Parte 1

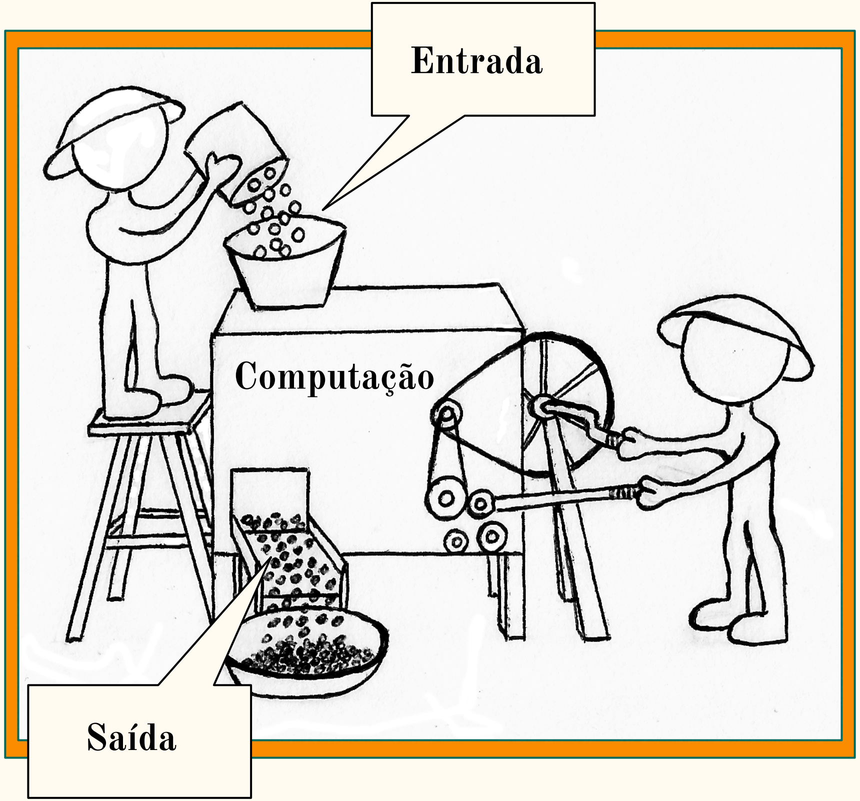
Introdução,
Erros e Aproximações

CI1164 - Introdução à Computação Científica

Profs. Armando Delgado e Guilherme Derenievicz
Departamento de Informática - UFPR

O que é Computação Científica?

O que é Computação Científica?



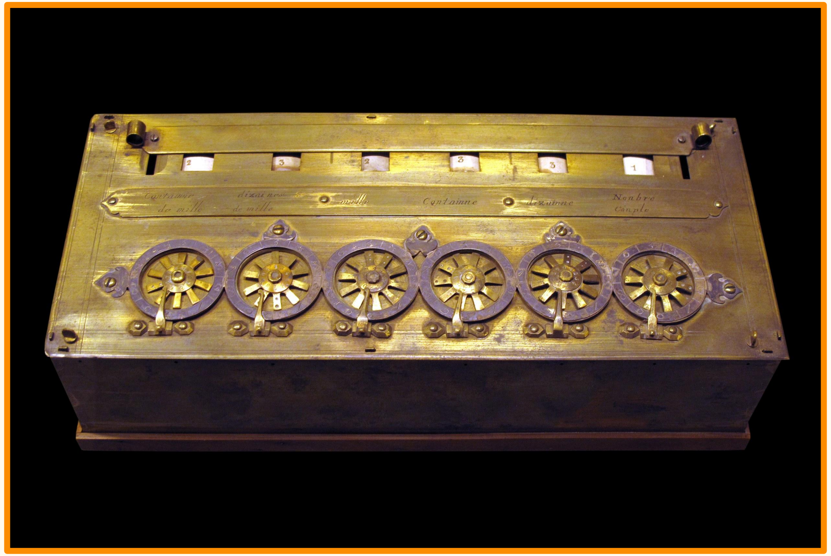
- Computar
- Calcular
- Contar
- Construir
- Processar

O que é Computação Científica?

Ábaco (5500 a.C.): antigo instrumento de **cálculo** em sistema decimal.

O que é Computação Científica?

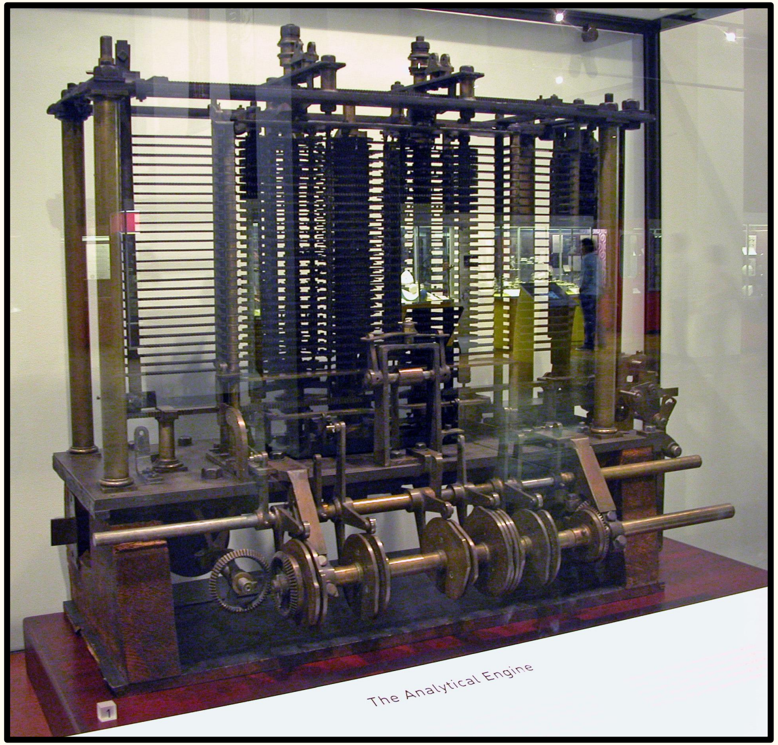
Calculadora de Pascal (1642): engenhoso sistema de engrenagens que fazia <u>**contas de adição e subtração**</u>.



Créditos: Rama, disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pascaline-CnAM_823-1-IMG_1506-black.jpg

O que é Computação Científica?

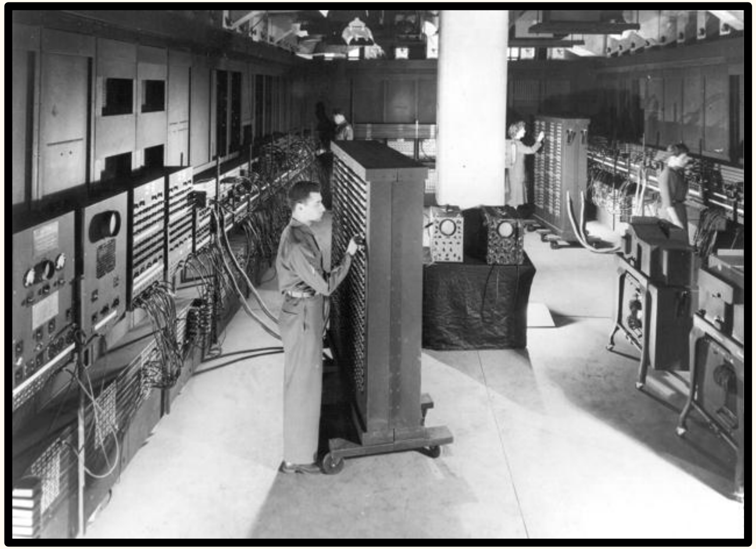
Máquina Analítica de Babbage (1834): o primeiro computador mecânico, possuía uma memória e uma unidade lógica aritmética capaz de **efetuar as 4 operações básicas.**

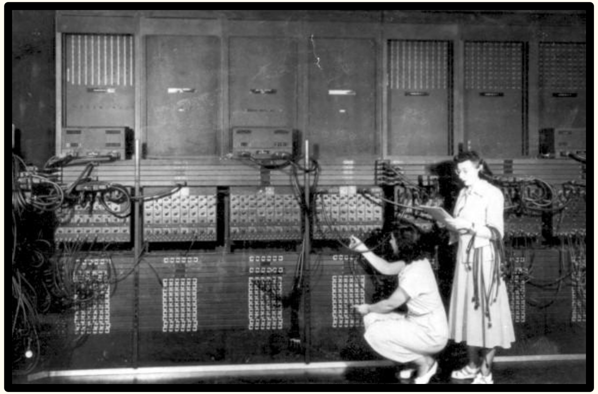


Créditos: Bruno Barral, disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AnalyticalMachine_Babbage_London.jpg

O que é Computação Científica?

ENIAC (1946): o primeiro computador eletrônico. Para programar o ENIAC era preciso conectar manualmente centenas de fios em tomadas corretas. Para a aplicação de **cálculos de balística**, era necessário resolver, manualmente, uma série de equações diferenciais.

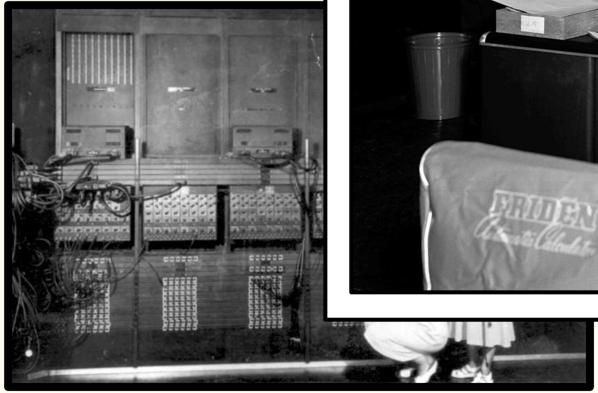




Créditos: thekirbster, disponível em https://www.flickr.com/photos/kirbyurner/3660521353

O que é Computação Científica?

ENIAC (1946): o
eletrônico. Para p
conectar manualm
tomadas corretas.
de balística, era n
manualmente, um
diferenciais.



/kirbyurner/3660521353

O que é Computação Científica?

Coleção de ferramentas, técnicas e teorias necessárias para resolver em um computador modelos matemáticos de problemas em Ciências e Engenharia.

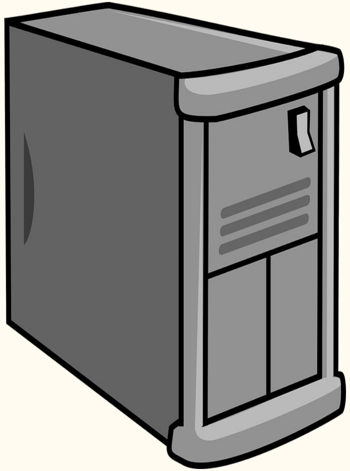
Baseia-se na Matemática e na Ciência da Computação para desenvolver a melhor maneira de usar sistemas computacionais para resolver problemas em Ciências e Engenharia.

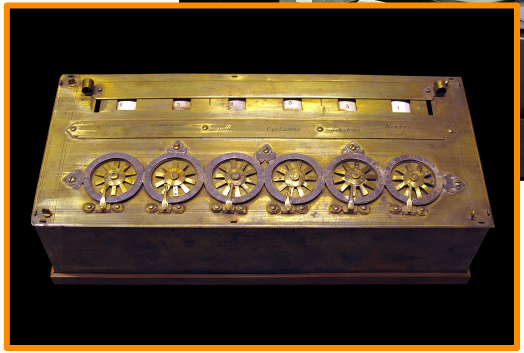
O que é Computação Científica?

Coleção de ferramentas, técnicas e teorias necessárias para resolver em um computador **modelos matemáticos** de problemas em Ciências e Engenharia.

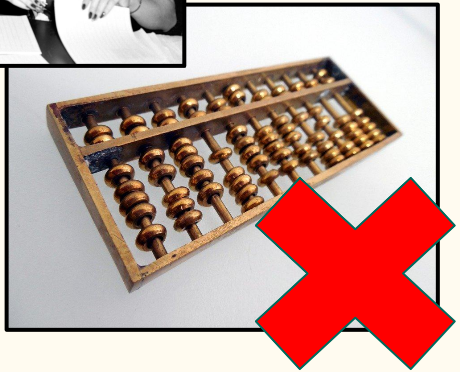
Baseia-se na Matemática e na Ciência da Computação para **desenvolver a melhor maneira** de usar sistemas computacionais para resolver problemas em Ciências e Engenharia.

O que é Computação Científica?



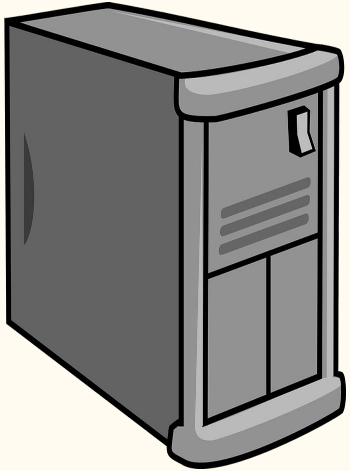


?



O que é Computação Científica?

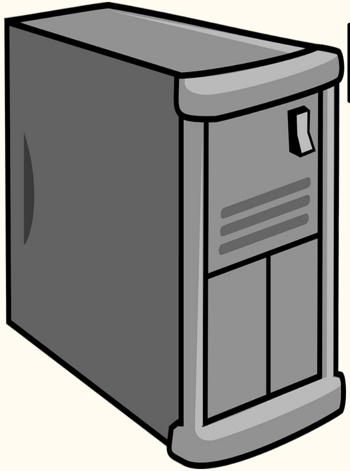
Representação Numérica



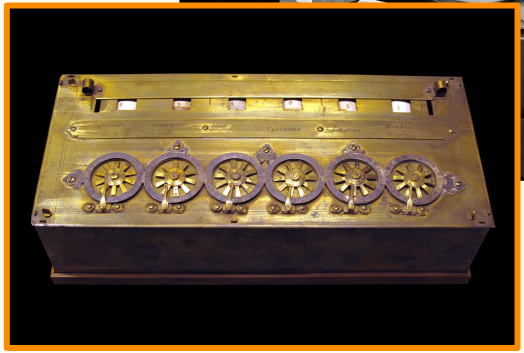
?

O que é Computação Científica?

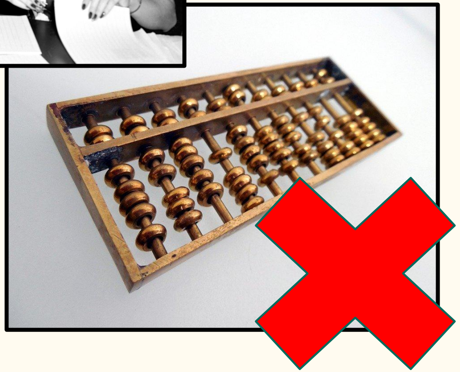
Representação Numérica



Gerenciamento de Memória

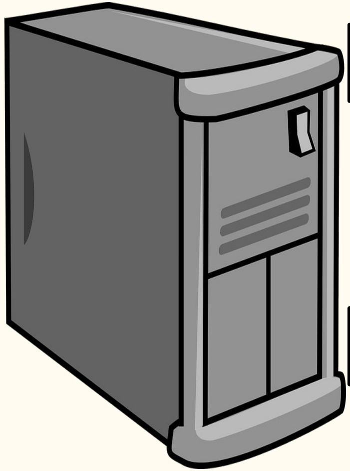


?



O que é Computação Científica?

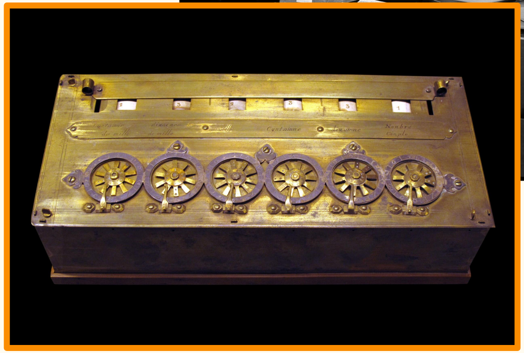
Representação Numérica

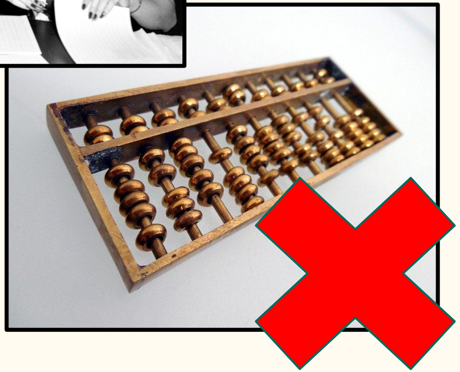


Gerenciamento de Memória

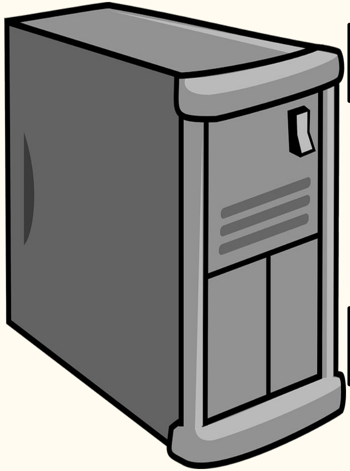
Sistema Operacional

?





O que é Computação Científica?

