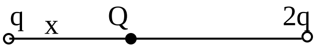
《电磁学》作业一、二答案

1.1-7 两个点电荷带电 2q 和 q，相距 l，第三个点电荷放在何处所受的合力为零？

解：设所放的点电荷电量为 Q。若 Q 与 q 同号，则三者互相排斥，不可能达到平衡；故 Q 只能与 q 异号。当 Q 在 2q 和 q 联线之外的任何地方，也不可能达到平衡。由此可知，只有 Q 与 q 异号，且处于两点荷之间的联线上，才有可能达到平衡。设 Q 到 q 的距离为 x.

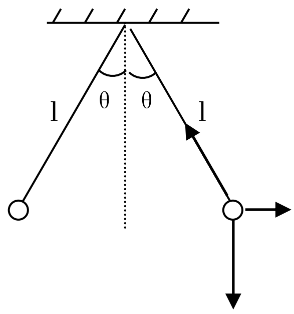


$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qq}{(l-x)^2}=0$$

$$x=(\sqrt{2}-1)l$$

1.1-10 两小球质量都是 m，都用长为 l 的细线挂在同一点，若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为 2θ。设小球的半径都可以略去不计，求每个小球上的电量。

解：小球静止时，作用其上的库仑力和重力在垂直于悬线方向上的分量必定相等。



$$T\cos\theta=mg$$

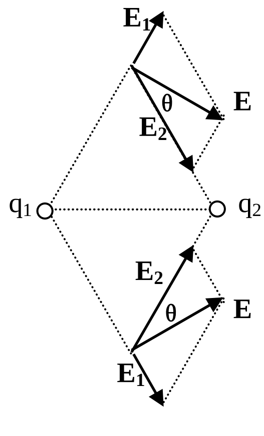
$$T\sin\theta=F_e$$

$$F_e=mg\tan\theta$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2}=mg\tan\theta$$

$$q=\pm 4l\sin\theta\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\tan\theta}$$

1.2-5 两个点电荷，q_1=+8 微库仑，q_2=-16 微库仑（1 微库仑=10^{-6}库仑），相距 20 厘米。求离它们都是 20 厘米处的电场强度。



$$E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=1.8\times10^6(N/C)$$

$$E_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}=3.6\times10^6(N/C)$$

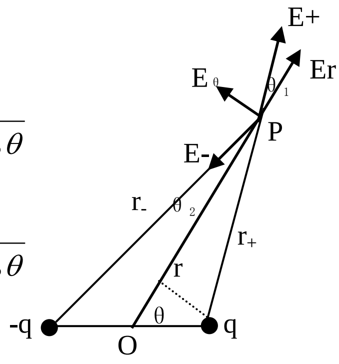
解：$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

$$E=\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos60^0}=3.1\times10^6(N/C)$$

$$\theta=\arcsin(\frac{E_1}{E}\sin60^0)=\arcsin(\frac{1}{2})=30^0$$

1.2-6 如图所示，一电偶极子的电偶极矩 P=ql.P 点到偶极子中心 O 的距离为 r ,r 与 l 的夹角为。在 r>>l 时，求 P 点的电场强度 E 在 r=OP 方向的分量 E_r 和垂直于 r 方向上的分量 E_θ。

解：



$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+(\frac{l}{2})^2 - rl\cos\theta} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 - rl\cos\theta}$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+(\frac{l}{2})^2 + rl\cos\theta} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + rl\cos\theta}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$E_r = E_{+r} + E_{-r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3}$$

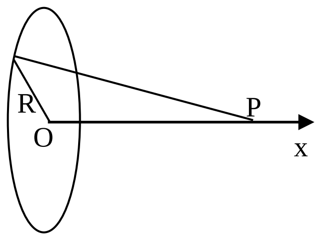
$$E_\theta = E_{+\theta} + E_{-\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} + \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}$$

其中 $\cos\theta_1 = \dfrac{r - \frac{l}{2}\cos\theta}{r_+}$ $\qquad \sin\theta_1 = \dfrac{\frac{l}{2}\sin\theta}{r_+}$

$os\theta_2 = \dfrac{r + \frac{l}{2}\cos\theta}{r_-}$ $\qquad \sin\theta_2 = \dfrac{\frac{l}{2}\sin\theta}{r_-}$

1.2-12 如图所示，一半径为 R 的均匀带电圆环，电荷总量为 q。（1）求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 E；（2）画出 E—x 曲线；（3）轴线上什么地方场强最大？其值是多少？

解：（1）由对称性可知，所求场强 E 的方向平行于圆环的轴线

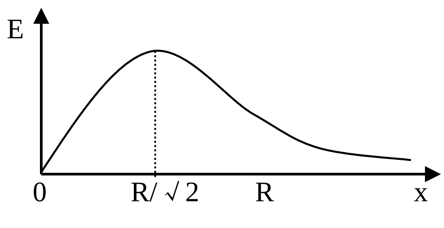


$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+R^2} = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 R}\frac{1}{x^2+R^2}dl$$

$$E = \oint dE\cos\theta = \oint \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 R}\frac{1}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}dl$$

$$= \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 R}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

（2）由场强表达式得到 E-X 曲线如图所示



（3）求极大值：

$$\frac{dE}{dx}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}=0$$

当$r=R/\sqrt{2}$处E有极值

$$E_m=\frac{qR/\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(R^2/2+R^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{3}q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\because \frac{d^2E}{dx^2}=-\frac{3qx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{7/2}}\xrightarrow{\text{当}r=R/\sqrt{2}\text{时}}\frac{d^2E}{dx^2}<0$$

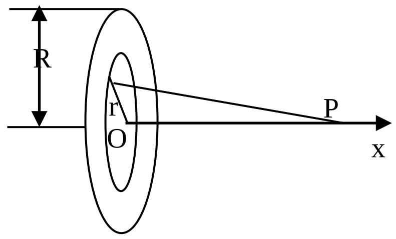
$\therefore E_m$为极大值

$$E_{\max}=\frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

1.2-13 半径为 R 的圆面上均匀带电，电荷面密度为σ_e，（1）求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强；（2）在保持σ_e不变的情况下，当 R→0 和 R→∞时结果各如何？（3）在保持总电荷 Q=$\pi R^2\sigma_e$不变的情况下，当 R→0 和 R→∞时结果各如何？

解：（1）由对称性可知，场强 E 沿轴线方向

利用上题结果



$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma_e 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma_e x}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E=\int_0^R dE=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$$

（2）保持σ_e不变时，

$$R\to 0\text{时},E=0;R\to\infty\text{时},E=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$$

（3）保持总电量不变时，

$$E=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$$

$$R\to 0\text{时},E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2};R\to\infty\text{时},E=0$$

$$\text{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{x\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right]=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}[1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}] \qquad \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{R}{x})^2}}=[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2+\cdots]$$