



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:

Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,

Javier Reyes

1. Problemas

Problema 1 (3 pts.). Muestre que para $\varepsilon > 0$ existe una constante $\kappa_\varepsilon > 0$ tal que para todo entero positivo n se cumpla que $\sigma_0(n) \leq \kappa_\varepsilon \cdot n^\varepsilon$

Solución problema 1: Notamos que el problema es equivalente a demostrar que hay una cota para la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p|n} \left(\frac{1 + v_p(n)}{p^{\varepsilon v_p(n)}} \right)$$

Ya que la expresión es una función aritmética multiplicativa podemos analizarla para un término específico p' tal que $p'|n$

$$\frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\varepsilon v_{p'}(n)}}$$

Tomamos $p' \gg 1$ y notamos que lo siguiente se cumple

$$p'^{\varepsilon v_{p'}(n)} \geq \underbrace{\exp(v_{p'}(n))}_{\text{Por expansión de Taylor}} \geq 1 + v_{p'}(n)$$

$$\therefore \frac{1 + v_{p'}(n)}{p'^{\varepsilon v_{p'}(n)}} \leq 1$$

Notamos que lo anterior solo se cumple si $p' \geq \exp(\varepsilon^{-1})$. Veamos el caso contrario, que consta

de solo finitos primos $p' < \exp(\varepsilon^{-1})$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1+a}{p'^{\varepsilon a}} = 0$$

Esto nos da que la expresión tiene una cota que no depende de a

$$\frac{1+a}{p'^{\varepsilon a}} \leq C_{\varepsilon, p'}$$

Con esto podemos concluir que $\sigma_0(n)/n^\varepsilon$ esta acotado, lo que implica que existe un

$$\kappa_\varepsilon = \prod_{p' < \exp(\varepsilon^{-1})} C_{\varepsilon, p'}$$

tal que para todo n

$$\frac{\sigma_0(n)}{n^\varepsilon} \leq \kappa_\varepsilon$$

Lo cual es equivalente a

$$\sigma_0(n) \leq \kappa_\varepsilon \cdot n^\varepsilon$$

Que es lo que queríamos demostrar¹

■

Problema 2 (3 pts.). Demuestre que existen constantes $A, B > 0$ tales que para todo entero positivo n se tiene

$$An^2 \leq \phi(n)\sigma_1(n) \leq Bn^2$$

Solución problema 2: Recordamos que $\phi(n) = n \prod_{p|n} p^{-1}(p-1)$ y $\sigma_1(n) = \prod_{p|n} (1+p+\dots+$

¹Demostración basada en el blog de Terence Tao(1)

$p^{v_p(n)}$), esto nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi(n)\sigma_1(n) &= \prod_{p|n} (1 + p + \dots + p^{v_p(n)}) p^{-1} (p-1) \\
&= n \prod_{p|n} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p-1} p^{-1} (p-1) \\
&= n \prod_{p|n} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p} \\
&\leq n \prod_{p|n} p^{v_p(n)} \\
&\leq n^2
\end{aligned}$$

Por lo que $B = 1$. Veremos ahora

$$\begin{aligned}
\phi(n)\sigma_1(n) &= n^2 \prod_{p|n} (1 - p^{-1-v_p(n)}) \\
&\geq n^2 \prod_{p|n} (1 - p^{-2}) \\
&\geq n^2 \prod_p (1 - p^{-2})
\end{aligned}$$

Sea $A = \prod_p (1 - p^{-2})$, por lo que solo falta demostrar que esto es distinto de cero.

$$\begin{aligned}
\log \prod_p (1 - p^{-2}) &= \sum_p \log(1 - p^{-2}) \\
&= \sum_p \log(p^{-2}) + \log(p^2 - 1) \\
&= - \sum_p \log(p^2) - \log(p^2 - 1) \\
&= - \sum_p \log'(\xi) \quad \xi \in [p^2 - 1, p^2] \\
&\geq - \sum_p \frac{1}{p^2 - 1}
\end{aligned}$$

Podemos ver que esta ultima suma tiene que ser convergente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$. Esto implica que lo que teníamos es distinto de cero. Por lo que tenemos lo que queríamos.

Problema 3 (3 pts.). Pruebe que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

Solución problema 3: Usando sumatoria por partes podemos ver que esto se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log n} &= \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{x \log x} - \int_2^x (\lfloor t \rfloor - 1) \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\ &= \frac{x - \{x\} - 1}{x \log x} - \int_2^x (t - \{t\} - 1) \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\ &= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt + \int_2^x (\{t\} + 1) \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt \\ &= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \int_2^x t \left(\frac{1}{t \log t} \right)' dt + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) \\ &= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log t} \Big|_2^x + \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt \\ &= \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) - \frac{1}{\log x} + \log \log x + C' \\ &= \log \log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right) \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos.