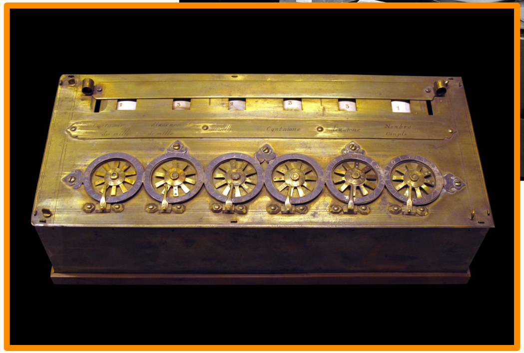


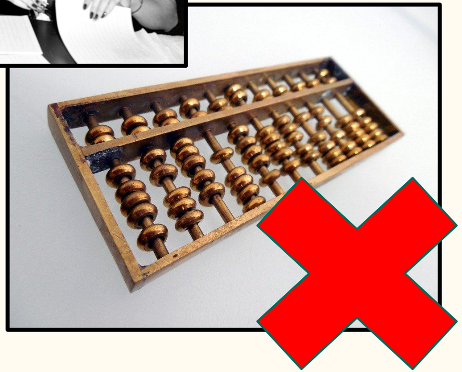
Representação Numérica

Gerenciamento de Memória

Sistema Operacional

Linguagem de Programação

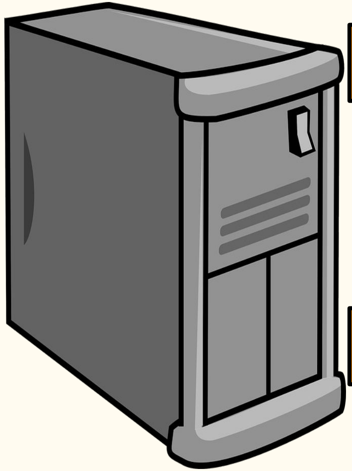




?

O que é Computação Científica?

Representação Numérica



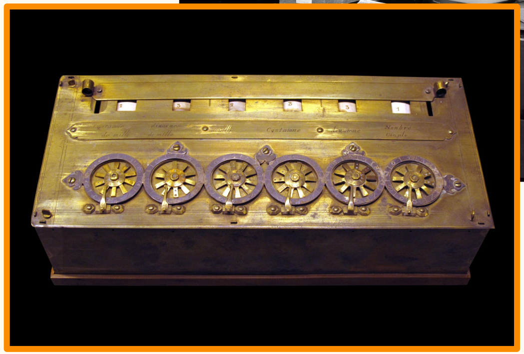
Gerenciamento de Memória

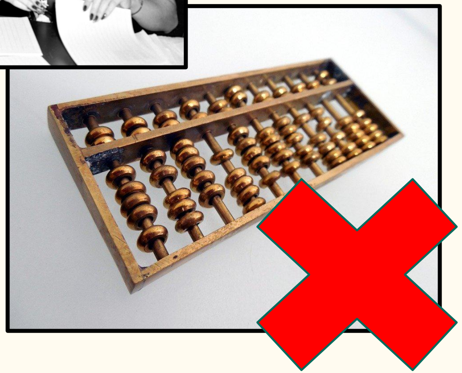
Sistema Operacional

Linguagem de Programação

Algoritmo

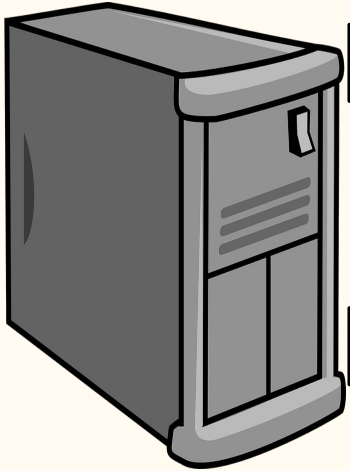
?





O que é Computação Científica?

Representação Numérica

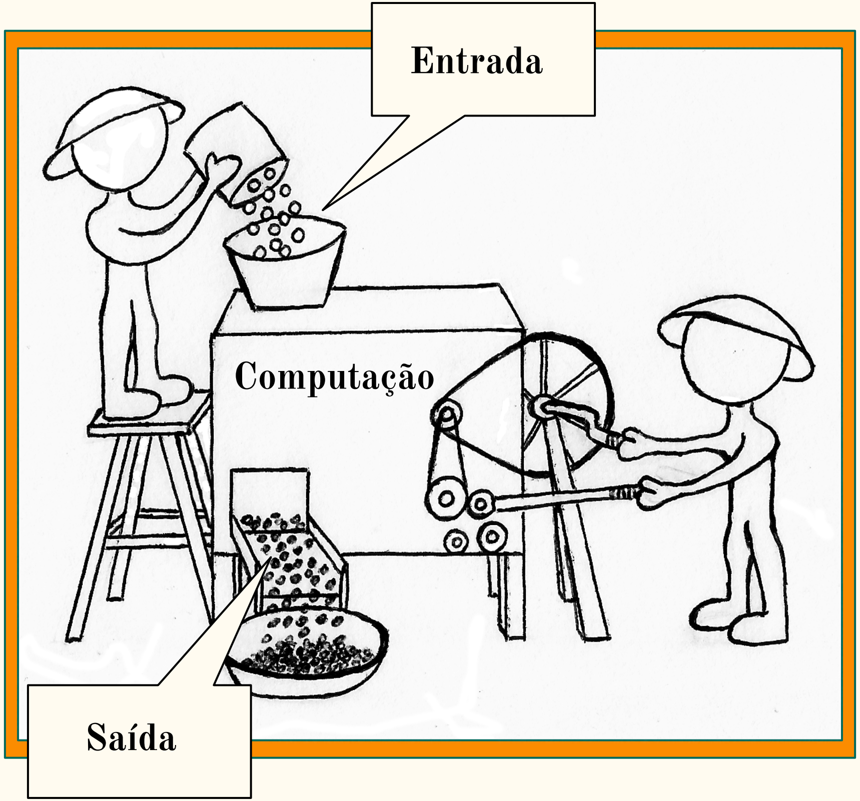


Gerenciamento de Memória

Sistema Operacional

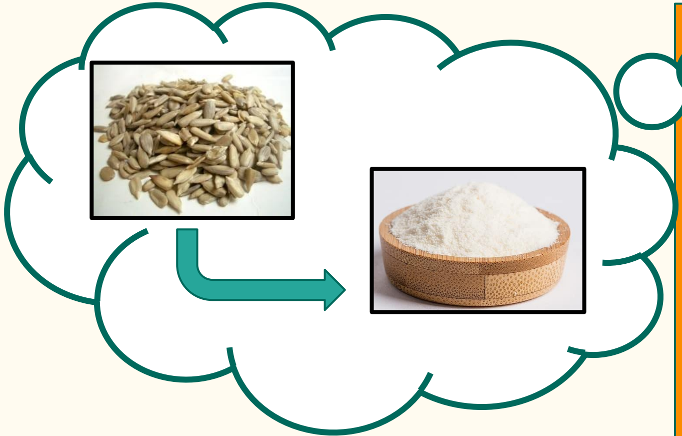
Linguagem de Programação

Algoritmo

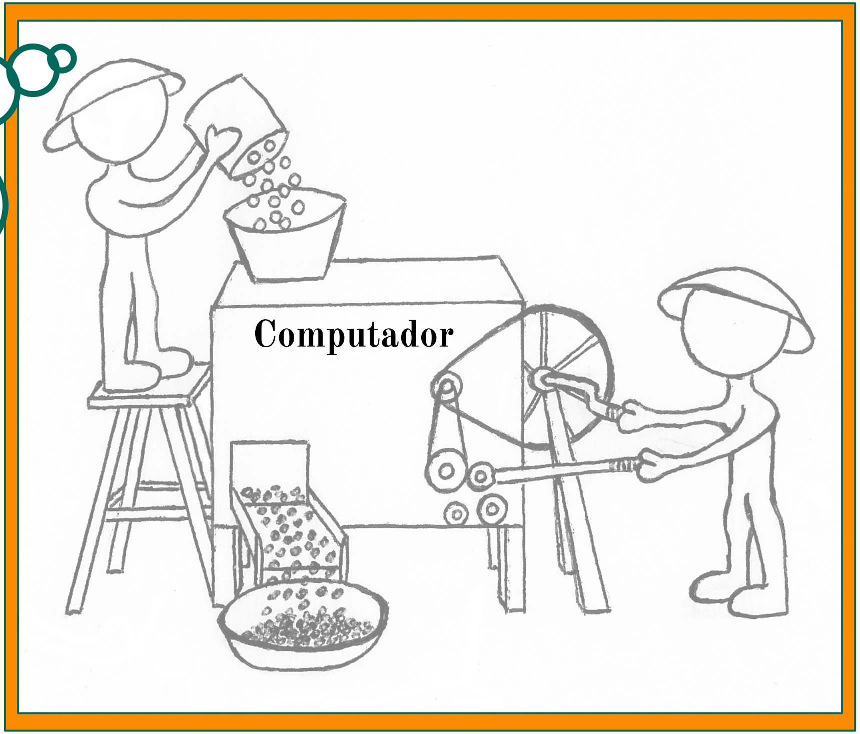


Como resolver um problema?

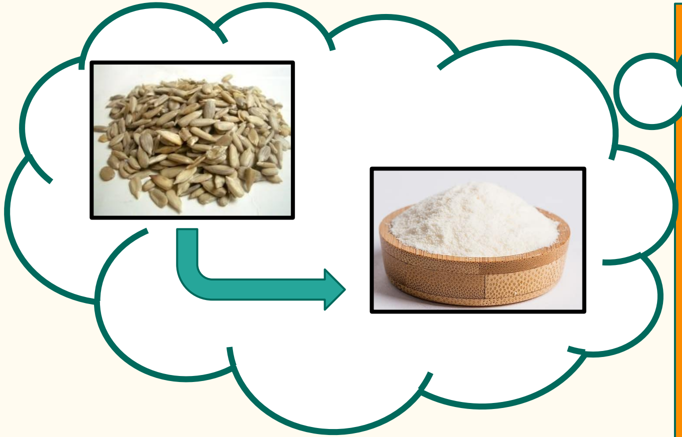
Como resolver um problema?



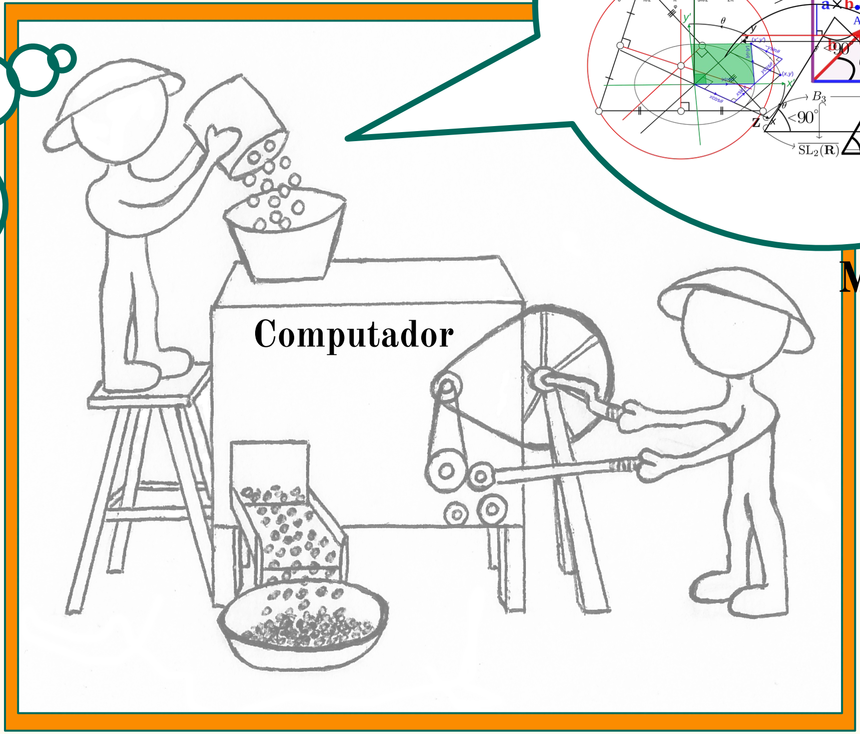
Descrição do Problema

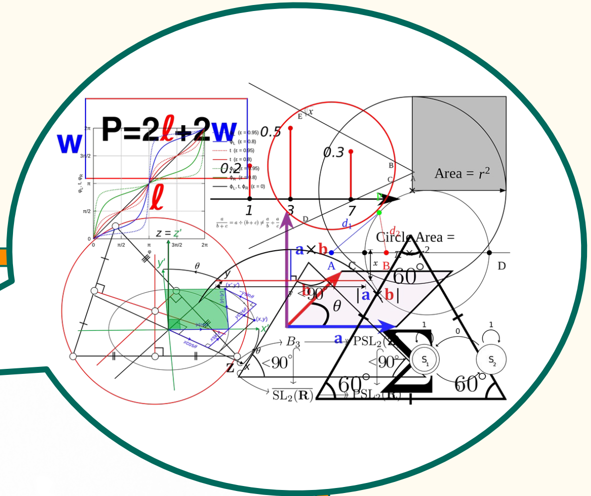


Como resolver um problema?



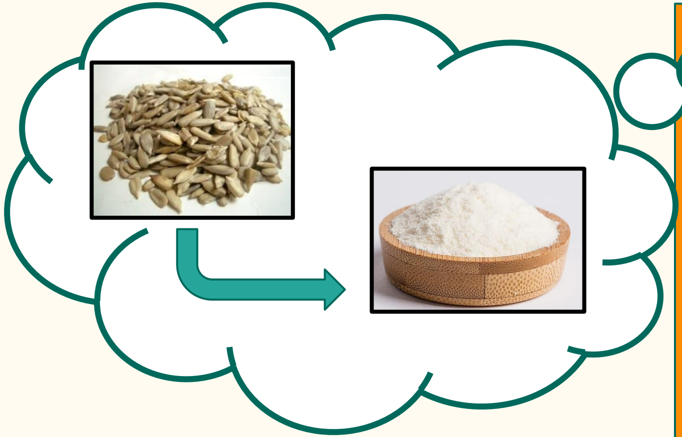
Descrição do Problema



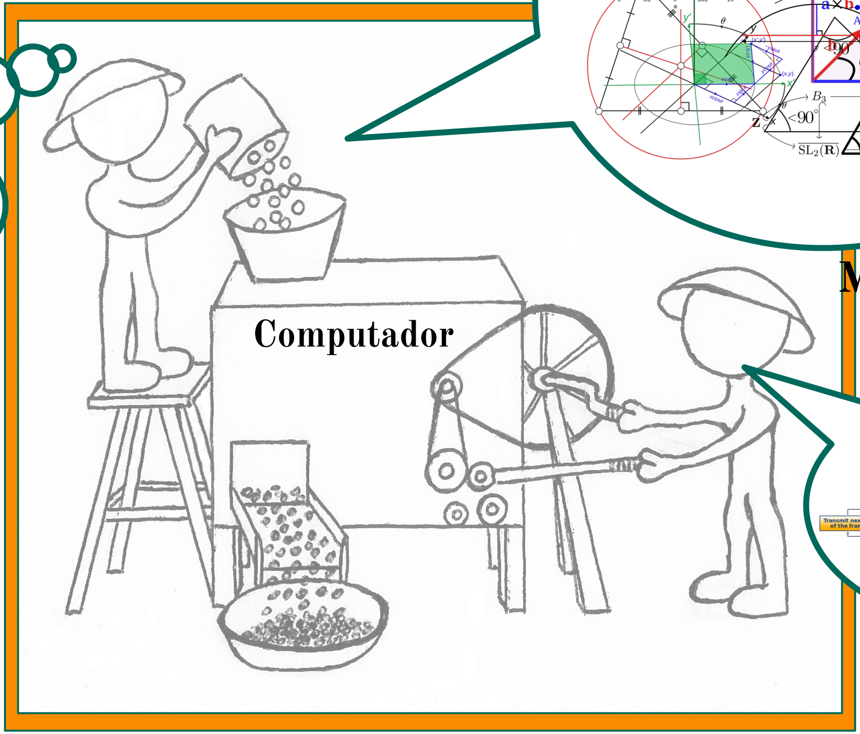


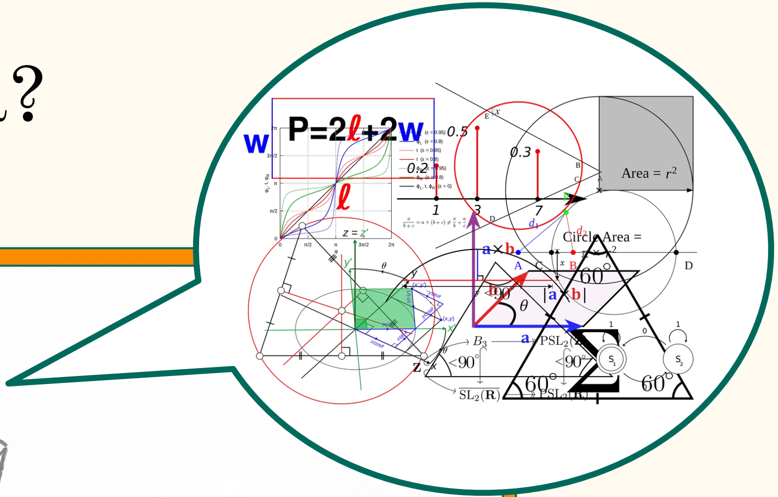
Modelo Matemático

Como resolver um problema?

