《电磁学》作业八答案

2.4-3 在相对介电常数为 ε_r 的无限大的均匀介质中，有一半径为 R 的导体球带电荷 Q。求电场的能量。

解法一： 用孤立导体球电容内的储能公式

孤立导体球电容：$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R$

电场的能量：$W_e = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$

解法二： 由介质中的高斯定理求得： $D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$ $\quad E = \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$ （ r>R）

电能密度：$w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}$

电场的能量：$W_e = \int_V w_e dV = \int_R^\infty \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4} 4\pi r^2 dr = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$

2.4-4 半径为 2cm 的导体球外套有一个与它同心的电中性的导体球壳，壳的内外半径分别为 4cm 和 5cm，球与壳间是空气。壳外也是空气，当内球的电荷量为 3×10^{-8} C 时，（1）这个系统储存了多少电能？（2）如果用导线把壳与球连在一起，结果如何？

解:

解法一：(1) 依题意可知：内球表面带电为 Q；外球内表面带电－Q，外球外表面带电为 Q，可看作球形电容器和孤立导体球电容串联，用电容内的储能公式

$R_1 = 2cm \qquad R_2 = 4cm \qquad R_3 = 5cm \qquad Q = 3\times10^{-8}C$

$C_{球} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad C_{孤} = 4\pi\varepsilon_0 R_3$

$W_e = W_{e1} + W_{e2} = \dfrac{Q^2}{2C_{球}} + \dfrac{Q^2}{2C_{孤}} = 1.01\times10^{-4} + 0.81\times10^{-4} = 1.82\times10^{-4}(J)$

（2）用导线把壳与球连在一起 $\quad W_e = W_{e2} = \dfrac{Q^2}{2C} = 8.1\times10^{-5}(J)$

2.4-4 解法二：(1) 由高斯定理： $E = 0$ (r<2cm , 4cm<r<5cm)

$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ （ 2cm<r<4cm， r>5cm） 电能密度：$w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} = \int_{V_1} w_e dV + \int_{V_2} w_e dV = \int_{2cm}^{4cm} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr + \int_{5cm}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 \times 0.04} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 \times 0.05} = 1.01\times10^{-4} + 0.81\times10^{-4} = 1.82\times10^{-4}(J)$$

(2) 用导线把壳与球连在一起，2cm<r<4cm 区间的电场消失，能量消失，只留下 r>5cm 区间的电场能量

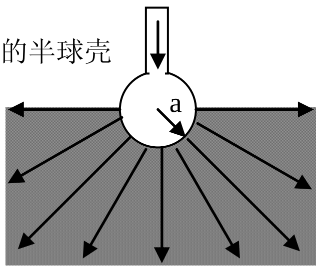
$$W_e = W_{e2} = \int_{V_2} w_e dV = \int_{5cm}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 \times 0.05} = 8.1\times10^{-5}(J)$$

3.1-4 有一种康铜丝的横截面积为 0.10mm^2，电阻率为 ρ =49×10^{-8} Ω · m。用它绕制一个 6.0 Ω的电阻，需要多长？

解：$R = \rho \dfrac{l}{S}$　　　$l = \dfrac{RS}{\rho} = 1.22m$

3.1-8 把大地可看成均匀的导电介质，其电阻率为 ρ 。用一半径为 a 的球形电极与大地表面相接，半个球体埋在地面下，电极本身的电阻可以忽略。试证明此电极的接地电阻为

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$



证（方法一）：将大地分割为许多同心的薄半球壳， 取与球心相距为 r，厚度为 dr 的半球壳

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r^2} \to R = \int_a^\infty \frac{\rho dr}{2\pi r^2} = \frac{\rho}{2\pi a}$$

证（方法二）：假设球形电极内的电流强度为 I

电流密度：$j = \dfrac{I}{2\pi r^2}$

由欧姆定率的微分形式：$\vec{j} = \sigma \vec{E}$　　　$E = \dfrac{j}{\sigma} = \dfrac{I\rho}{2\pi r^2}$

电压：$U = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^\infty \dfrac{I\rho}{2\pi r^2} dr = \dfrac{\rho I}{2\pi a}$

接地电阻：$R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\rho}{2\pi a}$