Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 3

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/09/04

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez

Problema 1 (3 pts.)**.** Demuestre que para todo entero positivo n se tiene

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2(\log 2)n$$

Solución problema 1: Recordamos la definición de θ

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

Dado esto escribimos lo siguiente

$$\exp(\theta(2n) - \theta(n)) = \prod_{n \leq p \leq 2n} p = L \in \mathbb{Z}$$

Lema 1. *Sea un primo $p \in \{n+1, n+2, ..., 2n-1, 2n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$. Para demostrar esto, notemos que todo $1 < n < p$ no divide a p, luego expandiendo $\binom{2n}{n}$*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot ... \cdot (2n-1)(2n)}{n!}$$

Como $\forall k \in \{2, 3, ..., n-1, n\} \quad k \nmid p$, por lo que $p/n!$ es irreductible, lo que implica que $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p^{\alpha} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha > 0$, por lo que $p \mid \binom{2n}{n}$

Notemos que por L es libre de cuadrados por construcción, luego $L \mid \binom{2n}{n}$. Vemos que $2^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n}$, por lo que $L \leq 2^{2n}$.

$$\therefore \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2$$

Que es lo que queríamos demostrar.

■

Problema 2 (2 pts. c/u)**.**

(I) Demuestre que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm }(1, 2, ..., n)$ para todo entero positivo n.

(II) Dado cualquier polinomio $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de grado $d \geq 1$, demuestre que

$$\exp(\psi(d+1)) \cdot \int_0^1 F(t)\, \mathrm{d}t$$

es un entero.

(III) Sea $G(t) = t^3(1-2t)^2(1-t)^3$. Muestre que para todo entero positivo k se cumple

$$0 < \int_0^1 G(t)^k\, \mathrm{d}t \leq \left(\frac{27}{16384}\right)^k$$

(IV) Muestre que para todo entero de la forma $n = 8k+1$ se tiene que

$$\psi(n) \geq \frac{4}{5}(n-1)$$

Solución problema 2:

(I)

(II) Por (I) tenemos que $\exp(\psi(n)) = \text{mcm }(1, 2, ..., n)$, luego

$$F(t) = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned}
\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t)\, \mathrm{d}t &= \exp(\psi(d+1)) \sum_{n=0}^{d} \frac{a_n}{n+1} \\
&= \text{mcm }(1, 2, ..., d+1) \sum_{n=0}^{d} \frac{a_n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{d} a_n \frac{\text{mcm }(1, 2, ..., d+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Claramente vemos que $n+1 \mid \text{mcm}\ (1,2,...,d+1)$ para todo $n \in \{0,1,...,d\}$, por lo que $\frac{\text{mcm}\ (1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sum_{n=0}^{d} a_n \frac{\text{mcm}\ (1,2,...,d+1)}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Y como eso es igual a $\exp(\psi(d+1)) \int_0^1 F(t)\, \mathrm{d}t$, tenemos lo que queríamos.

(III)

(IV)

$\blacksquare$

Problema 3 (5 pts.)**.** Demuestre que para todo $x > 1$ existe un primo p que cumple $x < p < 2x$.

Solución problema 3:

$\blacksquare$

Problema 4 (4 pts.)**.** Demuestre que existe una constante real estrictamente positiva $C > 0$ que cumple

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Solución problema 4:

$\blacksquare$