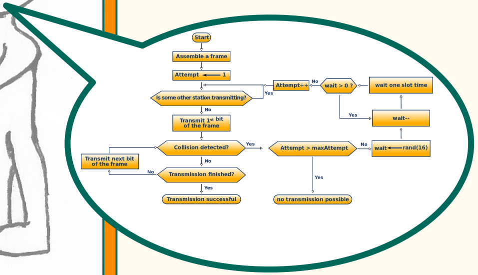


Descrição do Problema



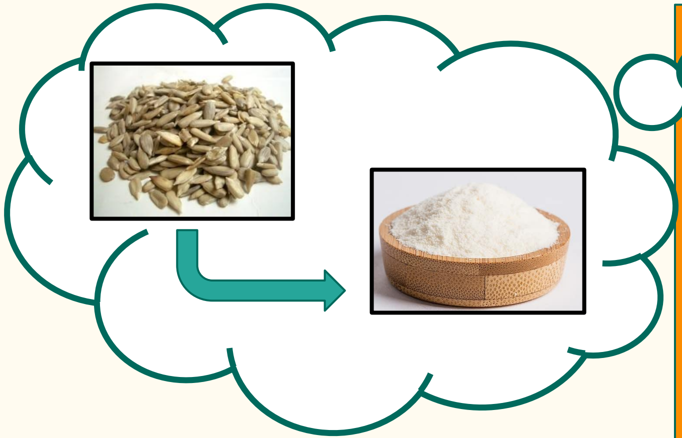


Modelo Matemático

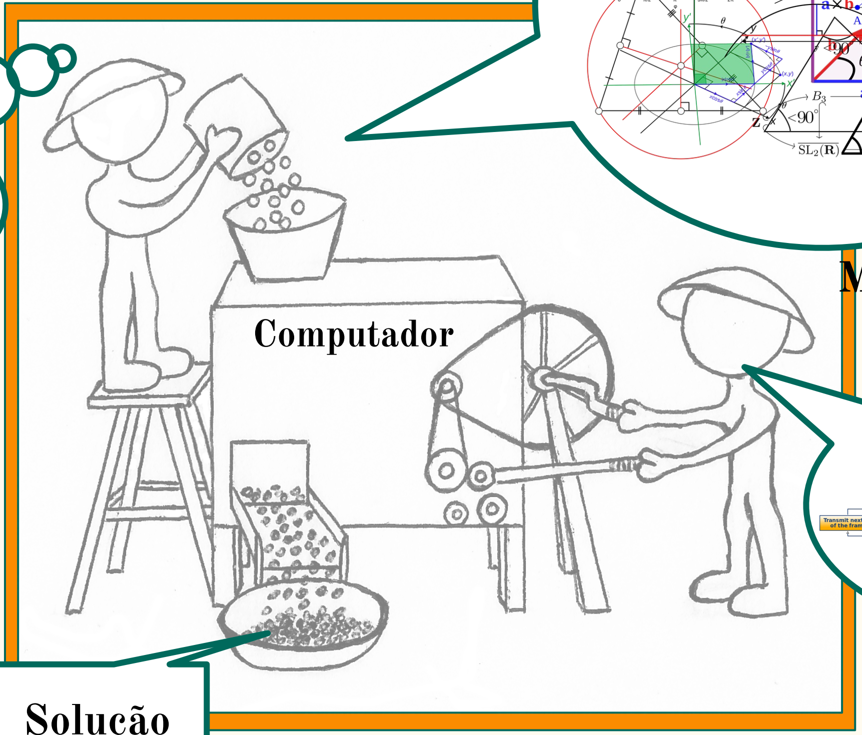


Método Numérico

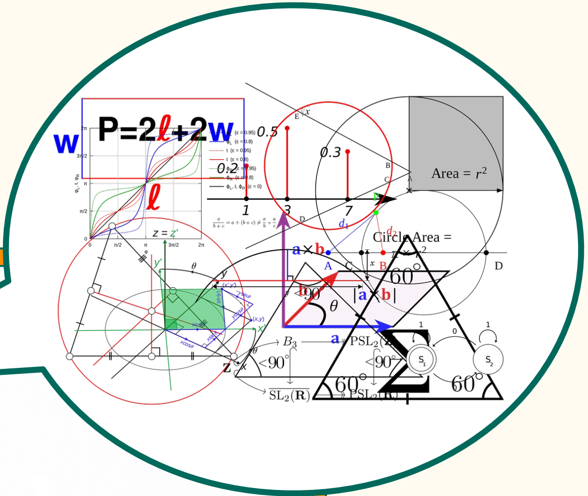
Como resolver um problema?



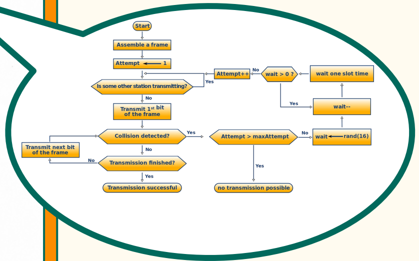
Descrição do Problema



Solução

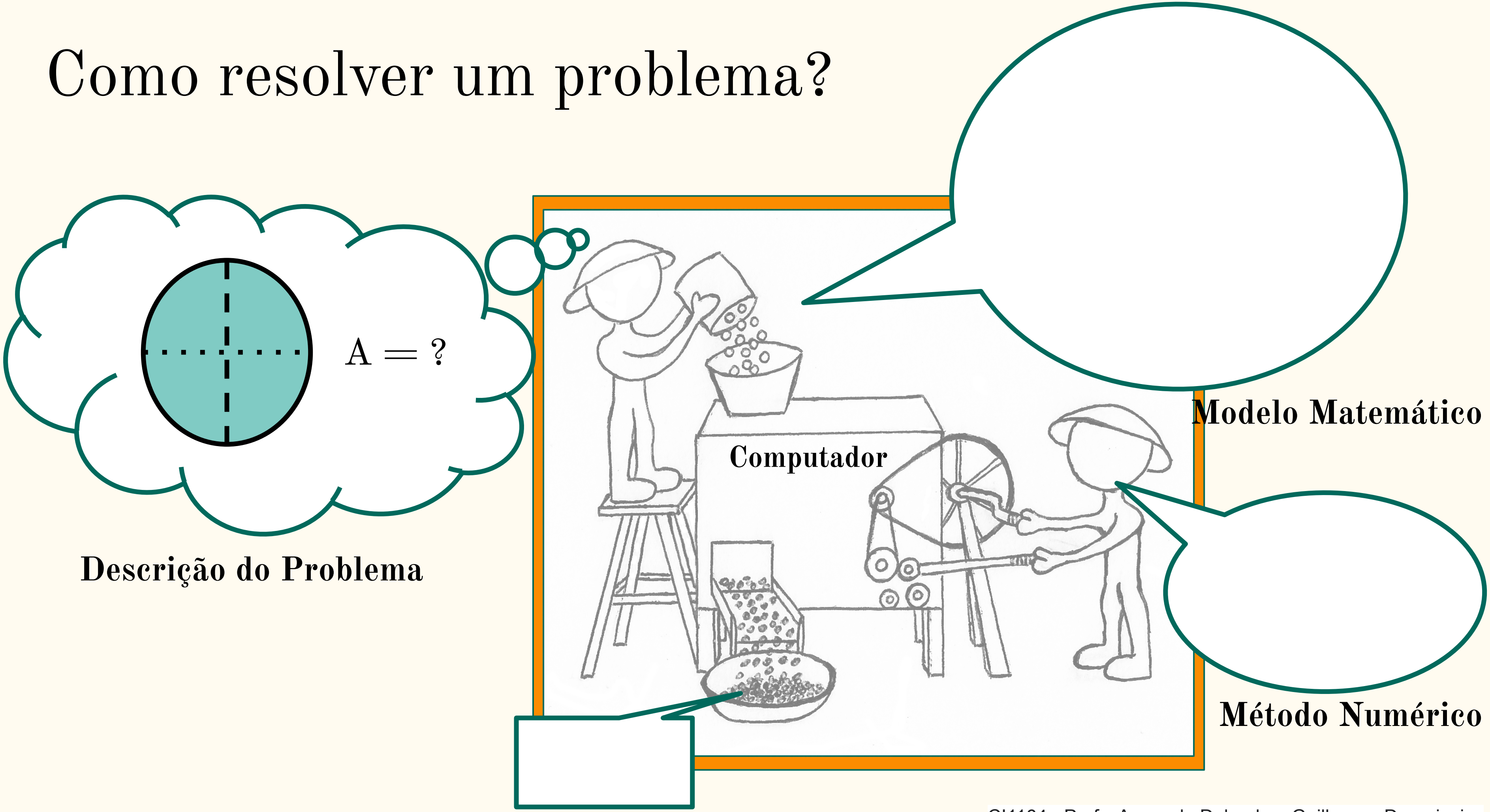


Modelo Matemático

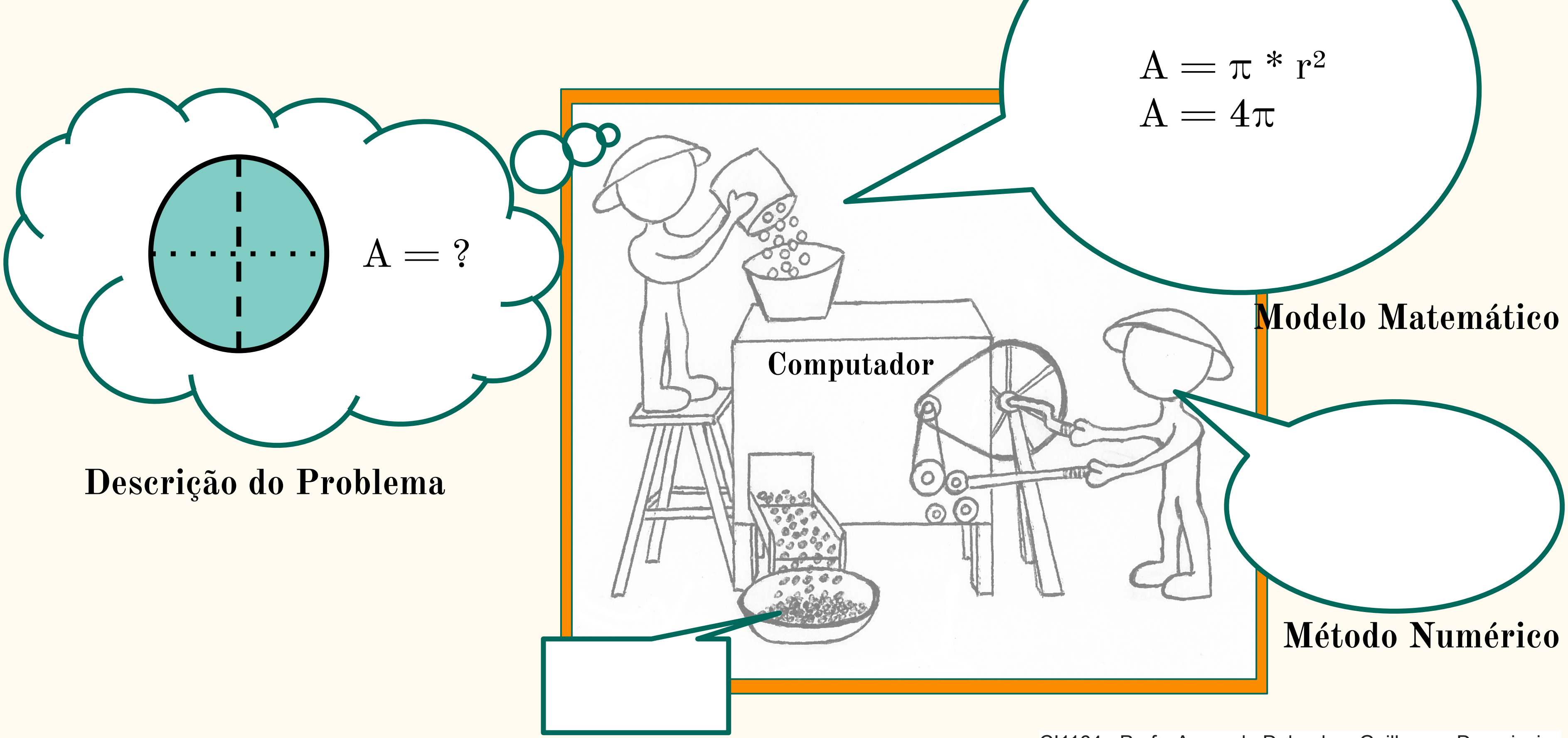


Método Numérico

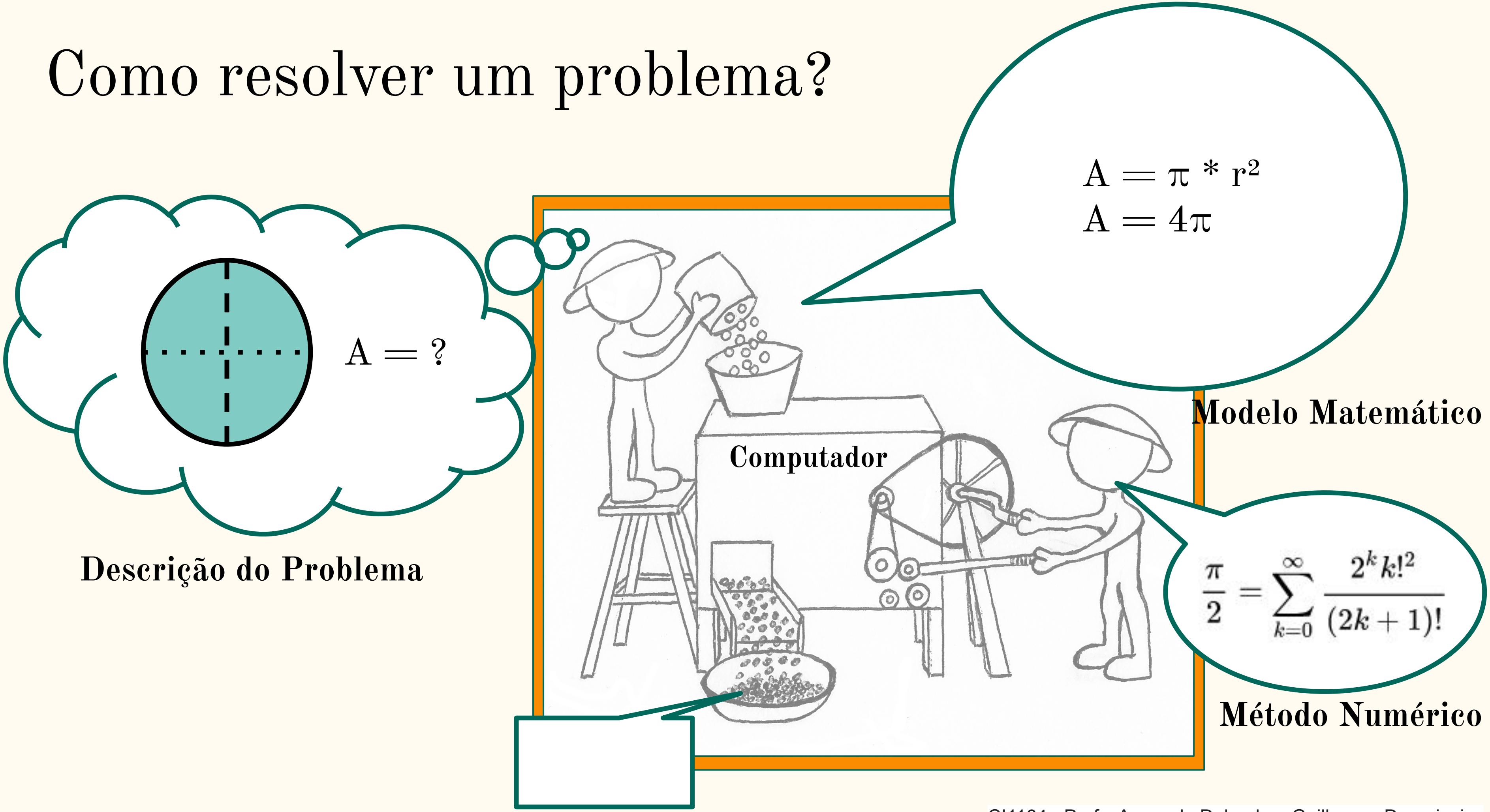
Como resolver um problema?



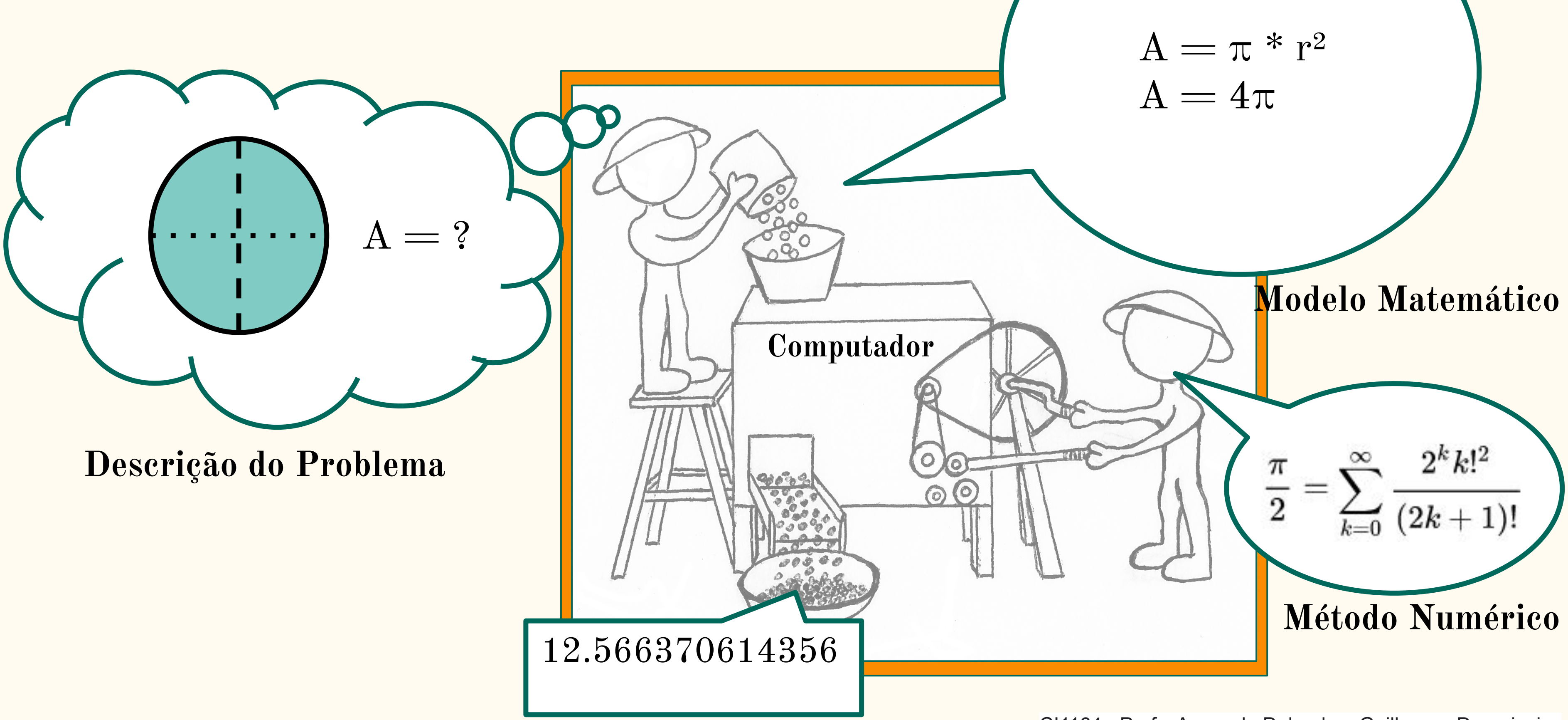
Como resolver um problema?



