2 Bessel 方程及 Bessel 函数

首先，我们考虑以特征方程形式呈现的 n 阶 Bessel 方程：

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \tag{2 .1}$$

依赖于 λ 的取值，方程(2 .1)可转换成三种类型的方程。

1. 欧拉方程及其通解（$\lambda = 0$）：

$$\begin{cases} \rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - n^2 P(\rho) = 0 & (2\ .2a) \\ P(\rho) = \alpha\rho^n + \beta\rho^{-n}, \quad n \neq 0,\ \forall\,\alpha,\,\beta \in R & (2\ .2b) \\ P(\rho) = \alpha + \beta\ln\rho, \quad n = 0 & (2\ .2c) \end{cases}$$

2. n 阶 Bessel 方程及其通解（$\lambda > 0$）：$r = \sqrt{\lambda}\rho$，$F(r) = P(\rho)$

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + (r^2 - n^2)F(r) = 0 & (2\ .3a) \\ F(r) = \alpha J_n(r) + \beta Y_n(r), \quad \forall\,\alpha,\,\beta \in R & (2\ .3b) \\ P(\rho) = \alpha J_n(\sqrt{\lambda}\rho) + \beta Y_n(\sqrt{\lambda}\rho) & (2\ .3c) \end{cases}$$

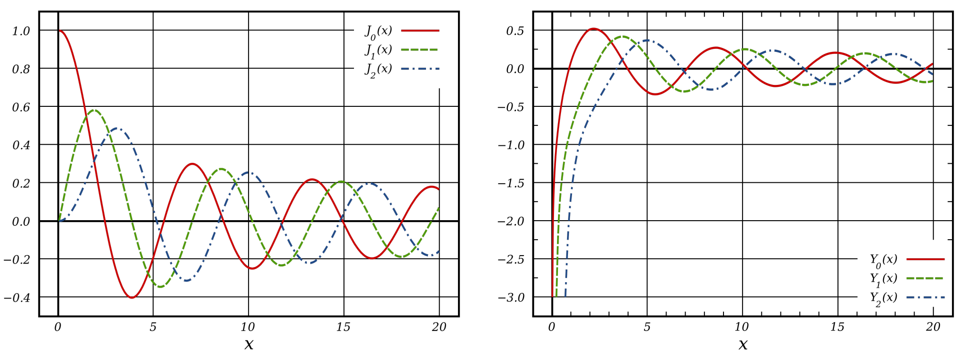
3. n 阶虚宗量 Bessel 方程及其通解（$\lambda < 0$）：$r = \sqrt{-\lambda}\rho$，$F(r) = P(\rho)$

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) - (r^2 + n^2)F(r) = 0 & (2\ .4a) \\ F(r) = \alpha I_n(r) + \beta K_n(r), \quad \forall\,\alpha,\,\beta \in R & (2\ .4b) \\ P(\rho) = \alpha I_n(\sqrt{-\lambda}\rho) + \beta K_n(\sqrt{-\lambda}\rho) & (2\ .4c) \end{cases}$$

通解表达式(2 .3b)中 $J_n(r)$、$Y_n(r)$ 分别为第一、二类 n 阶 Bessel 函数：

$$\begin{cases} J_n(r) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2m}, \ |J_n(0)| < +\infty & (2\ .5a) \\ Y_n(r) = \displaystyle\lim_{\alpha\to n} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(r) - J_{-\alpha}(r)}{\sin\alpha\pi}, \ |Y_n(0)| = +\infty & (2\ .5b) \end{cases}$$

图 1 给出了 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$ 的函数图像，二者均呈现了振荡行为，与 x 轴相交；不同的是，前者在 $x = 0$ 处收敛到一个有限值，后者则是发散的。



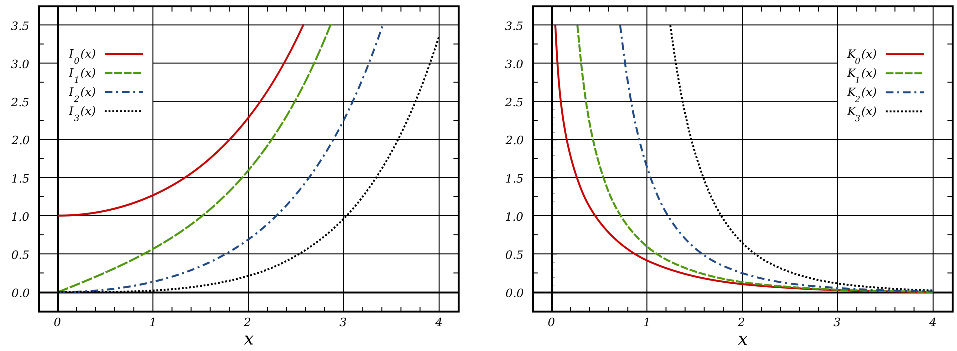
(a) 第一类 Bessel 函数 $J_n(x)$　　(b) 第二类 Bessel 函数 $Y_n(x)$