Problema 4 (4 pts.). Muestre que

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot x^2 + O(x \log x)$$

Solución problema 4: Primero demostraremos un pequeño lema

Lema 1 ($\sum_{a>x} \frac{1}{a^2} = O(x^{-1})$). Podemos usar el test de comparación de la integral

$$\begin{aligned} \sum_{a>x} \frac{1}{a^2} &= \sum_{n=\lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq \int_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &\leq -\frac{1}{t} \Big|_{\lfloor x \rfloor}^{\infty} \\ &\leq \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \end{aligned}$$

Con esto tenemos lo pedido.

Ahora, comenzamos reescribiendo la suma

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \phi(n) &= \sum_{n \leq x} (\mu * I_1)(n) \\ &= \sum_{n \leq x} \sum_{ab=n} \mu(a)b \\ &= \sum_{a \leq x} \sum_{1 \leq b \leq \frac{x}{a}} \mu(a)b \\ &= \sum_{a \leq x} \mu(a) \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor^2 + \lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{2} \end{aligned}$$

Se sabe que $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \phi(n) &= \sum_{a \leq x} \mu(a) \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + O(1)\frac{x}{a} + O(1)}{2} \\ &= \left(\sum_{a \leq x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x) \sum_{a \leq x} \frac{\mu(a)}{a} + O(1) \sum_{a \leq x} \mu(a) \end{aligned}$$

También se sabe que $\mu(n) = O(1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \phi(n) &= \left(\sum_{a \leq x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x) \sum_{a \leq x} \frac{1}{a} + O(x) \\
&= \left(\sum_{a \leq x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x \log x) \\
&= \left(\sum_{a \in \mathbb{N}} \frac{\mu(a)}{a^2} - \sum_{a > x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x \log x) \\
&= \left(\frac{1}{\zeta(2)} - \sum_{a > x} \frac{\mu(a)}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} + O(x \log x) \\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log x) - \frac{x^2}{2} \sum_{a > x} \frac{\mu(a)}{a^2} \\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log x) - O(x^2) \sum_{x > a} \frac{1}{a^2} \\
&= \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log x) - O(x) \\
&= \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot x^2 + O(x \log x)
\end{aligned}$$

■

Problema 5 (3 pts.). Pruebe que

$$\sum_{d^2 | n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{si no lo es} \end{cases}$$

Solución problema 5: Tomamos el caso donde n no es libre de cuadrados, y sean p_1, \dots, p_k primos tal que $p_i^2 | n$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{d^2 | n} \mu(d) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i 1^{k-i} \\
&= (1 - 1)^k \\
&= 0
\end{aligned}$$

En el caso donde n es libre de cuadrados

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

Que es lo que queríamos demostrar

■

Problema 6 (4 pts.). Defina la función contadora de libres de cuadrados:

$$Q(x) := \#\{n \leq x : n \text{ es libre de cuadrados}\}.$$

Demuestre que

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot x + O(x^{1/2})$$

Solución problema 6: Usando la función definida en el problema 5, podemos escribir Q de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d^2|n} \mu(d) \\ &= \sum_{d \leq x} \sum_{n \leq x/d^2} \mu(d) \\ &= \sum_{d \leq x} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} x - \sum_{d \leq x} \mu(d) \left\{ \frac{x}{d^2} \right\} \end{aligned}$$

Para desarrollar la segunda parte de la expresión notamos que para $d \leq \sqrt{x}$ pasa que

$\left\{\frac{x}{d^2}\right\} \leq 1$, y si $d > \sqrt{x}$ tenemos que $\left\{\frac{x}{d^2}\right\} = \frac{x}{d^2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{d \leq x} \mu(d) \left\{\frac{x}{d^2}\right\} &= \sum_{d \leq \sqrt{x}} O(1) + \sum_{\sqrt{x} < d \leq x} O(1) \frac{x}{d^2} \\
&= O(\sqrt{x}) + O(x) \left(\sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} - \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} \right) \\
&= O(\sqrt{x}) + O(x) (\zeta(2) - O(x^{-1}) - \zeta(2) + O(x^{-1/2})) \\
&= O(\sqrt{x}) + O(1) + O(\sqrt{x}) \\
&= O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Esto nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d > x} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) + O(\sqrt{x}) \\
&= x \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O(1) \sum_{d > x} \frac{1}{d^2} \right) + O(\sqrt{x}) \\
&= \frac{1}{\zeta(2)} x + O(\sqrt{x}) + x \cdot O(x^{-1}) \\
&= \frac{1}{\zeta(2)} x + O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Que es lo que buscábamos. ■

2. Agradecimientos

- | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------|
| ■ Felipe Guzmán | ■ Agustín Oyarce | ■ Gabriel Ramirez |
| ■ Maximiliano Norbu | ■ Francisco Monardes | |
| ■ Fernanda Cares | ■ Matías Bruna | |

Referencias

Tao. Terence tao's blog, 2008.