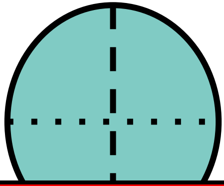
Como resolver um problema?



Como resolver um problema?



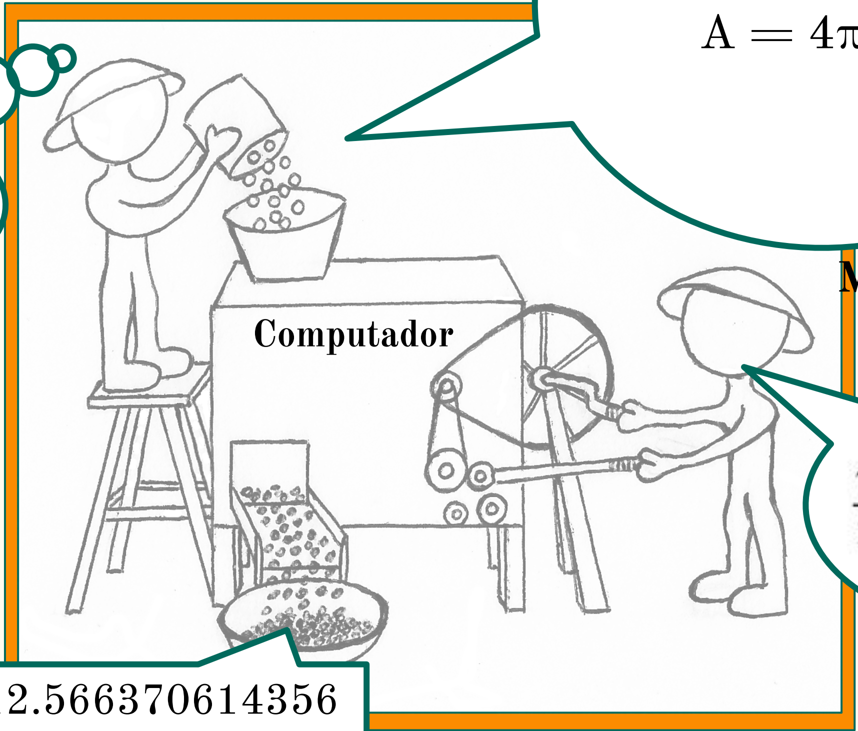
Como resolver um problema?



$A = ?$

A medida de $r = 2$ é exata?
Está aproximada o suficiente?

Descrição do Problema



$A = \pi * r^2$
$A = 4\pi$

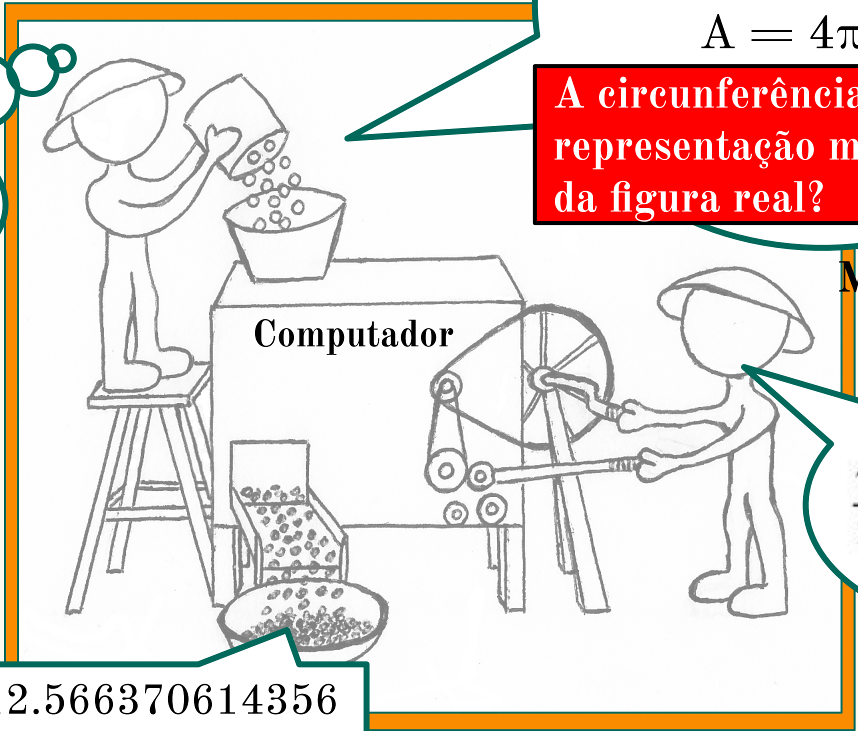
Modelo Matemático

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$

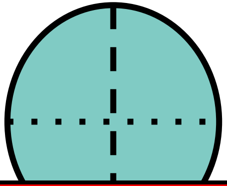
Método Numérico

12.566370614356

Como resolver um problema?



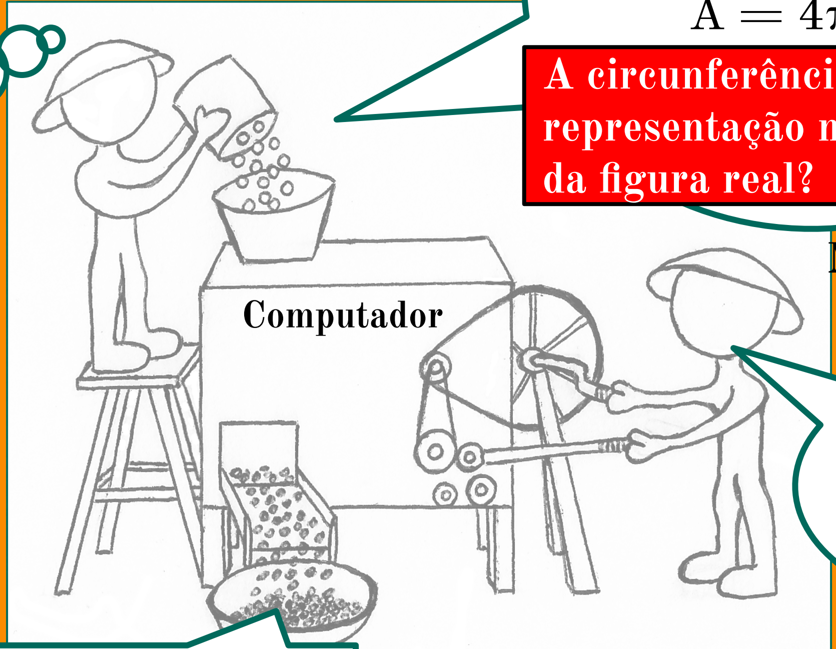
Como resolver um problema?



$A = ?$

A medida de $r = 2$ é exata?
Está aproximada o suficiente?

Descrição do Problema



$A = \pi * r^2$

$A = 4\pi$

A circunferência é uma boa representação matemática da figura real?

Modelo Matemático

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$

Método Numérico

12.566370614356

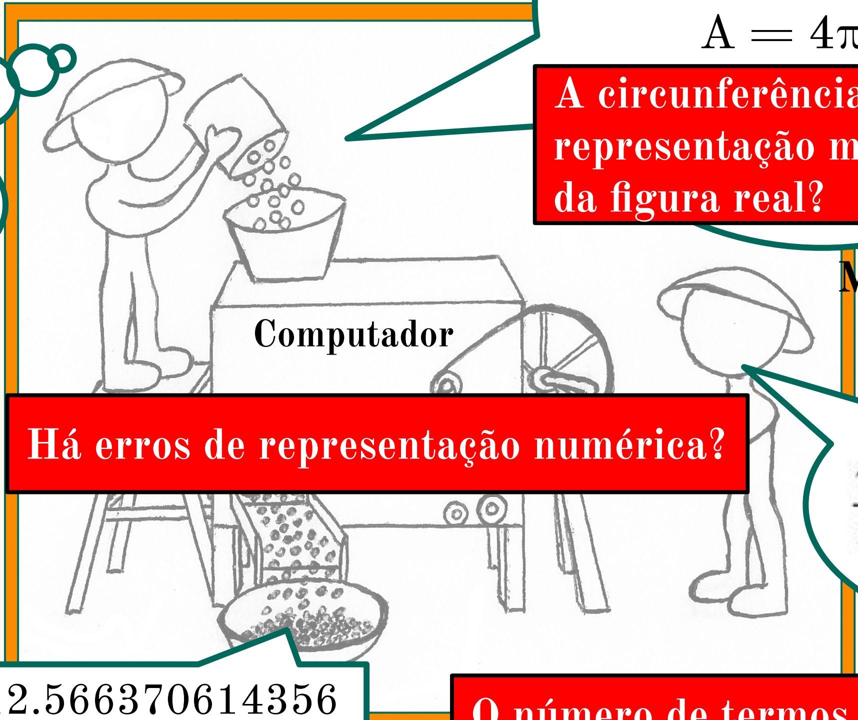
O número de termos considerados é suficiente? O método converge?

Como resolver um problema?

$A = ?$

A medida de $r = 2$ é exata? Está aproximada o suficiente?

Descrição do Problema



$A = \pi * r^2$

$A = 4\pi$

A circunferência é uma boa representação matemática da figura real?

Modelo Matemático

Há erros de representação numérica?

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$

Método Numérico

12.566370614356

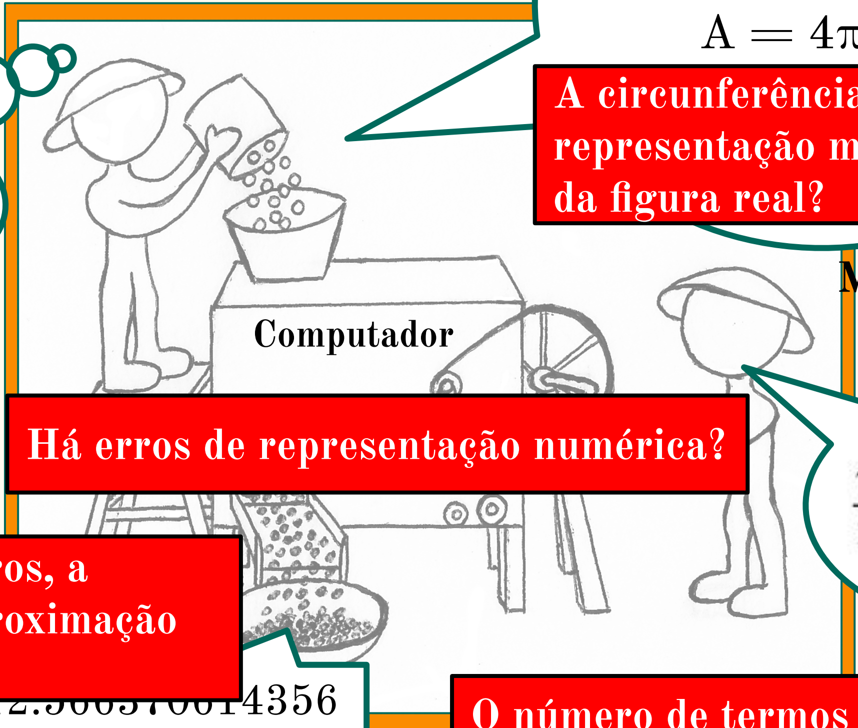
O número de termos considerados é suficiente? O método converge?

Como resolver um problema?

$A = ?$

A medida de $r = 2$ é exata?
Está aproximada o suficiente?

Descrição do Problema



$$A = \pi * r^2$$
$$A = 4\pi$$

A circunferência é uma boa representação matemática da figura real?

Modelo Matemático

Há erros de representação numérica?

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$

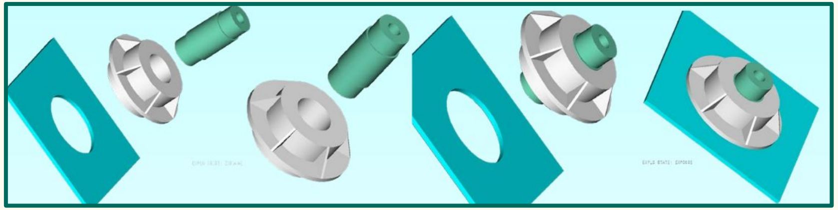
Método Numérico

Considerando todos esses erros, a solução obtida é uma boa aproximação para o problema real?

O número de termos considerados é suficiente? O método converge?

Um exemplo prático

Descrição do Problema:



<u>Passos</u>:

1 - <u>Resfriar</u> o munhão
2 - Encaixar no eixo
3 - Resfriar o eixo
4 - Encaixar na viga

Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

Um exemplo prático

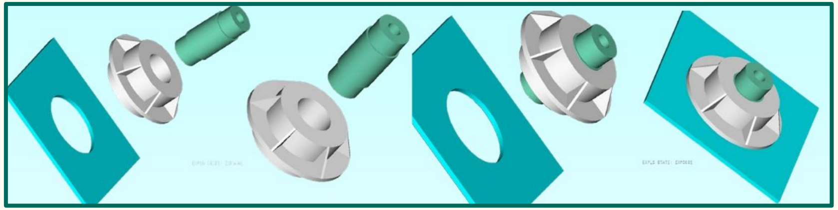
Modelo matemático:

$$\boxed{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$D = 12.363''$$

$$\alpha = 6.47 \times 10^{-6}\, in/in/^{o}\, F$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{o}\, F$$



Passos:
1 - Resfriar o munhão
2 - Encaixar no eixo
3 - Resfriar o eixo
4 - Encaixar na viga

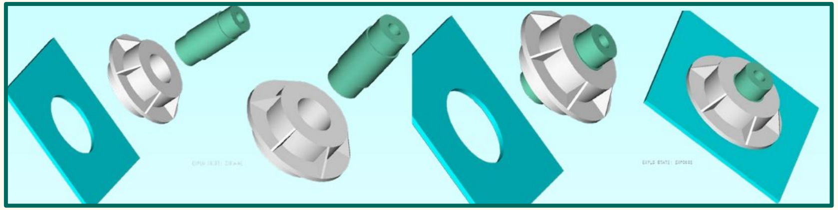
Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

Um exemplo prático

Solução do modelo matemático:

$$\boxed{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$\begin{aligned}\Delta D &= (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188) \\ &= -0.01504''\end{aligned}$$



Passos:
1 - Resfriar o munhão
2 - Encaixar no eixo
3 - Resfriar o eixo
4 - Encaixar na viga

Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

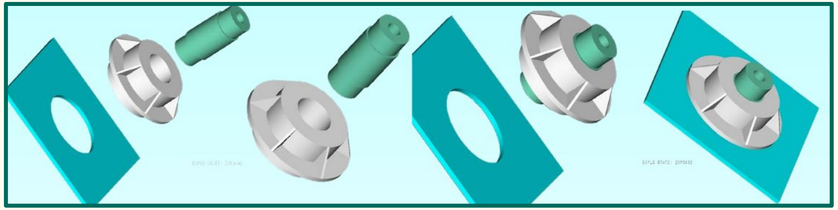
Um exemplo prático

Após o resfriamento, o munhão ficou emperrado no eixo!

Solução do modelo matemático:

$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$

$$\Delta D = (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188) = -0.01504''$$



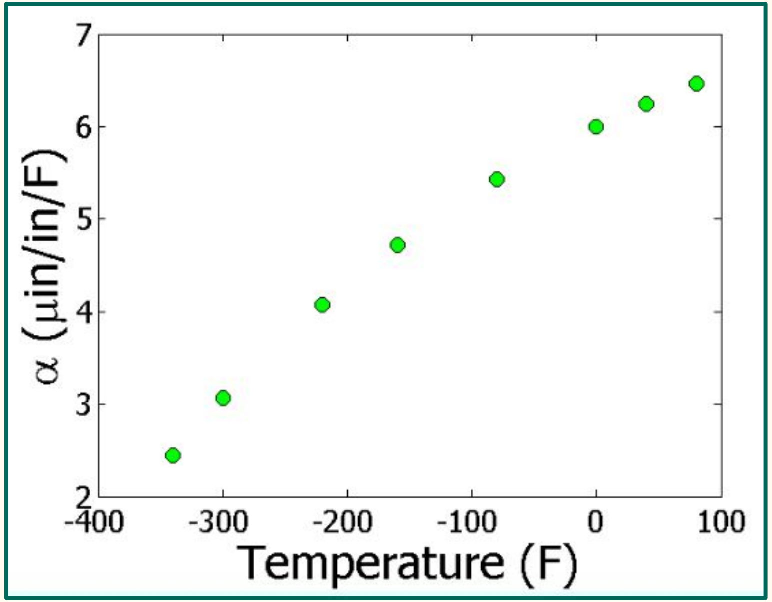
Passos:
1 - Resfriar o munhão
2 - Encaixar no eixo
3 - Resfriar o eixo
4 - Encaixar na viga

Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

Um exemplo prático

Voltando na modelagem matemática:

$$\boxed{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$



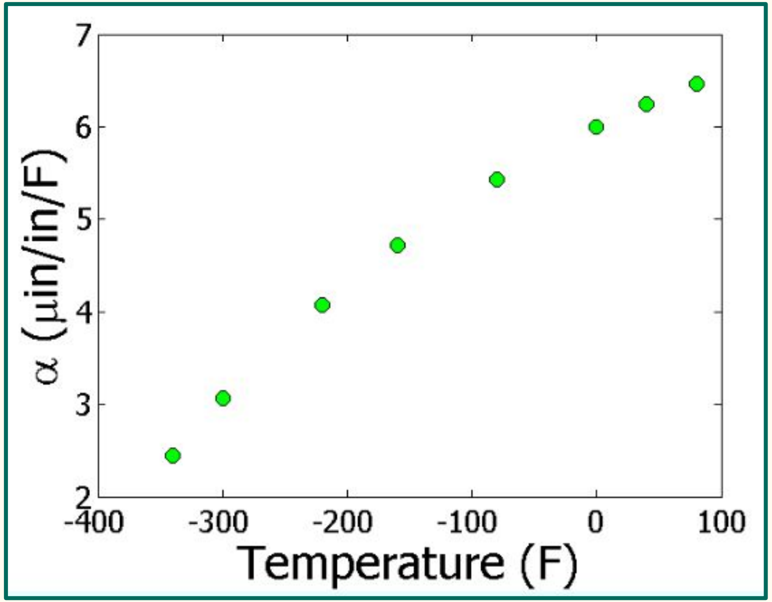
Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