图 1: Bessel 函数曲线

例 1：求以下方程在 $x = 0$ 处满足自然边界条件的通解。

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (4x^2 - 16)y(x) = 0 \tag{2 .6}$$

解：方程(2 .6)为 4 阶 Bessel 方程，其通解为：$y(x) = \alpha J_4(2x) + \beta Y_4(2x)$，由于 $Y_4(2x)$ 不满足自然边界条件，故通解为：$y(x) = \alpha J_4(2x)$。



(a) 第一类虚宗量 Bessel 函数 $I_n(x)$　　(b) 第二类虚宗量 Bessel 函数 $K_n(x)$

图 2: 虚宗量 Bessel 函数曲线

通解表达式(2 .4b)中 $I_n(r)$、$K_n(r)$ 分别为第一、二类 n 阶虚宗量 Bessel 函数[1]，随自变量的增加单调递增（图 2a ）、递减（图 2b ），不过前者在 $x=0$ 处收敛，后者则是发散的。

例 2：求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{4u}{r^2}\right),\ (0<r<1,\ t>0) & (2\ .7a) \\ |u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t)=0 & (2\ .7b) \\ u(r,0) = 1-r^2 & (2\ .7c) \end{cases}$$

解：由于边界条件(2 .7b)是线性齐次的（自然边界条件等同于线性齐次边界条件），故无需将边界条件齐次化；另外，方程(2 .7a)是齐次的，所以可采用分离变量法求解。

1. PDE: 将变量分离形式解 $u(r,t)=T(t)F(r)$ 代入方程(2 .7a)，可得：

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) & (2\ .8a) \\ r^2F''(r) + rF'(r) + (\lambda r^2 - 4)F(r) = 0 & (2\ .8b) \end{cases}$$

2. BC: 将 $u(r,t)=T(t)F(r)$ 代入方程(2 .7b)，可得：$|F(0)|<+\infty$、$F(1)=0$，结合方程(2 .8b)可得特征值问题：

$$\begin{cases} r^2F''(r) + rF'(r) + (\lambda r^2 - 4)F(r) = 0 & (2\ .9a) \\ |F(0)| < +\infty,\ F(1) = 0 & (2\ .9b) \end{cases}$$

依赖于 λ 的取值，分别考虑如下：

* $\lambda<0\,(k=\sqrt{-\lambda})$，$F(r)=\alpha I_2(kr)+\beta K_2(kr)$，由于 $K_2(kr)$ 在 $r=0$ 处不满足自然边界条件，故 $\beta=0$；又因为 $I_2(k)\neq 0$，所以 $\alpha=0$。
* $\lambda=0$，$F(r)=\alpha r^2+\beta r^{-2}$，由于 r^{-2} 在 $r=0$ 处不满足自然边界条件，故 $\beta=0$；又因为 r^2 在 $r=1$ 处不为 0，所以 $\alpha=0$。
* $\lambda>0\,(k=\sqrt{\lambda})$，$F(r)=\alpha J_2(kr)+\beta Y_2(kr)$，由于 $Y_2(kr)$ 在 $r=0$ 处不满足自然边界条件，故 $\beta=0$；由 $F(1)=\alpha J_2(k)=0$ 可知，当 $k=\mu_n$（μ_n 为 $J_2(x)$ 的第 n 个正零点）时才有非零解。

因此，特征值为 $\lambda_n=(\mu_n)^2$，特征函数为 $F_n(r)=\alpha_n J_2(\mu_n r)$；将 $\lambda=\lambda_n$ 代入方程(2 .8a)，可得 $T_n(t)=c_n e^{-(a\mu_n)^2 t}$。于是有通解：

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(a\mu_n)^2 t} J_2(\mu_n r) \qquad (2\ .10)$$

3. IC：将通解(2 .10)代入初始条件(2 .7c)，可得

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_2(\mu_n r) = 1 - r^2 \qquad (2\ .11)$$

[1]对虚宗量 Bessel 函数，只要求了解。

由于特征方程(2 .9a)并非 Sturm-Liouville 方程，但在方程(2 .9a)两端除以 r 就可以转换为 Sturm-Liouville 方程。由此可知权函数 $\rho(r) = r$，因此可得到系数 c_n 的计算公式：

$$c_n = \frac{\int_0^1 rJ_2(\mu_n r)(1 - r^2)dr}{\int_0^1 r[J_2(\mu_n r)]^2 dr} \tag{2 .12}$$