text{mcm}\,(1,2,...,d+1)$ para todo $n \in \{0,1,...,d\}$, por lo que $\frac{\text{mcm}\,(1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sum_{n=0}^{d} a_n \frac{\text{mcm}\,(1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Y como eso es igual a $\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t$, tenemos lo que queríamos.

(III) Dada la expresión $G(t)^k$, queremos encontrar un máximo en el intervalo $[0,1]$, para esto derivamos la función e igualamos a 0.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(t)^k \\ &= \end{aligned}$$

(IV)

$\blacksquare$

Problema 3 (5 pts.)**.** Demuestre que para todo $x > 1$ existe un primo p que cumple $x < p < 2x$.

Solución problema 3: De la pregunta 1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \theta(n) - \theta(n/2) &\leq \log(2)n \\ \theta(n/2) - \theta(n/4) &\leq \log(2)n/2 \\ &\vdots \\ \theta(n/2^k) - \theta(n/2^{k+1}) &\leq \log(2)n/2^k \end{aligned}$$

Notamos que si $k > \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2$, entonces $n/2^{k+1} < 2$, por lo que $\theta(n/2^{k+1}) = 0$. Por lo que tomamos $k = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(2)} - 2 \right\rfloor + 1$, y sumamos, tal que

$$\theta(n) = \theta(n) - \theta(n/2^{k+1}) \leq \log(2)n \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \leq \log(2)n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \log(2)2n$$

Con lo que obtenemos

$$\theta(n) \leq \log(2)2n \tag{1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, luego por propiedades modulares existe $n_0 \in \{n, n-1, n-2, ..., n-7\}$ tal que $n_0 = 8k+1$ con $k \in \mathbb{N}$. Y así con la pregunta 2, obtenemos

$$\psi(n) \geq \psi(n_0) \geq \frac{4}{5}(n_0 - 1) \geq \frac{4}{5}(n-8)$$

Por lo que conseguimos

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n-8) \tag{2}$$

En clase vimos $\psi(n) = \sum_{k\geq 1} \theta(n^{1/k})$. Con esto se obtiene

$$\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k\geq 2} \theta((2n)^{1/k})$$

Pero notamos que $\theta((2n)^{1/k}) = 0$ con $k = \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que $2 > (2n)^{1/k}$.

Así $\psi(2n) = \theta(2n) + \sum_{k\geq 2}^{\left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil} \theta((2n)^{1/k}) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil$, ya que si $k_1 > k_2$ se cumple que $\theta(n^{1/k_1}) \leq \theta(n^{1/k_2})$.

Con esto y juntando con (2) obtenemos

$$\frac{4}{5}(2n-8) \leq \psi(2n) \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \left\lceil \frac{\log 2n}{\log 2} \right\rceil \leq \theta(2n) + \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2}$$

De lo cual se obtiene

$$\frac{4}{5}(2n-8) - \theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \theta(2n) \tag{3}$$

Usando (1) se puede obtener lo siguiente

$$-2n \log 2 \leq -\theta(n) \tag{4}$$

$$\theta(\sqrt{2n}) \cdot \frac{\log 2n}{2} \leq \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \tag{5}$$

Usando (3), (4) y (5)

$$\frac{4}{5}(2n-8) - 2n\log 2 - \sqrt{2n} \log 2 \log 2n \leq \theta(2n) - \theta(n)$$

Ahora analizando la función

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{4}{5}(2n-8) - 2n\log 2 - \sqrt{2n}\log 2 \log 2n \\
&= n\left(\frac{8}{5} - 2\log 2 - \frac{\sqrt{2}\log 2\log 2n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{32}{5}
\end{aligned}
$$

Más aún analizando la función

$$
g(n) == \frac{8}{5} - 2\log 2 - \frac{\sqrt{2}\log 2\log 2n}{\sqrt{n}}
$$

Derivándola se ve

$$
\begin{aligned}
g'(n) &= \frac{\sqrt{2}(\log 2)^2}{2n\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}\log 2}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}\log 2\log n}{2n\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\log 2}{2n\sqrt{n}}(\log 2 - 2 - \log n) \\
&= \frac{\sqrt{2}\log 2}{2n\sqrt{n}}\log\left(\frac{2n}{\mathrm{e}^2}\right)
\end{aligned}
$$

Aquí se puede notar que si $n > \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} \implies g'(n) > 0$

Luego $\forall n > \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ se tiene que $g(n)$ es creciente

Recordamos que $f(n) = n \cdot g(n) - \dfrac{28}{5}$, por lo que cuando $g(n) > 0$, $f(n)$ será creciente.

Por inspección claramente se ve que $g(1302) > 0$, más aún es el primer natural donde la función es positiva, y como $g(n)$ es creciente[1], desde 1302 $g(n)$ siempre es positiva.

Así $\forall n \geq 1302$, se cumple que $f(n)$ es creciente, ahora de nuevo por inspección se tiene que $f(1381) > 0$, y específicamente es el primer natural que cumple que la función sea positiva, y como es creciente[2], $\forall n \geq 1381 \quad f(n) > 0$

$$
\forall n \geq 1381 \quad 0 < f(n) \leq \theta(2n) - \theta(n)
$$

Es decir $\displaystyle\sum_{n\leq p\leq 2n} \log p > 0 \implies \exists p$ primo $: n < p < 2n \quad \forall n \geq 1381$, dado esto se pueden analizar los casos restantes.

[1] $1302 > \frac{\mathrm{e}^2}{2}$

[2] $1381 > 1302$

Observación 3.1. Notemos que si $\exists p \in [2, 2n] \cap \mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\forall \alpha \in (n, n+1)$ se tiene que $\alpha < p < 2\alpha$

Demostración. Esto se puede ver ya que

$$\begin{aligned} n < p &\implies n + 1 \leq p \\ &\implies \alpha < n + 1 \leq p \\ &\implies \alpha < p \end{aligned}$$

Por otro lado $p < 2n < 2\alpha$, luego $\alpha < p < 2\alpha$ □

La observación anterior ayuda a reducir el análisis a solo los naturales

Lema 2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y p_1, p_2 primos tales que $n < p_1 < 2n$ y $p_1 < p_2 < 2p_1$. Entonces $\forall a \in \{n+1, n+2, ..., p_1 - 2, p_1 - 1\}$ se tiene que $a < p_1 < 2a$*

Demostración. Se tiene que $n < a < p_1$ y $p_1 < 2n < 2a$, por lo que $a < p_1 < 2a$ □

El lema anterior nos reduce a los siguientes casos

$$\begin{aligned} n &= 2, & 2 < 3 < 4 \\ n &= 3, & 3 < 5 < 6 \\ n &= 5, & 5 < 7 < 10 \\ n &= 7, & 7 < 13 < 14 \\ n &= 13, & 13 < 23 < 26 \\ n &= 23, & 23 < 43 < 46 \\ n &= 43, & 43 < 83 < 86 \\ n &= 83, & 83 < 163 < 166 \\ n &= 163, & 163 < 317 < 326 \\ n &= 317, & 317 < 631 < 634 \\ n &= 631, & 631 < 1259 < 1262 \\ n &= 1259, & 1259 < 2503 < 2518 \end{aligned}$$

■

Problema 4 (4 pts.)**.** Demuestre que existe una constante real estrictamente positiva $C > 0$ que cumple

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Solución problema 4:

$\blacksquare$