Um exemplo prático

Voltando na modelagem matemática:

$$\cancel{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$



Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

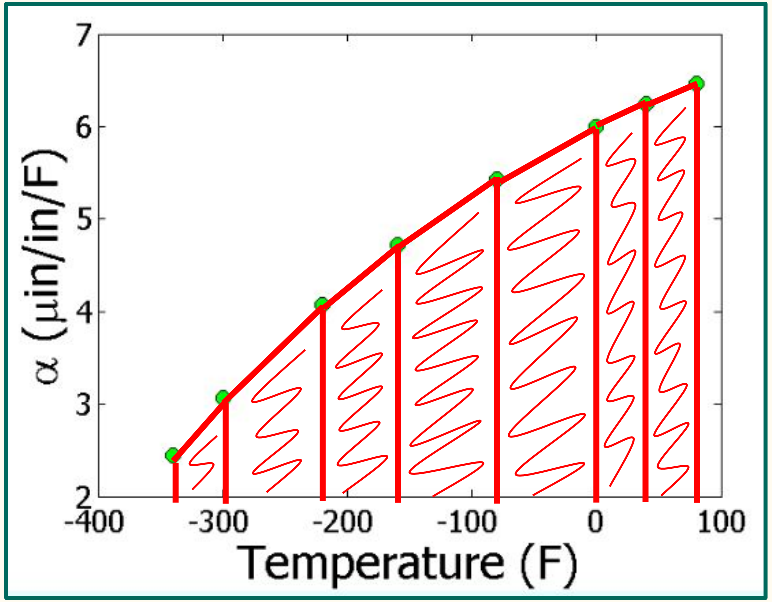
Um exemplo prático

Solução do modelo matemático:

$$\cancel{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

Integração Numérica



Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

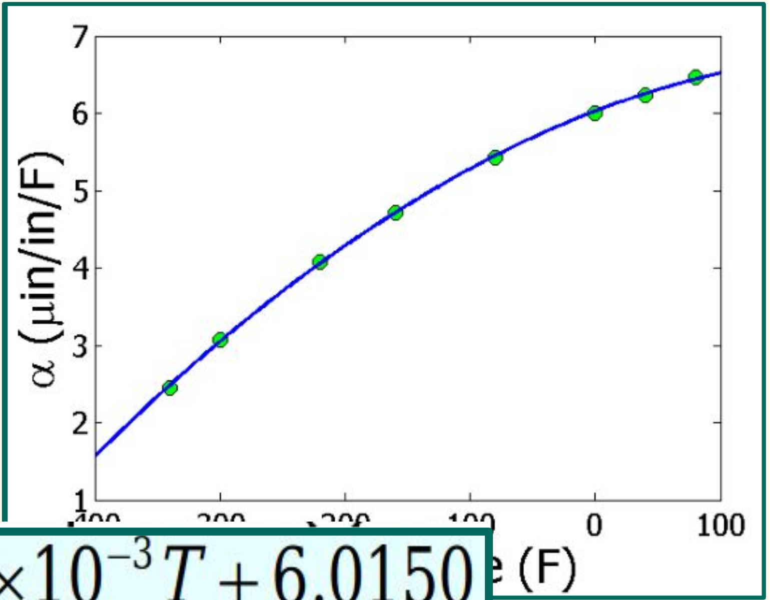
Um exemplo prático

Solução do modelo matemático:

$$\boxed{\cancel{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}}$$

$$\boxed{\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\, dT}$$

Interpolação



$$\boxed{\alpha(T) = -1.2278 \times 10^{-5} T^2 + 6.1946 \times 10^{-3} T + 6.0150}$$

Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

Um exemplo prático

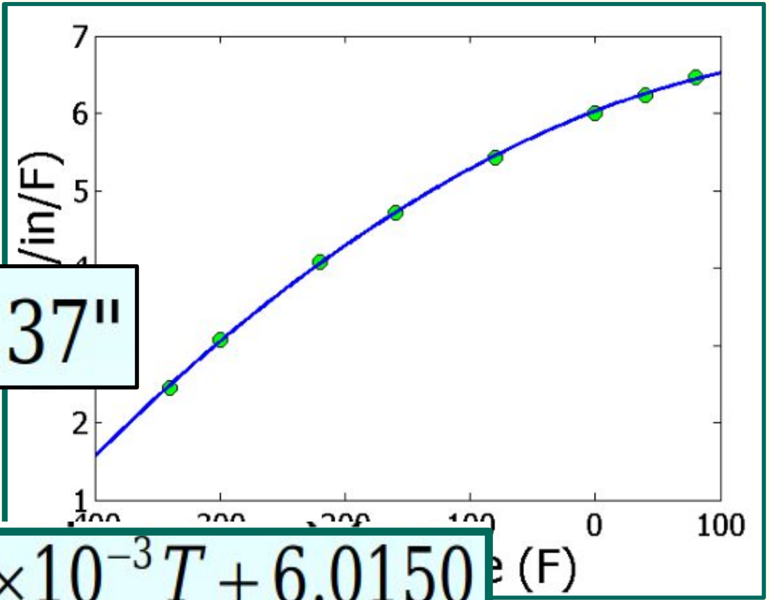
Solução do modelo matemático:

$$\cancel{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

$$\Delta D = -0.0137''$$

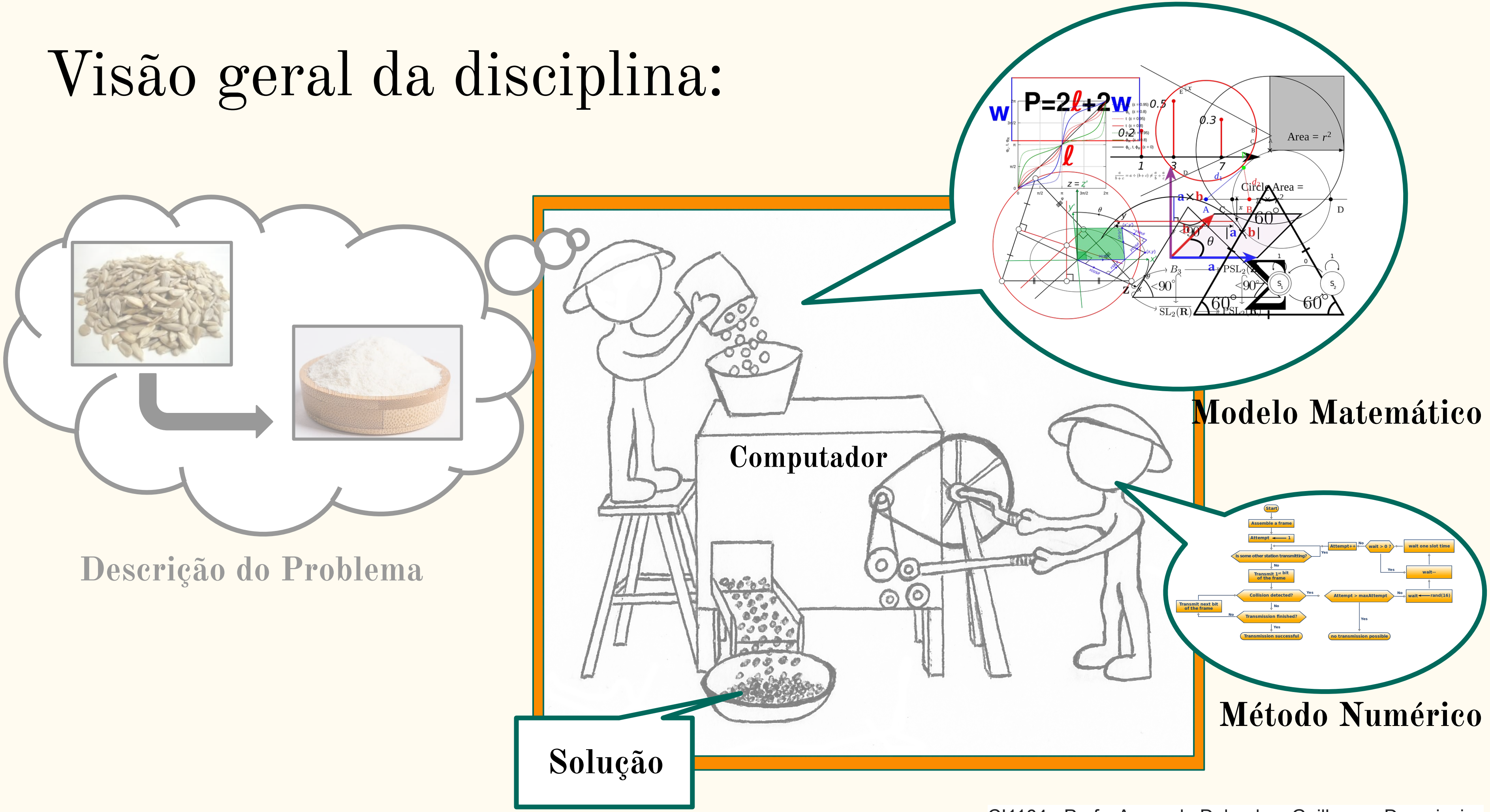
Interpolação



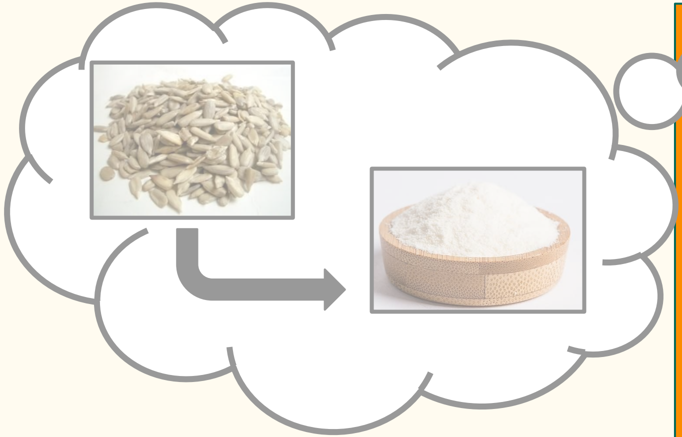
$$\alpha(T) = -1.2278 \times 10^{-5} T^2 + 6.1946 \times 10^{-3} T + 6.0150$$

Fonte: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/01aae/mws_gen_aae_spe_pptintroduction.pdf

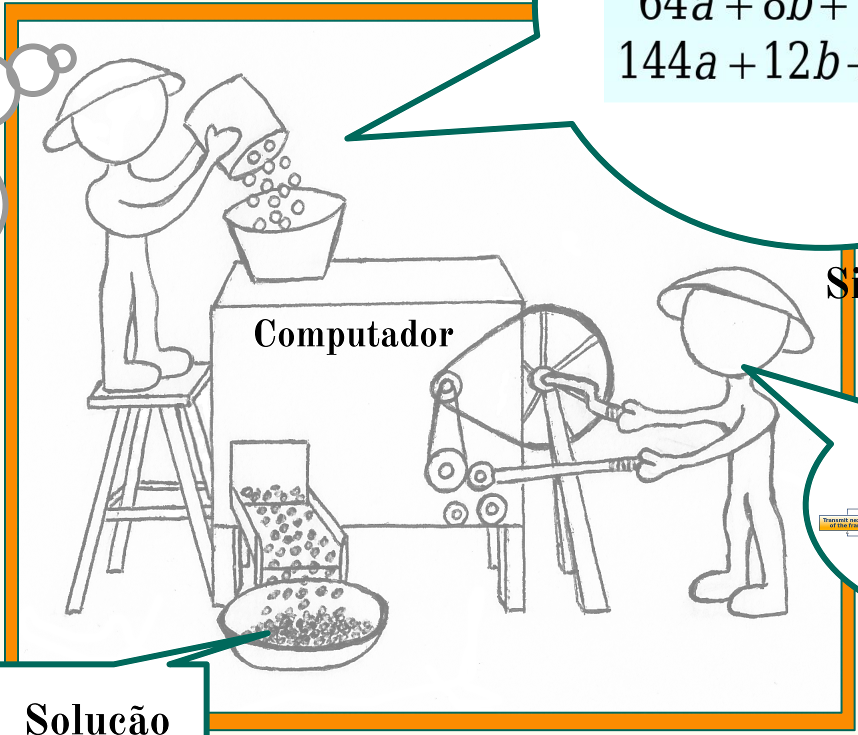
Visão geral da disciplina:



Visão geral da disciplina:

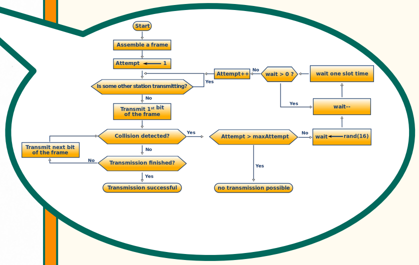


Descrição do Problema



$$
\begin{aligned}
25a + 5b + c &= 106 \\
64a + 8b + c &= 177 \\
144a + 12b + c &= 600
\end{aligned}
$$

