Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2018

Tarea 1

Teoría de Números - MAT 2225

Fecha de Entrega: 2018/08/13

Integrantes del grupo:
Nicholas Mc-Donnell, Camilo Sánchez,
Javier Reyes

1. Problemas

Problema 1 (2 pts. c/u)**.** Demuestre las siguientes identidades (demostrando también convergencia en el dominio indicado):

(i) Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces $D(s, \sigma_k) = \zeta(s)\zeta(s-k)$ para $s > \text{máx}\{1, k+1\}$

(ii) $D(s, \phi) = \zeta(s-1)/\zeta(s)$ para $s > 2$

(iii) $D(s, \sigma_0^2) = \zeta(s)^4/\zeta(2s)$ para $s > 1$

Solución problema 1:

(i) Recordamos que $D(s, f * g) = D(s, f)D(s, g)$ y que $\sigma_k = I_0 * I_k$

$$\begin{aligned}
\therefore D(s, \sigma_k) &= D(s, I_0)D(s, I_k) \\
&= \zeta(s) \sum_n \frac{n^k}{n^s} \\
&= \zeta(s) \sum_n \frac{1}{n^{s-k}} \\
&= \zeta(s)\zeta(s-k)
\end{aligned}$$

Notamos que esto converge para $s > \text{máx}\{1, k+1\}$

(II) Ahora, usando que $\phi = \mu * I_1$

$$\begin{aligned} D(s,\phi) &= D(s,\mu)D(s,I_1) \\ &= \frac{1}{\zeta(s)}\zeta(s-1) \\ &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

Lo cual converge para $s > 2$

(III) Como sabemos que σ_0 es multiplicativa σ_0^2 también lo es, lo que nos deja expresar $D(s,\sigma_0^2)$ de la siguiente forma

$$D(s,\sigma_0^2) = \prod_p \left(1 + \frac{\sigma_0^2(p)}{p^s} + \frac{\sigma_0^2(p)}{p^{2s}} + ...\right)$$

Recordamos que σ_0 cuenta divisores, luego

$$\begin{aligned} D(s,\sigma_0^2) &= \prod_p \left(\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{p^{s(n-1)}}\right) \\ &= \prod_p \frac{p^{2s}(p^s+1)}{(p^s-1)^3} \end{aligned}$$

Esta ultima igualdad aparece al analizar la siguiente identidad algebraica[1]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a^{k-1}} = \frac{a^{1-n}(a^{n+1} + a^{n+2} - a^2n^2 - 2a^2n - a^2 + 2an^2 + 2an - a - n^2)}{(a-1)^3}$$

Luego desarrollando esto de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D(s,\sigma_0^2) &= \prod_p \frac{p^{2s}(p^s+1)}{(p^s-1)^3} \\ &= \prod_p \frac{p^{2s}(p^{2s}-1)}{(p^s-1)^4} \\ &= \prod_p \frac{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4} \\ &= \prod_p \frac{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-4}}{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}} \\ &= \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)} \end{aligned}$$

Como $\zeta(s)$ converge para $s>1$, lo anterior también lo hace.

$\blacksquare$

Problema 2 (3 pts.)**.** Demuestre que cuando $s \to 1^+$, la diferencia

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right|$$

se mantiene acotada.

Solución problema 2: Para $s>1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s} dt \\ &= \int_1^\infty O\left(\frac{1}{t^{2s}}\right) dt \\ &= O\left(\frac{1}{2s-1}\right) \end{aligned}$$

Es decir, para todo $s>1$, $\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| \leq A \quad \frac{1}{2s-1} \leq A$, probando que tal diferencia está siempre acotada.

■

Problema 3 (2 pts.). Sea f una función aritmética que cumple

(I) $f(n) \geq 0$ para todo n

(II) Existen $r \in \mathbb{N}$ y cierta función continua $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ de manera que para todo $s > 1$ se cumple $D(s, f) = F(s)\zeta(s)^r$

Demuestre que

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} \ll (\log x)^r$$

Solución problema 3:

■

Problema 4 (2 pts. c/u). Calcule σ_c y σ_a para las series de Dirichlet de las siguientes funciones aritméticas f:

(I) $f(n) = (\log n)^2 \phi(n)$

(II) $f(n) = 2^{-n}$

(III) $f(n) = i^n$ donde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

Solución problema 4:

(I)

(II)

(III)

■

Problema 5 (3 pts.). Demuestre que para cada real $r \in [0, 1]$ existe alguna función aritmética f que cumple la relación

$$\sigma_a(f) = \sigma_c(f) + r$$

entre las abscisas de convergencia y de convergencia absoluta de $D(s, f)$.

Solución problema 5: Es suficiente encontrar una función f que cumpla las siguientes dos propiedades

- $|f(n)| = n^r$.
- $|S_f(n)| = n$.

La primera nos asegura que $S_{|f|}(n) \sim n^{r+1}$, es decir $\sigma_a(f) = 1 + r$, mientras que la segunda da $\sigma_c(f) = 1$, que satisface la relación requerida.

Sea $f(1) = 1$, y para construir f por inducción, supongamos que $|S_f(n-1)| = n-1$ y $|f(n-1)| = (n-1)^r$. Sea S la circunferencia de centro $S_f(n-1)$ y radio n^r. Como $r \in [0,1]$, entonces $1 \leq n^r \leq n$. Esto nos dice que

$$\max_{z\in S}\{|z|\} \geq |S_f(n-1)| + 1 = n \quad \text{y}$$

$$\min_{z\in S} \leq \min(||S_f(n-1)| - n|\,, ||S_f(n-1)| - 1|) = n-2$$

Dado que esta circunferencia tiene una parte de norma mayor o igual a n, y otra con norma menor a n, entonces existe al menos algun punto $d \in S$ tal que $|d| = n$. Definimos entonces $f(n) = d - S_f(n-1)$. Por construcción, $|f(n)| = n^r$ y $S_f(n) = f(n) + S_f(n-1) = d$ tiene norma n.

Esta construcción otorga una f que satisface ambas propiedades arriba.

■

2. Agradecimientos

- Felipe Guzmán
- Gabriel Ramirez
- Duvan Henao
- Maximiliano Norbu
- Daniel Gajardo
- Fernanda Cares
- Fernando Figueroa
- Hector Pasten

Referencias

[1] Wolfram alpha.