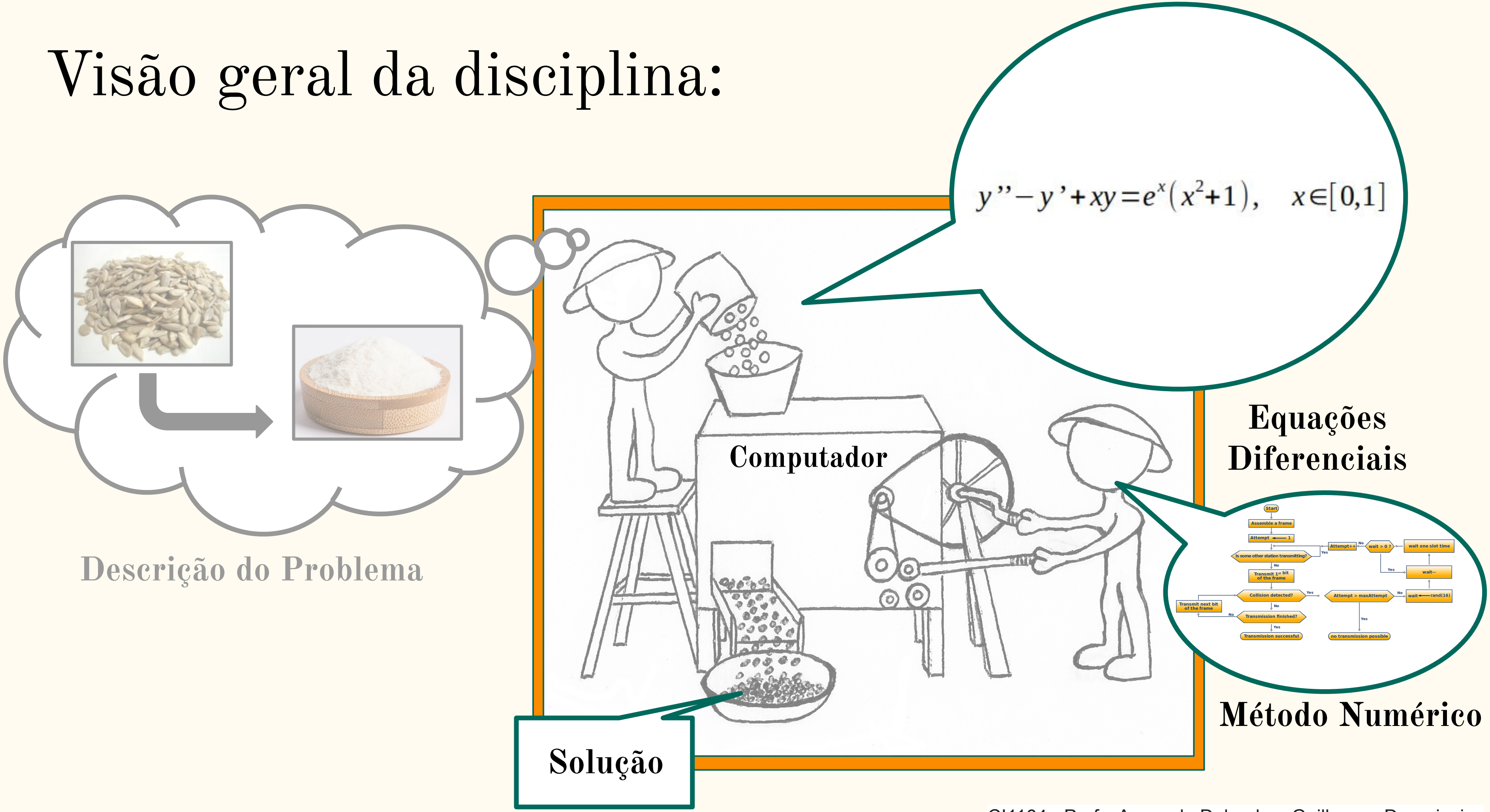
Sistemas Lineares



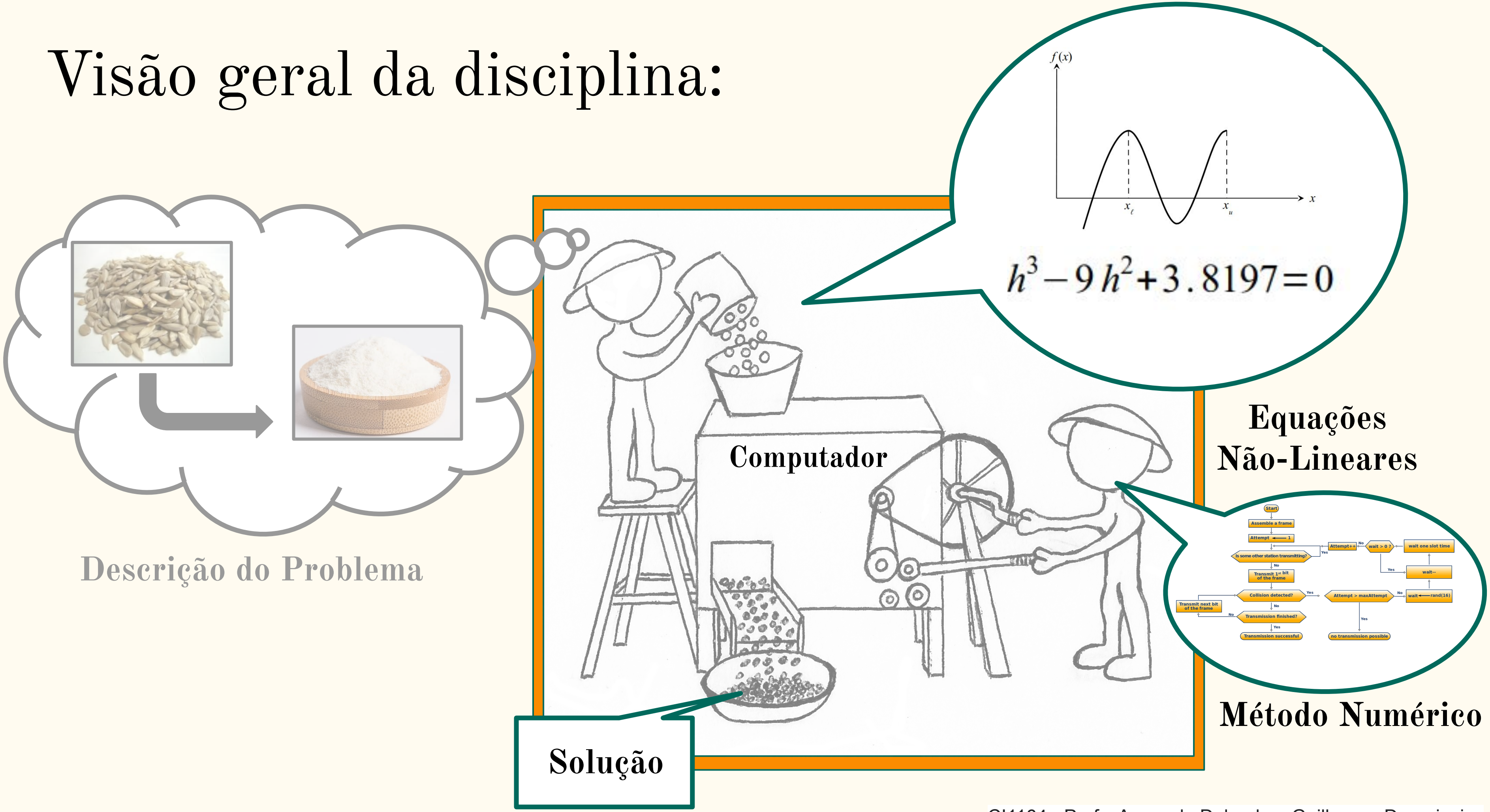
Método Numérico

Solução

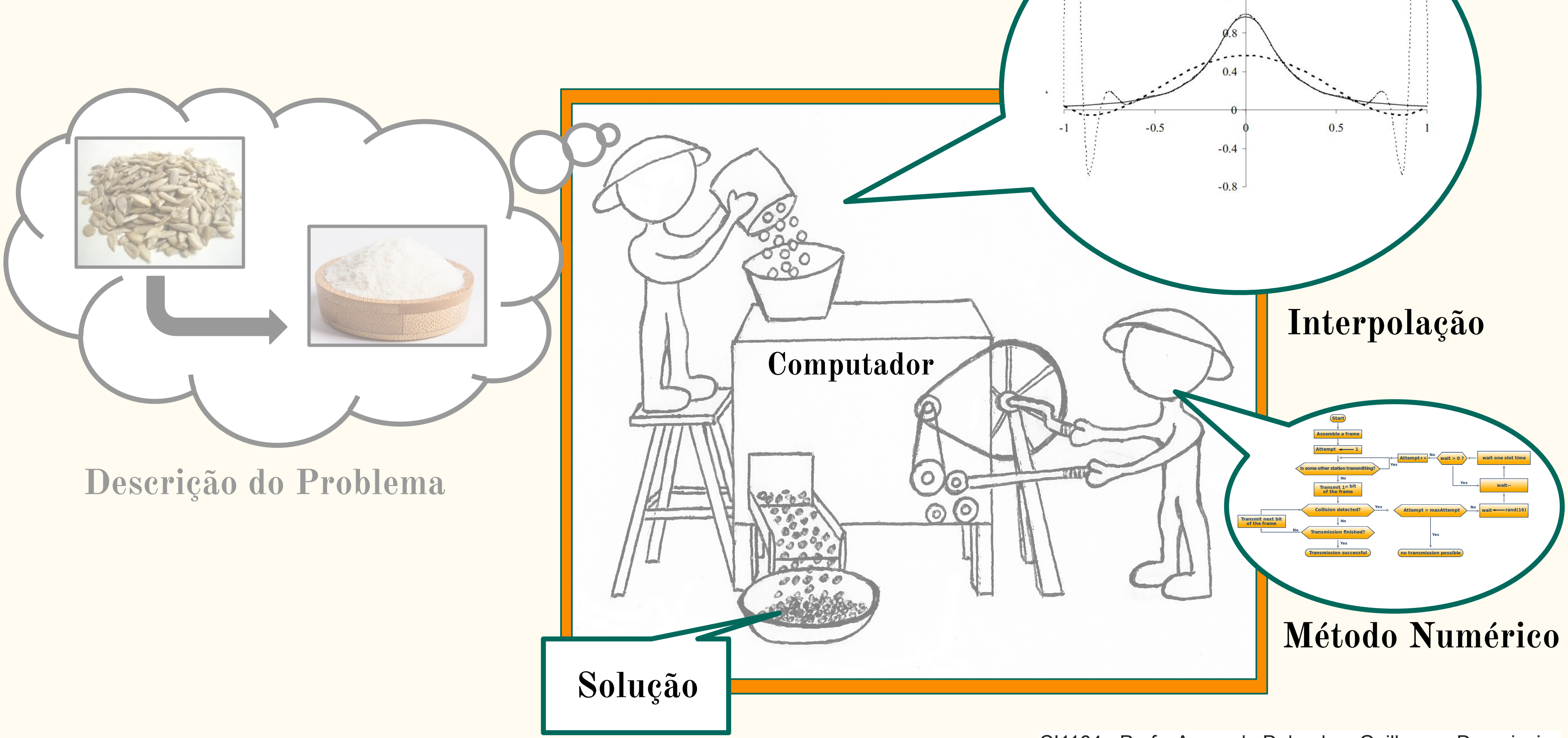
Visão geral da disciplina:



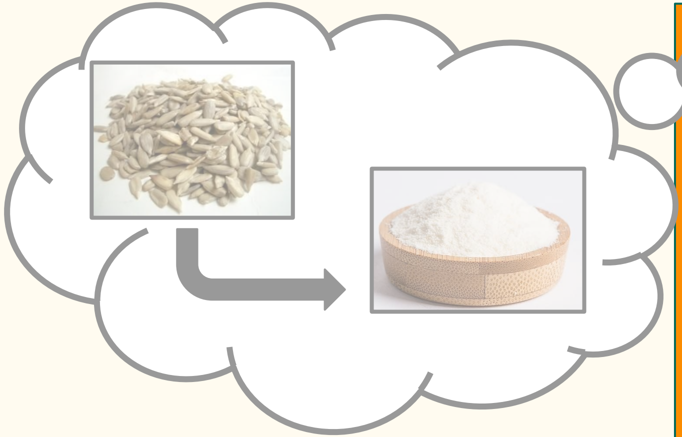
Visão geral da disciplina:



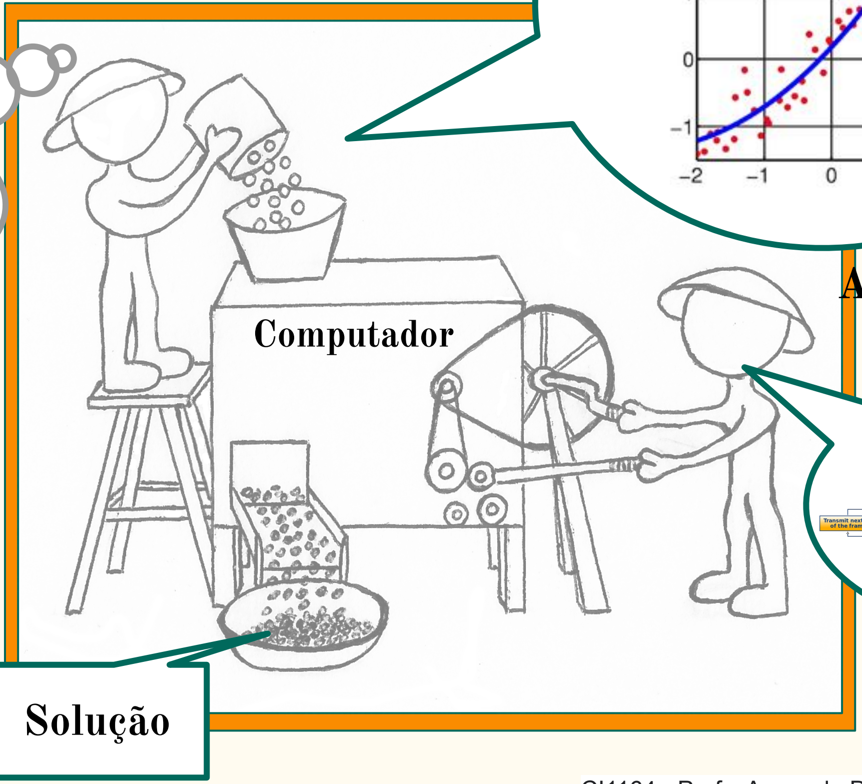
Visão geral da disciplina:

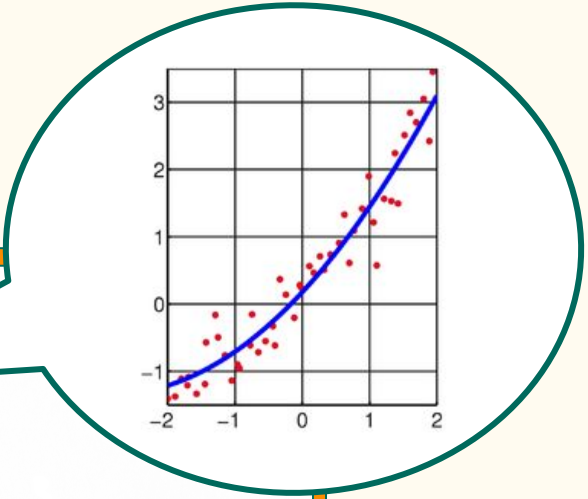


Visão geral da disciplina:

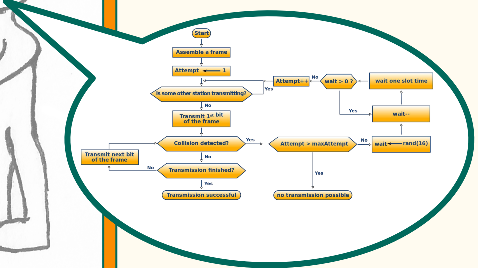


Descrição do Problema



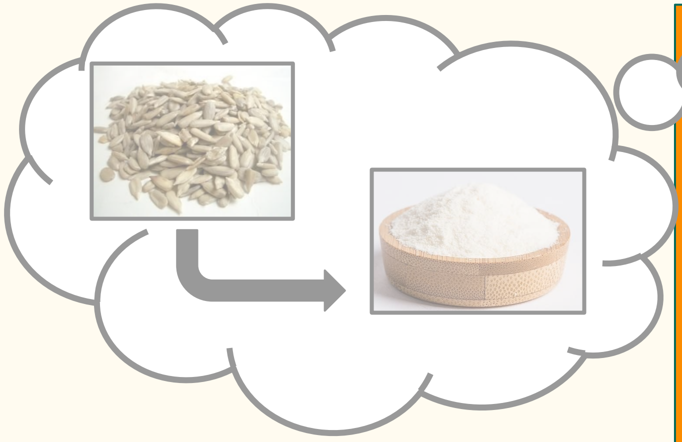


Ajuste de Curvas

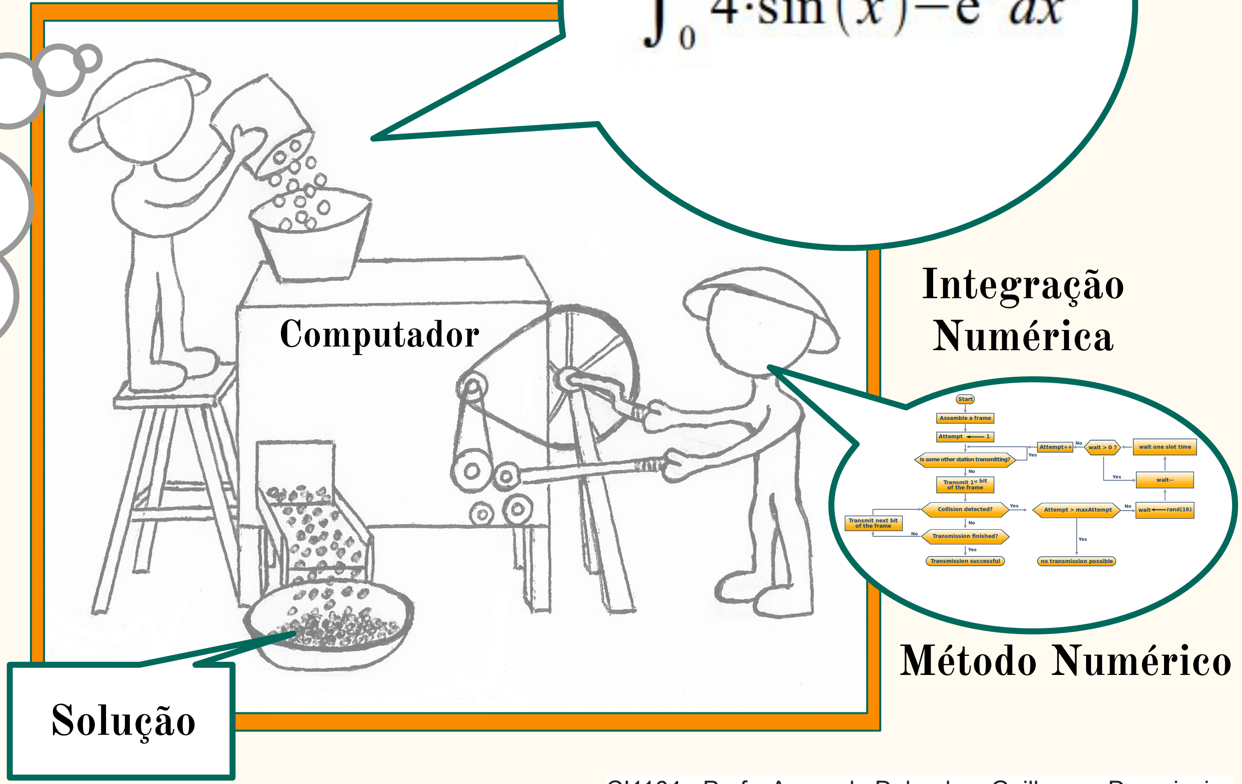


Método Numérico

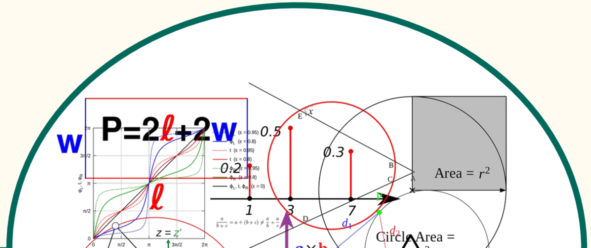
Visão geral da disciplina:

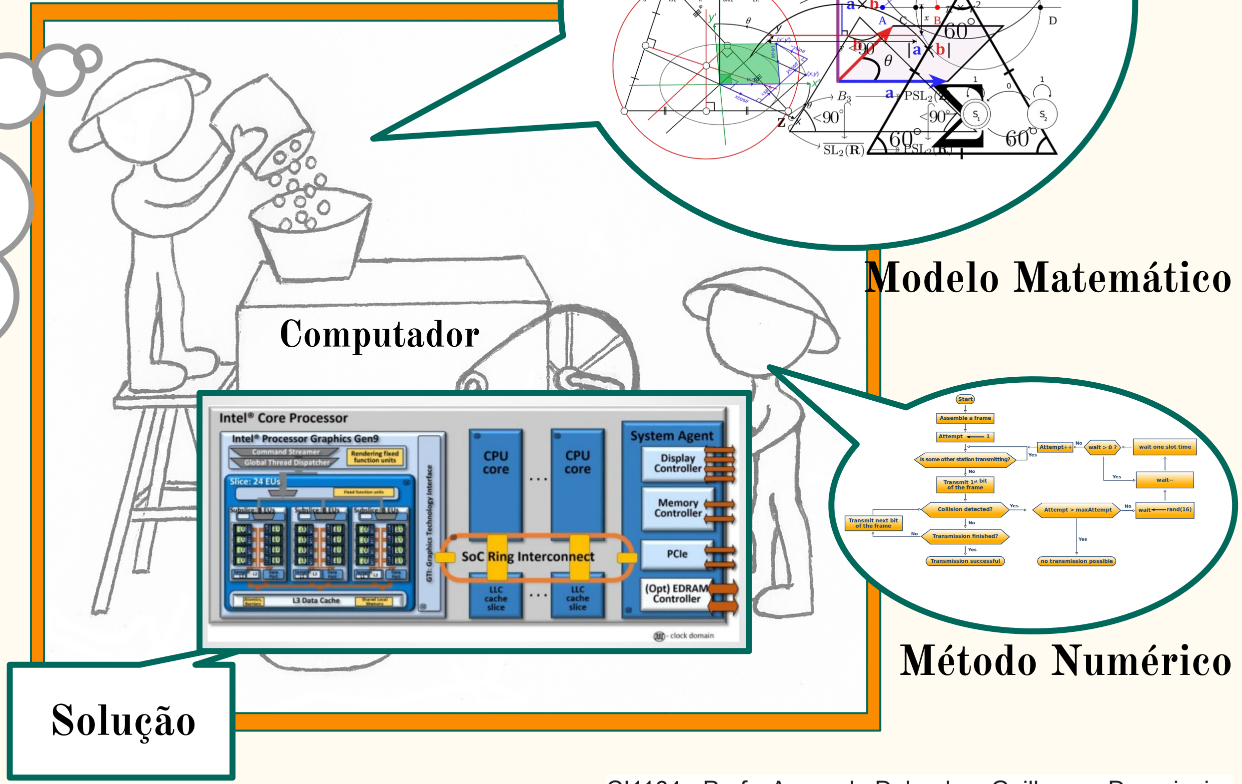


$$\int_0^3 4 \cdot \sin(x) - e^x \, dx$$

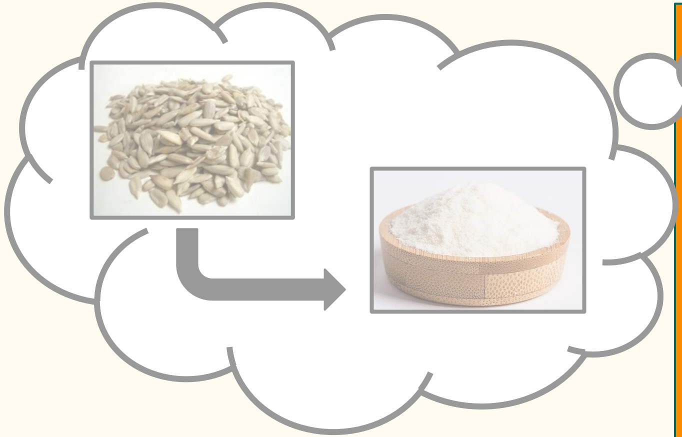


Visão geral da disciplina:

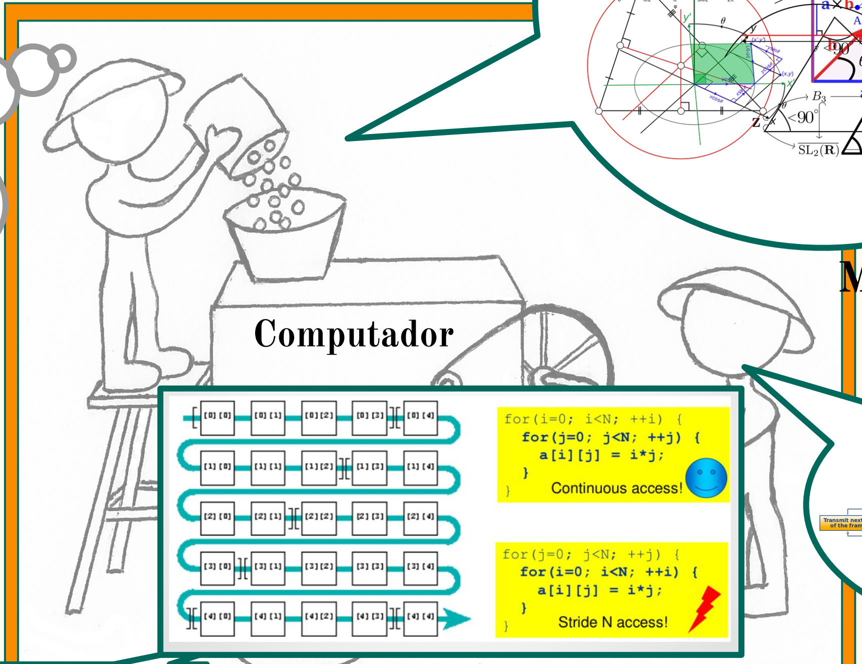




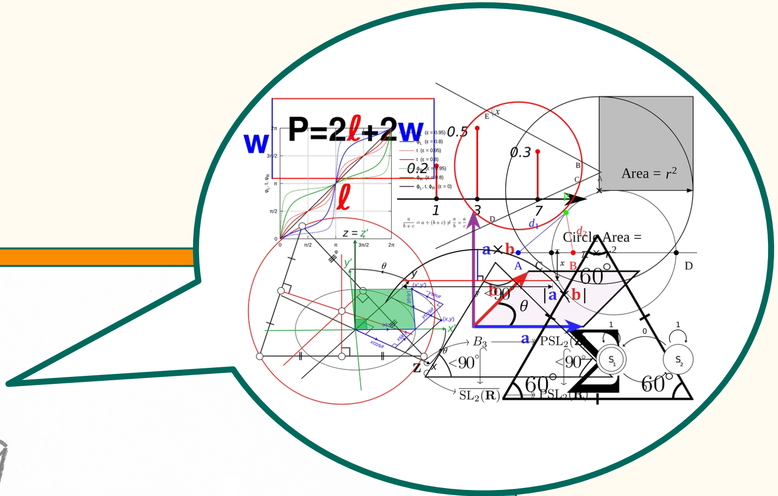
Visão geral da disciplina:



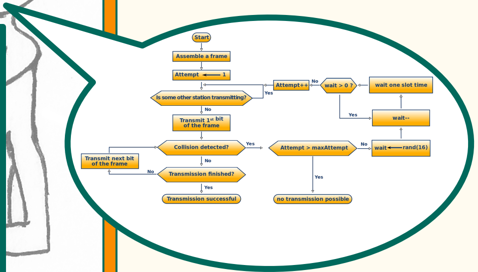
Descrição do Problema



Solução



Modelo Matemático



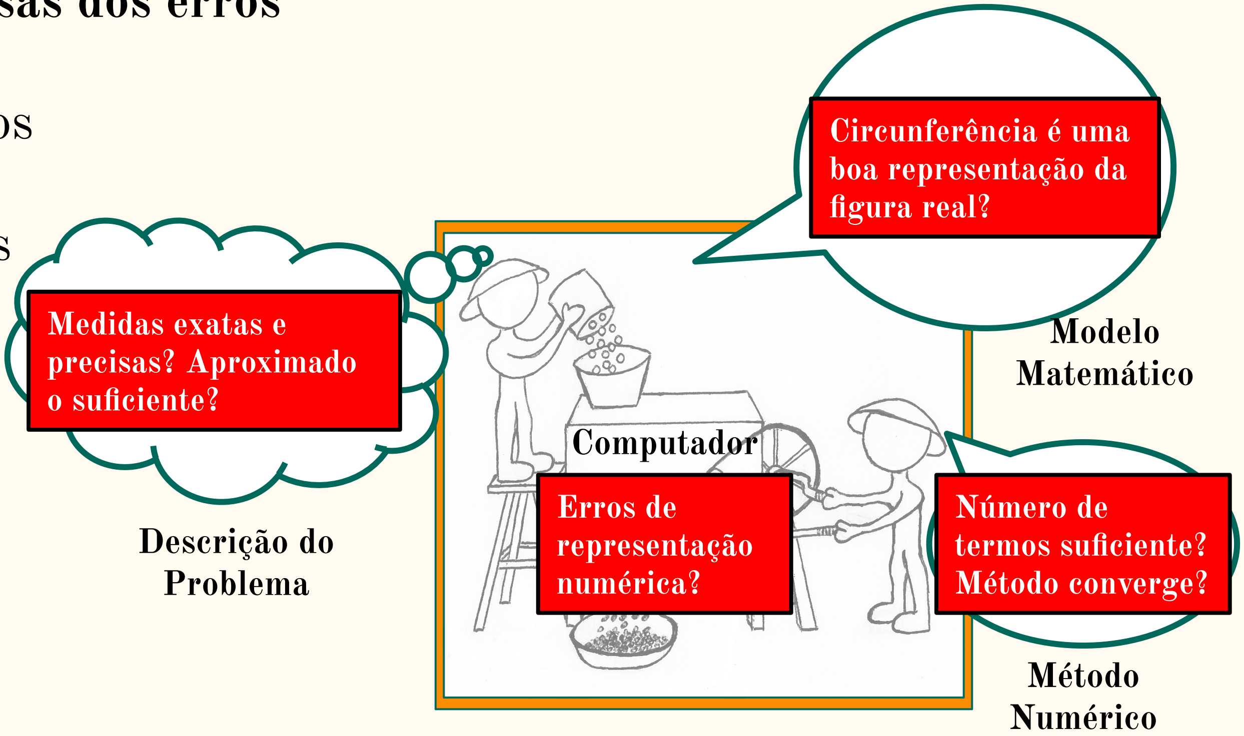
Método Numérico

Erros

1. Identificar as causas dos erros
2. Quantificar os erros
3. Minimizar os erros

Erros

1. **Identificar as causas dos erros**
2. Quantificar os erros
3. Minimizar os erros



Erros

1. Identificar as causas dos erros

2. **<u>Quantificar os erros</u>**

3. Minimizar os erros

Erro Real

Erro Real = Valor Real – Valor Aproximado

$$E_r = x - \bar{x}$$

Exemplo

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se $f(x) = 7e^{0.5x}$ e $h = 0.3$ então:

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3}$$

$$= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3}$$

$$= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3}$$

$$= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} \quad = 10.263$$

Exemplo

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se $f(x) = 7e^{0.5x}$ e $h = 0.3$ então:

$$f'(x) = 7 \times 0.5 \times e^{0.5x}$$
$$= 3.5e^{0.5x}$$

$$f'(2) = 3.5e^{0.5(2)}$$
$$= 9.5140$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3}$$
$$= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3}$$
$$= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3}$$
$$= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} \quad = 10.263$$

Exemplo

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se $f(x) = 7e^{0.5x}$ e $h = 0.3$ então:

$$f'(x) = 7 \times 0.5 \times e^{0.5x}$$
$$= 3.5e^{0.5x}$$

$$f'(2) = 3.5e^{0.5(2)}$$
$$= 9.5140$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3}$$
$$= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3}$$
$$= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3}$$
$$= \frac{22.107 - 19.028}{0.3} = 10.263$$

$E_r =$ Valor Real – Valor Aproximado

$$\dots = 9{,}5140 - 10{,}263 = -0{,}722$$

Erro Aproximado

Erro Aproximado = Aproximação atual – Aproximação anterior

$$E_a = \overline{x_k} - \overline{x_{k-1}}$$

Exemplo

Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.3$ então:

$$f'(2)\approx\frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3}$$

$$=\frac{f(2.3)-f(2)}{0.3}$$

$$=\frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3}$$

$$\boxed{\overline{x_{k-1}}}$$

$$=\frac{22.107-19.028}{0.3}=10.263$$

Exemplo

Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.3$ então:

$$f'(2)\approx\frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3}$$

$$=\frac{f(2.3)-f(2)}{0.3}$$

$$=\frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3}$$

$$\boxed{\overline{x_{k-1}}}$$

$$=\frac{22.107-19.028}{0.3}=10.263$$

Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.15$ então

$$f'(2)\approx\frac{f(2+0.15)-f(2)}{0.15}$$

$$=\frac{f(2.15)-f(2)}{0.15}$$

$$=\frac{7e^{0.5(2.15)}-7e^{0.5(2)}}{0.15}$$

$$\boxed{\overline{x_k}}$$

$$=\frac{20.50-19.028}{0.15}=9.8800$$

Exemplo

Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.3$ então:

$$f'(2)\approx\frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3}$$
$$=\frac{f(2.3)-f(2)}{0.3}$$
$$=\frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3}$$
$$=\frac{22.107-19.028}{0.3}=10.263$$

$\boxed{\overline{x}_{k-1}}$

Se $f(x)=7e^{0.5x}$ e $h=0.15$ então

$$f'(2)\approx\frac{f(2+0.15)-f(2)}{0.15}$$
$$=\frac{f(2.15)-f(2)}{0.15}$$
$$=\frac{7e^{0.5(2.15)}-7e^{0.5(2)}}{0.15}$$
$$=\frac{20.50-19.028}{0.15}=9.8800$$

$\boxed{\overline{x}_{k}}$

E_a = Valor atual – Valor anterior $=9.8800-10.263=-0.38300$

Erro Absoluto

Erro Absoluto Real: $EA_r = x - \bar{x}$

Erro Absoluto Aproximado : $EA_a = \overline{x_k} - \overline{x_{k-1}}$

Erro Relativo

Erro Relativo Real: $$ER_r = \frac{|EA_r|}{|x|}$$

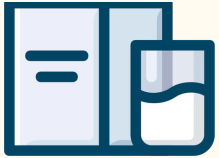
Erro Relativo Aproximado: $$ER_a = \frac{|EA_a|}{|\bar{x}_k|}$$

Erro Relativo

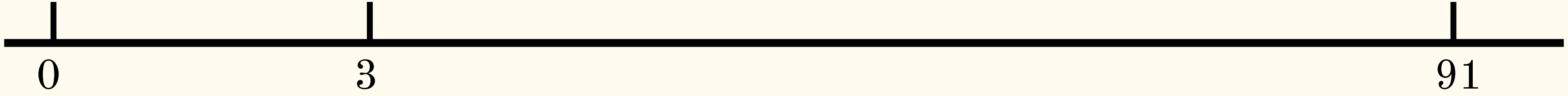
Fechado

validade: **90** dias

Aberto



validade: **2** dias

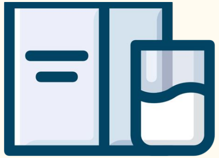


Erro Relativo

Fechado

validade: **90** dias

Aberto



validade: **2** dias

0 3 91

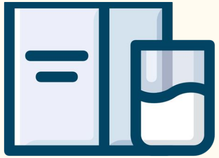
Erro Relativo

Fechado

validade: **90** dias

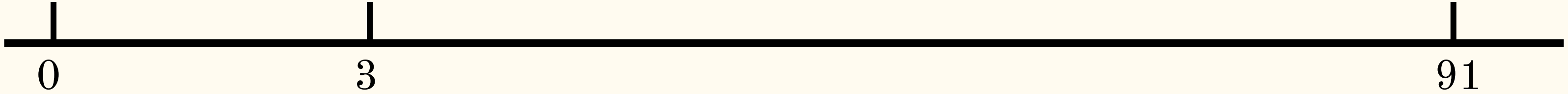
$EA = 91 - 90 = 1$

Aberto



validade: **2** dias

$EA = 3 - 2 = 1$

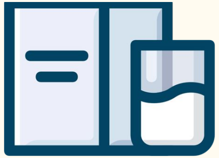


Erro Relativo

Fechado

validade: **90** dias

Aberto



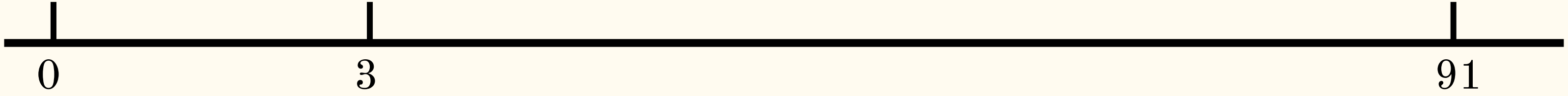
validade: **2** dias

EA = 3 - 2 = 1

ER = 1 / 3 ≈ 0,333

EA = 91 - 90 = 1

ER = 1 / 91 ≈ 0,011



Erro Relativo

Exemplo: os valores $x=2112{,}9$ e $y=5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA=0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x=\frac{0{,}1}{2112{,}9}=0{,}000047$$

$$ER_y=\frac{0{,}1}{5{,}3}=0{,}019$$

Erro Relativo

Exemplo: os valores $x=2112{,}9$ e $y=5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA=0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x = \frac{0{,}1}{2112{,}9} = 0{,}000047$$

$$ER_y = \frac{0{,}1}{5{,}3} = 0{,}019$$

- x e y foram obtidos com a mesma **precisão**

Erro Relativo

Exemplo: os valores $x=2112{,}9$ e $y=5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA=0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x=\frac{0{,}1}{2112{,}9}=0{,}000047$$

$$ER_y=\frac{0{,}1}{5{,}3}=0{,}019$$

- x e y foram obtidos com a mesma **precisão**
- x foi obtido com maior **exatidão** que y

Erro Relativo

Exemplo: os valores $x=2112{,}9$ e $y=5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA=0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x = \frac{0{,}1}{2112{,}9} = 0{,}000047$$

$$ER_y = \frac{0{,}1}{5{,}3} = 0{,}019$$

Grau de variação de resultados de uma medição:
$x = 2112{,}9 \pm 0{,}1$
$y = 5{,}3 \pm 0{,}1$

- x e y foram obtidos com a mesma **precisão**
- x foi obtido com maior **exatidão** que y

Erro Relativo

Exemplo: os valores $x=2112{,}9$ e $y=5{,}3$ foram obtidos com um erro absoluto de $EA=0{,}1$. Qual o erro relativo?

$$ER_x=\frac{0{,}1}{2112{,}9}=0{,}000047$$

$$ER_y=\frac{0{,}1}{5{,}3}=0{,}019$$

- x e y foram obtidos com a mesma **precisão**
- x foi obtido com maior **exatidão** que y

Conformidade com o valor real

Algarismos significativos

Mostrar a confiança que um número apresenta. É uma indicação da incerteza:

↑ algarismos significativos ↓ incerteza no valor

Exemplo: qual a população de Curitiba?

1. "Uns 3 milhões de habitantes" ⇒ 3×10^6 ⇒ 1 algarismo significativo
2. 3.168.980 habitantes (IBGE 2013) ⇒ $3{,}168980 \times 10^6$ ⇒ 7 algarismos significativos

Exemplos

1. 3200 → $3{,}2 \times 10^3$ → 2 algarismos significativos
2. 3200 → $3{,}200 \times 10^3$ → 4 algarismos significativos
3. 3200,0 → $3{,}2000 \times 10^3$ → 5 algarismos significativos
4. 0,00459 → $4{,}59 \times 10^{-3}$ → 3 algarismos significativos

Número de algarismos corretos

$|\mathrm{ER}_x| \leq 0{,}5 \times 10^{2\text{-m}}\ \%$ $\Rightarrow$ x tem pelo menos m algarismos significativos

Número de algarismos corretos

$$|ER_x| \leq 0{,}5 \times 10^{2\text{-m}}\ \% \quad \Longrightarrow \quad$$ x tem pelo menos m algarismos significativos

Exemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Obter $e^{0.7}$ utilizando 6 termos.

Número de algarismos corretos

$$|ER_x| \leq 0{,}5 \times 10^{2-m}\ \% \quad \Longrightarrow \quad x \text{ tem pelo menos } m \text{ algarismos significativos}$$

Exemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Obter $e^{0.7}$ utilizando 6 termos.

Com 5 termos:

$$e^{0.7} \cong 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^4}{4!}$$
$$= 2.0122$$

Número de algarismos corretos

$$|ER_x| \leq 0{,}5 \times 10^{2-m}\ \% \quad \Rightarrow \quad x \text{ tem pelo menos } m \text{ algarismos significativos}$$

Exemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Obter $e^{0.7}$ utilizando 6 termos.

Com 5 termos:

$$e^{0.7} \cong 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^4}{4!}$$
$$= 2.0122$$

Com 6 termos:

$$e^{0.7} \cong 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^4}{4!} + \frac{0.7^5}{5!}$$
$$= 2.0136$$

Número de algarismos corretos

$|ER_x| \leq 0{,}5 \times 10^{2\text{-}m}\ \%$ $\Longrightarrow$ x tem pelo menos m algarismos significativos

Ex

os.

$$ER = |(2.0136 - 2.0122) / 2.0136| \cong 0.00069527$$
$$= 0.069527\ \%$$
$$< 0.5 \times 10^{2\text{-}2}\ \%$$

$\Longrightarrow$ $e^{0.7} \cong 2.0136$ tem pelo menos 2 algarismos significativos corretos

Com 5 termos:

$$e^{0.7} \cong 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^4}{4!} = 2.0122$$

Com 6 termos:

$$e^{0.7} \cong 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2!} + \frac{0.7^3}{3!} + \frac{0.7^4}{4!} + \frac{0.7^5}{5!} = 2.0136$$

Propagação de Erros

Cálculos efetuados com números imprecisos geram resultados que também possuem erros.

Exemplo:

$$x = 3{,}4 \pm 0{,}2$$
$$y = 5{,}02 \pm 0{,}005$$

$$x + y \in \left[(3{,}4 - 0{,}2) + (5{,}02 - 0{,}005);\ (3{,}4 + 0{,}2) + (5{,}02 + 0{,}005) \right]$$

$$x + y \in \left[3{,}2 + 5{,}015;\ 3{,}6 + 5{,}025 \right]$$

$$x + y \in \left[8{,}215;\ 8{,}625 \right]$$

Propagação de Erros

Seja f uma função em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e seja $\boldsymbol{\Delta}$ o erro absoluto.

$$\boxed{\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|}$$

Propagação de Erros

Seja f uma função em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e seja $\boldsymbol{\Delta}$ o erro absoluto.

$$\boxed{\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|}$$

Exemplo:

$$\boxed{z = x - y}$$

$$\boxed{|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| = |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y| = |\Delta x| + |\Delta y|}$$

$$\boxed{\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x - y|}}$$

Propagação de Erros

Seja f uma função em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e seja $\boldsymbol{\Delta}$ o erro absoluto.

$$\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$

Exemplo:

$$z = x - y$$

$$|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| = |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x-y|}$$

$$x = 2 \pm 0{,}001 \quad \text{e} \quad y = 2{,}003 \pm 0{,}001$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|0{,}002| + |0{,}002|}{|2 - 2{,}003|} = 1{,}3333 = 13{,}33\,\%$$

Erros

1. **<u>Identificar as causas dos erros</u>**

2. Quantificar os erros

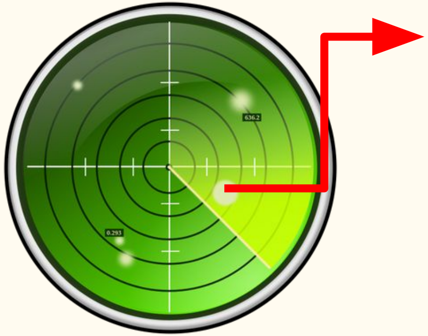
3. Minimizar os erros

Exemplo

- **Sistema Patriot**: calcula uma área no espaço na qual deve procurar por mísseis.
- O sistema apresentou uma falha em 25 de fevereiro de 1991.

Exemplo

- **Sistema Patriot**: calcula uma área no espaço na qual deve procurar por mísseis.
- O sistema apresentou uma falha em 25 de fevereiro de 1991.



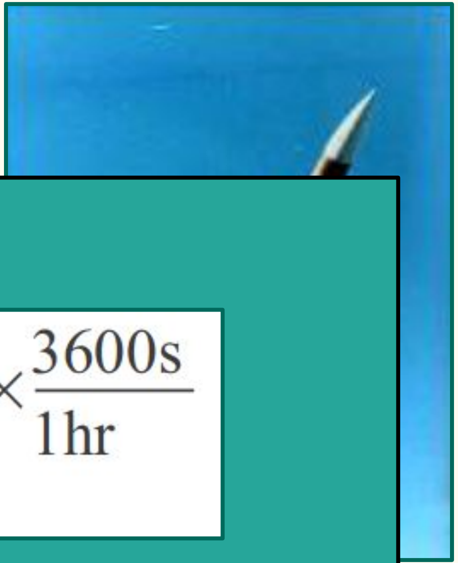
Calcula velocidade do míssil e o tempo que foi avistado pela última vez

<u>Problema</u>: relógio interno é lido a cada décimo de segundo.

$1/10 \Rightarrow 0.0001100110011001100110 0 \Rightarrow$ Erro: $9{,}5 \times 10^{-8}$ segundos

Exemplo

- **Sistema Patriot**: calcula uma área no espaço na qual deve procurar por mísseis.
- O sistema apresentou uma falha em 25 de fevereiro de 1991.



O sistema estava operacional a 100 horas:

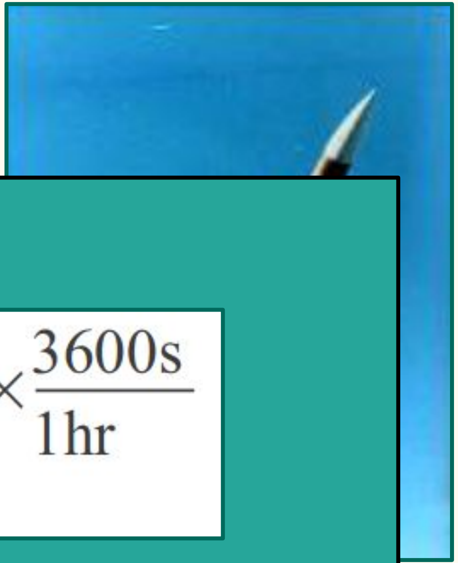
$$= 9.5 \times 10^{-8} \frac{s}{0.1s} \times 100hr \times \frac{3600s}{1hr}$$
$$= 0.342\,s$$

Problema: relógio interno é lido a cada décimo de segundo.

1/10 ⟶ 0.0001100110011001100110 0 ⟶ Erro: $9{,}5 \times 10^{-8}$ segundos

Exemplo

- **Sistema Patriot**: calcula uma área no espaço na qual deve procurar por mísseis.
- O sistema apresentou uma falha em 25 de fevereiro de 1991.



O sistema estava operacional a 100 horas:

$$= 9.5 \times 10^{-8} \frac{s}{0.1s} \times 100hr \times \frac{3600s}{1hr}$$
$$= 0.342\,s$$

Diferença na distância percorrida estimada de 687 metros!!

<u>Problema</u>: relógio interno é lido a cada décimo d

1/10 → 0.0001100110011001100

Erros de Arredondamento

- Representação aproximada de números reais:

$1/3 \cong 0{,}3333$ $\sqrt{2} \cong 1{,}4142$ $\pi \cong 3{,}141$

Erros de Arredondamento

- Representação aproximada de números reais:

$$\frac{1}{3} \cong 0{,}3333 \qquad \sqrt{2} \cong 1{,}4142 \qquad \pi \cong 3{,}141$$

- Problemas na conversão de bases:

$$1/10 \Rightarrow 0{,}0001100110011001100110 0 = 0{,}0999999046325683593 75$$

Erros de Arredondamento

- Cancelamento Subtrativo ou Cancelamento Catastrófico:

Aumento substancial no ER em operações aritméticas de ponto flutuante. Ex: adição de números muito diferentes ou subtração de números muito próximos

Erros de Arredondamento

- Cancelamento Subtrativo ou Cancelamento Catastrófico:

Aumento substancial no ER em operações aritméticas de ponto flutuante. Ex: adição de números muito diferentes ou subtração de números muito próximos

Exemplo: máquina com 4 dígitos de precisão, $x_1 = 0{,}3491 \times 10^4$; $x_2 = 0{,}2345 \times 10^0$

- $$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= (0{,}2345 \times 10^0 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= (0{,}00002345 \times 10^4 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= (0{,}0000 \times 10^4 + 0{,}3491 \times 10^4) - 0{,}3491 \times 10^4 \\ &= 0{,}0000\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= 0{,}2345 \times 10^0 + (0{,}3491 \times 10^4 - 0{,}3491 \times 10^4) \\ &= 0{,}2345 \times 10^0 + 0{,}0000 \\ &= 0{,}2345 \times 10^0\end{aligned}$$

Erros de Arredondamento

- Cancelamento Subtrativo ou Cancelamento Catastrófico:

Aumento substancial no ER em operações aritméticas de ponto flutuante. Ex: adição de números muito diferentes ou subtração de números muito próximos

Exemplo:

$$z = x - y$$

$$|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| = |(1)\,\Delta x| + |(-1)\,\Delta y| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x - y|}$$

$$x = 2 \pm 0{,}001 \quad \text{e} \quad y = 2{,}003 \pm 0{,}001$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|0{,}002| + |0{,}002|}{|2 - 2{,}003|} = 1{,}3333 = 13{,}33\,\%$$

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

truncar

verbo

1. *transitivo direto*
   separar do tronco; cortar.
   "t. os ramos de uma árvore"
2. *transitivo direto*
   retirar uma parte de; mutilar.
   "t. uma imagem"

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:

$$\pi = 3.14159265358979323846...$$

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:

$$\pi = 3.141592|65358979323846...$$

truncar

verbo

1. *transitivo direto*
   separar do tronco; cortar.
   "t. os ramos de uma árvore"
2. *transitivo direto*
   retirar uma parte de; mutilar.
   "t. uma imagem"

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:

$$\pi = 3.141592|65358979323846...$$

$$\pi = 3.141592$$

truncar

verbo

1. *transitivo direto*
   separar do tronco; cortar.
   "t. os ramos de uma árvore"
2. *transitivo direto*
   retirar uma parte de; mutilar.
   "t. uma imagem"

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

truncar

verbo

1. *transitivo direto*
   separar do tronco; cortar.
   "t. os ramos de uma árvore"
2. *transitivo direto*
   retirar uma parte de; mutilar.
   "t. uma imagem"

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$$

truncar

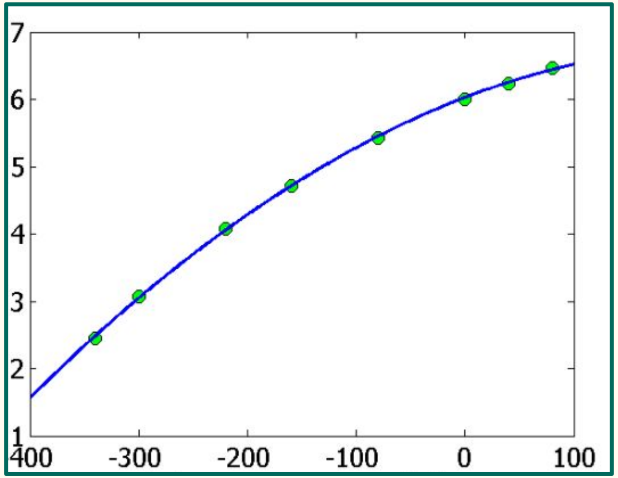
verbo

1. *transitivo direto*
   separar do tronco; cortar.
   "t. os ramos de uma árvore"
2. *transitivo direto*
   retirar uma parte de; mutilar.
   "t. uma imagem"

Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

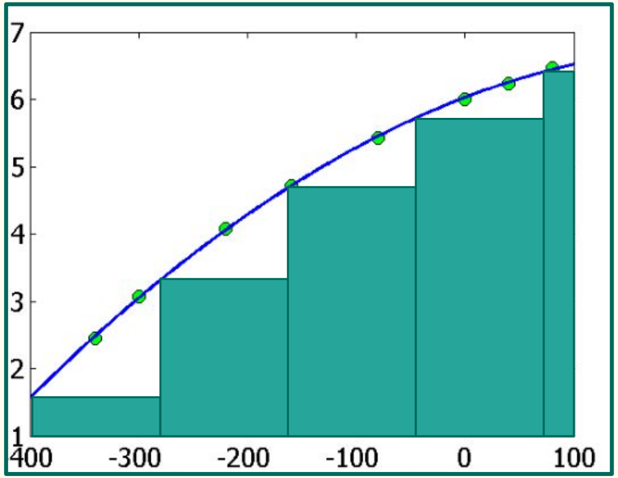
Exemplo:



Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

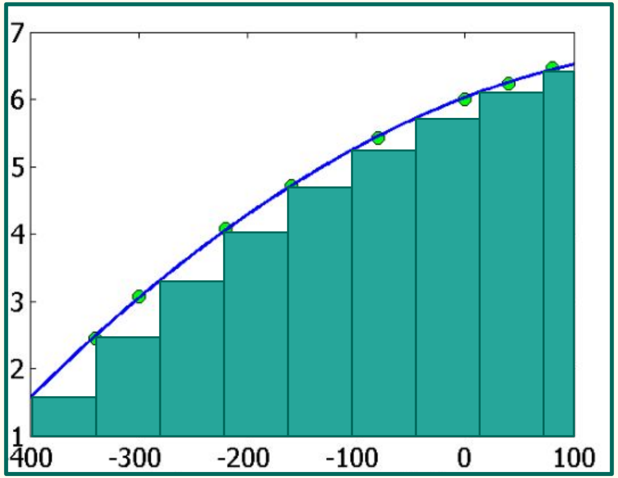
Exemplo:



Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

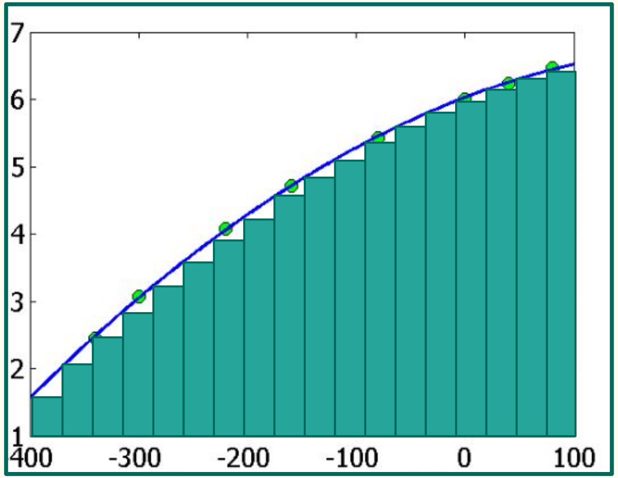
Exemplo:



Erros de Truncamento

- Causados pelo truncamento ou aproximação de um procedimento matemático

Exemplo:



Como efetuar o arredondamento

- Para representar um número x com p algarismo significativos:

<u>**se**</u> o $(p+1)$-ésimo algarismo é menor que 5:
    trunca x
<u>**se**</u> o $(p+1)$-ésimo algarismo é maior que 5:
    trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo
<u>**se**</u> o $(p+1)$-ésimo algarismo é igual a 5:
    trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo

Como efetuar o arredondamento

- Para representar um número x com p algarismo significativos:

<u>**se**</u> o (p+1)-ésimo algarismo é menor que 5:
    trunca x
<u>**se**</u> o (p+1)-ésimo algarismo é maior que 5:
    trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo
<u>**se**</u> o (p+1)-ésimo algarismo é igual a 5:
    trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo

Exemplos: representar os números abaixo com 3 algarismos significativos.

- 42,05 $\Rightarrow$ 42,1
- 3,1415 $\Rightarrow$ 3,14
- -3996 $\Rightarrow$ -4000

Como efetuar o arredondamento

- Para representar um número x com p algarismo significativos:

> **se** o $(p+1)$-ésimo algarismo é menor que 5:
> trunca x
> **se** o $(p+1)$-ésimo algarismo é maior que 5:
> trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo
> **se** o $(p+1)$-ésimo algarismo é igual a 5:
> trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo

Problema:

3,00	3,01	...	3,09	3,10	3,11	...	3,19	...	3,99	4,00	**Média:** 3,5
3,0	3,0	...	3,1	3,1	3,1	...	3,2	...	4,0	4,0	**Média:** 3,50495

Como efetuar o arredondamento

- Para representar um número x com p algarismo significativos:

se o $(p+1)$-ésimo algarismo é menor que 5:
  trunca x
se o $(p+1)$-ésimo algarismo é maior que 5:
  trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo
se o $(p+1)$-ésimo algarismo é igual a 5:
  se o p-ésimo algarismo é par
    trunca x
  senão
    trunca x e soma 1 unidade no p-ésimo algarismo

3,05 → 3,0

3,15 → 3,2

3,00	3,01	...	3,09	3,10	3,11	...	3,19	...	3,99	4,00

Média: 3,5

3,0	3,0	...	3,1	3,1	3,1	...	3,2	...	4,0	4,0

Média: 3,5

Referências

- Daniel Weingaertner; notas de aula da disciplina **Introdução à Computação Científica** (UFPR/DINF)

- A. Kaw, E. Kalu; **Numerical Methods with Applications.** Disponível em https://nm.mathforcollege.com/textbook-numerical-methods-with-applications/

- Alex Cavaliéri Carciofi, página da disciplina de **Métodos Numéricos em Astronomia.** Disponível em http://www.astro.iag.usp.br/~carciofi/index.php

- Márcia A. G. Ruggiero & Vera L. R. Lopes; **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**; McGraw-Hill, 1988.

Créditos

Este documento é de autoria do Prof. Guilherme Alex Derenievicz (UFPR/DINF), para uso na disciplina Introdução à Computação Científica (CI1164).